

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Calendários

**CRISTIANA DO CARMO TEIXEIRA
BELO HORIZONTE
2010**

Cristiana do Carmo Teixeira

CALENDÁRIOS

Monografia de conclusão de curso de especialização em matemática para professores da UFMG, apresentada à banca do departamento de matemática, sob a orientação do professor Gilcione Nonato Costa.

Belo Horizonte

2010

Membros componentes da banca examinadora:

Gilcione Nonato Costa (Orientador)

Francisco Dutenhofner

Grey Ercole

Dedicatória

“Dedico esse trabalho ao meu orientador, Gilcione, por sua paciência e amizade, e, a minha mãe, Elizabete, por sempre me incentivar a estudar.”

Epígrafe

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?”

Cauchy

Sumário

Resumo.....	7
1. Introdução.....	8
2. História.....	10
3. Preliminares.....	13
3.1. Frações contínuas.....	13
3.1.1. Definição.....	14
3.1.2. Convergente de frações contínuas finitas.....	18
4. Conclusão: O problema do calendário.....	25
4.1. Solução matemática para esse problema.....	25
4.2. Solução gregoriana.....	28
5. Referências bibliográficas.....	30

RESUMO

O homem sempre teve a necessidade de marcar o tempo, e, ao longo da história da humanidade vários tipos de calendários foram aparecendo. E, de uma maneira geral, os calendários se baseiam na translação e rotação da Terra em torno do Sol ou nas fases lunares. Seja como for, qualquer calendário apresenta inexatidão numérica em relação aos eventos periódicos de um ano. Mais precisamente, dado que um ano não possui exatamente 365 dias e 6 horas, o calendário Juliano acumulará ao longo dos anos, uma imprecisão. Dessa forma, as estações do ano chegariam transladadas. Ou seja, o calendário se torna impreciso para determinar as datas de plantio, o início das estações, etc.

Para contornar esse problema, em 1582, o então Papa Gregório XIII instituiu uma comissão de matemáticos, para elaborar as correções no então calendário vigente, e fazer que as tais translações fossem minimizadas. Em sua homenagem, o atual calendário é chamado de calendário Gregoriano.

Nesse trabalho, por meio das frações contínuas, estudaremos as possíveis correções que podem ser feitas no calendário, bem como analisaremos a solução proposta por essa comissão.

Palavras-chave: frações contínuas, calendário Gregoriano, calendário Juliano.

1. INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da civilização, o homem observa a natureza e é a partir dessa relação que ele constrói seu conhecimento, obtém recursos e se desenvolve.

Todos os calendários se baseiam na observação dos dois astros mais visíveis da terra a olho humano, o Sol e a Lua, para determinar as unidades de tempo: **dia**, **semana**, **mês** e **ano**. O dia surgiu do contraste entre a luz solar com a escuridão da noite. A observação das fases lunares gerou a ideia de semana e de mês. E a repetição alternada das estações, deu origem ao conceito de ano.

Basicamente, os calendários surgiram por causa da agricultura, o homem observou que tinha um período correto para plantar e outro para colher.

O conceito de "semana", em que os dias estão agrupados em conjuntos de sete, possivelmente se refere a cada uma das fases lunares.

Diferentemente da língua portuguesa, os dias da semana, na língua espanhola ou na inglesa, se referem aos astros do sistema solar. De fato, domingo é chamado de *Sunday*, na língua inglesa, que significa dia do sol. A ideia de mês decorreu da periodicidade das fases lunares. Daí, o conceito de ano, segue naturalmente.

O primeiro calendário que agregou todos esses conceitos, e, além disso, apresentava maior precisão com os eventos naturais foi o adotado pelo imperador Júlio César, de Roma, que introduziu uma sequência de três anos consecutivos e curtos, com 365 dias, e seguidos de um ano longo, chamado de bissexto, com 366 dias. Tal calendário foi chamado de Juliano, e em homenagem a Júlio César, o sétimo mês do ano, passou a se chamar de Julho (no latim, Julius). Já o mês de agosto, é uma referência ao Imperador Octávio César Augusto, que sucedeu Júlio, no poder.

Contudo, o calendário Juliano pressupõe a duração média de um ano de 365 dias e 6 horas. E se um ano tivesse essa duração, esse calendário seria perfeito. Porém, um ano dura exatamente 365 dias, 5 horas 48 minutos e 46 segundos. E,

essa imprecisão de 11 minutos e 14 segundos a mais do que realmente o ano é, ao longo de centenas de anos, se torna considerável, e não pode ser mais desprezada.

Por exemplo, já no século XVI, essa diferença era em torno de 10 dias. E claramente, essa diferença causava transtornos. Em vista desse problema, o papa Gregório XIII instituiu uma comissão composta por matemáticos e astrônomos para corrigir o calendário Juliano. E, em 1582, tal comissão resolveu suprimir 10 dias no calendário. Todos foram dormir numa quinta-feira 4 de outubro e acordaram na sexta-feira 15 de outubro de 1582. E tal comissão instituiu que anos terminados em 00 só seriam bissextos, se tal ano fosse múltiplo de 400. E essa é a grande diferença entre os calendários Juliano e Gregoriano. Mais precisamente, o ano de 1700, por ser múltiplo de 4, seria ano bissexto pelo calendário Juliano. Contudo, por não ser múltiplo de 400, não foi bissexto, pelo calendário Gregoriano.

2. HISTÓRIA

Existem indícios que mesmo em eras pré-históricas, alguns homens já se preocupavam em marcar o tempo. Há registros que, a cerca de 20.000 anos atrás, na Europa, caçadores escavavam pequenos orifícios e riscavam traços em pedaços de ossos e madeira, possivelmente contando os dias entre fases da Lua. Em um período mais recente, os Sumérios adotaram um Calendário bem parecido com o nosso, com um ano dividido em 12 meses de 30 dias, o dia em 12 períodos e cada um desses períodos em 30 partes. Já na Babilônia, havia um calendário com um ano de 12 meses lunares que se alternavam em 29 e 30 dias, num total de 354 dias. Os egípcios inicialmente fizeram um calendário baseado nos ciclos lunares, mas depois notaram que quando o Sol se aproximava da "Estrela do Cão" (Sirius), estava próximo de o Nilo inundar. Notaram que isso acontecia em ciclos de 365 dias. Com base nesse conhecimento eles fizeram um Calendário com um ano de 365 dias, possivelmente inaugurado em 4.236 a.C. Essa é a primeira data registrada na história.

Na atualidade, existem aproximadamente 40 calendários em uso no mundo, que podem ser classificados em três tipos:

1. Solares: Baseados no movimento da Terra em torno do Sol; os meses não têm conexão com o movimento da Lua. Um exemplo desse tipo de calendário é o cristão.
2. Lunares: Baseados no movimento da Lua; o ano não tem conexão com o movimento da Terra em torno do Sol. O calendário islâmico é um exemplo desse tipo de calendário.
3. Lunisolares: Os anos estão relacionados com o movimento da Terra em torno do Sol e os meses com o movimento da Lua em torno da Terra. O calendário hebreu, que é o mais antigo ainda existente, é um exemplo desse tipo.

O calendário hebreu possui como característica principal uma sequência de meses baseada nas fases da Lua, mas de tempos em tempos, um mês inteiro é intercalado para o calendário se manter em fase com o ano tropical. Enquanto os calendários cristãos têm anos de 365 ou 366 dias divididos em 12 meses que não

estão relacionados ao movimento da Lua. Os principais calendários cristãos, ainda em uso são os calendários Juliano e o Gregoriano.

O calendário Juliano foi proposto por Sosígenes, astrônomo de Alexandria, e introduzido por Júlio César em 45 a.C. Foi usado pelas igrejas e países cristãos até o século XVI, quando começou a ser trocado pelo calendário Gregoriano. Alguns países como a Grécia e a Rússia, o utilizaram até o século passado. Ainda é usado por algumas Igrejas Ortodoxas, entre elas a Igreja Russa. Já o calendário Gregoriano foi proposto por Aloysius Lilius, astrônomo de Nápoles, e adotado pelo Papa Gregório XIII, seguindo instruções do Concílio de Trento (1545-1563). O decreto instituindo esse calendário foi publicado em 24 de fevereiro de 1582. Atualmente, a diferença entre esses dois calendários é de 13 dias, dado que foram suprimidos 10 dias do ano de 1582, e que os anos de 1700, 1800 e 1900, não foram bissextos no calendário Gregoriano.

Devido às imprecisões desses calendários, em relação a real duração de um ano, o calendário Juliano se defasa de 1 dia a cada 128 anos, enquanto o calendário Gregoriano se defasa 1 dia a cada 3.320 anos. De fato, dado que a cada ano, ocorre uma defasagem de 11min 14seg, no Juliano, a cada 128 anos, teremos uma defasagem de um dia.

A adoção do calendário Gregoriano por alguns países, como Portugal, Espanha, Itália e Polônia, provocou uma série de confusões em relação às datas históricas, uma vez que muitas pessoas não compreendem o motivo pelo qual o mesmo dia possuía datas diferentes, dependendo da região. Isso ocorreu, por exemplo, na Revolução de Bolchevique também conhecida como **Revolução de Outubro** na Rússia, que ocorreu no dia 25 de outubro de 1917. Porém para nós e em diversos outros lugares do mundo a data da revolução foi no dia 7 de **novembro** de 1917. Outro fato curioso foi o “descobrimento do Brasil” em 22 de abril de 1500, data anterior a 1582, ano em que foram retirados 10 dias do calendário, o que indica que deveríamos festejar o aniversário do “descobrimento do Brasil” no dia 3 de maio (como antigamente). Essa confusão se deu quando a carta de Pero Vaz de Caminha foi encontrada, dando a notícia do descobrimento com data de 22 de abril (calendário Juliano). Desaparecida até o início do século XIX e publicada pela primeira vez em 1817. Não foi levado em consideração, que 22 de abril de 1500, o

calendário em vigor, não era o Gregoriano. O dia 25 de dezembro é a data de comemoração do nascimento de Cristo, porém, não se sabe ao certo qual a data correta de seu nascimento. O que se sabe, é que nesse dia (25 de dezembro) havia uma comemoração pagã de adoração ao sol cheia de bebidas e orgias. No século IV, a Igreja Católica Romana, põe um fim nessa comemoração mudando apenas o nome da festa de “dia do nascimento do deus sol” para “dia do nascimento do filho de Deus”. Na antiguidade o Natal era comemorado em várias datas diferentes e ainda hoje temos datas distintas. Os seguidores da Igreja Católica Ortodoxa, por exemplo, comemoram o dia de natal em 7 de janeiro, devido ao calendário Juliano, que foi criado antes da era cristã. Já a Igreja Católica Romana, segue o calendário Gregoriano (criado depois do nascimento de Cristo).

Nas próximas seções, por meio de frações contínuas, daremos um tratamento matemático ao problema dos calendários. Como já observamos, a origem desse problema está relacionada ao fato da duração de um ano terrestre não ser um número inteiro de dias. De fato, as 5h48min26seg a mais, acarretam imprecisões em ambos os calendários. Matematicamente, esse problema se resolve ao se aproximar esse tempo adicional por uma fração. Como veremos, o calendário Juliano aproxima esse número com sendo $\frac{1}{4}$. E dessa forma, a cada 4 anos, se faz necessário termos um ano bissexto. O método de frações contínuas fornece uma sequência de frações que rapidamente converge para o número em questão. Tais frações, longe de serem complicadas, possuem como principal característica o fato de terem denominadores não tão grandes. E isso acarreta que as soluções propostas por tal método possuem regras cíclicas, de períodos aplicáveis.

O método de frações fornecerá o calendário Juliano como uma solução intermediária do problema, ou seja, uma solução com uma imprecisão. Além disso, as demais aproximações têm regras mais complexas. A solução proposta pela comissão de Gregório conseguiu uma regra, que mesmo perdendo em precisão, é bem simples de aplicação.

3. PRELIMINARES

3.1. FRAÇÕES CONTÍNUAS

Existem diversas maneiras de escrevermos um mesmo número. Uma forma muito interessante, simples e precisa chama-se *frações contínuas* e consiste em substituir um número real ou complexo por uma fração simples (com denominador pequeno).

Arquimedes, na antiguidade, muito antes de serem descobertas as frações contínuas, encontrou uma boa aproximação para o número π em uma fração. Ele utilizou polígonos de 96 lados, inscritos e circunscritos à circunferência, para o cálculo de comprimento ou perímetro da mesma e obteve $\frac{22}{7}$ como aproximação de $\pi \cong 3,14159265$. Analisando a aproximação de Arquimedes em fração e a aproximação usual de $\pi \cong 3,14$, obtemos $22 \div 7 \cong 3,142857143$, e, se fizermos $\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$ a nova fração possui um denominador muito maior que a primeira, deixando-a menos atrativa.

Na matemática, uma expressão aproximada de um número real, sob forma de uma fração com um dado denominador, significa determinar qual de todas as frações com esse denominador está mais próxima do número real. Arquimedes, em uma de suas obras, indicou os limites de π : $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Na prática, embora $3\frac{10}{71}$ esteja mais próximo do valor de π , é bem mais interessante e simples trabalhar com o número $3\frac{1}{7}$, devido ao tamanho do denominador e a facilidade de desenvolver cálculos com essa fração. Para aproximar um número real com grande exatidão por uma fração simples, basta substituí-lo por frações reduzidas.

3.1.1. DEFINIÇÃO

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \dots}}}} \quad (1)$$

em que os coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots e b_1, b_2, b_3, \dots são números reais ou complexos. O número de termos pode ser finito ou infinito.

Uma forma mais simples de (1) é o caso em que todos os b_i são iguais a 1 e os a_i são números inteiros. Nessa situação, a fração contínua é dita simples e é denotada por $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$. O termo a_0 é a parte inteira da fração e por isso, vem separada com ponto e vírgula.

Exemplo 1. Tomemos como exemplo o número racional $\frac{67}{28}$. Tal número encontra-se no intervalo $[2,3]$. Assim, $\frac{67}{28} = 2 + x$, em que $0 < x < 1$.

De fato $67 = 2 \cdot 28 + 11$, ou seja,

$$\frac{67}{28} = 2 + \frac{11}{28}$$

$$\frac{67}{28} = 2 + \frac{1}{\frac{28}{11}}$$

Da mesma forma para a fração $\frac{28}{11}$, obtemos que $28 = 2 \cdot 11 + 6$.

Logo,

$$\frac{67}{28} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{6}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{11}{6}}}$$

Assim $11 = 1 \cdot 6 + 5$. Ou seja,

$$\frac{67}{28} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}}$$

Continuando o processo $6 = 1 \cdot 5 + 1$, temos:

$$\frac{67}{28} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

De notação convencional,

$$\frac{67}{28} = [2; 2, 1, 1, 5]$$

Esse procedimento pode ser aplicado a qualquer número racional. Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 1. Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.

Demonstração. Claramente, uma fração contínua simples representa número racional. Passemos, então para a demonstração da recíproca dessa afirmação. Seja

$\frac{p}{q}$ uma fração irredutível, ou seja, $\text{mdc}(p, q) = 1$. Consideremos o caso em que $p < q$. Os demais casos são análogos ($p = q$ é trivial).

Assim, pela divisão de Euclides, temos que $q = a_1 p + r_0$, com $0 \leq r_0 < p$. Portanto,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_0}{p}}$$

Se $r_0 = 0$, a prova do teorema para essa fração acabou. Caso contrário, podemos escrever:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_0}{p}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{p}{r_0}}}$$

Com a divisão de p por r_0 , obtemos que $p = a_2 r_0 + r_1$ com $0 \leq r_1 < r_0$.

Novamente, se $r_1 = 0$, acabou, pois:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_1, a_2]$$

Caso contrário,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_1}{r_0}}}$$

Ao continuarmos esse procedimento, obteremos duas seqüências a_1, a_2, \dots, a_n e r_0, r_1, \dots, r_n com $p \geq r_0 \geq r_1 \geq r_2 \dots \geq r_n \geq 0$, ou seja, a seqüência dos r_i , de números naturais, é decrescente. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 0$.

Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

■

Como consequência imediata desse teorema, obtemos que a representação irracional em frações contínuas é infinita. Esse fato é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 2. Vejamos agora um número irracional.

Como $\sqrt{2} > 1$, escreveremos

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

Dado que $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$, obteremos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Por recursividade, temos que,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Ao aplicarmos indefinidamente esse processo,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

Em notação simplificada, $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Tomemos um exemplo de obtenção de representação em forma de fração contínua para um número racional negativo. Como veremos tal representação não é única.

Exemplo 3. Seja $x = -\frac{13}{28}$. Seguindo a ideia anterior, teremos:

$$-\frac{13}{28} = -\frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}} = -[2, 6, 2]$$

Contudo, podemos reduzir essa fração à outra, como anteriormente. De fato,

$$-\frac{13}{28} = -1 + \frac{15}{28} = -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}}$$

Ou seja,

$$x = [-1; 1, 1, 6, 2]$$

3.1.2. CONVERGENTES DE FRAÇÕES CONTÍNUAS FINITAS

Seja a expansão de $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$ em fração contínua.

Ao seccionarmos essa expansão obtemos:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{1} \\ c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Os termos c_n são chamados de convergentes da fração contínua. Assim, o processo de escrita de um número em fração contínua pode ser utilizado para obtermos números racionais que se aproximem do número em questão. Mais precisamente, se $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_i, \dots]$ a sequência,

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\dots}{1} + \frac{1}{a_i}} = [a_0; a_1, \dots, a_i], \quad 0 \leq i \leq n,$$

convergir para α e o n -ésimo convergente, é a própria fração contínua. Em notação matemática, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Para exemplificarmos essa convergência, tomemos um caso particular, como exemplo $\alpha = \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ e $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$. A sequência de convergentes obtida é a seguinte:

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = [1] = 1$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = [1;2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = [1;2,2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = [1;2,2,2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1,4\bar{16}$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} \cong 1,4137931$$

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} \cong 1,4142857$$

⋮

Teorema 2. Seja $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ um número real. A sequência

$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ satisfaz a relação

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}$$

para $i = 2, 3, \dots, n$.

Provaremos tal afirmação, por indução matemática. De fato,

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = \frac{a_0}{1}.$$

Portanto, $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$.

Com a mesma linha de pensamento,

$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}. \quad (2)$$

Logo,

$$p_1 = a_0 a_1 + 1 = a_1 p_0 + q_0 \text{ e } q_1 = a_1.$$

Cabe aqui ressaltarmos que os números $p_1 = a_0 a_1 + 1$ e $q_1 = a_1$ são primos entre si.

Para obtermos a fração $\frac{p_2}{q_2}$ a partir de $\frac{p_1}{q_1}$, basta substituímos a_1 por $a_1 + \frac{1}{a_2}$, na equação de $\frac{p_1}{q_1}$. Compare (2) e (3). Dessa maneira,

$$\frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}. \quad (3)$$

Portanto, como $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ temos que

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0 \left(a_1 + \frac{1}{a_2} \right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 (a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1},$$

ou seja,

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}.$$

O numerador e denominador de ordem n podem ser considerados iguais às expressões correspondentes ou a quaisquer outros números que lhe sejam proporcionais.

Assim, a relação de recorrência é válida para $n = 2$.

Admitiremos que tal relação seja válida para $n \geq 2$. Portanto,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Da mesma forma, passamos de $\frac{p_n}{q_n}$ para $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Como no caso de $\frac{p_1}{q_1}$ para $\frac{p_2}{q_2}$, substituiremos a_n por $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$.

Então, como

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

temos que,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_{n-1} \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1} (a_n a_{n+1} + 1) + p_{n-2} a_{n+1}}{(a_n a_{n+1} + 1) q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} = \frac{a_{n+1} (p_{n-1} a_n + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.$$

Por hipótese de indução, obtemos que,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Ou seja, a relação é válida para número natural.

Teorema 3. Na mesma condição do Teorema 2,

$$\Delta_i = p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)^i$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Demonstração. Novamente, provaremos essa afirmação por indução matemática. Inicialmente, consideremos o caso em que $i = 0$.

Então,

$$\Delta_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1.$$

Dado que

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad \text{e} \quad q_1 = a_1$$

temos

$$\Delta_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta_i &= p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} \\ &= (a_i p_i + p_{i-1}) q_i - p_i (a_i q_i + q_{i-1}) \\ &= p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} \\ &= -(p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i) \\ &= -\Delta_{i-1} \end{aligned}$$

Como $\Delta_0 = 1$, temos que $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = -1$, \dots . Ou seja, $\Delta_i = (-1)^i$.

Teorema 4. Na mesma condição do Teorema 2, a sequência $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$ converge para

α . Ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

$$\textit{Demonstração.} \quad \delta_n = \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{\Delta_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

$$\delta_n = (c_{n+1} - c_n) = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

Isso mostra que a sequência $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$ alterna em torno de um ponto central.

Como $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} > a_n q_n \geq q_n$.

A sequência $\{q_i\}$ é estritamente crescente, ou seja,

$$q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < \dots$$

Então, segue-se que $|\delta_0| > |\delta_1| > |\delta_2| > |\delta_3| > \dots$, e por consequência,

$$c_2 - c_0 = (c_2 - c_1) + (c_1 - c_0) = \delta_1 + \delta_0 > 0$$

pois, $|\delta_0| > |\delta_1|$ e $\delta_0 > 0$ e $\delta_1 < 0$. Então

$$c_2 - c_0 > 0 \Rightarrow c_2 > c_0.$$

De maneira análoga,

$$c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \dots < c_{2n} < \dots \quad (4)$$

Para os termos de ordem ímpar de sequência $\{c_n\}$, temos que,

$$c_3 - c_1 = (c_3 - c_2) + (c_2 - c_1) = \delta_2 + \delta_1 < 0,$$

pois, $|\delta_1| > |\delta_2|$ e $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 < 0$. Então,

$$c_3 - c_1 < 0 \Rightarrow c_3 < c_1.$$

Também de maneira análoga,

$$c_1 > c_3 > c_5 > \dots > c_{2n+1} > \dots \quad (5)$$

Como $\delta_{2n} = (c_{2n+1} - c_{2n}) = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n} q_{2n+1}}$, concluímos que

$$c_{2n} < c_{2n+1}.$$

Ao agruparmos as desigualdades (4) e (5) em uma expressão, obtemos que,

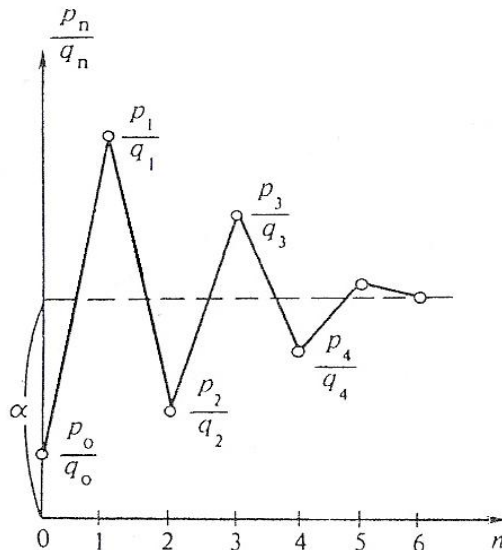
$$c_0 < c_2 < c_4 < c_6 \dots < c_{2n} < c_{2n+1} < c_{2n-1} < \dots < c_3 < c_1.$$

Para finalizarmos a prova de convergência da sequência $\{c_n\}$, resta observarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1} - c_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n+1}} = 0$$

pois, a sequência $\{q_n\}$, de números naturais, é estritamente crescente e ilimitada, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$.

O gráfico abaixo ilustra o comportamento alternado das frações reduzidas obtidas de uma fração contínua que são, ora maior ora menor, que a anterior.



Retomaremos agora o problema matemático do calendário na próxima seção.

4. CONCLUSÃO

O PROBLEMA MATEMÁTICO DO CALENDÁRIO

Conforme mencionado anteriormente, um ano não é igual a um número exato de dias. Mais precisamente, um ano consiste de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos que equivale a 365,242199 dias. Apresentaremos agora, a solução por frações contínuas e também a solução decretada pelo Papa Gregório XIII para o problema do calendário.

4.1. SOLUÇÃO MATEMÁTICA PARA ESSE PROBLEMA

A parte decimal do ano (0,242199074) certamente, de tempos em tempos, deve ser convertida em 1 dia (ano bissexto). Ao utilizar frações contínuas para resolver o problema obtemos

$$\frac{5\text{h}48\text{min}46\text{seg}}{1\text{dia}} = \frac{20926\text{seg}}{86400\text{seg}} = \frac{10463}{43200} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{64}}}}}} = [4,7,1,3,5,64]$$

Observe que $10463 \div 43200 \cong 0,242199074$.

A fração contínua $[4,7,1,3,5,64]$ fornece aproximações para o número 0,242199074. E essas aproximações nos dão diversas alternativas de correção do problema.

A primeira aproximação desse número é dada por

$$c_1 = [4] = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Essa convergente é justamente a aproximação dada pelo calendário Juliano, que fornece um ano bissexto a cada 4 anos. Como podemos verificar no Calendário Juliano, na média, um ano possui 365 dias e 6 horas. E essa média difere de 11min e 14 segundos da real duração de um ano. E, portanto, esse é o erro ao utilizarmos tal aproximação. A diferença pode até parecer pequena, mas, ao longo de séculos, não pode ser desprezada. Para termos uma ideia, esse erro gera a cada 128 anos, um dia em avanço em relação ao ano real.

O próximo convergente é dado por

$$c_2 = [4,7] = \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = \frac{7}{4 \times 7 + 1} = \frac{7}{29} \cong 0,24137931$$

Assim, com essa aproximação, teríamos 7 anos bissextos a cada 29 anos. Contudo, seria uma regra de difícil aplicabilidade. Podemos simplificá-la, multiplicando seu numerador e denominador por 4. Então,

$$c_2 = \frac{4 \times 7}{4 \times 29} = \frac{28}{116}.$$

Ou seja, a cada 116 anos, teríamos somente 28 anos bissextos, ao invés dos 29 anos bissextos previstos pelo calendário Juliano. Se utilizássemos tal aproximação, deveríamos excluir um dos 29 anos que são bissextos, e transformá-lo em um ano simples. A única complexidade dessa regra seria a obtenção dos múltiplos de 116. O erro ocasionado por essa aproximação seria de 1 minuto e 11 segundos a menos que a duração de 1 ano. Pois, a fração $\frac{7}{29}$ de um dia, equivale a aproximadamente 20855 segundos, que é 71 segundos a menos do que deveria ser.

Essa diferença de $20926 - 20855 = 71$ segundos por ano gera a cada 1217 anos, o erro de um dia a menos no calendário em relação ao ano real.

A seguir, pelo teorema 2, temos que:

$$c_3 = [4,7,1] = \frac{1 \cdot 7 + 1}{1 \cdot 29 + 4} = \frac{8}{33} = 0,2424\dots$$

Essa aproximação é muito boa em termos de erro, pois a fração $\frac{8}{33}$ de um dia equivale a 20945 segundos, que é 19 segundos a mais do que o esperado. Isso ocasiona 1 dia a mais a cada 4.547 anos. Seriam 8 anos bissextos em cada conjunto de 33 anos, mas também, teríamos dificuldade com a elaboração de uma regra para sua aplicação. Podemos contornar tal problema, considerando que

$$c_3 = \frac{8}{33} = \frac{8 \times 4}{33 \times 4} = \frac{32}{132}.$$

Então, se aplicássemos tal regra, teríamos 32 anos bissextos a cada 132 anos, ao invés dos 33 anos bissextos do calendário Juliano. Da mesma forma do caso anterior, a principal dificuldade técnica seria a obtenção dos múltiplos de 133.

A próxima convergente

$$c_4 = [4,7,1,3] = \frac{3 \cdot 8 + 7}{3 \cdot 33 + 29} = \frac{31}{128} = 0,2421875$$

é extremamente próxima do esperado, diferindo apenas de 1 segundo da duração média de 1 ano, que é de fato um erro, muito pequeno. Assim, se utilizássemos tal regra, levaríamos 86400 anos para termos um dia de diferença entre o calendário e o ano real. E, a cada 128 anos, teríamos 31 anos bissextos, ao invés de 32, do calendário Juliano. Como veremos na próxima seção, essa fração, possivelmente, teria sido a base para o cálculo da regra de Gregório.

A quinta convergente é a mais precisa, mas, devido ao tamanho do seu denominador, a torna inviável.

$$c_5 = [4,7,1,3,5] = \frac{5 \cdot 31 + 8}{5 \cdot 128 + 33} = \frac{163}{673} \cong 0,242199108.$$

Novamente, tomaremos outro representante para c_5 , que é dado por:

$$c_5 = \frac{163 \times 4}{673 \times 4} = \frac{652}{2692}.$$

Assim, se utilizássemos esse convergente, teríamos a cada 2692 anos, 652 anos bissextos, ao invés dos 673 previstos pelo calendário Juliano. Essa regra, além de difícil aplicabilidade, pois teria um ciclo de 2692 anos, traria o problema da escolha dos 21 anos que deveriam ser bissextos, mas seriam transformados em anos simples. Isso poderia ser resolvido, por exemplo, excluindo-se um ano bissexto, a cada 128 anos.

4.2. SOLUÇÃO GREGORIANA

No Calendário Gregoriano o ano é considerado como sendo de $\left(365 + \frac{97}{400}\right)$ dias = 365,2425 dias. Assim sendo, nesse Calendário, existem 97 anos de 366 dias, que são chamados de bissextos, a cada ciclo de 400 anos, ao invés dos 100 anos bissextos, previsto pelo calendário Juliano. Os anos bissextos são determinados pela seguinte regra:

Os anos bissextos são aqueles divisíveis por 4, exceto os anos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400.

Por essa regra, os anos de 1700, 1800 e 1900 não foram bissextos e os anos de 1600 e 2000 foram bissextos em ambos os calendários Juliano e

Gregoriano. Com a supressão dos 10 dias do ano de 1582, a diferença atual desses dois calendários é de 13 dias.

Existe uma hipótese para essa regra gregoriana. Possivelmente a comissão responsável por resolver esse problema teria escolhido um ciclo de 400 anos para a correção do calendário e feito uma regra de 3 simples com a fração $\frac{31}{128}$. Assim, dessa maneira,

$$\frac{31}{128} = \frac{x}{400}$$

obtemos $x=96,875$, que é próximo de 97. Porém, essa hipótese possui pouca possibilidade de estar correta, uma vez que, no tempo de Gregório, não se tinha tanta precisão na duração do ano, como temos hoje em dia. Sabemos que a Comissão utilizou as tabelas astronômicas existentes na época que diziam que o ano Juliano é mais longo que o real em 10 minutos e 44 segundos. Acumulando o erro de 1 dia a cada 134 anos, que é praticamente $\frac{1}{3} \times 400$. Portanto, se faz necessário a transformação de 3 anos, que seriam bissextos, em anos simples, a cada 400 anos. E assim, foi desenvolvida a regra anteriormente apresentada.

Ao aplicarmos o calendário Gregoriano, temos que, um ano teria 365,2425 dias, ou seja, 365 dias e 20952 segundos. Portanto, na média, temos um erro de $20952 - 20926 = 26$ segundos por ano, o que representa a cada 3323 anos, 1 dia de diferença, a mais, em relação ao ano real. Uma possível correção no calendário Gregoriano seria a transformação de um ano bissexto, em ano simples, a cada 3320 anos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BESKIN, N. M. *Frações contínuas*. Tradução para o português, 1987. Impresso na U.R.S.S., 1980. Editora Mir Moscovo. pg. 104.

ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. *Frações contínuas: algumas propriedades e aplicações*. 2004.

Revista Veja, edição 2137 – ano 42 – nº 44. Reportagem *O fim do mundo em 2012*.

Páginas interessantes sobre o assunto

<http://www.superdicas.com.br/milenio/calendar.asp>

<http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/calendarios/historia-do-calendario-1.php>

<http://www.observatorio.ufmg.br/pas39.htm>