

**SISTEMAS GAUSSIANOS NÃO AUTÔNOMOS:
aplicação à Cosmologia**

Fernando Michell Falieri Nogueira

SISTEMAS GAUSSIANOS NÃO AUTÔNOMOS: aplicação à Cosmologia

Fernando Michell Falieri Nogueira

Orientador: Profa. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Ciências – Física**.

Belo Horizonte

Julho de 2009

””*O mundo é minha representação.*”...Verdade alguma é, portanto, mais certa, mais independente de todas as outras e menos necessitada de uma prova do que esta: o que existe para o conhecimento, portanto o mundo inteiro, é tão-somente objeto em relação ao sujeito, intuição de quem intui, numa palavra, representação.”

Arthur Schopenhauer.¹

¹O mundo como vontade e como representação, Arthur Schopenhauer.

Dedico este trabalho a todos aqueles que, insatisfeitos com sua ignorância, e motivados pela curiosidade, optaram por dedicar-se ao estudo e progresso da ciência.

Agradecimentos

- Agradeço à Maria Carolina pela orientação, entusiasmo e apoio.
- Aos meus pais pela paciência durante infindáveis horas de estudo ao piano.
- À Maninha e Tia Marcinha.
- À Crys pelo companheirismo e compreensão.
- À Júlia por todas as discussões, viagem a SP, contas, explicações, e etc.
- À toda a turma de quinta-feira.
- À toda a turma do mal.
- Aos integrantes da turma de 2004.
- Ao CNPq pelo auxílio financeiro.
- E a você, leitor.

Resumo

Neste trabalho é traçada uma ponte entre sistemas dinâmicos em Mecânica Quântica e um Campo Escalar quantizado. É constatado a independência temporal do determinante da Matriz de Covariância para sistemas Gaussianos não autônomos, e mostra-se como este resultado se estende para sistemas de N e infinitas dimensões. Dois modelos cosmológicos para o período de termalização são estudados, e verifica-se uma estreita relação entre a função de Wigner, compressão, e fenômenos de criação de partícula. Uma interpretação geométrica da dinâmica da termalização torna-se possível, assim como uma proposta para sua modelagem em laboratório.

Abstract

In this work a connection between dynamical quantum mechanical systems and scalar quantum field theory is built. It is verified that the Covariance Matrix's determinant is a time conserved quantity for Gaussian Systems under non autonomous Hamiltonians, and the generalizations for N and infinity dimensions is presented. Two cosmological models for the pre-heating period are treated, and a close connection between the Wigner function, squeezing and particle creation is found. A geometrical interpretation for the dynamics of the pre-heating is made possible, just as a experimental set up for testing cosmological hypothesis.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico do espaço de fase (P,Q) à esquerda, e (p,q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 0.5$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 1$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$	34
3.2	Gráfico do espaço de fase (P,Q) à esquerda, e (p,q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\omega = 2$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = 1$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$	34
3.3	Gráfico do espaço de fase (P,Q) à esquerda, e (p,q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 0.32$, $\alpha = 0.255$, $\omega = 0.6$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = 1$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$	35
3.4	Exemplos de casos para os quais a armadilha não aprisiona as partículas. Em ambas situações as variáveis p e q crescem indefinidamente. O gráfico a esquerda foi obtido com os parâmetros: $b = 1$, $k = 1$, $m = 0.1$. Já a figura a direita foi obtida com: $b = 1$, $k = 0$, $m = 10$	37
3.5	Exemplos de casos para os quais a armadilha aprisiona as partículas. Em ambas situações as variáveis p e q permanecem limitadas. O gráfico a esquerda foi obtido com os parâmetros: $b = 1$, $k = 1$, $m = 10$. Já a figura a direita foi obtida com: $b = 1$, $k = 1$, $m = 1$	37
4.1	A: Gráfico de $\coth^2 x$; B: Gráfico de $\coth^2 \sqrt{x^2 + 1}$	52
4.2	A: Gráfico de $\coth^2 \sqrt{x^2 + 1}$; B: Gráfico de $\frac{1}{x^2+1} + 1$	53
5.1	À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle \varphi_k ^2 \rangle + \langle \pi_k ^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 0$, Condições iniciais: $\phi(0) = 0$ e $\pi(0) = 1$	57

5.2	À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle \varphi_k ^2 \rangle + \langle \pi_k ^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 0$, Condições iniciais: $\phi(0) = 1$ e $\pi(0) = 0$	58
5.3	À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle \varphi_k ^2 \rangle + \langle \pi_k ^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 1$, Condições iniciais: $\phi(0) = 1$ e $\pi(0) = 0$	58
5.4	À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle \varphi_k ^2 \rangle + \langle \pi_k ^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 2$, Condições iniciais: $\phi(0) = 0$ e $\pi(0) = 1$	59
5.5	Gráfico do número médio de partículas (equação 5.15) versus tempo.	62
5.6	Gráfico das variâncias $(\Delta X)^2$ (azul), $(\Delta P)^2$ (roxo), $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle$ (vermelho), e $(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 - \frac{1}{4} \langle XP + PX \rangle^2$ (preto), em função do tempo.	63
5.7	Evolução no tempo das funções de Wigner para o caso de Narrow Resonance. Inicialmente em $t = \frac{5\pi}{4m}$ até $t = \frac{4\pi}{m}$, incrementos de $\frac{\pi}{4m}$. Os gráficos na primeira e terceira colunas dizem respeito aos instantes nos quais $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle = 0$, e N (equação 5.15) apresenta maior taxa de crescimento. As segunda e quarta colunas já mostram instantes para os quais N é constante e $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle$ é máximo em valor absoluto.	64
5.8	Gráfico do logarítmo do número médio de partículas (equação 5.15) versus tempo.	65
5.9	Gráfico da função de Wigner (equação 2.78) em $t = \frac{2\pi}{m}$	65
5.10	Gráfico da função de Wigner (equação 2.78) em $t = \frac{4\pi}{m}$	65

SUMÁRIO

Dedicatória	iv
Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Ferramentas Básicas	5
2.1 Quantização de Campos Clássicos	5
2.1.1 Quantização do Campo Escalar Complexo	6
2.1.2 Método de Liouville-von Neumann I	11
2.1.3 Método de Liouville-von Neumann II	12
2.2 A Métrica de Robertson-Walker	15
2.2.1 Homogeneidade e Isotropia	16
2.2.2 Tensor Energia-Momento	16
2.3 Campos em Espaços Curvos	18
2.3.1 Método de Liouville-von Neumann III	20
2.4 A Função de Wigner	21
3 Estados Gaussianos	23
3.1 Cinemática e Dinâmica de Estados Gaussianos	24
3.1.1 A Matriz de Covariância	28

<i>SUMÁRIO</i>	xi
3.1.2 Extensão para N dimensões	30
3.2 Exemplos & Aplicações	31
3.2.1 Compressão	31
3.2.2 Armadilhas de Paul	35
4 Dinâmica em Teoria de Campos	38
4.1 O Campo Escalar Complexo	38
4.1.1 Caso I: Vácuo	39
4.1.2 Caso II: Estados Térmicos	42
4.2 Generalização de 3.1 para TQC	45
4.2.1 Caso I: Vácuo	48
4.2.2 Caso II: Estados Térmicos	51
5 Aplicação à Cosmologia	54
5.1 Modelo Cosmológico com Transição de Fase	55
5.1.1 Resultados Numéricos	56
5.2 O Inflaton: Criação de Partículas	60
5.2.1 Resultados Numéricos	61
6 Conclusões	67
Referências	69
Apêndices	71
Demonstração das equações 3.27 e 3.28	72

Capítulo 1

Introdução

Desde o início das civilizações o homem tenta entender o mundo que o envolve. Tal curiosidade o levou a construir modelos cada vez mais sofisticados para descrever o que está próximo, o que é muito pequeno, o que está muito distante, ou é muito grande.

A curiosidade a respeito dos astros e o meio que os envolve - o universo - tem motivado o homem desde a antiguidade a observar o espaço e tentar, através de suas observações, buscar respostas para questões a respeito do passado, futuro, e até (talvez mais frequentemente) indagações místicas e metafísicas.

Com o advento da Teoria Geral da Relatividade (1915), e a criação do modelo de Robertson-Walker, às vezes referido como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou modelo padrão da cosmologia, surgiu a hipótese mais aceita pela comunidade científica para o "nascimento" e evolução do universo, o "Big-Bang".

Grande parte do esforço é hoje direcionado na tentativa de combinar as hipóteses do universo primordial (**logo** após o Big-Bang), com dados observacionais atuais. Na tentativa de esclarecer esta questão vários modelos vêm sendo estudados. Talvez o de maior projeção e aceitação seja o da inflação, que pressupõe o universo primordial como tendo experimentado um período de rapidíssima expansão, porém de duração curtíssima.

O principal papel da inflação é deixar o universo em um estado dominado pela matéria. Ou seja, a maior parte da energia presente está na forma de

matéria. Desta maneira a evolução deste estágio segundo as leis da Teoria Geral da Relatividade e das Teorias Quânticas de Campo, leva a um resultado condizente com as observações atuais.

Em poucas palavras, a inflação é uma proposta para se explicar como um universo essencialmente plano, homogêneo e isotrópico, surgiu do Big-Bang, quando o esperado seria que este fosse altamente curvo e não homogêneo.

A maneira usual de se modelar a inflação é acoplando-se um campo escalar ξ que será o responsável pela inflação, e cuja partícula associada é o *inflaton*, à um campo de interesse ϕ . Durante o período de inflação o universo é dominado pelo campo do inflaton; findada a expansão acelerada, este deve ser dominado pela matéria. O fenômeno do pré-aquecimento (pre-heating) ou termalização, que consiste na transferência de energia do campo ξ ao campo ϕ , é o responsável pela transição de fase sofrida pelo universo no fim da inflação. Este processo, que será estudado no capítulo 5, se dá graças ao acoplamento dos campos ξ e ϕ que resulta no fenômeno de ressonância paramétrica.

Os processos de inflação, termalização, e evolução do universo, são dinâmicos e pedem por uma abordagem adequada. A dinâmica em Teorias Quânticas de Campo é pouco estudada e entendida, enquanto que em Mecânica Quântica, no campo de Sistemas Quânticos Abertos, é foco de intensa pesquisa e goza de um número maior de resultados.

O fenômeno de compressão, amplamente utilizado em Ótica Quântica, aprisionamento de ions, dentre outros, surge naturalmente em sistemas cujo hamiltoniano é dependente do tempo e até quadrático nos operadores de criação e aniquilação a e a^\dagger .

A matriz de covariância, de grande importância para a área de Informação Quântica, usada para a caracterização de entrelaçamento e relacionada com a produção de entropia, é hoje foco de interesse e pesquisa. Um resultado importante, que está ligado à compressão, é o valor constante do determinante da matriz de covariância para estados gaussianos em sistemas como citados acima. Tal resultado fornece informação a respeito do sistema mesmo em situações dinâmicas.

A discussão acima leva à seguinte pergunta: até que ponto os resultados conhecidos para dinâmica em Mecânica Quântica são extensíveis para Teorias

Quânticas de Campo?

Motivado pela pergunta anterior, o interesse deste trabalho recai sobre a seguinte questão: até que ponto os resultados relativos à compressão de estados gaussianos e à matriz de covariância são extensíveis para um campo escalar complexo cuja massa é função do tempo?

Com esta questão em mente, os objetivos são:

1. Compreender sob o contexto de Mecânica Quântica a dinâmica de estados gaussianos sujeitos a hamiltonianos quadráticos não autônomo, particularmente o fenômeno de compressão, e o valor constante do determinante da matriz de covariância.
2. Determinar condições para as quais os resultados obtidos para dinâmica de estados gaussianos podem ser estendidos para um campo escalar complexo.
3. Aplicar os resultados encontrados para dois modelos cosmológicos, procurando entender a ligação entre fenômenos de Mecânica Quântica e Teoria de Campos.

O capítulo 2 é dedicado aos pré-requisitos básicos para o entendimento do trabalho. Mesmo se tratando de um assunto comumente apresentado nos livros texto, a quantização canônica de um campo escalar foi trabalhada com o intuito de preparar o leitor para o método de Liouville-von Neumann apresentado em sequência, e mais a frente para o caso de teorias de campos em espaços curvos. Uma rápida introdução à métrica de Robertson-Walker e suas premissas é dada. E, por fim, a função de Wigner é apresentada.

No capítulo 3 é apresentado o formalismo utilizado para o tratamento de estados gaussianos sujeitos a hamiltonianos quadráticos dependentes do tempo. Os principais resultados a respeito de compressão e da matriz de covariância são obtidos, inclusive sua generalização para N dimensões, e dois exemplos são tratados numericamente.

O capítulo 4 é destinado à extensão dos resultados encontrados no capítulo anterior para o caso de um campo escalar complexo de massa variável no tempo. Uma generalização dos métodos apresentados em [11] e [12] é proposta. O problema é tratado em relação ao vácuo e à estados térmicos,

e uma ligação entre os dois extremos é proposta. Deve ser destacado o fato que, para determinadas situações, a compressão e o valor constante do determinante da matriz de covariância se fazem presentes em modelos de um campo escalar complexo cuja massa é função do tempo.

Este resultado permite que seja traçada uma ponte entre dois modelos cosmológicos para a inflação e termalização, e sistemas quânticos abertos. O estudo da função de Wigner, apresentada em [7], e a maneira como se dá sua compressão, iluminam o processo de criação de partículas de um campo escalar complexo. Fica claro que a geometria da função de Wigner está ligada e pode ser usada para compreender processos dinâmicos em Teorias de Campos, permitindo uma associação direta de modelos cosmológicos a sistemas quânticos usuais, tornando possível testes em laboratório de hipóteses cosmológicas.

O determinante da matriz de covariância, logo, a compressão, também apresentam ligação com o fenômeno de termalização, e a transição da inflação para o pré-aquecimento. No capítulo 5 todos os detalhes são apresentados, e as análises numéricas destacadas.

Capítulo 2

Ferramentas Básicas

x

Neste capítulo serão apresentadas as ferramentas básicas. Usadas por todo o trabalho, formam o alicerce dos resultados e discussões que seguem.

A primeira seção é dedicada a apresentação de dois métodos de quantização do campo escalar complexo: a abordagem tradicional por relações canônicas de comutação, e o método de Liouville-von Neumann. A segunda trata de alguns resultados importantes de Relatividade Geral que serão necessários mais a frente. Na terceira, uma rápida introdução de Teoria Quântica de Campos em Espaço Curvo é apresentada, assim como a ligação entre a Métrica de Robertson-Walker plana e Sistemas Dinâmicos em Teoria Quântica de Campos. Por fim, a quarta seção é dedicada a apresentação da função de Wigner, útil para o estudo de alguns dos problemas tratados no texto.

2.1 Quantização de Campos Clássicos

Em Física, um campo clássico é uma função que a cada ponto do espaço, associa uma grandeza física. Diversos são os tipos de campos, eg: escalares, tensoriais, espinoriais, e etc.; neste trabalho estamos interessados no campo escalar clássico e sua forma quantizada; esta seção, em especial, trata da quantização canônica do campo escalar clássico.

A formulação de uma teoria quântica para campos se fez necessária

quando, nas primeiras décadas do século XX, foram feitas as primeiras tentativas de se unificar o formalismo da Mecânica Quântica com a linguagem da Relatividade Restrita. Uma vez que as duas teorias são fundamentalmente diferentes, a equação de Schrodinger mostra-se inadequada para o tratamento de casos relativísticos, assim como a noção de trajetória e posição existente na Mecânica Relativística não existe em Mecânica Quântica. Por isso a criação de um novo formalismo foi necessária.

Nesta seção, além do método de quantização usual, tratado na maioria dos livros-texto, apresentaremos também um formalismo baseado no Método de Liouville-von Neumann (LvN). Ambos baseiam-se na promoção dos campos clássicos à condição de operadores através da imposição de relações canônicas de comutação aos mesmos. Embora fundamentalmente semelhantes, o método de LvN se mostrará mais adequado para o tratamento de sistemas dinâmicos, como será ilustrado neste trabalho. Trataremos apenas o caso de partículas livres, ou seja: aquelas que obedecem à equação de Klein-Gordon.

2.1.1 Quantização do Campo Escalar Complexo

A quantização canônica de um campo é baseada no método sugerido por Paul Dirac para a solução do oscilador harmônico em Mecânica Quântica. Conhecida como solução algébrica, impoe à dois novos operadores, posteriormente identificados como responsáveis pela criação e aniquilação de partículas, as relações canônicas de comutação, como será descrito a seguir.

O interesse deste trabalho recai sobre a quantização da equação para a partícula livre ou Equação de Klein-Gordon. A equação clássica relativística para a energia de uma partícula livre é:

$$E^2 = mc^2 + p^2 c^4, \quad (2.1)$$

na qual a convenção de Einstein para a soma de índices repetidos está sendo adotada, ou seja: $p^2 = p^a p_a = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu$. E p^μ é o quadri-momento da partícula.

Se procedermos da maneira usual, como feito historicamente na Mecânica Quântica, devemos fazer as seguintes transformações:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

e

$$p_a \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^a}. \quad (2.3)$$

Estas, por sua vez, dão à equação 2.1 o status de equação de operador. Aplicando a mesma à uma função $\varphi(t, \mathbf{x})$, e fazendo uso de unidades naturais¹, tem-se:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(t, \mathbf{x}) = m^2\varphi(t, \mathbf{x}) - \nabla^2\varphi(t, \mathbf{x}),$$

ou, em sua forma manifestamente covariante:

$$-\square^2\varphi(t, \mathbf{x}) + m^2\varphi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.4)$$

onde

$$\square^2 = \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2.$$

A equação de Klein-Gordon, assim como sua complexa conjugada

$$-\square^2\varphi^*(t, \mathbf{x}) + m^2\varphi^*(t, \mathbf{x}) = 0,$$

também podem ser obtidas pelo método usual de Cálculo Variacional que leva à Equação de Euler-Lagrange. A ação neste caso é:

$$S = \int d^4x [-\partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi + \Omega_0], \quad (2.5)$$

na qual Ω_0 é, a priori, uma constante indefinida; mais adiante veremos a razão pela qual esta foi inserida.

A solução geral para a equação de Klein-Gordon é o campo:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} + b(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t}], \quad (2.6)$$

onde $\omega = +(\mathbf{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$, e seu complexo conjugado:

$$\varphi^*(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t} + b^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}]. \quad (2.7)$$

¹Unidades Geométricas: $c = 1$, $\hbar = 1$, $G = 1$

A princípio $a(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ e suas conjugadas são funções arbitrárias do vetor de onda \mathbf{k} . Mais a frente irá-se mostrar que estas desempenham um papel deveras importante na construção da teoria.

Se fosse o caso de estarmos interessados na solução da equação **real** de Klein-Gordon, imporíamos a igualdade das equações 2.6 e 2.7. Mas este não é o caso, os campos $\varphi(\mathbf{x}, t)$ e $\varphi^*(\mathbf{x}, t)$ serão tratados como dois elementos distintos, assim como as funções $a(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, e suas respectivas conjugadas.

As equações 2.6 e 2.7 podem ser invertidas, resultando em:

$$a(\mathbf{k}) = i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \quad (2.8)$$

e

$$b(\mathbf{k}) = i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi^*(x), \quad (2.9)$$

onde o operador $\overleftrightarrow{\partial}_0$ é definido da seguinte maneira:

$$f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f)g. \quad (2.10)$$

Para que se possa prosseguir com a quantização, deve-se adotar a linguagem Hamiltoniana. A transição do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano dá-se através de uma troca de variáveis:

$$(\varphi, \varphi^*, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}^*, t) \rightarrow (\varphi, \varphi^*, \Pi, \Pi^*, t);$$

procedimento este chamado de Transformação de Legendre. No caso de interesse, faz-se²:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*(x)}, \quad \Pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}, \quad (2.11)$$

e

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\varphi}^* + \Pi^* \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad (2.12)$$

onde \mathcal{H} e \mathcal{L} são as densidades Hamiltoniana e Langrangeana respectivamente. A Hamiltoniana, assim como a Lagrangeana do sistema são definidas da seguinte maneira:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.13)$$

²Adota-se aqui a notação quadrvetorial: $x^\mu = (t, \mathbf{x})$

e

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.14)$$

A ação, por sua vez, é escrita:

$$S = \int L dt \quad (2.15)$$

Da definição da ação (equação 2.15), juntamente com a equação 2.5, é imediato que para a equação de Klein-Gordon, temos:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi + \Omega_0, \quad (2.16)$$

de onde segue que:

$$\Pi(x) = \dot{\varphi}(x) \quad \& \quad \Pi^*(x) = \dot{\varphi}^*(x), \quad (2.17)$$

e

$$\mathcal{H} = \Pi^* \Pi + \nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi - \Omega_0. \quad (2.18)$$

A quantização é feita elevando-se as funções, até agora puramente clássicas, ao status de operadores. Isto é feito impondo a elas as condições canônicas de comutação em tempos iguais:

$$\begin{aligned} [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} [\varphi^\dagger(t, \mathbf{x}), \varphi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\Pi^\dagger(t, \mathbf{x}), \Pi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\varphi^\dagger(t, \mathbf{x}), \Pi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\Pi(t, \mathbf{x}), \varphi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \Pi^\dagger(t, \mathbf{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estas relações de comutação, juntamente com as equações 2.8 e 2.9, impõem aos operadores \hat{a} e \hat{b} as seguintes relações:

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [b^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

que levam finalmente a:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left(a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \right) + (\xi_0 - \Omega_0) V, \quad (2.25)$$

onde

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \omega d^3k, \quad (2.26)$$

é a energia de ponto zero total dos osciladores, e, uma vez que:

$$\int d^3x e^{i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{y}), \quad (2.27)$$

$$V = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{0}). \quad (2.28)$$

É imediato notar que a integral da equação 2.26 diverge. A constante Ω_0 é escolhida de tal forma a cancelar ξ_0 . Mantendo, desta forma, o Hamiltoniano finito.

Este procedimento de renormalização não altera de forma alguma a física do problema. Lembremo-nos que em laboratório apenas diferenças de energia são medidas, de forma que, alterando-se todos os níveis energéticos de um dado sistema por uma constante, não se altera os possíveis resultados experimentais.

Por fim, resta-nos construir o espaço de Fock. O vácuo é o estado tal que:

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad b(\mathbf{k})|0\rangle = 0. \quad (2.29)$$

O comportamento dos operadores $a(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, e seus adjuntos, segue da mesma forma que em Mecânica Quântica.

2.1.2 Método de Liouville-von Neumann I

Seja $\hat{H}(t)$ um Hamiltoniano dependente do tempo. A equação de Tomonaga-Schwinger é:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.30)$$

Segue um importante resultado encontrado por Lewis e Riesenfeld³, cuja demonstração será omitida.

Teorema 2.1.1 *Seja $\hat{O}(t)$ um operador dependente do tempo que satisfaz:*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}(t) + [\hat{O}(t), \hat{H}(t)] = 0, \quad (2.31)$$

então $\hat{O}(t)$ pode ser usado para encontrar soluções exatas da equação de Tomonaga-Schwinger. De fato:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{i\gamma_{\alpha}(t)} |\lambda_{\alpha}, t\rangle, \quad (2.32)$$

onde

$$\hat{O}(t) |\lambda_n, t\rangle = \lambda_n |\lambda_n, t\rangle,$$

e

$$\gamma_n(t) = \int dt \langle \lambda_n, t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t) \right) | \lambda_n, t \rangle.$$

³J. Math. Phys. 10, 1458 (1969)

Osciladores Dependentes do Tempo

Dado um Hamiltoniano quadrático dependente do tempo:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m(t)}\hat{p}^2 + \frac{m(t)}{2}\omega^2(t)\hat{q}^2,$$

a idéia principal da utilização do método de Liouville-von Neumann na construção do espaço de Fock é definir funções auxiliares $u(t)$ e $u^*(t)$, tal que o par de operadores:

$$\hat{a}(t) = i[u^*(t)\hat{p} - m(t)\dot{u}^*(t)\hat{q}]; \quad \hat{a}^\dagger(t) = -i[u(t)\hat{p} - m(t)\dot{u}(t)\hat{q}], \quad (2.33)$$

obedeça à equação de Liouville-von Neumann (equação 2.31).

Desta forma, as funções auxiliares $u(t)$ e $u^*(t)$ devem obedecer à seguinte equação clássica de movimento:

$$\ddot{u}(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\dot{u}(t) + \omega^2(t)u(t) = 0. \quad (2.34)$$

Além disso, a imposição das relações canônicas de comutação aos operadores de 2.33

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1,$$

é garantida pela condição imposta às funções $u(t)$ e $u^*(t)$ pelo Wronskiano.

$$\hbar m(t) [\dot{u}^*(t)u(t) - \dot{u}(t)u^*(t)] = i. \quad (2.35)$$

2.1.3 Método de Liouville-von Neumann II

Faremos uso do Método de Liouville-von Neumann para quantizar um campo escalar complexo cuja massa é função do tempo. Mais à frente este será usado para modelar possíveis transições de fase sofridas pelo universo primordial no período de inflação.

A densidade lagrangeana de interesse é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = -\partial^\mu \Phi^*(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \Phi(\mathbf{x}, t) - m^2(t) \Phi^*(\mathbf{x}, t) \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.36)$$

enquanto a Lagrangeana total é:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (2.37)$$

Como discutido na seção anterior, a transição para o formalismo Hamiltoniano se dá através de uma transformação de Legendre; no caso em questão temos:

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t)} = \dot{\Phi}^*(\mathbf{x}, t), \quad (2.38)$$

e

$$\Pi^*(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\Phi}^*(\mathbf{x}, t)} = \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.39)$$

A aplicação direta das equações 2.38 e 2.39 na equação 2.36 leva a:

$$\mathcal{H} = \Pi^*(\mathbf{x}, t)\Pi(\mathbf{x}, t) + \nabla\Phi^*(\mathbf{x}, t)\nabla\Phi(\mathbf{x}, t) + m^2(t)\Phi^*(\mathbf{x}, t)\Phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.40)$$

e, novamente, o Hamiltoniano total é:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (2.41)$$

Para prosseguir com a quantização toma-se as transformadas de Fourier dos campos, obtendo:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}, t) &= \dot{\Phi}^*(\mathbf{x}, t) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \dot{\phi}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi_k(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\Phi^*(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
\Pi^*(\mathbf{x}, t) &= \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \dot{\phi}_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \pi_k^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

O Hamiltoniano pode então ser escrito como uma soma de infinitos modos da seguinte forma:

$$H(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{ \pi_k^* \pi_k + [\mathbf{k}^2 + m^2(t)] \phi_k^* \phi_k \}. \tag{2.46}$$

A quantização canônica de um campo é feita promovendo-o à classe de operador, impondo, desta forma, a cada modo de sua transformada de Fourier, as relações usuais de comutação entre operadores:

$$[\hat{\phi}_{k'}(t), \hat{\pi}_k(t)] = i\hbar\delta_{k,k'}, \tag{2.47}$$

e

$$[\hat{\phi}_{k'}^*(t), \hat{\pi}_k^*(t)] = i\hbar\delta_{k,k'}, \tag{2.48}$$

qualquer outra relação de comutação é zero.

Como discutido na seção anterior, encontra-se dois pares de operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{a}_k(t) = i \left[\varphi_k^*(t) \hat{\pi}_k^* - \dot{\varphi}_k^*(t) \hat{\phi}_k \right], \tag{2.49}$$

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = -i \left[\varphi_k(t) \hat{\pi}_k - \dot{\varphi}_k(t) \hat{\phi}_k^* \right], \tag{2.50}$$

e

$$\hat{b}_k(t) = i \left[\varphi_k^*(t) \hat{\pi}_k - \dot{\varphi}_k^*(t) \hat{\phi}_k^* \right], \tag{2.51}$$

$$\hat{b}_k^\dagger(t) = -i \left[\varphi_k(t) \hat{\pi}_k^* - \dot{\varphi}_k(t) \hat{\phi}_k \right]. \tag{2.52}$$

Onde $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$ são relativos ao campo Φ enquanto $\hat{b}_k(t)$ e $\hat{b}_k^\dagger(t)$ são relativos ao campo Φ^* .

Para que os operadores acima obedeçam à condição de Liouville-von Neumann (equação 2.31), os campos clássicos ϕ_k e ϕ_k^* devem satisfazer à mesma equação de movimento:

$$\ddot{\varphi}_k(t) + [\mathbf{k}^2 + m^2(t)] \varphi_k(t) = 0, \quad (2.53)$$

juntamente com a condição imposta pelo Wronskiano:

$$\hbar [\dot{\varphi}_k^*(t) \varphi_k(t) - \dot{\varphi}_k(t) \varphi_k^*(t)] = i. \quad (2.54)$$

Assegurando, desta forma, que os operadores de criação e aniquilação obedecem às relações canônicas de comutação:

$$[\hat{a}_{k'}(t), \hat{a}_k^\dagger(t)] = \delta_{k,k'}, \quad [\hat{b}_{k'}(t), \hat{b}_k^\dagger(t)] = \delta_{k,k'}. \quad (2.55)$$

Agora o espaço de Fock pode ser construído. O vácuo é o estado aniquilado pelos operadores \hat{a} e \hat{b} :

$$\hat{a}_k(t) |0, t\rangle, \quad \hat{b}_k(t) |0, t\rangle. \quad (2.56)$$

Os operadores de criação: \hat{a}_k^\dagger e \hat{b}_k^\dagger , criam uma partícula do tipo a ou b respectivamente, de momento k . O estado de n partículas, com i partículas do tipo a e o restante do tipo b , é simplesmente:

$$|a_{k_1}, \dots, a_{k_i}, b_{k_{i+1}}, \dots, b_{k_n}, t\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger(t) \dots \hat{a}_{k_i}^\dagger(t) \hat{b}_{k_{i+1}}^\dagger(t) \dots \hat{b}_{k_j}^\dagger(t) |0, t\rangle. \quad (2.57)$$

Novamente os operadores \hat{a}_k , \hat{b}_k , e seus adjuntos, comportam-se de maneira análoga aos operadores de criação e aniquilação em Mecânica Quântica.

2.2 A Métrica de Robertson-Walker

O objetivo desta seção é construir um modelo para o universo que nos permita estudar a sua dinâmica. Uma vez que trata-se de um sistema gravitacional, emprega-se a Teoria Geral da Relatividade que, por sua vez, baseia-se na equação de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.58)$$

Onde G_{ab} é o tensor de Einstein, R_{ab} o tensor de Ricci, g_{ab} a métrica do espaço-tempo e T_{ab} o tensor energia-momento. Deve ficar claro que aqui são usadas unidades geométricas, de modo que: $G = 1$, $c = 1$ e $\hbar = 1$.

Para que se possa prosseguir, algumas hipóteses quanto às características do universo devem ser feitas, e o tensor energia-momento T_{ab} deve ser determinado.

2.2.1 Homogeneidade e Isotropia

Embora quando observado em escala não cosmológica o universo que nos rodeia se mostra complexo e difícil de ser modelado, observações astronômicas revelam que, em larga escala ($\approx 100Mpc$)⁴, este apresenta uma estrutura homogênea e isotrópica. Isto permite-nos construir um modelo simples para estudar o comportamento do universo como um todo.

As hipóteses de homogeneidade e isotropia do universo tomado em larga escala, resultam na chamada: Métrica de Robertson-Walker. Esta limita, a menos de uma função arbitrária do tempo próprio $a(\tau)$, a geometria do espaço-tempo a um conjunto discreto de 3 possibilidades: Esférica, Planar e Hiperbólica. A métrica associada a tais geometrias é

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{cases}, \quad (2.59)$$

respectivamente.

2.2.2 Tensor Energia-Momento

Um gás clássico ideal quando visto à distância, mostra-se como um elemento contínuo e maleável, cuja equação de estado depende apenas de dois parâmetros: pressão e densidade, mas que goza de estrutura interna formada

⁴Um Mega-Parsec (Mpc) é equivalente a 3 milhões de anos luz ($3,1 \times 10^{22}m$).

por moléculas muito separadas e fracamente interagentes. Da mesma forma o universo pode ser modelado como um fluido, sem que sua estrutura interna apresente qualquer relevância ao estudo "macroscópico" do sistema. Assim, o tensor energia-momento de um universo homogêneo e isotrópico é o mesmo de um fluido relativístico:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (2.60)$$

onde u_a é um campo vetorial do tipo tempo que representa a 4-velocidade das partículas que constituem o fluido.

O tensor de energia-momento T_{ab} , assim como a Métrica de RW, entram na equação de Einstein para determinar a dinâmica do universo. Não é difícil de se obter, embora um tanto trabalhoso, as equações que regem a dinâmica do universo.

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (2.61)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P), \quad (2.62)$$

onde ponto denota derivação em relação ao tempo próprio τ ; k toma os valores 1,0 e -1 nos casos de geometria Esférica, Planar e Hiperbólica, respectivamente.

Embora não exista consenso, dados observacionais apontam para um universo de geometria planar ($k = 0$), desta forma, nos modelos utilizados nesse trabalho, a métrica de R-W a ser utilizada será aquela relativa ao espaço globalmente plano.

De qualquer forma, dado apenas que $P \geq 0$ e $\rho > 0$, as equações 2.61 e 2.62, uma vez que acarretam em $\ddot{a} < 0$, implicam em um universo não estático. Resultado que, por sua vez, obriga $\dot{a} > 0$, ou $\dot{a} < 0$, salvo talvez por um instante em que $\dot{a} = 0$.

Dado que o universo está se expandindo, poder-se-ia supor que a taxa de expansão foi sempre a mesma. Desta forma, para um tempo:

$$T = \frac{a}{\dot{a}}$$

ter-se-ia $a = 0$. Mas sabemos que $\ddot{a} < 0$, ou seja, a taxa de expansão tende sempre a diminuir, logo tem-se $a = 0$ ainda mais cedo. Ao estado singular do universo quando $a = 0$, dá-se o nome de "Big-Bang".

Se porventura o universo estivesse se contraindo, $\ddot{a} < 0$ indica que este um dia esteve se expandindo. Logo, vale a discussão anterior.

2.3 Campos em Espaços Curvos

A extensão da equação de Klein-Gordon para espaços curvos é simplesmente:

$$\nabla_a \nabla^a \phi - m^2 \phi = 0 \quad (2.63)$$

Onde ∇_a é o operador derivada induzido pela métrica g_{ab} . O seguinte teorema, cuja demonstração será omitida [1], ressalta a ligação do operador derivada ∇_a com a métrica g_{ab} .

Teorema 2.3.1 *Seja g_{ab} uma métrica. Existe apenas um operador derivada ∇_a que satisfaz $\nabla_a g_{bc} = 0$*

A equação 2.63 é derivada da forma geral da ação para o campo de Klein-Gordon em espaços curvos.

$$S = -\frac{1}{2} \int (\nabla_a \phi \nabla^a \phi + m^2 \phi^2) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.64)$$

onde g é o determinante da métrica g_{ab} e $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento de volume de espaços cuja métrica é g .

No contexto de Relatividade Geral o interesse maior recai sobre os espaços-tempo tempo-orientáveis e globalmente hiperbólicos. Características definidas como segue:

Definição 2.3.1 *Seja (M, g_{ab}) um espaço tempo. Onde M é uma variedade e g_{ab} uma métrica sobre esta. Diz-se que (M, g_{ab}) é tempo-orientável quando é possível designar de maneira contínua a cada ponto $p \in M$ a noção de futuro e passado.*

Definição 2.3.2 *Diz-se que um espaço-tempo (M, g_{ab}) é globalmente hiperbólico quando este admite uma superfície de Cauchy.*

Neste trabalho serão tratados apenas espaços-tempo que gozam destas propriedades.

A razão para se estudar apenas espaços tempo-orientáveis é óbvia. Já o interesse em variedades globalmente hiperbólicas é justificado pelo seguinte teorema⁵.

Teorema 2.3.2 *Seja (M, g_{ab}) um Espaço-Tempo globalmente hiperbólico cuja superfície de Cauchy Σ é lisa e do tipo tempo. O problema de valor inicial da Equação de Klein-Gordon 2.63 em (M, g_{ab}) é bem definido. No sentido que dado quaisquer pares $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ de funções C^∞ em Σ , existe solução única para ϕ em toda M .*

Dado um espaço tempo (M, g_{ab}) tempo-orientável e globalmente hiperbólico, este, por hipótese, pode ser folheado por superfícies de Cauchy Σ_t do tipo tempo. Em seguida pode-se introduzir o vetor de evolução temporal que satisfaz: $t^a \nabla_a t = 1$. Este, por sua vez, pode ser decomposto da seguinte forma:

$$t^a = Nn^a + N^a, \quad (2.65)$$

na qual n^a é unitário e normal às superfícies Σ_t , enquanto N^a é tangente à estas. Isto nos permite escrever a métrica inversa g^{ab} da seguinte forma:

$$g^{ab} = -n^a n^b + h^{ab}. \quad (2.66)$$

Agora a ação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S = \int L dt. \quad (2.67)$$

Neste caso, temos:

$$L = \int_{\Sigma_t} \mathcal{L} d^3x = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x (\nabla_a \phi \nabla^a \phi + m^2 \phi^2) N \sqrt{h}, \quad (2.68)$$

onde h_{ab} é a métrica (Riemanniana) induzida em Σ_t e $h = \det h_{ab}$.

A métrica inversa, por sua vez, pode ser usada para abaixar o índice do operador derivada em 2.68, resultando em:

⁵Hawking, S. W. and Ellis. G. F. R. (1973), The Large Structure of space-time, (Cambridge University Press, Cambridge)

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x \left[(n^a \nabla_a \phi)^2 - h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - m^2 \phi \right] N \sqrt{h}. \quad (2.69)$$

Vê-se que a forma da métrica influencia diretamente o lagrangeano. Para o caso da métrica plana de Robertson-Walker temos:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Deixando claro que:

$$S = \int \frac{a^3(t)}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \frac{1}{a^2(t)} (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right) dt d^3x \quad (2.71)$$

2.3.1 Método de Liouville-von Neumann III

Como feito na seção 2.1, pode-se tomar a transformada de Fourier do campo ϕ e escrever o Hamiltoniano como uma soma dos modos desta.

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\pi_k^2}{2a^3(t)} + \frac{a^3(t)\omega_k^2(t)}{2} \varphi_k^2 \right]. \quad (2.72)$$

Do método de Liouville-von Neumann (seção 2.1.2) os operadores de aniquilação e destruição ficam:

$$\hat{A}_\alpha^\dagger(t) = -i \left[\varphi_\alpha(t) \hat{\pi}_\alpha - a^3(t) \dot{\varphi}_\alpha(t) \hat{\phi}_\alpha \right], \quad (2.73)$$

e

$$\hat{A}_\alpha(t) = i \left[\varphi_\alpha^*(t) \hat{\pi}_\alpha - a^3(t) \dot{\varphi}_\alpha^*(t) \hat{\phi}_\alpha \right]. \quad (2.74)$$

Novamente, $\varphi_\alpha(t)$ e $\varphi_\alpha^*(t)$ são as soluções da equação clássica de campo:

$$\ddot{\varphi}_\alpha(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\varphi}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2(t) \varphi_\alpha(t) = 0. \quad (2.75)$$

Assim como visto na seção 2.1.2, o wronskiano

$$\hbar a^3 (\dot{\varphi}_\alpha^* \varphi_\alpha - \dot{\varphi}_\alpha \varphi_\alpha^*) = i, \quad (2.76)$$

assegura a relação usual de comutação:

$$\left[\hat{A}_\alpha^\dagger, \hat{A}_\alpha \right] = 1. \quad (2.77)$$

Dos resultados acima nota-se que quando em um espaço-tempo cuja métrica é: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2$, um campo escalar massivo comporta-se como aquele sujeito à uma métrica plana, mas de massa variável. Este fato serve como motivação para o estudo em paralelo da dinâmica em sistemas quânticos cujo hamiltoniano depende do tempo e Teorias Quânticas de Campo.

2.4 A Função de Wigner

A Função de Wigner, muito útil no estudo das propriedades estatísticas de sistemas quânticos, é uma alternativa à matriz densidade. Esta é especialmente adequada para o estudo de estados gaussianos. Uma grande classe destes pode ser descrita pela Função de Wigner Gaussiana da seguinte forma:

$$\Phi(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi (\gamma^2 - 4|\mu|^2)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{\mu(\alpha - \alpha_0)^2 + \mu^*(\alpha^* - \alpha_0^*)^2 + \gamma|\alpha - \alpha_0|^2}{\gamma^2 - 4|\mu|^2} \right] \quad (2.78)$$

onde

$$\langle \hat{a} \rangle = \alpha_0$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = -2\mu^* + \alpha_0^2$$

e

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \gamma - \frac{1}{2} + |\alpha_0|^2$$

Nas equações acima, \hat{a}^\dagger e \hat{a} são, claramente, os operadores de criação e aniquilação, respectivamente.

A equação 2.78 descreve:

1. Estados Coerentes: $\mu = 0$ e $\gamma = \frac{1}{2}$
2. Estados Térmicos: $\mu = 0$; $\alpha_0 = 0$; $\gamma > \frac{1}{2}$

3. Misturas de Estados Térmicos e Coerentes

4. Estados Comprimidos: $\mu \neq 0$; $\alpha_0 \neq 0$; $\gamma^2 - 4|\mu|^2 = \frac{1}{4}$

Neste trabalho a Função de Wigner mostra-se especialmente útil no estudo do fenômeno de compressão e dos estados comprimidos, discutidos em detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 3

Estados Gaussianos: Cinemática, Dinâmica e a Matriz de Covariância

Estados Gaussianos quando sujeitos a hamiltonianos até quadráticos, mantêm-se gaussianos. Tal característica facilita extremamente o estudo de sistemas dependentes do tempo cujos estados iniciais são estados gaussianos. Além disso, partindo destes é possível construir uma gama abrangente de estados, cujas características gerais dependem de poucos parâmetros e podem ser construídos em laboratório.

Este capítulo visa desenvolver algumas ferramentas básicas para o estudo da dinâmica de estados gaussianos quando sujeitos à hamiltonianos até quadráticos e dependentes do tempo.

A primeira seção é dedicada ao formalismo puramente teórico. Duas novas variáveis P e Q são introduzidas e suas relações com o hamiltoniano apresentadas. Vai-se mostrar que o hamiltoniano pode ser dividido em duas partes, cada uma delas relacionada a uma dupla de variáveis pelas equações usuais de Hamilton. E o valor esperado de cada uma dessas variáveis é calculado como função dos parâmetros da hamiltoniana. Dá-se destaque aos resultados referentes à matriz de covariância do sistema.

Em 3.2 são dados dois exemplos de aplicação dos resultados obtidos em 3.1.1. Posteriormente, no capítulo IV, é apresentada uma generalização do

formalismo desenvolvido aqui para dimensão arbitrária. Sua utilidade, assim como aplicabilidade em teorias quânticas de campo, também é estudada. Mais a frente, dois modelos cosmológicos são estudados sob a perspectiva deste capítulo.

Veremos que o formalismo a ser desenvolvido mais adiante, leva naturalmente a constantes de movimento. Desta forma, a aplicação para sistemas dependentes do tempo, ou até mesmo que apresentem transições de fase, é especialmente útil. Uma vez que durante toda a evolução do sistema, pode-se extrair informação deste.

3.1 Cinemática e Dinâmica de Estados Gaussianos

O Hamiltoniano quadrático, dependente do tempo, mais geral, pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação da seguinte forma:

$$H(t) = f_1 a^\dagger a + f_2 a^\dagger a^\dagger + f_2^* a a + f_3 a^\dagger + f_3^* a, \quad (3.1)$$

onde as funções f_i podem depender do tempo.

Por definição, o valor esperado de um operador em mecânica quântica é:

$$\langle A \rangle = \text{Tr} A \rho, \quad (3.2)$$

onde ρ é o operador densidade.

A ligação entre os operadores de criação e aniquilação e os valores médios p e q das quadraturas dos campos é feita da seguinte forma¹:

$$\langle a \rangle = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \left(q + i \frac{p}{\mu_0} \right) \quad (3.3)$$

onde μ_0 é um parâmetro arbitrário de escala.

Pode-se então definir um novo operador:

$$b \equiv a - \langle a \rangle, \quad (3.4)$$

¹Novamente faz-se o uso de unidades geométrica

naturalmente:

$$[b, b^\dagger] = 1,$$

uma vez que:

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

Com o operador b em mãos, faz-se o uso da transformação de Bogolyubov:

$$b \equiv x\eta - y^*\eta^\dagger, \quad (3.5)$$

impondo ao novo operador η a condição canônica de comutação:

$$[\eta, \eta^\dagger] = 1,$$

conclui-se que:

$$|x|^2 - |y|^2 = 1, \quad (3.6)$$

além disto, esta transformação é escolhida de tal forma que:

$$Tr[\eta\eta\rho] = 0. \quad (3.7)$$

O número médio ν , de bosons η , em ρ , é definido pela seguinte relação:

$$Tr[\eta^\dagger\eta\rho] = \nu. \quad (3.8)$$

Uma vez que mais a frente vai-nos ser útil trabalhar apenas com a parte Gaussiana do operador densidade ρ , é introduzida aqui a Projeção Gaussiana ρ_0 de ρ . ρ_0 é completamente determinado uma vez que as quantidades p , q , x , y e ν são dadas. Este é determinado de modo a reproduzir o valor esperado das quadraturas $a^\dagger a$ e aa quando tomado em relação ao operador total ρ . Sua forma geral é²:

$$\rho_0 = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^{\eta^\dagger\eta}. \quad (3.9)$$

Esta construção mostra-se importante para os casos tratados neste trabalho uma vez que o valor esperado de operadores até quadraticos em a e a^\dagger , o que inclui as quadraturas p , q , e neste caso o Hamiltoniano H ,

²L. C. Yong & A. F. R. Toledo Piza, Mod. Phys. Lett. A 5, 1605 (1990)

é completamente determinado apenas pela projeção gaussiana do operador densidade [9].

As transformações discutidas acima nos permitem escrever o valor esperado do Hamiltoniano da seguinte maneira:

$$\langle H \rangle = h_q + h_{sq}, \quad (3.10)$$

onde

$$h_q = f_1 |\langle a \rangle|^2 + f_2 \langle a \rangle^{*2} + f_2^* \langle a \rangle^2 + f_3 \langle a \rangle^* + f_3^* \langle a \rangle, \quad (3.11)$$

e

$$h_{sq} = f_1 \left[\frac{1}{2} + |y|^2 + (|x|^2 + |y|^2) \nu \right] - [f_2 x^* y + f_2^* x y^*] (1 + 2\nu). \quad (3.12)$$

As dispersões das quadraturas p e q , que na linguagem dos operadores usuais de criação e aniquilação são escritas

$$\Delta q^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[\langle (a^\dagger + a)^2 \rangle - (\langle a \rangle^* + \langle a \rangle)^2 \right], \quad (3.13)$$

e

$$\Delta p^2 = -\frac{\mu_0}{2} \left[\langle (a^\dagger - a)^2 \rangle - (\langle a \rangle^* - \langle a \rangle)^2 \right], \quad (3.14)$$

ficam:

$$\Delta q^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[1 + 2|x|^2 \nu + 2|y|^2 (1 + \nu) - (1 + 2\nu) (x^* y + x y^*) \right], \quad (3.15)$$

e

$$\Delta p^2 = \frac{\mu_0}{2} \left[1 + 2|x|^2 \nu + 2|y|^2 (1 + \nu) + (1 + 2\nu) (x^* y + x y^*) \right]. \quad (3.16)$$

Para se obter as equações de movimento das quadraturas, faz-se o uso da equação de Liouville-von Neumann:

$$i\dot{\rho} = [H(t), \rho].$$

Seja Γ um observável gaussiano que não depende explicitamente do tempo, neste caso a equação de Liouville-von Neumann reduz-se a:

$$i \frac{d \langle \Gamma \rangle}{dt} = \text{Tr} [\Gamma, H(t)] \overbrace{(\rho_0 + \rho')}^{\rho} = \text{Tr} [\Gamma, H(t)] \rho_0. \quad (3.17)$$

A forma geral para observáveis que dependem explicitamente do tempo, mas cujas derivadas são também gaussianas, é:

$$i \frac{d \langle \Gamma \rangle}{dt} = \text{Tr} [\Gamma, H(t)] \rho_0 + i \text{Tr} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right] \rho_0. \quad (3.18)$$

Agora a tarefa é puramente algébrica. Os valores esperados das quadraturas ficam:

$$\dot{q} = (f_1 - 2\Re[f_2]) \frac{p}{\mu_0} + 2\Im[f_2] q + \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \Im[f_3], \quad (3.19)$$

e

$$\dot{p} = -(f_1 + 2\Re[f_2]) \mu_0 q - 2\Im[f_2] p - \sqrt{2\mu_0} \Re[f_3]. \quad (3.20)$$

As equações 3.19 e 3.20 podem ser escritas em termos de h_q :

$$\dot{q} = \frac{\partial h_q}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h_q}{\partial q}. \quad (3.21)$$

Novas variáveis P e Q são introduzidas com a transformação:

$$P = \tau \sqrt{\frac{1+2\nu}{2} \mu_0}, \quad Q = e^{-\sigma} \sqrt{\frac{1+2\nu}{2\mu_0}}, \quad (3.22)$$

onde τ e σ estão relacionadas às variáveis x e y pela transformação:

$$x = \cosh \sigma + \frac{i\tau}{2}, \quad y = \sinh \sigma + \frac{i\tau}{2}, \quad (3.23)$$

que automaticamente obedece $|x|^2 - |y|^2 = 1$.

As novas variáveis introduzidas em 4 foram escolhidas de tal forma que:

$$\dot{Q} = \frac{\partial h_{sq}}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial h_{sq}}{\partial Q}. \quad (3.24)$$

Isto leva a:

$$\dot{Q} = (f_1 - 2\Re[f_2]) \frac{P}{\mu_0} + 2\Im[f_2] Q, \quad (3.25)$$

e

$$\dot{P} = -(f_1 - 2\Re[f_2])\mu_0 Q - 2\Im[f_2]P + (f_1 - 2\Re[f_2])\frac{(1+2\nu)^2}{4\mu_0 Q^3}. \quad (3.26)$$

Agora a dispersão das quadraturas pode ser escrita em termos das novas variáveis da seguinte forma³:

$$\Delta q^2 = Q^2, \quad (3.27)$$

e

$$\Delta p^2 = P^2 + \frac{(1+2\nu)^2}{4Q^2}. \quad (3.28)$$

As variáveis P e Q estão intimamente ligadas ao fenômeno de compressão como vai ser visto nas seções seguintes.

3.1.1 A Matriz de Covariância

A matriz de covariância para um sistema de uma partícula é definida da seguinte maneira:

$$M_c = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle \\ \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle & \langle p^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

assumindo que $\langle x \rangle = 0$ e $\langle p \rangle = 0$.

Um resultado importante das matrizes de covariância é que, para hamiltonianos até quadráticos, seu determinante permanece constante no tempo:

$$\frac{d}{dt} \det M_c = 0. \quad (3.30)$$

Mais especificamente, como pode ser deduzido das equações 3.27, 3.28 e 3.15, 3.16:

$$\det M_c = \Delta x^2 \Delta p^2 - \frac{1}{4} \langle xp + px \rangle^2 \geq \frac{(1+2\nu)^2}{4}. \quad (3.31)$$

As condições para que a desigualdade 3.31 seja saturada assim como extensão para mais dimensões serão estudadas mais adiante. Como

³A demonstração é deixada para o apêndice 6.

ilustração, segue a demonstração para o caso de um oscilador harmônico simples:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2.$$

Pode-se considerar, sem perda de generalidade, que: $\langle x \rangle = 0$, implicando em: $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle$. As relações canônicas de comutação entre os operadores \hat{x} e \hat{p} e a equação de Heisenberg, nos dão:

$$[x, p] = i, \quad [x, x] = 0, \quad [p, p] = 0, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p^2 \rangle &= i \langle [\hat{H}, \hat{p}^2] \rangle \\ &= i \left\langle \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \hat{p}^2 \right] \right\rangle \\ &= i \frac{m\omega^2}{2} \langle [\hat{x}^2, \hat{p}^2] \rangle \\ &= -m\omega^2 \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle &= i \langle [\hat{H}, \hat{x}^2] \rangle \\ &= i \left\langle \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \hat{x}^2 \right] \right\rangle \\ &= i \frac{1}{2m} \langle [\hat{p}^2, \hat{x}^2] \rangle \\ &= \frac{1}{2m} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle &= i \langle [\hat{H}, \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}] \rangle \\ &= i \frac{1}{2m} \langle [\hat{p}^2, \hat{x}\hat{p}] \rangle + i \frac{m\omega^2}{2} \langle [\hat{x}^2, \hat{x}\hat{p}] \rangle + \\ &+ i \frac{1}{2m} \langle [\hat{p}^2, \hat{p}\hat{x}] \rangle + i \frac{m\omega^2}{2} \langle [\hat{x}^2, \hat{p}\hat{x}] \rangle \\ &= - \left\langle \frac{\hat{p}^2}{m} + m\omega^2 \hat{x}^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Com estes resultados em mãos tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det M_c &= \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle + \langle x^2 \rangle \frac{d}{dt} \langle p^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle \frac{d}{dt} \langle xp + px \rangle \\
&= \left(-\frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle - m\omega^2 \langle x^2 \rangle \right) \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - \frac{1}{2} \left(-\left\langle \frac{\hat{p}^2}{m} + m\omega^2 \hat{x}^2 \right\rangle \right) \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Na seção seguinte são dados dois exemplos de aplicação dos resultados obtidos acima. Posteriormente, no capítulo IV, é apresentada uma generalização para dimensão arbitrária e sua utilidade, assim como aplicabilidade, em teorias quânticas de campo.

3.1.2 Extensão para N dimensões

Os resultados apresentados em 3.1.1 podem ser generalizados para o caso N dimensional [11]. Para o caso mais simples, unidimensional, a desigualdade de Schrodinger-Robertson tem a forma:

$$\Delta x^2 \Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle^2}{4}. \tag{3.37}$$

Como discutido acima, a desigualdade 3.37 é saturada, ou seja, atinge seu mínimo, por um estado gaussiano.

Quando a igualdade é satisfeita, a equação (3.37) pode ser escrita em forma matricial:

$$QJQ = \frac{\hbar^2}{4} J, \tag{3.38}$$

onde

$$Q = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}\hat{x} \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle & \langle \hat{p}\hat{p} \rangle \end{pmatrix}, \tag{3.39}$$

e J é a métrica simplética

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Para o caso N dimensional, as condições para a saturação da desigualdade de Schrodinger-Robertson são as mesmas descritas acima para o caso

unidimensional. Com a diferença que agora os elementos das matrizes Q e J são matrizes $N \times N$. Estas, por sua vez, tornam-se $2N \times 2N$.

$$Q_N = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_i \hat{x}_j \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{x}_i \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{x}_i \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{x}_i \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{x}_i \rangle & \langle \hat{p}_j \hat{p}_j \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

e

$$J_N = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij}^{(N)} \\ -\delta_{ij}^{(N)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Onde os índices i e j vão de 1 à N , $\delta_{ij}^{(N)}$ é a matriz identidade $N \times N$, e, em 3.42, cada zero representa a matriz nula N dimensional.

3.2 Exemplos & Aplicações

Nesta seção serão apresentados dois exemplos de aplicação do método desenvolvido acima. Como já foi discutido anteriormente, equação (3.24), e será exemplificado a seguir, os operadores P e Q estão ligados ao fenômeno de compressão (discutido a seguir).

A invariância temporal do determinante da matriz de covariância, equação (3.30), mostra-se uma ferramenta deveras útil, uma vez que em situações dinâmicas, mesmo aquelas que apresentam mudança de fase, como será apresentado na segunda parte deste trabalho, tal resultado nos provém uma constante de movimento do sistema.

3.2.1 Compressão

Das diferenças mais fundamentais entre as Mecânicas Clássica e Quântica pode-se citar, sem dúvida, a existência das relações de incerteza.

A princípio, em Mecânica Clássica, não há limite para a precisão com que se pode determinar o estado físico de um sistema eg: momentum e posição de uma partícula.

Por outro lado, em Mecânica Quântica, sabe-se que há um limite superior para a precisão das medidas. As incertezas relativas à dois observáveis quaisquer são limitadas inferiormente pela relação:

$$\Delta A \Delta B \geq -\frac{i}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (3.43)$$

onde A e B são operadores auto-adjuntos.

Vê-se, claramente, que a existência de um limite inferior só existe para observáveis que **não** comutam entre si.

O fenômeno de compressão de quadraturas está intimamente relacionado com a existência do princípio de incerteza. Pode-se ver pela equação (3.43) que apenas o produto das incertezas é limitado inferiormente. Isoladamente, uma incerteza relativa à medida de um certo observável pode-se aproximar arbitrariamente de zero, contanto que a desigualdade seja preservada.

Restringindo a análise a operadores que gozam das mesmas relações de comutação que p e q , diz-se que há compressão quando:

$$\Delta A \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

O interesse prático no fenômeno de compressão se dá na necessidade de, em determinados sistemas, ter-se controle preciso sobre uma das características deste - como o momentum das partículas de uma gás super-resfriado - enquanto se pode relaxar as condições sobre outros observáveis.

Para estados de Fock $|n\rangle$, aqueles que são auto-estados de $a^\dagger a$, temos:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \nu = n,$$

que implicam em:

$$P = 0, \quad Q = \sqrt{\frac{1 + 2\nu}{2\mu_0}},$$

tais quais, juntamente com as equações 3.27 e 3.28, levam-nos a concluir que:

$$\Delta q^2 = \frac{1 + 2\nu}{2\mu_0}, \quad (3.44)$$

e

$$\Delta p^2 = \frac{1 + 2\nu}{2} \mu_0. \quad (3.45)$$

O interesse no estudo das variáveis P e Q está no fato que, dado ν , é possível definir as regiões de q -comprimido e p -comprimido (em relação aos estados coerentes usuais) no plano (P, Q) pelas relações:

$$Q^2 < \frac{1 + 2\nu}{2\mu_0}, \quad (3.46)$$

e

$$P^2 < \frac{1 + 2\nu}{4} \frac{2\mu_0 Q^2 - (1 + 2\nu)}{Q^2}, \quad (3.47)$$

respectivamente.

Tratamento Numérico

Relembrando a forma do Hamiltoniano 3.1, vai ser tratado como ilustração um modelo no qual:

$$f_1 = \omega_0, \quad f_2 = \alpha e^{i\omega t}, \quad f_3 = 0, \quad (3.48)$$

onde ω_0 , ω e α , são constantes arbitrárias. Além disso considera-se apenas estados puros:

$$\nu = 0,$$

e, por simplicidade,

$$\mu_0 = 1.$$

Utilizando o programa Maple 12, foi feito um estudo numérico das equações 3.25 e 3.26 em paralelo a 3.19 e 3.20. A solução destas foi estudada para diferentes valores das variáveis ω_0 , ω e α e são mostrados nos gráficos 3.1, 3.2 e 3.3.

Gráficos

A figura (3.1) é exemplo de um caso no qual P e Q não são limitados. Não obstante, o fenômeno de compressão se dá de maneira essencialmente periódica. Como pode ser notado observando a figura, e lembrando das condições para que haja compressão citadas nas equações (3.46) e (3.46).

Das equações (3.27) e (3.28), vê-se que, uma vez que P e Q não são limitados, as quadraturas Δq^2 e Δp^2 assumem valores arbitrariamente grandes a medida que o tempo passa. Embora, como discutido no parágrafo anterior, periodicamente estas se encontrem comprimidas.

Mas pode ser visto pela figura à direita em 3.1 que mesmo com P , Q e as quadraturas Δq^2 e Δp^2 não limitados, o valor esperado das variáveis p e q é limitado, e compreende um circuito fechado no espaço de fase.

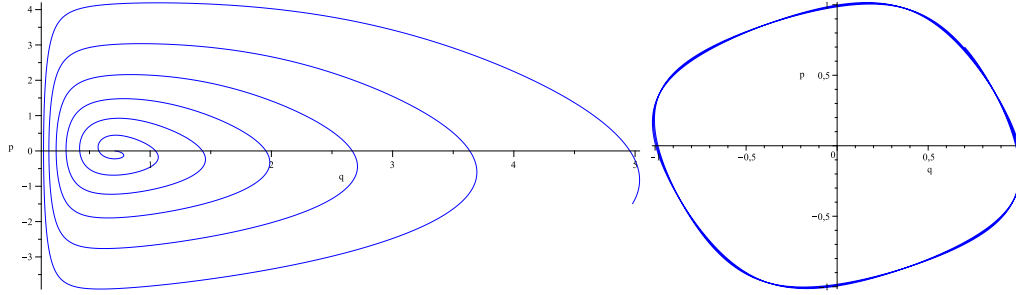


Figura 3.1: Gráfico do espaço de fase (P, Q) à esquerda, e (p, q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 0.5$, $\alpha = 0.05$, $\omega = 1$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

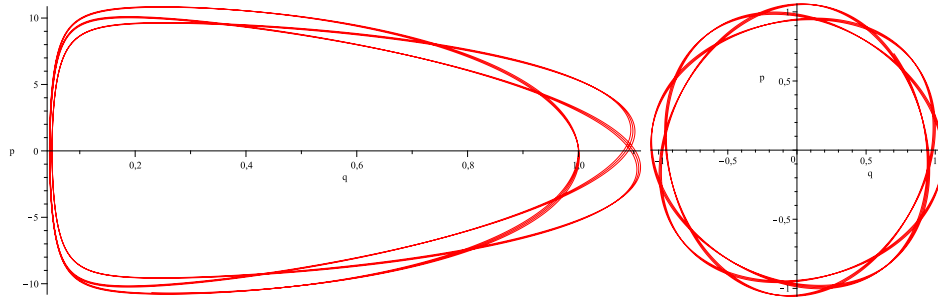


Figura 3.2: Gráfico do espaço de fase (P, Q) à esquerda, e (p, q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\omega = 2$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = 1$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

As figuras (3.2) e (3.3), são exemplos nos quais P e Q são limitados. Poder-se-ia imaginar que este fato garantiria que as quadraturas Δq^2 e Δp^2 também são limitadas. Mas da equação (3.28) nota-se que para $Q \rightarrow 0$, $\Delta q^2 \rightarrow \infty$. De qualquer forma, nota-se a presença de compressão também nestes exemplos

Novamente nestes casos vê-se que as variáveis p e q mantem-se limitadas. Embora agora, na figura 3.3, nota-se que o circuito percorrido não é fechado.

Deve-se ficar atento ao fato de que embora Q assuma o valor zero, não quer dizer que em um caso real tem-se $\Delta q^2 = 0$, o que violaria

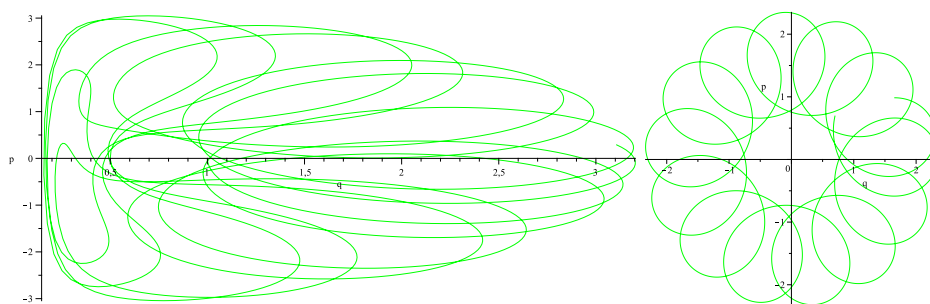


Figura 3.3: Gráfico do espaço de fase (P, Q) à esquerda, e (p, q) à direita. Parâmetros: $\omega_0 = 0.32$, $\alpha = 0.255$, $\omega = 0.6$, Condições Iniciais: $P = 0$ e $Q = 1$ e $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

o princípio de incerteza. O tratamento aqui é semi-clássico, e o mérito do formalismo adotado é exatamente proporcionar a chance de abordar o problema desta maneira. As informações que podem ser tiradas destes tratamentos numéricos dizem respeito às condições para que haja compressão e regiões onde esta ocorre. E a não valores exatos a serem medidos em laboratório.

3.2.2 Armadilhas de Paul

Paul-Traps são configurações de campos eletromagnéticos capazes de aprisionar ions carregados amplamente utilizadas em técnicas de super-resfriamento, aprisionamento de plasma e espectrômetros de massa. Concederam a seu criador Wolfgang Paul, o Prêmio Nobel de Física em 1989.

Uma vez que não há configuração estática de campos capaz de aprisionar uma partícula carregada, o estudo de sistemas dependentes do tempo se faz necessário. Além disso, o interesse pelo estudo de ions em baixíssima temperatura, obriga-nos a tratar o problema sob o ponto de vista da Mecânica Quântica.

Enquanto o fenômeno de compressão é de suma importância em sistemas como os citados, o formalismo desenvolvido acima mostra-se especialmente adequado para lidar com tal fenômeno. Desta forma, uma aplicação direta do

método discutido na seção 3.1 pode ser feita às Paul-Traps, proporcionando-nos preciosa informação sobre a dinâmica do sistema.

O Hamiltoniano de interesse é:

$$H(t) = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2} [k^2 + b \cos^2(mt)] \hat{q}^2. \quad (3.49)$$

Este pode ser colocado no formalismo da seção anterior pela transformação:

$$p = \frac{1}{2i} (a - a^\dagger), \quad q = \frac{1}{2} (a + a^\dagger).$$

Que leva a:

$$H(t) = \frac{1}{8} \left((k^2 + b \cos^2(mt) + 1) (2a^\dagger a + 1) + (k^2 + b \cos^2(mt) - 1) (a^2 + a^{\dagger 2}) \right). \quad (3.50)$$

Isto por sua vez nos permite fazer as seguintes identificações:

$$f_1(t) = \frac{1}{16} (k^2 + b \cos^2(mt) + 1), \quad (3.51)$$

e

$$f_2 = f_2^* = \frac{1}{8} (k^2 + b \cos^2(mt) - 1) \quad (3.52)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (3.25 e 3.26) foi feita numericamente para alguns casos ilustrativos. O objetivo é estudar o fenômeno de compressão nas variáveis p e q no plano (P, Q) como discutido na seção anterior.

Espaço de fase (p,q)

Abaixo seguem alguns exemplos de tratamentos numéricos do espaço de fase (p, q) . São apresentados dois casos para os quais a armadilha não aprisiona as partículas, e dois para os quais ela aprisiona. Em todos os casos as condições iniciais são:

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p(0) = 1. \quad (3.53)$$

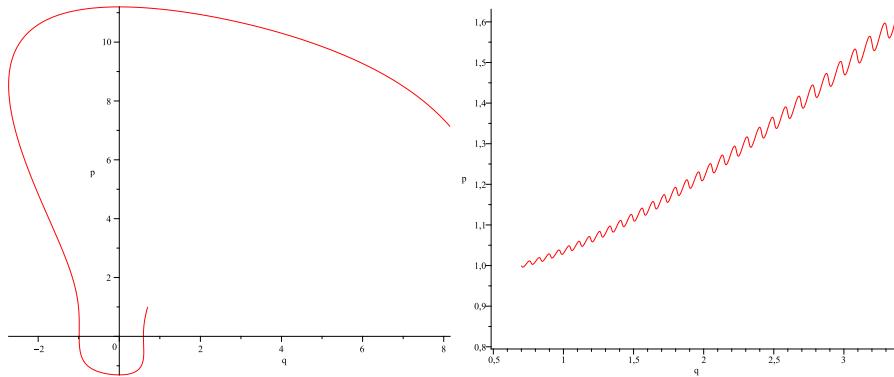


Figura 3.4: Exemplos de casos para os quais a armadilha não aprisiona as partículas. Em ambas situações as variáveis p e q crescem indefinidamente. O gráfico a esquerda foi obtido com os parâmetros: $b = 1$, $k = 1$, $m = 0.1$. Já a figura a direita foi obtida com: $b = 1$, $k = 0$, $m = 10$

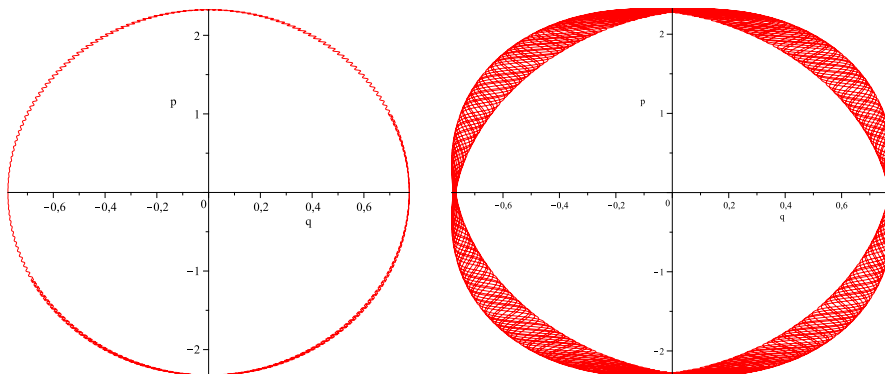


Figura 3.5: Exemplos de casos para os quais a armadilha aprisiona as partículas. Em ambas situações as variáveis p e q permanecem limitadas. O gráfico a esquerda foi obtido com os parâmetros: $b = 1$, $k = 1$, $m = 10$. Já a figura a direita foi obtida com: $b = 1$, $k = 1$, $m = 1$

Capítulo 4

Dinâmica em Teoria Quântica de Campos

O objetivo deste capítulo é determinar o quanto dos resultados obtidos no capítulo anterior deixam-se transportar para a Teoria Quântica de Campos. Obtendo, desta forma, uma ferramenta para o estudo da dinâmica em TQC.

Antes de tratar do problema em questão, alguns resultados são necessários. Parte destes já foi obtida anteriormente; o ponto de partida é, então, a seção 2.1.

4.1 Resultados Complementares para o Campo Escalar Complexo

Dando continuidade ao que já foi feito na seção 2.1, dá-se prosseguimento com o cálculo das funções de correlação à dois pontos para os campos quantizados.

As equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52 podem ser invertidas, resultando em:

$$\hat{\phi}_k = \hbar \left(\varphi_k \hat{a}_k + \varphi_k^* \hat{b}_k^\dagger \right), \quad (4.1)$$

$$\hat{\phi}_k^* = \hbar \left(\varphi_k \hat{b}_k + \varphi_k^* \hat{a}_k^\dagger \right), \quad (4.2)$$

$$\hat{\pi}_k = \hbar \left(\dot{\varphi}_k \hat{b}_k + \dot{\varphi}_k^* \hat{a}_k^\dagger \right), \quad (4.3)$$

e

$$\hat{\pi}_k^* = \hbar \left(\dot{\varphi}_k \hat{a}_k + \dot{\varphi}_k^* \hat{b}_k^\dagger \right). \quad (4.4)$$

Lembrando que os campos clássicos $\varphi_k(t)$ e $\varphi_k^*(t)$ devem obedecer à equação de movimento:

$$\ddot{\varphi}_k(t) + [\mathbf{k}^2 + m^2(t)] \varphi_k(t) = 0, \quad (4.5)$$

sua respectiva complexa conjugada:

$$\ddot{\varphi}_k^*(t) + [\mathbf{k}^2 + m^2(t)] \varphi_k^*(t) = 0, \quad (4.6)$$

assim como a condição imposta pelo Wronskiano:

$$\hbar [\dot{\varphi}_k^*(t) \varphi_k(t) - \dot{\varphi}_k(t) \varphi_k^*(t)] = i. \quad (4.7)$$

Pode-se expressar a função correlação a dois pontos em termos dos operadores de criação e aniquilação, cujo comportamento é conhecido.

Serão tratados dois casos:

1. Estado inicial de Vácuo
2. Estado inicial Térmico

Será mostrado, então, como os resultados encontrados no capítulo três são generalizados para Teoria Quântica de Campos, e as condições impostas aos estados iniciais para que isso seja possível.

4.1.1 Caso I: Vácuo

O cálculo das funções de correlação à dois pontos no vácuo é um simples exercício algébrico:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \Phi(\mathbf{x}, t) \rangle_V &= \langle 0 | \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{\phi}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \hat{\phi}_{k'}(t) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} |0\rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hbar \left(\varphi_k \hat{b}_k + \varphi_k^* \hat{a}_k^\dagger \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} \times \\
&\quad \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \hbar \left(\varphi_{k'} \hat{a}_{k'} + \varphi_{k'}^* \hat{b}_{k'}^\dagger \right) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} |0\rangle \\
&= \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \times \\
&\quad \langle 0 | \left(\varphi_k \hat{b}_k + \varphi_k^* \hat{a}_k^\dagger \right) \left(\varphi_{k'} \hat{a}_{k'} + \varphi_{k'}^* \hat{b}_{k'}^\dagger \right) |0\rangle \\
&= \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \times \\
&\quad \langle 0 | \varphi_k \varphi_{k'} \hat{b}_k \hat{a}_{k'} + \varphi_k^* \varphi_{k'} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} + \varphi_k \varphi_{k'}^* \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger + \varphi_k^* \varphi_{k'}^* \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger |0\rangle \\
&= \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \varphi_k \varphi_{k'}^* \langle 0 | \hat{b}_k \hat{b}_{k'}^\dagger |0\rangle \\
&= \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \varphi_k \varphi_{k'}^* \delta_{kk'} \\
&= \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \varphi_k \varphi_k^*. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

O conhecimento de todos os valores esperados envolvendo operadores quadráticos dos campos, em completa analogia com a Mecânica Quântica, será necessário na próxima seção, portanto, seguem todos os resultados. Os cálculos são equivalentes aos feitos na equação 4.8 e serão suprimidos.

$$\langle \Phi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Phi(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^*, \quad (4.9)$$

$$\langle \Phi(\mathbf{x}, t) \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^*, \quad (4.10)$$

$$\langle \Pi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Pi(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^*, \quad (4.11)$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x}, t) \Pi^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^*, \quad (4.12)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \dot{\varphi}_k^*, \quad (4.13)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \varphi_k^*, \quad (4.14)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \dot{\varphi}_k^*, \quad (4.15)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \varphi_k^*, \quad (4.16)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.17)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.18)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.19)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.21)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.22)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0, \quad (4.23)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_V = 0. \quad (4.24)$$

4.1.2 Caso II: Estados Térmicos

O estado inicial térmico pode ser definido, modo a modo, pela seguinte relação:

Definição 4.1.1

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}(t) &= \prod_k \hat{\rho}_k(t) \\
 &= \prod_k \left\{ \frac{1}{Z_k} \exp \left[-\beta \hbar \omega_{i,k} \left(\hat{a}_k^\dagger(t) \hat{a}_k(t) + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \times \\
 &= \frac{1}{Z_k^*} \exp \left[-\beta \hbar \omega_{i,k} \left(\hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t) + \frac{1}{2} \right) \right], \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\kappa_B T}, \tag{4.26}$$

$$\omega_{i,k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}, \tag{4.27}$$

e

$$m_i^2 = m^2(-\infty), \tag{4.28}$$

é a massa inicial do campo.

Para prosseguir com o cálculo dos valores esperados, faz-se o uso do seguinte teorema¹:

Teorema 4.1.1

$$\begin{aligned}
 \langle f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle_T &= (1 - e^{-\omega}) \text{Tr} f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) e^{-\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
 &= \langle 0, 0 | f \left(\hat{a} \sqrt{1 + \zeta} + \hat{c}^\dagger \sqrt{\zeta}, \hat{a}^\dagger \sqrt{1 + \zeta} + \hat{c} \sqrt{\zeta} \right) | 0, 0 \rangle, \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

onde

$$\zeta = \frac{1}{e^\omega - 1}, \tag{4.30}$$

\hat{c} e \hat{c}^\dagger são operadores bosônicos que comutam com \hat{a} e \hat{a}^\dagger e $|0, 0\rangle$ é o estado de vácuo dos operadores \hat{c} e \hat{a} .

¹W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, (John Wiley and Sons, New York, 1973), p. 161

O teorema 4.1.1 deixa a tarefa de se calcular os valores esperados em relação ao estado térmico 4.25 simples, basta aplica-lo diretamente. Seguem dois exemplos de cálculo e em seguida, como feito na seção anterior, a lista de todos os resultados.

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\mathbf{x}, t) \Pi(\mathbf{y}, t) \rangle_T &= \langle 0, 0 | \left[\sqrt{1 + \zeta} \left(\varphi_k \hat{a}_k + \varphi_k^* \hat{b}^\dagger \right) + \sqrt{\zeta} \left(\varphi_k d_k^\dagger + \varphi_k^* c_k \right) \right] \times \\
&\quad \left[\sqrt{1 + \zeta} \left(\dot{\varphi}_{k'} b_{k'} + \dot{\varphi}_{k'}^* \hat{a}_{k'}^\dagger \right) + \sqrt{\zeta} \left(\dot{\varphi}_{k'} c_{k'}^\dagger + \dot{\varphi}_{k'}^* d_{k'} \right) \right] |0, 0 \rangle \\
&= \langle 0, 0 | \left[(1 + \zeta) \left(\varphi_k \dot{\varphi}_{k'}^* \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger + \varphi_k^* \dot{\varphi}_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + \zeta \left(\varphi_k \dot{\varphi}_{k'}^* \hat{c}_k \hat{c}_{k'}^\dagger + \varphi_k^* \dot{\varphi}_{k'} \hat{c}_{k'}^\dagger \hat{c}_k \right) \right] |0, 0 \rangle \\
&= (2\zeta + 1) \varphi_k \dot{\varphi}_k^* \\
&= \left(\frac{2}{e^\omega - 1} + 1 \right) \varphi_k \dot{\varphi}_k^* \\
&= \varphi_k \dot{\varphi}_k^* \coth \frac{\omega}{2}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

na qual \hat{c} , \hat{c}^\dagger , \hat{d} e \hat{d}^\dagger são operadores bosônicos que comutam com os operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{b} e \hat{b}^\dagger . Lembrando que, pela definição 4.25:

$$\omega = \beta \hbar \omega_{i,k}. \tag{4.32}$$

Da mesma forma, também se tem:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Pi(\mathbf{y}, t) \rangle_T &= \langle 0, 0 | \left[\sqrt{1 + \zeta} \left(\varphi_k \hat{b}_k + \varphi_k^* \hat{a}^\dagger \right) + \sqrt{\zeta} \left(\varphi_k d_k + \varphi_k^* c_k^\dagger \right) \right] \times \\
&\quad \left[\sqrt{1 + \zeta} \left(\dot{\varphi}_{k'} b_{k'} + \dot{\varphi}_{k'}^* \hat{a}_{k'}^\dagger \right) + \sqrt{\zeta} \left(\dot{\varphi}_{k'} c_{k'}^\dagger + \dot{\varphi}_{k'}^* d_{k'} \right) \right] |0, 0 \rangle \\
&= 0 \tag{4.33}
\end{aligned}$$

O cálculo segue de maneira análoga para todos os valores esperados. Os resultados obtidos são:

$$\langle \Phi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Phi(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.34)$$

$$\langle \Phi(\mathbf{x}, t) \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.35)$$

$$\langle \Pi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Pi(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.36)$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x}, t) \Pi^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.37)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \dot{\varphi}_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.38)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \varphi_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.39)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \dot{\varphi}_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.40)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k \varphi_k^* \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right), \quad (4.41)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.42)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.43)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.44)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.45)$$

$$\langle \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.46)$$

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.47)$$

$$\langle \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0, \quad (4.48)$$

$$\langle \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{y}, t) \rangle_T = 0. \quad (4.49)$$

4.2 Generalização de 3.1 para Teoria Quântica de Campos: Campo Escalar Complexo

A equação 3.39 para o caso abordado neste capítulo fica:

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \langle \Phi \Phi \rangle_{xy} & \langle \Phi \Phi^\dagger \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Phi, \Pi \} \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Phi, \Pi^\dagger \} \rangle_{xy} \\ \langle \Phi^\dagger \Phi \rangle_{xy} & \langle \Phi^\dagger \Phi^\dagger \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Phi^\dagger, \Pi \} \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Phi^\dagger, \Pi^\dagger \} \rangle_{xy} \\ \frac{1}{2} \langle \{ \Pi, \Phi \} \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Pi, \Phi^\dagger \} \rangle_{xy} & \langle \Pi \Pi \rangle_{xy} & \langle \Pi \Pi^\dagger \rangle_{xy} \\ \frac{1}{2} \langle \{ \Pi^\dagger, \Phi \} \rangle_{xy} & \frac{1}{2} \langle \{ \Pi^\dagger, \Phi^\dagger \} \rangle_{xy} & \langle \Pi^\dagger \Pi \rangle_{xy} & \langle \Pi^\dagger \Pi^\dagger \rangle_{xy} \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Deve ficar claro que a notação reduzida da equação anterior representa, na verdade:

$$\langle \Phi \Phi \rangle_{xy} = \langle \Phi(\mathbf{x}, t) \Phi(\mathbf{y}, t) \rangle. \quad (4.51)$$

Como foi discutido no capítulo anterior, a saturação do princípio de incerteza, a desigualdade de Schrodinger-Robertson, é atingida quando:

$$QJQ = \frac{\hbar^2}{4} J, \quad (4.52)$$

que, no contexto deste capítulo, assume a forma:

$$(QJQ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\hbar^2}{4} J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (4.53)$$

onde

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Todos elementos da Matriz $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ já foram calculados em relação ao

vácuo e à estados térmicos. Nestes casos se tem:

$$Q_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} 0 & A_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \\ A_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & C_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ 0 & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & C_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

e

$$Q_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right) \times \quad (4.56)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \\ A_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & C_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ 0 & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & C_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

onde

$$A_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k(t) \varphi_k^*(t), \quad (4.58)$$

$$B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (\varphi_k(t) \dot{\varphi}_k^*(t) + \dot{\varphi}_k(t) \varphi_k^*(t)), \quad (4.59)$$

e

$$C_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \dot{\varphi}_k(t) \dot{\varphi}_k^*(t). \quad (4.60)$$

Uma vez que \mathbf{x} e \mathbf{y} são variáveis contínuas, o produto das matrizes Q e J é enxergado da seguinte maneira:

$$(QJ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int Q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \times J(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dz, \quad (4.61)$$

de modo que se tem:

$$(QJQ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \iint Q(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \times J(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \times Q(\mathbf{w}, \mathbf{y}, t) dzdw. \quad (4.62)$$

Para simplificar a notação será denotado:

$$Q_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (4.63)$$

e

$$Q_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right) \mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (4.64)$$

onde:

$$\mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} 0 & A_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \\ A_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ B_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 & 0 & C_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ 0 & B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & C_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

que nos permite escrever:

$$(QJQ) = \iiint \iiint dz dw \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \left\{ \mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \times J(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \times \mathcal{Q}_{k'}(\mathbf{w}, \mathbf{y}, t) \right\}. \quad (4.66)$$

O produto $\mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \times J(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ resulta em:

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}J)_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) &= \\ & \delta(z - w) \begin{pmatrix} 0 & A_{kxz} & B_{kxz} & 0 \\ A_{kxz}^* & 0 & 0 & B_{kxz}^* \\ B_{kxz}^* & 0 & 0 & C_{kxz}^* \\ 0 & B_{kxz} & C_{kxz} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \delta(z - w) \begin{pmatrix} -B_{kxz} & 0 & 0 & A_{kxz} \\ 0 & -B_{kxz}^* & A_{kxz}^* & 0 \\ 0 & -C_{kxz}^* & B_{kxz}^* & 0 \\ -C_{kxz} & 0 & 0 & B_{kxz} \end{pmatrix}, \quad (4.67) \end{aligned}$$

do qual pode-se calcular $(\mathcal{Q}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \times J(\mathbf{z}, \mathbf{w})) \times \mathcal{Q}_{k'}(\mathbf{w}, \mathbf{y}, t)$:

$$\begin{aligned}
((\mathcal{Q}J)\mathcal{Q})_{kk'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \delta(z-w) \times \\
&\begin{pmatrix} -B_{kxz} & 0 & 0 & A_{kxz} \\ 0 & -B_{kxz}^* & A_{kxz}^* & 0 \\ 0 & -C_{kxz}^* & B_{kxz}^* & 0 \\ -C_{kxz} & 0 & 0 & B_{kxz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{k'wy} & B_{k'wy} & 0 \\ A_{k'wy}^* & 0 & 0 & B_{k'wy}^* \\ B_{k'wy}^* & 0 & 0 & C_{k'wy}^* \\ 0 & B_{k'wy} & C_{k'wy} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \delta(z-w) \times \\
&\begin{pmatrix} 0 & -BA + AB & -BB + AC & 0 \\ -B^*A^* + A^*B^* & 0 & 0 & -B^*B^* + A^*C^* \\ -C^*A^* + B^*B^* & 0 & 0 & -C^*B^* + B^*C^* \\ 0 & -CA + BB & -CB + BC & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

O produto de elementos do tipo: $-BA$ ou CB , é claramente comutativo. De modo que termos como $-BA + AB$ são nulos. O resultado simplifica-se para:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}J\mathcal{Q})_{kk'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \delta(z-w) \times \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & -BB + AC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B^*B^* + A^*C^* \\ -C^*A^* + B^*B^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -CA + BB & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

4.2.1 Caso I: Vácuo

O cálculo de todos elementos da matriz 4.69 é essencialmente o mesmo. Olhe, por exemplo, para o elemento:

$$\iiint dzdw \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \delta(z-w) \{ -BB + AC \}$$

Este é a entrada (1,3) da matriz $(\mathcal{Q}J\mathcal{Q})_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. Uma vez que a

integração é uma operação linear, pode-se separar a integral acima em duas:

$$\begin{aligned}
& \iiint dz dw \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \delta(z-w) (-BB) \\
&= - \iiint dz \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} B_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) B_{k'}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, t) \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \iiint dz \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{z})} (\varphi_k \dot{\varphi}_k^* + \dot{\varphi}_k \varphi_k^*) e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{y})} (\varphi_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* + \dot{\varphi}_{k'} \varphi_{k'}^*) \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \iint \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} (\varphi_k \dot{\varphi}_k^* + \dot{\varphi}_k \varphi_k^*) (\varphi_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* + \dot{\varphi}_{k'} \varphi_{k'}^*) \int dz e^{-i\mathbf{z}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \iint \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} (\varphi_k \dot{\varphi}_k^* + \dot{\varphi}_k \varphi_k^*) (\varphi_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* + \dot{\varphi}_{k'} \varphi_{k'}^*) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (\varphi_k \dot{\varphi}_k^* + \dot{\varphi}_k \varphi_k^*)^2, \tag{4.70}
\end{aligned}$$

enquanto:

$$\begin{aligned}
& \iiint dz dw \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \delta(z-w) (AC) \\
&= \iiint dz \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} A_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) C_{k'}(\mathbf{z}, \mathbf{y}, t) \\
&= \hbar^4 \iiint dz \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{z})} e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^* \dot{\varphi}_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* \\
&= \hbar^4 \iint \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \varphi_k \varphi_k^* \dot{\varphi}_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* \int dz e^{-i\mathbf{z}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\
&= \hbar^4 \iint \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \varphi_k \varphi_k^* \dot{\varphi}_{k'} \dot{\varphi}_{k'}^* (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= \hbar^4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_k \varphi_k^* \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^*. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Juntos, os resultados acima levam a:

$$\begin{aligned}
(QJQ)_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13} &= \iiint\!\!\!\int dzdw \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \delta(z-w) \left\{ -BB + AC \right\} \\
&= \hbar^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\varphi_k \varphi_k^* \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^* - \frac{1}{4} \left(\varphi_k \dot{\varphi}_k^* + \dot{\varphi}_k \varphi_k^* \right)^2 \right] \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\varphi_k \dot{\varphi}_k^* - \dot{\varphi}_k \varphi_k^* \right)^2 \\
&= -\frac{\hbar^4}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.72}
\end{aligned}$$

a passagem da linha 3 para a linha 4 fez uso da condição imposta aos campos clássicos φ_k pelo wronskiano (equação 4.7). Os cálculos dos outros elementos não nulos seguem de maneira análoga e, portanto, serão suprimidos. O resultado final, como já pode ser esperado, é:

$$(QJQ)_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13} = (QJQ)_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{24} = \frac{\hbar^2}{4} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.73}$$

$$(QJQ)_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{31} = (QJQ)_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{42} = -\frac{\hbar^2}{4} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{4.74}$$

ou seja:

$$(QJQ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\hbar^2}{4} J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \tag{4.75}$$

Logo, pode-se concluir que o vácuo é um estado que satura a desigualdade de Schrodinger-Robertson. Ou seja, o determinante da Matriz de Covariância em Teoria Quântica de Campos é conservado para o caso de um campo escalar complexo e valores esperados tomados no vácuo. Desta forma, mesmo quando o Hamiltoniano depende do tempo, ou o sistema passa por transições de fase, as quadraturas envolvidas na desigualdade de Schrodinger-Robertson relacionam-se de maneira fixa no tempo.

Isto quer dizer que funções de correlação a dois pontos estão relacionadas. O cálculo das quadraturas de campos escalares pode ser simplificado pelo uso da relação 4.75.

4.2.2 Caso II: Estados Térmicos

O vácuo, por ser o estado de entropia mínima, é, sem dúvida, o caso mais simples a ser estudado. No extremo oposto, se pode pensar nos estados térmicos, aqueles que apresentam entropia máxima, uma vez que estes são exemplos da total falta de organização do sistema.

No início desta seção, alguns resultados preliminares já foram apresentados. A generalização do cálculo de $(QJQ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ para o caso de estados térmicos é imediata.

Lembrando que:

$$Q_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hbar^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right) Q_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (4.76)$$

De modo que cada elemento da matriz $(QJQ)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ carregará um termo: $\coth^2\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right)$. No caso tratado logo acima tem-se:

$$(QJQ)_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13} = \iiint\!\!\!\int dzdw \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \delta(z-w) \times \\ \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k'}}{2}\right) \{-BB + AC\},$$

que, após exatamente o mesmo processo algébrico, nos leva a:

$$(QJQ)_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13} = \frac{\hbar^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \coth^2\left(\frac{\beta\hbar\omega_{i,k}}{2}\right). \quad (4.77)$$

Vê-se que Q_T é uma função da diferença $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, de modo que a equação 4.77 pode ser vista como a transformada de Fourier da função

$$\coth^2\left(\frac{\beta\hbar\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}}{2}\right).$$

Sabe-se que a função $\coth^2 x$ diverge velozmente para $x = 0$, da mesma forma que converge rapidamente para o valor $\coth^2 x = 1$ quando $|x| > 2$, como pode ser visto na figura 4.1:A. Considere a expansão em série de $\coth^2 x$:

$$\coth^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4). \quad (4.78)$$

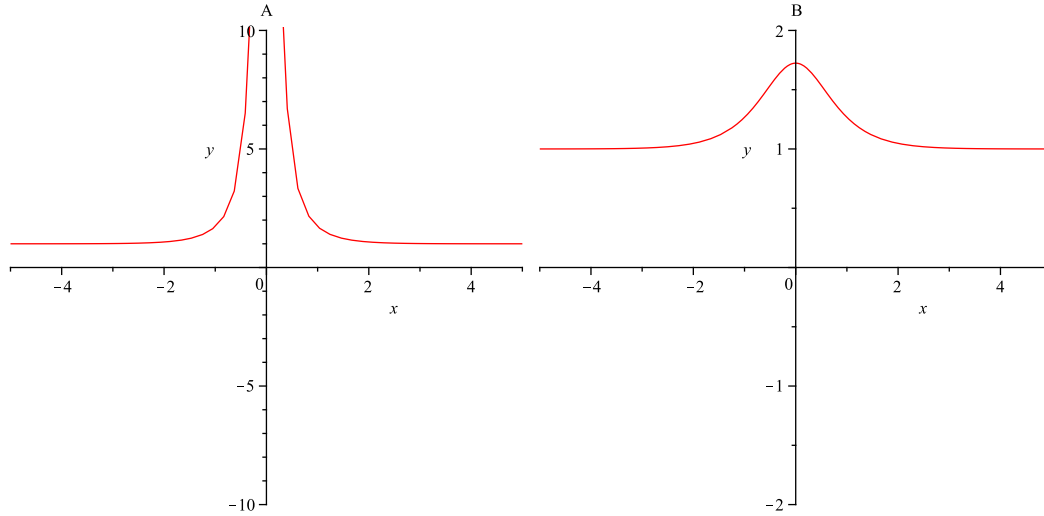


Figura 4.1: A: Gráfico de $\coth^2 x$; B: Gráfico de $\coth^2 \sqrt{x^2 + 1}$

Nota-se que, uma vez que m_i é real, a equação 4.78 não é mais divergente para $x = \frac{\beta\hbar\sqrt{\mathbf{k}^2+m_i^2}}{2}$ (fig. 4.1:B).

Do fato que:

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \gg 1,$$

pode-se concluir que:

$$\frac{2}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4) \rightarrow 1 \quad \text{quando } x \gg 1.$$

Por outro lado, quando $x \rightarrow 0$ tem-se:

$$\frac{1}{x^2} \gg \frac{2}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathcal{O}(x^4).$$

A interpretação Física da discussão anterior é que para temperaturas baixas e/ou $\mathbf{k}^2 \gg 1$,

$$\coth^2 \left(\frac{\beta\hbar\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}}{2} \right) \approx 1, \quad (4.79)$$

ou seja, o comportamento das funções de correlação a dois pontos é praticamente o mesmo que para o caso do vácuo.

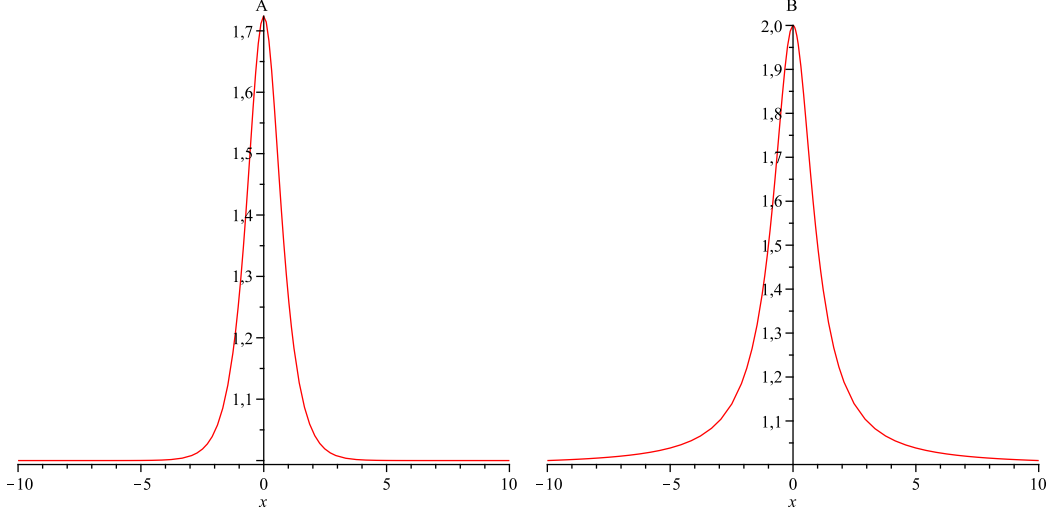


Figura 4.2: A: Gráfico de $\coth^2 \sqrt{x^2 + 1}$; B: Gráfico de $\frac{1}{x^2+1} + 1$

Além disso vê-se que temperaturas muito altas podem atrasar a convergência de 4.79. Mas, uma vez fixado β , o desvio de comportamento em relação ao vácuo se dá quando $\mathbf{k}^2 \rightarrow 0$. Desvio este que é modulado pelo valor de m_i .

A discussão acima motiva a seguinte aproximação: (a comparação numérica pode ser vista nas figuras 4.2 A e B.)

$$\coth^2 \left(\frac{\beta \hbar \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}}{2} \right) \approx \frac{2}{\beta^2 \hbar^2 (\mathbf{k}^2 + m_i^2)} + 1, \quad (4.80)$$

que deixa a equação 4.77 da seguinte forma:

$$(QJQ)_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13} = \frac{\hbar^2}{4} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\hbar^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})} \frac{2}{\beta^2 \hbar^2 (\mathbf{k}^2 + m_i^2)}. \quad (4.81)$$

O primeiro termo foi exatamente aquele encontrado para o caso do vácuo. Já o segundo é a Transformada de Fourier de uma função analítica, portanto é possível de ser calculado em princípio. Vê-se que, como era esperado, o comportamento de $Q_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{13}$ quando $T \rightarrow 0$, ou $\mathbf{k} \gg 1$, aproxima-se do caso de vácuo.

Capítulo 5

Aplicação à Cosmologia

Anteriormente, foi discutido em linhas gerais o modelo cosmológico de Robertson-Walker. Suas premissas iniciais eram homogeneidade e isotropia do universo. O sucesso da aplicação deste modelo deve-se, é claro, ao fato de que, em escala cosmológica, o universo é homogêneo e isotrópico.

Como foi visto na seção 2.2, dentre as previsões do modelo de Robertson-Walker pode-se destacar o comportamento dinâmico do universo e, conseqüentemente, a predição de uma singularidade na métrica do espaço-tempo, hoje chamada de Big Bang.

São várias as evidências que corroboram a hipótese do Big Bang. As mais consagradas talvez sejam:

- Radiação Cósmica de Fundo. A presença de radiação à temperatura de 4K, altamente isotrópica, permeando todo universo observável.
- Desvio para o vermelho da radiação emitida por galáxias distantes.

Um problema enfrentado pelo modelo do Big Bang é a ligação dos estados inicial e final do universo. Inicialmente, espera-se que um universo engendrado pelo Big Bang evolua de maneira heterogênea e manifeste uma geometria global altamente curva. Mas as observações apontam na direção contrária: homogeneidade e baixa curvatura.

O modelo da Inflação, proposto por Alexei Starobinski e Alan Guth, e hoje o mais aceito pela comunidade científica, admite a expansão exponencial do universo nos seus estágios primordiais ($10^{-36}s$ após o Big Bang).

Os detalhes relativos ao mecanismo responsável pela inflação ainda não são conhecidos, não obstante, confirmações observacionais de predições dos modelos disponíveis já foram obtidas, trazendo a foco a pesquisa dos estágios primordiais do universo.

A inflação é frequentemente modulada por um campo escalar ξ cuja partícula relacionada recebe o nome de *inflaton*. O campo ξ é acoplado à outro campo massivo ϕ , que pode ou não ser escalar. Este acoplamento resulta na dependência temporal da massa do campo ϕ , e conseqüentemente da criação das partículas deste, graças à ξ , e à ressonância paramétrica. Neste caso ϕ entra em ressonância com ξ , resultando na transferência de energia entre o campo do inflaton e o de partículas usuais.

Ao mecanismo de criação de partículas a partir do campo do *inflaton*, dá-se o nome de Pré-aquecimento (*pre-heating*).

5.1 Modelo Cosmológico com Transição de Fase

Observações astronômicas apontam hoje para um universo dominado pela matéria. Por outro lado, durante o período de inflação, o Universo deve ser dominado pelo *inflaton*.

Deste forma, ao final do período de inflação, deve haver uma transição de fase que leva de um estado dominado por um campo escalar homogêneo, em um estado dominado por partículas "usuais". Permitindo assim que a evolução pós-inflação do universo seja feita apenas com as leis de Teorias Quânticas de Campos e Relatividade Geral. Nesta seção vai-se estudar um modelo para esta transição.

Como já discutido anteriormente, a densidade lagrangeana de um campo escalar complexo é:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = -\partial^\mu \Phi^*(\vec{x}, t) \partial_\mu \Phi(\vec{x}, t) - m^2(t) \Phi^*(\vec{x}, t) \Phi(\vec{x}, t), \quad (5.1)$$

e

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (5.2)$$

O agente responsável pela transição de fase será a função $m(t)$, mais especificamente a mudança de sinal no valor de $m(t)$. Esta será modelada da seguinte maneira:

$$m^2(t) = -m_1^2 - m_0^2 \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad |m_1^2| < m_0^2. \quad (5.3)$$

Daí se vê que para $t = -\infty$, a massa tem como valor inicial:

$$m^2 = m_i^2 = m_0^2 - m_1^2 > 0,$$

enquanto para $t = \infty$, o valor final é:

$$m^2 = -m_f^2 = -(m_0^2 + m_1^2) < 0.$$

Segue então que a equação diferencial a ser obedecida pelos campos clássicos é:

$$\ddot{\varphi}_k(t) + \left[\vec{k}^2 - m_1^2 - m_0^2 \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \varphi_k(t) = 0. \quad (5.4)$$

A partir da solução para o campo clássico φ_k , pode-se estudar o comportamento da função de correlação a dois pontos e, conseqüentemente, do valor esperado dos operadores Φ e Π quânticos.

5.1.1 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados alguns resultados numéricos para o modelo discutido logo acima. Foram calculados, modo a modo, os seguintes valores esperados.

1. $\langle \varphi_k^2 \rangle + \langle \pi_k^2 \rangle$
2. $\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k + \pi_k \varphi_k \rangle$

Como podia-se esperar, nota-se claramente uma mudança no comportamento das funções citadas acima durante o intervalo $-1 < t < 1$. Ou seja, a variação temporal do valor da massa, e a sua mudança de sinal, implicaram em uma transição de comportamento no valor esperado das quadraturas.

A constante τ é responsável por tornar a transição de comportamento mais lenta ($\tau \gg 1$), ou mais rápida ($\tau \approx 0$). O limite $\tau \rightarrow 0$, que corresponde à mudança instantânea no valor de $m(t)$, admite solução analítica [12]. Como a dinâmica da transição é de interesse, o caso $\tau \rightarrow 0$ não será tratado. Todos os exemplos abaixo correspondem a $\tau = 1$.

Abaixo seguem os gráficos de

$$\langle |\varphi_k|^2 \rangle + \langle |\pi_k|^2 \rangle, \quad \text{e} \quad -\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle.$$

em função do tempo.

Tratou-se casos de condições iniciais:

$$\phi(0) = 0, \quad \pi(0) = 1,$$

e

$$\phi(0) = 1, \quad \pi(0) = 0.$$

Os valores de k são inteiros e variam de $k = 0$ à $k = 2$.

Gráficos

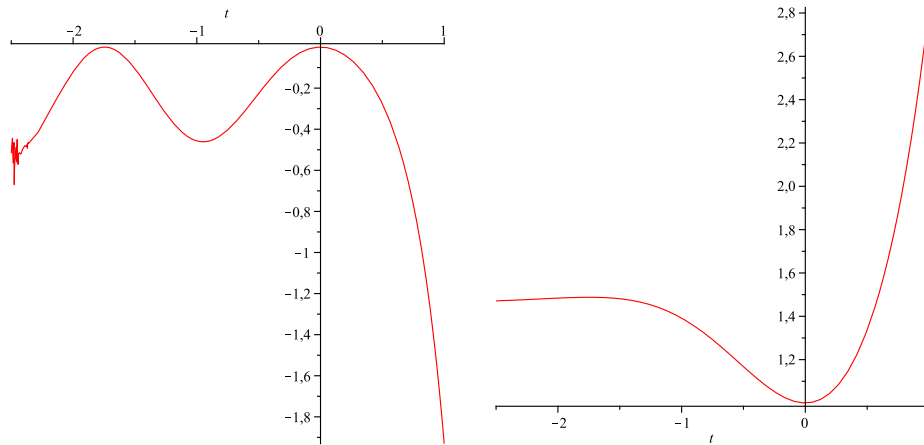


Figura 5.1: À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle |\varphi_k|^2 \rangle + \langle |\pi_k|^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 0$, Condições iniciais: $\phi(0) = 0$ e $\pi(0) = 1$.

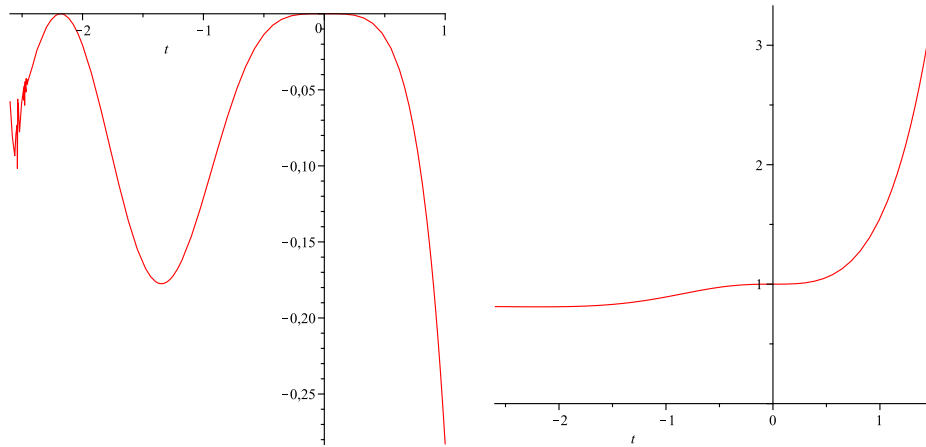


Figura 5.2: À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle |\varphi_k|^2 \rangle + \langle |\pi_k|^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 0$, Condições iniciais: $\phi(0) = 1$ e $\pi(0) = 0$.

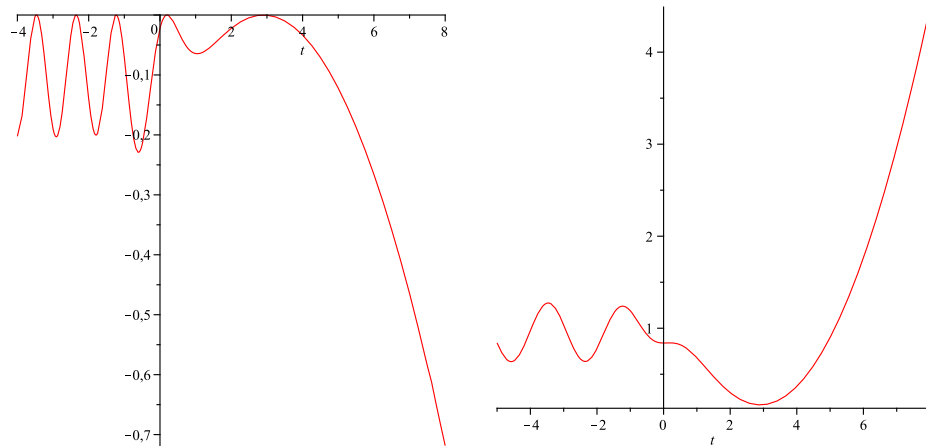


Figura 5.3: À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle |\varphi_k|^2 \rangle + \langle |\pi_k|^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 1$, Condições iniciais: $\phi(0) = 1$ e $\pi(0) = 0$.

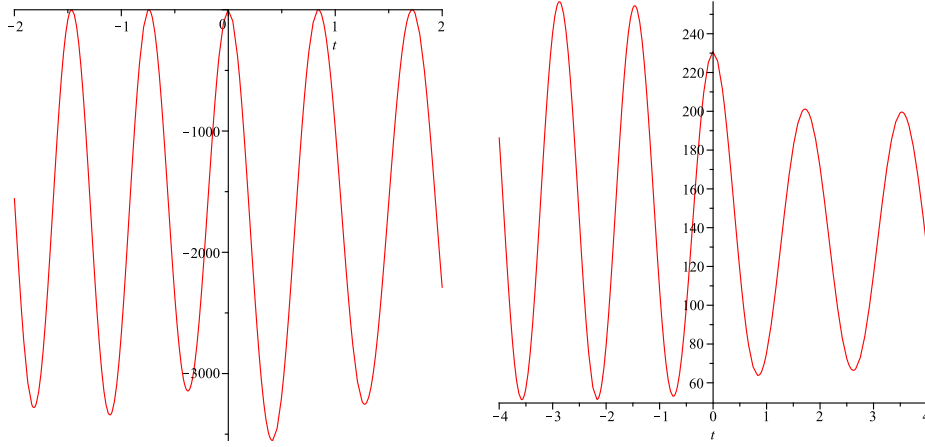


Figura 5.4: À esquerda o gráfico de $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ versus tempo. À direita o gráfico de $\langle |\varphi_k|^2 \rangle + \langle |\pi_k|^2 \rangle$ versus tempo. Parâmetros: $k = 2$, Condições iniciais: $\phi(0) = 0$ e $\pi(0) = 1$.

Nota-se que para $k < 2$ o caráter inicialmente ondulatório das funções $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$ cessa durante o intervalo $-1 < t < 1$ e estas adquirem uma postura divergente. Enquanto para $k > 2$, embora uma mudança de comportamento ainda ocorra, as funções não mais divergem quando $t \gg 1$. Isto era esperado uma vez que na equação 5.4, k^2 passa a dominar o valor de m^2 e 5.4 torna-se essencialmente a equação de um oscilador harmônico.

Também deve ser notado que o número médio de partículas, que é proporcional à $\langle \varphi_k^2 \rangle + \langle \pi_k^2 \rangle$, quando $k < 2$ é limitado para $t < -1$, sofre uma mudança no comportamento durante o intervalo $-1 < t < 1$, e cresce arbitrariamente para $t > 1$. Crescimento este sensivelmente mais intenso para $k = 0$. Por outro lado, para $k \geq 2$, o comportamento continua ondulatório, apresentando número médio de partículas essencialmente finito.

O que nos leva a concluir que após o período do pré-aquecimento, a grande maioria das partículas são aquelas de baixa energia, preferencialmente $k = 0$. E que a função $-\frac{1}{4} \langle \varphi_k \pi_k^* + \pi_k \varphi_k^* \rangle$, que está ligada ao fenômeno de compressão, mostra-se relacionada com a criação de partículas.

5.2 O Inflaton: Criação de Partículas

Neste seção vai ser estudado um modelo para a criação de partículas durante o período de termalização. O Hamiltoniano a ser considerado é:

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)\hat{x}^2, \quad (5.5)$$

onde

$$\omega^2(t) = \left(k^2 + \alpha(t)\right), \quad (5.6)$$

e

$$\alpha(t) = b \sin^2 mt, \quad (5.7)$$

na qual b e m são constantes arbitrárias discutidas mais adiante.

A equação de Heisenberg $\dot{\mathcal{O}} = i[H, \mathcal{O}]$, quando aplicada aos operadores \hat{x} e \hat{p} , resulta nas seguintes equações de movimento:

$$\ddot{x}(t) + [k^2 + b \sin^2(mt)] x(t) = 0, \quad (5.8)$$

e

$$\dot{p}(t) = \dot{x}(t). \quad (5.9)$$

A equação 5.8 é conhecida como Equação de Mathieu. Seu comportamento pode ser estudado numericamente e, mais a frente, alguns exemplos serão trabalhados.

A equação de Mathieu admite soluções de crescimento exponencial. Estas, por sua vez, dependem das frequências de oscilação do campo do inflaton e da massa do campo em questão. Dois são os regimes para que as soluções sejam exponencialmente crescentes: *Broad e Narrow Resonance*.

Durante a inflação, o Universo evolui do regime de Broad Resonance, quando a maior parte das partículas é criada, para o de Narrow Resonance. Este fenômeno será visto mais a frente. Por enquanto, escreve-se as soluções das equações 5.8 e 5.9 da seguinte forma:

$$x(t) = u_1(t)x_0 + u_2(t)p_0, \quad (5.10)$$

e

$$p(t) = u_3(t)x_0 + u_4(t)p_0, \quad (5.11)$$

onde $u_i(t)$ são funções de Mathieu e suas derivadas primeiras. As constantes x_0 e p_0 são as condições iniciais do problema. Por toda a discussão que segue será feito uso de:

$$x_0 = \frac{\hbar}{2\omega(0)}, \quad p_0 = \frac{\hbar\omega(0)}{2}. \quad (5.12)$$

É útil, neste ponto, definir as seguintes variáveis sem unidade:

$$X(t) = \sqrt{\frac{\omega(t)}{2}}x(t), \quad P(t) = \sqrt{\frac{1}{2\omega(t)}}p(t), \quad (5.13)$$

que levam a:

$$H = \omega(t) (P^2 + X^2). \quad (5.14)$$

O número médio de excitações é dado pelo valor esperado do operador $a^\dagger a$:

$$N = \langle a^\dagger a \rangle = \frac{1}{\hbar\omega(t)}H - \frac{1}{2}, \quad (5.15)$$

5.2.1 Resultados Numéricos

Foi feito um tratamento numérico dos seguintes casos:

- **Narrow Resonance:** $b = 4 \cdot 10^{-13}$, $m = 10^{-6}$ e $k = 9 \cdot 10^{-7}$
- **Broad Resonance:** $b = 8 \cdot 10^{-12}$, $m = 10^{-6}$ e $k = 10^{-8}$

Em cada um estudou-se a criação de partículas e sua relação com as quadraturas e a função de Wigner, equação (2.78).

Para os casos em questão, escreveremos a função de Wigner como função de X e P , a invés de α e α^* , como foi apresentado no Capítulo II. A transformação é feita da seguinte maneira:

$$\alpha = X + iP, \quad \alpha^* = X - iP. \quad (5.16)$$

Acredita-se que durante o período do pré-aquecimento do universo, este tenha experimentado inicialmente o regime de *Broad Resonance*. Regime no qual a maior parte das partículas é criada, ou seja: há grande transferência de energia do inflaton para o campo usual de matéria acoplado a ele.

Em um segundo estágio, o universo passa pela *Narrow Resonance*. Quando a maior parte da energia já foi transferida, resultando em um menor e mais devagar processo de criação de partículas.

Abaixo seguem os resultados obtidos para os dois casos.

Narrow Resonance

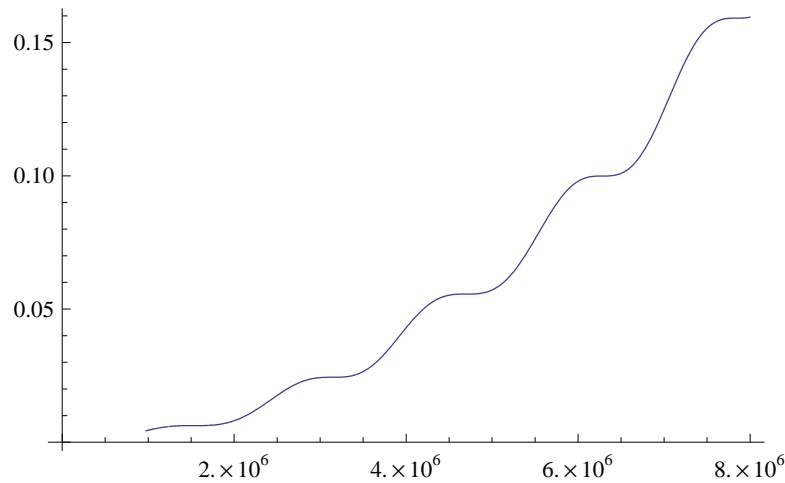


Figura 5.5: Gráfico do número médio de partículas (equação 5.15) versus tempo.

Das figuras acima e da figura 5.7, fica clara a ligação entre a função de Wigner, compressão, e criação de partículas. Vê-se na figura 5.5 que um salto no número médio de partículas acontece a cada intervalo de $\frac{\pi}{2m}$. Além disso, também se pode notar que o salto é maior a medida que o tempo passa.

Na figura 5.7 nota-se que a função de Wigner, a medida que o tempo passa, torna-se cada vez mais comprimida. Mas a orientação da compressão muda periodicamente. A direção na qual a função de Wigner está comprimida, segundo a figura 5.5, tem ligação direta com a taxa criação de partículas. Enquanto a compressão total da função, parece estar ligada ao número médio total.

Notou-se que nos instantes de tempo para os quais a função de Wigner estava comprimida na direção de um dos eixos principais, no caso X ou P , o número médio de partículas experimentava maior taxa de crescimento. Ao

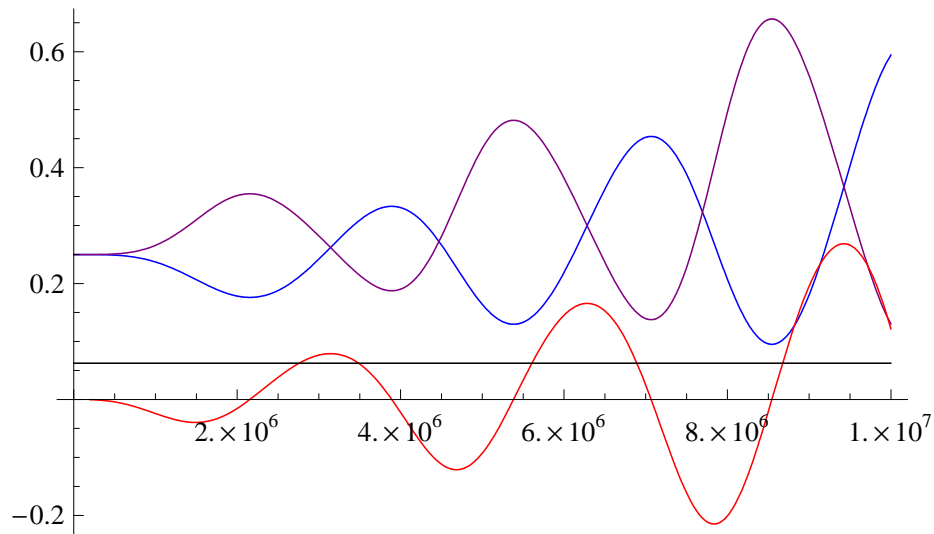
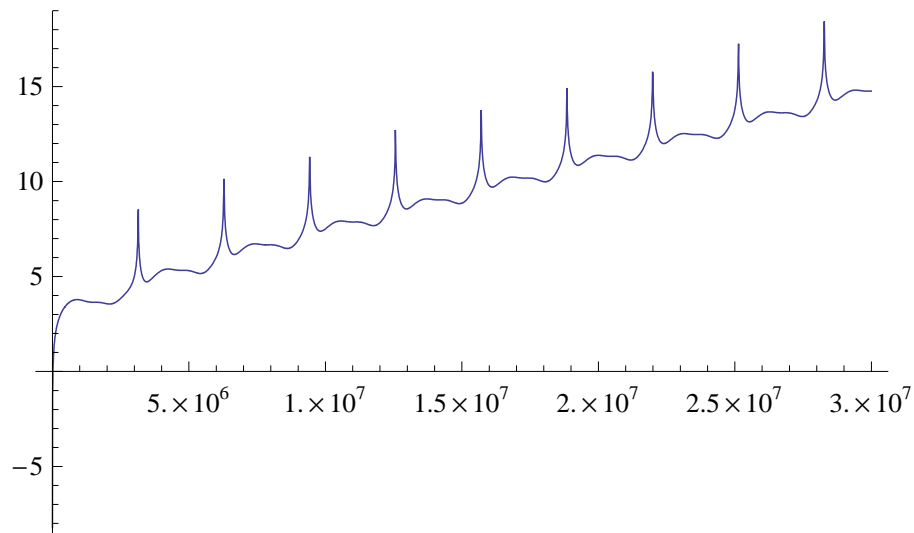


Figura 5.6: Gráfico das variâncias $(\Delta X)^2$ (azul), $(\Delta P)^2$ (roxo), $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle$ (vermelho), e $(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 - \frac{1}{4} \langle XP + PX \rangle^2$ (preto), em função do tempo.

passo que quando aquela encontrava-se comprimida na direção precisamente entre os eixos principais, via-se no número médio de partículas um plateau, ou, taxa zero de criação.

Broad Resonance



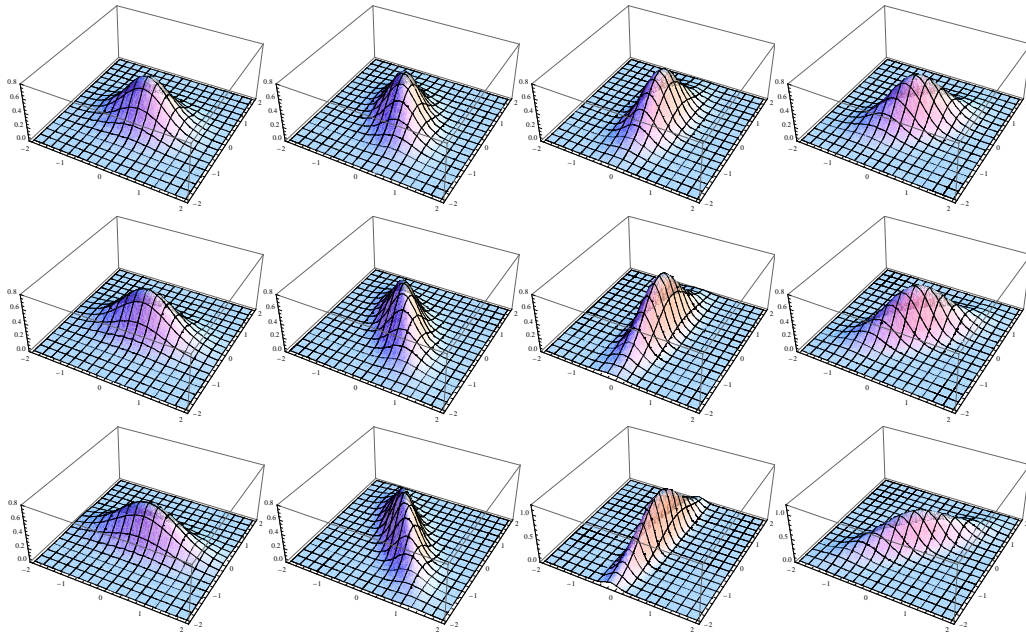


Figura 5.7: Evolução no tempo das funções de Wigner para o caso de Narrow Resonance. Inicialmente em $t = \frac{5\pi}{4m}$ até $t = \frac{4\pi}{m}$, incrementos de $\frac{\pi}{4m}$. Os gráficos na primeira e terceira colunas dizem respeito aos instantes nos quais $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle = 0$, e N (equação 5.15) apresenta maior taxa de crescimento. As segunda e quarta colunas já mostram instantes para os quais N é constante e $\frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle$ é máximo em valor absoluto.

Figura 5.8: Gráfico do logaritmo do número médio de partículas (equação 5.15) versus tempo.

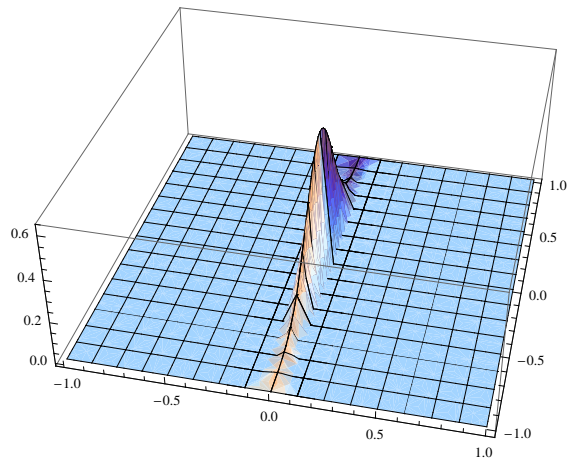


Figura 5.9: Gráfico da função de Wigner (equação 2.78) em $t = \frac{2\pi}{m}$.

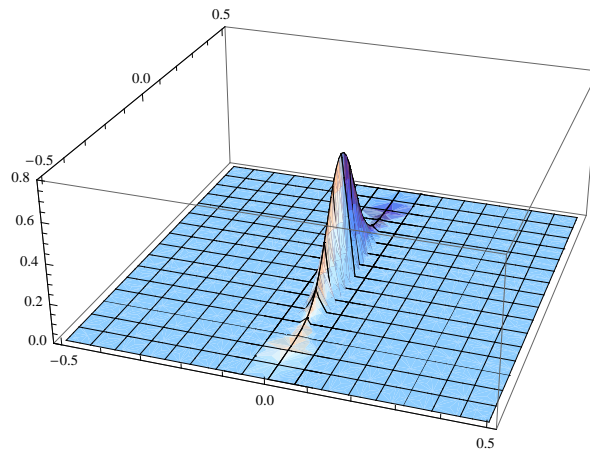


Figura 5.10: Gráfico da função de Wigner (equação 2.78) em $t = \frac{4\pi}{m}$.

De maneira semelhante à observada no regime de Narrow Resonance, nota-se que a função de Wigner está ligada aos picos no número médio de partículas também para o caso de Broad Resonance. Mas, diferente do que

foi observado anteriormente, nota-se agora apenas picos muito estreitos, instantâneos, e de periodicidade 2π . Uma análise do gráfico 5.8 deixa claro como este comportamento das funções de Wigner está entrelaçado com o fenômeno de criação de partículas.

Como era esperado pelo modelo do pré-aquecimento, o número de partículas criadas durante o regime de *Broad Resonance* é muito maior que durante o regime de *Narrow Resonance*. Além disso, a transferência de energia se dá de maneira muito mais abrupta no caso "Broad".

Efeito este presente também nas funções de Wigner, que no regime "Narrow" comprimiu-se de maneira gradativa ao passo que girava periodicamente. Enquanto que no regime "Broad" foi rapidamente a zero, e apenas por instantes de tempo, periodicamente separados por $\frac{2\pi}{m}$, apresentava perfil estreitíssimo.

Capítulo 6!

Capítulo 6

Conclusões

Foi mostrado que a independência temporal do determinante da matriz de covariância, válida para sistemas gaussianos não autônomos, pode ser estendida em sua forma generalizada para um campo escalar complexo no vácuo. Este fato permite que modelos de um campo escalar dependente do tempo sejam tratados, modo a modo, como sistemas quânticos usuais. Permitindo, inclusive, que este campo seja totalmente caracterizado pelos seus momentos quadráticos. Foi visto que o mesmo resultado não é válido para estados térmicos, embora aproxime-se assintoticamente quando em regimes de baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$), e\ou modos muito energéticos ($\mathbf{k}^2 \gg 1$).

Foi estudado um modelo para a transição de fase responsável por iniciar o período de termalização durante a era inflacionária do universo. Os resultados obtidos foram condizentes com o esperado. No que diz respeito ao número médio de partículas, um comportamento oscilatório seguido de criação intensa foi visto para os modos mais baixos; os modos superiores mantiveram o caráter oscilatório. Este resultado leva à conclusão que findado o processo, a maior parte das partículas observadas são aquelas de baixa energia.

A função de Wigner, ferramenta importante na área de Sistemas Quânticos Abertos, mostrou-se útil para o entendimento de fenômenos referentes a Teorias Quânticas de Campos. No modelo abordado, sua geometria e orientação fornecem informação a respeito da taxa criação assim como do número médio total de partículas.

Os casos de Broad e Narrow Ressonance foram abordados e os resultados obtidos corroboraram as hipóteses do modelo. Constatou-se que a maior parte das partículas é criada durante o período de Broad Ressonance. O processo de criação se dá de maneira rápida e abrupta em Broad Ressonance, em contraste com o observado para Narrow Ressonance. A análise função de Wigner acusou todos os resultados encontrados para o número médio de partículas, fortalecendo o paralelo estabelecido no capítulo 4.

O fenômeno de compressão, útil em sistemas como as Paul-Traps, mostrou ligação com o processo de criação de partículas nos dois casos trabalhados. E também com o comportamento da função de Wigner. Pode ser notado que o termo $\langle XP + PX \rangle^2$, responsável direto pela compressão (como visto no capítulo 3), apresenta a mesma periodicidade e perfil crescente que o número médio de partículas.

O mapeamento de um modelo cosmológico em um sistema usual de Mecânica Quântica, abre a oportunidade para se testar **experimentalmente** hipóteses sobre a criação do universo. Técnicas como as já citadas Paul-Traps, Cavidades de Fabry-Perot, ou BEC, podem ser utilizadas para recriar as condições primordiais do universo e ajudar a entender os processos que o moldaram.

Tendo em vista os resultados encontrados, pode-se dizer que os objetivos estipulados para este trabalho foram todos alcançados. Não há dúvida que muito ainda deve ser feito, e espera-se que a iniciativa bem sucedida aqui apresentada seja continuada. Por agora, contento-me em por um fim a esta dissertação.

*"Viver é muito perigoso."*¹

¹Riobaldo Tatarana, Grande Sertão: Veredas, Guimarães Rosa

Referências

- [1] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [2] Robert M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1994).
- [3] Leslie E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998).
- [4] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics 3rd ed.*, Addison Wesley (2002).
- [5] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics 2nd ed.*, Pearson Prentice Hall (2005).
- [6] Mark Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).
- [7] G. S. Agarwal, S. Arun Kumar, *Exact Quantum-Statistical Dynamics of an Oscillator with Time-Dependent Frequency and Generation of Nonclassical States*, Physical Review Letters, **67**, 3665 (1991).
- [8] B. Baseia, Reeta Vyas, Bagnato, *Particle trapping by oscillating fields: squeezing effects*, Quantum Opt., **5**, 155-159 (1993).
- [9] A. F. R. de Toledo Piza, *Classical equations for quantum squeezing and coherent pumping by the time-dependent quadratic Hamiltonian*, Physical Review A, **51**, 1612 (1995).

- [10] K. H. Cho, J. Y. Ji, S. P. Kim, C. H. Lee, J. Y. Ryu, *Heisenberd-picture approach to the evolution of the scalar fields in an expanding universe*, Physical Review D, **56**, 4916 (1997).
- [11] Iwo Bialynicki-Birula, *Nonstandard introduction to squeezing of the electromagnetic field*, Acta Physica Polonica B, **29**, 3569 (1998).
- [12] Sang Pyo Kim, Chul H. Lee, *Nonequilibrium quantum dynamics of second order phase transitions*, Physical Review D, **62**, 125020 (2000).

Apêndices

Demonstração das equações 3.27 e 3.28

O objetivo deste apêndice é calcular as quadraturas Δq^2 e Δp^2 em função das variáveis P e Q introduzidas no capítulo 3. Lembremo-nos que, em termos de x e y , variáveis introduzidas na transformação de Bogolyubov, as quadraturas ficam:

$$\Delta q^2 = \frac{1}{2\mu_0} [1 + 2|x|^2\nu + 2|y|^2(1+\nu) - (1+2\nu)(x^*y + xy^*)], \quad (1)$$

e

$$\Delta p^2 = \frac{\mu_0}{2} [1 + 2|x|^2\nu + 2|y|^2(1+\nu) + (1+2\nu)(x^*y + xy^*)]. \quad (2)$$

Relembrando as definições feitas no capítulo 3, temos:

$$x = \cosh \sigma + \frac{i\tau}{2}, \quad y = \sinh \sigma + \frac{i\tau}{2}, \quad (3)$$

e

$$P = \tau \sqrt{\frac{1+2\nu}{2}} \mu_0, \quad Q = e^{-\sigma} \sqrt{\frac{1+2\nu}{2\mu_0}}. \quad (4)$$

Cabe também definir:

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{(1+2\nu)\mu_0}} P = \tau, \quad \mathcal{Q} = \sqrt{\frac{2\mu_0}{1+2\nu}} Q = e^{-\sigma}, \quad (5)$$

da onde fica claro que:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{Q}} + \mathcal{Q} \right) + \frac{i\mathcal{P}}{2}, \quad (6)$$

e

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{Q}} - \mathcal{Q} \right) + \frac{i\mathcal{P}}{2}. \quad (7)$$

Além disso, também temos:

$$|x|^2 = \frac{1}{4Q^2} (1 + Q^2)^2 + \frac{P^2}{4}, \quad (8)$$

$$|y|^2 = \frac{1}{4Q^2} (1 - Q^2)^2 + \frac{P^2}{4}, \quad (9)$$

$$x^*y = \frac{1}{4Q^2} (1 - Q^4) + \frac{P^2}{4} + \frac{iPQ}{2}, \quad (10)$$

e

$$xy^* = \frac{1}{4Q^2} (1 - Q^4) + \frac{P^2}{4} - \frac{iPQ}{2}, \quad (11)$$

de modo que:

$$x^*y + xy^* = \frac{1}{2Q^2} (1 - Q^4) + \frac{P^2}{2}. \quad (12)$$

As equações 8, 9 e 12 são tudo que precisamos. A equação 1 fica:

$$\begin{aligned} \Delta q^2 &= \frac{1}{2\mu_0} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 + Q^2)^2 + \frac{P^2}{2} \right) \nu + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^2)^2 + \frac{P^2}{2} \right) (1 + \nu) - \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^4) + \frac{P^2}{2} \right) (1 + 2\nu) \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 + Q^2)^2 \right) \nu + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^2)^2 \right) (1 + \nu) - (1 + 2\nu) \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^4) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left(Q^2\nu + Q^2(\nu + 1) + Q^2(1 + 2\nu) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} Q^2 (1 + 2\nu) \\ &= Q^2. \end{aligned} \quad (13)$$

De maneira análoga, a equação 2 fica:

$$\begin{aligned}\Delta p^2 &= \frac{\mu_0}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 + Q^2)^2 + \frac{P^2}{2} \right) \nu + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^2)^2 + \frac{P^2}{2} \right) (1 + \nu) + \left(\frac{1}{2Q^2} (1 - Q^4) + \frac{P^2}{2} \right) (1 + 2\nu) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left\{ P^2 (1 + 2\nu) + \frac{1}{Q^2} (1 + 2\nu) \right\} \\ &= P^2 + \frac{(1 + 2\nu)^2}{4Q^2}.\end{aligned}\tag{14}$$