

**Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG**  
**Instituto de Ciências Exatas - ICEx**  
**Programa de Pós Graduação em Física**

**Fixando Arbitrariedades em Teoria Quântica de Campos**

Alexandre Rodrigues Vieira

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS  
GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Doutor em Física.

Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos

Agosto de 2016

# Agradecimentos

-Ao Marcos e à Carol pela orientação, pela amizade e pela motivação.

-À minha noiva Cláudia pelo apoio, pela compreensão, pelos momentos felizes e tristes do dia a dia e por estar sempre ao meu lado.

-À minha mãe Márcia, ao meu pai Paulo e aos meus irmãos André e Thamires.

-Ao professor Alan Kostelecký por ter me recebido em Bloomington, ter me orientado durante o período sanduíche do doutorado e pelas oportunidades que ele me proporcionou. Ao professor Enrico Lunghi pela oportunidade de trabalharmos no mesmo projeto.

-Aos amigos e colegas de trabalho do grupo de Teoria Quântica de Campos - Adriano, Arthur, Gustavo Gazzola, Helder, Jean, Joilson e Yuri - pela boa convivência.

-Aos amigos e colegas que tive oportunidade de conhecer em Bloomington, pela boa convivência e por tudo que aprendi com eles.

-À minha amiga Cíntia pela leitura da primeira versão desta tese.

-Aos amigos e colegas do corredor do doutorado pela boa convivência.

-À Shirley, ao pessoal da biblioteca e da secretaria da pós pela prestatividade no atendimento.

-Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, discutimos sobre como fixar termos arbitrários e dependentes de regularização em correções quânticas de amplitudes. Em alguns contextos, estas arbitrariedades podem ser fixadas por simetrias da teoria ou condições físicas, como identidades de Ward ou invariância de rótulo. Por outro lado, em outros exemplos veremos que as simetrias não são suficientes para fixar tais arbitrariedades e, como consequência, a amplitude em questão pode ser arbitrária e dependente de regularização, apesar de ser finita. Exemplos apresentados incluem Modelo Padrão e teorias além do Modelo Padrão.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Decaimento do Higgs em dois fótons e o problema da Hierarquia</b>	<b>4</b>
2.1	O Decaimento do Higgs em dois fótons . . . . .	4
2.2	O Decaimento do Higgs em dois fótons está relacionado com o problema da Hierarquia? . . . . .	6
2.3	Proposta de abordagem do problema da Hierarquia . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Arbitrariedade em termos do tipo Chern-Simons induzidos</b>	<b>11</b>
3.1	A indução de um termo do tipo Chern-Simons na QED estendida . . . . .	12
3.2	A indução de um termo do tipo Chern-Simons em uma teoria fermiônica no espaço curvo . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Anomalia Conforme a 1-loop</b>	<b>18</b>
4.1	Visão geral da anomalia conforme . . . . .	19
4.2	Correção a 1-loop para o propagador do gráviton e a anomalia conforme . . . . .	20
4.3	Arbitrariedade na anomalia conforme . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Invariância de rótulo na Eletrodinâmica Quântica Estendida</b>	<b>25</b>
5.1	O modelo e as amplitudes . . . . .	26
5.2	Identidades de Ward . . . . .	29
5.2.1	Função de 2-pontos . . . . .	29
5.2.2	Função de 3-pontos . . . . .	30
5.3	A relação entre rótulo e simetria de calibre . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Invariância de rótulo e democracia em teorias de calibre quirais abelianas</b>	<b>35</b>
6.1	O modelo quiral de Schwinger . . . . .	35
6.2	Revisitando a anomalia de Adler-Bardeen-Bell-Jackiw (ABJ) . . . . .	38
6.3	A relação entre rótulo e simetria de calibre em teorias quirais . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Integrais</b>	<b>46</b>
A.1	Integrais das amplitudes do Capítulo 3 . . . . .	46
A.2	Integrais das amplitudes do Capítulo 4 . . . . .	47
A.3	Integrais das amplitudes do Capítulo 5 . . . . .	48
A.4	Integrais das amplitudes do Capítulo 6 . . . . .	49

<i>SUMÁRIO</i>	III
<b>B Produção Bibliográfica</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde o início de seu desenvolvimento a Teoria Quântica de Campos (TQC) parecia ser capaz de descrever satisfatoriamente a natureza em sua forma mais elementar. Basta citarmos, por exemplo, a teoria de Fermi do decaimento do nêutron e a teoria de Yukawa, capaz de descrever a força forte a nível nuclear. Com o conseqüente desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED) e do Modelo Padrão (SM), a TQC tornou-se talvez a estrutura teórica de maior sucesso na Física. Podemos citar como exemplos as predições teóricas das seções de choque e as acuradas predições dos momentos magnéticos anômalos dos elétrons e múons.

Contudo, vimos ao longo desse desenvolvimento que nos deparamos com infinitos, que pareceram a princípio inviabilizar estas teorias. A solução exata para TQC's com campos interagentes não é conhecida e, por isso, esta solução é obtida perturbativamente. Quando consideramos correções para a ordem zero, ou nível árvore, quantidades divergentes aparecem neste cálculo perturbativo. Elas se manifestam de duas formas, as divergências infra-vermelhas e as ultra-violetas. As primeiras aparecem em teorias não massivas e são conseqüências de idealizações do mundo real, como considerar que o espaço tempo é infinito. Por outro lado, as divergências ultra-violetas são intrínsecas das TQC's e um programa de regularização e renormalização é necessário para dar significado para estas teorias no limite ultra-violeta.

Uma das primeiras propostas desse programa consistia em considerar um "corte" (*cutoff*)  $\Lambda$  nas integrais de Feynman para parametrizar a divergência na esperança de que a dependência em  $\Lambda$  desaparecesse no processo de renormalização. Este procedimento tornou-se, todavia, inviável em teorias de calibre, que a propósito, são nada menos que as teorias que descrevem as interações fundamentais da natureza. Foi então que surgiu, no início dos anos 70, a chamada regularização dimensional, método que parametrizava as divergências tornando contínua as dimensões do espaço-tempo. Este método teve grande sucesso em teorias de calibre, pois preservava a simetria de calibre além do nível árvore. O método foi então crucial na prova da renormalização do Modelo Padrão [1] e da liberdade assintótica e escravidão infra-vermelha [2], ambos os trabalhos vencedores do prêmio Nobel de Física.

Contudo, após o surgimento de outras teorias, o método de regularização dimensional tornou-se inviável, por exemplo, em teorias super-simétricas e modelos com violação de simetria de Lorentz e CPT. Conforme mostra a literatura, cada programa de regularização explícito tem uma desvantagem: a regularização por *cutoff*, por exemplo, quebra a simetria de calibre enquanto a regularização na rede (*lattice regularization*) quebra a simetria de Lorentz pois discretiza o espaço-tempo. A regularização dimensional, por sua vez, quebra super-simetria e causa ambiguidades em teorias com objetos de dimensão específica. Estas desvantagens tornam o programa de renormalização mais trabalhoso devido à introdução de contra-termos para remover quebras espúrias de simetria.

No final dos anos 90, foi proposto o método de regularização implícita [3]. Este método tem a vantagem de não quebrar nenhuma simetria da teoria e de não avaliar termos dependentes de regularização. Ele parte da única premissa de que um regulador implícito  $\Lambda$  (que não dizemos qual é) existe para que faça sentido manipular o integrando das integrais de Feynman utilizando, por exemplo, a seguinte identidade

$$\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}. \quad (1.1)$$

Com a identidade (1.1) conseguimos extrair parte finita das amplitudes divergentes sem introduzir um regulador, que geralmente quebra simetrias da teoria. Esta identidade pode ser implementada recursivamente em uma amplitude até que a parte divergente seja separada da parte finita. Podemos observar, o porquê de isto acontecer no segundo termo de (1.1), que possui grau superficial de divergência menor do que o do primeiro termo. A parte divergente das amplitudes é escrita na forma de integrais divergentes básicas<sup>1</sup>

$$I_{log}^{\mu_1 \dots \mu_{2n}}(m^2) \equiv \int_k \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{2n}}}{(k^2 - m^2)^{2+n}} \quad (1.2)$$

e

$$I_{quad}^{\mu_1 \dots \mu_{2n}}(m^2) \equiv \int_k \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{2n}}}{(k^2 - m^2)^{1+n}} \quad (1.3)$$

que, por sua vez, estão relacionadas aos termos de superfície (TS), que se apresentam na forma de diferença de infinitos

$$\Upsilon_{2w}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} I_{2w}(m^2) - 2(2-w) I_{2w}^{\mu\nu}(m^2) \equiv v_{2w} \eta^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

$$\Xi_{2w}^{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta\}} I_{2w}(m^2) - 4(3-w)(2-w) I_{2w}^{\mu\nu\alpha\beta}(m^2) \equiv \xi_{2w} \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta\}}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{2w}^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} &= \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta\}} I_{2w}(m^2) - 8(4-w)(3-w)(2-w) I_{2w}^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta}(m^2) \equiv \\ &\equiv \sigma_{2w} \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta\}}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $2w$  representa o grau de divergência, substituimos *log* e *quad* por 0 e 2, respectivamente, por conveniência.

Essas diferenças de integrais infinitas são chamadas de termos de superfície porque podem ser escritas

---

<sup>1</sup>Utilizamos a notação  $\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ .

na forma de integrais de uma quadri-divergência

$$v_{2w}\eta^{\mu\nu} = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^{2-w}}, \quad (1.7)$$

$$(\xi_{2w} - v_{2w})\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\}} = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{2(2-w)k^\mu k^\alpha k^\beta}{(k^2 - m^2)^{3-w}}, \quad (1.8)$$

e

$$(\sigma_{2w} - \xi_{2w})\eta^{\{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta\}} = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{4(3-w)(2-w)k^\mu k^\alpha k^\beta k^\gamma k^\delta}{(k^2 - m^2)^{4-w}}. \quad (1.9)$$

Os TS são dependentes de regularização e são às vezes responsáveis por quebras de simetria da teoria. Do ponto de vista matemático, estes termos são arbitrários porque o resultado de uma diferença de infinitos pode ser qualquer número. Se estes termos sobram na parte finita da amplitude, ela pode ser arbitrária e dependente de regularização, apesar de ser finita, como veremos ao longo deste trabalho. Uma vez que a parte finita é mensurável, ela não deve ser arbitrária e os TS são fixados por uma simetria da teoria (via uma identidade de Ward a ser satisfeita, por exemplo) ou alguma condição física.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 2, apresentaremos o decaimento do Higgs em dois fótons e o problema da Hierarquia como primeiros exemplos de como fixar arbitrariedades via simetrias a nível quântico. No capítulo 3, estudaremos a indução radiativa de termos do tipo Chern-Simons e veremos que, neste caso, não temos razões suficientes para fixar todas as arbitrariedades. Neste exemplo, este termo induzido é indeterminado e conseguimos explicar o porquê dos diferentes resultados encontrados na literatura para ele. No capítulo 4, veremos outro exemplo como este, onde não temos condições físicas suficientes para fixar as arbitrariedades, no termo  $\square R$  da anomalia conforme. No capítulo 5, estudaremos se a simetria de calibre da QED estendida permanece válida a nível quântico. Para responder esta questão, precisamos exigir a condição física de invariância de rótulo e, diferentemente dos exemplos dos dois capítulos anteriores, ela é capaz de fixar todos os TS. O exemplo do capítulo 5, em particular, é um dos resultados centrais deste trabalho, pois com ele conseguimos estabelecer uma relação diagramática entre simetria de calibre e invariância de rótulo: uma só é garantida se e somente se a outra também for. Esta conclusão não se restringe apenas a QED estendida. No capítulo 6, apresentaremos esta relação diagramática entre calibre e rótulo para teorias de calibre quirais abelianas, realizando a prova desta relação a 1- e a 2- *loops* e mostrando como estendê-la para ordem arbitrária. Neste mesmo capítulo, também apresentaremos outro dos resultados centrais deste trabalho que é o fato da anomalia quiral (ou anomalia ABJ, ou anomalia do triângulo) poder ser independente de rótulo. Ao contrário do que se é apresentado na literatura, esta anomalia não precisa ser calculada para o rótulo específico que satisfaça as identidades de Ward da simetria de calibre. Nos capítulos 5 e 6, também apresentaremos exemplos de como tratar ambiguidades envolvendo o traço de matrizes de Dirac com a matriz  $\gamma_5$  em integrais divergentes. Por último, apresentaremos conclusões e perspectivas do trabalho no capítulo 7.

## Capítulo 2

# O Decaimento do Higgs em dois fótons e o problema da Hierarquia

### 2.1 O Decaimento do Higgs em dois fótons

O decaimento do Higgs em dois fótons foi um dos canais de decaimento utilizados na recente confirmação da existência da partícula de Higgs. Este fato deu um maior enfoque à predição teórica da taxa de decaimento deste processo e, recentemente, essa predição [4] foi questionada em [5]. A razão para esta aparente controvérsia está relacionada com o tratamento de infinitos em Teorias Quânticas de Campos. Uma vez que o Higgs não acopla diretamente com o fóton, este processo, em ordem mais baixa, ocorre a um *loop* (as contribuições relevantes correspondem aos *loops* com bósons  $W^\pm$  e quark top). Em [5], os autores usam esse argumento para dizer que nenhum método de regularização precisa ser aplicado, *i. e.*, uma vez que não existe um acoplamento direto entre o Higgs e o fóton, não existe um termo na lagrangiana de tal forma para renormalizar uma eventual divergência advinda da amplitude. Por isso, esta deve ser finita e, aparentemente, não precisa ser regularizada. Não obstante, vários trabalhos que vieram após [5], calcularam este decaimento em diferentes métodos de regularização: regularização dimensional [6], Regularização na Rede [7] e *Loop Regularization* [8]. Todos estes métodos concordaram com o resultado previamente conhecido [4]. Por outro lado, o cálculo foi também realizado em regularização por *Cutoff* [9, 10] e este concorda com [5].

Esta aparente controvérsia foi resolvida em [11, 12]. Neste trabalho o cálculo do *loop* foi realizado em Regularização Implícita. Como apresentado antes, a vantagem deste método é que ele não avalia termos dependentes de regularização, responsáveis por essas ambiguidades e por quebras de simetrias do modelo. Para sermos mais específicos, vamos rerepresentar os resultados destes trabalhos neste capítulo.

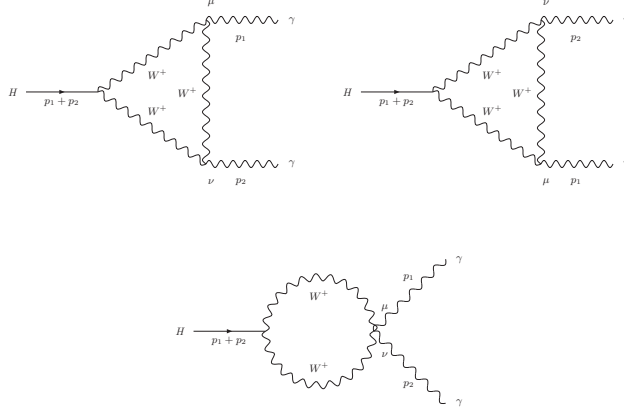


Figura 2.1: Diagramas que contribuem para o decaimento do Higgs em dois fótons.

Vamos considerar os diagramas com *loops* de bósons  $W^\pm$ , figura 2.1. Após uma simplificação, a amplitude deste decaimento pode ser escrita da seguinte forma:

$$M = ie^2 g M_w \left[ M_{\mu\nu}^{(a)} + M_{\mu\nu}^{(b)} + M_{\mu\nu}^{(c)} \right] (\epsilon_1^\mu)^* (\epsilon_2^\nu)^* + (p_1 \leftrightarrow p_2, \mu \leftrightarrow \nu), \quad (2.1)$$

onde

$$M_{\mu\nu}^{(a)} = -\frac{4}{M_w^2} \left[ \eta_{\mu\nu} (p_1)^\alpha (p_2)^\beta I_{\alpha\beta}^{(3)} + (p_1 \cdot p_2) I_{\mu\nu}^{(3)} - (p_1)_\nu (p_2)^\alpha I_{\mu\alpha}^{(3)} - (p_2)_\mu (p_1)^\alpha I_{\nu\alpha}^{(3)} \right] + \frac{2}{M_w^2} \left[ \eta_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2) - (p_2)_\mu (p_1)_\nu \right] I_2^{(3)}, \quad (2.2)$$

$$M_{\mu\nu}^{(b)} = \int_k \frac{3(\eta_{\mu\nu} k^2 - 4k_\mu k_\nu)}{(q_1^2 - M_w^2)(q_2^2 - M_w^2)(q_3^2 - M_w^2)}, \quad (2.3)$$

$$M_{\mu\nu}^{(c)} = 6\eta_{\mu\nu} \left[ (p_1 \cdot p_2) I_0^{(3)} - (p_1)^\alpha I_\alpha^{(3)} - \frac{M_w^2}{2} I_0^{(3)} \right] + 6 \left[ 2(p_1)_\nu I_\mu^{(3)} - (p_2)_\mu (p_1)_\nu I_0^{(3)} \right], \quad (2.4)$$

$$I_{0,2,\mu,\nu}^{(3)} = \int_k \frac{1, k^2, k_\mu, k_\mu k_\nu}{(q_1^2 - M_w^2)(q_2^2 - M_w^2)(q_3^2 - M_w^2)}, \quad (2.5)$$

$M_w$ ,  $\epsilon_i^\mu$ ,  $e$  e  $g$  são a massa dos bósons  $W^\pm$ , o vetor de polarização dos fótons, a constante de acoplamento  $U(1)$  e  $SU(2)$ , respectivamente. O momento de integração está definido em  $q_i \equiv k + \chi_i$ , onde  $\chi_i$  é um rótulo qualquer que pode ser calculado via conservação de momento em cada vértice.

Aplicando a regularização implícita para tratar as integrais divergentes das equações (2.2) e (2.3), obtemos o seguinte resultado<sup>1</sup>:

$$M_{\mu\nu}^{(a)} = \frac{[(p_2)_\mu (p_1)_\nu - \eta_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)]}{M_w^2} \left[ \frac{i}{16\pi^2} - 2\nu_0 \right], \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>Definimos  $\tau = \frac{M_h^2}{4M_w^2}$  e

$$f(\tau) = \begin{cases} \arcsin^2(\sqrt{\tau}) & \text{para } \tau \leq 1, \\ -\frac{1}{4} \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^{-1}}}{1 - \sqrt{1 - \tau^{-1}}} - i\pi \right]^2 & \text{para } \tau > 1. \end{cases}$$

$$M_{\mu\nu}^{(b)} + M_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{i}{16\pi^2 M_w^2} [(p_2)_\mu (p_1)_\nu - \eta_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)] \times \\ \times \left[ \frac{3\tau^{-1}}{2} + \frac{3(2\tau^{-1} - \tau^{-2})f(\tau)}{2} \right] + \eta_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2) \left( \frac{3\tau^{-1}}{2M_w^2} v_0 \right). \quad (2.7)$$

Podemos identificar nas equações (2.6) e (2.7) qual a fonte das contradições entre os trabalhos citados anteriormente. Como sabemos,  $v_0$  é o termo de superfície que corresponde a seguinte equação:

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} v_0 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{(k^2 - M_w^2)^2} = \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_w^2)^2} - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - M_w^2)^3}. \quad (2.8)$$

Obviamente, o resultado da equação (2.8) é arbitrário, do ponto de vista matemático, pois não podemos atribuir um único valor a uma diferença de dois infinitos, neste caso, a diferença entre as duas integrais logaritmicamente divergentes. Do ponto de vista de regularizações, cada método dá um resultado diferente para termos desta forma. Em regularização dimensional,  $v_0 = 0$  e em *Cutoff*  $v_0 = \frac{i}{32\pi^2}$  (isto faz a contribuição (2.6) ser nula, concordando com o resultado de [5]), por exemplo.

Como decidir qual dos resultados é físico? Em [13], o autor comenta sobre estes termos de superfície em diferentes contextos em que eles aparecem. A sugestão do autor é que estes termos arbitrários sejam determinados por simetrias do modelo ou fenomenologia. Este ponto de vista é bastante razoável, uma vez que o resultado finito da amplitude, medido nos aceleradores, não deve ser arbitrário ou depender da maneira que tratamos os infinitos, ou seja, do método de regularização. Contudo, em alguns casos, essa arbitrariedade não pode ser fixada, como veremos no exemplo do próximo capítulo. No caso do decaimento do Higgs em dois fótons, se exigirmos que o resultado seja invariante de calibre, podemos fixar essa arbitrariedade. Se exigirmos  $p_1^\mu p_2^\nu M_{\mu\nu} = 0$  na equação (2.6), não conseguimos fixar o termo de superfície uma vez que esta parte da amplitude já é transversa. Contudo, exigindo  $p_1^\mu p_2^\nu M_{\mu\nu} = 0$  na equação (2.7), vemos que o segundo termo da soma sobra, de forma que  $v_0$  deve ser nulo para satisfazer a simetria de calibre. Ou seja, neste caso a diferença entre infinitos é determinada por uma simetria do modelo. Esta conclusão corrobora os resultados de [4] e [6]-[8].

## 2.2 O Decaimento do Higgs em dois fótons está relacionado com o problema da Hierarquia?

Contradições entre resultados obtidos em diferentes métodos de regularização podem levar a interpretações físicas equivocadas. Ainda sobre o decaimento do Higgs em dois fótons, podemos citar [14]. Uma vez que acredita-se que o Modelo Padrão não é uma teoria completa, esses autores usam deste argumento para defender a ideia de que o decaimento  $H \rightarrow \gamma\gamma$  só é invariante de calibre quando as contribuições de todos os diagramas possíveis são somadas, incluindo os diagramas de um modelo mais completo como o Modelo Padrão Super Simétrico Mínimo (MSSM). Esta justificativa, aparentemente, permite-os dizer que o termo que viola calibre da seção anterior,  $v_0$ , que é dependente de regularização, seria cancelado se exigíssemos que a soma desses diagramas fosse nula. Esta é uma analogia com anomalia AVV do Modelo Padrão, onde cada digrama fermiônico individual apresenta uma quebra de simetria, mas a soma de todos eles igualada a zero restringe o conteúdo de partículas da teoria.

Em [14], os autores ainda vão além e afirmam que a amplitude  $H \rightarrow \gamma\gamma$  está relacionada com divergências quadráticas, o que traria implicações para o problema da Hierarquia. Para entender isto, vamos

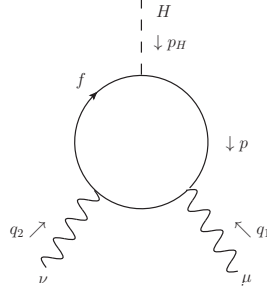


Figura 2.2: Contribuição de *loop* fermiônico para  $H \rightarrow \gamma\gamma$ . Existe outro diagrama obtido na troca  $\mu \leftrightarrow \nu$  e  $q_1 \leftrightarrow q_2$ .

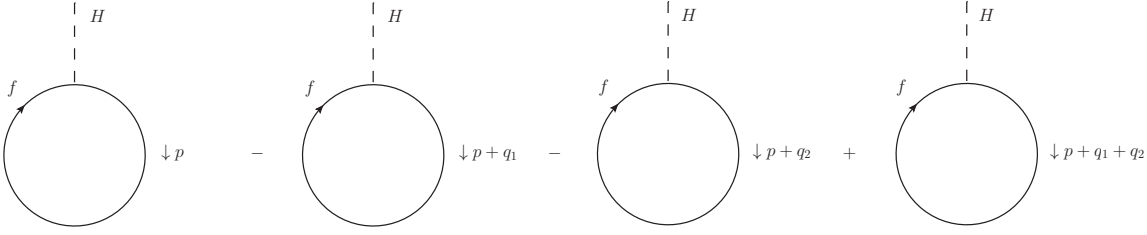


Figura 2.3: Representação digramática da expressão obtida aplicando a identidade de Ward à contribuição fermiônica para  $H \rightarrow \gamma\gamma$ .

considerar o diagrama com *loop* fermiônico do decaimento  $H \rightarrow \gamma\gamma$ , figura 2.2. É possível mostrar [14] que a amplitude contraída com os momentos externos está relacionada com a diferença de *tadpoles*, figura 2.3:

$$iM_{\mu\nu}^f q_1^\mu q_2^\nu = \frac{-\lambda_f}{\sqrt{2}} e_f^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} - m_f} - \frac{1}{\not{p} + \not{q}_1 - m_f} - \frac{1}{\not{p} + \not{q}_2 - m_f} + \frac{1}{\not{p} + \not{q}_1 + \not{q}_2 - m_f} \right]. \quad (2.9)$$

Como no caso da seção anterior, o diagrama de *loop* fermiônico também depende do termo indeterminado  $v_0$ . Utilizando o resultado deste diagrama, a identidade de Ward pode ser escrita como :

$$\begin{aligned} iM_{\mu\nu}^f \Big|_{q_{1,2}=0} q_1^\mu q_2^\nu &= q_1^\mu q_2^\nu \frac{-\lambda_f}{\sqrt{2}} e_f^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\not{p} - m_f} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - m_f} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m_f} + \mu \leftrightarrow \nu \right], \\ &= q_1^\mu q_2^\nu \frac{-\lambda_f}{\sqrt{2}} e_f^2 (8m_f) \left[ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\mu p_\nu}{(p^2 - m_f^2)^3} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{(p^2 - m_f^2)^2} \right], \\ &= q_1^\mu q_2^\nu \frac{-\lambda_f}{\sqrt{2}} e_f^2 (8m_f) (-\eta_{\mu\nu} v_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

As equações (2.9) e (2.10) sugerem que o termo arbitrário está relacionado com as divergências quadráticas. Desta forma, os autores propõem que se uma condição para o cancelamento da anomalia, que aparece devido ao termo dependente de regularização, for exigida, isto resultaria também no cancelamento das divergências quadráticas, responsáveis pelo problema da Hierarquia. Contudo, podemos mostrar que a diferença de *tadpoles* da equação (2.9) e figura 2.3, também resulta no mesmo termo arbitrário e, portanto,

não está relacionada com divergências quadráticas.

Para ver isto, vamos considerar a expansão

$$f(k+a) = f(k) + a_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f(k) + \frac{a_\sigma a_\rho}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} f(k) + \dots \quad (2.11)$$

Aplicando (2.11) para um integrando "shiftado", temos

$$\frac{1}{(k+a)^2 - m_f^2} = \frac{1}{k^2 - m_f^2} - 2a_\sigma \frac{k_\sigma}{(k^2 - m_f^2)^2} - a_\sigma a_\rho \frac{\partial}{\partial k_\rho} \frac{k_\sigma}{(k^2 - m_f^2)^2} + \dots \quad (2.12)$$

Portanto, utilizando as equações (2.8) e (2.12), a diferença de *tadpoles* dá

$$\int_k \frac{1}{(k+a)^2 - m_f^2} - \int_k \frac{1}{k^2 - m_f^2} = -a^2 v_0. \quad (2.13)$$

Consequentemente, podemos mostrar que a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$iM_{\mu\nu}^f \Big|_{q_{1,2}=0} q_1^\mu q_2^\nu = (8m_f) \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} e_f^2 (q_1 \cdot q_2) v_0. \quad (2.14)$$

Este resultado coincide com o da equação (2.10). Se exigirmos a simetria de calibre para fixar o termo arbitrário nesta equação, como fizemos na seção 2.1, concluímos que ele deve ser nulo. Podemos também exigir uma outra condição, a invariância de rótulo, na equação (2.13) e chegaremos na mesma conclusão. A invariância de rótulo assume que uma amplitude deve ser independente do rótulo utilizado para nomear os momentos do *loop*, por isso, a equação (2.13) é nula com essa condição.

## 2.3 Proposta de abordagem do problema da Hierarquia

As divergências quadráticas responsáveis pelo problema da Hierarquia estão relacionadas com uma outra arbitrariedade que não é uma diferença de divergências logarítmicas. Nesta seção mostraremos como ela aparece e como podemos fixá-la utilizando uma simetria.

As integrais divergentes básicas obedecem às seguintes relações:

$$\frac{\partial I_{log}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{-i}{(4\pi)^2 m^2}, \quad (2.15)$$

e

$$\frac{\partial I_{quad}(m^2)}{\partial m^2} = I_{log}(m^2). \quad (2.16)$$

Estas relações são obedecidas por qualquer método de regularização. Isto nos permite escrever uma parametrização para estas integrais divergentes que depende de uma escala  $\Lambda$ :

$$I_{log}(m^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + c_1 \right], \quad (2.17)$$

e

$$I_{quad}(m^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ c_2 \Lambda^2 + (1 + c_1) m^2 + m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right], \quad (2.18)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes adimensionais arbitrárias, ou seja, podem assumir qualquer valor pois derivando (2.17) e (2.18) em relação a  $m^2$ , obtemos (2.15) e (2.16).

A equação (2.18) nos diz que a arbitrariedade de um *tadpole* não está relacionada a uma diferença de divergências logarítmicas, como argumentado em [14], e sim a uma constante multiplicativa arbitrária  $c_2$ . Utilizando a eq. (1.4) e uma parametrização para a integral divergente quadrática,  $I_{quad}^{\mu\nu}(m^2)$ , podemos mostrar que:

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} v_2 \propto \eta^{\mu\nu} [(c_2 - c'_2)\Lambda^2 + (c_1 - c'_1)m^2], \quad (2.19)$$

onde  $c'_1$  e  $c'_2$  são constantes adimensionais arbitrárias. Ou seja, a arbitrariedade  $c_2$  está, de certa forma, relacionada à diferença de duas integrais quadraticamente divergentes.

Considerando os digramas do Modelo Padrão que contribuem para a correção a um *loop* para o propagador do Higgs e reduzindo as integrais das amplitudes às integrais divergentes básicas, podemos mostrar, considerando as equações (2.17) e (2.18), que a massa renormalizada do Higgs é dada por [15]:

$$m_H^2(\Lambda) = m^2 - \frac{3c_2}{8\pi^2 v^2} [m_Z^2 + 2m_W^2 + m^2 - 4m_t^2] \Lambda^2 + O\left(\ln \frac{\Lambda}{m}\right). \quad (2.20)$$

onde  $v$ ,  $m_W$ ,  $m_Z$ ,  $m$  e  $m_t$  são o valor esperado do vácuo e as massas nível árvore dos bósons  $W^\pm$ ,  $Z^0$ , Higgs e quark top, respectivamente.

Para fixar a constante arbitrária  $c_2$  vamos utilizar um argumento de simetria como feito nas seções anteriores para fixar o termo de superfície. A lagrangiana do setor de Higgs do Modelo Padrão é dada por:

$$\mathcal{L}_H(x) = [D^\mu \Phi(x)]^\dagger [D_\mu \Phi(x)] - \mu^2 \Phi(x)^\dagger \Phi(x) - \lambda [\Phi(x)^\dagger \Phi(x)]^2, \quad (2.21)$$

onde  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$  é o campo de Higgs,  $D_\mu$  é a derivada co-variante que o acopla aos campos de calibre e  $\mu^2 < 0$  é o parâmetro real que quebra espontaneamente a simetria de calibre  $SU(2) \times U(1)$  na simetria de calibre  $U(1)$ .

As transformações de escala

$$x' = e^{-\alpha} x, \quad (2.22)$$

e

$$\phi'(x) = e^{-\alpha d} \phi(e^{-\alpha} x), \quad (2.23)$$

deixam (2.21) invariante para  $\mu^2 = 0$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro de escala e  $d$  é a dimensão de escala do campo. O termo de massa quebra a lei de conservação relacionada a esta simetria pois ele é o único da lagrangiana que não possui dimensão de escala igual a quatro, *i. e.*, a massa não transforma de acordo com as regras (2.22) e (2.23). Portanto, o traço do tensor Energia-Momento,  $\Theta_\mu^\mu$ , a corrente conservada neste caso, é dado por

$$\Theta_\mu^\mu = m^2 \Phi(x)^\dagger \Phi(x), \quad (2.24)$$

onde  $m^2 = -2\mu^2$  é a massa nível árvore do Higgs. A equação acima nos permite dizer que existe uma

corrente conservada, a nível clássico, no limite de massa nula.

A renormalização do modelo faz as constantes de acoplamento dependerem da escala do Grupo de Renormalização (que chamaremos de  $\Lambda$ ). Como esta última também muda com uma transformação de escala

$$x' = e^{-\alpha}x \rightarrow \Lambda' = e^{\alpha}\Lambda, \quad (2.25)$$

isto leva a

$$\delta\mathcal{L}_H(m_H(\Lambda), \lambda(\Lambda)) = \alpha\{m_H^2(\Lambda)\gamma\Phi(x)^\dagger\Phi(x) + \beta_\lambda[\Phi(x)^\dagger\Phi(x)]^2\}, \quad (2.26)$$

onde  $m_H^2(\Lambda)$  e  $\lambda(\Lambda)$  são a massa do Higgs e constante de auto-acoplamento renormalizadas, respectivamente,

$$\gamma = \frac{\Lambda^2}{m_H^2(\Lambda)} \frac{\partial m_H^2(\Lambda^2)}{\partial \Lambda^2}, \quad (2.27)$$

e

$$\beta_\lambda = \Lambda \frac{\partial \lambda(\Lambda)}{\partial \Lambda}, \quad (2.28)$$

são as funções gama e beta do Grupo de Renormalização. Logo, a corrente de dilatação, quebrada devido a termo de massa e correções quânticas, é dada por

$$\Theta_\mu^\mu = (m^2 + m_H^2(\Lambda)\gamma)\Phi(x)^\dagger\Phi(x) - \beta_\lambda[\Phi(x)^\dagger\Phi(x)]^2. \quad (2.29)$$

Usando (2.27) e (2.20), temos

$$m_H^2(\Lambda)\gamma = -\frac{3c_2}{8\pi^2 v^2}[m_Z^2 + 2m_W^2 + m^2 - 4m_t^2]\Lambda^2 + O(m^2). \quad (2.30)$$

Substituímos (2.30) em (2.29). Se tentarmos agora restaurar o limite clássico, tomando  $m \rightarrow 0$  e  $\beta_\lambda \rightarrow 0$  na equação (2.29), o único termo que estraga a restauração da conservação da corrente de dilatação é

$$\Theta_\mu^\mu = \frac{-3c_2}{8\pi^2 v^2}[m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2]\Lambda^2\Phi(x)^\dagger\Phi(x). \quad (2.31)$$

Isto significa que não recuperamos o limite clássico quando tomamos o limite clássico. Por isso, em uma versão não-super-simétrica do Modelo Padrão, para recuperarmos o limite clássico ( $\Theta_\mu^\mu = 0$ ), devemos escolher  $c_2 = 0$ .

Este argumento da consistência da quebra da simetria de escala nos permite fixar a arbitrariedade da divergência quadrática. É válido notar que este argumento da consistência da quebra de uma simetria clássica pode também ser visto em outros setores. No caso da correção a um *loop* para o propagador do elétron, por exemplo, sabemos que a amplitude de partida tem grau superficial linear de divergência. Por isso, poderíamos pensar a princípio, que a correção quântica para a massa do elétron fosse da forma  $\delta m_e \propto e_0^2 \Lambda$ , ou seja, variasse linearmente com a escala de energia. Contudo, a simetria quiral da QED é quebrada pelo termo de massa, de forma que a corrente quiral pode ser escrita como  $\partial_\mu j_5^\mu = 2im_e \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ . Desta forma, se tomarmos o limite  $m_e \rightarrow 0$  devemos recuperar o limite clássico, mesmo quando a correção quântica é incluída. Este é o caso quando fazemos o cálculo desta correção a um *loop* e descobrimos que  $\delta m_e \propto e_0^2 m_e \ln \frac{\Lambda}{m_e}$ , satisfazendo assim a consistência da quebra da simetria quiral.

## Capítulo 3

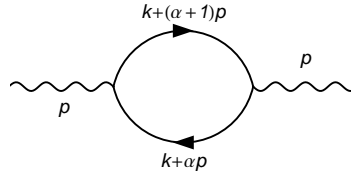
# Arbitrariedade em termos do tipo Chern-Simons induzidos

Invariância de calibre e de Lorentz são os principais critérios para incluir termos na lagrangiana de uma teoria. O termo de Chern-Simons (CS) respeita estes critérios e tem sido considerado em teorias (2+1)-dimensionais aplicadas ao estudo do efeito Hall quântico, por exemplo.

Apesar da invariância de Lorentz ser um dos princípios de construção de uma teoria quântica de campos, a violação desta simetria tem sido investigada [16]. O Modelo Padrão Estendido (SME) acrescenta ao Modelo Padrão usual todos os termos que violam simetria de Lorentz e CPT. Tais termos ocorrem a baixas energias devido a uma quebra espontânea de simetria de Lorentz que acontece na escala de Planck [17]. Na literatura recente da Física de Altas Energias, existe uma gama de experimentos cujo propósito é o de detectar e limitar tais termos. Uma vez que experimentos para acessar diretamente energias altíssimas, como a escala de Planck, são impraticáveis, a detecção destes termos a baixas energias é uma forma de evidenciar uma teoria unificada e de Gravitação Quântica que existe nesta escala, dado que a quebra espontânea ocorre nela.

Um dos termos do setor de calibre do SME é a versão (3+1)-dimensional do termo de Chern-Simons, que chamamos de termo do tipo Chern-Simons ou termo Carroll-Field-Jackiw. Ao contrário do termo de Chern-Simons usual, ela não respeita invariância de Lorentz sobre transformações nos campos (*particle Lorentz invariance*) e a existência de um termo deste tipo traz consequências fenomenológicas, como birrefringência do vácuo na Eletrodinâmica [18]. A não-observação desta birrefringência, apoiada por dados astrofísicos, nos diz o quão pouco a simetria de Lorentz é violada no setor de calibre  $U(1)$  por uma estrutura deste tipo [18, 19].

Tem sido discutido na literatura se este termo do tipo Chern-Simons pode ser induzido por correções radiativas. Neste capítulo, apresentaremos dois exemplos de modelos que foram objetos de extensa


 Figura 3.1: Correção a um *loop* para o propagador do fóton com rótulo arbitrário.

discussão na literatura, a QED estendida e o modelo de férmions em um *background* gravitacional. Os resultados deste capítulo estão publicados em [20].

### 3.1 A indução de um termo do tipo Chern-Simons na QED estendida

Vamos revisitar a indução de um termo do tipo Chern-Simons (também chamado de termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ)) na versão estendida da QED [16] cuja ação é dada por

$$S_{QED}^{est} = \int d^4x \bar{\psi}(i\partial - \mathcal{A} - m - \not{b}\gamma_5)\psi, \quad (3.1)$$

onde  $b$  é um quadrivetor constante. Este termo, que viola simetria de Lorentz e CPT, é, de acordo com alguns trabalhos, o responsável pela indução radiativa do termo CFJ.

O coeficiente do termo CFJ foi calculado por diferentes métodos e os resultados discordam um do outro [21] -[28]. Por exemplo, em regularização dimensional o termo induzido resultante é  $\mathcal{L}_{CS} = \frac{3}{32\pi^2} b_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} A_\nu$  [24] e em Pauli-Villars este termo induzido é nulo [16, 21]. Assim como no caso do capítulo anterior, essas contradições estão relacionadas a termos indeterminados, como veremos adiante.

O termo CFJ é induzido ao considerarmos a correção a um *loop* para o propagador do fóton. Para simplificar o cálculo, consideramos uma QED não-massiva. Neste caso, o propagador do elétron pode ser decomposto na forma

$$\frac{i}{\not{k} - \not{b}\gamma_5} = \frac{i}{\not{k} - \not{b}} P_L + \frac{i}{\not{k} + \not{b}} P_R, \quad (3.2)$$

onde os projetores quirais são definidos como

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (3.3)$$

Essa decomposição nos permite reescrever a correção a um *loop*, representada pelo diagrama da figura 3.1, da seguinte forma

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ \Pi_+^{\mu\nu} + \Pi_-^{\mu\nu} + \Pi_{5+}^{\mu\nu} + \Pi_{5-}^{\mu\nu} \}, \quad (3.4)$$

com

$$\Pi_{\pm}^{\mu\nu}(p, \alpha p \pm b) = \int_k^\Lambda \text{tr} \left\{ \frac{\gamma^\nu (\not{k} + \alpha \not{p} \pm \not{b}) \gamma^\mu [\not{k} + (\alpha + 1) \not{p} \pm \not{b}]}{(k + \alpha p \pm b)^2 [k + (\alpha + 1)p \pm b]^2} \right\} \quad (3.5)$$

e

$$\Pi_{5\pm}^{\mu\nu}(p, \alpha p \pm b) = \pm \int_k^\Lambda \text{tr} \left\{ \frac{\gamma^\nu (\not{k} + \alpha \not{p} \pm \not{b}) \gamma^\mu [\not{k} + (\alpha + 1) \not{p} \pm \not{b}] \gamma_5}{(k + \alpha p \pm b)^2 [k + (\alpha + 1)p \pm b]^2} \right\}, \quad (3.6)$$

onde  $\int_k^\Lambda \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  e  $\alpha$  é um número real qualquer que representa a liberdade na escolha do rótulo nos

momentos internos do diagrama.

O termo de Chern-Simons induzido aparece devido unicamente à equação (3.6) uma vez que o traço da equação (3.5) não resulta em nenhum termo proporcional a um tensor de Levi-Civita. Logo,

$$\begin{aligned} \Pi_5^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p, \alpha p + b) + \Pi_{5-}^{\mu\nu}(p, \alpha p - b)] = \frac{1}{2} [\Pi_{5+}^{\mu\nu}(p, b_1) + \Pi_{5-}^{\mu\nu}(p, b_2)] = \\ &= 2ip_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} \left( \int_k^\Lambda \frac{(b_1 + k)_\alpha}{(k + b_1)^2 (k + p + b_1)^2} - \int_k^\Lambda \frac{(b_2 + k)_\alpha}{(k + b_2)^2 (k + p + b_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicamos então a regularização implícita para tratar as integrais divergentes da amplitude (3.7). O resultado é

$$\Pi_5^{\mu\nu} = 4ib_\alpha v_0 p_\beta \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}. \quad (3.8)$$

Este resultado é independente do rótulo  $\alpha$ . Como podemos ver, o termo do tipo CS induzido vai ser de fato dependente de regularização uma vez que, como no caso do capítulo anterior, ele depende do termo arbitrário  $v_0$ . Como já vimos, este termo é uma diferença de infinitos que deve ser fixada por uma simetria do modelo e não pelo método de regularização. Contudo, se utilizarmos a identidade de Ward,  $p_\mu \Pi_5^{\mu\nu} = 0$ , como fizemos anteriormente, não conseguimos fixar o termo de superfície porque ao contrairmos a amplitude com  $p_\mu$ , o tensor de Levi-Civita se anula. O termo do tipo CS induzido é, portanto, indeterminado.

## 3.2 A indução de um termo do tipo Chern-Simons em uma teoria fermiônica no espaço curvo

Seguindo a mesma ideia da seção anterior, a questão se um termo do tipo Chern-Simons pode ser induzido por correções radiativas também foi considerada em teorias semi-clássicas da gravitação, onde a matéria é quantizada em um *background* gravitacional. Da mesma forma que na Eletrodinâmica, o termo do tipo Chern-Simons gravitacional traz consequências fenomenológicas. Quando adicionado a Relatividade Geral, este termo leva a ondas gravitacionais cujos graus de polarização podem carregar diferentes intensidades [29].

O termo do tipo Chern-Simons gravitacional induzido é, assim como no caso da seção anterior, dependente de regularização. Por exemplo, em regularização dimensional, o coeficiente do termo CFJ gravitacional é  $\frac{1}{192\pi^2}$  [30] enquanto em *Proper-time* o resultado deste é  $\frac{1}{64\pi^2}$  [31].

A lagrangiana de férmions no espaço curvo, com um termo que viola Lorentz e CPT, pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \left( \frac{i}{2} e e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - e e_a^\mu b_\mu \bar{\psi} \gamma^a \gamma_5 \psi \right), \quad (3.9)$$

onde  $e_a^\mu$  é a tetrada e  $e = \det e_a^\mu$ .

Na equação (3.9), precisamos definir a derivada co-variante que acopla férmions com o campo gravitacional,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} \psi, \quad (3.10)$$

onde  $\omega_{\mu ab}$  é chamada de conexão de spin, que depende da tetrada, e  $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$ .

Na aproximação de campo fraco, usamos as seguintes expressões para a métrica e a tetrada:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

e

$$e_{\mu a} = \eta_{\mu a} + \frac{1}{2}\kappa h_{\mu a}. \quad (3.12)$$

Utilizando as expressões acima, a ação (3.9) pode ser reescrita como

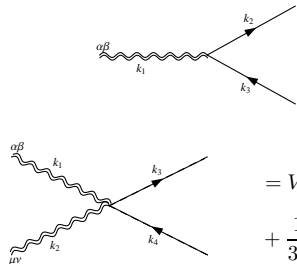
$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} i \bar{\psi} \overleftrightarrow{D} \psi + \frac{1}{2} i \kappa \left[ h \bar{\psi} \overleftrightarrow{D} \psi - \frac{1}{2} h_a^\mu \gamma^a \bar{\psi} \overleftrightarrow{D} \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \partial_b h_{ca} \gamma^{\{a} \gamma^b \gamma^{c\}} \psi - \frac{1}{4} \bar{\psi} \partial_c h_{ba} \gamma^{\{a} \gamma^b \gamma^{c\}} \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi} h_a^\mu b_\mu \gamma^a \gamma_5 \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} h \not{b} \gamma_5 \psi \right] - \bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \psi \right\} + O(\kappa^2). \quad (3.13)$$

Os índices entre chaves correspondem a permutações, *i.e.*,  $A^{\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}} B^{\{\beta_1 \dots \beta_n\}} = A^{\alpha_1 \dots \alpha_n} B^{\beta_1 \dots \beta_n} +$  soma sobre as permutações entre os índices do conjunto  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  e  $\beta_1 \dots \beta_n$ . As regras de Feynman, mostradas na figura 3.2, podem ser obtidas a partir da ação (3.13).

#### A. Fermion propagator

$$\text{---}\overset{p}{\longrightarrow}\text{---} = S(p) = \frac{i}{\not{p} - \not{b} \gamma_5},$$

#### B. Graviton-fermion vertices



$$= V^{\alpha\beta}(k_2, k_3) = \frac{i\kappa}{8} [2\eta^{\alpha\beta}(\not{k}_2 + \not{k}_3) - \gamma^\alpha(\not{k}_2 + \not{k}_3)^\beta - \gamma^\beta(\not{k}_2 + \not{k}_3)^\alpha]$$

$$= V^{\alpha\beta\mu\nu}(k_1, k_2, k_4) = i\kappa^2 \left[ \frac{5}{16}(\not{k}_1 + \not{k}_2) \left( \frac{2}{5}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\gamma^{\{\alpha}\eta^{\beta\}\{\mu}\gamma^{\nu\}} + \frac{1}{4}\gamma^{\{\mu}\eta^{\nu\}\{\alpha}\gamma^{\beta\}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{32}\gamma^{\{\alpha}\eta^{\beta\}\{\mu}(3\not{k}_4 + 4\not{k}_2 - 3\not{k}_1)^\nu\} - \frac{1}{16}\gamma^{\{\alpha}(2\not{k}_4 + \not{k}_1)^\beta\}\eta^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{16}\gamma^{\{\mu}\eta^{\nu\}\{\alpha(3\not{k}_4 + 4\not{k}_1 - 3\not{k}_2)^\beta\} - \frac{1}{16}\gamma^{\{\mu(2\not{k}_4 + \not{k}_2)^\nu\}\eta^{\alpha\beta}} \right. \\ \left. - \frac{1}{4}\not{k}_4(\eta^{\mu\{\alpha}\eta^{\beta\}\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}) \right].$$

Figura 3.2: Regras de Feynman correspondentes à ação (3.13).

Como feito anteriormente na seção 3.1, precisamos calcular a correção a 1-loop, neste caso, para o propagador do gráviton. A figura 3.3 mostra os dois diagramas que contribuem. As amplitudes correspondentes a eles são

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr[V^{\mu\nu}(k+p, k)S(k+p)V^{\alpha\beta}(k, k+p)S(k)] \quad (3.14)$$

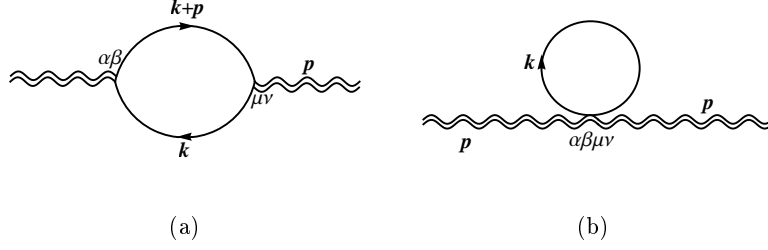


Figura 3.3: Correções a 1-loop para o propagador do gráviton. A linha dupla ondulada e a linha sólida representam o gráviton e o férmion, respectivamente.

e

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(k)V^{\alpha\beta\mu\nu}(p, p, k)]. \quad (3.15)$$

Utilizamos então a seguinte expansão para o propagador do férmion

$$\frac{i}{\not{k} - \not{p}\gamma_5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{\not{k}} \left\{ -i\not{p}\gamma_5 \frac{i}{\not{k}} \right\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(k). \quad (3.16)$$

O termo CFJ que estamos interessados em calcular é linear em  $b$ . Os termos correspondentes à expansão em primeira ordem são

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = & i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[V^{\mu\nu}(k+p, k)S_0(k+p)V^{\alpha\beta}(k, k+p)S_0(k)\not{p}\gamma_5S_0(k)] + \\ & + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[V^{\alpha\beta}(k, k+p)S_0(k)V^{\mu\nu}(k+p, k)S_0(k+p)\not{p}\gamma_5S_0(k+p)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\Pi_{(b)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S_0(k)\not{p}\gamma_5S_0(k)V^{\alpha\beta\mu\nu}(p, p, k)]. \quad (3.18)$$

A amplitude  $\Pi_{(b)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p)$  é nula quando tomamos o traço. A amplitude  $\Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p)$  tem grau superficial de divergência cúbico. Aplicamos então a regularização implícita para tratar os infinitos desta amplitude. O resultado é

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = & \frac{-i}{8}\kappa^2 \left[ \left( \frac{i}{48\pi^2} - 64\sigma_0 - 4\nu_0 + 4\xi_0 \right) p^\alpha p^\nu - \left( \frac{i}{48\pi^2} + 32\sigma_0 \right) \eta^{\alpha\nu} p^2 \right] \epsilon^{\lambda\rho\beta\mu} b_{\lambda\rho} + \\ & + (\alpha \leftrightarrow \beta) + (\mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como podemos observar, a equação (3.19) contém três termos de superfície,  $\xi_0$ ,  $\sigma_0$  e  $\nu_0$ . Desta forma, é de se esperar que o resultado do termo CFJ gravitacional seja, apesar de finito, dependente de regularização. Novamente, vamos tentar fixar estes termos arbitrários via simetrias. A identidade de

Ward vetorial correspondente à equação (3.19) é

$$p_\alpha \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{-i}{8} \kappa^2 (4\xi_0 - 4\nu_0 - 96\sigma_0) (\epsilon^{\lambda\rho\beta\mu} p^\nu + \epsilon^{\lambda\rho\beta\nu} p^\mu) p^2 b_{\lambda\rho} = 0 \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é satisfeita se  $\xi_0 = \sigma_0 = \nu_0 = 0$  ou  $\xi_0 - \nu_0 = 24\sigma_0$ . A primeira condição determina o termo CFJ e a segunda não. Contudo, a segunda condição também satisfaz a simetria de calibre. Se substituirmos esta condição na equação (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = & \frac{-i}{24} \kappa^2 \epsilon^{\lambda\rho\beta\mu} b_{\lambda\rho} \left( \frac{i}{16\pi^2} + 96\sigma_0 \right) (p^\alpha p^\nu - \eta^{\alpha\nu} p^2) + (\alpha \leftrightarrow \beta) + (\mu \leftrightarrow \nu) + \\ & + (\alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (3.21)$$

O termo CFJ gravitacional, obtido da lagrangiana efetiva correspondente à equação (3.21), é

$$\mathcal{L}_{CS} = \left( \frac{1}{96\pi^2} - 16i\sigma_0 \right) \kappa^2 b^\lambda h^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\mu\lambda\rho} \partial^\rho (\partial^2 h_\nu^\alpha - \partial_\nu \partial_\gamma h^{\gamma\alpha}). \quad (3.22)$$

Como no caso da seção anterior, não temos razões suficientes para fixar todos os termos de superfície, o que nos leva a concluir que o termo CFJ gravitacional é arbitrário, apesar de ser finito. Podemos ainda insistir em fixar o termo de superfície restante via uma outra condição, a invariância de rótulo, como feito na seção 2.2.

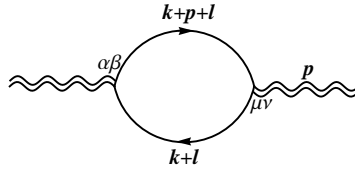


Figura 3.4: Correção a 1-loop para o propagador do gráviton com rótulo arbitrário  $l$ .

Exigir que a amplitude seja invariante de rótulo significa fazer

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, l) - \Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, l') = 0, \quad (3.23)$$

onde  $\Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, l)$  é a amplitude correspondente ao digrama com rótulo arbitrário da figura 3.4.

Assumindo  $l = cp$ , onde  $c$  é uma constante real arbitrária, e escolhendo  $l' = 0$ , o resultado da equação (3.23) é

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, l) - \Pi_{(a)CS}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, l=0) = & -\frac{3}{4} (c^2 - c) i \kappa^2 [p^2 \eta^{\alpha\nu} (\nu_0 - \xi_0 + 24\sigma_0) + \\ & + 2p^\alpha p^\nu (3\nu_0 - 2\xi_0 + 24\sigma_0)] \epsilon^{\lambda\rho\beta\mu} b_{\lambda\rho} + (\alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu) + (\alpha \leftrightarrow \beta) + (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como podemos ver na equação (3.24), a condição para invariância de rótulo requer  $\xi_0 - \nu_0 = 24\sigma_0$  e  $2\xi_0 - 3\nu_0 = 24\sigma_0$ . A primeira condição é a mesma obtida quando exigimos invariância de calibre. Como temos três incógnitas para determinar e somente duas equações, concluímos que estas condições não são suficientes para determinar o coeficiente do termo CFJ gravitacional e, como no caso da seção anterior,

ele é indeterminado. Pode inclusive não ser gerado se o termo de superfície for nulo.

## Capítulo 4

# Anomalia Conforme a 1-*loop*

Anomalias são quebras de correntes clássicas causadas por correções quânticas. A existência desta anomalia depende da questão se o método de regularização preserva todas as simetrias da teoria. Exemplos bem conhecidos de anomalias são a anomalia quiral (AVV) [32], quando campos de calibre acoplados a correntes conservadas dão origem a uma corrente axial não conservada, e a anomalia da corrente de dilatação, ou do traço, que surge devido a introdução de uma escala na teoria.

Neste capítulo revisitamos uma antiga controvérsia relacionada a quebra da corrente conforme a 1-*loop*, também chamada de traço do tensor energia-momento, quando campos de matéria estão imersos em um *background* gravitacional. Como no caso do capítulo anterior, existem diversos trabalhos na literatura sobre o cálculo da anomalia conforme em diferentes métodos de regularização. Alguns termos da anomalia são dependentes de regularização e isto nos motiva estudar se a quebra da corrente conforme é física ou espúria.

Vamos adotar o mesmo método apresentado na introdução uma vez que este método não avalia termos dependentes de regularização, não quebra nenhuma simetria do modelo ou muda o número de dimensões do espaço-tempo. Esta última característica é vantajosa, em particular, em teorias semi-clássicas da Gravitação, que possuem objetos topológicos, onde o uso da usual regularização dimensional não é adequado. Além disso, a regularização implícita tem uma vantagem no cenário das anomalias porque conseguimos responder se a simetria é de fato quebrada ou se a anomalia é espúria, ou seja, causada pelo método de regularização que não preserva uma ou mais simetrias da teoria. Os resultados deste capítulo estão publicados em [33].

## 4.1 Visão geral da anomalia conforme

Uma teoria é considerada invariante conforme se ela não muda sob as seguintes transformações de seus campos

$$\Psi'(x) = e^{d\sigma(x)}\Psi(x), \quad (4.1)$$

onde  $\Psi$  pode ser um campo qualquer (espinor, vetor, métrica ou escalar),  $\sigma$  é um parâmetro de escala e  $d$  é o peso conforme do campo.

A corrente conservada associada à transformação (4.1) é o traço do tensor energia-momento. Em teorias clássicas de campos, essa corrente é conservada no limite de massa nula. As correções quânticas quebram a invariância conforme na abordagem semi-clássica da Gravitação (veja [34] para um *review*). Trabalhos pioneiros sobre esta anomalia calcularam correções a 1-loop para o propagador do gráviton devido a acoplamentos vetoriais [35] e espinoriais [36] com o campo de fundo gravitacional. Eles descobriram que, apesar da invariância de calibre (difeomorfismo, neste caso) ser preservada, o traço do tensor energia-momento não era mais nulo [37] uma vez que este recebia correções finitas. Assim como outras anomalias, esta quebra causa problemas de renormalizabilidade [38]. No começo, esta quebra de simetria foi considerada como espúria [39]-[43], o que equivale dizer que era um artefato da regularização. Contudo, o traço do tensor energia-momento foi computado por diversos métodos. Em [37] foi calculado diagramaticamente utilizando regularização dimensional. Posteriormente, foi também mostrado que a anomalia aparece com a regularização de função  $\zeta$  [44], regularização *point-splitting* [45] e no contexto do método de Schwinger-DeWitt [46]. Uma derivação baseada na correspondência AdS/CFT pode ser encontrada em [47]. Alguns dos termos de quebra da simetria conforme são dependentes de regularização como veremos adiante. Um *review* sobre anomalia conforme e as universalidades e ambiguidades dela em diferentes métodos de regularização pode ser encontrado em [48].

Vale também destacar que o traço anômalo do tensor energia-momento traz consequências físicas: ele determina o tensor energia-momento para um buraco negro em duas dimensões [49] e classifica os estados de vácuo em quatro dimensões [50], além de dar origem à condição de estabilidade no modelo inflacionário modificado de Starobinski [51, 52], por exemplo.

A anomalia do traço tem uma forma geral dada por

$$T = \langle T_\mu^\mu \rangle = aC^2 + cE + a'\square R, \quad (4.2)$$

onde  $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}R^2$  é o quadrado do tensor de Weyl,  $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$  é o invariante topológico de Gauss-Bonnet,  $R$  é o escalar de Ricci e  $a, c$  e  $a'$  estão relacionados com as funções  $\beta$  [48]

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{120}N_s + \frac{1}{20}N_f + \frac{1}{10}N_v \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{360}N_s + \frac{11}{360}N_f + \frac{31}{180}N_v \right), \\ \beta_3 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{180}N_s + \frac{1}{30}N_f - \frac{1}{10}N_v \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $N_s, N_f$  e  $N_v$  correspondem ao número de partículas escalares, fermiônicas e vetoriais, respectivamente.

Os resultados usuais da literatura são  $a = \beta_1$  e  $c = \beta_2$ . Contudo, existe uma discordância no coeficiente

$a'$ . Enquanto a maioria dos métodos de regularização prevêem  $a' = \beta_3$ , a regularização dimensional prevê  $a' = \frac{2}{3}\beta_1$  [37]. Além do mais,  $a'$  desaparece na derivação baseada na correspondência AdS/CFT [47] e possui valor ambíguo na regularização Pauli-Villars [48, 53]. Posteriormente, foi mostrado que o cálculo em regularização dimensional pode também fornecer um resultado ambíguo [48].

Vamos novamente investigar se estas contradições estão relacionadas com diferenças de infinitos e vamos avaliar estas diferenças exigindo alguma simetria. Na próxima seção, vamos calcular a correção a 1-loop para o propagador do gráviton devido a acoplamentos com o campo escalar, vetorial e espinorial. Relacionamos então o cálculo desta função de dois pontos com o traço  $\langle T_\mu^\mu \rangle$ , obtemos o coeficiente  $a'$  e comparamos com os resultados da literatura.

## 4.2 Correção a 1-loop para o propagador do gráviton e a anomalia conforme

Consideramos a abordagem semi-clássica da Gravitação, onde a matéria é quantizada mas o campo gravitacional não (veja [54] para um *review*). A parte escalar, fermiônica e vetorial da ação da teoria no espaço curvo são, respectivamente,

$$S_s = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \xi R \phi^2), \quad (4.4)$$

$$S_f = i \int d^4x e e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^a D_\mu \psi, \quad (4.5)$$

e

$$S_v = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

onde  $\xi$  é o acoplamento não mínimo e a derivada covariante é a mesma definida no capítulo 3.

As ações expressas em (4.5) e (4.6) são classicamente invariantes conforme e a ação (4.4) também é no limite conforme  $\xi \rightarrow 1/6$ . Para computar a quebra desta simetria clássica, temos de calcular a correção a um loop para o propagador do gráviton. Como feito na seção 3.2, utilizamos a expansão de campo fraco para expandir a métrica e a tetrada. Com esta expansão, obtemos as regras de Feynman, até primeira ordem em  $\kappa$ , que listamos na figura 4.1.

Os diagramas que contribuem para a correção a um loop para o propagador do gráviton estão apresentados na figura 4.2. A parte finita responsável pela quebra quântica da simetria conforme vem dos diagramas (a), (b) e (c). Os diagramas (d), (e) e (f) contribuem somente com divergências quárticas e quadráticas. Divergências quadráticas para campos não massivos são usualmente feitas zero em regularização dimensional [55] e em regularização implícita [12]. Divergências quárticas não são físicas no sentido de que não contribuem para cálculo de observáveis, como as divergências logarítmicas contribuem no cálculo das funções beta, por exemplo. Ambas as divergências também aparecem nos diagramas (a), (b) e (c). Usando integração simétrica, como  $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} k^2$ , todas as divergências quárticas podem ser reescritas na forma  $\int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  que pode ser subtraída por um contra-termo cosmológico adequado (detalhes podem ser encontrados em [56]).

$$\begin{aligned}
 &= V_s^{\alpha\beta}(k_1, k_2, k_3) = \frac{i\kappa}{2} [\eta^{\alpha\beta} k_2 \cdot k_3 - k_2^\alpha k_3^\beta - k_3^\alpha k_2^\beta - 2\xi(k_1^\alpha k_1^\beta - k_1^2 \eta^{\alpha\beta})] \\
 &= V_f^{\alpha\beta}(k_2, k_3) = \frac{i\kappa}{8} [2\eta^{\alpha\beta}(\not{k}_2 + \not{k}_3) - \gamma^\alpha(k_2 + k_3)^\beta - \gamma^\beta(k_2 + k_3)^\alpha] \\
 &= V_v^{\alpha\beta\mu\nu}(k_2, k_3) = \frac{i\kappa}{2} [(\eta^{\mu\{\alpha}\eta^{\beta\}\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})k_2 \cdot k_3 + (\eta^{\alpha\beta}k_2^\nu k_3^\mu + \eta^{\mu\nu}k_2^\alpha k_3^\beta + \\
 &\quad + \eta^{\mu\nu}k_2^\beta k_3^\alpha - \eta^{\alpha\nu}k_2^\beta k_3^\mu - \eta^{\mu\alpha}k_2^\nu k_3^\beta - \eta^{\mu\beta}k_2^\nu k_3^\alpha - \eta^{\beta\nu}k_2^\alpha k_3^\mu)]
 \end{aligned}$$

Figura 4.1: Regras de Feynman para campos de matéria imersos em um campo de fundo gravitacional.

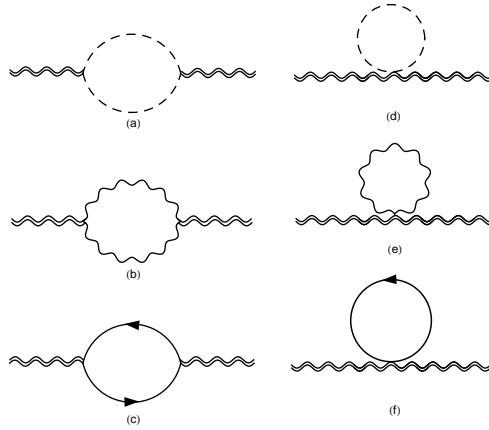


Figura 4.2: Correções a um loop para o propagador do gráviton. As linhas pontilhada, sólida, ondulada e ondulada dupla correspondem ao escalar, férmion, fóton e gráviton, respectivamente.

Precisamos calcular as seguintes amplitudes:

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2} \int_k V_s^{\mu\nu}(p, k, k+p) \frac{i}{k^2 - m_s^2} V_s^{\alpha\beta}(p, k+p, k) \frac{i}{(k+p)^2 - m_s^2}, \quad (4.7)$$

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = \frac{1}{2} \int_k V_v^{\alpha\beta\lambda\theta}(k, k+p) \frac{-i\eta^{\lambda\gamma}}{k^2 - m_v^2} V_v^{\mu\nu\gamma\delta}(k+p, k) \frac{-i\eta^{\delta\theta}}{(k+p)^2 - m_v^2}, \quad (4.8)$$

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = - \int_k Tr \left[ V_f^{\alpha\beta}(k, k+p) \frac{i}{\not{k} - m_f} V_f^{\mu\nu}(k+p, k) \frac{i}{\not{k} + \not{p} - m_f} \right]. \quad (4.9)$$

Nas equações acima,  $1/2$  é um fator de simetria e introduzimos massas fictícias nos propagadores. Isto é necessário porque, apesar das integrais serem finitas no infravermelho, a expressão utilizada na regularização implícita para separar infinitos quebra a integral original em duas integrais divergentes no infravermelho. O limite  $m_i^2 \rightarrow 0$  é tomado no final. Neste processo, uma escala de renormalização  $\lambda \neq 0$  é introduzida. Observe que a outra parte do propagador do bóson vetorial massivo na equação (4.8) não contribui uma vez que  $k_\lambda k_\gamma V_v^{\alpha\beta\lambda\theta}(k, k+p) = 0$  e  $(k+p)_\delta (k+p)_\theta V_v^{\mu\nu\gamma\delta}(k+p, k) = 0$ .

Depois de tomar os limites  $m_s \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow \frac{1}{6}$ , descobrimos que a amplitude (4.7) é transversa a menos de termos de superfície:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\kappa^2} p_\alpha \Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= \left( \frac{37}{48} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{1}{16} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{1}{16} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \frac{2}{3} p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 v_0 - \left( \frac{29}{48} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 \right. \\
&+ \left. \frac{1}{16} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{1}{16} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \frac{1}{3} p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \xi_0 + \left( \frac{109}{8} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{37}{8} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{37}{8} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{121}{4} p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \sigma_0 + \left( \frac{1}{8} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{8} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{1}{8} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \frac{1}{2} p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \omega_0. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Podemos ver na equação (4.10) que a invariância de calibre,  $p_\alpha \Pi_a^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 0$ , é garantida se todos os termos arbitrários forem nulos. Isto não é sempre verdade, como vimos no capítulo anterior, porque eles podem estar relacionados.

Com essas considerações, nosso resultado final para a amplitude (4.7) é:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\kappa^2} \Pi_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= p^2 (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} p^2 + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} p^2 - p^\alpha p^\mu \eta^{\beta\nu} - p^\beta p^\mu \eta^{\alpha\nu} - p^\alpha p^\nu \eta^{\beta\mu} - p^\beta p^\nu \eta^{\alpha\mu}) \left[ \frac{23}{1800} b \right. \\
&+ \left. \frac{1}{240} \left( I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - p^2 (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} p^2 - p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \eta^{\alpha\beta}) \left[ \frac{7}{675} b + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{360} \left( I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] + \frac{1}{180} \left( \frac{41}{15} b + I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

onde  $\lambda$  é a escala do grupo de renormalização.

Este resultado concorda com [57] se identificarmos  $I_{\log}(\lambda^2)$  como a parte divergente. Agora precisamos voltar da expansão de campo fraco para a notação de tensor de curvatura. Para fazer isto, escrevemos a ação na forma covariante e focamos atenção no termo  $\square R$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha_1 C^2 + \alpha_2 R^2) \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g} (2\alpha_1 W + \alpha_2 R^2), \tag{4.12}$$

onde substituímos  $C^2 \rightarrow 2W = 2R_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{3}R^2$  uma vez que o invariante topológico de Gauss-Bonnet não contribui para o propagador [53].

Aplicando a definição do tensor energia-momento para a ação (4.12), vemos que o traço deste é dado por

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{-2}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 12\alpha_2 \square R. \tag{4.13}$$

Portanto, tudo que temos de fazer é determinar a constante  $\alpha_2$ . Para isso escrevemos  $W$  e  $R^2$  no limite de campo fraco até segunda ordem em  $\kappa$ :

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} R^2 &= \int d^4x h^{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta + \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \partial^4 - (\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \partial^2 + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \partial^2)] h^{\alpha\beta}, \\
\int d^4x \sqrt{-g} W &= \int d^4x h^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{6} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta - \frac{1}{12} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \partial^4 + \frac{1}{12} (\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \partial^2 + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \partial^2) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{8} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta}) \partial^4 - \frac{1}{8} \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\beta \partial^2 \right] h^{\alpha\beta}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.14) na equação (4.12) e comparando com (4.11) escrita no espaço das posições (a ação para o propagador do gráviton é  $S = -\frac{1}{2} \int d^4x h^{\mu\nu} \bar{\Pi}_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$ , onde  $\bar{\Pi}_{\mu\nu\alpha\beta}$  é a transformada de Fourier da equação (4.11)), obtemos  $12\alpha_2 = \frac{1}{180(4\pi)^2}$ . Portanto, nosso resultado para a anomalia devido ao campo escalar é

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{scalar} = \frac{1}{180(4\pi)^2} \square R. \quad (4.15)$$

Procedemos usando a mesma ideia para obter as contribuições para a anomalia devido a campos espinoriais e vetoriais. O resultado da correção a um *loop* do propagador do gráviton para as amplitudes (4.8) e (4.9) são, respectivamente (novamente, termos de superfície feitos zero garantem invariância de calibre, *i. e.*,  $p_\alpha \Pi_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 0$  e  $p_\alpha \Pi_{(c)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} \Pi_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= p^2(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}p^2 + \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}p^2 - p^\alpha p^\mu \eta^{\beta\nu} - p^\beta p^\mu \eta^{\alpha\nu} - p^\alpha p^\nu \eta^{\beta\mu} - p^\beta p^\nu \eta^{\alpha\mu}) \left[ \frac{4}{75}b \right. \\ &+ \left. \frac{1}{20} \left( I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - p^2(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \eta^{\alpha\beta}) \left[ \frac{1}{450}b + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{30} \left( I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] + \frac{1}{15} \left( \frac{47}{30}b + I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} \Pi_{(c)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= p^2(\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}p^2 + \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}p^2 - p^\alpha p^\mu \eta^{\beta\nu} - p^\beta p^\mu \eta^{\alpha\nu} - p^\alpha p^\nu \eta^{\beta\mu} - p^\beta p^\nu \eta^{\alpha\mu}) \left[ \frac{3}{50}b \right. \\ &+ \left. \frac{1}{40} \left( I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - p^2(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}p^2 - p^\alpha p^\beta \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu \eta^{\alpha\beta}) \left[ \frac{23}{450}b + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{60} \left( I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] + \frac{1}{30} \left( \frac{31}{15}b + I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Os valores correspondentes para a constante  $\alpha_2$  para as equações (4.16) e (4.17) são  $12\alpha_2 = -\frac{1}{10(4\pi)^2}$  e  $12\alpha_2 = \frac{1}{30(4\pi)^2}$ , respectivamente. Multiplicando cada diagrama pelo número de partículas, nosso resultado final é

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \left( \frac{1}{180(4\pi)^2} N_s + \frac{1}{30(4\pi)^2} N_f - \frac{1}{10(4\pi)^2} N_v \right) \square R = \beta_3 \square R. \quad (4.18)$$

Este resultado concorda com o obtido em [44]- [46],[48] e discorda do obtido via regularização dimensional em [37]. Alguns autores defendem a ideia de que isso ocorre porque a regularização dimensional é responsável por uma quebra dura da simetria conforme e fornece na verdade um resultado ambíguo [48]. Este resultado também difere do obtido em regularização Pauli-Villars, onde um resultado ambíguo também é obtido [48, 53], e do obtido utilizando a correspondência AdS/CFT [47] onde  $a' = 0$ .

### 4.3 Arbitrariedade na anomalia conforme

Retornamos ao resultado da seção anterior e investigamos se de fato a única solução possível, para garantir a simetria de calibre, é necessário fazer os termos de superfície nulos. Como vimos no capítulo anterior, estes termos podem estar relacionados de forma a também satisfazer a identidade de Ward. Como exemplo,

vamos considerar esta identidade para a amplitude (4.8) e exigir que a simetria de calibre seja garantida:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\kappa^2} p_\alpha \Pi_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= \left( \frac{1}{8} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \nu_0 - \left( \frac{1}{8} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + \right. \\
&+ \frac{3}{4} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{3}{4} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \frac{1}{2} p^\mu p^\beta p^\nu \left. \right) p^2 \xi_0 + \left( \frac{37}{4} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{73}{4} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{73}{4} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{121}{2} p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \sigma_0 - \left( \frac{1}{4} p^\beta \eta^{\mu\nu} p^2 + \frac{1}{4} p^\mu \eta^{\beta\nu} p^2 + \frac{1}{4} p^\nu \eta^{\beta\mu} p^2 + p^\mu p^\beta p^\nu \right) p^2 \omega_0 = 0. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Uma solução trivial para a equação acima é anular todos os TS, como vimos. Contudo, considerando a estrutura tensorial desta equação, é fácil ver que

$$v_0 - \xi_0 + 74\sigma_0 - 2\omega_0 = 0, \quad (4.20)$$

$$4v_0 - 3\xi_0 + 73\sigma_0 - \omega_0 = 0, \quad (4.21)$$

$$2v_0 - \xi_0 + 121\sigma_0 - 2\omega_0 = 0. \quad (4.22)$$

Uma vez que temos mais parâmetros do que equações, podemos escrever todos os TS em termos de apenas um, *i. e.*,  $v_0 = -47\sigma_0$ ,  $\xi_0 = -\frac{257}{5}\sigma_0$  e  $\omega_0 = \frac{196}{5}\sigma_0$ . Consequentemente, a amplitude depende do termo arbitrário  $\sigma_0$  e, da mesma forma, a anomalia também:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{vector} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{10} + \frac{497}{15}\sigma_0 \right) \square R = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\frac{1}{10} + \sigma_0' \right) \square R. \quad (4.23)$$

Um resultado arbitrário também é encontrado via regularização dimensional em [48], onde a extensão  $n$ -dimensional do quadrado do tensor de Weyl,  $C^2$ , leva a uma arbitrariedade no termo  $\square R$ . Existe também uma arbitrariedade encontrada via regularização Pauli-Villars, onde a introdução de uma família de campos auxiliares massivos (não possuem simetria conforme), para remover divergências, também faz o termo  $\square R$  ser arbitrário. Todas essas abordagens são equivalentes a condição de renormalização, onde podemos adicionar um contra-termo de vácuo da forma  $\frac{1}{(4\pi)} \int d^4x \sqrt{-g} \alpha R^2$ , uma vez que isso não altera a evolução dos parâmetros  $a$ ,  $c$  e  $a'$  no grupo de renormalização.

## Capítulo 5

# Invariância de rótulo na Eletrodinâmica Quântica Estendida

Retomamos neste capítulo o estudo do Modelo Padrão Estendido (SME). Em específico, o setor estendido da Eletrodinâmica Quântica (EQED). Conforme apresentamos no capítulo 3, a violação de simetria de Lorentz em TQC é um assunto recente na literatura da Física de Altas Energias por se tratar de uma das propostas de se testar Física da escala de Planck. O SME é construído com todos os termos que violam CPT e simetria de Lorentz via transformações nos campos, mas que são compatíveis com invariância de Lorentz por transformações de coordenadas. O setor eletrodinâmico do SME tem sido testado em uma ampla classe de experimentos, como resumido em [58]. Como exemplo, podemos citar os coeficientes do setor de elétrons, testado em [59], e os do setor de fótons: o termo do tipo Chern-Simons testado em [60] e os efeitos de violação de Lorentz na propagação de fótons testados em [61].

O SME é bem estabelecido a nível árvore. A renormalização a um *loop* para o setor eletromagnético do SME e cálculo das funções beta foram realizados em [62]. O mesmo foi feito para o setor não-Abeliano do SME: setor de Yang-Mills puro [63], Eletro-fraco [64] e setor da QCD estendida [65]. Conforme apresentado no capítulo 3, existem diversos trabalhos considerando a indução radiativa de termos do SME [66]. A anomalia quiral no SME foi estudada recentemente em [67]. Contudo, além destes trabalhos, pouco é conhecido sobre correções quânticas no SME. Uma das razões é a falta de uma escolha adequada para cálculo de correções radiativas em teorias com objetos de dimensão específica, como símbolos de Levi-Civita e matrizes  $\gamma_5$ . Este é o caso do SME, onde o uso da regularização dimensional [1, 69], geralmente aplicada em teorias de calibre, não é adequado para este caso. Algumas maneiras de contornar a dificuldade no tratamento de matrizes  $\gamma_5$  em amplitudes divergentes tem sido propostas [70]-[72].

Neste capítulo, avaliamos as identidades de Ward referentes às funções de 2- e 3-pontos da QED estendida, completando a análise de [62], onde a parte finita relativa a estas identidades não foi conside-

rada. Mostramos que a invariância de rótulo, mencionada em algumas situações dos capítulos anteriores, é condição necessária e suficiente para garantir a invariância de calibre da QED estendida além do nível árvore. Neste caso, como não podemos assumir *a priori* que a QED estendida (EQED) é invariante de calibre após correções radiativas, a invariância de rótulo é uma ferramenta adicional para nos auxiliar. Os resultados deste capítulo estão publicados em [73].

## 5.1 O modelo e as amplitudes

A EQED é o resultado do limite de baixas energias do SME. Ela inclui todos os termos que violam simetria de Lorentz e CPT em uma série de coeficientes, como podemos ver na lagrangiana abaixo [62]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \Gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} (k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde  $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$  é a derivada covariante, que acopla campos de matéria ao campo de calibre,

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu &= \gamma^\nu + \Gamma_1^\nu, \\ \Gamma_1^\nu &= c^{\mu\nu} \gamma_\mu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu + e^\nu + i f^\nu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (5.2)$$

e

$$M = m + m_5 \gamma_5 + a^\mu \gamma_\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Os coeficientes  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_{\mu\nu}$ ,  $d_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\lambda\mu\nu}$ ,  $H_{\mu\nu}$ ,  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  e  $(k_{AF})_\kappa$  violam simetria de Lorentz e, entre estes, apenas os coeficientes  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\lambda\mu\nu}$  e  $(k_{AF})_\kappa$  são responsáveis pela violação de CPT, uma vez que o número de índices é ímpar.

Figura 5.1: Regras de Feynman da EQED.

Listamos as regras de Feynman da teoria (5.1) na figura 5.1. Nesta figura, o ponto e o X correspondem à primeira ordem no coeficiente que viola Lorentz em uma expansão do propagador do férmion, conforme apresentado em (3.16).

A invariância de calibre global de (5.1) leva a uma corrente conservada, pelo teorema de Noether:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi. \quad (5.4)$$

Para verificarmos se  $j^\mu$  é conservada a nível quântico, precisamos verificar as identidades de Ward

correspondentes aos diagramas da figura 5.2 cujas amplitudes são

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \Gamma_1^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.5)$$

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \Gamma_1^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.6)$$

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \Gamma_1^\lambda k_\lambda \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.7)$$

$$\Pi_{(d)}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \Gamma_1^\lambda (k_\lambda - p_\lambda) \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.8)$$

$$\Pi_{(e)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.9)$$

$$\Pi_{(f)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right]. \quad (5.10)$$

As amplitudes dos diagramas da figura 5.3, por sua vez, são

$$T_{(a)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \Gamma_1^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.11)$$

$$T_{(b)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \Gamma_1^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.12)$$

$$T_{(c)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \Gamma_1^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.13)$$

$$T_{(d)}^{\mu\nu\alpha} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \Gamma_1^\lambda k_\lambda \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.14)$$

$$T_{(e)}^{\mu\nu\alpha} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \Gamma_1^\lambda (k + q)_\lambda \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.15)$$

$$T_{(f)}^{\mu\nu\alpha} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \Gamma_1^\lambda (k - p)_\lambda \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right]. \quad (5.16)$$

$$T_{(g)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.17)$$

$$T_{(h)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right], \quad (5.18)$$

$$T_{(i)}^{\mu\nu\alpha} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right]. \quad (5.19)$$

A invariância de calibre é válida a 1-loop se as identidades de Ward abaixo são satisfeitas:

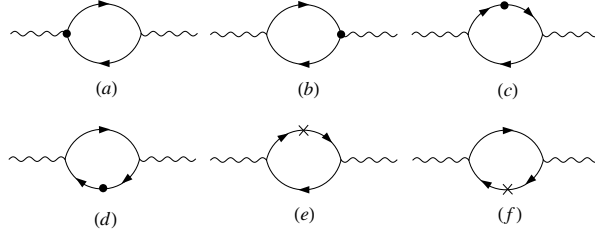


Figura 5.2: Funções de 2-pontos a 1-loop da EQED.

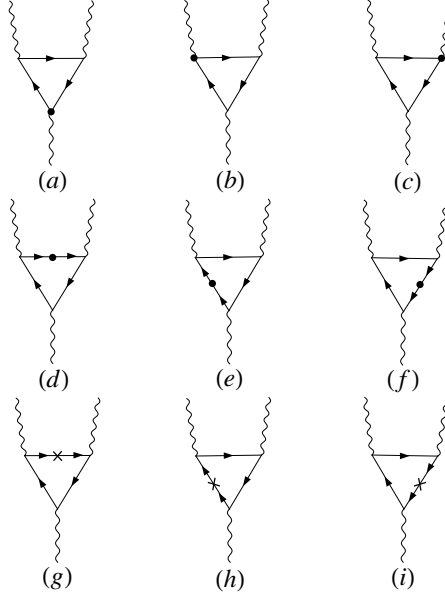


Figura 5.3: Funções de 3-pontos a 1-loop da EQED.

$$p_\mu(\Pi_{(a)}^{\mu\nu} + \Pi_{(b)}^{\mu\nu} + \Pi_{(c)}^{\mu\nu} + \Pi_{(d)}^{\mu\nu} + \Pi_{(e)}^{\mu\nu} + \Pi_{(f)}^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.20)$$

$$(p+q)_\alpha(T_{(a)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(b)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(c)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(d)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(e)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(f)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(g)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(h)}^{\mu\nu\alpha} + T_{(i)}^{\mu\nu\alpha}) = 0. \quad (5.21)$$

Além dos diagramas da figura 5.3, existem os diagramas de pernas de fótons cruzadas. Por exemplo, o diagrama  $T_{(a)}^{\mu\nu\alpha}$  mais o cruzado dele, nos leva a

$$\begin{aligned} T_{(a)}^{\mu\nu\alpha}(p, q) + T_{(a)}^{\nu\mu\alpha}(q, p) = & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \Gamma_1^\alpha \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right] + \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{p} + m} \Gamma_1^\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{q} + m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + m} \gamma^\mu \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Transpondo o segundo termo da equação acima e usando que  $(\gamma^\mu)^T = -C^{-1}\gamma^\mu C$ , obtemos o seguinte

termo no numerador:

$$Tr[\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{k} + \not{q} + m)(-C(\Gamma_1^\alpha)^T C^{-1} - \Gamma_1^\alpha)(\not{k} - \not{p} + m)], \quad (5.23)$$

onde

$$-C(\Gamma_1^\nu)^T C^{-1} = c^{\mu\nu}\gamma_\mu - d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\mu - e^\nu - if^\nu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\mu}. \quad (5.24)$$

Concluimos que os diagramas cruzados cancelam a parte de  $\Gamma_1^\mu$  que preserva simetria  $C$ . Podemos então substituir  $\Gamma_1^\alpha$  por  $\bar{\Gamma}_1^\alpha = C(\Gamma_1^\alpha)^T C^{-1} + \Gamma_1^\alpha$  nas amplitudes (5.11)-(5.16) para considerar os diagramas cruzados.

A mesma ideia é válida para  $M_1$  nos diagramas (g), (h) e (i). Neste caso, a soma de um diagrama com o cruzado dele leva a  $M_1 - C(M_1)^T C^{-1} \equiv \bar{M}_1$  no numerador. Consequentemente, os termos envolvendo  $m_5$  e  $b_\mu$  se cancelam.

## 5.2 Identidades de Ward

### 5.2.1 Função de 2-pontos

Nesta seção, avaliamos as identidades de Ward correspondentes às funções de 2-pontos apresentadas na figura 5.2. Primeiramente, o lado esquerdo da eq. (5.20) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} p_\mu \sum_{i=a}^f \Pi_{(i)}^{\mu\nu}(p) &= \\ &= \left[ - \int_k Tr \left( \Gamma_1^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) + \int_k Tr \left( \Gamma_1^\nu \frac{1}{\not{k} - m} \right) \right] - \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} p_\mu \Gamma_1^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) \right] + \\ &+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} k_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) - \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} k_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k} - m} \right) \right] + \\ &+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} (k - p)_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) - \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} (k - p)_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) \right] + \\ &+ \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) + \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - m} \right) \right] + \\ &+ \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) + \int_k Tr \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - m} M_1 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Os diagramas das eqs. (5.5)-(5.10) correspondem a cada colchete da eq. (5.25), respectivamente. Nesta equação, usamos álgebra simples como  $\not{p} = \not{k} - m - (\not{k} - \not{p} - m)$  para cancelar um dos propagadores e separar alguns diagramas em duas partes. A soma do primeiro termo do diagrama (c), com o segundo termo do diagrama (d) e o diagrama (b), se cancela. Da mesma forma, o primeiro termo diagrama (e) cancela o segundo termo do diagrama (f). Depois de tomar o traço, avaliamos as integrais via regularização implícita. A identidade de Ward (IW) é satisfeita a menos de termos de superfície (TS):

$$\begin{aligned}
p_\mu \sum_{i=a}^f \Pi_{(i)}^{\mu\nu}(p) &= 4(12c^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p^\nu + 4p^2 c^{\nu\alpha} p_\alpha + 4p^2 c^{\alpha\nu} p_\alpha)(\xi_0 - v_0) + 4(p^2(me^\nu - a^\nu) + 2(me \cdot p - a \cdot p)p^\nu) \times \\
&\times (2v_0 - \xi_0) + 4(c^{\nu\alpha} p_\alpha + c^{\alpha\nu} p_\alpha)(2v_2 - \xi_2 - p^2\sigma_0) - 8c^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p^\nu \sigma_0. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

O resultado acima depende de TS's logarítmicos ( $v_0$ ,  $\xi_0$  e  $\sigma_0$ ) e de TS's quadráticos ( $v_2$  e  $\xi_2$ ). Conforme apresentado anteriormente, estes TS's correspondem à diferença de duas integrais divergentes e são, por isso, indeterminados. Novamente, vamos fixá-los por meio de simetrias [13]. Desta vez, vamos exigir invariância de rótulo dos diagramas. Essa invariância assume que resultados físicos não devem depender da maneira que rotulamos as linhas internas dos *loops* dos diagramas. Existe uma liberdade de escolha deste rótulo desde que o vínculo de conservação de energia-momento em cada vértice seja respeitado. Vamos estender esta discussão na próxima seção, após avaliar a IW da função de 3-pontos.

É válido notar que a combinação  $me^\nu - a^\nu$  na eq. (5.26) não é observável porque pode ser removida com uma redefinição de campo na lagrangiana (5.1). Por outro lado, temos também a parte simétrica de  $c_{\mu\nu}$ , que em princípio, é observável. Em ambos os casos, um valor espúrio de um TS levaria à errada conclusão de uma anomalia de calibre, expressa por coeficientes observáveis ou não.

### 5.2.2 Função de 3-pontos

Procedemos avaliando o lado esquerdo da eq.(5.21):

$$\begin{aligned}
(p+q)_\alpha \sum_{j=a}^i T_{(j)}^{\mu\nu\alpha}(p,q) &= \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{\Gamma}_1^\alpha(p+q)_\alpha \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{\Gamma}_1^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) + \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{\Gamma}_1^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ \int_k Tr \left( \bar{\Gamma}_1^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) - \int_k Tr \left( \bar{\Gamma}_1^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{\Gamma}_1^{\lambda k\lambda} \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{\Gamma}_1^{\lambda k\lambda} \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{\Gamma}_1^\lambda(k+q)_\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \right. \\
&- \left. \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{\Gamma}_1^\lambda(k+q)_\lambda \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{\Gamma}_1^\lambda(k-p)_\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) + \right. \\
&+ \left. \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \bar{\Gamma}_1^\lambda(k-p)_\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) + \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \right) - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] + \\
&+ \left[ \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \int_k Tr \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \bar{M}_1 \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right]. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Os diagramas das eqs. (5.11)-(5.19) correspondem a cada colchete da eq. (5.27), respectivamente. Novamente, usamos a álgebra simples  $\not{p} + \not{q} = \not{k} + \not{q} - m - (\not{k} - \not{p} - m)$ , para excluir um propagador e separar algumas amplitudes em duas partes. A soma do primeiro termo do diagrama (e), com o primeiro termo do diagrama (f) e o diagrama (a), se cancela. O primeiro termo do diagrama (h) cancela o primeiro termo do diagrama (i). Nos termos restantes, não realizamos *shifts* para gerar outros cancelamentos. Isto porque a operação gera TS's extras, quadráticos e logarítmicos, uma vez que as integrais são divergentes. Além disso, precisamos de cautela ao avaliar o objeto  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^5]$  encontrado na equação acima. Por um lado, é possível usar a seguinte identidade para reduzir o número de matrizes de Dirac:

$$\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu = g^{\mu\beta} \gamma^\nu + g^{\nu\beta} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\beta - i\epsilon^{\mu\beta\nu\rho} \gamma_\rho \gamma_5. \quad (5.28)$$

Usando a eq. (5.28),  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\xi \gamma^5] = 4i\epsilon^{\mu\beta\nu\xi}$  e  $\gamma_5 \gamma^\rho \gamma_5 = -\gamma^\rho$ , chegamos ao resultado

$$Tr[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^5] = 4i(g^{\beta\mu} \epsilon^{\nu\xi\alpha\lambda} + g^{\beta\nu} \epsilon^{\mu\xi\alpha\lambda} - g^{\mu\nu} \epsilon^{\beta\xi\alpha\lambda} - g^{\lambda\alpha} \epsilon^{\mu\beta\nu\xi} + g^{\xi\lambda} \epsilon^{\mu\beta\nu\alpha} - g^{\xi\alpha} \epsilon^{\mu\beta\nu\lambda}). \quad (5.29)$$

Por outro lado, é completamente arbitrário quais três matrizes  $\gamma$  escolhemos para aplicar a eq. (5.28). Uma escolha diferente levaria a uma equação como a (5.29), porém, com índices de Lorentz permutados. Além disso, a eq.  $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$  deve ser evitada dentro de uma integral divergente, uma vez que esta operação fixa o TS, como mostraremos no próximo capítulo. Esta abordagem também é discutida em [70]. Por isso, precisamos considerar todas as permutações de índices de Lorentz na eq. (5.29). Para isso, o traço mais geral seria [70, 74]:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{4} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^5] &= -g^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} + g^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta\mu\nu} - g^{\alpha\delta} \epsilon^{\beta\gamma\mu\nu} - g^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\nu} + g^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\mu} - g^{\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\delta\mu\nu} + g^{\beta\delta} \epsilon^{\alpha\gamma\mu\nu} \\ &+ g^{\beta\mu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\nu} - g^{\beta\nu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\mu} - g^{\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - g^{\gamma\mu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\nu} + g^{\gamma\nu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\mu} + g^{\delta\mu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} - g^{\delta\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} - g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

que pode ser obtido substituindo a matriz  $\gamma_5$  pela definição dela, *i. e.*,  $\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$ , e tomando o traço.

Após tomar os traços em (5.27), regularizamos as integrais e encontramos

$$\begin{aligned} (p+q)_\alpha \sum_{j=a}^i T_{(j)}^{\mu\nu\alpha} &= 4i(d_{\lambda\gamma} + d_{\gamma\lambda}) p^\lambda p_\alpha \epsilon^{\alpha\gamma\mu\nu} (v_0 - \xi_0) + 8m(p^\nu e^\mu + p^\mu e^\nu + g^{\mu\nu} e \cdot p)(2v_0 - \xi_0) + \\ &+ 8(p^\nu a^\mu + p^\mu a^\nu + g^{\mu\nu} a \cdot p)(2v_0 - \xi_0) - (-p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Como na subseção anterior, a IW depende de TS's indeterminados, apenas logarítmicos desta vez, porque as amplitudes são linearmente divergentes. Novamente, a IW é quebrada apenas por estes termos arbitrários. Na próxima seção, mostraremos que eles podem ser fixados pela invariância de rótulo.

### 5.3 A relação entre rótulo e simetria de calibre

Como discutido na seção anterior, a simetria de calibre é quebrada por termos arbitrários e dependentes de regularização. Veremos adiante que estes termos podem ser determinados via invariância de rótulo.

Esta última é uma característica compartilhada por qualquer teoria, uma vez que assume que resultados físicos não devem depender da maneira que rotulamos as linhas internas dos diagramas de Feynman, desde que respeitemos a conservação de energia-momento em cada vértice. Os TS's são responsáveis não só pela quebra de invariância de calibre, mas pela quebra de rótulo também. Isto nos permite conjecturar que exista alguma relação entre rótulo e simetria de calibre. Conjectura esta que também verificaremos a seguir.

Primeiramente, recorremos a representação diagramática de uma IW [75]. Por exemplo, para uma IW de uma função de  $n$ -pontos qualquer, precisamos inserir uma perna de fóton externa em uma função de  $(n-1)$ -pontos em todos os lugares possíveis. Na figura 5.4, podemos ver um exemplo simples para o caso da IW da função de 2-pontos.

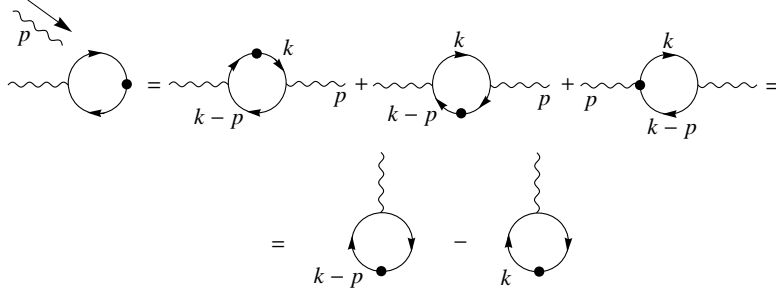


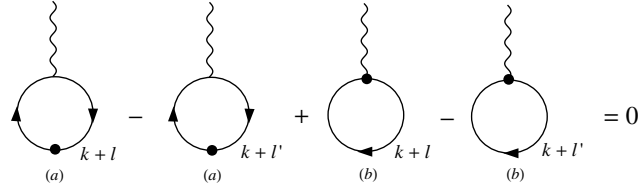
Figura 5.4: Relação entre rótulo e simetria de calibre a 1-loop.

A figura 5.4 é a forma diagramática de uma manipulação simples das amplitudes:

$$\begin{aligned}
 p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) &= \left[ \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} k_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-m} \not{p} \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] + \\
 &+ \left[ \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} \not{p} \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} (k-p)_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] - \left[ \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} p_\mu \Gamma_1^\mu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] = \\
 &= \left[ \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} k_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} k_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-m} \right) \right] + \\
 &+ \left[ \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} (k-p)_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \right. \\
 &- \left. \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} (k-p)_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) \right] - \int_k \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} p_\mu \Gamma_1^\mu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) = \\
 &= \int_{\mathbf{k}} \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} (\mathbf{k}-\mathbf{p})_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-\not{p}-m} \right) - \int_{\mathbf{k}} \text{Tr} \left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}-m} \mathbf{k}_\lambda \Gamma_1^\lambda \frac{1}{\not{k}-m} \right) \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Vemos em (5.32) que uma IW pode ser escrita como a diferença entre dois diagramas de diferentes rótulos. Se essa diferença for nula, *i. e.*, a condição para satisfazer invariância de rótulo, a invariância de calibre é automaticamente satisfeita. O inverso também é válido, se a identidade de Ward for nula, a invariância de rótulo é automaticamente satisfeita. Avaliando os diagramas explicitamente, obtemos a condição a seguir para invariância de rótulo.

Na figura 5.5,  $l$  é um rótulo qualquer e podemos fazê-lo proporcional ao momento, *i. e.*,  $l = \alpha p$ . Considerando os *tadpoles* como funções de  $l$ ,  $\tau^\nu(l)$ , o resultado do lado esquerdo da figura 5.5 é


 Figura 5.5: Invariância de rótulo de *tadpoles*.

$$\begin{aligned}
 (\tau_{(a)}^{\nu}(l) - \tau_{(a)}^{\nu}(l')) + (\tau_{(b)}^{\nu}(l) - \tau_{(b)}^{\nu}(l')) &= 4(\alpha'^3 - \alpha^3)(12c^{\alpha\beta}p_{\alpha}p_{\beta}p^{\nu} + 4p^2c^{\nu\alpha}p_{\alpha} + 4p^2c^{\alpha\nu}p_{\alpha})(\xi_0 - v_0) + \\
 &+ 4(\alpha^2 - \alpha'^2)(p^2me^{\nu} + 2mp^{\nu}e \cdot p)(2v_0 - \xi_0) + 4(\alpha^3 - \alpha'^3)(2c^{\alpha\beta}p_{\alpha}p_{\beta}p^{\nu} + c^{\nu\alpha}p_{\alpha}p^2 + c^{\alpha\nu}p_{\alpha}p^2)\sigma_0 + \\
 &+ 4(\alpha' - \alpha)(c^{\nu\alpha}p_{\alpha} + c^{\alpha\nu}p_{\alpha})(2v_2 - \xi_2)
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Como  $\alpha \neq \alpha'$  por definição, a única solução possível da eq. (5.33) é fazer todos os termos de superfície nulos, *i. e.*,  $v_0 = \xi_0 = \sigma_0 = 0$  e  $v_2 = \xi_2 = 0$ .<sup>1</sup> Esta solução garante a invariância de calibre uma vez que a IW de (5.26) é satisfeita.

De maneira similar, o mesmo ocorre para a função de Green de 3-pontos. A condição para invariância de rótulo dos diagramas triângulo está apresentada na figura 5.6.

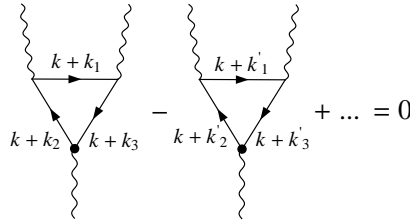


Figura 5.6: Representação diagramática da invariância de rótulo para os diagramas triângulo.

Desta vez, temos pelo menos três rótulos diferentes, correspondentes a cada linha interna. Assim, o que precisamos calcular é

$$(p + q)_{\alpha} \sum_{i=a}^f (T_{(i)}^{\mu\nu\alpha}(k_1, k_2, k_3) - T_{(i)}^{\mu\nu\alpha}(k'_1, k'_2, k'_3)) = 0. \tag{5.34}$$

Não é necessário considerar os diagramas  $(g)$ ,  $(h)$  e  $(i)$ . Eles apenas contribuem com outros coeficientes que violam Lorentz e não alteram as conclusões abaixo.

O rótulo geral  $k_i$  obedece as seguintes relações devido ao vínculo de conservação de energia-momento

<sup>1</sup>Na eq. (5.33), existe uma relação entre os TS's quadráticos,  $v_2 = \frac{\xi_2}{2}$ , que também é possível. Contudo, o TS  $v_2$  aparece isolado na condição para invariância de rótulo da QED usual e deve ser nulo para garantir esta condição.

em cada vértice:

$$\begin{aligned}k_2 - k_3 &= p + q, \\k_1 - k_3 &= p, \\k_2 - k_1 &= q.\end{aligned}\tag{5.35}$$

As equações (5.35) nos permite parametrizar os momentos  $k_i$  como combinação dos momentos externos:

$$\begin{aligned}k_1 &= \alpha p + (\beta - 1)q, \\k_2 &= \alpha p + \beta q, \\k_3 &= (\alpha - 1)p + (\beta - 1)q.\end{aligned}\tag{5.36}$$

Considerando as equações acima, a condição (5.34) nos leva a:

$$\begin{aligned}(p + q)_\alpha \sum_{i=a}^f (T_{(i)}^{\mu\nu\alpha}(k_1, k_2, k_3) - T_{(i)}^{\mu\nu\alpha}(k'_1, k'_2, k'_3)) &= 8i(p + q)_\alpha [(d_\eta^\lambda \epsilon^{\eta\mu\nu\alpha} + d_\eta^\alpha \epsilon^{\eta\nu\mu\lambda} + d_\eta^\nu \epsilon^{\mu\eta\lambda\alpha} + d_\eta^\mu \epsilon^{\nu\eta\alpha\lambda} + \\+ d_\kappa^\kappa \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha})v_0 - d_\kappa^\kappa \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha}\xi_0] &[(\alpha - \alpha')p_\lambda + (\beta - \beta')q_\lambda] = 0\end{aligned}\tag{5.37}$$

Novamente, uma vez que  $\alpha \neq \alpha'$  e  $\beta \neq \beta'$  por definição, a única solução possível é  $v_0 = \xi_0 = 0$ . Podemos então concluir que a invariância de rótulo é condição necessária e suficiente para garantir a invariância de calibre a nível quântico, *i.e.*,  $(p + q)_\alpha \sum_{i=a}^f T_{(i)}^{\mu\nu\alpha} = 0$ . Isto significa conservação de carga elétrica além do nível árvore e a ausência de anomalias de calibre no SME.

A mesma ideia pode ser aplicada para qualquer diagrama com um número arbitrário de pernas e *loops*. Por exemplo, se o diagrama de partida tem quatro (ou mais) pernas externas, existe uma equação equivalente a da figura 5.4, mas que fornece a diferença entre dois diagramas com quatro (ou mais) pernas externas cujos rótulos são diferentes. Uma vez que estes diagramas são finitos e a parte finita não depende de rótulo porque é física, a invariância de calibre é trivialmente respeitada neste caso.

Além disso, para completar a prova a *1-loop*, precisaríamos calcular a IW correspondente aos diagramas caixa. Apesar deste cálculo ser mais complicado, podemos novamente fazer o uso da ideia apresentada na figura 5.4. Neste caso, para a IW dos diagramas caixa, teríamos a diferença entre dois diagramas de três pernas de diferentes rótulos. Como mostramos na eq. (5.37) que esta diferença deve ser zero para assegurar a IW da função de 3-pontos, a IW dos diagramas caixa deve ser também zero.

## Capítulo 6

# Invariância de rótulo e democracia em teorias de calibre quirais abelianas

Neste capítulo, apresentaremos a anomalia quiral em duas e em quatro dimensões. Nos diagramas apresentados, veremos que existem dois tipos de identidades de Ward (IW), um associado à simetria de calibre e outro associado à simetria quiral. Como conhecido na literatura, não é possível satisfazer ambas as IW. Se a IW da simetria de calibre é satisfeita, a da simetria quiral é automaticamente violada e vice-versa. A anomalia quiral é física, responsável pelo decaimento do pión em dois fótons. Ela, geralmente, é pensada na literatura como uma consequência da quebra da invariância de rótulo, como apresentado em livros texto de TQC [76, 77], por exemplo. Contudo, nosso objetivo neste capítulo será o de mostrar que não necessariamente, *i.e.* é possível obter o resultado físico da anomalia quiral para um rótulo qualquer e esta invariância de rótulo é, assim como no caso do capítulo anterior, necessária para assegurar a simetria de calibre. Os resultados deste capítulo estão publicados em [78].

### 6.1 O modelo quiral de Schwinger

Primeiramente, vamos considerar o modelo quiral de Schwinger como um exemplo de como tratar quantidades dependentes de regularização em teorias com matrizes  $\gamma_5$ . Vamos também discutir como a anomalia aparece do ponto de vista do método de regularização implícita, mostrando como ela pode ser democraticamente apresentada entre as IW axial e vetorial.

A teoria que vamos estudar é definida pela seguinte ação efetiva [13]

$$\Gamma_{QS}(A) = -i \ln \det(i\cancel{\partial} - e(1 - \gamma_5)A). \quad (6.1)$$

Focaremos na função de dois pontos para o fóton com um vértice quiral. Este é o análogo da anomalia

AVV, que discutiremos na próxima seção, para (1+1)-dimensões. Explicitamente, temos o diagrama da figura 6.1 cuja amplitude é

$$\Pi_{\mu\nu} = -e^2 \text{Tr} \int_q \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} - \not{p}} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{q}}, \quad (6.2)$$

onde  $\int_q$  corresponde a  $\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}$ .

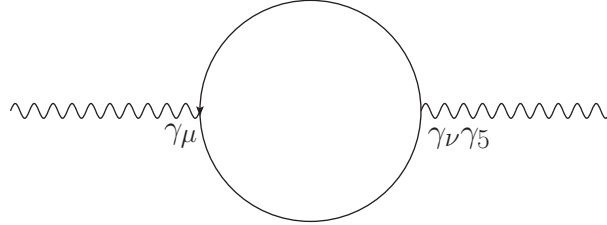


Figura 6.1: Função de dois pontos para o fóton com um vértice axial.

Neste ponto, precisamos adotar um método de regularização para lidar com a amplitude divergente. Neste caso, adotamos uma versão (1+1)-dimensional da regularização implícita. Podemos também considerar que uma vez que a álgebra das matrizes  $\gamma_5$  é bem definida em dimensões inteiras, qualquer identidade envolvendo tal objeto permanece válida em um método de regularização que mantém a dimensão física da teoria. Por incrível que pareça, esta afirmação é falsa, como veremos. Apesar das identidades envolvendo  $\gamma_5$ , em particular  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ , serem verdade em dimensões inteiras, elas podem ser falsas quando estão dentro de uma integral divergente.

Dando continuidade ao nosso exemplo, a primeira prescrição adotada para tratar as matrizes  $\gamma_5$  será:

$$\gamma_\nu \gamma_5 = \epsilon_{\nu\theta} \gamma^\theta. \quad (6.3)$$

Depois deste passo, tomamos o traço e regularizamos as integrais. O resultado é

$$\Pi_{\mu\nu} = -2e^2 \epsilon_{\nu\theta} \left[ \frac{(\delta_\mu^\theta p^2 - p_\mu p^\theta)(-2b)}{p^2} - \delta_\mu^\theta v_0 \right], \quad (6.4)$$

onde  $b = i/4\pi$  e  $g^{\mu\nu} v_0 = g^{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} - 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2}$  é o termo de superfície logarítmico em duas dimensões.

As duas identidades de Ward correspondentes, a vetorial e a axial, são respectivamente:

$$\begin{aligned} p^\mu \Pi_{\mu\nu} &= 2e^2 \epsilon_{\nu\theta} p^\theta v_0, \\ p^\nu \Pi_{\mu\nu} &= -2e^2 \epsilon_{\mu\theta} p^\theta (2b + v_0). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Notamos que a arbitrariedade expressa pelo termo de superfície permanece na identidade. Isto nos permite obter uma visão democrática das IW, ou seja, uma não é violada em detrimento da outra devido a escolha do rótulo ou do método de regularização. Fazendo a escolha adequada de  $v_0$  podemos preservar (ou violar) uma das identidades e violar (ou preservar) a outra. Se fizermos  $v_0 = 0$ , preservamos a vetorial enquanto que fazendo  $v_0 = -2b$  preservamos a axial. Podemos ainda distribuir a anomalia (escolhendo  $v_0 = -b$ ). Em outras palavras, as IW são tratadas em pé de igualdade e o TS é o termo arbitrário a ser

fixado dependendo da situação física.

Vamos agora utilizar uma prescrição diferente na manipulação da matriz  $\gamma_5$  que, a primeira vista, deveria fornecer o mesmo resultado acima. Usaremos a identidade

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (6.6)$$

que implica em

$$\Pi_{\mu\nu} = e^2 \text{Tr} \int_q \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} - \not{p}} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{1}{\not{q}}. \quad (6.7)$$

Como anteriormente, vamos utilizar a equação (6.3) para escrever

$$\frac{1}{\not{q} - \not{p}} \gamma_5 = \frac{(q-p)^\alpha}{(q-p)^2} \gamma_\alpha \gamma_5 = \frac{(q-p)^\alpha}{(q-p)^2} \epsilon_{\alpha\theta} \gamma^\theta. \quad (6.8)$$

A avaliação de  $\Pi_{\mu\nu}$  agora fornece

$$\Pi_{\mu\nu} = 2e^2 \frac{b}{p^2} (p^\alpha \epsilon_{\alpha\nu} p_\mu + p^\alpha \epsilon_{\alpha\mu} p_\nu), \quad (6.9)$$

que é um resultado diferente do anterior. As identidades de Ward desta vez são

$$\begin{aligned} p^\mu \Pi_{\mu\nu} &= -2e^2 \epsilon_{\nu\theta} p^\theta b, \\ p^\nu \Pi_{\mu\nu} &= -2e^2 \epsilon_{\mu\theta} p^\theta b. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Notamos o desaparecimento do termo de superfície. Isto nos permite conjecturar que, utilizar as prescrições das equações (6.6) e (6.8), parece implicitamente avaliar integrais divergentes. Se escolhermos  $v_0 = -b$  nas identidades de Ward do primeiro caso, obteríamos as identidades acima.

A maneira com a qual lidamos com objetos de dimensão específica (tais como  $\gamma_5$ ) dentro de integrais divergentes parece ser ambígua. Na equação (6.9) vemos que outro tensor de Levi-Civita com um índice diferente aparece. Se utilizarmos a equação (6.6), o índice do Levi-Civita que aparece quando utilizamos a equação (6.3) muda, de forma que este índice parece ser arbitrário. A questão agora seria em qual prescrição deveríamos confiar. Na verdade, a avaliação do traço deve ser feita de maneira a considerar todos os índices, uma simetrização do traço como apresentada no capítulo anterior em (3+1)-dimensões, *i. e.*, traços envolvendo  $\gamma_5$  devem conter todas os termos permitidos pela estrutura tensorial deles. Desta forma, evitamos ambiguidades ao contrair os índices do termo de superfície com os índices destes traços. Para o caso de (1+1)-dimensões, deveríamos adotar o seguinte traço simetrizado

$$\text{Tr}(\gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5) = -2(\epsilon_{\sigma\nu} g_{\alpha\mu} - \epsilon_{\mu\nu} g_{\alpha\sigma} + \epsilon_{\alpha\nu} g_{\sigma\mu} - \epsilon_{\sigma\alpha} g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\alpha} g_{\sigma\nu} + \epsilon_{\sigma\mu} g_{\alpha\nu}), \quad (6.11)$$

que pode ser obtido substituindo  $\gamma_5$  pela definição,  $\gamma_5 = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu\rho} \gamma^\mu \gamma^\rho$ , e tomando o traço.

Substituindo essa identidade na amplitude e usando a prescrição  $\gamma_\alpha \gamma_5 = \epsilon_{\alpha\theta} \gamma^\theta$  finalmente obtemos

$$\Pi_{\mu\nu} = -2e^2 \epsilon_{\nu\theta} \left[ \frac{(\delta_\mu^\theta p^2 - p_\mu p^\theta)(-2b)}{p^2} - \delta_\mu^\theta v_0 \right]. \quad (6.12)$$

O resultado correto é, portanto, o da equação (6.4).

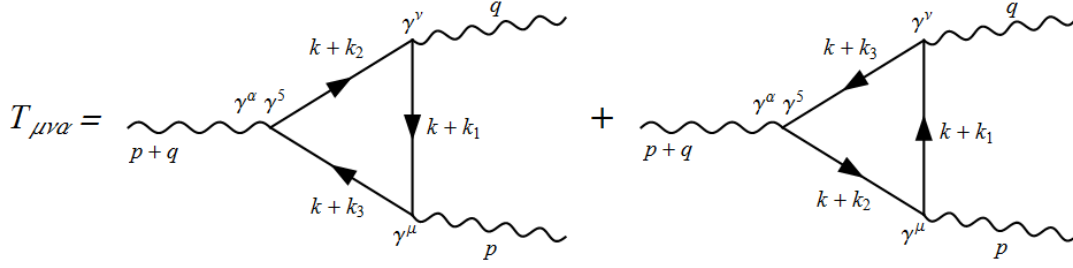


Figura 6.2: Diagramas triângulo que contribuem para a anomalia ABJ. Rotulamos as linhas internas com rótulos arbitrários  $k_i$ .

## 6.2 Revisitando a anomalia de Adler-Bardeen-Bell-Jackiw (ABJ)

Desde sua descoberta [32], a anomalia ABJ foi calculada por diversas abordagens, incluindo a recente abordagem da "posição mais a direita" (*rightmost position*) [71], uma prescrição para tratar matrizes  $\gamma_5$  desta amplitude, que permite a regularização dimensional preservar a simetria de calibre neste caso. Uma visão geral sobre os vários esquemas de regularização aplicados neste cálculo pode ser encontrada em [76].

Nesta seção, vamos obter a anomalia ABJ do ponto de vista da regularização implícita. A vantagem do método neste caso, como no caso da seção anterior, é obter uma visão democrática das identidades de Ward. Além disso, nesta abordagem, podemos ver a relação entre rótulo e simetria de calibre em teorias quirais, como visto no capítulo anterior na QED estendida. Isto nos permite reinterpretar o papel do rótulo na anomalia quiral.

Novamente, encontramos na amplitude objetos da forma  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^5]$ . Uma versão (3+1)-dimensional da simetrização do traço apresentada na seção anterior, também utilizada no capítulo anterior, contém todas as estruturas de Lorentz disponíveis. Esta equação é

$$\begin{aligned} \frac{-i}{4} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^5] = & -g^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} + g^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta\mu\nu} - g^{\alpha\delta} \epsilon^{\beta\gamma\mu\nu} - g^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\nu} + g^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\mu} - g^{\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\delta\mu\nu} + \\ & + g^{\beta\delta} \epsilon^{\alpha\gamma\mu\nu} + g^{\beta\mu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\nu} - g^{\beta\nu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\mu} - g^{\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - g^{\gamma\mu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\nu} + g^{\gamma\nu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\mu} + \\ & + g^{\delta\mu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} - g^{\delta\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} - g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Temos de usar este resultado não ambíguo na amplitude do triângulo sempre que encontrarmos o traço de seis matrizes  $\gamma$  com uma matriz  $\gamma_5$ . A equação (6.13) já foi usada anteriormente em outros trabalhos [70, 74]. A amplitude dos diagramas de Feynman da figura 6.2 é dada por

$$T_{\mu\nu\alpha} = - \int_k Tr \left[ i\gamma_\nu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1 - m} i\gamma_\mu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_3 - m} i\gamma_\alpha \gamma^5 \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right] + (\mu \leftrightarrow \nu, p \leftrightarrow q). \quad (6.14)$$

onde os rotulamentos arbitrários  $k_i$  obedecem às seguintes relações devido a conservação do momento em cada vértice

$$\begin{aligned} k_2 - k_3 &= p + q, \\ k_3 - k_1 &= p, \\ k_1 - k_2 &= q. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Novamente, as equações (6.15) nos permite parametrizar o rotulamento  $k_i$  na forma

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha p + (\beta - 1)q, \\ k_2 &= \alpha p + \beta q, \\ k_3 &= (\alpha - 1)p + (\beta - 1)q, \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais quaisquer que mapeiam a liberdade que temos em escolher o rótulo dos momentos internos, *i. e.*, podemos adicionar qualquer combinação de  $q$  e  $p$  em cada linha interna desde que respeitemos a conservação do momento nas equações (6.15). As equações (6.15) e (6.16) do outro diagrama são obtidas na troca  $p \leftrightarrow q$ .

Depois de tomar o traço utilizando a equação (6.13), regularizamos as integrais da amplitude (6.14). O resultado é

$$T_{\mu\nu\alpha} = 4iv_0(\alpha - \beta - 1)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(q - p)^\beta + T_{\mu\nu\alpha}^{finite}, \quad (6.17)$$

onde  $v_0$  é o termo de superfície e  $T_{\mu\nu\alpha}^{finite}$  é a parte finita da amplitude, detalhada no apêndice juntamente com as integrais deste capítulo.

Aplicamos então os respectivos momentos externos na equação (6.17) para obter as identidades de Ward:

$$\begin{aligned} p_\mu T^{\mu\nu\alpha} &= -4iv_0(\alpha - \beta - 1)\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda, \\ q_\nu T^{\mu\nu\alpha} &= 4iv_0(\alpha - \beta - 1)\epsilon^{\alpha\mu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda, \\ (p + q)_\alpha T^{\mu\nu\alpha} &= 2mT_5^{\mu\nu} + 8iv_0(\alpha - \beta - 1)\epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda - \frac{1}{2\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde  $T_5^{\mu\nu}$  é o usual triângulo vetor-vetor-pseudo escalar.

O número  $v_0(\alpha - \beta - 1)$  é arbitrário uma vez que  $v_0$  é a diferença de dois infinitos e  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais quaisquer. Podemos resumir essa arbitrariedade em um único parâmetro  $a$  redefinindo  $4iv_0(\alpha - \beta - 1) \equiv \frac{1}{4\pi^2}(1 + a)$ . As equações (6.18) ficam na forma

$$\begin{aligned} p_\mu T^{\mu\nu\alpha} &= -\frac{1}{4\pi^2}(1 + a)\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda, \\ q_\nu T^{\mu\nu\alpha} &= \frac{1}{4\pi^2}(1 + a)\epsilon^{\alpha\mu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda, \\ (p + q)_\alpha T^{\mu\nu\alpha} &= 2mT_5^{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi^2}a\epsilon^{\mu\nu\beta\lambda}p_\beta q_\lambda \end{aligned} \quad (6.19)$$

Como no caso do modelo quiral de Schwinger, podemos ver a democracia nas identidades de Ward (6.19). Se quisermos respeitar invariância de calibre, escolhemos  $a = -1$  e, automaticamente, a identidade axial é violada por uma quantidade  $-\frac{1}{2\pi^2}$ . Por outro lado, se quisermos manter a simetria quiral a nível quântico, escolhemos  $a = 0$  e as identidades vetoriais são violadas. A escolha  $a = -1$  faz o termo de superfície ser nulo ou a combinação de rótulo  $\alpha - \beta - 1 = 0$ . A primeira escolha mostra que podemos obter a anomalia quiral para um rótulo qualquer, ou seja, a anomalia quiral não ocorre por causa da quebra de invariância de rótulo. É possível escolher o rótulo tal que  $\alpha - \beta - 1 = 0$ . Contudo, também é possível escolher o termo de superfície e obter um resultado geral e invariante de rótulo. Do ponto de vista físico, é mais interessante deixar o rótulo geral e escolher a arbitrariedade expressa pelo termo de superfície ao invés dele.

Concluimos que, ao contrário do que a literatura sobre anomalias diz, a anomalia ABJ não se manifesta devido a quebra de invariância de rótulo pois realizamos este cálculo da maneira mais geral possível. Alguns livros de TQC realizam este cálculo escolhendo o rótulo de tal forma a satisfazer as identidades vetoriais e violar a axial. Na próxima seção, veremos que invariância de rótulo e simetria de calibre estão conectadas diagramaticamente, de maneira independente de regularização.

### 6.3 A relação entre rótulo e simetria de calibre em teorias quirais

Nesta seção, apresentaremos a conexão entre invariância de rótulo e invariância de calibre vetorial em teorias de calibre quirais abelianas em ordem arbitrária de teoria de perturbação. Adotamos o ponto de vista diagramático, apresentado no capítulo anterior para a QED estendida. Assim como nesta teoria, invariância de rótulo também está conectada a simetria de calibre vetorial, mesmo no caso em que temos um acoplamento axial entre férmions.

O ponto de partida para a prova diagramática de invariância de calibre está apresentado na fig. 6.3, onde o momento externo  $p$  é inserido de todas as maneiras possíveis em cada um dos diagramas desta figura fornecendo uma representação diagramática das IW [75], como apresentado na fig. 6.4.

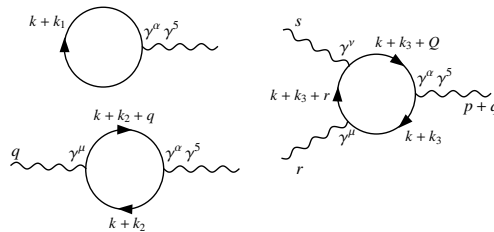


Figura 6.3: Diagramas a partir dos quais a prova de invariância de calibre é construída.

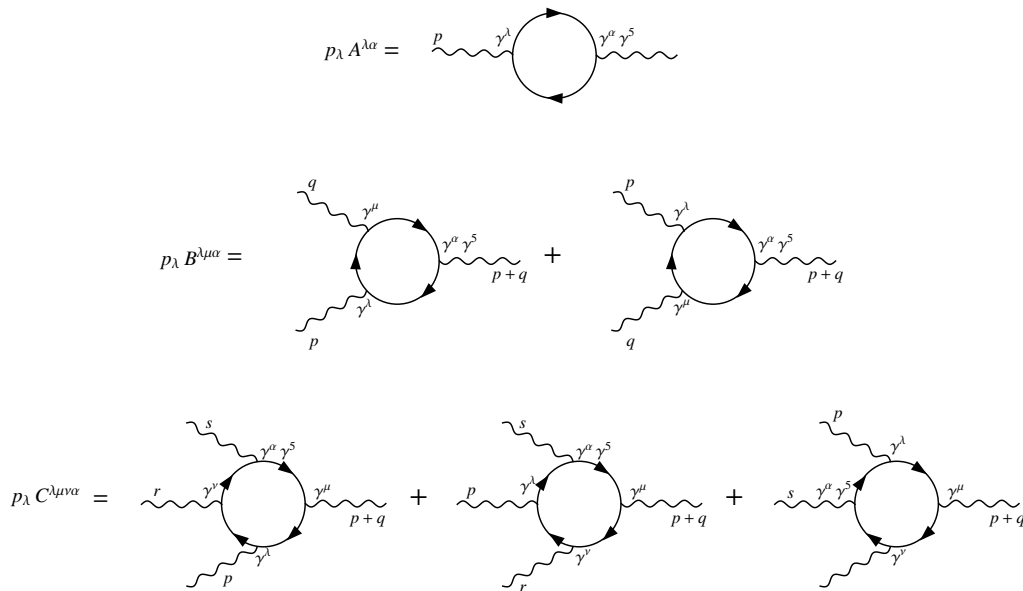


Figura 6.4: Representação diagramática das IW.

Explicitamente, obtemos:

$$p_\lambda A^{\lambda\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \quad (6.20)$$

$$p_\lambda B^{\lambda\mu\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{p} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] + \\ + \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{q} - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{p} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \quad (6.21)$$

$$p_\lambda C^{\lambda\mu\nu\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{r} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{Q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \\ + \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{r} - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{r} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{Q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \\ + \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{r} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{Q} - m} \not{p} \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{Q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \quad (6.22)$$

onde  $k_i$  são rótulos arbitrários e  $Q = s + r$ .

Diagramas com mais de quatro pernas externas são finitos, e, portanto, invariantes de rótulo trivialmente. Procedemos aplicando a soma e subtração dos momentos internos,  $\not{p} = (\not{k} + \not{k}_1 + \not{p} - m) - (\not{k} + \not{k}_1 - m)$ , por exemplo, o que nos permite escrever

$$p_\lambda A^{\lambda\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] - \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \quad (6.23)$$

$$p_\lambda B^{\lambda\mu\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \\ - \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 + \not{q} + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \quad (6.24)$$

$$p_\lambda C^{\lambda\mu\nu\alpha} = \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{r} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{Q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \\ - \int_k Tr \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{r} + \not{p} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 + \not{p} + \not{Q} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right]. \quad (6.25)$$

A representação diagramática da equação acima é apresentada abaixo na fig. 6.5,

Notando que diagramas de Feynman respeitam invariância de rótulo se a diferença entre diagramas idênticos, mas com rótulos diferentes, é nula, podemos facilmente ver que o lado direito da equação acima é apenas uma condição para implementar invariância de rótulo para os diagramas a partir dos quais a prova de invariância de calibre é construída. Logo, mostramos a partir desta prova diagramática que a invariância de rótulo está intrinsecamente conectada à simetria de calibre vetorial. Isto significa que invariância de rótulo é condição necessária e suficiente para implementar invariância de calibre.

Vale enfatizar que não adotamos nenhum método de regularização para tal prova, mostrando que a relação entre rótulo e calibre é geral. Isto nos permite concluir que um esquema de regularização que preserve(ou quebre) uma simetria, automaticamente preserva (ou quebra) a outra. Esta relação também pode ser vista via termos de superfícies. Se estes forem nulos, a simetria de calibre é garantida, implicando na invariância de rótulo e vice-versa. A prova diagramática permite a mesma conclusão, sem que os TS's

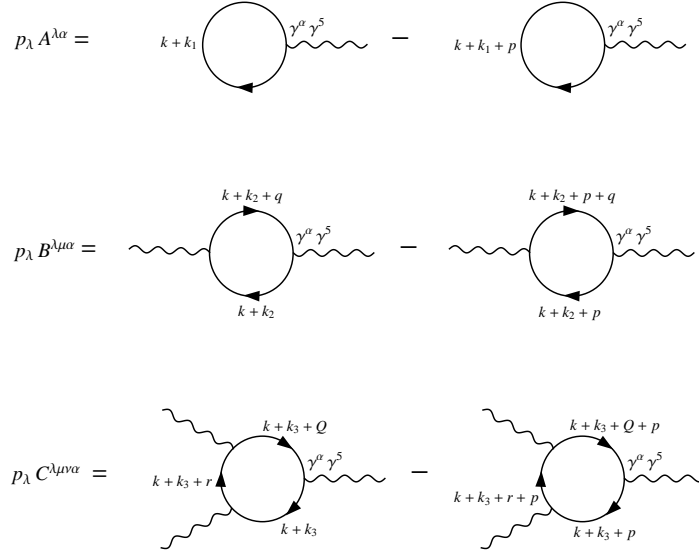


Figura 6.5: Representação diagramática da IW, mostrando a conexão dela com a invariância de rótulo.

sejam intermediários. Por completeza vamos avaliar as eqs. (6.20)-(6.22) em regularização implícita, o que fornece

$$p_\lambda A^{\lambda\alpha} = 0, \quad (6.26)$$

$$p_\lambda B^{\lambda\mu\alpha} = 4iv_0 \epsilon^{\mu\alpha\lambda\beta} q_\beta p_\lambda, \quad (6.27)$$

$$p_\lambda C^{\lambda\mu\nu\alpha} = 4iv_0 p_\lambda \epsilon^{\alpha\nu\mu\lambda}, \quad (6.28)$$

mostrando que o TS aparece como esperado.

Para concluir, apresentamos como a prova acima pode ser estendida para ordem arbitrária de teoria de perturbação. Para o caso de dois *loops*, por exemplo, apresentamos os detalhes a seguir. Como explicado em [75], a ideia por trás da prova de invariância de calibre é a seguinte: consideramos uma amplitude qualquer  $\mathcal{M}_0$  com um *loop* fermiônico. A IW é então obtida inserindo uma perna de fóton externa em todos os lugares possíveis na amplitude básica  $\mathcal{M}_0$ . Esta foi a abordagem utilizada no capítulo anterior e na prova a um *loop* acima, os diagramas da fig. 6.3 levam a representação das IW da fig. 6.4. Para dois *loops* o procedimento é similar, precisamos primeiro desenhar todas as genuínas correções a dois *loops*<sup>1</sup>. Por simplicidade, desenhamos apenas as funções de 1- e 2-pontos na fig. 6.6.

O próximo passo é inserir a perna externa de fóton de todas as maneiras possíveis, obtendo assim a representação diagramática da IW, como fizemos a um *loop*. Explicitamente, para a função de 2-pontos, temos o resultado da fig. 6.7.

A amplitude correspondente à primeira contribuição da fig. 6.7 pode ser reescrita como abaixo

$$\begin{aligned} & \int_{k_1} \int_{k_2} Tr \left[ \frac{1}{\not{k}_1 - m} \not{p} \frac{1}{\not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{k}_2 + \not{p} - m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \frac{g_{\sigma\rho}}{(k_1 - k_2)^2 - m^2} = \\ & = \int_{k_1} \int_{k_2} Tr \left[ \frac{1}{\not{k}_1 - m} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{k}_2 + \not{p} - m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \frac{g_{\sigma\rho}}{(k_1 - k_2)^2 - m^2} - \\ & - \int_{k_1} \int_{k_2} Tr \left[ \frac{1}{\not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\sigma \frac{1}{\not{k}_2 + \not{p} - m} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}_1 + \not{p} - m} \gamma^\alpha \gamma^5 \right] \frac{g_{\sigma\rho}}{(k_1 - k_2)^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

<sup>1</sup>Diagramas genuínos são diagramas sem *loops* fermiônicos fechados como sub-diagramas, caso já estudado anteriormente.

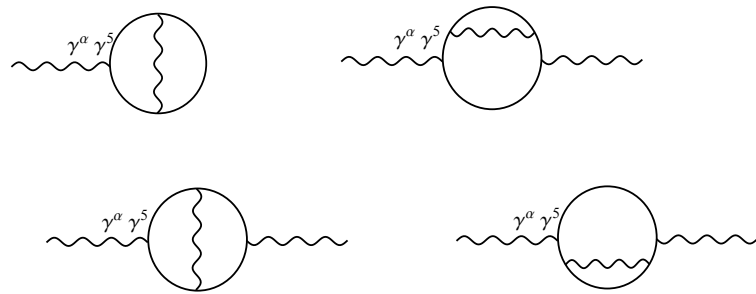


Figura 6.6: Funções de 1- e 2-pontos necessárias para a prova diagramática de invariância de calibre a dois *loops*.

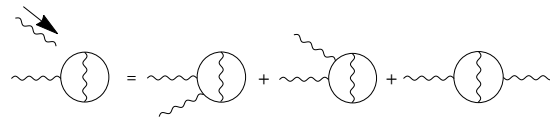


Figura 6.7: Representação diagramática da IW a dois *loops* para a função de 1-ponto.

onde substituímos  $\not{k} = (\not{k} + \not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - m)$  para chegar na segunda linha.

De maneira similar, calculamos o resultado das outras duas inserções. Apresentamos o resultado diagramático destas inserções na fig. 6.8.

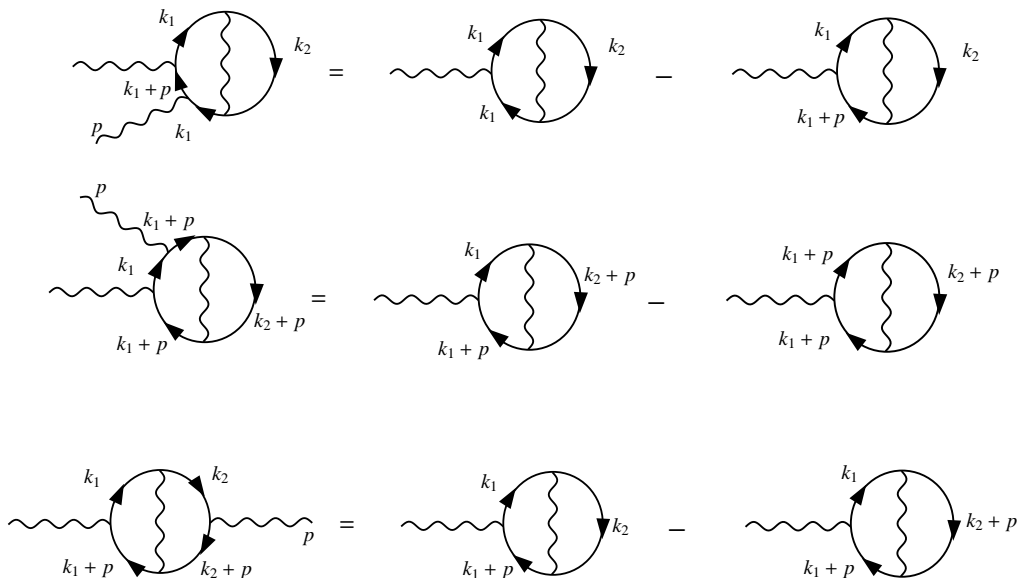


Figura 6.8: Representação diagramática do resultado de cada inserção no *tadpole*.

Assim, somando todas as contribuições obtemos o resultado apresentado na fig. 6.9(a).

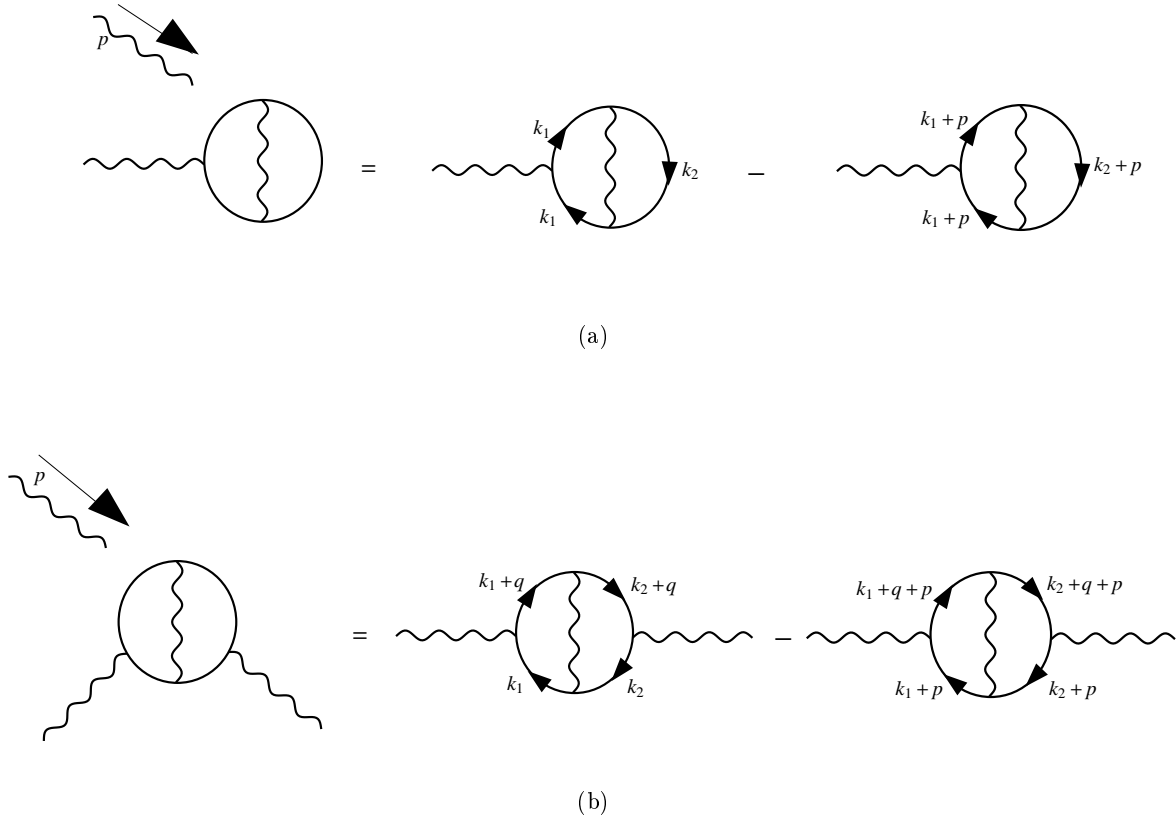


Figura 6.9: Representação diagramática da relação entre rótulo e calibre para diagramas a dois *loops* das funções de dois- e 3-pontos, (a) e (b) respectivamente. O momento externo  $p$  age como um rótulo arbitrário. Fazer o lado direito nulo corresponde a condição de invariância de rótulo, enquanto fazer o lado esquerdo nulo, corresponde a condição de invariância de calibre.

A figura acima mostra, para o caso a dois *loops*, que invariância de calibre está conectada à invariância de rótulo.

Para completar a prova, temos que calcular as outras IW ( $p_\lambda B^{\lambda\mu\alpha}$ ,  $p_\lambda C^{\lambda\mu\nu\alpha}$ ) que possuem, respectivamente, as funções de 2- e 3-pontos a dois *loops* como ponto de partida. Este cálculo é análogo aos anteriores, apresentamos o resultado de outro exemplo da fig. 6.6 na fig. 6.9. Obtivemos o resultado da fig. 6.9(b) que nos mostra mais um exemplo da relação entre rótulo e calibre. Da mesma forma, este procedimento pode ser aplicado para os outros diagramas da fig. 6.6 e para diagramas além de dois *loops*. A conclusão que cada um destes exemplos nos mostra é que a invariância de rótulo é garantida se, e somente se, a invariância de calibre também é.

## Capítulo 7

# Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, mostramos que o tratamento de infinitos em amplitudes divergentes de Teoria Quântica de Campos pode ser feito de maneira consistente na dimensão física da teoria e sem a introdução de um regulador explícito. Como consequência deste procedimento, tais amplitudes ficam contaminadas por termos de superfície, as chamadas arbitrariedades, que precisam ser fixados por simetrias da teoria ou por uma condição física. Desta maneira, uma dada simetria de uma certa teoria não é quebrada a nível quântico pelo método de regularização, mas sim pela condição física imposta pelo modelo. Como vimos ao longo dos exemplos apresentados, as simetrias ou as condições físicas podem ou não ser suficientes para fixar as arbitrariedades. Caso não sejam suficientes, a amplitude em questão é indeterminada e não tem significado físico.

Uma das condições utilizadas como critério para fixar arbitrariedades, apresentada nos capítulos 5 e 6, foi a invariância de rótulo dos diagramas de Feynman. Mostramos, diagramaticamente e de maneira independente de regularização, que ela é condição necessária e suficiente para garantir a simetria de calibre da teoria, além do nível árvore. O próximo passo será verificar se esta invariância de rótulo pode ser entendida como uma simetria do ponto de vista lagrangiano, *i.e.*, transformações nos campos da teoria que deixam a ação invariante, e se existe tal relação diagramática entre esta invariância e a simetria de calibre em teorias de calibre não-abelianas. Este caso não é tão simples quanto os dos exemplos apresentados devido aos fantasmas e às auto-interações dos bósons de calibre, o que aumenta o número de diagramas a serem verificados nestas teorias.

# Apêndice A

## Integrais

### A.1 Integrais das amplitudes do Capítulo 3

$$\int_k \frac{k^2}{k^4(k+p)^2} = I_{log}(\lambda^2) + 2\tilde{b} - \tilde{b} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right), \quad (\text{A.1})$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\alpha}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{2} p^\alpha \left[ -I_{log}(\lambda^2) + v_0 - 2\tilde{b} + \tilde{b} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right], \quad (\text{A.2})$$

$$\int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \left[ I_{log}(\lambda^2) - v_0 + 2\tilde{b} - \tilde{b} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right] + \frac{1}{2} \tilde{b} \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} = \frac{1}{12} p^{\{\mu} \eta^{\alpha\beta\}} \left[ -I_{log}(\lambda^2) + \xi_0 + \tilde{b} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{5}{3} \tilde{b} \right] - \frac{1}{3} \tilde{b} \frac{p^\mu p^\alpha p^\beta}{p^2}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k^2 k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} &= -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} p^2 [I_{log}(\lambda^2) - v_0] + \frac{1}{6} (p^2 \eta^{\alpha\beta} + 2p^\alpha p^\beta) [I_{log}(\lambda^2) - \xi_0] + \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{b} p^2 \eta^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{6} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{9} \right] - \tilde{b} p^\alpha p^\beta \left[ \frac{1}{3} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{13}{18} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{k^4(k+p)^2} &= -\frac{1}{24} \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta\}} p^2 [I_{log}(\lambda^2) - \xi_0] + \frac{1}{48} (p^2 \eta^{\{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu\}} + p^{\{\alpha} p^\beta \eta^{\mu\nu\}}) [I_{log}(\lambda^2) - \xi_0 - 24\sigma_0] \\ &+ \frac{1}{8} \tilde{b} p^2 \eta^{\{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta\}} \left[ \frac{1}{6} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{9} \right] - \frac{1}{72} \tilde{b} p^{\{\alpha} p^\beta \eta^{\mu\nu\}} \left[ \frac{3}{2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{5}{2} \right] + \frac{1}{4} \tilde{b} \frac{p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu}{p^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\mu k^\alpha k^\beta}{(k^4(k+p)^2)} = \frac{1}{6} p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} p^2 [I_{\log}(\lambda^2) - \xi_0] - \frac{1}{8} (p^2 p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} + 2p^\alpha p^\beta p^\mu) [I_{\log}(\lambda^2) - \xi_0 - 24\sigma_0] - \frac{1}{4} \tilde{b} p^2 p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} \left[ \frac{1}{6} \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{4}{9} \right] + \tilde{b} p^\alpha p^\beta p^\mu \left[ \frac{1}{4} \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{12} \right], \quad (\text{A.7})$$

onde  $\lambda$  é a escala do Grupo de Renormalização e  $\tilde{b} \equiv \frac{i}{(4\pi)^2}$ .

## A.2 Integrais das amplitudes do Capítulo 4

$$\int_k \frac{1}{k^2(k+p)^2} = I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\int_k \frac{k^2}{k^2(k+p)^2} = -p^2 v_0, \quad (\text{A.9})$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\alpha}{k^2(k+p)^2} = p^2 p^\alpha (\xi_0 - v_0), \quad (\text{A.10})$$

$$\int_k \frac{k^4}{k^2(k+p)^2} = p^4 (3v_0 - 2\xi_0), \quad (\text{A.11})$$

$$\int_k \frac{k^\alpha}{k^2(k+p)^2} = \frac{1}{2} p^\alpha \left[ -I_{\log}(\lambda^2) + v_0 - 2b + b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2(k+p)^2} = \left( \frac{1}{3} p^\alpha p^\beta - \frac{1}{12} p^2 \eta^{\alpha\beta} \right) \left[ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \left( \frac{1}{3} p^\alpha p^\beta + \frac{1}{6} p^2 \eta^{\alpha\beta} \right) \xi_0 + \frac{1}{4} p^2 \eta^{\alpha\beta} v_0 + \frac{13}{18} b p^\alpha p^\beta - \frac{2}{9} p^2 b \eta^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.13})$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\alpha k^\beta}{k^2(k+p)^2} = \frac{1}{24} (p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} p^2 - 6p^\alpha p^\beta p^\mu) \left[ I_{\log}(\lambda^2) - \xi_0 - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] + 3(p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} p^2 + 2p^\alpha p^\beta p^\mu) \sigma_0 + \frac{1}{9} b p^{\{\mu\eta^{\alpha\beta}\}} p^2 - \frac{7}{12} b p^\mu p^\alpha p^\beta, \quad (\text{A.14})$$

$$\int_k \frac{k^2 k^\alpha k^\beta}{k^2(k+p)^2} = \frac{1}{4} p^4 \eta^{\alpha\beta} (\xi_0 - v_0) - 6p^2 (4p^\alpha p^\beta + \eta^{\alpha\beta} p^2) \sigma_0, \quad (\text{A.15})$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{k^2(k+p)^2} = \frac{1}{240} (\eta^{\{\mu\nu\eta^{\alpha\beta}\}} p^4 - 3p^2 p^{\{\mu\nu\eta^{\alpha\beta}\}} + 48p^\alpha p^\beta p^\mu p^\nu) \left[ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left( -\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] + \frac{1}{48} \eta^{\{\mu\nu\eta^{\alpha\beta}\}} p^4 \left( 26\sigma_0 - \xi_0 - \frac{6}{5} \omega_0 \right) + \frac{1}{48} p^{\{\alpha\beta\eta^{\mu\nu}\}} p^2 \left( 26\sigma_0 + \xi_0 - \frac{12}{5} \omega_0 \right) + \frac{1}{600} b \left( \frac{23}{3} p^4 \eta^{\{\alpha\beta\eta^{\mu\nu}\}} - \frac{41}{2} p^2 p^{\{\alpha\beta\eta^{\mu\nu}\}} \right) + \frac{149}{300} b p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta - \frac{1}{5} p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta \omega_0, \quad (\text{A.16})$$

Por simplicidade, omitimos integrais quarticamente divergentes. Os termos de superfície estão definidos no Capítulo 1.

### A.3 Integrais das amplitudes do Capítulo 5

$$I = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = -b \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.17})$$

$$I_1^\beta = \int_k \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = b p^\beta \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.18})$$

$$J_1^\beta = \int_k \frac{k^\beta}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = I_1^\beta + p^\beta I \quad (\text{A.19})$$

$$I_2 = \int_k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = I_{\log}(m^2) - b Z_0(p^2, m^2) - b m^2 \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.20})$$

$$J_2 = \int_k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = I_2 + p^2 I + 2p_\beta I_1^\beta \quad (\text{A.21})$$

$$I_2^{\beta\nu} = \int_k \frac{k^\beta k^\nu}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = \frac{1}{4} g^{\beta\nu} (I_{\log}(m^2) - v_0) - \frac{1}{2} b g^{\beta\nu} [Z_0(p^2, m^2) - Z_1(p^2, m^2)] - b p^\beta p^\nu \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.22})$$

$$J_2^{\beta\nu} = \int_k \frac{k^\beta k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = I_2^{\beta\nu} + p^\beta p^\nu I + I_1^\beta p^\nu + I_1^\nu p^\beta \quad (\text{A.23})$$

$$I_3^\nu = \int_k \frac{k^2 k^\nu}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = -\frac{1}{2} p^\nu (I_{\log}(m^2) - v_0) + b p^\nu Z_1(p^2, m^2) + b m^2 p^\nu \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.24})$$

$$J_3^\nu = \int_k \frac{k^2 k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = I_3^\nu + p^\nu I_2 + p^2 I_1^\nu + p^2 p^\nu I + 2p_\gamma I_2^{\gamma\nu} + 2p_\gamma p^\nu I_1^\gamma - p^\nu v_0 \quad (\text{A.25})$$

$$I_5^{\beta\nu\alpha} = \int_k \frac{k^\beta k^\nu k^\alpha}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = \frac{-1}{12} b p^{\{\alpha} g^{\beta\nu\}} (I_{\log}(m^2) - \xi_0) + b p^\alpha p^\beta p^\nu \int_0^1 dx \frac{x^3(1-x)}{\Delta^2} + \frac{1}{2} b p^{\{\alpha} g^{\beta\nu\}} [Z_1(p^2, m^2) - Z_2(p^2, m^2)] \quad (\text{A.26})$$

$$J_5^{\beta\nu\alpha} = \int_k \frac{k^\beta k^\nu k^\alpha}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = I_5^{\beta\nu\alpha} + p^\beta p^\nu p^\alpha I + p^{\{\nu} p^\beta I_1^{\alpha\}} + p^{\{\beta} I_2^{\nu\alpha\}} + \frac{1}{4} p^{\{\alpha} g^{\beta\nu\}} (v_0 - \xi_0) \quad (\text{A.27})$$

$$I_4^{\beta\nu} = \int_k \frac{k^2 k^\beta k^\nu}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} g^{\beta\nu} (I_{quad}(m^2) - v_2) + \frac{1}{4} (m^2 - p^2) g^{\beta\nu} (I_{\log}(m^2) - v_0) + \frac{1}{6} (p^2 g^{\nu\beta} + 2p^\beta p^\nu) (I_{\log}(m^2) - \xi_0) - b (-g^{\beta\nu} p^2 + p^\nu p^\beta) Z_2(p^2, m^2) + \frac{1}{2} b (m^2 - 3p^2) g^{\beta\nu} Z_1(p^2, m^2) + \frac{1}{2} b (p^2 - m^2) g^{\beta\nu} Z_0(p^2, m^2) - b p^\beta p^\nu m^2 \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{\Delta^2} \quad (\text{A.28})$$

$$J_4^{\beta\nu} = \int_k \frac{k^2 k^\beta k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]^2} = \frac{1}{2} g^{\nu\beta} (I_{quad}(m^2) - v_2) + (m^2 - p^2) J_2^{\beta\nu} + 2p_\lambda J_5^{\beta\nu\lambda} - 2p_\lambda I_5^{\beta\nu\lambda} - p^2 I_2^{\beta\nu}, \quad (\text{A.29})$$

onde  $Z_k(p^2, m^2)$  é definido como

$$Z_k(p^2, m^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \frac{m^2 - p^2 z(1-z)}{m^2}. \quad (\text{A.30})$$

## A.4 Integrais das amplitudes do Capítulo 6

### Resultado das integrais da seção 6.1

$$\int_q \frac{1}{(q^2 - \mu^2)((q-p)^2 - \mu^2)} = -\frac{2}{p^2} b \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right), \quad (\text{A.31})$$

$$\int_q \frac{q^\alpha}{(q^2 - \mu^2)((q-p)^2 - \mu^2)} = -\frac{p^\alpha}{p^2} b \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right), \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \int_q \frac{q^\alpha q^\beta}{(q^2 - \mu^2)((q-p)^2 - \mu^2)} = & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (I_{\log}(\mu^2) - v_0) - \frac{b}{p^2} (g^{\alpha\beta} p^2 - p^\alpha p^\beta) \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right) \right) - \\ & - \frac{p^\alpha p^\beta}{2p^2} b \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

onde  $\int_q \equiv \int^\Lambda \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}$ ,  $b = \frac{i}{4\pi}$  e  $\mu$  é um regulador infra-vermelho.

### Parte finita do diagrama triângulo da seção 6.2

Realizamos o cálculo da parte finita do diagrama triângulo,  $T_{\mu\nu\alpha}^{finite}$ . Uma vez que ele não depende de rótulo, podemos escolher  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = q$  e  $k_3 = -p$  e teremos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha} &= -i \int_k Tr \left[ \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \gamma_\alpha \gamma_5 \frac{i}{\not{k} - \not{p} - m} \right] + (\mu \leftrightarrow \nu, p \leftrightarrow q) = \\ &= -8i v_0 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (q-p)^\beta + T_{\mu\nu\alpha}^{finite} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Após tomar o traço e regularizar, encontramos a parte finita da amplitude. Listamos o resultado de cada integral no final desta seção. O resultado desta parte finita é

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{finite} = & 4ib \{ \epsilon_{\alpha\mu\nu\lambda} q^\lambda (p^2 \xi_{01}(p, q) - q^2 \xi_{10}(p, q)) + \epsilon_{\alpha\mu\nu\lambda} q^\lambda (1 + 2m^2 \xi_{00}(p, q)) + \\ & + 4\epsilon_{\alpha\nu\lambda\tau} p^\lambda q^\tau [(\xi_{01}(p, q) - \xi_{02}(p, q)) p_\mu + \xi_{11}(p, q) q_\mu] + (\mu \leftrightarrow \nu, p \leftrightarrow q) \}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

onde as funções  $\xi_{nm}(p, q)$  são definidas como

$$\xi_{nm}(p, q) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{Q(y, z)}, \quad (\text{A.36})$$

com

$$Q(y, z) = [p^2 y(1-y) + q^2 z(1-z) + 2(p \cdot q)yz - m^2] \quad (\text{A.37})$$

e elas tem a propriedade  $\xi_{nm}(p, q) = \xi_{mn}(q, p)$ .

As funções  $\xi$  também obedecem às relações abaixo, utilizadas para obter (A.35)

$$q^2\xi_{11}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{02}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}Z_0((p+q)^2, m^2) + \frac{1}{2}Z_0(p^2, m^2) + q^2\xi_{01}(p, q) \right], \quad (\text{A.38})$$

$$p^2\xi_{11}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{20}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}Z_0((p+q)^2, m^2) + \frac{1}{2}Z_0(q^2, m^2) + p^2\xi_{10}(p, q) \right], \quad (\text{A.39})$$

$$q^2\xi_{10}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{01}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -Z_0((p+q)^2, m^2) + Z_0(p^2, m^2) + q^2\xi_{00}(p, q) \right], \quad (\text{A.40})$$

$$p^2\xi_{01}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{10}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -Z_0((p+q)^2, m^2) + Z_0(q^2, m^2) + p^2\xi_{00}(p, q) \right], \quad (\text{A.41})$$

$$q^2\xi_{20}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{11}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{1}{2} + m^2\xi_{00}(p, q)\right) + \frac{1}{2}p^2\xi_{01}(p, q) + \frac{3}{2}q^2\xi_{10}(p, q) \right], \quad (\text{A.42})$$

$$p^2\xi_{02}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{11}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{1}{2} + m^2\xi_{00}(p, q)\right) + \frac{1}{2}q^2\xi_{10}(p, q) + \frac{3}{2}p^2\xi_{01}(p, q) \right]. \quad (\text{A.43})$$

Podemos obter as relações (A.38)-(A.43) através de integração por partes.

## Resultado das integrais da seção 6.2

$$\int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} = b\xi_{00}(p, q), \quad (\text{A.44})$$

$$\int_k \frac{k^\alpha}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} = b(p^\alpha\xi_{01}(p, q) - q^\alpha\xi_{10}(p, q)), \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} &= I_{\log}(m^2) - bZ_0(q^2, m^2) + b(m^2 - p^2)\xi_{00}(p, q) + \\ &+ 2b(p^2\xi_{01}(p, q) - (p \cdot q)\xi_{10}(p, q)), \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} &= \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}(I_{\log}(m^2) - v_0) - \frac{1}{4}bg^{\alpha\beta}Z_0(q^2, m^2) - \\ &- b\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p^2(\xi_{00}(p, q) - 3\xi_{01}(p, q) - \xi_{10}(p, q) + 2\xi_{02}(p, q) + 2\xi_{11}(p, q)) - \xi_{02}(p, q)p^\alpha p^\beta + \right. \\ &\left. + \xi_{11}(p, q)q^\alpha p^\beta + \xi_{11}(p, q)p^\alpha q^\beta - \xi_{20}(p, q)q^\alpha q^\beta + (\xi_{10}(p, q) - \xi_{11}(p, q) - \xi_{20}(p, q))g^{\alpha\beta}(p \cdot q)\right], \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k^\alpha k^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} &= \frac{1}{2}(p^\alpha - q^\alpha)(I_{\log}(m^2) - v_0) + \frac{1}{2}b(q^\alpha Z_0(q^2, m^2) - \\ &- p^\alpha Z_0(p^2, m^2)) + b(m^2 - q^2)(p^\alpha\xi_{01}(p, q) - q^\alpha\xi_{10}(p, q)) + b[q^\alpha p^2(\xi_{00}(p, q) - 3\xi_{01}(p, q) - \xi_{10}(p, q) + \\ &+ 2\xi_{02}(p, q) + 2\xi_{11}(p, q)) - 2(p \cdot q)p^\alpha\xi_{02}(p, q) + 2q^2p^\alpha\xi_{11}(p, q) + 2(p \cdot q)q^\alpha(\xi_{10}(p, q) - \\ &- \xi_{20}(p, q)) - 2q^2q^\alpha\xi_{20}(p, q)], \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

onde  $\int_k \equiv \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  e  $b = \frac{i}{(4\pi)^2}$ .

## Apêndice B

# Produção Bibliográfica

- Artigo publicado em periódico indexado  
J. C. C. Felipe, A. R. Vieira, A. L. Cherchiglia, A. P. Baêta Scarpelli and Marcos Sampaio, *Arbitrariness in the Gravitational Chern-Simons-like term induced radiatively* publicado em *Physical Review D* **89**, 105034 no ano de 2014.
- Artigo publicado em periódico indexado  
A. L. Cherchiglia, A. R. Vieira, B. Hiller, Marcos Sampaio and A. P. Baêta Scarpelli, *Guises and disguises of quadratic divergences* publicado em *Annals of Physics* **351**, 751 no ano de 2014.
- Artigo publicado em periódico indexado  
A. R. Vieira, J. C. C. Felipe, G. Gazzola and Marcos Sampaio, *One-loop conformal anomaly in an implicit momentum space regularization framework* publicado em *European Physical Journal C* **75**, 338 no ano de 2015.
- Artigo publicado em periódico indexado  
A. R. Vieira, A. L. Cherchiglia and Marcos Sampaio, *Momentum routing invariance in extended QED: Assuring gauge invariance beyond tree level* publicado em *Physical Review D* **93**, 025029 no ano de 2016.
- Artigo preprint  
A. C. D. Viglioni, A. L. Cherchiglia, A. R. Vieira, Brigitte Hiller and Marcos Sampaio,  *$\gamma_5$  algebra ambiguities in Feynman amplitudes: Momentum routing invariance and anomalies in  $D=4$  and  $D=2$*  publicado em arXiv:1606.01772 no ano de 2016.

# Referências Bibliográficas

- [1] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [3] O. A. Battistel, A. L. Motta and M. C. Nemes, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 1597 (1998).
- [4] J. R. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys. B* **106**, 292 (1976).
- [5] R. Gastmans, S. L. Wu and T. T. Wu, *CERN-PH-TH/2011-201*, arXiv:1108.5872, (2011).
- [6] W. J. Marciano, C. Zhang and S. Willenbrock, *Phys. Rev. D* **85**, 013002 (2012).
- [7] F. Bursa, A. Cherman, T. C. Hammant, R. R. Horgan and M. Wingate, *Phys. Rev. D* **85**, 093009 (2012).
- [8] D. Huang, Y. Tang and Y.-L. Wu, *Commun. Theor. Phys.* **57**, 427 (2012).
- [9] F. Piccinini, A. Pilloni and A. Polosa, *Chin. Phys. C* **37**, 043102 (2013).
- [10] H.-S. Shao, Y.-J. Zhang and K.-T. Chao, *J. High Energy Phys.* **1201**, 053 (2012).
- [11] A. L. Cherchiglia, L. A. Cabral, M. C. Nemes and Marcos Sampaio, *Phys. Rev. D* **87**, 065011 (2013)
- [12] A. L. Cherchiglia, A. R. Vieira, Brigitte Hiller, A.P. Baêta Scarpelli and Marcos Sampaio, *Annals Phys.* **351**, 751 (2014).
- [13] R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys. B***14**, 2011 (2000).
- [14] A. de Gouvea, J. Kile and R. Vega-Morales, *FERMILAB-PUB-13-212-T*, arXiv: 1306.5767, (2013).
- [15] A. R. Vieira, Brigitte Hiller, M. C. Nemes and Marcos Sampaio, *Internat. J. Theoret. Phys.* **52**, 3494 (2013).
- [16] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [17] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [18] S. M. Carroll, G. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [19] M. Goldhaber and V. Trimble, *J. Astrophys. Astron.***17**, 17 (1996).
- [20] J. C. C. Felipe, A. R. Vieira, A. L. Cherchiglia, A. P. Baêta Scarpelli and Marcos Sampaio, *Phys. Rev. D* **89**, 105034 (2014)

- [21] R. Jackiw and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999).
- [22] M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999).
- [23] M. Perez-Victoria, *J. High. Energy Phys.* **0104**, 032 (2001).
- [24] J.M. Chung and P. Oh, *Phys. Rev. D* **60**, 067702 (1999).
- [25] G. Bonneau, *PAR/LPTHE/01-36*, arXiv: hep-th/0109105 (2001).
- [26] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001).
- [27] B. Altschul, *Phys. Rev. D* **69**, 125009 (2004).
- [28] B. Altschul, *Phys. Rev. D* **70**, 101701 (2004).
- [29] R. Jackiw and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003).
- [30] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, *Phys. Rev. D* **70**, 024014 (2004).
- [31] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos and A. J. da Silva, *Phys. Lett. B* **661**, 312-318(2008).
- [32] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60**, 47 (1969); S. L. Adler *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [33] A. R. Vieira, J. C. C. Felipe, G. Gazzola and Marcos Sampaio, *Eur. Phys. J. C* **75**, 338 (2015).
- [34] M. J. Duff, *Class. and Quantum Grav.* **11**, 1387 (1994).
- [35] D. M. Capper, M. J. Duff and L. Halpern, *Phys. Rev. D* **10**, 461 (1974).
- [36] D. M. Capper and M. J. Duff, *Nucl. Phys. B* **182**, 147 (1974).
- [37] D. M. Capper and M. J. Duff, *Nuovo Cimento A* **23**, 173 (1974).
- [38] D. M. Capper and M. J. Duff, *Phys. Lett. A* **53**, 361 (1974).
- [39] R. Kallosh, *Phys. Lett. B* **55**, 321 (1975).
- [40] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B* **73**, 209 (1978).
- [41] I. Antoniadis and N. C. Tsamis, *Phys. Lett. B* **144**, 55 (1984).
- [42] I. Antoniadis, J. Iliopoulos and T. N. Tomaras, *Nucl. Phys. B* **261**, 157 (1985).
- [43] I. Antoniadis, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. B* **162**, 309 (1985).
- [44] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **55**, 133 (1977).
- [45] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **14**, 2490 (1976); S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **17**, 946 (1978).
- [46] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys. B* **333**, 471 (1990); A. O. Barvinsky, Y. V. Gusev, G. A. Vilkovisky and V. V. Zhitnikov, *Nucl. Phys. B* **439**, 561 (1995).
- [47] M. Henningson and K. Skenderis, *J. High Energy Phys.* JHEP07(1998)023.

- [48] M. Asorey, E. V. Gorbar and I. L. Shapiro, *Class. and Quantum Grav.* **21**, 163 (2004).
- [49] S. M. Christensen and S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **15**, 2088 (1977).
- [50] R. Balbinot, A. Fabbri, I. Shapiro, *Nucl. Phys. B* **559**, 301 (1999).
- [51] A. A. Starobinski, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [52] I. L. Shapiro, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 1159 (2002).
- [53] M. Asorey, G. Berredo-Peixoto and I. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **74**, 124011 (2006).
- [54] I. L. Shapiro, *Class. and Quantum Grav.* **25**, 103001 (2008).
- [55] G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849 (1975).
- [56] R. Utiyama and B. S. DeWitt, *J. of Math. Phys.* **3**, 608 (1962).
- [57] E. V. Gorbar and I. L. Shapiro, *J. High Energy Phys.* JHEP02(2003)021.
- [58] V. A. Kostelecký and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011).
- [59] T. Pruttivarasin *et al.*, *Nature* **517**, 592 (2015); V.A. Kostelecký and A.J. Vargas, *Phys. Rev. D* **92**, 956992 (2015); M.A. Hohensee *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 050401 (2013); A. Matveev *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 230801 (2013); V.A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **88**, 096006 (2013); B. Altschul, *Phys. Rev. D* **82**, 016002 (2010); *Phys. Rev. D* **81**, 041701 (2010); B.R. Heckel *et al.*, *Phys. Rev. D* **78**, 092006 (2008); H. Müller *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007); L.-S. Hou, W.-T. Ni, and Y.-C.M. Li, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 201101 (2003); C.D. Lane, *Phys. Rev. D* **72**, 016005 (2005); D. Colladay and V.A. Kostelecký, *Phys. Lett. B* **511**, 209 (2001); R. Bluhm and V.A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); H. Dehmelt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999); R.K. Middleman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2116 (1999); R. Bluhm *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999); *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997).
- [60] E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011); J.-Q. Xia, H. Li, and X. Zhang, *Phys. Lett. B* **687**, 129 (2010); M.L. Brown *et al.*, *Astrophys. J.* **705**, 978 (2009); M. Mewes, *Phys. Rev. D* **78**, 096008 (2008); V.A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009); *Ap. J. Lett.* **689**, L1 (2008); *Phys. Rev. Lett.* **99**, 011601 (2007); P. Cabella, P. Natoli, and J. Silk, *Phys. Rev. D* **76**, 123014 (2007); *Phys. Rev. Lett.* **99**, 011601 (2007); S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990);
- [61] M. Nagel *et al.*, *Nature Commun.* **6**, 8174 (2015); Y. Michimura *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 200401 (2013); V.A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 201601 (2013); *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006); *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002); S. Parker *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180401 (2011); M.A. Hohensee *et al.*, *Phys. Rev. D* **82**, 076001 (2010); J.-P. Bocquet *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 241601 (2010); S. Herrmann *et al.*, *Phys. Rev. D* **80**, 105011 (2009); Ch. Eisele, A.Yu. Nevsky, and S. Schiller, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090401 (2009); B. Altschul, *Phys. Rev. D* **80** 091901(R) (2009); F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 117901 (2008); S. Reinhardt *et al.*, *Nature Physics* **3**, 861 (2007); P.L. Stanwix *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 081101(R) (2006); C.D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. D* **74**, 077901 (2006); P. Wolf *et al.*, *Phys. Rev. D* **70**, 051902 (2004);

- H. Müller *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** 020401 (2003); J.A. Lipa *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 060403 (2003).
- [62] V. A. Kostelecký, C. D. Lane and A. G. Pickering, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002).
- [63] D. Colladay and P. McDonald, Phys. Rev. D **75**, 105002 (2007).
- [64] D. Colladay and P. McDonald, Phys. Rev. D **79**, 125019 (2009).
- [65] D. Colladay and P. McDonald, Phys. Rev. D **77**, 085006 (2008).
- [66] J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov and F. A. Brito, J. High Energy Phys. 06 (2007) 016; J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes and B. Hiller, Eur. Phys. J. C **56**, 571 (2008); G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, J. Phys. G **39**, 035002 (2012).
- [67] A. P. Baeta Scarpelli, T. Mariz, J.R. Nascimento and A. Yu. Petrov, *Int. J. Mod. Phys.* **31**, 1650063 (2016).
- [68] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [69] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cim. **12**, 20 (1972).
- [70] G. Cynolter and E. Lendvai, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1537 (2011).
- [71] Er-Cheng Tsai, Phys. Rev. D **83**, 025020 (2011).
- [72] G. Bonneau, Phys. Lett. B **96**, 147 (1980); J. G. Korner *et al.*, Z. Phys. C **54**, 503 (1992); R. Ferrari, A. Le Yaouanc, L. Oliver and J.-C. Raynal, Phys. Rev. D **52**, 3036 (1995); F. Jegerlehner, Eur. Phys. J. C **18**, 673 (2001); D. Sanchez-Ruiz, Phys. Rev. D **68**, 025009 (2013), R. Ferrari, arXiv:1503.07410; B. K. El-Menoufia and G. A. White, arXiv:1505.01754.
- [73] A. R. Vieira, A. L. Cherchiglia and Marcos Sampaio, Phys. Rev. D **93**, 025029 (2016).
- [74] F. del Aguila and M. Perez-Victoria, Acta Phys. Pol. B **29**, 2857 (1998); Y. L. Ma and Y. L. Wu, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6383 (2006).
- [75] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, (1995).
- [76] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, International Series Series of Monographs in Physics (Oxford University Press, Oxford, 1996).
- [77] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, (2003).
- [78] A. C. D. Viglioni, A. L. Cherchiglia, A. R. Vieira, Brigitte Hiller and Marcos Sampaio, arXiv:1606.01772 (2016).