

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ESTRUTURAS

Livia Ramos Santos Pereira

DESCRIÇÃO DO FENÔMENO DE FRATURAMENTO DO CONCRETO:  
uma abordagem estocástica baseada em modelos contínuos-descontínuos de  
dano e *phase-field*

Belo Horizonte/MG

2025

Lívia Ramos Santos Pereira

**DESCRIÇÃO DO FENÔMENO DE FRATURAMENTO DO CONCRETO:  
uma abordagem estocástica baseada em modelos contínuos-descontínuos de  
dano e *phase-field***

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutora em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Silva Penna

Belo Horizonte/MG

2025

P436d

Pereira, Livia Ramos Santos.

Descrição do fenômeno de fraturamento do concreto [recurso eletrônico] : uma abordagem estocástica baseada em modelos contínuos-descontínuos de dano e *phase-field* / Livia Ramos Santos Pereira. – 2025.

1 recurso online (197 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Resistência de materiais – Teses. 3. Mecânica da fratura – Modelos matemáticos – Teses. 4. Análise estocástica – Teses. 5. Métodos de simulação – Teses. 6. Concreto – Deterioração – Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



## ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº 112 DA ALUNA LIVIA RAMOS SANTOS PEREIRA

Às **13:00** horas do dia **22 de agosto** de 2025, reuniu-se na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), com a participação por videoconferência dos professores **Dr. Américo Campos Filho da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)**, **Dr. Flávio de Souza Barbosa da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)** e **Dr. Lapo Gori da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)**, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em 13 de junho de 2025 para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada: "**Descrição do Fenômeno de Fraturamento do Concreto: Uma Abordagem Estocástica Baseada em Modelos Contínuos-Descontínuos de Dano e Phase-Field**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a Sessão, a Presidente da Comissão, Prof. Dr. Samuel Silva Penna, após dar conhecimento aos presentes do teor das Normas Regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Finalizada a apresentação, seguiu-se para a fase de arguição pelos examinadores, com as respectivas respostas da aluna. Logo após a fase de arguição, a Comissão se reuniu, sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final, a saber:

Aprovada

Reprovada

O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pela Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora e pela aluna.

### Comissão Examinadora:

**Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG (Orientador)**

**Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Lapo Gori - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Américo Campos Filho - UFRGS**

**Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa - UFJF**

A aprovação da aluna na Defesa de Tese de Doutorado não significa que a mesma tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do DIPLOMA de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Para ciência da aluna:

1. Atesto que as alterações solicitadas pela Comissão Examinadora serão cumpridas no prazo de ATÉ 60 dias corridos.
2. Atesto estar ciente que a versão corrigida da Tese/dissertação deverá ser entregue ao Repositório Institucional da UFMG, conforme orientações disponíveis em: <https://repositorio.ufmg.br/custom/instructions.jsp>

Ciente: Lívia Ramos Santos Pereira

Aluna

Belo Horizonte, 22 de agosto de 2025.

Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.

Após a Homologação da Defesa pelo Colegiado do Programa, este documento será assinado pela Coordenação e disponibilizado à aluna.



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 22/08/2025, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flávio de Souza Barbosa, Usuário Externo**, em 22/08/2025, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitangueira, Professor do Magistério Superior**, em 22/08/2025, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lapo Gori, Professor do Magistério Superior**, em 22/08/2025, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Américo Campos Filho, Usuário Externo**, em 25/08/2025, às 07:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lívia Ramos Santos Pereira, Usuário Externo**, em 26/08/2025, às 09:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Coordenador(a)**, em



26/08/2025, às 09:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4467237** e o código CRC **A93EB019**.

---

*Aos meus pais, Márcia e Jairo.  
Aos meus professores e aos meus alunos.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço àqueles que nesses longos anos de formação compartilharam comigo tempo e conhecimentos. Aos meus pais, Márcia e Jairo, por incentivarem minha educação e acreditarem na minha capacidade. Ao meu irmão, Júlio, figura tão carismática, que sempre me convida a sorrir. E à minha cunhada Cíntia, por ser essa mulher gentil e generosa. Vocês são meu suporte.

Agradeço ao Professor Samuel, pessoa incomparável. Sua dedicação e profissionalismo exemplares me fazem acreditar que o trabalho duro vale a pena. Com você tenho aprendido tanto, sobre ser uma pesquisadora, uma professora e um ser humano melhor. Obrigada!

Minha gratidão à minha psicóloga Maria José, pelos ouvidos atentos e as palavras precisas. Seu trabalho admirável foi essencial para que eu chegasse até aqui.

Aos amigos de trajetória. Em especial, ao Matheus e à Vitória, por todo acolhimento, paciência e companheirismo - vocês estarão sempre em meu coração. Àqueles de Pará de Minas, com quem compartilho raízes e histórias de infância. Aos que entraram em minha vida pela UFMG, o caminho foi mais divertido com vocês. Aos meus amigos de casa, Léo e Aysel, por serem as melhores companhias que eu poderia ter. Aos colegas do CEFET, principalmente à Lud e à Renata, pela parceria nessa incrível tarefa que é lecionar.

Aos meus alunos da UFMG e do CEFET. Conviver com vocês é uma riqueza. Quando estou em sala, não há outro lugar onde eu preferiria estar.

Ao organismo vivo que é a UFMG e à sociedade que nos mantém, permitindo ensino gratuito de qualidade. Em especial, agradeço aos professores e funcionários do DEES, pelos ensinamentos e pela solicitude de sempre.

A Deus, por me permitir concluir essa etapa e colocar pessoas incríveis em minha vida.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

*“Educar a mente sem educar o coração não é educação.”*

Aristóteles

## RESUMO

PEREIRA, L. R. S. **Descrição do fenômeno de fraturamento do concreto:** uma abordagem estocástica baseada em modelos contínuos-descontínuos de dano e *phase-field*. 2025. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 197 p., 2025.

Esta tese propõe a descrição completa do processo de degradação do concreto a partir do desenvolvimento de uma abordagem contínua-descontínua, cujo critério de transição é a variável de *phase-field*. Embora a busca por modelos constitutivos e métodos numéricos capazes de representar o comportamento de materiais parcialmente frágeis desperte o interesse de estudiosos desde o início do século XX, esse ainda é um desafio que perdura na Engenharia de Estruturas. Abordagens contínuas e descontínuas contemplam, respectivamente, o estágio inicial, caracterizado pelo surgimento de microfissuras, e o estágio final, em que há formação de trincas macroscópicas, da degradação do concreto. Contudo, um modelo representativo da deterioração do meio material deve abrangê-la em sua completude. Para atingir esse propósito, faz-se necessário combinar ambas as teorias. A literatura relata alguns trabalhos que discutem o tema, entretanto, esses apresentam limitações para padrões complexos de fratura e há pendências quanto à definição do procedimento de transição entre contínuo e descontínuo. Nesse contexto, o presente trabalho pretende elaborar uma abordagem que associe modelos contínuos de dano não local com a introdução de trincas discretas na malha de elementos finitos via duplicação nodal. A opção pela variável de *phase-field* como critério de transição entre o dano distribuído e a fratura discreta é justificada por sua característica de se relacionar tanto com a mecânica do dano quanto com a mecânica da fratura, além da sua capacidade de indicar a nucleação, a propagação e a coalescência de fissuras. Adicionalmente, a fim de incorporar às simulações numéricas a aleatoriedade inerente ao material e ao processo de fraturamento, apresenta-se uma estratégia estocástica de parametrização baseada no método de Monte Carlo. Uma série de simulações numéricas foi realizada para validação do modelo constitutivo proposto e os resultados indicaram a eficiência da formulação desenvolvida em reproduzir a degradação do concreto, desde estágios incipientes até a iminência do colapso.

Palavras-chave: abordagem contínua-descontínua; degradação do concreto; duplicação nodal; modelos de dano não local; variável de *phase-field*.

## ABSTRACT

PEREIRA, L. R. S. **Description of the concrete fracturing phenomenon: a stochastic approach based on continuous-discontinuous models of damage and phase-field.** 2025. Thesis (Doctorate) - Postgraduate Program in Structural Engineering, Federal University of Minas Gerais, Minas Gerais, 197 p., 2025.

This thesis proposes a complete description of the concrete degradation process based on the development of a continuous-discontinuous approach, whose transition criterion is the phase-field variable. Although the search for constitutive models and numerical methods able to represent the behavior of quasi-brittle materials has aroused the interest of researchers since the beginning of the 20th century, this is a challenge that endures in Structural Engineering. Continuous and discontinuous approaches embrace, respectively, the initial stage of concrete degradation, characterized by the nucleation of microcracks, and the final stage, when macroscopic cracks emerge. However, a representative model of the material media deterioration must comprise it entirely. To aim at this purpose, it is necessary to associate both theories. The literature reports some works that discuss the theme. Nevertheless, they present limitations to complex fracture standards, and there are gaps in the procedure for transitioning between continuous and discontinuous. In this context, the present study intends to develop an approach that associates continuous non-local damage models with introducing discrete cracks into the finite element mesh using nodal duplication. The option for the phase-field variable as the transition criteria between smeared damage and discrete fracture is justified by its characteristic of relating damage mechanics and fracture mechanics, besides its capability to indicate the nucleation, propagation, and coalescence of cracks. Additionally, to incorporate the randomness inherent in the material and the fracturing process into the numerical simulations, a stochastic parameterization strategy based on the Monte Carlo method is presented. A series of numerical simulations were performed to validate the proposed constitutive model, and the results indicated the effectiveness of the developed formulation in reproducing concrete degradation, from incipient stages to imminent collapse.

Keywords: continuous-discontinuous approach; concrete degradation; nodal duplication; nonlocal damage models; phase-field variable.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Abstração da abordagem contínua-descontínua via variável de <i>phase-field</i> .	24
Figura 2.1 – Modelos computacionais discretos para a fratura.	33
Figura 2.2 – Abordagens para descrever a degradação (adaptado de Mediavilla, Peerlings e Geers (2006)).	41
Figura 2.3 – Modelos para descrição da degradação do meio material.	47
Figura 2.4 – Fluxograma do algoritmo para definição da direção de propagação da trinca (Adaptado de Leblouba, Trabin e Zahri (2022)).	47
Figura 2.5 – Direções de propagação da trinca e suas respectivas probabilidades (Adaptado de Leblouba, Trabin e Zahri (2022)).	48
Figura 3.1 – Volume Elementar Representativo (VER) (PENNA, 2011).	51
Figura 3.2 – Localização de deformações numericamente induzida (adaptado de Fuina (2009)).	58
Figura 3.3 – Representação da formulação não local (adaptado de Souza (2016)).	59
Figura 3.4 – Funções de distribuição - representação gráfica.	60
Figura 3.5 – Representação de um corpo sólido com manifestação de uma trinca.	62
Figura 3.6 – Modos de fraturamento.	64
Figura 3.7 – Tensões próximas à ponta da trinca (adaptado de Anderson (2017)).	65
Figura 3.8 – Modelagem discreta e difusa de uma trinca (LEÃO, 2021).	67
Figura 3.9 – Representação de um corpo sólido com manifestação de uma trinca via <i>phase-field</i> .	68
Figura 3.10 – Procedimento iterativo para o solucionador alternado (adaptado de Zhang et al. (2018b)).	74
Figura 4.1 – Rotação entre o sistema global ( $xy$ ) e o local ( $ns$ ) (PENNA, 2011).	79
Figura 4.2 – Definição do sistema local de propagação da trinca durante o processo de duplicação nodal.	84
Figura 4.3 – Representação do processo de duplicação nodal.	84
Figura 4.4 – Estratégia de criação de pontos de colocação coincidentes aos nós (Adaptado de Assis e Penna (2024)).	87
Figura 4.5 – Grandezas internas calculadas nos pontos de integração e nos pontos de colocação.	87
Figura 4.6 – Critérios de propagação.	89
Figura 4.7 – Fluxograma do modelo contínuo-descontínuo.	93
Figura 4.8 – Representação gráfica do processo de parametrização do material e do modelo a partir de simulações de Monte Carlo.	94
Figura 4.9 – Análise do erro obtido para a curva média com o crescimento do número de amostras da simulação de Monte Carlo.	94

Figura 5.1 – Painel em “ L”: geometria e configuração experimental (adaptado de Feist et al. (2004)). . . . .	96
Figura 5.2 – Painel em “ L”: malha adotada no processo de parametrização com 15428 elementos. . . . .	99
Figura 5.3 – Comparação entre os caminhos de trinca obtidos pelas simulações de Monte Carlo e o espectro experimental de Feist et al. (2004). . . . .	99
Figura 5.4 – Trajetórias de equilíbrio via simulações de Monte Carlo. . . . .	100
Figura 5.5 – Trajetória de equilíbrio da amostra representativa - passos em destaque.	101
Figura 5.6 – Amostra 36: deformada do painel em “ L”. . . . .	101
Figura 5.7 – Amostra 36: distribuição de dano com a evolução da análise. . . . .	102
Figura 5.8 – Amostra 36: distribuição de <i>phase-field</i> com a evolução da análise. . . .	103
Figura 5.9 – Painel em “ L”: propostas de malhas. . . . .	105
Figura 5.10–Painel em “ L”: distribuição do dano para as diferentes malhas. . . . .	106
Figura 5.11–Painel em “ L”: distribuição do <i>phase-field</i> para as diferentes malhas. .	107
Figura 5.12–Painel em “ L”: trinca discreta para as diferentes malhas. . . . .	108
Figura 5.13–Caminhos de trinca para as diferentes malhas. . . . .	109
Figura 5.14–Trajetórias de equilíbrio para cada malha. . . . .	109
Figura 5.15–Caminhos de trinca considerando o dano (N=D) como critério de nucleação e diferentes estratégias de direção de propagação. . . . .	112
Figura 5.16–Trajetórias de equilíbrio considerando o dano como critério de nucleação (N=D) e diferentes estratégias de direção de propagação. . . . .	112
Figura 5.17–Caminhos de trinca considerando o <i>phase-field</i> como critério de nucleação (N=PF) e diferentes estratégias de direção de propagação. . . . .	113
Figura 5.18–Trajetórias de equilíbrio considerando o <i>phase-field</i> como critério de nucleação (N=PF) e diferentes estratégias de direção de propagação. .	113
Figura 5.19–Caminho da trinca considerando a variável híbrida como critério de nucleação (N=H) e direção de propagação. . . . .	114
Figura 5.20–Trajetória de equilíbrio considerando a variável híbrida como critério de nucleação (N=H) e direção de propagação. . . . .	114
Figura 5.21–Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por dano não local. .	116
Figura 5.22–Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por dano não local.	116
Figura 5.23–Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por <i>phase-field</i> não local. . . . .	117
Figura 5.24–Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por <i>phase-field</i> não local. . . . .	117

Figura 5.25–Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por <i>phase-field</i> e direção de propagação por <i>phase-field</i> não local. . . . .	119
Figura 5.26–Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por <i>phase-field</i> e direção de propagação por <i>phase-field</i> não local. . . . .	119
Figura 5.27–Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação pela variável híbrida e direção de propagação conforme variável híbrida não local. . . . .	120
Figura 5.28–Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação pela variável híbrida e direção de propagação conforme variável híbrida não local. . . . .	120
Figura 5.29–Síntese dos resultados das análises do Painel em “L” . . . . .	121
Figura 6.1 – Chapa tracionada - ensaio de Hordijk (1991). . . . .	122
Figura 6.2 – Trajetórias de equilíbrio: MC1. . . . .	124
Figura 6.3 – Trajetórias de equilíbrio: MC2. . . . .	124
Figura 6.4 – Caminhos de trinca. . . . .	125
Figura 6.5 – Descontinuidade geométrica. . . . .	125
Figura 6.6 – Representação da degradação. . . . .	126
Figura 6.7 – Flexão em três pontos - carregamento, condições de contorno e geometria (dimensões em mm). . . . .	127
Figura 6.8 – Flexão em três pontos - malha de elementos finitos. . . . .	128
Figura 6.9 – Caminhos de trinca: modelo de dano de de Borst e Gutiérrez (1999). . . . .	129
Figura 6.10–Trajetórias de equilíbrio: modelo de dano de de Borst e Gutiérrez (1999). . . . .	129
Figura 6.11–Caminhos de trinca: flexão - modelo de dano de de Vree, Brekelmans e Gils (1995). . . . .	129
Figura 6.12–Trajetórias de equilíbrio: flexão - modelo de dano de de Vree, Brekelmans e Gils (1995). . . . .	130
Figura 6.13–Aspecto da trinca - modelo de de Borst e Gutiérrez (1999). . . . .	131
Figura 6.14–Aspecto da trinca - modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995). . . . .	131
Figura 6.15–Distribuição de dano. . . . .	132
Figura 6.16–Distribuição de <i>phase-field</i> . . . . .	132
Figura 6.17–Cisalhamento em quatro pontos: carregamento, condições de contorno e geometria (dimensões em mm). . . . .	133
Figura 6.18–Cisalhamento em quatro pontos: malha de elementos finitos. . . . .	133
Figura 6.19–Caminhos de trinca: primeira simulação de Monte Carlo. . . . .	136
Figura 6.20–Trajetórias de equilíbrio: primeira simulação de Monte Carlo. . . . .	137
Figura 6.21–Caminhos de trinca: segunda simulação de Monte Carlo. . . . .	137
Figura 6.22–Trajetórias de equilíbrio: segunda simulação de Monte Carlo. . . . .	137

Figura 6.23–Caminhos de trinca: terceira simulação de Monte Carlo. . . . .	138
Figura 6.24–Trajetórias de equilíbrio: terceira simulação de Monte Carlo. . . . .	138
Figura 6.25–Trinca explícita: primeira simulação de Monte Carlo. . . . .	139
Figura 6.26–Distribuição do dano: primeira simulação de Monte Carlo. . . . .	140
Figura 6.27–Distribuição do <i>phase-field</i> : primeira simulação de Monte Carlo. . . . .	140
Figura 6.28–Trinca explícita: segunda simulação de Monte Carlo. . . . .	140
Figura 6.29–Distribuição do dano: segunda simulação de Monte Carlo. . . . .	140
Figura 6.30–Distribuição do <i>phase-field</i> : segunda simulação de Monte Carlo. . . . .	141
Figura 6.31–Trinca explícita: terceira simulação de Monte Carlo. . . . .	141
Figura 6.32–Distribuição do dano: terceira simulação de Monte Carlo. . . . .	141
Figura 6.33–Distribuição do <i>phase-field</i> : terceira simulação de Monte Carlo. . . . .	141
Figura 6.34–Definições de geometria e de malha do ensaio de arrancamento. . . . .	143
Figura 6.35–Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 75$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. . . . .	144
Figura 6.36–Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 75$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008). . . . .	144
Figura 6.37–Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 150$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. . . . .	145
Figura 6.38–Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 150$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008). . . . .	145
Figura 6.39–Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 300$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. . . . .	146
Figura 6.40–Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 300$ mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008). . . . .	146
Figura 6.41–Arrancamento ( $a = 75$ mm): trincas macroscópicas. . . . .	147
Figura 6.42–Arrancamento ( $a = 75$ mm): distribuição do dano. . . . .	147
Figura 6.43–Arrancamento ( $a = 75$ mm): distribuição do <i>phase-field</i> . . . . .	148
Figura 6.44–Barragem: condições de contorno e geometria (dimensões em mm). . .	148
Figura 6.45–Barragem: propostas de malhas. . . . .	150
Figura 6.46–Caminhos de trinca para as diferentes malhas: entalhe com 150 mm. Resultado experimental de Barpi e Valente (2000). . . . .	151
Figura 6.47–Trajetórias de equilíbrio para as diferentes malhas: entalhe com 150 mm. Resultado experimental e numérico de Barpi e Valente (2000). . .	152
Figura 6.48–Caminhos de trinca para as diferentes malhas: entalhe com 300 mm. Resultado experimental de Barpi e Valente (2000). . . . .	152

Figura 6.49–Trajetórias de equilíbrio para as diferentes malhas: entalhe com 300 mm. Resultado experimental e numérico de Barpi e Valente (2000). . . . .	153
Figura 6.50–Aspecto da trinca macroscópica (MF/PF/Dexp). . . . .	154
Figura 6.51–Aspecto da degradação: entalhe com 150 mm (MF/PF/Dexp). . . . .	154
Figura 6.52–Aspecto da degradação: entalhe com 300 mm (MF/PF/Dexp). . . . .	155
Figura A.1–Periódicos presentes no portfólio bibliométrico. . . . .	182
Figura A.2–Periódicos recorrentes dentre as referências do PB. . . . .	183
Figura A.3–Autores de destaque nas referências do portfólio bibliométrico. . . . .	184
Figura A.4–Palavras-chave do portfólio bibliométrico. . . . .	185
Figura C.1–Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por D e propagação por D não local. . . . .	194
Figura C.2–Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por D e propagação por PF não local. . . . .	195
Figura C.3–Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por PF e propagação por PF não local. . . . .	196
Figura C.4–Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por H e propagação por H não local. . . . .	197

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resumo das abordagens contínuas-descontínuas presentes na literatura	45
Tabela 3.1 – Funções de distribuição e suas respectivas expressões. . . . .	60
Tabela 5.1 – Parâmetros materiais - intervalo de valores para análise com pseudoaleatoriedade . . . . .	97
Tabela 5.2 – Parâmetros da lei de dano - intervalo de valores para análise com pseudoaleatoriedade . . . . .	97
Tabela 5.3 – Parâmetros pseudoaleatórios da curva com melhor ajuste . . . . .	100
Tabela 6.1 – Parâmetros da lei de dano para a tração - intervalo de valores . . . . .	123
Tabela 6.2 – Parâmetros associados às curvas ótimas obtidas via simulações de Monte Carlo . . . . .	124
Tabela 6.3 – Parâmetros do material e do modelo para a flexão - intervalo de valores	129
Tabela 6.4 – Parâmetros das curvas ótimas obtidas via simulações de Monte Carlo .	130
Tabela 6.5 – Parâmetros obtidos experimentalmente por Arrea e Ingrassia (1982) . .	134
Tabela 6.6 – Energia de fratura segundo Gálvez et al. (2002) . . . . .	134
Tabela 6.7 – Valor base da energia de fratura - CEB-FIP (1991) . . . . .	134
Tabela 6.8 – Resistência à tração ( $f_t$ ) - CEB-FIP (1991) . . . . .	135
Tabela 6.9 – Parâmetros do material e do modelo - intervalos de valores . . . . .	136
Tabela 6.10–Parâmetros pseudoaleatórios das simulações - valores associados às curvas ótimas . . . . .	139
Tabela 6.11–Parâmetros da lei de dano exponencial . . . . .	149
Tabela 6.12–Parâmetros da lei de dano polinomial . . . . .	149
Tabela A.1 – Combinações dos eixos de pesquisa . . . . .	179
Tabela A.2 – Portfólio bibliográfico sobre modelos contínuos-descontínuos para representação da fratura . . . . .	181
Tabela A.3 – Periódicos presentes no PB e sua relevância científica . . . . .	184
Tabela A.4 – Resumo das abordagens contínuas-descontínuas presentes na literatura	186

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	20
1.1	TEMÁTICA DA TESE . . . . .	23
1.2	JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÕES . . . . .	23
1.3	OBJETIVOS . . . . .	25
1.3.1	Objetivos gerais . . . . .	26
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	26
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	29
2.1	MODELOS DISCRETOS . . . . .	29
2.2	MODELOS DISTRIBUÍDOS . . . . .	33
2.3	MODELOS DE <i>PHASE-FIELD</i> (MPF) . . . . .	37
2.4	MODELOS CONTÍNUOS-DESCONTÍNUOS . . . . .	40
2.5	DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DA TRINCA . . . . .	47
2.6	MÉTODO PROBABILÍSTICO PARA SIMULAÇÕES NUMÉRICAS . . . . .	48
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	50
3.1	MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO - MDC . . . . .	50
3.1.1	Formulação geral para modelos constitutivos . . . . .	53
3.1.2	Modelos de dano não local . . . . .	57
3.2	MECÂNICA DA FRATURA . . . . .	61
3.2.1	Abordagem variacional da fratura . . . . .	61
3.2.2	Modos de fraturamento . . . . .	64
3.2.3	Estado de tensão na ponta da trinca . . . . .	64
3.2.4	Nucleação e propagação . . . . .	66
3.3	MODELOS DE <i>PHASE-FIELD</i> - MPF . . . . .	66
3.3.1	Introdução à teoria do <i>phase-field</i> . . . . .	67
3.3.2	Formulação forte dos MPF . . . . .	68
3.3.3	Função de degradação energética . . . . .	70
3.3.4	Função geométrica da trinca . . . . .	70
3.3.5	Densidade de energia de deformação . . . . .	71
3.3.6	Formulação fraca dos MPF . . . . .	72
3.3.7	Análise via elementos finitos para MPF . . . . .	73
3.3.8	Solucionadores para problemas de <i>phase-field</i> . . . . .	74
4	MODELAGEM CONTÍNUA-DESCONTÍNUA DO FRATURAMENTO DO CONCRETO . . . . .	76
4.1	MODELOS DE DANO NÃO LOCAL . . . . .	76
4.1.1	Modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) . . . . .	77
4.1.2	Modelo de de Borst e Gutiérrez (1999) . . . . .	78
4.1.3	Leis de evolução do dano . . . . .	80
4.2	MODELO DE <i>PHASE-FIELD</i> . . . . .	81
4.3	MODELOS DE TRINCAS DISCRETAS . . . . .	83

4.3.1	Critérios de transição contínuo-descontínuo . . . . .	84
4.3.2	Critérios de direção de propagação . . . . .	88
4.3.3	Valor limite para nucleação e propagação . . . . .	90
4.4	ASSOCIAÇÃO ENTRE DANO, <i>PHASE-FIELD</i> E TRINCA DISCRETA . . . . .	91
4.5	SIMULAÇÕES DE PROBABILIDADES MÚLTIPLAS VIA MÉTODO DE MONTE CARLO . . . . .	92
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: ASPECTOS GERAIS DO MODELO . . . . .	95
5.1	ENSAIO DO PAINEL EM “L” (WINKLER; HOFSTETTER; NIEDERWANGER, 2001) . . . . .	95
5.2	ESTUDO PARAMÉTRICO DO MODELO E DO MATERIAL	96
5.3	ASPECTOS DE MALHA . . . . .	104
5.3.1	Grau de refinamento da malha . . . . .	104
5.3.2	Análise da disposição dos elementos . . . . .	110
5.3.3	Análise do tipo de elemento . . . . .	110
5.4	CRITÉRIOS DE TRANSIÇÃO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO E DE DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO . . . . .	111
5.5	VALOR CRÍTICO PARA A TRANSIÇÃO . . . . .	115
5.5.1	Dano crítico . . . . .	115
5.5.2	<i>Phase-field</i> crítico . . . . .	118
5.5.3	Variável híbrida crítica . . . . .	119
5.6	SÍNTESE DOS RESULTADOS . . . . .	121
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: ANÁLISES COMPLEMENTARES . . . . .	122
6.1	TRAÇÃO DIRETA . . . . .	122
6.2	FLEXÃO EM TRÊS PONTOS . . . . .	127
6.3	CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS . . . . .	131
6.4	ENSAIO DE ARRANCAMENTO . . . . .	142
6.5	BARRAGEM . . . . .	148
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	156
7.1	CONCLUSÕES SOBRE O MODELO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO PROPOSTO . . . . .	156
7.2	CONSIDERAÇÕES EXTRAS A PARTIR DAS SIMULAÇÕES DE VALIDAÇÃO DO MODELO . . . . .	157
7.3	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE . . . . .	158
7.4	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS . . . . .	160
	REFERÊNCIAS . . . . .	162
	APÊNDICE A – REVISÃO SISTEMÁTICA: PORTFÓLIO BIBLIOGRÁFICO E ANÁLISE BIBLIOMÉTRICA . . . . .	177
A.1	Procedimento metodológico . . . . .	177
A.1.1	Seleção do portfólio bibliográfico . . . . .	178

A.1.1.1	Seleção do banco de artigos brutos - BAB . . . . .	178
A.2	Análise bibliométrica do portfólio . . . . .	181
A.2.1	Análise dos artigos do portfólio . . . . .	181
A.2.1.1	Relevância dos periódicos . . . . .	182
A.2.1.2	Reconhecimento científico dos artigos . . . . .	182
A.2.1.3	Autores de maior destaque . . . . .	183
A.2.1.4	Palavras-chave . . . . .	184
A.3	Metodologias contínuas-descontínuas do PB . . . . .	185
A.4	Vantagens e desvantagens das metodologias do PB . . . . .	188
A.5	Lacunas identificadas nos artigos do PB . . . . .	189
	<b>APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS . .</b>	<b>190</b>
B.1	Condição de conservação de energia - equação 3.44 . . . . .	190
B.2	Condição estacionária unilateral - equação 3.45 . . . . .	191
B.3	Critério de Griffith - equação 3.49 . . . . .	192
	<b>APÊNDICE C – TRAJETÓRIA DE TRINCA DO PAINEL</b>	
	<b>EM “L” . . . . .</b>	<b>194</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Prever o colapso de um material é de suma importância para a engenharia. Dentre os modos de falha observados em materiais usualmente empregados na composição de elementos estruturais, o colapso por fratura é um dos mais frequentes. Com a intenção de prevenir e compreender os impactos desse fenômeno, ainda no início do século XX, engenheiros e estudiosos perceberam que os critérios da mecânica clássica nem sempre eram adequados para caracterizar o comportamento de materiais parcialmente frágeis como o concreto. A fim de atender a essa demanda, emergiu a Mecânica da Fratura, definida como uma base teórica que descreve a transição do comportamento contínuo para o comportamento descontínuo segundo a degradação do meio material (GOPALARATNAM; GERSTLE; DARWIN, 1997).

O desenvolvimento dessa área do conhecimento evidenciou a necessidade de inclusão dos efeitos da nucleação, propagação e coalescência de fissuras e trincas nas análises de estruturas compostas por materiais parcialmente frágeis. Karihaloo (1995) relata certo consenso entre pesquisadores e profissionais de engenharia quanto à introdução de conceitos da Mecânica da Fratura em projetos de estruturas de concreto simples e armado. Ao abranger tal consideração, pretende-se ir além da prevenção do colapso estrutural, buscando também benefícios econômicos, o aprimoramento da confiabilidade estrutural e a viabilização de análises que não são contempladas por norma, seja pela utilização de novos materiais, seja pela adoção de *designs* inovadores.

Simular o processo de deterioração do meio, entretanto, é uma tarefa árdua, principalmente quando se refere a um material de comportamento complexo como o concreto. Com esse propósito, uma diversidade de modelos para representar o comportamento do material, denominados modelos constitutivos, bem como métodos numéricos, têm sido desenvolvidos. Quanto aos modelos constitutivos, as duas principais abordagens para representar a degradação do concreto são os modelos discretos, ou descontínuos, e os modelos contínuos, também denominados modelos distribuídos. Enquanto os modelos discretos tratam a trinca como uma entidade geométrica, a partir da inserção de uma descontinuidade no meio, os modelos contínuos representam os efeitos da fissuração segundo alterações nas propriedades constitutivas do material na região degradada. Com relação aos métodos numéricos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), cuja ascensão na década de 1950 ampliou a possibilidade de modelar estruturas de concreto, permitindo a adoção de hipóteses sofisticadas para uma descrição mais realista do meio material. Do método dos elementos finitos derivaram-se tantos outros métodos computacionais,

pois, apesar de ser um recurso robusto e consolidado, o MEF apresenta limitações, como a dificuldade de representar grandes deformações e a dependência de malha, as quais podem ser suprimidas ou minimizadas a partir de adaptações na sua formulação original.

No contexto dos modelos discretos aplicados à representação do comportamento estrutural do concreto, Griffith (1921) foi o precursor com sua proposta de teoria da fratura, que deu origem à Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Os primeiros a aplicarem essa teoria na modelagem de trincas discretas em vigas de concreto foram Ngo e Scordelis (1967), por meio da separação de elementos na trajetória da fratura. Já Nilson (1968) foi o pioneiro na simulação do processo de propagação de trincas via duplicação nodal. Apesar da simplicidade dessa abordagem, os modelos discretos com propagação demonstraram restrições quanto à capacidade de representar adequadamente a abertura de trincas em meios parcialmente frágeis, que ocorre de forma gradual e não abruptamente. Com o objetivo de incorporar esse caráter progressivo à abertura de trincas, diferentes estratégias podem ser empregadas, como a adoção de elementos de interface (GOODMAN; TAYLOR; BREKKE, 1968) ou modelos coesivos (DUGDALE, 1960; BARENBLATT, 1962). A ideia principal de um modelo coesivo é a aplicação de uma lei tensão *versus* abertura de trinca nas proximidades da ponta da trinca, permitindo uma descrição mais adequada ao comportamento não linear dessa região que marca a transição contínuo-discreta, denominada Zona de Processo de Fratura (ZPF). Na ZPF há formação de microfissuras que, com a evolução do carregamento externo, podem se desenvolver e culminar em uma trinca macroscópica.

Em contrapartida às abordagens discretas, o trabalho de Rashid (1968) apresentou uma nova forma de tratar a deterioração do meio, admitindo-o como contínuo e representando o efeito do surgimento de trincas segundo alterações das propriedades mecânicas do material. Os modelos com essas características são nomeados modelos de fissuração distribuída, que foram idealizados para ter a capacidade de representar com acurácia tanto a propagação de uma trinca principal, quanto de pequenas fissuras. Outra teoria que também define a degradação do meio como um fenômeno contínuo, desenvolvida em paralelo à Mecânica da Fratura, é a Mecânica do Dano Contínuo (MDC). Proposta por Kachanov (1958), a MDC quantifica a densidade de microdefeitos, como poros e microfissuras, segundo variáveis de dano. A partir dessa formulação surgiram os modelos de dano, incluindo os reconhecidos trabalhos de Mazars (1984), Lemaitre e Chaboche (1990) e de Vree, Brekelmans e Gils (1995). Apesar da grande adesão do meio acadêmico aos modelos distribuídos, com o passar dos anos foram relatados problemas de localização de deformações e dependência de malha vinculados a essas abordagens. Para superar tais deficiências, várias propostas de limitadores de localização foram apresentadas, dentre as quais destacam-se os modelos baseados em gradientes, os modelos não locais e a utilização

de contínuos de alta ordem.

Conhecidos os modelos clássicos de representação da degradação do concreto, discretos e contínuos, cabe avaliar a variedade de métodos numéricos capazes de viabilizar análises que abranjam os fenômenos de fissuração e fratura no âmbito computacional. Conforme discutido, o método dos elementos finitos é um recurso muito utilizado na análise de estruturas e, a partir do MEF padrão, para uma melhor representação da abordagem descontínua, que contém “saltos” no campo de deslocamentos, foram desenvolvidos métodos computacionais dedicados à representação de trincas discretas (RABCZUK, 2013). Alguns desses métodos são os algoritmos de redefinição de malha, o Método dos Elementos Finitos Estendidos/Generalizados (MEFX/G) e os Métodos Sem Malha (MSM). Destaca-se o MEFX/G, fundamentado na partição da unidade, que se tornou um dos métodos mais populares para representação da fratura, tendo em vista as relevantes melhorias conquistadas em termos de acurácia e eficiência. O MEFX/G utiliza da técnica de enriquecimento da função de forma do elemento com inclusão de funções descontínuas, representando o efeito da trinca no campo de deslocamentos no interior do elemento.

Apesar da grande diversidade de modelos clássicos (discretos e distribuídos) e de métodos numéricos para inclusão dos efeitos da degradação na análise de estruturas de concreto, essa é uma área de estudo que permanece em franco desenvolvimento, dada a complexidade de reproduzir o comportamento desse material. Rabczuk (2013) ressalta que dos diversos trabalhos dedicados à fratura, a maioria se concentra no processo de propagação, muitas vezes restrito a uma única trinca, enquanto ainda há escassez de trabalhos dedicados ao fenômeno de nucleação. Trabalhos recentes sobre o assunto que merecem atenção são os modelos de Peridinâmica (PD), proposto por Silling (2000), e os modelos de *Phase-Field* (PF), de Bourdin, Fracfort e Marigo (2000). Tanto a PD quanto o PF são considerados teorias não locais, capazes de determinar automaticamente o caminho da trinca e reproduzir padrões complexos de fratura, incluindo a nucleação, a ramificação e a coalescência de trincas (WU et al., 2019).

Em termos de perspectivas futuras, no final do século XX, Gopalaratnam, Gerstle e Darwin (1997) destacavam como uma área de pesquisa promissora a combinação de abordagens distribuídas e discretas, em busca de uma representação fidedigna do comportamento do concreto, potencializando as vantagens de cada uma das teorias e minimizando suas limitações. Rabczuk (2013), por sua vez, aponta que apesar de alguns esforços feitos nessa direção, esse permanece sendo um desafio na caracterização do fenômeno de fratura. Alegando como principal desvantagem dos modelos contínuos para a fratura a ausência de uma representação adequada da descontinuidade, Wu et al. (2019) aponta essa deficiência como um incentivo para o desenvolvimento das abordagens contínuas-

descontínuas. Nesse tipo de abordagem mista, o processo inicial de fissuração é descrito segundo um modelo contínuo, até a identificação da falha, que passa a ser modelada por uma metodologia discreta. Ainda que a literatura apresente estudos cujo objetivo é suprir essa demanda (SIMONE; WELLS; SLUYS, 2003; MEDIAVILLA; PEERLINGS; GEERS, 2006; COMI; MARIANI; PEREGO, 2007; MOONEN; CAMELIET; SLUYS, 2008; MOONEN; SLUYS; CARMELIET, 2010; NGUYEN et al., 2011; NGUYEN; STROVEN; SLUYS, 2012; CUVILLIEZ et al., 2012; KARAMNEJAD; NGUYEN; SLUYS, 2013; GIOVANARDI; SCOTTI; FOMAGGIA, 2017; GEELEN et al., 2018; OLIVEIRA, 2024; HUANG et al., 2024), não há consenso sobre a definição do procedimento de transição entre contínuo e descontínuo e os trabalhos até então desenvolvidos estão restritos a problemas em que há apenas uma trinca dominante se propagando.

## 1.1 TEMÁTICA DA TESE

Considerando o cenário exposto, este trabalho tem como foco o desenvolvimento de uma abordagem contínua-descontínua cuja variável transicional fundamenta-se na teoria do *phase-field*. A escolha pelo PF apoia-se na capacidade dessa formulação em identificar a nucleação, a propagação e a coalescência de diferentes frentes de trinca e também na sua característica, apontada por Wu et al. (2019), de vincular a Mecânica do Dano à Mecânica da Fratura, ainda que seja classificada como uma teoria contínuo. Pretende-se descrever o estágio inicial de degradação via modelo contínuo de dano não local e, a partir de um critério de nucleação de trincas estabelecido em função das variáveis de dano e/ou *phase-field*, acionar a técnica de duplicação nodal para inserção da descontinuidade geométrica na região crítica da malha. Para concretização desse estudo, foi utilizada uma plataforma de implementação computacional baseada no método dos elementos finitos. Na Figura 1.1 é apresentada uma abstração da abordagem contínua-descontínua que é temática desta tese, contendo seus principais conceitos e a correlação entre eles.

## 1.2 JUSTIFICATIVA E CONTRIBUIÇÕES

Nesta tese é apresentado um novo modelo híbrido capaz de descrever em sua completude o fenômeno de fraturamento de meios parcialmente frágeis como o concreto. Dentre os benefícios em se adotar abordagens contínuas-descontínuas, ressalta-se a representação mais fidedigna dos estágios da fratura, iniciando pela nucleação de microfissuras, seguida pela propagação, até que se chegue a trincas macroscópicas e, por fim, ao colapso. O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura quanto às diferentes formas de se representar a degradação do meio material, com destaque para as potencialidades oferecidas pelas abordagens contínuas-descontínuas. O estado da arte relativo a esses modelos é descrito no apêndice A, onde são expostas suas vantagens, desvantagens e lacunas que requerem estudos mais aprofundados.

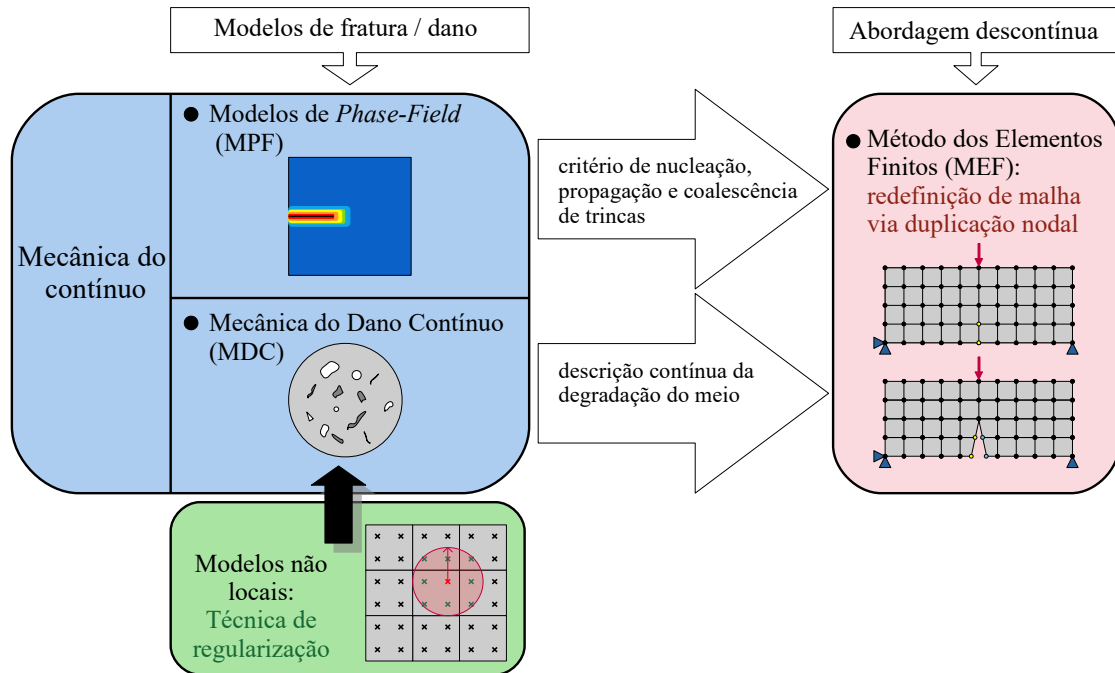


Figura 1.1 – Abstração da abordagem contínua-descontínua via variável de *phase-field*.

Com relação às estratégias de descrição do meio contínuo, optou-se pelos modelos de dano não local, uma vez que esses apresentam uma formulação regularizada que mitiga os efeitos de dependência de malha e localização de deformações. Apesar dos resultados representativos da formulação não local para descrição do comportamento não linear do concreto e minimização de instabilidades numéricas, ao trabalhar com variáveis não locais suavizadas, é natural que a região de degradação sofra um espreadimento. Por isso, esse modelo deve ser restrito à descrição do contínuo, ou as regiões de fraturamento seriam superestimadas. É nesse ponto que a variável de *phase-field* aparece com seu caráter localizado do processo de degradação.

Considerando os resultados positivos descritos na literatura do emprego de modelos de *phase-field* para rastreamento de trincas, adotou-se essa grandeza para quantificar a transição da fase contínua para a fase descontínua do meio. A escolha pelo modelo de *phase-field* proposto por Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b), por sua vez, é justificada pela capacidade de representação da bimodularidade do comportamento mecânico, sendo capaz de diferenciar a resposta do concreto para esforços de tração e compressão, suprimindo o surgimento de trincas em regiões comprimidas. Assim, a variável de *phase-field* é adotada como critério de nucleação e propagação de trincas discretas e recurso de predição da direção das trajetórias de propagação das trincas. Avaliou-se, ainda, quando ocorre a transição entre contínuo e descontínuo, a partir de um estudo do valor crítico assumido pelo *phase-field* para desencadear a quebra da malha de elementos finitos.

Quanto ao modelo discreto de representação da fratura, elegeu-se a duplicação nodal. Esse é um procedimento simplificado de remalhamento e, portanto, menos oneroso que algoritmos convencionais para malhas adaptativas. Devido à menor complexidade desse procedimento e a maior capacidade dos computadores atuais, a demanda computacional não foi um entrave na utilização desse modelo discreto de reprodução da fratura. Em suma, essa técnica avalia o valor assumido pela variável de *phase-field* nos nós da malha e, quando identificado um valor superior a um limite crítico de iniciação da fratura pré-definido, o nó corrente é duplicado e a conectividade dos elementos é atualizada, permitindo que a descontinuidade geométrica seja inserida no modelo, representando a trinca discreta.

Por fim, uma importante contribuição do trabalho é a análise não linear estocástica que considera a dispersão das propriedades do material observadas experimentalmente como o fator de aleatoriedade. Mais além, a complexidade da identificação paramétrica, por ausência de dados ou por falta de um vínculo direto entre as propriedades do material e os parâmetros do modelo, torna a modelagem um processo com alto grau de incertezas dificultando a representação do correto comportamento estrutural. Neste sentido, métodos de amostragem, tais como as simulações de probabilidades múltiplas, permitem aproximar numericamente o comportamento médio do modelo da real resposta da estrutura.

Portanto, a abordagem numérica-computacional proposta associa modelos distribuídos e discretos via método dos elementos finitos segundo uma análise estocástica baseadas em simulações de Monte Carlo. Nesse contexto, a presente tese busca contribuir com o desenvolvimento da mecânica computacional do concreto, mais especificamente, na análise fisicamente não linear, com o propósito de representar por completo a degradação progressiva do material a partir de uma variável transicional bem estabelecida, prezando também pela viabilidade computacional.

### 1.3 OBJETIVOS

A presente tese visa desenvolver um modelo contínuo-descontínuo capaz de descrever o processo de fraturamento do concreto em sua completude, desde os primeiros indícios de degradação do meio contínuo até a nucleação e propagação da fratura discreta. Aliado a esse modelo, propõe-se uma metodologia de parametrização das simulações numéricas baseada no Método de Monte Carlo, a fim de melhor representar o meio material e a sua degradação, incorporando as incertezas inerentes a esses fenômenos. Para nortear tais metas, a seguir são especificados os objetivos gerais (seção 1.3.1) e os objetivos específicos (seção 1.3.2) deste estudo.

### 1.3.1 Objetivos gerais

O objetivo geral deste trabalho consiste em possibilitar uma descrição completa do fenômeno de degradação, combinando modelos contínuos capazes de descrever o estágio inicial da fissuração com modelos discretos hábeis em representar geometricamente o surgimento e a propagação de trincas explícitas. Pretende-se desenvolver uma metodologia ampla o suficiente para identificar a nucleação e a evolução de múltiplas frentes de trinca, com diferentes orientações de propagação.

Para tanto, é proposta a associação de modelos de dano não local para a descrição do comportamento do meio material, enquanto o *phase-field* será o parâmetro responsável por anunciar a evolução da fratura, que é representada explicitamente na malha. O *phase-field*, que é tradicionalmente utilizado na descrição de trincas a partir de representação contínua, nesta pesquisa terá explorado seu caráter transicional, estabelecendo a conexão entre dano distribuído e fratura discreta. Essa aplicação, até onde se sabe, ainda não foi abordada na literatura. A opção por representar o comportamento do meio material por um modelo de dano, em oposição aos MPF, é uma forma de contornar as desvantagens dessa formulação, que requer malhas excessivamente refinadas, o que onera o processo de solução de um dado problema. Além disso, os MPF apresentam dificuldades na etapa de parametrização do material.

Este estudo também tem como intenção resgatar modelos discretos de descrição da fratura que utilizam redefinição de malha, os quais perderam popularidade, pois, emergiram em um momento cujos recursos computacionais eram muito limitados se comparados aos atuais, representando naquela época um elevado custo computacional. Todavia, cabe considerar tanto a evolução dos computadores durante esse período quanto a possibilidade de trabalhar com estratégias menos complexas de remalhamento, como a duplicação nodal.

Outro objetivo desta pesquisa é estabelecer um procedimento padrão de parametrização do meio material e das variáveis do modelo. Para tanto, toma-se como referência dados experimentais e intervalos de valores estimados por normas, de modo a incorporar à análise estrutural a aleatoriedade proveniente das incertezas vinculadas à definição desses parâmetros.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Com o propósito de atender o objetivo geral apresentado na seção 1.3.1, são estabelecidos os objetivos específicos:

- i. Implementar modelos de trinca discreta para introdução e propagação de descontinuidades geométricas. Para tanto, decidiu-se pela estruturação de um algoritmo

de duplicação nodal, tendo em vista a viabilidade computacional do processo de remalhamento a ele relacionado.

- ii. Analisar a função transicional da variável de *phase-field*, responsável pela integração do modelo distribuído com o modelo discreto. Serão avaliados critérios como os valores limites assumidos por essa variável para que se desencadeie o processo de duplicação nodal e como o campo de *phase-field* poderá ser explorado para estabelecer a direção de evolução da fratura.
- iii. Associação desacoplada de modelos de dano com MPF. Serão vinculados modelos clássicos de dano de Vree, Brekelmans e Gils (1995), de Borst e Gutiérrez (1999) em suas versões não locais, ao modelo de *phase-field* proposto por Miehe, Welschinger e Hofacker (2010a). O modelo de dano será responsável por descrever o comportamento do meio material, enquanto o MPF terá a função de calcular a variável de *phase-field* que atuará como parâmetro de controle dos processos de nucleação e propagação de trincas
- iv. Desenvolvimento de uma variável híbrida consistente, capaz de acoplar dano e *phase-field*. O propósito desse parâmetro é que tanto a variável de dano quanto a variável de *phase-field* sejam incorporadas na descrição do comportamento do meio material e na caracterização da nucleação e propagação de trincas.
- v. Elaboração de uma metodologia para simular estocasticamente as incertezas relativas às propriedades do material e suas influências na degradação - do meio contínuo até a descontinuidade - a partir de simulações de probabilidades múltiplas via método de Monte Carlo.

#### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Quanto à organização do texto, além do presente capítulo introdutório, este projeto de tese é constituído por outros cinco capítulos. O capítulo 2 é dedicado à revisão da literatura acerca de conteúdos relevantes para o desenvolvimento do tema proposto, como as abordagens discretas e contínuas na descrição da degradação e a concepção da teoria do *phase-field*. Em seguida, o capítulo 3 detalha as formulações matemáticas que amparam a fundamentação teórica deste projeto. O capítulo 4 apresenta a modelagem computacional desenvolvida para representar a natureza contínua-descontínua do concreto. Os capítulos 5 e 6 apresentam simulações numéricas utilizando o modelo proposto. No capítulo 5 são apresentados estudos de caso para avaliar a performance do modelo contínuo-descontínuo variando diferentes aspectos, como malha e critérios de nucleação e propagação de trincas. Já o capítulo 6 abrange exemplos numéricos que são confrontados com resultados da literatura, a fim de validar o modelo desenvolvido. O apêndice A contempla uma revisão sistemática da bibliografia consultada, complementando o capítulo 2. Já o apêndice B abrange algumas demonstrações matemáticas que suplementam as formulações descritas

no capítulo 3. Por fim, o apêndice C reúne um compilado de trajetórias de trinca conforme altera-se o critério de nucleação/propagação e o valor limite para abertura de trincas, complementando a seção 5.5 do capítulo 5.

## 2 Revisão bibliográfica

Este capítulo contextualiza a temática da presente tese no âmbito da pesquisa e ressalta sua pertinência a partir de uma revisão bibliográfica. Tendo em vista que o objetivo deste trabalho é associar modelos distribuídos e discretos na descrição do processo de degradação do meio material utilizando o *phase-field* como critério de transição, este capítulo versa sobre cada um desses campos de estudo separadamente, discutindo ainda a possibilidade de combinar tais abordagens.

Na seção 2.1 é apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento de modelos discretos na busca da representação do processo de fratura, enquanto a seção 2.2 contém modelos que descrevem a degradação de materiais parcialmente frágeis segundo a abordagem distribuída. A seção 2.3 dedica-se aos modelos de *phase-field*, cuja aplicação na engenharia de estruturas para avaliação do processo de deterioração é recente e tem se mostrado promissora. Por fim, a seção 2.4 relata a demanda por modelos capazes de descrever a perda de integridade estrutural desde os primeiros sinais de dano, como tratam os modelos distribuídos, até o surgimento de trincas macroscópicas, conforme a abordagem discreta. Essa última seção apresenta também propostas de associação de modelos contínuos e descontínuos, ressaltando aspectos positivos e limitações. O apêndice A complementa o presente capítulo, apresentando uma revisão sistemática dos trabalhos mais recentes e relevantes a respeito de modelos contínuos-descontínuos.

### 2.1 MODELOS DISCRETOS

Os modelos discretos de fratura recebem essa denominação por tratarem as imperfeições do meio material como entidades geométricas, segundo, por exemplo, a inserção de descontinuidades na malha de elementos finitos. Esses modelos emergiram com o desenvolvimento da Mecânica da Fratura, disciplina que se dedica ao estudo da capacidade resistente de elementos estruturais na presença de defeitos, como microvazios, trincas e fissuras.

A Mecânica da Fratura surgiu como consequência de investigações de acidentes em estruturas submetidas a baixos níveis de tensão, cujos resultados mostraram que tais problemas decorriam de imperfeições materiais e regiões com concentração de tensão (SOUZA, 2001). Ao trabalho de Griffith (1921) é atribuído o marco de primeiro estudo científico formal da Mecânica da Fratura. A partir de ensaios com fibras de vidro, esse autor formulou um critério de energia capaz de descrever o crescimento de fissuras em meios frágeis, segundo as leis da termodinâmica. A teoria de Griffith (1921), contudo, só teve repercussão após a

Segunda Guerra Mundial (1939-1945), quando acidentes com aviões e navios não puderam ser compreendidos segundo as teorias convencionais.

Nesse período houve grandes avanços no entendimento da Mecânica da Fratura, quando Irwin (1948) definiu de modo objetivo as condições em que a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é aplicável. Seu estudo também estabeleceu critérios de dimensionamento tomando como referência a teoria de Griffith (1921). Anos depois, Irwin (1957) apresentou um novo recurso para avaliar problemas de fratura, o fator de intensidade de tensão, historicamente representado pelo símbolo  $K_I$ .

Kaplan (1961) foi o primeiro a realizar análises experimentais para compreender o comportamento do concreto segundo a Mecânica da Fratura, determinando o valor crítico de energia liberada para diferentes tamanhos de viga. Já nas análises numéricas, Ngo e Scordelis (1967) foram os responsáveis por introduzir essa ciência em simulações via MEF na análise de estruturas de concreto armado, a partir da separação dos elementos situados na vizinhança da trinca. O fenômeno de propagação de trincas, por sua vez, foi estudado e modelado pela primeira vez por Nilson (1968).

Em busca de estender à Mecânica da Fratura a problemas não lineares, Rice (1968) e Hutchinson (1968) apresentaram trabalhos baseados na formulação da integral  $J$ , cujo objetivo é quantificar o fluxo de energia na ponta de uma fissura e associá-lo à propagação da trinca. Esses estudos conduziram ao desenvolvimento da Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL), que pode representar de forma mais fidedigna materiais parcialmente frágeis como o concreto. Para tanto, foram desenvolvidos modelos que consideram a transmissão de esforços entre as faces das fissuras, a partir da coesão ou da introdução dos elementos de interface.

Os primeiros autores a trabalharem com elementos de interface foi Goodman, Taylor e Brekke (1968), aplicando esse conceito na modelagem de rochas. A partir de então, diferentes tipos de elementos de interface foram propostos e aplicados em problemas de engenharia (HEUZE; BARBOUR, 1982; DESAI et al., 1984; MANZOLI; GAMINO; CLARO, 2012; MANZOLI et al., 2016). Já as análises de fraturamento coesivo basearam-se no modelo proposto por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). Porém, foi o trabalho de Hillerborg, Modéer e Petersson (1976), abordando o Modelo de Trinca Fictícia (MTF), que trouxe destaque para essa área de pesquisa. Os modelos de zona coesiva contornam uma das principais limitações da MFLE, a incapacidade de representar o estado de tensão na ponta de uma trinca, que tende ao infinito caso o material seja admitido elástico. Essa região de comportamento não linear, onde ocorre a transição contínuo-discreta, é denominada Zona de Processo de Fratura (ZPF). Na ZPF formam-se microfissuras que podem evoluir e originar uma trinca macroscópica. A consideração da ZPF recebeu

destaque em diversos estudos, como em Bažant e Cedolin (1979), Bažant e Cedolin (1980), Bažant e Cedolin (1983) e Bažant e Oh (1983).

Desde então a teoria da Mecânica da Fratura tem se consolidado, sendo aplicada a problemas lineares e não lineares, considerando ou não coesão. Nas últimas décadas, os estudos nessa área de pesquisa se concentram no desenvolvimento de métodos computacionais capazes de simular o processo de fraturamento. Rabczuk (2013) apresenta uma ampla revisão sobre métodos computacionais para modelagem da fratura discreta em materiais frágeis e parcialmente frágeis. A maioria desses métodos não representam as trincas explicitamente como descontinuidades geométricas, refletindo uma tendência observada em estudos recentes, que evitam o processo de redefinição de malha. Dentre os métodos listados por Rabczuk (2013) estão a técnica de erosão de elementos, os métodos de separação entre elementos, o Método dos Elementos Finitos Embutidos (MEFE), o Método dos Elementos Finitos Estendidos/Generalizados (MEFX/G), os Métodos Sem Malha (MSM), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e a aproximação variacional da fratura.

Quanto à técnica de erosão de elementos (BELYTSCHKO; LIN, 1987; JOHNSON; STRYK, 1987; PANDOLFI; ORTIZ, 2012), trata-se de uma das formas mais diretas de lidar com a fratura discreta. Os algoritmos de erosão de elementos removem da malha os elementos identificados como deteriorados, ou, como alternativa, anulam suas tensões. Apesar da simplicidade, essa técnica apresenta resultados extremamente dependentes da malha adotada. Outro método destacado é a separação entre elementos (ORTIZ; NEEDLEMAN, 1987; LIU; NOURBAKHSHNIA; ZHANG, 2011; CHEN et al., 2001; CHEN et al., 2011; JIANG et al., 2011; MANZOLI; GAMINO; CLARO, 2012; MANZOLI et al., 2016), que incluem superfícies coesivas nas arestas dos elementos, permitindo que as trincas se propaguem ao longo dessas superfícies. Esse método também é dependente do refinamento de malha adotado e, por vezes, pode superestimar a energia de fratura do problema dado que o caminho de propagação das trincas fica restrito às interfaces entre elementos.

Em busca de flexibilizar o trajeto de evolução das trincas para que as descontinuidades não fiquem limitadas a regiões de interface entre elementos, novos métodos foram propostos. Dvorkin, Cuitino e Gioia (1990) foram os primeiros a desenvolver uma estratégia capaz de lidar com descontinuidades fortes em elementos finitos, propondo o chamado Método dos Elementos Finitos Embutidos (MEFE). Essa teoria baseia-se na introdução de uma zona de localização em um dado elemento, segundo o enriquecimento do seu campo de deslocamentos, que calcula o “salto” de deslocamentos causado pela abertura da trinca. Outro método com bases teóricas semelhantes ao MEFE é o Método dos

Elementos Finitos Estendidos (MEFX), que é um dos métodos de maior popularidade no estudo da Mecânica da Fratura (BELYTSCHKO; BLACK, 1999; MÖES; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999; MÖES; BELYTSCHKO, 2002). O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), por sua vez, apresenta abordagem equivalente ao MEFX (BELYTSCHKO; GRACIE; VENTURA, 2009), de modo que esses dois métodos podem ser identificados como MEFX/G. O MEFX/G utiliza o conceito de partição da unidade e introduz graus de liberdade adicionais nos elementos atravessados pela trinca. Essa teoria, quando empregada na descrição do problema de propagação de trincas, divide o campo de deslocamentos em duas parcelas, de deslocamentos contínuos e descontínuos. Enquanto o campo de deslocamentos contínuos relaciona-se à solução padrão do MEF, o campo de deslocamentos descontínuos é multiplicado pelas funções de forma enriquecidas, a fim de representar a superfície da trinca.

Mais uma alternativa para representação da fratura são os Métodos Sem Malha (MSM), originalmente propostos por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977) para modelagens de astrofísica. Esses métodos têm se mostrado especialmente adequados para problemas de fratura dinâmica e simulações com grandes deformações. A ausência de malha favorece, ainda, a adoção de refinamentos adaptativos. Contudo, assim como os demais métodos discutidos, os MSM também demandam um certo nível de refinamento na frente de trinca para obter resultados satisfatórios.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), cujo marco inicial é o trabalho de Fredholm (1903), também pode ser uma opção para abordagem de trincas discretas. Sua formulação, desenvolvida a partir de uma integral de linha, tem como característica reduzir a dimensão do problema, o que pode facilitar, por exemplo, o processo de redefinição da malha.

Por fim, Rabczuk (2013) apresenta a teoria variacional da fratura, proposta por Fracfort e Marigo (1998), da qual se originaram os Modelos de *Phase-Field* (MPF). Nessa teoria, baseada na minimização de energia, além do campo de deslocamentos, adota-se um campo adicional denominado *phase-field*. Esse campo atua como regularizador do “salto” de deslocamentos causado pela abertura de trinca. A teoria variacional destaca-se por suprir limitações da teoria clássica da fratura desenvolvida por Griffith (1921), como a ausência de recursos para prever a iniciação de trincas e os caminhos de propagação. Em contrapartida, os MPF apresentam como desvantagem o elevado custo computacional associado à necessidade de malhas muito refinadas.

Embora no passado métodos computacionais que demandam redefinição da malha tenham sido preteridos em função da limitação dos computadores da época, a recente evolução dos recursos tecnológicos permite o resgate desse tipo de recurso. A maioria dos problemas de fratura, para uma descrição satisfatória do fenômeno de nucleação e propagação de

trincas, necessita de malhas com elevado grau de refinamento, mesmo que utilizem formas contínuas de representação da fratura. Assim, utilizar malhas adaptativas, com a região mais discretizada acompanhando a ponta da trinca, ou incluir descontinuidades na malha deixaram de ser técnicas impraticáveis.

O estudo de Zhang et al. (2018a), por exemplo, mostra uma técnica dinâmica de adaptação da malha capaz de concentrar os elementos na região de evolução das trincas mesmo para as configurações mais complexas de propagação. Já Steinke et al. (2016) apresentam a redefinição da malha via duplicação nodal, a partir da chamada força material. Essa força, calculada em todos os nós do modelo, é o conjugado energético da força termodinâmica motriz do processo de fraturamento e, quando sua componente tangencial supera o valor da energia de fratura do material ( $G_c$ ), atua como indicador da ponta de uma trinca. Essa trinca se propaga segundo a definição de uma linha crítica, que coincide com a aresta do elemento cuja energia requerida para propagação é mínima.

Observa-se, pois, a grande diversidade de recursos computacionais desenvolvidos na tentativa de representar os complexos fenômenos de nucleação e propagação de trincas, conforme compilado na Fig. 2.1. Na figura, os métodos são organizados, da esquerda para a direita, em ordem crescente da demanda por intervenções na malha original.

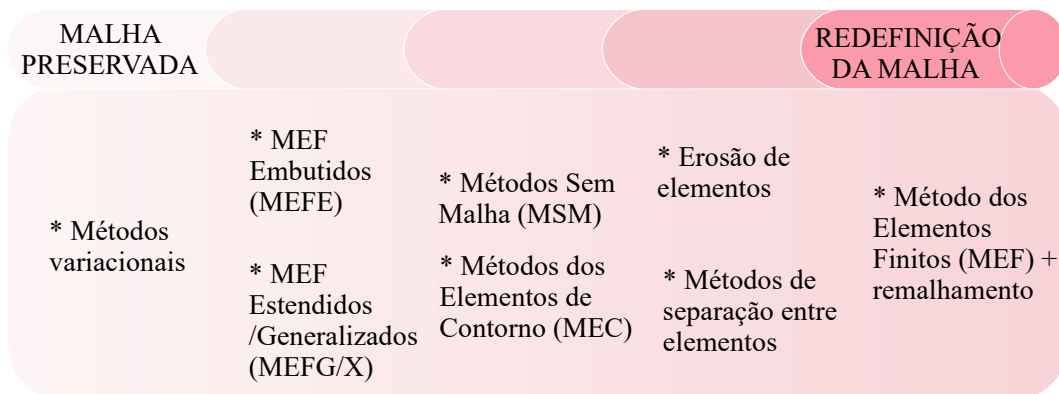


Figura 2.1 – Modelos computacionais discretos para a fratura.

## 2.2 MODELOS DISTRIBUÍDOS

Em contrapartida aos modelos discretos, surgiram os modelos distribuídos, em que o sólido degradado é admitido como um meio contínuo (BAŽANT; CEDOLIN, 1979; BAŽANT; CEDOLIN, 1980; BAŽANT; CEDOLIN, 1983; BAŽANT; OH, 1983; ROTS et al., 1985; ROTS, 1988). Essa abordagem originou-se da possibilidade de se representar a presença de trincas segundo a deterioração de propriedades constitutivas, ao invés de se alterar a topologia da malha de elementos finitos como requer a abordagem discreta. Segundo Gopalaratnam, Gerstle e Darwin (1997), modelos de natureza contínua deveriam, ide-

almente, ser “capazes de representar, com razoável acurácia, tanto a propagação de uma única trinca, quanto de um sistema de fissuras distribuídas”.

Dentre as abordagens contínuas, Rashid (1968) é o responsável pela introdução dos modelos de fissuração distribuída, que descrevem a degradação via leis tensão-deformação. Esses modelos são divididos em modelos de fissuração distribuída de direção fixa e de direção rotacional, conceitos posteriormente discutidos por Rots et al. (1985). A orientação da trinca é comumente estabelecida como perpendicular à deformação ou à tensão principal de tração. Nos modelos de direção fixa, essa orientação é definida no processo de iniciação da trinca e admitida como constante durante a propagação. Já nos modelos de direção rotacional, a propagação é orientada conforme o eixo de deformações/tensões principais é direcionado. Cabe a ressalva que os modelos de fissuração distribuída apresentam, com frequência, sensibilidade à malha, uma vez que a orientação das fissuras na região degradada depende da discretização adotada (RABCZUK, 2013).

Os modelos contínuos baseados no acúmulo de dano no meio material, por sua vez, passaram a ser extensivamente desenvolvidos a partir do final da década de 1950 (VOLEGOV; GRIBOV; TRUSOV, 2017). O trabalho de Kachanov (1958) é considerado o pioneiro no estudo da Mecânica do Dano Contínuo (MDC), cujo conceito foi aprofundado nos trabalhos subsequentes de Robotnov (1968). A ideia fundamental apresentada por esses autores é a introdução de uma medida abstrata da degradação, segundo instâncias responsáveis por medir a deterioração do meio material, as denominadas variáveis de dano. Tais variáveis são capazes de retratar a nucleação e o crescimento de microvazios e microfissuras, que podem evoluir e originar, por exemplo, uma trinca macroscópica. Apesar de se referir a defeitos presentes na microescala, o dano é empregado na macroescala, refletindo uma média da degradação material (ZHANG; CAI, 2010).

Os modelos de dano podem ser classificados desde isotrópicos até anisotrópicos. Os modelos de dano isotrópico admitem que trincas e poros são distribuídos uniformemente em todas as direções do meio material. Nesse caso, o estado de dano pode ser completamente caracterizado pelo escalar  $D$ . Os modelos anisotrópicos, entretanto, abordam o meio material de forma mais geral, admitindo que trinca e poros apresentam direções preferenciais para surgimento e evolução da degradação, afetando o meio material de forma assimétrica. Diante disso, o dano calculado é distinto para as diferentes direções. Nos modelos que admitem anisotropia, a variável de dano é representada por tensores de segunda ou quarta ordem (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990).

Dentre os modelos de dano isotrópico, alguns são denominados modelos clássicos, por serem amplamente difundidos na literatura dedicada a modelos constitutivos para o concreto. Na presente tese, um desses modelos é destacado, tendo em vista sua utilização

nas simulações numéricas. Trata-se do modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995). Cada uma dessas abordagens obtém a variável de dano segundo medidas próprias de deformação equivalente ( $\tilde{\varepsilon}$ ). No referido modelo,  $\tilde{\varepsilon}$  é calculada a partir dos invariantes do tensor de deformação.

Ressalta-se também o modelo ortotrópico com variável escalar de de Borst e Gutiérrez (1999), também adotado nas análises numéricas da presente tese. Nesse modelo, a deformação equivalente é a máxima deformação principal de tração.

A hipótese de dano isotrópico é admissível para muitos casos, especialmente quando a estrutura é submetida a cargas proporcionais e as direções principais de tensão permanecem constantes. Todavia, deve-se destacar que todo material sujeito à fratura desenvolve um certo nível de anisotropia, sendo que o dano escalar não representa uma aproximação satisfatória da degradação em determinadas situações. Para atender a essa demanda, são utilizados os modelos de dano anisotrópico. Um modelo simples de dano anisotrópico é aquele que admite que o material se degrada apenas na direção perpendicular à tensão principal máxima, como proposto por Leckie e Hayhurst (1974). O dano é, então, caracterizado por um vetor de intensidade  $D$  na direção degradada e com o valor unitário nas demais direções. Já Murakami e Ohno (1981) representam o dano anisotrópico por um tensor de segunda ordem  $\underline{D}$ , com três valores de dano principal  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ . Nessa formulação, há uma simetria observada nos planos de degradação que qualifica o modelo como ortotrópico. O caso mais geral de anisotropia, todavia, é descrito em modelos como o apresentado por Chaboche (1984), que define a variável de dano por um tensor de quarta ordem, cujas componentes são dadas por  $D_{ijkl}$ .

Apesar das vantagens inerentes aos modelos distribuídos, como a maior conveniência da implementação computacional e a possibilidade de reproduzir conjuntos de fissuras com orientações diversas, com o passar dos anos foram observados problemas numéricos associados a essa abordagem. Dentre os inconvenientes notados em análises que utilizam modelos distribuídos convencionais, destacam-se a localização de deformações e a dependência de malha. Esses fenômenos podem culminar em resultados subjetivos e com forte viés associado à discretização como relatado por Gopalaratnam, Gerstle e Darwin (1997), Bažant e Jirásek (2002) e Jirásek (2004). Para contornar tais empecilhos, propõe-se a utilização de técnicas regularizadoras, como os contínuos de alta ordem, os modelos baseados em gradientes, os modelos não locais e, mais recentemente, modelos autoregularizados, como os baseados em *phase-field*.

Nos modelos de dano com formulação não local, as tensões em um determinado ponto material não dependem exclusivamente da deformação local, mas também das deformações observadas em uma região de influência, denominada vizinhança. A vizinhança

é delimitada a partir de um raio no entorno do ponto. Este raio pode ser associado, por exemplo, ao comprimento característico do material ou à dimensão da ZPF. De modo geral, essa abordagem substitui uma variável local pela grandeza não local a ela associada, que é calculada pela média ponderada nos pontos pertencentes à vizinhança. Os coeficientes de ponderação são obtidos por uma função peso, como a distribuição de Gauss, e variam com a distância entre o ponto de referência e o ponto em análise (JIRÁSEK, 2007). Esta abordagem tem suas origens em trabalhos datados no final da década de 1960 e início dos anos 1970, como em Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) e Bažant (1976), com abordagens a partir da mecânica do contínuo. Porém, sua aplicação para regularização de resultados na análise não linear é explorada a partir dos anos 1980 (BAŽANT; LIN, 1988), (BAŽANT; PIJAUDIER-CABOT, 1988), (PIJAUDIER-CABOT; BAŽANT, 1987). Uma revisão detalhada dos modelos não locais pode ser encontrada em Bažant e Jirásek (2002) e Jirásek (2004).

Os modelos de gradientes avançados, por outro lado, são descritos por equações diferenciais. A incorporação de gradientes das variáveis internas visa representar a influência da microestrutura nas relações constitutivas. Quando se aplica a formulação gradiente à modelos de dano, como descrito em Bažant (1984), de Borst (1992) e de Borst et al. (1998), a degradação não é governada somente pela deformação equivalente, mas também por seu Laplaciano, que representa a curvatura da distribuição de deformações. Essa curvatura atua para retardar o aumento de deformações na região central de faixas de localização, favorecendo sua evolução nas áreas adjacentes. Como consequência, a zona de localização é expandida. A dimensão mínima dessa zona é controlada pelo comprimento característico (JIRÁSEK, 2007). O trabalho de Marigo, Maurini e Pham (2016) apresenta um compilado sobre os modelos de gradientes avançados e estudos mais recentes são apresentados em Xue, Feng e Ren (2024), Xue, Ren e Freddi (2024) e Xue et al. (2025).

Assim, as estratégias distribuídas associadas a técnicas de regularização constituem um recurso eficiente para representar a evolução da degradação no meio contínuo. A maior limitação desse tipo de abordagem, contudo, é a impossibilidade de representar de forma adequada uma verdadeira descontinuidade (WU et al., 2019). A fim de suprir essa deficiência, emergiram modelos distribuídos capazes de descrever com maior precisão a presença de trincas discretas, também vinculados à teoria não local. Esses modelos são oriundos da Teoria do *Phase-Field* (BOURDIN; FRACFORT; MARIGO, 2000) e da Teoria da Peridinâmica (SILLING, 2000). Enquanto os modelos de *phase-field* abordam a descontinuidade do campo de deslocamentos a partir da solução de equações diferenciais parciais e da introdução de um comprimento intrínseco, a peridinâmica é governada pelo cálculo integral (WU et al., 2019). A seção 2.3 dedica-se a uma descrição mais detalhada dos modelos de *phase-field*. Nesse contexto, que busca reproduzir a degradação

em sua completude, desde o aparecimento de microfissuras até a propagação de trincas macroscópicas, também foram propostas as abordagens contínuas-descontínuas, discutidas na seção 2.4.

### 2.3 MODELOS DE *PHASE-FIELD* (MPF)

Os Modelos de *Phase-Field* (MPF) emergiram como alternativa aos modelos de trinca discreta, buscando atender a desafios inerentes à mecânica da fratura computacional, como a nucleação automática de trincas e a definição de caminhos de propagação complexos, com trechos curvos, ramificação e coalescência de trincas (EGGER et al., 2019). Seu desenvolvimento teve início com a abordagem variacional e os princípios de minimização de energia propostos por Fracfort e Marigo (1998) para a fratura frágil, que pode ser entendida como uma generalização da teoria de Griffith (1921). Nos MPF a trinca não é representada como uma descontinuidade, mas por um campo escalar, que faz uma transição suave entre a região constituída por material íntegro e a região completamente fraturada. Essa forma de representação destaca o caráter transicional do *phase-field*, que apresenta similaridades tanto com a Mecânica da Fratura quanto com a Mecânica do Dano Contínuo. Em relação à propagação das trincas, o caminho de evolução da fratura é obtido pela solução de equações diferenciais, o que torna esses modelos independentes de critérios de abertura de trinca ou mesmo de algoritmos adicionais para determinação da região fraturada (ZHOU et al., 2018a).

Inicialmente proposta para descrever a fratura em materiais frágeis, a formulação do *phase-field* foi modificada e estendida para abordar meios anisotrópicos, incluir a ductilidade do meio, modelar fraturas coesivas, tratar problemas de fratura dinâmica, dentre outras possibilidades. Essa flexibilidade em descrever processos de fratura com diferentes características decorre da sua estrutura variacional, que permite a incorporação natural de fenômenos de origens diversas desde a concepção dos modelos. Alguns dos MPF presentes na literatura que têm sido alvos de estudos recentes são:

1. MPF para fratura frágil;
2. MPF para anisotropia do meio material;
3. MPF para fratura dúctil;
4. MPF para fratura coesiva;
5. MPF para fratura dinâmica;
6. MPF para fratura tridimensional;
7. MPF para simulações multifísicas;
8. MPF para fadiga.

A partir da formulação variacional de Fracfort e Marigo (1998), Bourdin, Fracfort e

Marigo (2000) desenvolveram o primeiro MPF para fratura, denominado modelo isotrópico por não distinguir a resposta do material à tração e à compressão. Versões capazes de representar o comportamento assimétrico do concreto à tração e à compressão, nomeadas anisotrópicas, foram apresentadas posteriormente. A fim de evitar equívocos entre essa nomenclatura e a anisotropia material, nesse texto os MPF isotrópicos serão chamados modelos unimodulares. Já os MPF capazes de reproduzir o comportamento assimétrico do concreto serão denominados modelos bimodulares. Amor, Marigo e Maurini (2009) apresentaram um modelo em que realizam a decomposição aditiva das parcelas volumétricas e desviadoras da densidade de energia elástica a fim de prevenir a fissuração em domínios de compressão, enquanto Lancioni e Royer-Carfagni (2009) abordaram a fratura por cisalhamento. Com o objetivo de unificar os modelos de Bourdin, Fracfort e Marigo (2000), Amor, Marigo e Maurini (2009), Lancioni e Royer-Carfagni (2009), Freddi e Royer-Carfagni (2010) elaboraram uma formulação capaz de descrever os modos I, II e misto de abertura de trincas. Miehe, Welschinger e Hofacker (2010a), por sua vez, propuseram um modelo bimodular segundo a decomposição espectral do tensor de deformações em componentes de tração (por convenção, denominados positivos) e componentes de compressão (negativos). Esse último trabalho destacou-se dentre os demais por apresentar uma formulação mais acessível à comunidade de engenharia, baseada em conceitos da mecânica do contínuo e da termodinâmica.

Em busca de contemplar a anisotropia do meio material quando esse apresenta uma direção preferencial de orientação das fissuras, outros MPF foram propostos. Essa característica, típica de cristais, materiais geológicos e compósitos, é compreendida na formulação do *phase-field* de trabalhos como os desenvolvidos por Hakim e Karma (2005), Clayton e Knap (2014), Li et al. (2015), Nguyen, Réthoré e Baietto (2017) e Teichtmeister et al. (2017). A particularidade dos modelos que abrangem a anisotropia da estrutura do meio material é a introdução de uma função de densidade de trincas capaz de reproduzir a direção preferencial de fratura ou, ainda, a utilização de múltiplas variáveis de *phase-field* para representar a degradação.

Em relação à adoção do *phase-field* no contexto da fratura dúctil, essa é observada em diferentes estudos (DUDA et al., 2015; MIEHE; SCHANZEL; ULMER, 2015a; ALESSI; MARIGO; VIDOLI, 2015; AMBATI; GERASIMOV; De Lorenzis, 2015; AMBATI; KRUSE; De Lorenzis, 2016; BORDEN et al., 2016; KUHN; NOLL; MÜLLER, 2016; YIN; KALLISKE, 2020), podendo ser associada às deformações finitas. A propriedade comum entre esses modelos é a decomposição do funcional de energia armazenada em parcelas elástica e plástica. Uma das estratégias utilizadas para tratar problemas com ductilidade, segundo Borden et al. (2016), é a multiplicação da superfície de escoamento por uma função de degradação plástica, responsável pela contração dessa superfície conforme a evolução do

*phase-field*. Já Yin e Kaliske (2020) optam por redefinir o funcional de energia a partir de uma função que estabelece a dependência entre a energia de fratura do meio e a deformação plástica acumulada. Uma revisão acerca desses modelos pode ser encontrada no trabalho de Alessi et al. ().

Quanto aos MPF para fratura coesiva, há liberação progressiva da energia dissipada com a abertura da trinca, ao contrário da fratura frágil, em que esse processo ocorre de forma abrupta. Bourdin, Fracfort e Marigo (2008) foram considerados pioneiros na definição de um MPF dedicado à fratura coesiva. Verhoosel e de Borst (2013) abordam esse tema a partir da inserção de uma zona coesiva na formulação energética e da introdução de um campo auxiliar, além dos campos de deslocamentos e de *phase-field*, responsável por representar o salto de deslocamentos no domínio da trinca. Essa formulação foi ampliada em Vignollet et al. (2014) para incluir situações com propagação de trincas. Uma abordagem alternativa para modelar a fratura coesiva é definir uma função de degradação energética associada ao comprimento intrínseco, como proposto por Freddi e Iurlano (2017). Wu e Nguyen (2018), por sua vez, empregaram esforços para generalizar a descrição de MPF para fratura coesiva, propondo uma teoria unificada, nomeada PF-CZM, que pode ser aplicada tanto à fratura frágil quanto à fratura parcialmente frágil. Essa teoria tem como objetivos ser insensível ao comprimento intrínseco e apresentar uma metodologia para descrição de leis de amolecimento de natureza linear, exponencial e hiperbólica. Outros trabalhos relevantes no histórico de desenvolvimento dos modelos de *phase-field* para fratura coesiva são May, Vignollet e de Borst (2015), Nguyen et al. (2016), Wu (2017) e Wu (2018).

Os MPF também têm sido aplicados em simulações de fratura dinâmica (LARSEN; ORTNER; SALI, 2010; BOURDIN; LARSEN; RICHARDSON, 2011; HOFACKER; MIEHE, 2012; HOFACKER; MIEHE, 2013; BORDEN et al., 2012; SCHLÜTER et al., 2014; LI et al., 2016; BLEYER; ROUX-LANGLOIS; MOLINARI, 2017), assumindo que a energia cinética não é influenciada pela evolução do *phase-field* e que a energia de fratura é constante. Outra aplicação dos MPF que têm se mostrado promissora é a modelagem da fratura tridimensional (BORDAS; RABCZUK; ZI, 2008; GÜRSES; MIEHE, 2009; RABCZUK; BORDAS; ZI, 2010; FRIES; BAYDOUN, 2012; GUPTA; DUARTE, 2014; KACZMARCZYK; ULLAH; PEARCE, 2017; AGATHOS et al., 2018a). Embora a maioria dos trabalhos se dedique a problemas bidimensionais, a formulação do *phase-field* pode ser generalizada de forma relativamente simples para modelos sólidos. Contudo, cabe ressaltar que simulações dessa natureza são extremamente custosas computacionalmente, podendo demandar malhas de milhões de elementos. Há também a possibilidade de se beneficiar da estrutura variacional dos MPF para modelar problemas multifísicos, ou seja, problemas cuja solicitação no elemento estrutural seja composta por cargas de origens distintas,

sejam elas hidráulicas, térmicas ou provenientes de carregamentos externos. Bourdin et al. (2014), Miehe, Schanzel e Ulmer (2015a) e Zhou, Zhuang e Rabczuk (2018b) apresentam trabalhos que empregam MPF em problemas multifísicos. Por fim, os MPF parecem ser adequados também à descrição do surgimento e propagação de fissuras em estruturas sujeitas à fadiga, conforme Caputo e Fabrizio (2015), Amendola, Fabrizio e Golden (2016), Boldrini et al. (2016) e Alessi, Vidoli e De Lorenzis (2018b).

Para maiores detalhes sobre os MPF, além dos artigos já citados, recomenda-se a leitura da revisão realizada por Wu et al. (2019).

Tantas possibilidades de aplicação em estudos da mecânica da fratura destacam as potencialidades e a abrangência da teoria do *phase-field*. Entretanto, essa formulação também apresenta limitações, dentre as quais o elevado custo computacional. Para definição da região de degradação de forma adequada, faz-se necessário adotar malhas de elementos finitos muito refinadas, o que eleva o tamanho do problema a ser resolvido. Há ainda a convergência lenta do solucionador responsável pela minimização do funcional de energia. Adicionalmente, tem-se a dificuldade em parametrizar adequadamente o material. Embora existam formulações capazes representar apropriadamente as propriedades do meio, elas requerem funções específicas para a variável de *phase-field*, que, por sua vez, demandam solucionadores específicos próprios. Esses fatores podem, a depender dos recursos disponíveis, inviabilizar análises. Como formas de amenizar essa alta demanda computacional, Wu et al. (2019) aponta como alternativas a utilização de códigos baseados em paralelismo e de malhas adaptativas.

## 2.4 MODELOS CONTÍNUOS-DESCONTÍNUOS

A ideia de desenvolver uma abordagem que combine conceitos da Mecânica do Dano e da Mecânica da Fratura para uma descrição mais realista do processo de degradação já era defendida por Janson e Hult (1977). Para esses autores a Mecânica do Dano Contínuo pode ser percebida como um modelo de transição, capaz de preencher a lacuna entre a Teoria da Elasticidade convencional e a Mecânica da Fratura. Posteriormente, outros trabalhos levantaram a necessidade de se estabelecer um maior formalismo ao vincular um modelo distribuído a uma abordagem discreta, seja a partir de princípios que assegurem a consistência energética, seja avaliando os critérios e limites mais adequados para a iniciação e propagação de trincas. Assim surgiram as abordagens combinadas, ou abordagens contínuas-discretas, conforme apresentado na Fig. 2.2.

Legendre e Mazars (1984) apresentam uma abordagem que associa dano e fratura em estruturas de concreto segundo as leis da termodinâmica. O principal conceito proposto nesse trabalho é a noção de trinca equivalente, um segmento de trinca cuja energia neces-

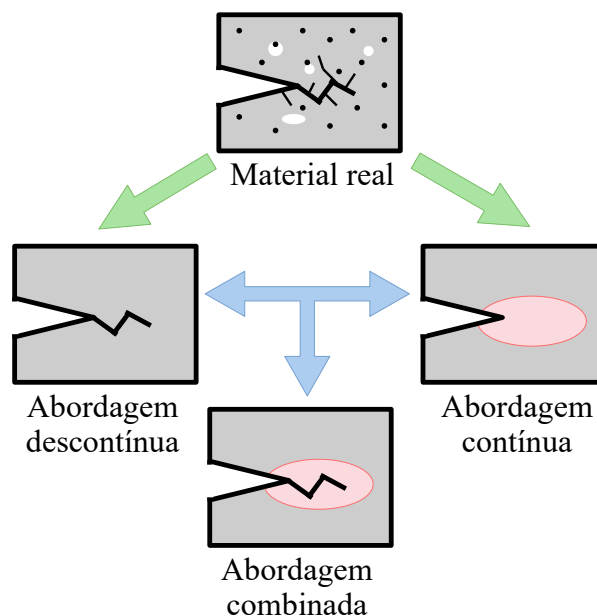


Figura 2.2 – Abordagens para descrever a degradação (adaptado de Mediavilla, Peerlings e Geers (2006)).

sária para sua abertura equivale à energia dissipada na formação da zona de degradação. Assim, a partir do modelo de dano de Mazars (1984), calcula-se essa região deteriorada e, confrontando a energia por ela dissipada com a energia de fratura do material, é determinado se há ou não transição para o estado discreto. Caso a energia dissipada seja maior ou igual a um parâmetro denotado por  $G_c$ , que é a energia crítica de abertura de trinca, ocorre propagação da trinca e a zona de degradação é convertida em trinca equivalente. Essa teoria, contudo, limita-se a análises de estruturas que apresentam trinca inicial com direção de propagação pré-definida.

O trabalho desenvolvido por Mazars e Pijaudier-Cabot (1996) também é baseado no conceito de trinca equivalente, trazendo como contribuição a utilização de um modelo de dano não local para descrição do contínuo e a definição do critério de propagação segundo um valor de dano crítico, nesse caso estabelecido como  $D = 1,0$ . A opção pelo modelo de dano não local é justificada pela necessidade de modelos que sejam independentes da discretização adotada. Nesse estudo a orientação das trincas é determinada segundo a região de localização do dano.

Jirásek e Zimmermann (2001), por sua vez, desenvolvem o chamado modelo de trinca embutida tardia (DEC - *Delayed Embedded Crack*). Esse modelo relaciona o meio distribuído, representado por um modelo de dano não local, com a inserção de descontinuidades no campo de deslocamento para representação da trinca discreta via Método dos Elementos Finitos Embutidos - MEFE. A trinca é dita tardia, pois o método de descrição do contínuo permite a rotação das fissuras iniciais, que quando previstas com orientação incorreta, são

corrigidas no estágio de propagação. Assim, ao introduzir o MEFE com certo atraso, garante-se uma orientação adequada da trinca. Como critério de transição entre contínuo e discreto, é utilizado um valor crítico de abertura de trinca. A orientação da trinca é estabelecida pela direção das deformações não locais.

Já a aplicação do Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) em modelos contínuos-descontínuos é descrita por Simone, Wells e Sluys (2003). Nesse trabalho, o contínuo é regularizado a partir de um modelo de gradientes avançados, enquanto a fratura é representada conforme o enriquecimento do campo de deslocamentos. A introdução das descontinuidades ocorre quando o dano atinge o estágio final de degradação, sendo as trincas orientadas conforme a direção com maior acúmulo de deformação não local equivalente.

Com o objetivo de propor um modelo combinado para a fratura dúctil, Mediavilla, Peerlings e Geers (2006) conjugou um modelo elastoplástico de grandes deformações que descreve o meio contínuo com uma técnica de redefinição da malha para inserção da trinca. Em seu trabalho a variável de dano é utilizada apenas como um recurso de indicação do surgimento de trincas e a direção de propagação é estabelecida a partir do modo de abertura. Para modo I de abertura, a propagação segue a direção da maior tensão principal, enquanto para o modo II, essa direção está associada a maior tensão tangencial. Em casos de modo misto de abertura, os autores elaboram uma formulação que combina essas duas direções.

Comi, Mariani e Perego (2007) formularam uma abordagem distribuída-discreta que trata o contínuo segundo um modelo de dano não local, enquanto a fratura é representada pelo MEFX. O procedimento de análise conta com uma etapa preliminar, em que se define um valor de dano crítico para cada elemento em função da discretização da malha. Em seguida, a simulação é iniciada, adotando o modelo não local associado ao MEF convencional. No final de cada passo, estima-se o valor do dano e, caso exceda o dano crítico, é introduzido no elemento uma trinca coesiva via MEFX. A lei coesiva utilizada provém de um balanço energético, de modo que a energia que ainda não foi dissipada na banda de degradação seja transferida à interface coesiva. A direção de propagação é determinada com base na banda de degradação previamente calculada. Por simplicidade computacional, admite-se que a trinca se propaga de forma que a ponta da trinca sempre pertença à aresta de um elemento. O elemento à frente da trinca é enriquecido com funções especiais que permitem a abertura da trinca. Essa metodologia é restrita ao modo I de abertura.

Moonen, Cameliet e Sluys (2008) também recorrem ao MEFX para descrever o comportamento descontínuo em seu modelo combinado. O diferencial desse trabalho é a possibilidade de generalização, dado que tal formulação pode ser estendida à maioria dos modelos contínuos. Nesse artigo, contudo, os autores optam por representar o meio

como linear elástico. A transição entre as abordagens distribuída e discreta é realizada de forma gradual, segundo um modelo de zona coesiva. Já a direção de propagação é oriunda do cálculo das tensões não locais. Deve-se destacar que a capacidade preditiva dessa metodologia depende crucialmente das características do modelo contínuo escolhido, bem como do critério de degradação.

O estudo de Cuvilliez et al. (2012) é outro que emprega modelos de zona coesiva, dessa vez para descrição das descontinuidades em meios parcialmente frágeis. O meio contínuo, todavia, é representado por um modelo de gradientes avançados. As abordagens contínua e descontínua são combinadas a partir de um critério de dano crítico, avaliado ao final de cada passo. Essa transição pode ser definida para ocorrer em qualquer nível de dano. Por se tratar de uma formulação dedicada ao modo I de abertura, a direção de propagação é estabelecida como perpendicular à superfície da trinca. Os resultados desse trabalho indicam pouca dependência em relação ao valor de dano crítico que desencadeia a passagem do contínuo para o discreto. A introdução da coesão no modelo não resultou em aumento do custo computacional.

Em busca de aplicar abordagens contínuas-descontínuas também aos problemas de multi-escala com heterogeneidade material, tanto Nguyen et al. (2011), Nguyen, Stroven e Sluys (2012) quanto Karamnejad, Nguyen e Sluys (2013) apresentam propostas de modelos combinados. Ambos descrevem o meio contínuo com modelos de gradientes avançados e introduzem a trinca discreta via XFEM, considerando coesão. O que distingue essas duas propostas são os critérios de transição e a definição da direção de propagação. Para Nguyen et al. (2011), Nguyen, Stroven e Sluys (2012), a transição das fissuras distribuídas para a trinca macroscópica ocorre com o surgimento de bandas de localização, enquanto Karamnejad, Nguyen e Sluys (2013) compara tensão atuante com tensão resistente à tração. A direção de propagação, por sua vez, é dada conforme o campo de tensões macroscópicas em Nguyen et al. (2011), Nguyen, Stroven e Sluys (2012), que utilizam o tensor acústico. Para Karamnejad, Nguyen e Sluys (2013), que avaliam problemas com modo I de abertura, a propagação ocorre na direção perpendicular à superfície da trinca.

O trabalho desenvolvido por Roth, Léger e Soulaïmani (2015) é mais um fundamentado na combinação MDC/MEFX. Um modelo de dano anisotrópico rotacional associado a um algoritmo não local é responsável para descrição do contínuo. Considerando que esse é um modelo rotacional, que permite a correção da orientação da trinca, ao modelo de dano é atribuída a função de prever o caminho da trinca, segundo o método não local baseado em tensões. Quanto a transição para a representação discreta, aqui representada pelo MEFX com coesão, o critério utilizado é o dano crítico. Os autores fizeram uma avaliação de diferentes valores de dano transicional, a fim de definir um valor ótimo, que

nesse estudo ficou no intervalo de  $[0,6 - 0,7]$ . Ao migrar para o MEFX quando o dano torna-se significativo, o fenômeno de travamento de tensões é aliviado. Como sugestões para estudos futuros, Roth, Léger e Soulaïmani (2015) levanta a possibilidade de estender esse modelo a casos com ramificação de trincas.

A teoria do *phase-field* recentemente ganhou espaço na formulação de modelos combinados. Giovanardi, Scotti e Fomaggia (2017) propõe o chamado *Xfield*, que acopla *phase-field* e MEFX na representação de trincas em materiais elásticos de comportamento frágil. Nesse contexto, o MEFX é utilizado no cálculo do campo de deslocamentos, por permitir a introdução de descontinuidades. O *phase-field*, por sua vez, atua indicando a iniciação e propagação de trincas, dada sua capacidade de descrever até mesmo trajetórias com as topologias mais complexas. A direção de propagação é estabelecida pela maximização do gradiente de *phase-field*. Para investigações posteriores, os autores sugerem o estudo de problemas com ramificação e coalescência de trincas.

Geelen et al. (2018) também adotou o *phase-field* em conjunto com o MEFX em seu modelo contínuo-discreto. Nesse trabalho o *phase-field* é adotado na descrição do contínuo, buscando suprir os desafios das representações discretas em definir nucleação, ramificação e coalescência de trincas. A transição contínuo-descontínuo é desencadeada pelo funcional do comprimento de trinca, enquanto a identificação do caminho de propagação é delegada a um campo de dano auxiliar. A abordagem torna-se completa com o fim do processo de transição, que culmina na inserção de descontinuidades no campo de deslocamento via MEFX.

Apesar dos esforços investidos nesses modelos que buscam transitar entre o contínuo e o descontínuo, Rabczuk (2013) aponta que esse ainda é um desafio no campo da mecânica computacional. Wu et al. (2019) salienta que não há consenso na definição da passagem da degradação distribuída para a trinca discreta, especialmente quando o processo de fratura conduz a anisotropia do meio. Além disso, todas as técnicas combinadas apresentadas se aplicam a problemas em que uma única trinca predominante se propaga. Tendo em vista tais limitações, essa é uma área de estudo que ainda demanda muitas investigações. Um levantamento do estado da arte desse campo de pesquisa é apresentado no apêndice A.

A Tab. 2.1 apresenta uma síntese dos estudos descritos nesta seção, destacando autores, o modelo que representa o contínuo, a técnica dedicada à trinca discreta, o critério de transição contínuo-descontínuo e a determinação da direção de propagação da trinca. A Fig. 2.3 resume os diferentes modelos propostos para representação da degradação detalhados ao longo deste capítulo.

Tabela 2.1 – Resumo das abordagens contínuas-descontínuas presentes na literatura

Autor	Contínuo	Descontínuo	Transição	Direção
Legendre e Mazars (1984)	modelo de dano de (MAZARS, 1984)	conceito de trinca equivalente	Limite de energia ( $G_c$ )	direção previamente conhecida
Mazars e Pijaudier-Cabot (1996)	modelo de dano não local	conceito de trinca equivalente	dano = 1,0	direção da localização do dano
Jirásek e Zimmermann (2001)	modelo de dano não local	MEFE	valor crítico de abertura de trinca	deformação não local
Simone, Wells e Sluys (2003)	modelo de gradientes avançados	MEFX	dano crítico	maior acúmulo de deformação não local equivalente
Mediavilla, Peerlings e Geers (2006)	modelo elastoplástico de grandes deformações	redefinição da malha	dano crítico	modo I: maior tensão principal; modo II: maior tensão tangencial
Comi, Mariani e Perego (2007)	modelo de dano não local	MEFX	dano crítico associado às dimensões da malha	banda de degradação
Moonen, Cameliet e Sluys (2008)	lei linear elástica	MEFX	modelo coesivo	tensor de tensões não locais

Autor	Contínuo	Descontínuo	Transição	Direção
Cuvilliez et al. (2012)	modelo de gradientes avançados	modelo de zona coesiva	dano crítico	direção perpendicular à abertura da trinca (modo I)
Nguyen et al. (2011), Nguyen, Stroven e Sluys (2012)	modelo de gradientes avançados (microescala)	MEFX (macroescala)	banda de localização	tensões macroscópicas (tensor acústico)
Karamnejad, Nguyen e Sluys (2013)	modelo de gradientes avançados (mesoescala)	MEFX (macroescala)	limite de resistência à tração	direção perpendicular à abertura da trinca (modo I)
Roth, Léger e Soulaïmani (2015)	modelo de dano anisotrópico rotacional	MEFX	dano crítico (0.6 – 0.7)	método não local baseado em tensão
Giovanardi, Scotti e Fomaggia (2017)	lei elástica linear	MEFX	<i>phase-field</i>	maximização do gradiente de <i>phase-field</i>
Geelen et al. (2018)	<i>phase-field</i>	MEFX	funcional do comprimento da trinca	campo de dano auxiliar

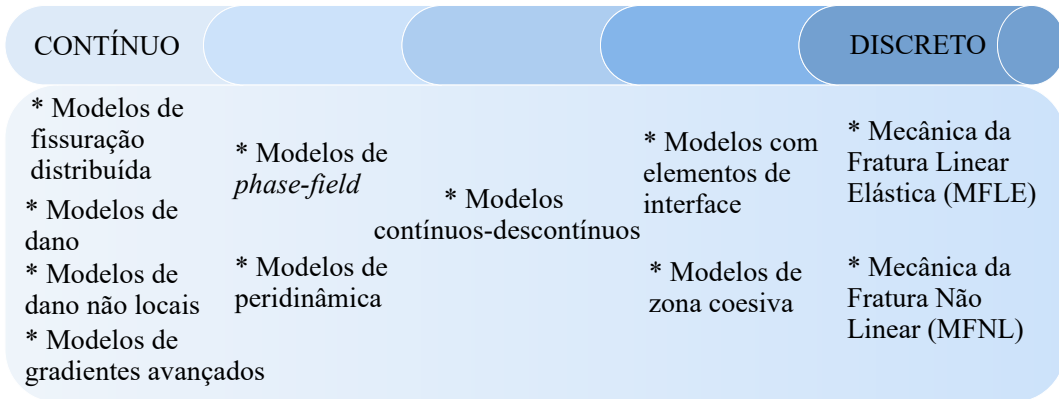


Figura 2.3 – Modelos para descrição da degradação do meio material.

## 2.5 DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DA TRINCA

Considerando a diversidade de modelos propostos para descrição do processo de abertura e propagação de trincas no concreto, percebe-se que prever esse fenômeno tem sido um desafio. Leblouba, Trabin e Zahri (2022) destacam que a orientação das trincas pode ser definida como um processo estocástico, que requer uma investigação probabilística para melhor aproximação. Esses autores propuseram, então, a definição do caminho de trincas a partir de um vasto banco de dados com mais de 400 imagens de trincas experimentais, utilizando cadeias de Markov. A Fig. 2.4 sintetiza o algoritmo desenvolvido por Leblouba, Trabin e Zahri (2022) em um fluxograma.

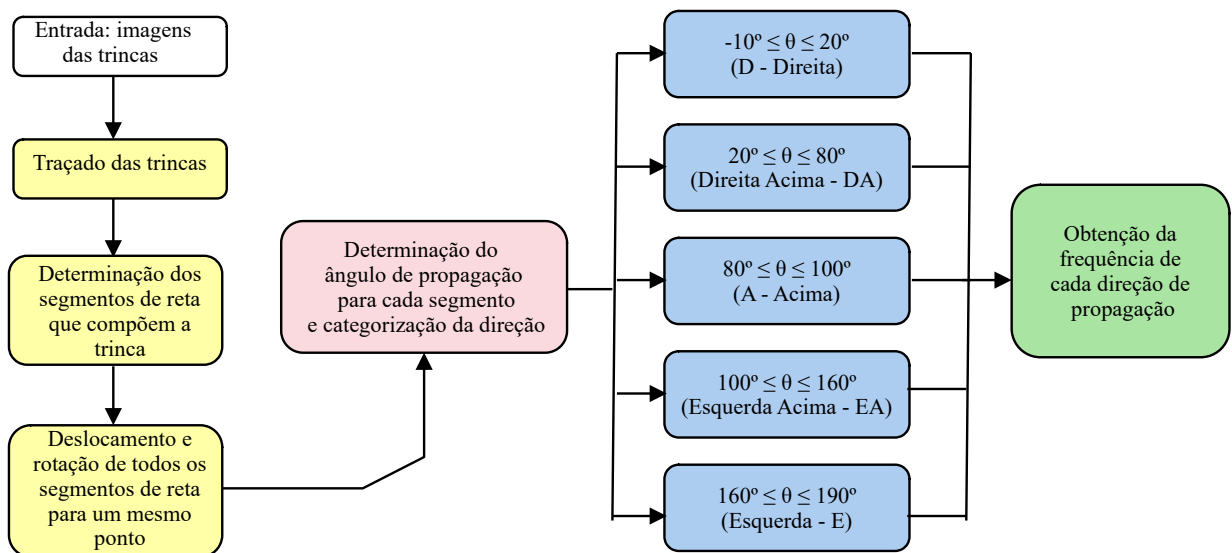


Figura 2.4 – Fluxograma do algoritmo para definição da direção de propagação da trinca (Adaptado de Leblouba, Trabin e Zahri (2022)).

As respostas desse algoritmo indicaram com que frequência foram observadas propagações para as diferentes direções segundo os caminhos de trincas disponíveis no banco de dados. As respostas são apresentadas na Fig. 2.5.

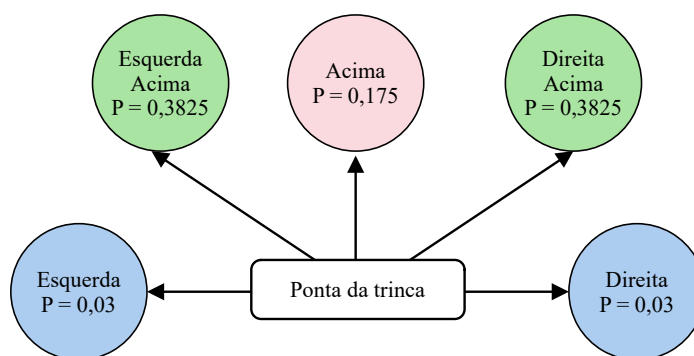


Figura 2.5 – Direções de propagação da trinca e suas respectivas probabilidades (Adaptado de Leblouba, Trabin e Zahri (2022)).

A partir desse estudo é perceptível que as trincas se propagam apenas na região à frente da ponta da trinca, com angulação limitada ao intervalo de  $-10^\circ \leq \theta \leq 190^\circ$ . Evidencia-se ainda que a distribuição de probabilidade para cada direção considerada não é uniforme e se concentra mais em algumas regiões (direita-acima, esquerda-acima e acima).

## 2.6 MÉTODO PROBABILÍSTICO PARA SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A forma dispersa e probabilística que a propagação de trinca apresentou nos estudos de Leblouba, Trabin e Zahri (2022) indica a natureza aleatória do comportamento do concreto. Essa aleatoriedade observada experimentalmente reside na heterogeneidade do meio, que apresenta dependência não somente do processo de fabricação do material, mas também da moldagem de elementos estruturais, da solidificação, do processo de cura e de efeitos temporais como fluência e retração. Tais incertezas também se relacionam aos constituintes do concreto, como o tipo de cimento, a natureza, a forma e a dimensão dos agregados, bem como sua distribuição ao longo do elemento estrutural. Diante da enormidade de variáveis aleatórias, faz-se necessária uma análise para além da determinística.

A partir dessa análise da direção de propagação da trinca, compreendeu-se que não somente esse fenômeno tem natureza probabilística no estudo do comportamento do concreto. Mesmo rigorosas metodologias de ensaios laboratoriais para se determinar as propriedades mecânicas do concreto findam em uma dispersão de resultados que dificultam uma caracterização única desses parâmetros.

Transportando tais conclusões para a modelagem computacional, observa-se uma grande quantidade de modelos constitutivos para a descrição do fraturamento do concreto. Essa diversidade evidencia a dificuldade de tratar a complexidade do material de forma geral e abrangente. Muitos modelos apresentam formulações puramente matemáticas, de modo que o significado físico de seus parâmetros perde o lastro físico, que deve ser estabelecido a partir de um processo de identificação paramétrica. Mesmo aqueles modelos com leis de

evolução baseadas em propriedades do material, sofrem com alguns parâmetros sujeitos a incertezas, tais como a escala de observação, a consideração ou não da heterogeneidade do meio e o comprimento característico do material.

Como discutido por Fairbairn et al. (2000), é possível simular o processo de fraturamento do concreto a partir de uma abordagem probabilística baseada no Método de Monte Carlo. Esse tipo de abordagem permite incorporar à análise numérica as incertezas associadas aos parâmetros do material, assumindo que esses variam conforme uma distribuição de probabilidade, como a função de distribuição de Gauss.

No presente trabalho, a representação da aleatoriedade no fraturamento do concreto foi considerada a partir de simulações de probabilidades múltiplas com foco na dispersão das propriedades do material (módulo de elasticidade inicial, resistência à tração e à compressão, comprimento característico e energia de fratura) e nos parâmetros de incertezas do modelo (valor crítico de abertura da trinca, dimensão do domínio não local). Mais detalhes referentes à estratégia desenvolvida são apresentados na seção 4 do capítulo 4.5.

### 3 Fundamentação teórica

Este capítulo versa sobre as formulações dos métodos discutidos no capítulo 2, cujas descrições são necessárias a esta tese. Na seção 3.1 a formulação de modelos clássicos de dano é apresentada segundo o formato unificado para modelos de degradação elástica. Aborda-se ainda o desenvolvimento da abordagem não local para modelos de dano. A seção 3.2 discute a formulação matemática da Mecânica da Fratura, contemplando suas bases energéticas, os principais modos de fraturamento e a determinação do estado de tensão na ponta da trinca. A partir dessas definições, é possível mapear a evolução da fratura, da nucleação à propagação. Por fim, a seção 3.3 contém a descrição matemática dos modelos de *phase-field* segundo a formulação variacional.

#### 3.1 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO - MDC

Os modelos distribuídos consideram que o material, quando fissurado, tem sua relação constitutiva alterada devido à deterioração da rigidez. Tal enfoque da degradação deu origem aos modelos de fissuração distribuída, introduzidos por Rashid (1968), e aos modelos baseados na mecânica do dano contínuo, inicialmente propostos por Kachanov (1958). Nos modelos de fissuração distribuída são monitoradas as tensões, as deformações e as variáveis históricas, que atuam em conjunto com as leis tensão-deformação na descrição do comportamento material, incorporando os efeitos da degradação do meio. A Mecânica do Dano Contínuo (MDC), em contrapartida, aborda o surgimento e propagação de trincas, microfissuras e microvazios em meios materiais. Do ponto de vista fenomenológico, pode-se avaliar a degradação do módulo elástico do material em função da distribuição dos microdefeitos causados por solicitações. Nesse cenário, surgem os modelos de dano baseados na degradação elástica do meio.

Tendo em vista a intenção deste estudo em adotar modelos de dano para descrição do comportamento do meio material, explora-se a seguir a formulação matemática que sustenta a teoria da MDC. Retomando a definição anterior, conforme Lemaitre e Desmorat (2005), a Mecânica do Dano Contínuo tem como objeto de estudo o surgimento e o crescimento de microfissuras e microvazios, admitindo que, em uma escala maior, o meio material possa ser considerado contínuo.

Para que essa hipótese seja razoável, o conceito de Volume Elementar Representativo (VER) é introduzido. O VER, como ilustra a Fig. 3.1, é uma entidade volumétrica que possibilita que as propriedades do meio material sejam representadas por variáveis

homogeneizadas. De acordo com Murakami (2012), tal elemento deve atender a duas condições: (1) para que o material representado pelo VER seja estatisticamente homogêneo, esse deve ser grande o suficiente para conter um número razoável de descontinuidades; (2) as dimensões do VER devem ser suficientemente pequenas para que a variação dos parâmetros macroscópicos do meio seja insignificante em seu interior.

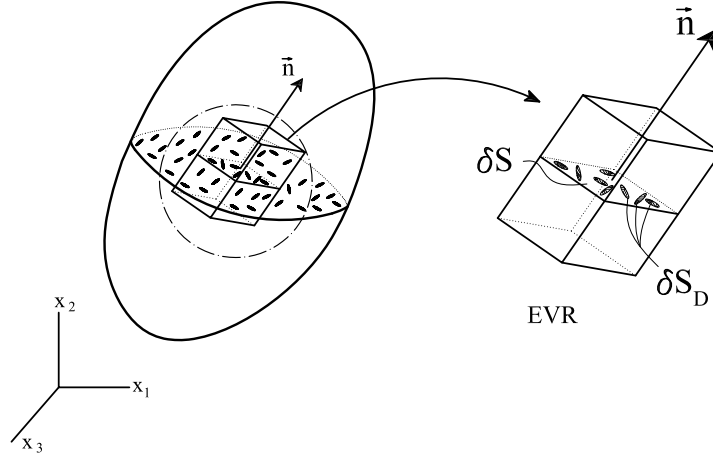


Figura 3.1 – Volume Elementar Representativo (VER) (PENNA, 2011).

A partir do VER define-se a variável de dano. Nos casos mais gerais de dano anisotrópico, essa variável é descrita matematicamente por um tensor de quarta ordem (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990). Nesse sentido, são definidas as componentes de dano  $D_{\vec{n}}$ , as quais dependem da orientação da normal  $\vec{n}$ , referente a um plano de degradação pertencente ao VER, com área  $\delta S$ . Tal área, por sua vez, contém  $\delta S_D$ , que quantifica a área equivalente a poros e microfissuras. Determinadas tais variáveis, calcula-se  $D_{\vec{n}}$  por

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S}. \quad (3.1)$$

Ao avaliar a equação 3.1, compreende-se que a variável  $D_{\vec{n}}$  assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_{\vec{n}} \leq 1$ , em que  $D_{\vec{n}} = 0$  indica material íntegro e  $D_{\vec{n}} = 1$  corresponde à deterioração total do material, conduzindo à fratura (KACHANOV, 1986).

Todavia, cabe ressaltar que a avaliação do dano micromecânico requer a quantificação da área degradada  $\delta S_D$  da seção avaliada, tarefa árdua do ponto de vista experimental (PENNA, 2011). Como alternativa, tem-se a abordagem fenomenológica do dano, que quantifica esse parâmetro segundo a variação de propriedades mecânicas globais do material.

A definição de dano fenomenológico, por sua vez, requer o entendimento dos conceitos de tensão efetiva e deformação efetiva. Porém, antes de adentrar nesses conceitos, a variável

generalizada de dano será especificada para a hipótese de dano isotrópico, por simplicidade. Ao adotar tal hipótese, assume-se que os microdefeitos se distribuem uniformemente no meio material, tornando-se independentes da orientação da normal  $\vec{\mathbf{n}}$ . Desse modo, a variável de dano pode ser reescrita como um escalar, dado por

$$D_{\vec{\mathbf{n}}} = D \quad \forall \quad \vec{\mathbf{n}}. \quad (3.2)$$

Retomando, o conceito de tensão efetiva apresentado por Rabotnov (1969) é oriundo do equilíbrio de forças, que iguala a força  $F$  atuante na área total  $\delta S$  da seção, produzindo uma tensão nominal  $\sigma$ , à força  $\tilde{F}$ , resultante da ação da tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  sobre a área resistente da seção  $\delta\tilde{S}$ :

$$\tilde{\sigma}\delta\tilde{S} = \sigma\delta S, \quad \text{com} \quad D = \frac{\delta S_D}{\delta S} = \frac{\delta S - \delta\tilde{S}}{\delta S} \quad (3.3)$$

ou

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (3.4)$$

A deformação pode ser escrita em função do dano  $\varepsilon = \varepsilon(D)$ . Para tanto, o estado de deformação do material degradado é dado pela lei tensão-deformação do material íntegro (equação 3.6) substituindo na equação 3.5 a tensão nominal pela tensão efetiva (equação 3.4)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1 - D)}. \quad (3.6)$$

Confrontando-se as equações 3.5 e 3.6, é possível extrair a equação do módulo de elasticidade do material degradado ( $\tilde{E}$ ) como função do módulo de elasticidade do meio íntegro ( $E$ )

$$\tilde{E} = (1 - D)E. \quad (3.7)$$

Essa expressão é capaz de descrever a degradação de acordo com a abordagem fenomenológica, já que é obtida a partir de uma propriedade mecânica do material. A variável de dano isotrópico, por sua vez, tem sua evolução descrita por funções matemáticas diversas, que podem ter natureza linear, exponencial, polinomial, dentre outras. Tal diversidade proporciona, a partir de um processo de parametrização adequado, uma melhor representação do comportamento do meio material.

### 3.1.1 Formulação geral para modelos constitutivos

Para estabelecer uma formulação geral para os modelos de degradação elástica, Carol, Rizzi e Willam (1994) propôs uma unificação teórica a partir de uma superfície de carregamento, baseando-se na teoria clássica da plasticidade. Esse trabalho foi estendido por Penna (2011), que incorporou múltiplas funções de carregamento a essa formulação. Dando continuidade a esse estudo, Pereira (2020) ampliou a aplicação da formulação, generalizando a abordagem de múltiplas funções de carregamento para modelos baseados em dano tensorial.

Nesse contexto, apresenta-se o desenvolvimento da formulação geral para modelos de degradação elástica apresentada nos trabalhos supracitados. As variáveis acompanhadas por um ponto ( $\dot{\cdot}$ ) superior indicam a taxa de variação da respectiva grandeza no pseudo-tempo. No equacionamento apresentado as variáveis sobrepostas por uma barra são expressas no domínio das deformações. As demais variáveis são apresentadas no domínio das tensões.

Os modelos baseados em degradação elástica são caracterizados pela relação total estabelecida entre tensões e deformações

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.8a,b)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  as componentes do tensor de tensões,  $\varepsilon_{ij}$  as componentes do tensor de deformações,  $E_{ijkl}$  as componentes do tensor de rigidez secante e  $C_{ijkl}$  as componentes do tensor de flexibilidade secante.

A partir das equações 3.8 é possível determinar como os componentes de tensão e deformação variam

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (3.9a,b)$$

Cálculo que também pode ser desenvolvido via decomposição aditiva

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{inc} - \dot{\sigma}_{ij}^d = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{inc} - \dot{\varepsilon}_{ij}^d = C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d), \quad (3.10a,b)$$

em que:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl}, \quad \dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl}. \quad (3.11a,b)$$

As componentes do tensor de tensão incremental associadas à rigidez elástica são representadas por  $\dot{\sigma}_{ij}^{inc}$ , enquanto  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{inc}$  ilustra as componentes do tensor de deformação incremental. Já os termos  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$  e  $\dot{\sigma}_{kl}^d$  representam a variação da deformação e a variação da tensão devidas à degradação, respectivamente. As componentes do vetor de multiplicadores inelásticos

indicam a magnitude da degradação e são dadas por  $\dot{\lambda}_m$ , enquanto  $m_{mkl}$  e  $\bar{m}_{mkl}$  são as componentes do tensor das direções de degradação.

Quanto ao processo de carregamento, esse é conduzido pela equação:

$$F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - f(\mathbf{p}) \quad (3.12)$$

sendo  $\mathbf{p}$  as variáveis internas do processo de degradação e  $f(\mathbf{p})$  a representação do histórico de carregamento no material. Tais variáveis podem ser expressas segundo diferentes grandezas, dentre as quais as deformações devidas à degradação  $\varepsilon_{kl}^d$ .

É estabelecida, pois, a forma linearizada da condição de consistência para múltiplas funções de carregamento

$$\dot{F}_n = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \dot{p}_q = 0, \quad (3.13)$$

cujas parcelas são definidas por

$$\dot{p}_q = \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \dot{\varepsilon}_{kl}^d, \quad n_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \quad (3.14a,b)$$

e

$$H_{nm} = - \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \Big|_\sigma = - \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} m_{mkl}. \quad (3.15)$$

Considerando as equações 3.14 e 3.15, a equação 3.13 pode ser reescrita como

$$\dot{F}_n = n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (3.16)$$

As direções de propagação das deformações de degradação, as direções das funções de carregamento e os módulos inelásticos do material são dados, respectivamente, pelos tensores  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{H}$ .

Substituindo a equação 3.11a na equação 3.10a, obtém-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}). \quad (3.17)$$

Ao inserir o resultado da equação 3.17 na equação 3.16, tem-se que

$$n_{nij} E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}) - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (3.18)$$

A fim de se determinar o multiplicador inelástico ( $\dot{\lambda}_m$ ), esse termo é isolado, de modo que

$$\dot{\lambda}_m = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}, \quad (3.19)$$

Definido o multiplicador inelástico (equação 3.19), esse pode ser substituído na equação 3.11a, possibilitando que se encontre a variação da deformação de degradação

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}} m_{mkl}. \quad (3.20)$$

Ao inserir o resultado da equação 3.20 na equação 3.10a, define-se o seguinte formato

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (3.21)$$

em que  $E_{ijkl}^t$  são as componentes do operador tangente em termos de rigidez, escrito como

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} m_{mab} n_{ncd} E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}. \quad (3.22)$$

A formulação baseada em deformação é desenvolvida de forma análoga, uma vez que essas formulações são duais, ou seja, a partir de expressões matemáticas análogas obtém-se o mesmo resultado para um mesmo estado de tensão ou deformação.

As relações entre as variáveis das formulações baseadas em tensão e em deformação são

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl}, \quad \bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl}, \quad \bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}. \quad (3.23a,b,c)$$

Já o operador tangente é calculado como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl}. \quad (3.24)$$

Cabe ainda expressar as variações das tensões e deformações de degradação em termos da variação da rigidez ou da flexibilidade. Para tanto, utiliza-se a regra da degradação generalizada, uma vez que nem sempre há uma forma explícita para se determinar  $\dot{\sigma}_{kl}^d$  e  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$ . Nessas situações, admite-se que a forma de degradação do tensor de rigidez ou flexibilidade é uma hipótese do modelo.

Com a finalidade de se escrever as variações das tensões a partir das alterações observadas na rigidez, as equações 3.9 e 3.10 são confrontadas, conduzindo a

$$E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^d = -\dot{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d = -\dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (3.25a,b)$$

Sendo  $\mathbf{E} : \mathbf{C} = \mathbf{I}_4$ , ao se diferenciar essa relação, tem-se que

$$\dot{C}_{ijpq} E_{pqkl} + C_{ijpq} \dot{E}_{pqkl} = 0. \quad (3.26)$$

Que permite o cálculo dos termos  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{C}}$

$$\dot{E}_{ijkl} = -E_{ijpq}\dot{C}_{pqrs}E_{rskl}, \quad \dot{C}_{ijkl} = -C_{ijpq}\dot{E}_{pqrs}C_{rskl}. \quad (3.27a,b)$$

Por fim, substituindo a equação 3.27b na equação 3.25b, é possível escrever a variação das tensões de degradação em função da variação da rigidez

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (3.28)$$

Define-se ainda a variação do tensor de rigidez em termos da magnitude ( $\dot{\lambda}_m$ ) e das componentes do tensor das direções ( $\bar{M}_{mijkl}$ ).

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}, \quad (3.29)$$

Substituindo a equação 3.29 na equação 3.28, chega-se a

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (3.30)$$

Ao comparar a equação 3.30 com a equação 3.11b, tem-se

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.31)$$

que possibilita que a equação 3.24 seja reescrita como

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{H_{nm}} \bar{M}_{mijpq}\varepsilon_{pq}\bar{m}_{nkl}. \quad (3.32)$$

Contudo, deve-se ressaltar a dificuldade em descrever a degradação do tensor de rigidez ao admitir que todos os parâmetros do material variam com o processo de deterioração. Um modelo ortotrópico, por exemplo, requer leis de evolução para 21 parâmetros independentes. Tal inconveniente pode ser contornado por meio das variáveis de dano  $\mathcal{D}_*$ , responsáveis por quantificar a degradação do tensor de rigidez. O símbolo “\*” representa as diferentes dimensões que essas variáveis podem assumir: escalar, vetorial ou tensorial.

Assim, a rigidez é escrita em função das variáveis de dano e das constantes elásticas

$$E_{ijkl}^D = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_*), \quad (3.33)$$

relação que pode ser diferenciada, resultando em

$$\dot{E}_{ijkl}^D = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \bar{\mathcal{D}}_*} \dot{\bar{\mathcal{D}}}_*. \quad (3.34)$$

A regra de fluxo para o dano é escrita como

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \bar{\mathcal{M}}_{m*}, \quad (3.35)$$

sendo  $\dot{\lambda}_m$  o multiplicador inelástico ou multiplicador de dano, e  $\bar{\mathcal{M}}_{m*}$  a direção da taxa de mudança das variáveis de dano.

Substituindo as equações 3.29 e 3.35 na equação 3.34, obtém-se a variação do tensor de rigidez em termos das variáveis de dano,

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \bar{\mathcal{M}}_{m*}. \quad (3.36)$$

Desenvolvimento matemático análogo pode ser realizado para a variação da flexibilidade.

Conforme esta estrutura teórica unificada é possível representar diferentes modelos, sejam eles modelos baseados em tensão ou deformação, modelos de plasticidade, modelos de dano ou modelos baseados em degradação elástica em geral.

Dado que o objetivo deste estudo é a associação dos modelos distribuídos com modelos de trincas discretas, é necessária uma malha relativamente refinada para a reprodução adequada deste fenômeno de fraturamento. A fim de atender a tal necessidade e evitar resultados espúrios oriundos da localização de deformações, tem-se como alternativa associar essa formulação aos modelos de dano não local.

### 3.1.2 Modelos de dano não local

Observa-se, frequentemente, o fenômeno de amolecimento ou *softening* em meios parcialmente frágeis. Esse fenômeno é caracterizado pela perda de capacidade resistente do meio ocasionada pelos efeitos da degradação. A utilização de modelos constitutivos clássicos para descrever esse comportamento, que convertem a curva carga-deslocamento da estrutura diretamente em uma curva tensão-deformação do ponto material, todavia, pode conduzir à má formulação do problema de valor de contorno. Como resultado, obtém-se soluções dependentes do grau de refinamento da malha de elementos finitos, o que, em um caso limite de discretização, leva à localização de deformações numericamente induzidas. A concentração de deformações em uma região de volume infinitesimal implica no cálculo incorreto da energia dissipada, incorretamente considerada nula (FUINA, 2009).

Para ilustrar esse problema, admite-se o exemplo de uma tração pura, conforme indicado na Fig. 3.2. Observa-se, pois, que as trajetórias de equilíbrio obtidas diferem para cada uma das malhas adotadas, o que aponta para a ineficiência do modelo numérico. Essa falta

de acurácia resulta de alguma inconsistência do modelo, de modo que as deformações, que deveriam ser constantes, passem a se concentrar em uma dada região da malha. Enquanto nessa pequena região o material entra em regime de carregamento com degradação, no restante da malha ocorre descarregamento. Para malhas mais discretizadas, o fenômeno de localização é acentuado, uma vez que a razão entre as dimensões das regiões carregadas e descarregadas é reduzida.

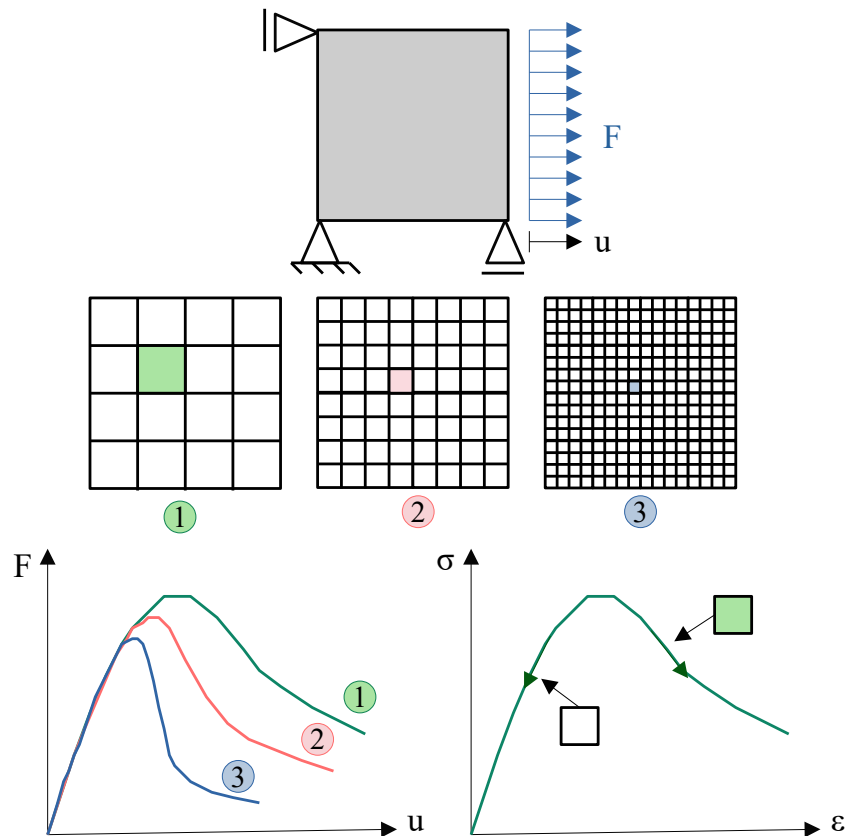


Figura 3.2 – Localização de deformações numericamente induzida (adaptado de Fuina (2009)).

Murakami (2012) apresenta a teoria de dano não local como uma das estratégias mais eficientes para transpor obstáculos referentes à localização de deformação. Essa abordagem baseia-se na consideração que as variáveis do problema são grandezas não locais, o que significa que os valores de cada ponto do domínio sofrem interferência da sua vizinhança. Desse modo, caso um ponto apresente resultados pouco representativos devido à instabilidade numérica, a formulação não local é capaz de amenizar essa resposta ao incluir, a partir de uma média ponderada, os efeitos da vizinhança isenta de instabilidades.

Todavia, como apontam Bažant e Pijaudier-Cabot (1988), uma formulação que trate todas as variáveis de estado como não locais torna-se demasiadamente complexa. Como alternativa, Pijaudier-Cabot e Bažant (1987) sugerem que a teoria não local tem sua aplicação otimizada quando restrita aos domínios vinculados ao comportamento não linear do material. Assim, a variável definida como não local deve ser capaz de representar o

processo de degradação do meio, apresentando comportamento crescente no decorrer de toda a análise. Variáveis que atendem a tal requisito são, por exemplo, a variável de dano e a variável histórica do modelo constitutivo. O dano tem valor nulo até que se atinja a deformação elástica limite, quando cresce gradualmente até 1,0. Já a variável histórica armazena o valor máximo atingido por uma dada grandeza, como a deformação equivalente, durante a análise do modelo, assumindo valor sempre crescente. Estabelecida a variável não local, essa pode ser calculada por

$$\tilde{\epsilon}_{nl} = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|) \tilde{\epsilon}(\mathbf{s}) dV = \int_V \alpha'(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{s}) dV, \quad (3.37)$$

em que  $\tilde{\epsilon}_{nl}$  é a variável não local;  $\tilde{\epsilon}$  é a variável local;  $V_r(x) = \int_V \alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|) dV$  representa o volume do sólido de revolução da função de distribuição  $\alpha$ ;  $\mathbf{x}$  é o vetor de coordenadas do ponto em análise;  $\mathbf{s}$  é o vetor de coordenadas dos pontos pertencentes ao domínio de influência do ponto em análise;  $\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|$  é a distância entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{s}$ ; e  $\alpha'(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|)}{V_r(x)}$ .

A interpretação gráfica da formulação não local é apresentada na Fig. 3.3. A variável  $\ell$ , denominada comprimento interno da distribuição ou domínio da distribuição, é responsável por limitar a vizinhança cujos pontos exercem influência sobre o ponto de referência em análise.

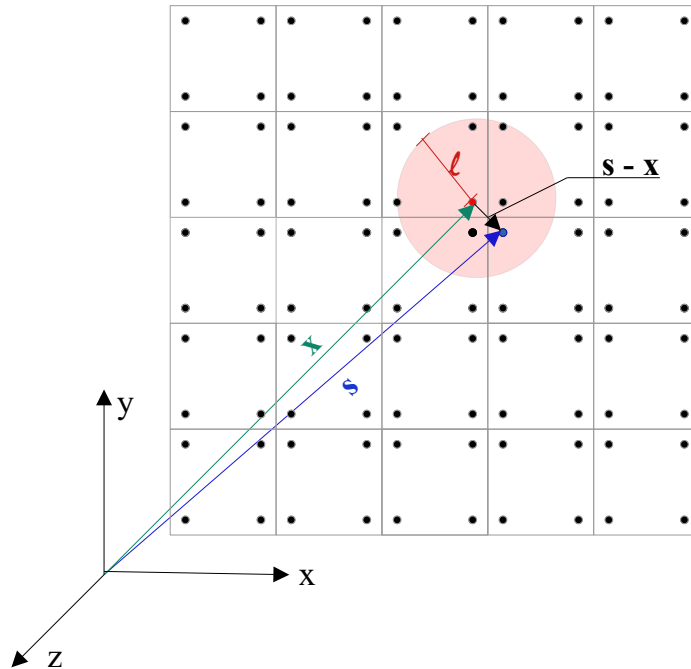


Figura 3.3 – Representação da formulação não local (adaptado de Souza (2016)).

Quanto à função de distribuição, também chamada de função de ponderação ou função peso, sua responsabilidade é determinar o peso de cada ponto do domínio de influência sobre a variável não local. Curvas de diversas naturezas podem ser utilizadas para esse

fim, dentre as quais a distribuição normal ou Gaussiana, a distribuição seno, a distribuição triangular ou linear, a distribuição constante e a distribuição degraus. A Fig. 3.4 ilustra as curvas das distribuições citadas, enquanto a Tab. 3.1 dispõe as expressões que descrevem essas curvas.

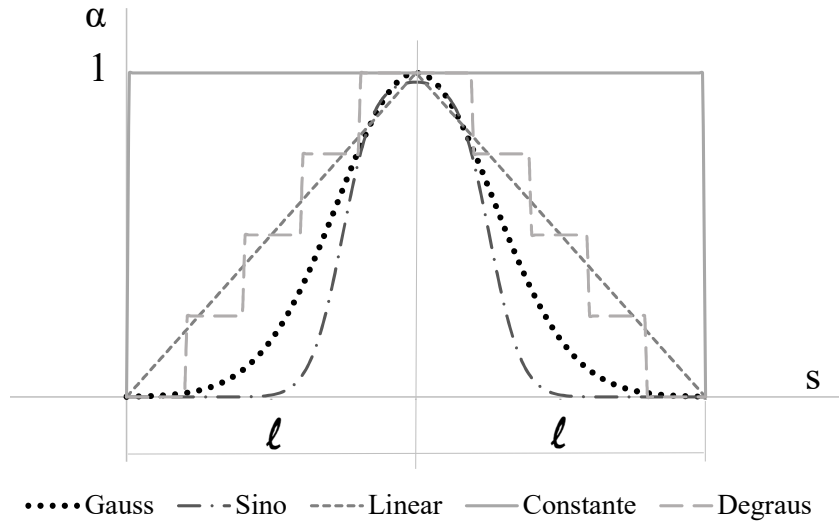


Figura 3.4 – Funções de distribuição - representação gráfica.

Tabela 3.1 – Funções de distribuição e suas respectivas expressões.

Função	Expressão para $x = \ \mathbf{s} - \mathbf{x}\ $
Gauss	$\alpha(x) = \exp\left(-k \frac{x^2}{\ell^2}\right);$ a variável $k$ é responsável pelo formato da curva
Sino	$\alpha(x) = k \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)^2;$ sendo $k$ o valor responsável pelo formato da curva
Linear	$\alpha(x) = 1 - \frac{x}{\ell};$
Constante	$\alpha(x) = 1;$ para $x \leq \ell$
Degraus	comportamento similar ao constante, todavia o domínio é dividido segundo uma quantidade predefinida de pesos

Reescrevendo a formulação não local em um formato compatível à análise via método dos elementos finitos, assume-se que as coordenadas dos pontos de Gauss são representadas por  $\mathbf{x}_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, N_{PG}$ , sendo  $N_{PG}$  o número total de pontos de Gauss do modelo.

Utilizando essa nomenclatura, a equação 3.37 é substituída pelo somatório dado por

$$\bar{\epsilon}_k = \sum_{l=1}^{N_{PG}} (w_l J_l \alpha_{kl} \epsilon_l), \quad (3.38)$$

em que  $w_l$  é o peso atribuído ao ponto de Gauss  $l$ ,  $J_l$  é o jacobiano do elemento finito avaliado nesse ponto e  $\alpha_{kl}$  é o peso da interação não local entre os pontos  $k$  e  $l$ , calculado como

$$\alpha_{kl} = \frac{\alpha_0 \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|}{\sum_{m=1}^{N_{PG}} (w_m J_m \alpha_0 (\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\|))}. \quad (3.39)$$

Cabe enfatizar que  $\alpha_{kl}$  só é não nulo para os pontos cuja distância  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|$  é igual ou menor que o raio não local  $\ell$ .

Ressalta-se que a estratégia aqui descrita para desenvolvimento da teoria não local é a formulação integral, apresentada por Jirásek (2004). Contudo, há outras abordagens disponíveis para tratar a localização de deformações, como a formulação de gradientes avançados (DE BORST; GUTIÉRREZ, 1999) e os contínuos generalizados (DE BORST et al., 1993; VARDOULAKIS; MÜHLHAUS; PAMIN, 1987; FUINA, 2009; GORI, 2018; SILVA, 2019).

## 3.2 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura emergiu com o trabalho de Griffith (1921), que formulou um critério de energia para explicar o crescimento de trincas e fissuras em materiais frágeis, fundamentando-se nas Leis da Termodinâmica. Dado seu caráter energético, apresenta-se a seguir a teoria de Griffith segundo a abordagem variacional, além de conceitos relevantes a esse campo de estudo, como os modos de fraturamento, a concentração de tensões na ponta da trinca e os fenômenos de nucleação e propagação de fissuras.

### 3.2.1 Abordagem variacional da fratura

A teoria de Griffith descreve o problema da fratura conforme a Fig. 3.5, sendo  $\Omega$  o domínio de análise;  $\partial\Omega$  a borda externa desse domínio, dividida em trecho com deslocamento prescrito ( $\partial\Omega_u$ ) e trecho com carga prescrita ( $\partial\Omega_t$ ), e  $\Gamma$  a superfície da trinca.

Ao adotar a abordagem variacional para tratar o processo de fraturamento, procura-se a minimização de primeira ordem do funcional de energia total ( $E_{tot}$ ), que é função do campo de deslocamentos ( $\bar{u}$ ) e da superfície da trinca  $\Gamma$ , dado por

$$E_{tot}(\bar{u}, \Gamma) = \Psi_s + \Psi_c - P_{ext}, \quad (3.40)$$

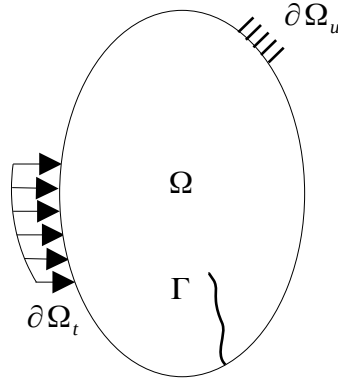


Figura 3.5 – Representação de um corpo sólido com manifestação de uma trinca.

em que se tem os funcionais  $\Psi_s$  da energia de deformação,  $\Psi_c$  referente à energia de superfície da trinca e  $P_{ext}$  relativo ao potencial de energia devido às forças externas. Tais parcelas são definidas como

$$\Psi_s(\bar{u}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \psi(\underline{\varepsilon}(\bar{u}), \Gamma) \, d\mathcal{V} \quad (3.41a)$$

$$\Psi_c(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_c \, d\mathcal{A} \quad (3.41b)$$

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \bar{b} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega} \bar{t} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{A} \quad (3.41c)$$

sendo  $\psi$  a densidade de energia de deformação;  $\underline{\varepsilon}$  o tensor de deformações;  $G_c$  a taxa crítica de energia dissipada com a abertura da trinca;  $\bar{b}$ ,  $\bar{t}$  e  $\bar{u}$  os vetores de forças de corpo, forças de superfície e deslocamentos, respectivamente. A descrição completa desse funcional pode ser consultada em Bourdin, Fracfort e Marigo (2008).

O problema da fratura segundo a formulação variacional deve atender às condições:

1. *Condição de irreversibilidade:* com o decorrer do tempo a trinca só pode crescer, não havendo possibilidade de regeneração do meio material;

$$\dot{\Gamma}(t) \geq 0. \quad (3.42)$$

2. *Condição estacionária unilateral:* considera-se que o fenômeno da fratura sempre consome energia. Assim, o par  $(\bar{u}(t), \Gamma(t))$  que caracteriza um determinado estado da fratura deve ser um ponto crítico do funcional de energia  $(E_{tot}(\bar{u}, \Gamma))$ :

$$\delta E_{tot}(\bar{u}, \Gamma) \geq 0. \quad (3.43)$$

3. *Condição de conservação de energia:* o funcional de energia  $E_{tot}$  deve satisfazer o balanço energético à medida que a trinca se propaga com o tempo:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n}) \cdot \dot{\bar{u}} \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega} \dot{\bar{b}} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} \dot{\bar{t}} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{A}. \quad (3.44)$$

A prova da equação 3.44 é apresentada no apêndice B.1.

Ao se aplicar a condição estacionária unilateral (equação 3.43) à equação 3.40 encontra-se, conforme indicado no apêndice B.2, a seguinte relação

$$\delta E_{tot} = \int_{\Gamma} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n}) \cdot \delta \bar{u} \, d\mathcal{A} + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n} - \bar{t}) \cdot \delta \bar{u} \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\nabla \underline{\sigma} + \bar{b}) \cdot \delta \bar{u} \, d\mathcal{V} + \left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Gamma} + G_c \right) \delta \Gamma \geq 0. \quad (3.45)$$

Considerando que  $\delta \bar{u}$  pode assumir valores arbitrários, deve-se atender às seguintes expressões:

$$\nabla \underline{\sigma} + \bar{b} = \bar{0} \text{ em } \Omega \setminus \Gamma; \quad (3.46a)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \bar{n} - \bar{t} = \bar{0} \text{ em } \partial\Omega_t; \quad (3.46b)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{0} \text{ em } \Gamma. \quad (3.46c)$$

Sendo a equação 3.46a a condição de equilíbrio de um corpo contínuo, enquanto a equação 3.46b representa a condição natural e 3.46c uma condição livre de tensão na superfície da trinca.

A partir das equações 3.46, pode-se reescrever a equação 3.45 como:

$$\delta E_{tot} = (-\mathcal{G} + G_c) \delta \Gamma \geq 0, \quad \text{em que } \mathcal{G} = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \Gamma}. \quad (3.47)$$

É sabido que o termo  $\delta \Gamma$  é positivo, uma vez que a trinca sempre cresce. Portanto, a fim de atender à desigualdade apresentada na equação 3.47, tem-se o critério de Griffith, dado por

$$-\mathcal{G} + G_c \geq 0 \Rightarrow \mathcal{G} - G_c \leq 0, \quad (3.48)$$

Esse critério anuncia que a variação da energia de deformação com relação ao tamanho da trinca ( $\mathcal{G}$ ) sempre será menor ou igual a energia de fratura do material ( $G_c$ ).

Por fim, conforme exposto no apêndice B.3, entende-se que a trinca se propaga quando se atinge a igualdade  $\mathcal{G} = G_c$ , uma vez que

$$(\mathcal{G} - G_c) \dot{\Gamma} = 0. \quad (3.49)$$

Resume-se, então, as três condições do critério de Griffith, também conhecidas como condições de Karush-Kuhnn-Tucker:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \dot{\Gamma} \geq 0 \quad (\text{O material nunca se regenera}); \quad (3.50a)$$

$$\mathcal{G} - G_c \leq 0 \quad (G_c \text{ é o valor limite}); \quad (3.50b)$$

$$(\mathcal{G} - G_c) \dot{\Gamma} = 0 \quad (\text{A trinca se propaga quando } \mathcal{G} = G_c). \quad (3.50c)$$

### 3.2.2 Modos de fraturamento

Por hipótese, as trincas se manifestam nos sólidos de três formas distintas, como ilustrado na Fig. 3.6. Quando o carregamento principal é aplicado na direção normal ao plano de fratura, observa-se o Modo I de fratura (modo de abertura). Nesse caso, os deslocamentos das superfícies da trinca são perpendiculares ao plano da trinca. O Modo II (modo cisalhante), ocorre quando as superfícies da trinca se deslocam na direção do plano de fratura, na direção perpendicular à face carregada. Por fim, o Modo III (modo de rasgamento) é caracterizado por deslocamentos no plano de fratura, na direção normal ao comprimento da trinca. Casos gerais de fraturamento ocorrem pela superposição desses modos elementares.

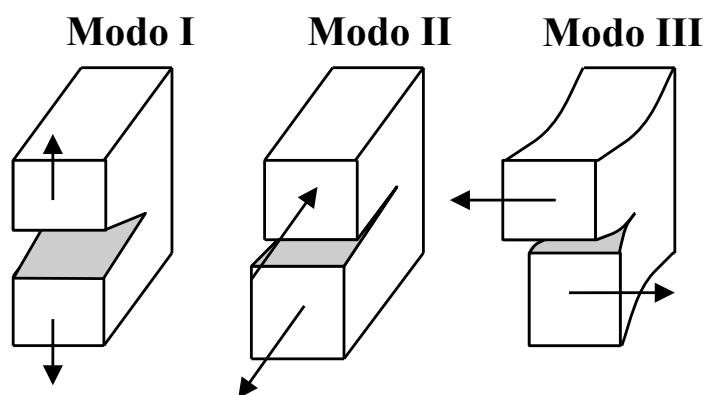


Figura 3.6 – Modos de fraturamento.

Segundo Broek (1982), o Modo I de fraturamento é o mais comum dentre os modos elementares de abertura trinca e, mesmo para padrões combinados de fratura, há uma propensão de que esses se reduzam ao primeiro modo. Por esse motivo, em geral, e também no presente trabalho, a maioria dos problemas relacionados ao fenômeno da fratura pode ser tratada puramente como Modo I.

### 3.2.3 Estado de tensão na ponta da trinca

A presença de discontinuidades em um dado elemento estrutural conduz a concentrações de tensões, ou seja, regiões localizadas do campo de tensões passam a apresentar tensões consideravelmente superiores aos valores médios. Nesse contexto, torna-se essencial a análise de tensões e deformações nas pontas de trincas para a compreensão do processo de fraturamento.

Anderson (2017) apresenta esquematicamente um elemento infinitesimal próximo à ponta da trinca acompanhado pelo seu estado plano de tensões (Fig. 3.7).

Cada um dos componentes de tensão é proporcional à constante  $K_I$ , denominada fator de intensidade de tensão. Considerando o Modo I de fratura, com  $\theta = 0$ , e meio material

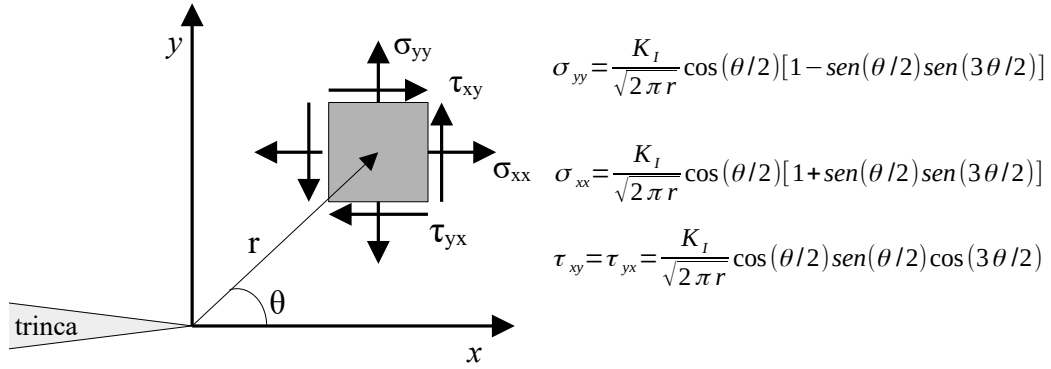


Figura 3.7 – Tensões próximas à ponta da trinca (adaptado de Anderson (2017)).

elástico linear, as tensões principais em  $x$  e  $y$  são escritas como

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (3.51)$$

Observando a equação 3.51, é possível identificar uma relação de proporcionalidade entre as tensões e  $1/\sqrt{r}$ , sendo  $r$  a distância do centro do elemento à ponta da trinca. Consequentemente, quando  $r \rightarrow 0$ , os componentes de tensão se aproximam do infinito, o que conduz a uma região de singularidade na ponta da trinca. Todavia, na prática, o valor da tensão é limitado pela resistência do material. Assim, torna-se um desafio avaliar o campo de tensões na frente de trinca.

Para contornar essa adversidade, tem-se a alternativa de avaliar o processo de fraturamento segundo o fator de intensidade de tensão, que assume um valor crítico ( $K_{Ic}$ ) quando ocorre abertura e propagação de fissuras. Esse valor é calculado a partir da energia de fratura do material, expressa por

$$K_{Ic} = \frac{G_c}{E}, \quad \text{para estado plano de tensão}, \quad (3.52)$$

e

$$K_{Ic} = \frac{(1 - \nu^2)G_c}{E}, \quad \text{para estado plano de deformação}; \quad (3.53)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

O fator de intensidade de tensão crítico é uma propriedade material, também denominada tenacidade à fratura, com valores disponíveis na literatura.

Perez (2017) enfatiza que nessa região que constitui a vizinhança da ponta da trinca são observadas deformações inelásticas, enquanto o material que envolve essa área permanece em regime elástico linear. Como resultado, tem-se a formação de uma zona inelástica, contendo microdefeitos e microvazios. À medida que o tamanho dessa zona evolui, a

mecânica da fratura linear elástica passa a ser um método de pouca acurácia para prever o comportamento material de tal região. Uma possível solução é substituir o comprimento real da trinca por um comprimento fictício superior ao real, capaz de envolver a zona inelástica. Aproximações para o comprimento fictício são propostas por Irwin (1957) e Dugdale (1960). Irwin (1957) destaca que a zona inelástica deve ter raio consideravelmente inferior ao tamanho da trinca original. Já os experimentos realizados por Dugdale (1960) apontaram para zonas inelásticas de dimensões próximas a  $3,0 \times 10^{-3}$  polegadas, correspondentes a  $7,62 \times 10^{-2}$  mm.

### 3.2.4 Nucleação e propagação

A mecânica da fratura lida essencialmente com o processo de ruptura associado ao surgimento e crescimento de trincas. Para identificar se haverá ou não prolongamento de um segmento de trinca, são determinados critérios de fraturamento dentre os quais se destacam quatro no campo da MFLE:

1. Critério da tensão principal máxima;
2. Critério da mínima densidade de energia de deformação;
3. Critério da máxima taxa de energia dissipada;
4. Critério do  $K_{II}$  nulo, sendo  $K_{II}$  o fator de intensidade de tensão do Modo II de fratura.

Além de definir se haverá ou não ocorrência de fratura, esses critérios também são responsáveis por estabelecer em que direção a trinca se propaga.

Rabczuk (2013) ressalta que melhores resultados para simulações de trincas são obtidos quando suas trajetórias são previamente conhecidas. O autor aponta ainda que a MFLE pode lidar apenas com a propagação de trincas, sendo incapaz de prever casos de nucleação e ramificação de trincas.

Apesar da diversidade de trabalhos dedicados à fratura, a maioria deles foca na propagação de uma única trinca, enquanto poucos são os que se dedicam à nucleação, à coalescência e à ramificação de trincas. Esses fenômenos são, em geral, negligenciados dada a dificuldade de se prever padrões complexos de fratura, cuja iniciação depende de fatores como a microestrutura do material e as condições de carregamento.

## 3.3 MODELOS DE *PHASE-FIELD* - MPF

Com o propósito de superar as limitações da mecânica da fratura clássica, Fracfort e Marigo (1998) propuseram uma formulação alternativa para a fratura frágil baseada em

conceitos de minimização da energia. Bourdin, Fracfort e Marigo (2000) deram continuidade a esse estudo adicionando ao campo de deslocamentos do funcional de energia um campo secundário de regularização, cuja variável recebeu posteriormente a denominação *phase-field*. Nesse contexto, esta seção apresenta uma visão geral da abordagem da fratura segundo a formulação variacional do *phase-field*. Prossegue-se, pois, para a descrição dos modelos clássicos de *phase-field* e dos solucionadores necessários para resolver problemas dessa natureza.

### 3.3.1 Introdução à teoria do *phase-field*

Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b) apresentam o problema da fratura em uma barra tracionada de comprimento infinito. A representação de uma trinca na posição  $x = 0$  por uma variável de *phase-field*  $\phi(x) \in [0, 1]$ , sendo  $\phi = 0$  correspondente ao estado íntegro do material e  $\phi = 1$  associado ao estado completamente degradado, pode ser realizada segundo a abordagem concentrada ou de forma difusa, como mostra a Fig. 3.8.

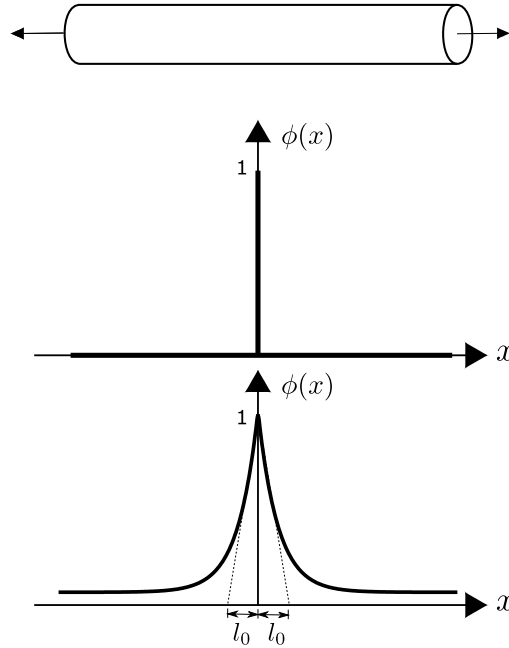


Figura 3.8 – Modelagem discreta e difusa de uma trinca (LEÃO, 2021).

Ao espalhar a trinca ao longo do domínio  $[-l_0, +l_0]$ , em que  $l_0$  é o comprimento intrínseco, tem-se uma representação regularizada da tipologia da trinca. A distribuição do *phase-field*, por sua vez, é dada pela função exponencial

$$\phi(x) = e^{-|x|/l_0}. \quad (3.54)$$

Já o funcional de energia cuja minimização conduz à equação diferencial com solução dada pela equação 3.54 é

$$I(\phi, \phi') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^2 + l_0^2 (\phi')^2 \, dV. \quad (3.55)$$

É possível, ainda, escrever esse funcional a partir de sua relação com a superfície da trinca  $\Gamma$

$$I(\phi, \phi') = l_0 \Gamma. \quad (3.56)$$

Consequentemente, pode-se escrever o funcional de energia  $\Gamma_l$  que expressa uma área equivalente à trinca discreta

$$\Gamma_l = \frac{1}{l_0} I(\phi, \phi') = \int_{\Omega} \gamma(\phi, \phi') \, d\mathcal{V}, \quad \text{com} \quad \gamma(\phi, \phi') = \frac{1}{2l_0} \phi^2 + \frac{l_0}{2} (\phi')^2, \quad (3.57)$$

em que  $\gamma$  é denominada densidade de superfície da trinca.

A Fig. 3.9 traz a representação dessa região degradada do corpo,  $\Gamma_l \in \Omega$ , bem como a borda  $\partial\Gamma_l$  que limita essa área.

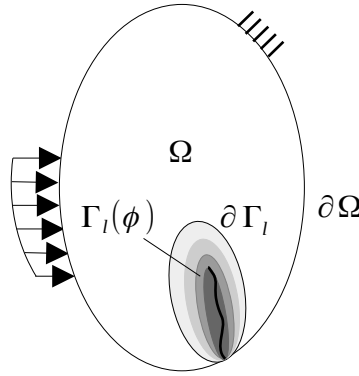


Figura 3.9 – Representação de um corpo sólido com manifestação de uma trinca via *phase-field*.

Tal formulação pode ser estendida ao caso tridimensional, conforme

$$\Gamma_l = \frac{1}{l_0} I(\phi, \nabla\phi) = \int_{\Omega} \gamma(\phi, \nabla\phi) \, d\mathcal{V} \quad \text{e} \quad \gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{2l_0} \phi^2 + \frac{l_0}{2} |\nabla\phi|^2. \quad (3.58)$$

### 3.3.2 Formulação forte dos MPF

O desenvolvimento da formulação forte do *phase-field* apresentado nesta seção se fundamenta no trabalho de Wu et al. (2019) e nas deduções de Leão (2021), cujas leituras são recomendadas para mais detalhes. Partindo da representação suavizada da trinca discutida na seção anterior, é possível reescrever os funcionais de energia de superfície da trinca ( $\Psi_c$ ) e energia de deformação ( $\Psi_s$ ), apresentados previamente pelas equações 3.41a e 3.41b, respectivamente.

$$\Psi_c = \int_{\Gamma_l} G_c \gamma(\phi, \nabla\phi) \, d\mathcal{V}; \quad (3.59a)$$

$$\Psi_s(\bar{u}, \phi) = \int_{\Omega} \psi(\varepsilon(\bar{u}), \phi) \, d\mathcal{V}. \quad (3.59b)$$

Assim, o funcional de energia total é expresso por

$$E_{tot} = \int_{\Omega} \psi(\underline{\varepsilon}(\bar{u}), \phi) \, dV + \int_{\Gamma_l} G_c \gamma(\phi, \nabla \phi) \, dV - \int_{\Omega} \bar{b} \cdot \bar{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \bar{t} \cdot \bar{u} \, dA. \quad (3.60)$$

Para determinação das variáveis de estado, deslocamentos e *phase-field*, deve-se resolver o problema de minimização, obtendo a primeira variação do funcional de energia

$$\begin{aligned} \delta E_{tot} = & - \int_{\Omega} (\nabla \underline{\sigma} + \bar{b}) \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n} - \bar{t}) \cdot \delta \bar{u} \, dA + \\ & + \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + G_c \delta_{\phi} \gamma \right] \delta \phi \, dV + \int_{\partial\mathcal{B}} G_c \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \phi} \cdot \bar{n} \right) \delta \phi \, dA \geq 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

sendo

$$\delta_{\phi} \gamma = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \nabla \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \phi} \right). \quad (3.62)$$

Dada a condição estacionária unilateral, as relações a seguir devem ser atendidas

$$\nabla \underline{\sigma} + \bar{b} = \bar{0} \text{ em } \Omega, \quad (3.63a)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \bar{n} - \bar{t} = \bar{0} \text{ em } \partial\Omega_t. \quad (3.63b)$$

Define-se, pois, a força motriz da propagação de trinca ( $Y$ ), dada por

$$Y = - \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad (3.64)$$

bem como as condições

$$\begin{cases} Y - G_c \delta_{\phi} \gamma = 0, \text{ para } \dot{\phi} > 0 \\ Y - G_c \delta_{\phi} \gamma < 0, \text{ para } \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \phi} \cdot \bar{n} = 0 \text{ em } \partial\Gamma_l. \quad (3.66)$$

Destaca-se que a força motriz de propagação da trinca é o conjugado energético do *phase-field*, podendo ser escrita em termos da densidade de energia de deformação  $\psi(\underline{\varepsilon}, \phi)$ . Admitindo que  $\psi$  dependa da função de degradação energética  $g(\phi)$ , tem-se que

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \phi) = \psi(\underline{\varepsilon}, g(\phi)); \quad (3.67a)$$

$$Y = - \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = - \frac{\partial \psi}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \phi}. \quad (3.67b)$$

Estabelecendo a força motriz efetiva de propagação da trinca ( $\bar{Y}$ ) como

$$\bar{Y} = \frac{\partial \psi}{\partial g} \quad (3.68)$$

e avaliando as equações 3.67b e 3.68, obtém-se a seguinte relação entre  $Y$  e  $\bar{Y}$

$$Y = -g'(\phi)\bar{Y}. \quad (3.69)$$

Resta definir as condições de Karush-Kuhn-Tucker para  $f(Y, \phi) = Y - G_c \delta_\phi \gamma$ :

$$\dot{\phi} \geq 0, \quad f(Y, \phi) \leq 0, \quad \dot{\phi} f(Y, \phi) = 0. \quad (3.70)$$

Fazendo uma analogia com a teoria de Griffith,  $G_c \delta_\phi \gamma$  se relaciona ao limite de energia a partir do qual a trinca se propaga, enquanto  $Y$  se refere à quantidade de energia disponível no sistema.

### 3.3.3 Função de degradação energética

A função de degradação energética  $g(\phi)$  atua determinando como o meio material responde à evolução do processo de fraturamento mensurado através da variável de *phase-field*. Essa função, segundo Wu et al. (2019), deve satisfazer as seguintes condições:

1. o material totalmente íntegro é representado por  $g(0) = 1$ ;
2. o material completamente degradado apresenta  $g(1) = 0$ ;
3. a função  $g(\phi)$  é monotonicamente decrescente, ou seja,  $g'(\phi) = \partial g / \partial \phi < 0$ ;
4. não há variação abrupta na região onde o material encontra-se totalmente fraturado, isto é,  $g'(1) = 0$ .

A partir das condições 1 e 2 é possível verificar uma relação inversa entre a evolução da variável de *phase-field* e o valor assumido por  $g(\phi)$ .

Diferentes propostas de funções de degradação energética são encontradas na literatura, destacando-se as funções de natureza polinomial e racional. Essas últimas são comumente aplicadas a problemas de fratura coesiva. O presente estudo irá se ater à função polinomial quadrática proposta por Bourdin, Fracfort e Marigo (2000)

$$g(\phi) = (1 - \phi^2). \quad (3.71)$$

A opção por esse formato de  $g(\phi)$  é justificada pela obtenção de um subproblema linear simples para cálculo da variável de *phase-field*.

### 3.3.4 Função geométrica da trinca

A função de densidade de superfície da trinca  $\gamma(\phi; \nabla \phi)$  dada pela equação 3.58 é apenas uma das diferentes formas de se descrever as superfícies de trinca em um corpo. Wu

(2017), por sua vez, propôs um formato genérico de representação da função de densidade de superfície de trinca, dado por

$$\gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{C_0} \left[ \frac{1}{l_0} \alpha(\phi) + l_0 |\nabla\phi|^2 \right] \quad (3.72a)$$

$$\delta_\phi \gamma = \frac{1}{C_0} \left[ \frac{1}{l_0} \alpha'(\phi) - 2l_0 \Delta\phi \right] \quad (3.72b)$$

sendo  $\alpha(\phi)$  a função geométrica da trinca e  $C_0 = 4 \int_0^1 \alpha^{1/2}(\phi) d\phi$  o parâmetro de escala.

A função geométrica da trinca é responsável por definir como o *phase-field* se distribui, devendo atender aos seguintes requisitos:

- $\alpha(\phi) \in [0, 1]$ ;
- $\alpha(0) = 0$ ;
- $\alpha(1) = 1$ .

Embora exista uma variedade de expressões para  $\alpha(\phi)$ , neste trabalho será adotada a função geométrica quadrática da trinca

$$\alpha(\phi) = \phi^2, \quad (3.73)$$

que relaciona-se à distribuição exponencial do *phase-field* apresentada na equação 3.54. A opção por essa função  $\alpha(\phi)$  deve-se ao solucionador que será adotado neste estudo, o solucionador baseado em variável histórica, cuja condição de irreversibilidade requer que se empregue a equação 3.73. Informações sobre os solucionadores empregados em análises de *phase-field* são apresentadas na seção 3.3.8.

### 3.3.5 Densidade de energia de deformação

Em problemas de *phase-field*, a densidade de energia de deformação é escrita em termos da função de degradação energética ( $g(\phi)$ ) e da função de densidade de energia de deformação inicial ( $\psi_0(\underline{\varepsilon})$ ), que caracteriza o material linear elástico

$$\psi_0(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \sigma : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \hat{\mathbf{E}}_0 : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \lambda_0 (\text{tr}(\underline{\varepsilon}))^2 + \mu_0 \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}, \quad (3.74)$$

sendo  $\lambda_0$  e  $\mu_0$  as constantes de Lamé. A função ( $\text{tr}$ ) se refere ao traço de um dado tensor.

Dado o comportamento distinto do concreto para esforços de tração e compressão, é apropriada uma formulação capaz de distinguir essas solicitações para prevenir a formação de trincas em regiões comprimidas. Assim, apenas a parcela tracionada da densidade de energia de deformação está sujeita aos efeitos da degradação:

$$\psi(\underline{\varepsilon}) = g(\phi) \psi_0^+(\underline{\varepsilon}) + \psi_0^-(\underline{\varepsilon}). \quad (3.75)$$

Os termos  $\psi_0^+$  e  $\psi_0^-$  representam, respectivamente, as parcelas associadas às deformações de tração e às deformações de compressão. A determinação desses termos depende do modelo constitutivo adotado.

Da equação 3.75 é possível definir o campo de tensões  $\underline{\sigma}$ , o tensor constitutivo  $\hat{\mathbf{C}}$  e a força motriz  $Y$  que rege a evolução do *phase-field*:

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = g(\phi) \frac{\partial \psi_0^+(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi_0^-(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}}; \quad (3.76a)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}} = g(\phi) \frac{\partial^2 \psi_0^+(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}^2} + \frac{\partial^2 \psi_0^-(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}^2}; \quad (3.76b)$$

$$Y = G_c \delta_\phi \gamma = -g'(\phi) \bar{Y}, \quad \bar{Y} = \frac{\partial \psi}{\partial g} = \psi_0^+(\underline{\varepsilon}). \quad (3.76c)$$

### 3.3.6 Formulação fraca dos MPF

A partir da formulação forte dos MPF descrita na seção 3.3.2, obtém-se a formulação fraca

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \delta \underline{\varepsilon} \, dV = \delta P_{ext} \quad (3.77a)$$

$$\int_{\mathcal{B}} [g'(\phi) \bar{Y} \delta \phi + G_c \delta \gamma] \, dV \geq 0 \quad (3.77b)$$

em que:

$$\delta \gamma = \frac{1}{C_0} \left[ \frac{1}{l_0} \alpha'(\phi) \delta \phi + 2l_0 \nabla \phi \cdot \nabla \delta \phi \right] \quad (3.78)$$

A solução das equações 3.77a e 3.77b permite que o problema da fratura seja resolvido em termos de  $\bar{u}$ ,  $\phi$  e das condições de contorno. As condições de contorno para o campo de deslocamento são as mesmas dos problemas da elasticidade clássica, enquanto as condições de contorno do *phase-field* incluem a prescrição dessa variável, que deve ser  $\phi = 1$  para trincas pré-definidas e  $\phi = 0$  para regiões onde se quer prevenir o surgimento de fissuras. A adoção de valores elevados de  $G_c$  também é uma alternativa na prevenção de fraturas em determinadas áreas.

Para garantir o atendimento à condição de irreversibilidade do *phase-field* e a limitação dos valores dessa variável ao intervalo de  $[0, 1]$ , a abordagem aqui adotada é o método de solução baseado em variável histórica proposto por Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b). Tal método baseia-se na definição de uma variável histórica  $\mathcal{H}$ , cujo valor é estabelecido como o maior valor assumido pela força motriz efetiva  $\bar{Y}$  ao longo do processo de análise. Novamente é ressaltada a necessidade de se empregar a função geométrica da trinca  $\alpha(\phi) = \phi^2$  em combinação com o método de solução.

### 3.3.7 Análise via elementos finitos para MPF

Compreendida a formulação que sustenta a teoria do *phase-field*, cabe adaptá-la ao Método dos Elementos Finitos. Para tanto, associa-se essa teoria à forma como são tratados os campos de deslocamento e deformação, dados por

$$\bar{u}(\bar{x}) = [\mathbf{N}]_I^u \bar{d}_I \quad (3.79a)$$

$$\bar{\varepsilon}(\bar{x}) = [\mathbf{B}]_I^u \bar{d}_I \quad (3.79b)$$

em que  $\bar{d}_I$  é o vetor de deslocamentos nodais para cada nó  $I$  da malha de elementos finitos. Já as matrizes  $[\mathbf{N}]_I^u$  e  $[\mathbf{B}]_I^u$  são definidas para o caso plano, por exemplo, como segue:

$$[\mathbf{N}]_I^u = \begin{bmatrix} N_I^u & 0 \\ 0 & N_I^u \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}]_I^u = \begin{bmatrix} N_{I,x}^u & 0 \\ 0 & N_{I,y}^u \\ N_{I,y}^u & N_{I,x}^u \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

De forma análoga, pode-se interpolar os valores de *phase-field*

$$\phi(\bar{x}) = [\mathbf{N}]_I^\phi \bar{a}_I \quad (3.81a)$$

$$\nabla \phi(\bar{x}) = [\mathbf{B}]_I^\phi \bar{a}_I \quad (3.81b)$$

sendo  $\bar{a}_I$  o vetor nodal de *phase-field*, enquanto as matrizes são escritas como:

$$[\mathbf{N}]_I^\phi = [N_I^\phi]; \quad [\mathbf{B}]_I^\phi = \begin{bmatrix} N_{I,x}^\phi \\ N_{I,y}^\phi \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Neste trabalho, adota-se as mesmas funções de interpolação tanto para o campo de deslocamentos quanto para o campo de *phase-field*, o que implica em  $[\mathbf{N}]_I^u = [\mathbf{N}]_I^\phi$  e  $[\mathbf{B}]_I^u = [\mathbf{B}]_I^\phi$ .

Quanto à matriz de rigidez do problema, essa pode ser desmembrada em quatro parcelas

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{uu}] & [\mathbf{K}^{u\phi}] \\ [\mathbf{K}^{\phi u}] & [\mathbf{K}^{\phi\phi}] \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

definidas como

$$[\mathbf{K}^{uu}]_{IJ} = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]_I^{u,T} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} [\mathbf{B}]_J^u \, d\mathcal{V}; \quad (3.84a)$$

$$[\mathbf{K}^{u\phi}]_{IJ} = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]_I^{u,T} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \phi} [\mathbf{N}]_J^\phi \, d\mathcal{V}; \quad (3.84b)$$

$$[\mathbf{K}^{\phi u}]_{IJ} = \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{N}]_I^{\phi,T} g' \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\varepsilon}} [\mathbf{B}]_J^u \, d\mathcal{V}; \quad (3.84c)$$

$$[\mathbf{K}^{\phi\phi}]_{IJ} = \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{N}]_I^{\phi,T} \left( g'' \bar{Y} + \frac{1}{C_0 l_0} \alpha'' G_c \right) [\mathbf{N}]_J^\phi \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{B}} \frac{2l_0}{C_0} G_c [\mathbf{B}]_I^{\phi,T} [\mathbf{B}]_J^\phi \, d\mathcal{V}, \quad (3.84d)$$

sendo  $[\mathbf{K}^{uu}]$  a matriz de rigidez dos elementos finitos associada aos deslocamentos nodais;  $[\mathbf{K}^{\phi\phi}]$  a matriz de rigidez vinculada à variável de *phase-field*;  $[\mathbf{K}^{u\phi}]$  e  $[\mathbf{K}^{\phi u}]$  as matrizes de rigidez com termos combinados, relacionados tanto aos deslocamentos nodais quanto à variável de *phase-field*.

### 3.3.8 Solucionadores para problemas de *phase-field*

Os problemas de *phase-field* são comumente resolvidos por solucionadores monolíticos ou alternados. Os solucionadores monolíticos são aqueles baseados no método de Newton-Raphson Padrão, que buscam em um único processo iterativo a convergência tanto para o campo de deslocamentos quanto para o campo de *phase-field*. Os solucionadores alternados, por outro lado, desacoplam o problema de deslocamentos do problema de *phase-field*, buscando a convergência desses campos de forma intercalada, como ilustrado na Fig. 3.10. Para tanto, é adotada uma versão ampliada do método de Newton-Raphson, com um processo iterativo para os deslocamentos nodais e outro para o *phase-field*.

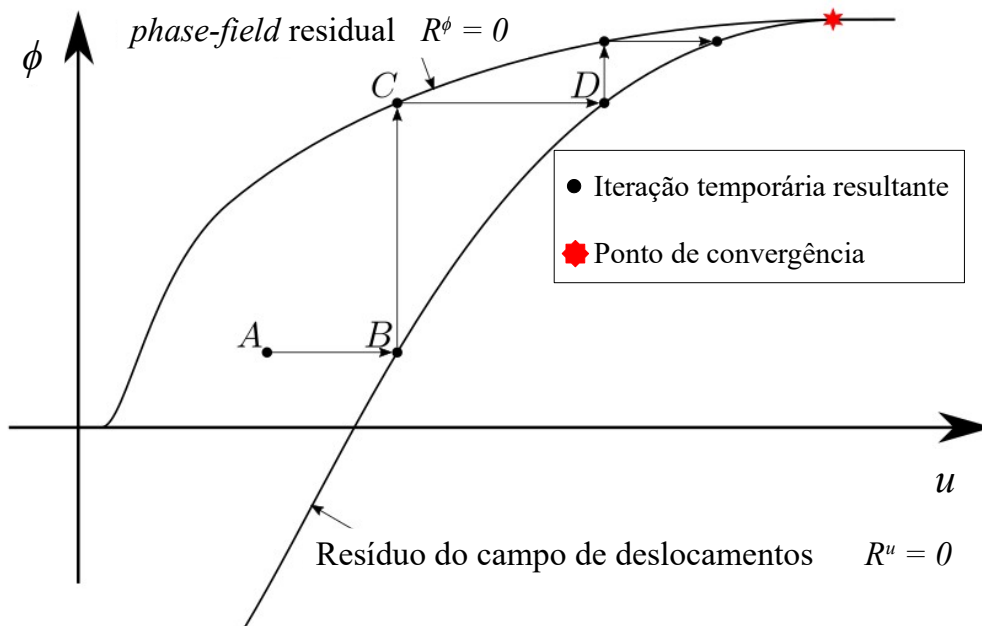


Figura 3.10 – Procedimento iterativo para o solucionador alternado (adaptado de Zhang et al. (2018b)).

Neste estudo é adotado o solucionador alternado que, conforme Wu et al. (2019), apresenta maior robustez e flexibilidade. Em particular, será adotado o solucionador baseado no conceito de variável histórica, proposto por Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b) e empregado por diversos autores, incluindo Leão (2021), responsável por sua implementação no núcleo computacional utilizado. Em resumo, esse esquema de solução consiste na resolução de dois subproblemas lineares, com atualizações sucessivas para os campos de deslocamento e de *phase-field*, até que se atinja a convergência no passo incremental  $n + 1$ .

Salienta-se que, embora desacoplados, os campos de deslocamento e *phase-field* devem convergir simultaneamente, o que estabelece uma correlação entre eles. Esse processo de solução é detalhado no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Solucionador alternado - Passos  $[n, n + 1]$ .

---

**Entrada:**  $\bar{u}_n, \bar{\phi}_n$  e  $\mathcal{H}_n$        $\triangleright$  Deslocamentos, *phase-field* e variável histórica no passo  $n$

**Saída:**  $\bar{u}_{n+1}, \bar{\phi}_{n+1}$  e  $\mathcal{H}_{n+1}$

$k = 1$

**enquanto** Não convergir **fazer**

$\triangleright$  Loop: iterações

$\bar{\phi}_{n+1}^{(k-1)}$

$\triangleright$  Fixado

$\bar{u}_{n+1}^{(k)}$

$\triangleright$  Cálculo dos deslocamentos nodais

$\bar{R}^u$

$\triangleright$  Cálculo do resíduo do campo de deslocamentos

$\mathcal{H}_{n+1}^{(k)} = \max(\psi_0^+, \mathcal{H}_n)$

$\triangleright$  Cálculo da variável histórica

$\bar{u}_{n+1}^{(k)}$

$\triangleright$  Fixado

$\bar{\phi}_{n+1}^{(k)}$

$\triangleright$  Cálculo do *phase-field* nodal

$g'(\phi_{n+1}^{(k)}); \alpha'(\phi_{n+1}^{(k)}); \bar{Y}(\phi_{n+1}^{(k)})$

$\triangleright$  Cálculo das variáveis dependentes de  $\phi$

$\bar{R}^\phi$

$\triangleright$  Cálculo do *phase-field* residual

$k \leftarrow k + 1$

**fim enquanto**

$(\bar{u}_{n+1}, \bar{\phi}_{n+1}) = (\bar{u}_{n+1}^{(k)}, \bar{\phi}_{n+1}^{(k)})$

$\triangleright$  Atualização de  $\bar{u}$  e  $\bar{\phi}$

$\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_{n+1}^{(k)}$

$\triangleright$  Atualização de  $\mathcal{H}$

---

## 4 Modelagem contínua-descontínua do fraturamento do concreto

Este capítulo é dedicado à descrição detalhada do modelo contínuo-descontínuo proposto, abrangendo os modelos de dano não local adotados para representação do contínuo (seção 4.1) e o modelo de *phase-field* escolhido para obtenção da variável de transição (seção 4.2). Na seção 4.3, a estratégia para incluir trincas discretas na malha de elementos finitos é apresentada, contemplando os possíveis critérios de nucleação e propagação e o valor limite assumido por uma variável de controle que conduz o crescimento da trinca. Dedicar-se à seção 4.4 para uma melhor compreensão de como foi feita a associação entre modelos contínuos e discretos para composição da modelagem desenvolvida nesta tese. Por fim, discute-se na seção 4.5 sobre a estratégia de parametrização utilizada para conduzir as simulações numéricas dispostas nos capítulos 5 e 6, pautada no método de Monte Carlo.

As implementações realizadas neste trabalho partem de um sistema computacional próprio e independente, cuja base fundamental está sustentada na plataforma *Interactive Structural Analysis Environment*, que é uma iniciativa de software livre para o fomento à pesquisa e desenvolvimento de trabalhos na área de métodos numéricos aplicados à mecânica computacional, desenvolvida no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEEs) da Universidade Federal De Minas Gerais (UFMG). Dentre os vários colaboradores da referida plataforma, as referências mais relevantes para o desenvolvimento deste trabalho são: Fuina (2004), Gonçalves (2004), Almeida (2005), Fonseca (2006), Penna (2007), Fonseca (2008), Fuina (2009), Penna (2011) e Leão (2021).

### 4.1 MODELOS DE DANO NÃO LOCAL

Conforme apresentado nos capítulos 2 e 3, os modelos de dano convencionais podem apresentar resultados espúrios mediante a localização de deformações numericamente induzidas. Uma técnica regularizadora para contornar essa limitação é a utilização de modelos de dano com formulação não local, em que a tensão vinculada a um ponto material não provém apenas da deformação local desse ponto, mas também de pontos vizinhos. Teoricamente, qualquer modelo de dano local pode ser estendido à formulação não local. Para tanto, deve-se reformular o modelo substituindo a variável local monitorada pela sua correspondente não local segundo uma estratégia de regularização, como a formulação integral de Jirásek (2004). Conforme apresentado na seção 3.1.2, no contexto da análise não linear, a variável não local deve ser uma grandeza que apresente comportamento crescente ao longo do processo de solução. Neste trabalho, adotou-se a deformação equivalente, na

forma da variável histórica do modelo, como a grandeza não local. A seguir são descritos os modelos de dano que foram adotados nas simulações do presente estudo, ressaltando a necessidade de sua adequação ao formato não local devido à demanda por uma malha refinada o suficiente para representação geométrica da trinca explícita.

#### 4.1.1 Modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995)

O modelo proposto por de Vree, Brekelmans e Gils (1995) baseia-se em uma versão modificada da deformação equivalente de von Mises, conforme a equação

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu} I_1^\varepsilon\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon}, \quad (4.1)$$

em que  $k = \frac{f_c}{f_t}$ , correlacionando a resistência do material à compressão ( $f_c$ ) com sua resistência à tração ( $f_t$ ).  $I_1^\varepsilon$  e  $J_2^\varepsilon$  são os primeiros e segundo invariantes do tensor de deformações, dados por

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{kk}, \quad \text{com } k = 1, 2, \text{ ou } 3. \quad (4.2)$$

e

$$J_2^\varepsilon = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad \text{com } e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad \text{e } i, j, k = 1, 2, \text{ ou } 3. \quad (4.3)$$

Sendo  $\varepsilon_{ij}$  as componentes do tensor de deformações e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker.

Para determinação do operador tangente, responsável pela descrição da degradação do meio material, retoma-se a formulação geral para modelos de degradação elástica apresentada na seção 3.1.1. Deve-se, portanto, obter as componentes do tensor das direções das funções de carregamento ( $\bar{n}_{kl}$ ), as componentes do tensor das direções da degradação ( $\bar{m}_{ij}$ ) e o módulo pós-crítico ( $\bar{H}$ ).

A equação de carregamento pode ser escrita por

$$\bar{n}_{kl} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \left[ \frac{(k-1)^2}{2k(1-2\nu)^2} (I_1^\varepsilon)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ 2 \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^\varepsilon \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} \right], \quad (4.4)$$

sendo

$$\frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{kl} \quad \text{e} \quad \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2e_{ij} \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right). \quad (4.5)$$

Os cálculos de  $\bar{m}_{ij}$  e  $\bar{H}$ , por sua vez, são definidos de maneira geral para os modelos de dano isotrópico como

$$\bar{m}_{ijkl} = -E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} = -\sigma_{ij}^0 \quad (4.6)$$

e

$$\bar{H} = \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \frac{\partial(\kappa)}{\partial D}, \quad (4.7)$$

com  $h(\kappa)$  o parâmetro histórico, que é função da variável de dano  $D$ . Para obtenção da variável de dano, demanda-se uma lei de evolução de dano, cujo conceito é apresentado na seção 4.1.3.

Conseqüentemente, o operador tangente, conforme a equação 3.24, é reescrito por

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \left[ \frac{\partial D}{\partial \kappa} \right] \sigma_{ij}^0 \cdot \left\{ \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \left[ \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} (I_1^\varepsilon)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ 2 \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^\varepsilon \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} \right]. \quad (4.8)$$

Destaca-se que na formulação não local, utiliza-se o operador secante no cálculo do equilíbrio em substituição ao operador tangente para maior estabilidade numérica do modelo, com

$$E_{ijkl}^s = (1 - D)E_{ijkl}^0. \quad (4.9)$$

A opção pelo modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) partiu da possibilidade de se adotar um modelo de dano isotrópico com uma variável escalar para quantificação da degradação, mas que seja sensível aos diferentes estados de tensão (tração e compressão), característica relevante na descrição do comportamento de materiais parcialmente frágeis como o concreto. Adicionalmente, esta medida de deformação também é capaz de captar os efeitos do cisalhamento e contabilizá-los na degradação do material.

#### 4.1.2 Modelo de de Borst e Gutiérrez (1999)

O modelo de de Borst e Gutiérrez (1999), por sua vez, é um modelo de dano ortotrópico, com variável escalar, capaz de capturar fenômenos de fissuração com direção preferencial. Assim, admite-se que o dano se pronuncie apenas na direção principal com tração dominante e que o material permanece com comportamento linear elástico nas demais direções.

Para tanto, admite-se como deformação equivalente do modelo a máxima deformação principal de tração,

$$\tilde{\varepsilon} = \max \{ \varepsilon_{kk} \} \quad \text{com} \quad k = 1, 2, \text{ ou } 3. \quad (4.10)$$

Quanto ao operador secante no sistema local ( $ns$ ), que reflete esse comportamento distinto da degradação nas direções de ortotropia do material, admite-se que para o Estado Plano

de Tensões (EPT), o operador é dado, na sua forma matricial, por:

$$[E_{ns}^{s,\ell}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-D)E^0}{1-(1-D)\nu^2} & \frac{(1-D)\nu E^0}{1-(1-D)\nu^2} & 0 \\ \frac{(1-D)\nu E^0}{1-(1-D)\nu^2} & \frac{E^0}{1-(1-D)\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

sendo  $\beta$  o fator de retenção ao cisalhamento.

Esse operador pode ser reescrito no sistema global  $(xy)$  de coordenadas a partir de uma rotação do sistema local para as deformações, como representado na Fig. 4.1.

Portanto, a da matriz de transformação de tensão  $[T^\sigma(\theta)]$  e a matriz de transformação de deformação  $[T^\varepsilon(\theta)]$  são dadas respectivamente por

$$[T^\sigma(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \text{ e} \quad (4.12)$$

$$[T^\varepsilon(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

De modo que o operador secante global seja dado por

$$[E_{xy}^{s,g}] = [T^\sigma(\theta)]^{-1} [E_{ns}^{s,\ell}] [T^\varepsilon(\theta)]. \quad (4.14)$$

A rotação do sistema local para o global é representada na Fig. 4.1.

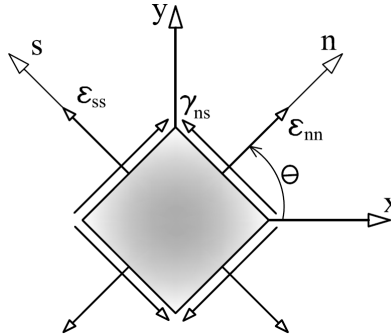


Figura 4.1 – Rotação entre o sistema global  $(xy)$  e o local  $(ns)$  (PENNA, 2011).

Tanto o modelo local de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) quanto o modelo local de de Borst e Gutiérrez (1999), bem como suas versões não locais, já estavam disponíveis na plataforma de implementação utilizada neste trabalho. Todavia, esses modelos foram alterados para compor a associação com abordagem discreta do modelo contínuo-descontínuo. Para tanto, realizou-se uma mudança da estrutura de dados dos modelos, de modo a computar e armazenar a variável de controle, que posteriormente é usada como critério de nucleação e propagação da trinca discreta. Destaca-se que, para o modelo não local, a deformação equivalente no ponto material é substituída pela variável não local calculada conforme a equação 3.37. Informações complementares quanto à formulação e à implementação desses modelos estão disponíveis nos trabalhos de Penna (2011) e Souza (2016).

### 4.1.3 Leis de evolução do dano

Modelos de degradação elástica, em geral, necessitam de leis de evolução para computar o crescimento do dano no meio material. Na literatura são encontradas diversas funções de dano válidas para a modelagem do concreto. Dentre as mais populares, destaca-se a lei de dano exponencial, cujo formato mais geral é apresentado em de Borst e Gutiérrez (1999), sendo dada por

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} \left[ 1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)} \right], \quad (4.15)$$

em que  $\tilde{\varepsilon}$  é a deformação equivalente,  $\kappa_0$  é a deformação equivalente em que o dano se inicia,  $\alpha$  é o valor máximo da taxa de acúmulo de dano e  $\beta$  a intensidade de evolução do dano.

A popularidade desse formato está vinculada ao comportamento à tração de materiais parcialmente frágeis observados experimentalmente, em que se tem curvas cujo ramo descendente pode ser aproximado com grande precisão a partir de funções exponenciais.

Dedicados ao estudo do comportamento do concreto, Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986) apresentaram uma lei constitutiva para a representação do concreto em compressão e em tração. Os autores apresentaram uma forma matemática conhecida como *Serpentine Curve* para definir uma relação tensão-deformação a partir de um conjunto reduzido de parâmetros do material.

Baseado nessa forma matemática, Penna (2011) apresentou uma proposta de lei de evolução do dano. Tal função é vantajosa, pois, além de requerer poucos parâmetros para representação da resposta do material, resulta em uma forma contínua de evolução do dano, o que confere suavidade e estabilidade à resposta do modelo. Essa lei foi, portanto,

denominada lei de dano polinomial, expressa por

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{\tilde{E}\tilde{\varepsilon}} \frac{\frac{f_e \kappa \tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}}{\kappa - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^\kappa}; \quad (4.16)$$

em que  $\kappa_0$  representa a deformação limite do regime elástico,  $f_e$  é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e  $\tilde{E}$  é o módulo de elasticidade equivalente. A variável  $\kappa$ , por sua vez, é calculada como

$$\kappa = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{\kappa_0 \tilde{E}}\right)}. \quad (4.17)$$

## 4.2 MODELO DE *PHASE-FIELD*

Ao longo das duas últimas décadas, diversos foram os modelos constitutivos de *phase-field* propostos por pesquisadores. Alguns deles se destacam, como o modelo pioneiro de Bourdin, Fracfort e Marigo (2000), ainda incapaz de representar a bimodularidade do concreto. Trabalhos posteriores, como os propostos por Lancioni e Royer-Carfagni (2009) e Amor, Marigo e Maurini (2009), passaram a decompor o tensor de deformações em parcelas volumétrica e desviadora com a intenção de descrever a fratura de forma mais fidedigna.

Entretanto, foi apenas com a decomposição espectral proposta por Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b) que as trincas em regiões submetidas à compressão foram completamente suprimidas. Diante desse contexto, e tendo em vista uma melhor reprodução do comportamento do concreto, este trabalho se ampara no modelo de Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b) para descrever o comportamento da trinca a partir do *phase-field*.

Conforme discutido, a supressão das trincas em áreas comprimidas deve-se à decomposição espectral do tensor de deformações, dada por

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{n=1}^3 \varepsilon_n \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n = \underline{\varepsilon}^+ + \underline{\varepsilon}^-, \quad (4.18)$$

em que  $\underline{\varepsilon}^+$  e  $\underline{\varepsilon}^-$  são os tensores de deformação correspondentes às componentes positivas (tração) e negativas (compressão) de deformação, dados respectivamente por

$$\underline{\varepsilon}^+ = \sum_{n=1}^3 \langle \varepsilon_n \rangle_+ \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n; \quad (4.19a)$$

$$\underline{\varepsilon}^- = \sum_{n=1}^3 \langle \varepsilon_n \rangle_- \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n. \quad (4.19b)$$

Em que  $\varepsilon_n$  e  $\bar{p}_n$  são, nessa ordem, os autovalores e autovetores do tensor de deformações. Já as funções rampa  $\langle x \rangle_+$  e  $\langle x \rangle_-$  retornam o valor de  $x$  caso esse seja positivo, ou zero, caso contrário:

$$\langle x \rangle_+ = \frac{|x| + x}{2}; \quad \langle x \rangle_- = \frac{|x| - x}{2}. \quad (4.20)$$

Como consequência da decomposição espectral, a densidade de energia de deformação inicial é reescrita como

$$\psi_0^+ = \frac{1}{2} \lambda_0 R_n^+ (\text{tr}(\underline{\varepsilon}))^2 + \mu_0 \underline{\varepsilon}^+ : \underline{\varepsilon}^+; \quad (4.21a)$$

$$\psi_0^- = \frac{1}{2} \lambda_0 R_n^- (\text{tr}(\underline{\varepsilon}))^2 + \mu_0 \underline{\varepsilon}^- : \underline{\varepsilon}^-. \quad (4.21b)$$

As funções  $R_n^\pm$  são aplicadas para avaliar o sinal do traço do tensor de deformações, e são definidas por:

$$R_n^+ = H(\text{tr}(\underline{\varepsilon})); \quad (4.22a)$$

$$R_n^- = H(-\text{tr}(\underline{\varepsilon})). \quad (4.22b)$$

Onde se observa a função de Heaviside  $H(x)$ , estabelecida como

$$H(x) = \frac{1 + \text{sgn}(x)}{2}, \quad (4.23)$$

sendo a função sinal  $\text{sgn}(x)$  expressa por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ if } x < 0 \\ 0 & , \text{ if } x = 0 \\ 1 & , \text{ if } x > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Portanto, a função de Heaviside retorna 0 para valores negativos de  $x$ ; 0.5 para  $x = 0$ ; e 1 para valores positivos de  $x$ .

Resta obter o tensor de tensões  $\underline{\sigma}$  e o tensor constitutivo  $\hat{\mathbf{C}}$ . Para tanto, são utilizados como artifícios matemáticos os tensores de quarta ordem  $\hat{\mathbf{P}}^+$  e  $\hat{\mathbf{P}}^-$ , a partir dos quais são escritas as parcelas de tração e compressão do tensor de deformações

$$\underline{\varepsilon}^+ = \hat{\mathbf{P}}^+ : \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon}^- = \hat{\mathbf{P}}^- : \underline{\varepsilon}; \quad (4.25a)$$

$$\hat{\mathbf{P}}^+ = \sum_{n=1}^3 H(\varepsilon_n) \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n \otimes \bar{p}_n, \quad \hat{\mathbf{P}}^- = \mathbf{I}_4 - \hat{\mathbf{P}}^+. \quad (4.25b)$$

Que conduz a

$$\hat{\mathbf{C}} = g(\phi) \left[ \lambda_0 R_n^+ \underline{I} \otimes \underline{I} + 2\mu_0 \hat{\mathbf{P}}^+ \right] + \lambda_0 R_n^- \underline{I} \otimes \underline{I} + 2\mu_0 \hat{\mathbf{P}}^-; \quad (4.26a)$$

$$\underline{\sigma} = g(\phi) \left[ \lambda_0 R_n^+ \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu_0 \hat{\mathbf{P}}^+ : \underline{\varepsilon} \right] + \lambda_0 R_n^- \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2\mu_0 \hat{\mathbf{P}}^- : \underline{\varepsilon}. \quad (4.26b)$$

### 4.3 MODELOS DE TRINCAS DISCRETAS

Para viabilizar a representação das descontinuidades geométricas resultantes da abertura de trinca, fez-se necessária a implementação de mecanismos que permitam intervenções na malha. No passado, surgiram modelos baseados na duplicação nodal para inserção de trincas em modelos discretos do MEF (NGO; SCORDELIS, 1967; INGRAFFEA; SAOUMA, 1985). Essa metodologia, embora seja uma proposta bastante intuitiva, caiu em desuso, uma vez que para uma descrição mais fidedigna do fenômeno de fraturamento são necessárias malhas bastante refinadas, o que na época consistia em um problema tecnológico dada a capacidade dos computadores disponíveis. Assim, tais métodos foram preteridos e os modelos distribuídos ganharam espaço. No cenário atual, todavia, os recursos tecnológicos permitem modelos mais elaborados e com significativos ganhos na representação das malhas. Logo, a estratégia de duplicação nodal tornou-se um opção viável, sendo, portanto, adotada neste trabalho.

Para esse fim, foi implementado um gestor de dados responsável pelo monitoramento nodal e, diante da definição de uma variável de controle e de um valor limite que sinalize a presença de uma trinca discreta, o algoritmo de duplicação nodal é acionado. Esse algoritmo desencadeia um processo que parte da criação de uma cópia do nó corrente e do reestabelecimento da incidência nodal dos elementos relacionados ao nó original, redefinindo a topologia da malha e criando a descontinuidade geométrica que representa a trinca.

Tomando como referência o sistema local de propagação da trinca estabelecido segundo o critério de propagação adotado (Fig. 4.2), define-se que os elementos cujos baricentros estão à esquerda do nó original não têm sua incidência alterada, enquanto os elementos com baricentros à direita passam por uma atualização da incidência, com o nó original substituído pela sua cópia. Assim, a descontinuidade geométrica é inserida na malha. Identificada a ponta da trinca, essa irá se propagar na direção do nó vizinho indicado pelo critério de propagação. São chamados nós vizinhos (ou nuvem de nós) aqueles que pertencem a elementos que contêm o nó original em sua incidência. Na Fig. 4.3 é ilustrada uma representação gráfica do processo de duplicação nodal.

No Algoritmo 2 apresenta-se o pseudocódigo do processo de duplicação nodal, com o propósito de caracterizar de forma mais clara as etapas de nucleação e propagação da fratura utilizando esse método.

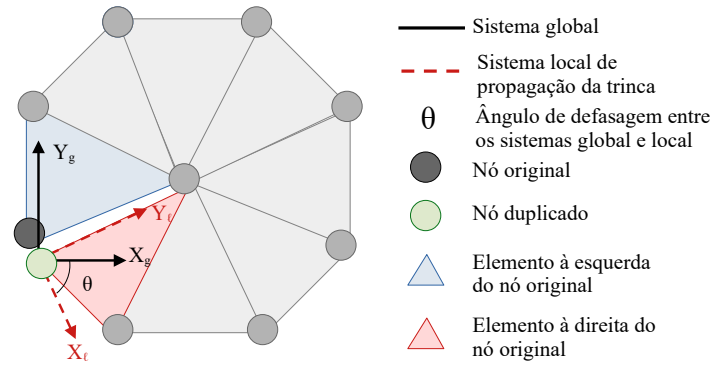


Figura 4.2 – Definição do sistema local de propagação da trinca durante o processo de duplicação nodal.

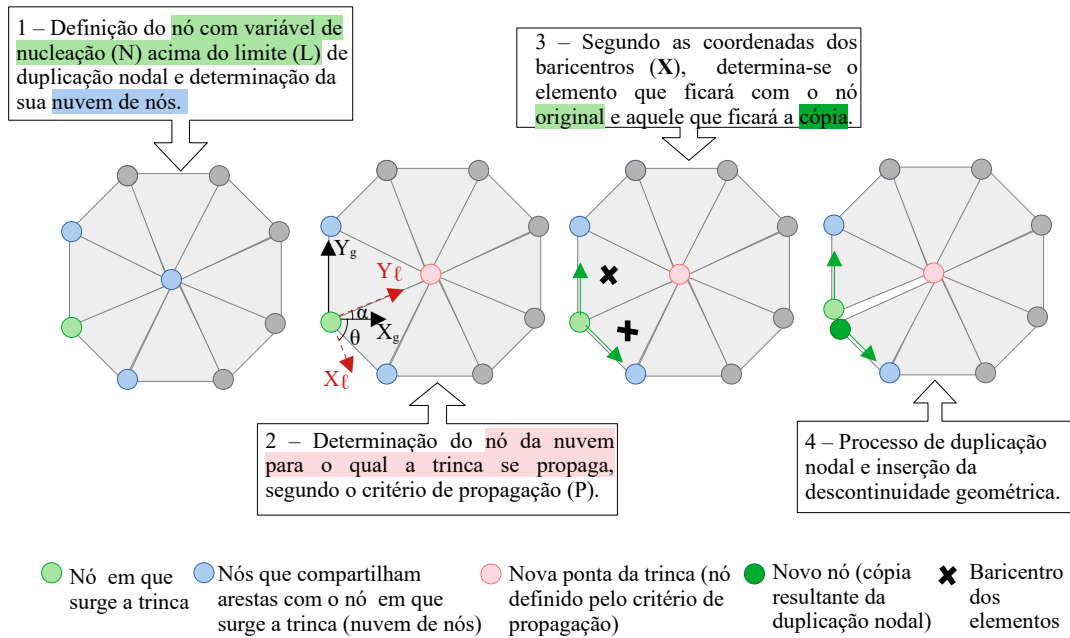


Figura 4.3 – Representação do processo de duplicação nodal.

### 4.3.1 Critérios de transição contínuo-descontínuo

Nesta seção são listados os critérios de transição contínuo-descontínuo do algoritmo de duplicação nodal proposto nesta tese. Os critérios de transição explorados foram baseados nas variáveis dos modelos que constituem a abordagem contínua-descontínua apresentada, dano e *phase-field*. Apesar de serem aqui denominados critérios de transição, esses critérios são responsáveis não só por indicar o surgimento de uma trinca (nucleação), ao comparar o valor assumido pela variável de controle com o valor limite estabelecido, como também por avaliar se a nova ponta da trinca irá evoluir (propagação). Assim, a fim de comparar diferentes parâmetros, foram definidas três possibilidades de variáveis que irão conduzir o processo de transição contínuo-descontínuo:

1. Dano (D);
2. *Phase-Field* (PF);
3. Variável Híbrida (H).

---

**Algoritmo 2** Duplicação nodal.
 

---

**Entrada:** N, P; L; Modelo   ▷ Critérios de nucleação (N) e propagação (P); limite (L)  
**Saída:** Malha atualizada

```

1:  $i \leftarrow 1$ 
2: enquanto  $i \leq n^{\circ}N$  fazer                                ▷ Loop: lista de nós
3:    $nó_i$                                                     ▷ Nó corrente
4:   se RestriçãoNó $_i ==$  falso então                            ▷ Avalia se o nó $_i$  é restrito
5:     se  $VC_i \geq L$  então                                       ▷ Valor da Variável de Controle (VC) para duplicação
6:        $j \leftarrow 1$ 
7:       enquanto  $j \leq n^{\circ}ElmNuvem$  fazer                    ▷ Loop: elementos conectados ao nó $_i$ 
8:          $elm_j$                                                 ▷ Elemento corrente conectado ao nó $_i$ 
9:          $Nó_{propaga}$                                            ▷ Nó identificado pelo critério P
10:         $\theta$                                                 ▷ Ângulo entre os sistemas local (SL) e global (SG)
11:        se  $x_{elm_j} > x_{nó_i}$  então                               ▷ Avalia se  $elm_j$  está à direita de nó $_i$  no SL
12:           $nó'_i$                                                 ▷ Novo nó: cópia do nó $_i$ 
13:          Incidência $Elm_j$                                        ▷ Substitui o nó $_i$  pelo nó' $_i$ 
14:        fim se
15:         $j \leftarrow j + 1$ 
16:      fim enquanto
17:    fim se
18:  fim se
19:   $i \leftarrow i + 1$ 
20: fim enquanto
21: Atualização da lista de nós

```

---

Os modelos de dano atuam dentro da abordagem contínua-descontínua representando o fenômeno de fissuração distribuída observado no concreto. Esses modelos têm como característica a preservação da continuidade do meio e são capazes de contabilizar sua degradação gradual e crescente a partir das variáveis de dano (D). Tais variáveis, por hipótese, indicam o surgimento de microtrincas difusas que evoluem para uma condição de coalescência, até a formação de uma trinca discreta. Portanto, a escolha por estudar a variável de dano partiu da premissa que essa é um bom indicador da presença de microfissuras no meio contínuo, onde, em geral, com a intensificação da degradação, surge a descontinuidade geométrica.

Alternativamente, pode-se empregar a variável de *phase-field* como critério de transição. Uma das principais características dos modelos de *phase-field* é sua capacidade de mapear o fraturamento do meio, compreendendo desde a nucleação e propagação, sem a representação geométrica da trinca, ou seja, tem-se uma descrição contínua de

um fenômeno descontínuo. Neste contexto, a opção pelo *phase-field* como marcador da transição contínuo-descontínuo foi fundamentada no caráter localizado dessa variável, conforme relatado na literatura. Assim, a quebra da malha é associada quando a variável PF alcançar um dado valor limite, que corresponde à abertura de trinca.

Por fim, é apresentada a proposta de variável híbrida. Uma transição brusca entre o meio contínuo e o descontínuo pode ocasionar instabilidades numéricas em simulações dessa natureza, assim, com a finalidade de se ter uma forma que seja capaz de anunciar o surgimento da trinca contabilizando tanto o caráter distribuído do dano quanto o localizado do *phase-field*, optou-se por uma grandeza híbrida. Estudos desenvolvidos por Carol, Rizzi e Willam (2001a) e Carol, Rizzi e Willam (2001b) avaliaram a degradação do meio material a partir do efeito médio do aparecimento de microfissuras. Nesses trabalhos, a anisotropia do meio é considerada a partir da simetriação do tipo produto do tensor efeito de dano para as variáveis de dano nas direções principais 1 e 2. Trazendo essa ideia para os modelos contínuos-descontínuos e substituindo as variáveis de dano anisotrópico pelos efeitos do dano e do *phase-field* na degradação, é proposta a medida híbrida transicional (H), a qual incorpora tanto a influência do dano quanto do *phase-field* no processo de degradação. A definição dessa variável híbrida transicional é dada por

$$H = \sqrt{D \cdot PF}. \quad (4.27)$$

Essa variável tem valores limitados pelo mesmo intervalo que D e PF, dado por  $[0, 1]$ , assumindo o valor mínimo de zero para material íntegro e o valor máximo de 1 para material totalmente degradado.

A partir de análises preliminares, observou-se que o dano apresenta inicialmente um crescimento mais acentuado que o *phase-field*, que por sua vez, embora tenha uma evolução inicialmente mais lenta, para valores maiores de degradação apresenta uma taxa de crescimento acelerada. Com a variável híbrida proposta, busca-se equilibrar a evolução do processo de fraturamento, tanto na fase de nucleação quanto na etapa propagação. Como essa é uma nova proposta de medida de degradação, os valores limites a ela associados devem ser estudados para anunciar corretamente o surgimento de trincas macroscópicas.

Como todo o processo de introdução da descontinuidade geométrica na malha ocorre conforme uma investigação dos nós do modelo, cabe salientar que o dano é uma variável constitutiva calculada no interior dos elementos da malha. Para superar essa limitação, como apresentado por Assis e Penna (2024), foram criados pontos de colocação nos elementos com coordenadas coincidentes com as coordenadas nodais, como ilustrado na Fig. 4.4.

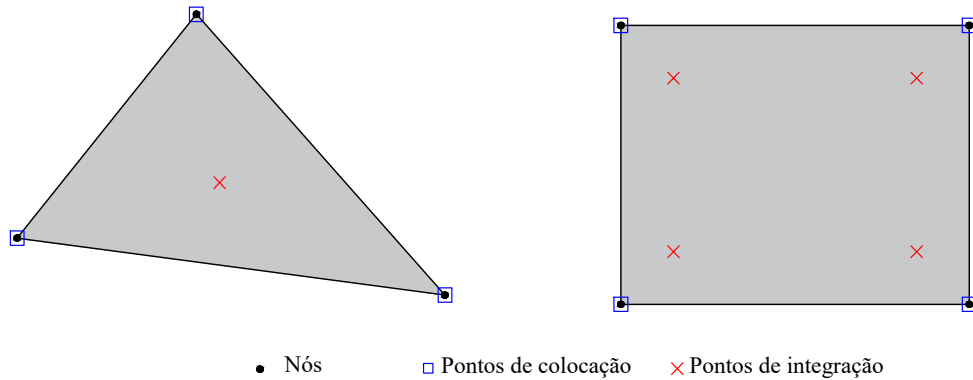


Figura 4.4 – Estratégia de criação de pontos de colocação coincidentes aos nós (Adaptado de Assis e Penna (2024)).

Na Fig. 4.5(a) é ilustrado o campo de valores assumidos por uma grandeza interna ao elemento calculados nos pontos de integração e nos pontos de colocação. Observa-se que os pontos de colocação apresentam uma descontinuidade que pode ser suavizada a partir de uma média nodal, resultando em um campo contínuo da referida grandeza, como mostrado na Fig. 4.5(b). O valor final suavizado é atribuído ao ponto nodal trazendo a grandeza originalmente interna ao elemento para os nós da malha. Assim, qualquer grandeza vinculada ao meio material pode ser obtida com precisão nos nós de interesse, sem que seja necessário extrapolar os valores calculados nos pontos de Gauss. Os pontos de colocação, por sua vez, não interferem no processo de integração dos elementos.

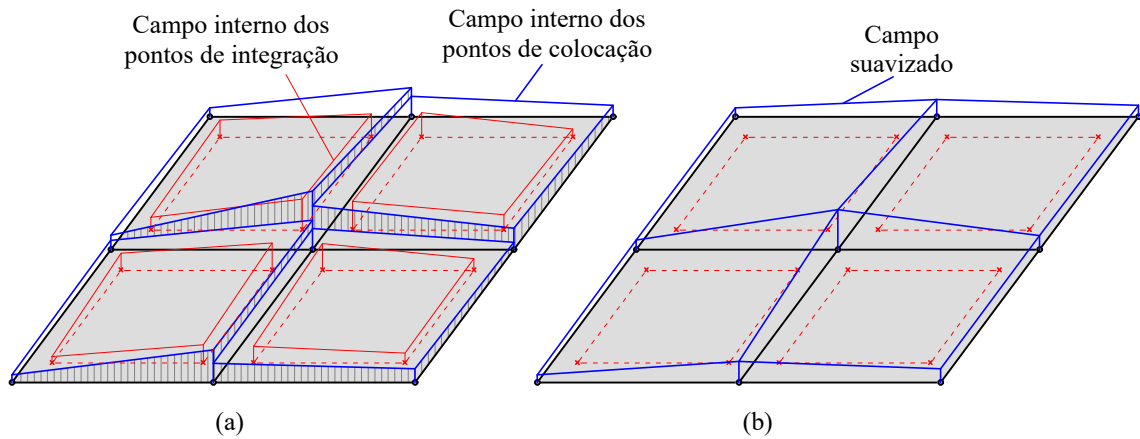


Figura 4.5 – Grandezas internas calculadas nos pontos de integração e nos pontos de colocação.

Ressalta-se que, para além das três medidas de transição apresentadas, outras estratégias podem ser empregadas da delimitação contínuo-descontínuo, de modo a adaptar a metodologia ao problema estudado. Por exemplo, na fratura frágil, pode-se adotar parâmetros como o fator de intensidade de tensão, e na fratura dúctil, pode ser adotada uma variável interna associada ao encruamento, como as deformações plásticas acumuladas.

Destaca-se ainda que o algoritmo de duplicação nodal é capaz de lidar com a nucleação automática de trincas. Para tanto, ele monitora todos os nós do modelo quanto à variável de controle  $e$ , uma vez identificado que o valor limite foi atingido ou excedido, o nó corrente é considerado como a ponta da trinca de uma nova frente de fraturamento. Entretanto, monitorar esse volume tão grande de nós torna-se computacionalmente oneroso. Como alternativa, ao invés de se verificar cada nó do modelo, pode-se verificar uma lista com nós previamente selecionados como possíveis pontos de surgimento de trincas. Essa lista pode abranger, por exemplo, os nós que definem o contorno da estrutura, ou nós dentro de uma região de degradação determinada por uma análise com modelo contínuo. Neste trabalho, a fim de reduzir o tempo de processamento das análises, optou-se por monitorar nós em pontos específicos do modelo, estabelecidos conforme os padrões de trincas experimentais observados na literatura.

### 4.3.2 Critérios de direção de propagação

Conforme discutido na seção 2.5, prever a direção de propagação das trincas é um desafio complexo, dada sua natureza estocástica. Partindo dos trabalhos de Wang e Waisman (2016), Negi e Kumar (2022) e Leblouba, Trabin e Zahri (2022), foram desenvolvidos três critérios para definição do nó para o qual a trinca irá evoluir, descritos a seguir. Na Fig. 4.6 tem-se uma representação gráfica para cada uma das estratégias propostas.

1. Busca pelo nó conectado à ponta da trinca com o valor máximo da variável limite (Fig. 4.6(a));
2. Obtenção de um vetor de direção  $\mathbf{d}_T$  considerando um domínio não local restrito aos nós conectados à ponta da trinca (Fig. 4.6 (b)). Após a definição desse vetor de direção, encontra-se o nó conectado à ponta da trinca, cuja distância angular  $\theta$  entre  $\mathbf{d}_T$  e a direção do nó é a mínima com relação a esse vetor. Devido ao pequeno número dentro do domínio, esse critério mostrou-se instável, com a trinca muitas vezes estagnando ou tendo uma tendência a retornar para seu ponto de origem. Essa limitação motivou a proposição do critério 3 de propagação;
3. Similar ao critério anterior, porém, o domínio não local nesse caso não é mais limitado aos nós conectados à ponta da trinca, mas abrange todos os nós localizados dentro de um domínio não local mais amplo, que pode ou não ser coincidente com o domínio não local do modelo de dano (Fig. 4.6 (c)). Esse critério foi baseado nos estudos desenvolvidos por Wang e Waisman (2016) e Negi e Kumar (2022).

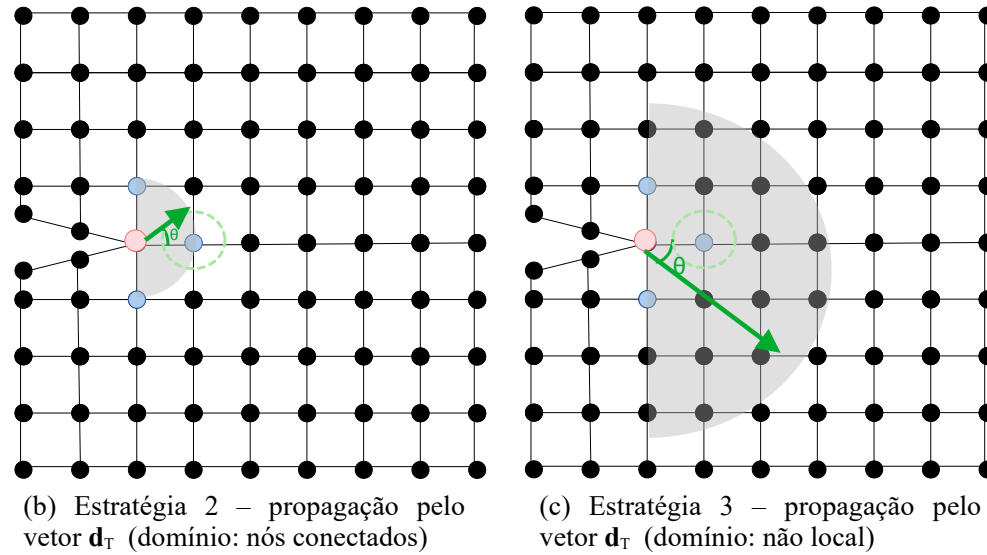
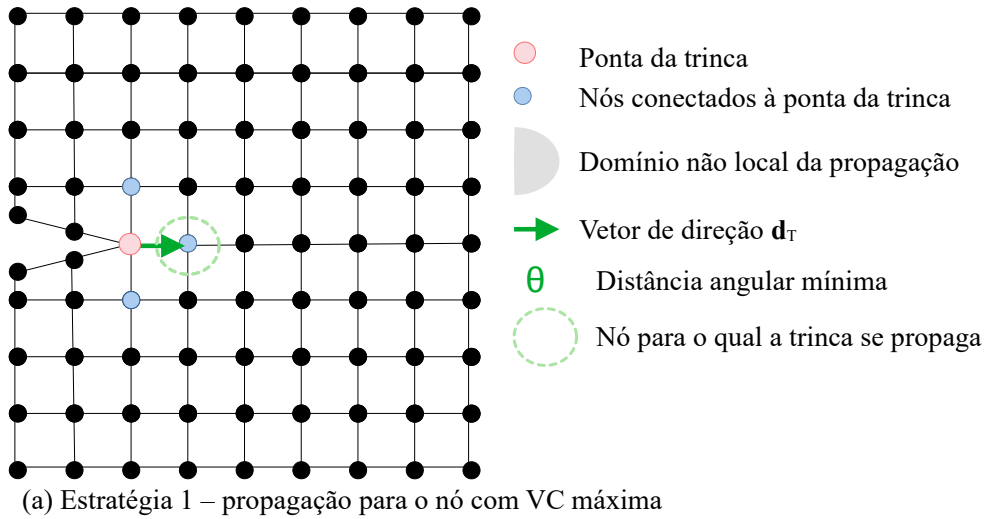


Figura 4.6 – Crit\u00e9rios de propaga\u00e7\u00e3o.

Quanto aos dois \u00faltimos crit\u00e9rios, que s\u00e3o pautados na determina\u00e7\u00e3o do vetor de dire\u00e7\u00e3o de propaga\u00e7\u00e3o da trinca ( $\mathbf{d}_T$ ), al\u00e9m do c\u00e1lculo do n\u00f3 de propaga\u00e7\u00e3o da trinca baseado apenas na dist\u00e2ncia angular  $\theta$ , optou-se por implementar crit\u00e9rios de propaga\u00e7\u00e3o capazes de definir a dire\u00e7\u00e3o de propaga\u00e7\u00e3o a partir de pondera\u00e7\u00f5es entre essa dist\u00e2ncia  $\theta$  e o valor da vari\u00e1vel de controle VC. As medidas propostas foram inspiradas nas simetriza\u00e7\u00f5es do tipo soma (equa\u00e7\u00e3o 4.28) e do tipo produto (equa\u00e7\u00e3o 4.29), descritas por Carol, Rizzi e Willam (2001a). Assim, o n\u00f3 admitido como pr\u00f3xima ponta da trinca \u00e9 aquele que apresenta o m\u00e1ximo valor de  $\theta_d$ :

$$\theta_d = \frac{VC + \cos\theta}{2}, \quad (4.28)$$

ou de

$$\theta_d = \sqrt{VC \cdot \cos\theta}. \quad (4.29)$$

Optou-se por adotar o  $\cos\theta$  na formulação, pois, esse apresenta valor máximo quando  $\theta$  é mínimo, ou seja, quando tem-se a menor distância angular entre  $\mathbf{d}_T$  e a aresta definida pela ponta da trinca atual e o nó para o qual a trinca se propaga. Além disso, como tanto VC quanto  $\cos\theta$  ficam restritos ao domínio de  $[0, 1]$ , tanto a soma (equação 4.28) quanto o produto (equação 4.29) propostos para a definição do caminho da trinca seguem também limitados ao domínio  $[0, 1]$ .

O vetor de direções  $\mathbf{d}_T$ , por sua vez, é calculado por:

$$\mathbf{d}_T = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i \cdot VC_i \cdot w_i \cdot J_i \cdot \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|}, \quad (4.30)$$

em que  $n_n$  é o número de nós (que contém os pontos de colocação) dentro do domínio,  $\alpha_i$  é o peso da interação nodal entre o nó  $i$  e o nó que representa a ponta da trinca,  $VC_i$  é o valor assumido pela variável de controle no nó  $i$ ,  $w_i$  é o peso associado ao ponto de colocação com contribuição dos pontos de integração dos elementos adjacentes ao nó  $i$ ,  $J_i$  é o jacobiano avaliado em  $i$ , e  $\frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|}$  é o vetor unitário da direção entre o nó da ponta da trinca e o nó  $i$ . Os domínios que delimitam a região de propagação são representados nas Figs. 4.6(b) e 4.6(c).

Dessa forma, seleciona-se o nó para propagação como aquele próximo o suficiente da ponta da trinca anterior ( $\cos\theta$ ), mas também com um valor significativo da variável de controle.

Todos esses critérios podem ser combinados com a nucleação por dano, *phase-field* ou variável híbrida. Destaca-se ainda que, conforme discutido na seção 2.5, apenas os nós à frente da ponta da trinca foram considerados como possíveis nós para propagação da trinca.

### 4.3.3 Valor limite para nucleação e propagação

Conforme discutido na seção 2.4, a nucleação ou a propagação de uma trinca explícita pode ser anunciada por uma dada variável de controle que assume um valor limite. Tanto para o dano quanto para o *phase-field*, valores próximos à unidade indicam o surgimento/propagação da fratura discreta.

Particularmente, para o modelo de dano de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) (seção 4.1.1), a deformação equivalente apresentada na equação 4.1 contempla termos capazes de descrever a fratura tanto pelo Modo de Falha I (abertura) quanto pelo Modo II (cisalhamento). Assim, esse modelo consegue mapear trincas em Modo I e II naturalmente, com a variável  $D$  próxima a 1,0.

O mesmo não ocorre no modelo de *phase-field* de Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b). Nesse modelo, a variável PF depende da energia de fratura do material ( $G_c$ ). Contudo, segundo Anderson (2017), a energia de fratura de materiais frágeis no Modo II ( $G_{II}$ ), que contempla o cisalhamento, é em média de duas a dez vezes maior que a energia de fratura do Modo I ( $G_I$ ), que é a mais comumente obtida em laboratório. Assim, nas simulações numéricas apresentadas neste trabalho, serão adotados dados de  $G_I$  e, caso a estrutura esteja submetida ao cisalhamento, o valor limite da VC será reduzido entre duas e dez vezes para compensar a diferença entre  $G_I$  e  $G_{II}$ . Essa estratégia também poderá ser utilizada em estruturas com fragilidade acentuada, em que adotar um valor alto de  $PF$  pode resultar na ruptura prematura em regiões não governadas pela trinca.

Observa-se, então, que a definição do valor da variável que marca a transição entre contínuo e descontínuo não é trivial, dada a variedade de parâmetros que interfere no comportamento da estrutura, tais como o modo de fratura preponderante, a fragilidade da estrutura avaliada, bem como possíveis pontos de concentração de tensões. Para incorporar essa variabilidade, uma possível abordagem é aplicar uma análise estocástica para definição das variáveis do problema cujos valores conduzem ao melhor resultado possível. Esse procedimento de análise é detalhado na seção 4.5.

#### 4.4 ASSOCIAÇÃO ENTRE DANO, *PHASE-FIELD* E TRINCA DISCRETA

Cabe, neste ponto, explicitar o procedimento adotado para a associação entre o modelo de dano, o modelo *phase-field* e a técnica de representação da trinca discreta, culminando na formulação do modelo contínuo-descontínuo proposto. A análise numérica, realizada por meio do método dos elementos finitos, demanda um arquivo de entrada no formato *xml* que contenha a definição da geometria do domínio, as condições de contorno, as propriedades dos materiais que compõem a estrutura em análise, bem como os critérios de transição contínuo-descontínuo e de propagação da trinca, incluindo o valor crítico associado à abertura da trinca. A partir da leitura dessas informações, tem início a etapa de processamento computacional.

O processamento no modelo contínuo-descontínuo requer um modelo capaz de agrupar as características da degradação distribuída, computada pelo dano, com a indicação da localização da trinca indicada pela *phase-field*. O modelo de dano é responsável pelo cálculo da variável de dano  $D$  e do tensor constitutivo do ponto material. Consequentemente, esse modelo é encarregado pela resposta estrutural (trajetória de equilíbrio). Tem-se ainda o modelo de *phase-field*, que é necessário caso a variável de controle seja  $PF$  ou  $H$ . Esse modelo tem como função o cálculo de  $PF$ .

Verifica-se, então, o critério de abertura de trinca. Se a variável de controle  $VC$  tiver valor

superior ao limite (L) preestabelecido na ponta da trinca (ou do conjunto de trincas do modelo), o algoritmo de duplicação nodal é ativado. Assim, insere-se a descontinuidade geométrica na malha e são redefinidas as pontas de trinca. Se VC for inferior ao valor limite, a malha é preservada e a etapa de duplicação nodal não acontece.

Em seguida, é gerado o arquivo de saída com informações do passo convergido referentes aos valores da variável de controle e às repostas carga-deslocamento e tensão-deformação. A análise incremental-iterativa continua com a evolução da carga, até que se atinja o último passo. Todo o processo descrito para a modelagem contínua-descontínua é resumido na Fig. 4.7.

#### 4.5 SIMULAÇÕES DE PROBABILIDADES MÚLTIPLAS VIA MÉTODO DE MONTE CARLO

A fim de incorporar às simulações numéricas a aleatoriedade proveniente dos parâmetros do material, do comportamento estrutural e do processo de fraturamento do concreto, conforme discorrido na seção 2.6, optou-se por adotar uma abordagem probabilística neste estudo, baseada no método de Monte Carlo, com distribuição constante de probabilidade. No presente trabalho, para a representação dessa aleatoriedade, foram consideradas simulações de probabilidades múltiplas com foco na dispersão das propriedades do material (módulo de elasticidade inicial, resistência à tração e à compressão, comprimento característico e energia de fratura, etc.) e nos parâmetros de incertezas do modelo (valor limite da variável transicional, dimensão do domínio não local, etc.).

Nesse contexto, as análises que constituem esse trabalho têm como referência dados experimentais disponíveis na literatura. A partir dos intervalos de valores que os parâmetros materiais (como energia de fratura, resistência à compressão e à tração, etc.) assumiram em testes experimentais, são simuladas amostras numéricas com valores pseudoaleatórios dentro desses intervalos. O termo pseudoaleatório refere-se à geração de números que, embora aparentemente aparente ser um processo aleatório, é definida segundo fórmulas matemáticas.

Ao final das simulações, é possível obter uma curva média do comportamento estrutural ou avaliar a curva com melhor aderência à resposta experimental. Admitindo a curva média ou a curva com melhor ajuste à média experimental (curva representativa), ficam então definidos os parâmetros materiais mais adequados para se prosseguir com as análises do processo de fraturamento. Esse processo de análise é resumido na Fig. 4.8.

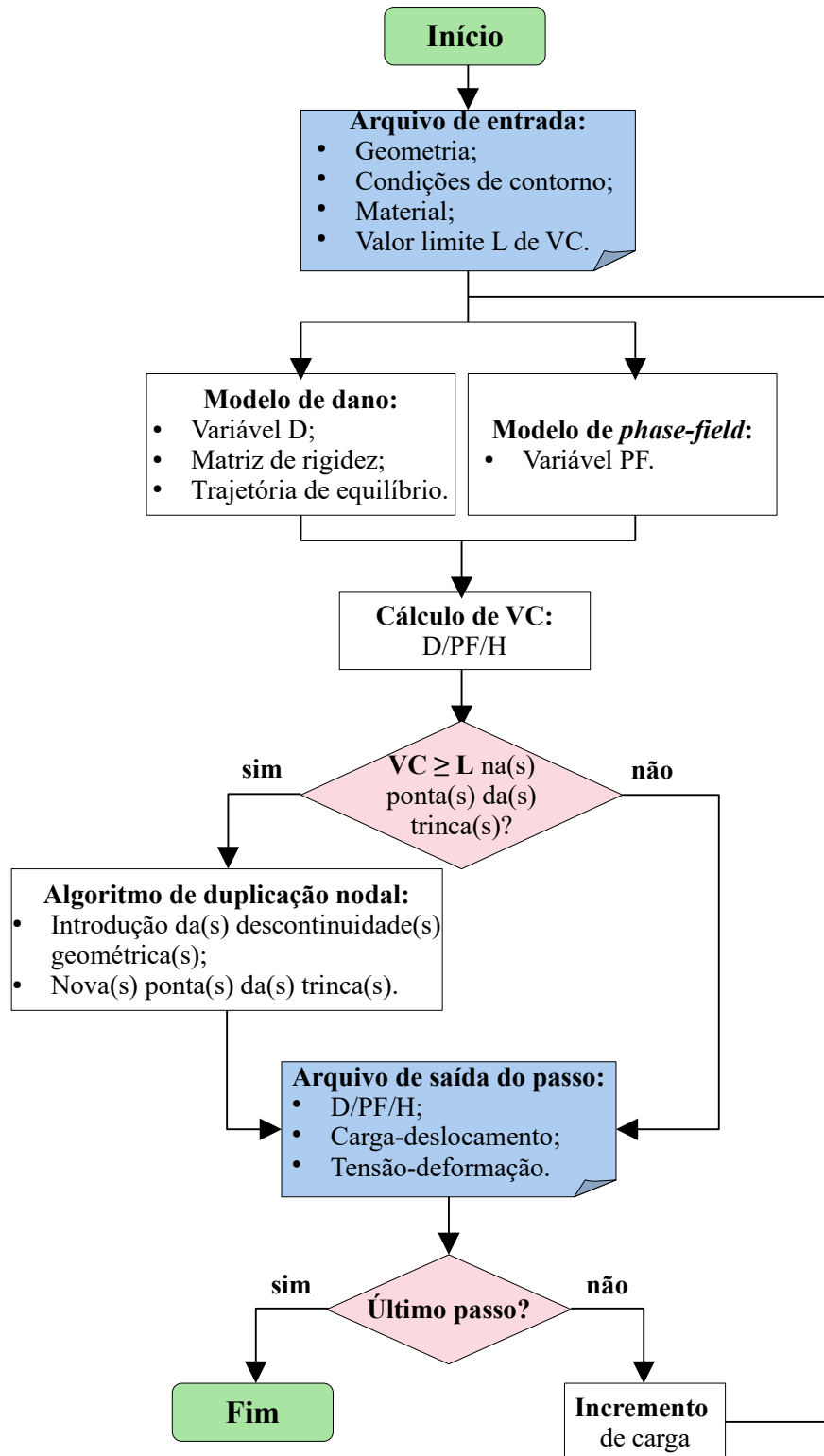


Figura 4.7 – Fluxograma do modelo contínuo-descontínuo.

Segundo Wang et al. (2015), simulações com 50 amostras indicam que há uma estabilização da resposta média, dispensando a necessidade de novas simulações. Na Fig. 4.9 é possível perceber a redução e, posteriormente, estabilização do erro entre as curvas médias calculadas para um número crescente de amostras. Esse erro é calculado comparando a

diferença, ponto a ponto, da curva média obtida com  $x$  amostras com relação àquela calculada a partir de  $x - 1$  amostras. Quanto à curva representativa, quanto maior for o número de simulações realizadas, maior a probabilidade de se obter uma curva que se ajuste melhor à referência experimental. Todavia, por limitações de tempo e recursos computacionais, neste trabalho é fixado o número de 50 amostras por simulação de Monte Carlo.

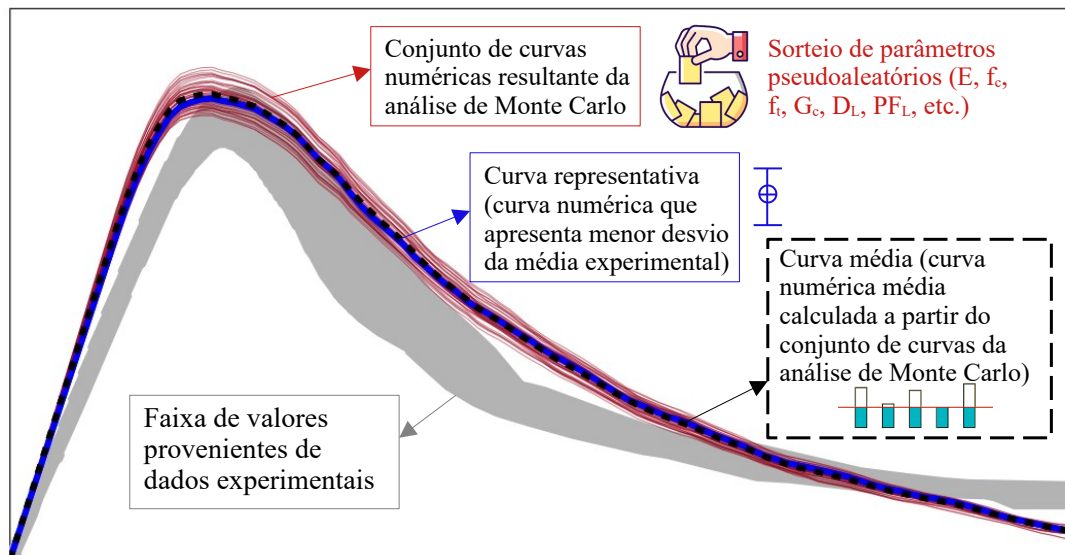


Figura 4.8 – Representação gráfica do processo de parametrização do material e do modelo a partir de simulações de Monte Carlo.

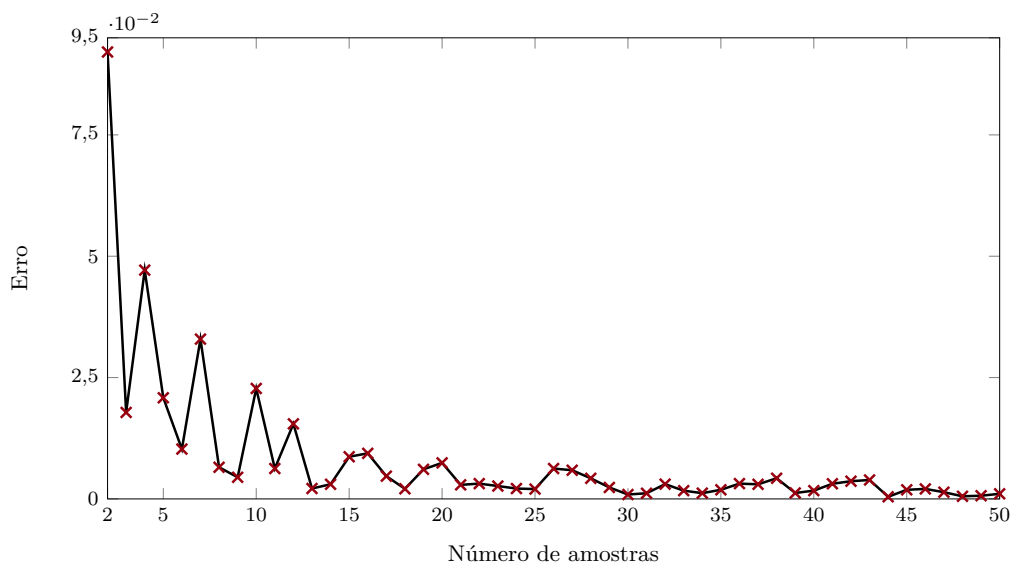


Figura 4.9 – Análise do erro obtido para a curva média com o crescimento do número de amostras da simulação de Monte Carlo.

## 5 Simulações numéricas: aspectos gerais do modelo

Neste capítulo serão apresentadas simulações numéricas visando a discussão dos principais aspectos do modelo contínuo-descontínuo proposto nesta tese. Tais simulações visam o estudo paramétrico do material e do modelo (seção 5.2), a compreensão da influência da malha na propagação da trinca (seção 5.3), a investigação do critério de transição entre contínuo e descontínuo (seção 5.4), bem como a determinação de seus valores críticos (seção 5.5).

Para as investigações propostas, foi adotada a modelagem do ensaio do Painel em “L” apresentado por Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001) e Winkler, Hofstetter e Lehar (2004) e descrito na seção 5.1. Este ensaio foi escolhido por ser amplamente conhecido e simulado por vários autores (LABANDA; GIUSTI; LUCCIONI, 2018; PENG; QIU; JIANG, 2021; YAKIN et al., 2023; JAHANITABAR; LOTFI, 2024; TRAN; NGUYEN-XUAN; ZHUANG, 2021), com diferentes tipos de abordagem, que vão desde modelos puramente distribuídos a modelos discretos.

Devido às características do referido ensaio, sua adoção foi considerada apropriada como referência para a avaliação do modelo proposto. Observa-se no experimento a distribuição de fissuras e o pronunciamento de trincas explícitas em etapas mais avançadas do carregamento, de modo que os principais atributos do modelo contínuo-descontínuo puderam ser exploradas. Assim, foi possível avaliar os parâmetros relevantes do modelo em questão para posterior validação com outros ensaios experimentais presentes na literatura, apresentados no capítulo 6.

### 5.1 ENSAIO DO PAINEL EM “L” (WINKLER; HOFSTETTER; NIEDERWANGER, 2001)

Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001) e Winkler, Hofstetter e Lehar (2004) avaliaram experimentalmente painéis em forma de “L”. Na Fig. 5.1 são apresentadas a geometria e as condições de contorno do ensaio, bem como a região de degradação observada pelos autores. A partir desse ensaio, foi realizada uma série de modelagens numéricas do referido painel.

Quanto às propriedades do material ensaiado, há uma grande divergência na literatura. Desde incoerências entre a resposta experimental e os resultados numéricos de Winkler, Hofstetter e Lehar (2004) - mesmo no ramo elástico - até a grande variação de dados adotados nos diversos estudos que tentam reproduzir numericamente essa estrutura.

Considerando tais incertezas, que serão melhor abordadas na seção 5.2, admitiu-se a necessidade de uma análise de simulações múltiplas para definição dos parâmetros do material.

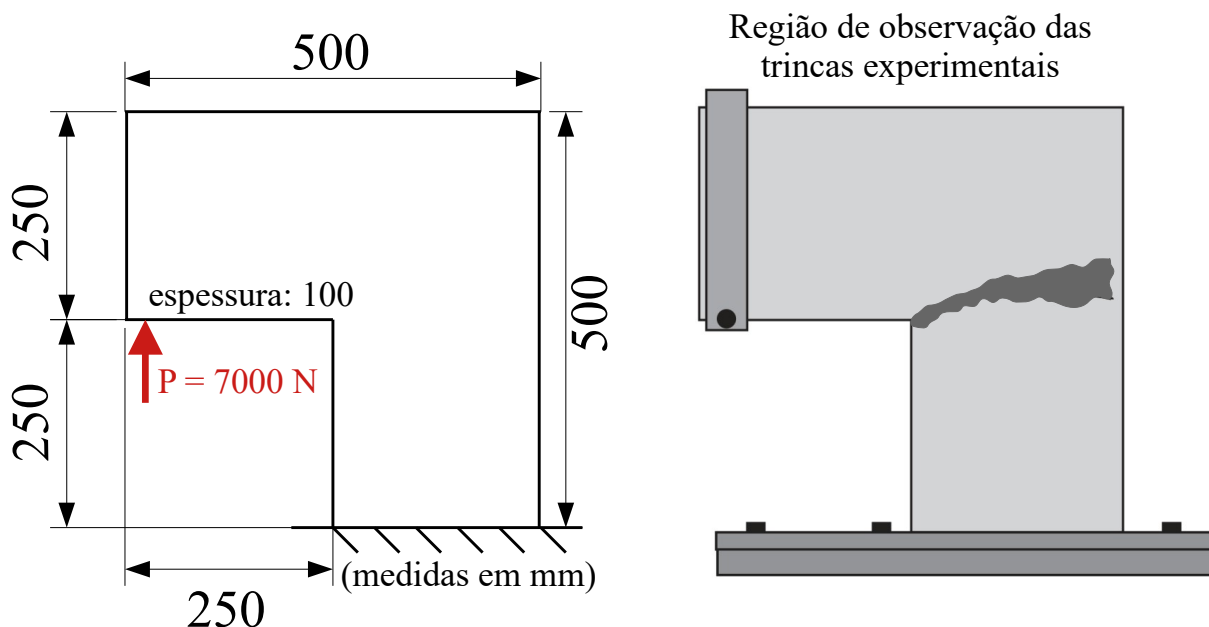


Figura 5.1 – Painel em “L”: geometria e configuração experimental (adaptado de Feist et al. (2004)).

Diferentes malhas de elementos finitos foram propostas para as análises numéricas, conforme discussão apresentada nas seções seguintes. Quanto ao processo incremental-iterativo, foi utilizado o procedimento de Newton-Raphson, com equilíbrio aproximado pela rigidez secante e controle de deslocamento direto, sendo controlado o ponto de deslocamento vertical máximo, situado na extremidade superior esquerda do painel, com incremento de 0,01 mm e tolerância para convergência em deslocamentos de  $1,0 \times 10^{-4}$ . Esse processo incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle direto de deslocamentos foi aplicado não só às simulações do Painel em “L”, como também em todas as análises apresentadas no capítulo 6.

## 5.2 ESTUDO PARAMÉTRICO DO MODELO E DO MATERIAL

O processo de parametrização do material ocorreu conforme a metodologia descrita na seção 4.5. O modelo de dano adotado foi o modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) com lei exponencial de evolução do dano (4.15) e o MPF de Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b).

Os dados apresentados estão relatados na literatura, segundo Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001) e Feist et al. (2004), em que o módulo de elasticidade do material,

a resistência à compressão e a resistência à tração foram obtidos experimentalmente, enquanto a energia de fratura foi definida por uma correlação paramétrica especificada no CEB-FIP (1991).

Os parâmetros do material que foram avaliados segundo a simulação de probabilidades múltiplas são destacados na Tab. 5.1, bem como os limites inferior e superior que definem o intervalo em que se aplica a aleatoriedade.

Tabela 5.1 – Parâmetros materiais - intervalo de valores para análise com pseudoaleatoriedade

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
$G_c$ (N/mm)	0,065	0,090
$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	24469	27231

Os demais parâmetros do material foram fixados, segundo Feist et al. (2004), partindo do trabalho de Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001):  $f_t = 2,7$  N/mm<sup>2</sup>,  $f_c = 31,0$  N/mm<sup>2</sup> e  $\nu = 0,18$ . O concreto utilizado nos experimentos foi fabricado com agregado graúdo de diâmetro máximo de  $d_{max} = 8$  mm (WINKLER; HOFSTETTER; NIEDERWANGER, 2001). Conforme Bažant e Oh (1983), o comprimento característico do material pode ser estimado entre  $3 \cdot d_{max}$  e  $5 \cdot d_{max}$ . Determinou-se um valor intermediário de  $h = 32$  mm.

Outros parâmetros em que se admitiu a aleatoriedade foram  $\kappa_0$  e  $\beta$  da lei de dano exponencial. Esses parâmetros não foram extraídos diretamente de dados experimentais e não apresentam correlações diretas com propriedades físicas observáveis. Assim, para determinar seus intervalos de validade, foi simulada uma tração simples com um modelo de fissuração distribuída com parâmetros correspondentes ao Painel em “L”. Essa simulação foi repetida com o modelo de dano, a fim de compatibilizar as duas curvas de tração e estabelecer esses intervalos, conforme a Tab. 5.2. Uma vez definido esses intervalos, utilizou-se do método de Monte Carlo para estabelecer o valor ótimo dessas variáveis.

Tabela 5.2 – Parâmetros da lei de dano - intervalo de valores para análise com pseudoaleatoriedade

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
$\kappa_0$	0,00013	0,000135
$\beta$	650	800

Já o parâmetro de controle da taxa de acúmulo do dano para a lei exponencial foi definido como  $\alpha = 0,97$  para conferir estabilidade ao final do ramo de amolecimento da curva.

Na modelagem, adotou-se uma malha com 15428 elementos finitos triangulares de três nós, gerada a partir de uma distribuição randômica dos elementos, conforme ilustrado na 5.2. O grau de refinamento adotado é necessário para uma descrição precisa do fraturamento,

requerendo para tanto a utilização da versão não local do modelo de dano. Optou-se pela função de distribuição de Gauss, com raio local de  $\ell = h = 32$  mm e constante  $k = 1,0$ . O raio foi definido para abranger mais de um elemento finito e caracterizar uma vizinhança com quantidade de pontos suficientes para suavizar a localização de deformações numericamente induzidas. O MPF demanda um parâmetro de comprimento interno do modelo que corresponde à região de descontinuidade a ser considerada no surgimento da trinca descrita pela variável de *phase-field*. Tal dimensão deve garantir que se tenha uma quantidade mínima de elementos para descrever a trinca de forma contínua. Nesse exemplo o comprimento interno adotado foi de  $l_0 = 3,5$  mm, duas vezes a dimensão da aresta do menor elemento da malha, conforme recomendado por Wu et al. (2020).

Um parâmetro fundamental do modelo apresentado é o valor crítico da variável de controle, cuja discussão na literatura foi apresentada na seção 2.4. Assim, entende-se que em modelos contínuos-descontínuos a variável de transição é sempre um ponto relevante na descrição dos fenômenos de nucleação e propagação.

Observa-se que em estruturas com comportamento estrutural mais dúctil, as fissuras se mostram mais distribuídas no domínio e os valores da variável de transição tendem a aproximar da unidade. Já para casos de comportamento estrutural mais frágil, nota-se a formação de uma trinca discreta para valores bem baixos da variável de transição. Tais aspectos podem estar relacionados a pontos de concentração de tensões que interferem no surgimento e propagação de trincas.

Nesse sentido, é necessária uma grandeza que seja capaz de captar o comportamento do material de forma a representar o processo crescente de fissuras até a formação da descontinuidade causada pela trinca. Considerando que o modelo de dano é capaz de captar os efeitos das fissuras dispersas no material e que o modelo discreto proposto não contempla coesão, valores mais indicados para a transição contínuo-descontínuo devem tender à unidade, para que o meio material esteja suficientemente degradado quando ocorrer a formação de uma trinca explícita. Dessa forma, a simulação de identificação paramétrica admitiu como critério de nucleação e evolução da trinca a variável de dano, com valor de  $D = 0,95$ . Já a direção de propagação baseou-se no vetor  $\mathbf{d}_T$ , como apresentado na seção 4.3.2, segundo o valor do *phase-field* dentro do domínio não local previamente definido.

Neste trabalho, diferentes alternativas para a variável de transição foram consideradas, assim, valores críticos foram investigados em função da variável estudada. Simulações que investigam as variáveis de controle e os limites de tais variáveis são apresentadas nas seções 5.4 e 5.5, respectivamente.

Para reduzir o custo computacional, assumiu-se como nó de nucleação da trinca aquele

coincidente com o padrão experimental, na quina do painel. Contudo, o algoritmo desenvolvido tem a capacidade de definir automaticamente o nó de nucleação, a partir de uma lista de nós (que pode incluir todos os nós do modelo ou os nós do contorno, por exemplo).

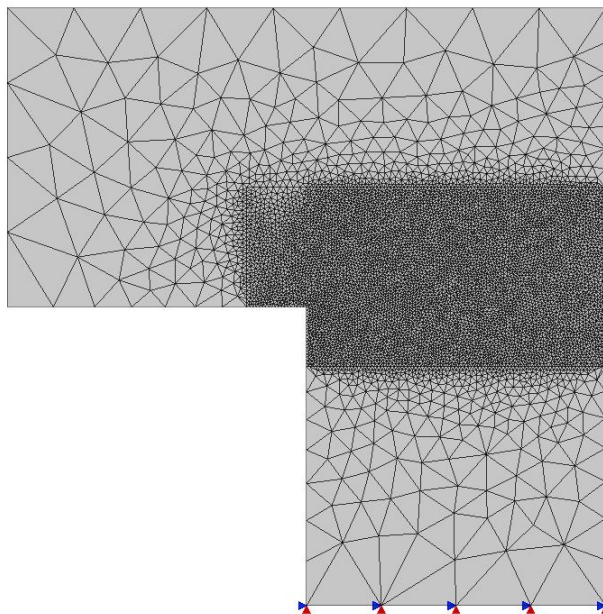


Figura 5.2 – Painel em “L”: malha adotada no processo de parametrização com 15428 elementos.

Os resultados da simulação de Monte Carlo com 50 amostras são apresentados em termos de caminho da trinca na Fig. 5.3 e trajetórias de equilíbrio na Fig. 5.4, sendo confrontados com os registros experimentais.

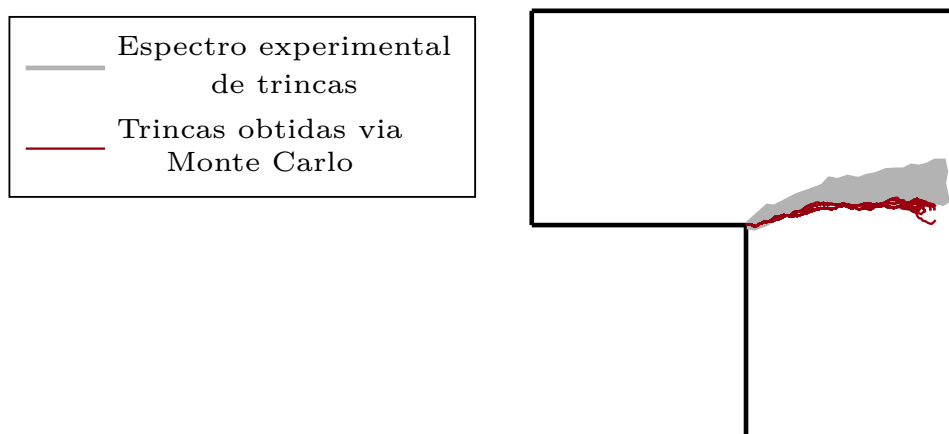


Figura 5.3 – Comparação entre os caminhos de trinca obtidos pelas simulações de Monte Carlo e o espectro experimental de Feist et al. (2004).

Nota-se na Fig. 5.3 que os caminhos de trinca observados indicaram boa aderência com o

espectro experimental, concentrando-se especialmente no limite inferior da região degradada.

Quanto às trajetórias de equilíbrio, as curvas numéricas representaram com precisão o pico e o amolecimento observado nos ensaios. No ramo elástico há uma divergência da inclinação entre as análises computacionais e a referência experimental. Todavia, os próprios autores do ensaio apresentam resultados numéricos com essa mesma divergência do ramo ascendente. Assume-se que esse comportamento é proveniente de uma acomodação no ensaio experimental, tornando o modelo testado mais flexível.

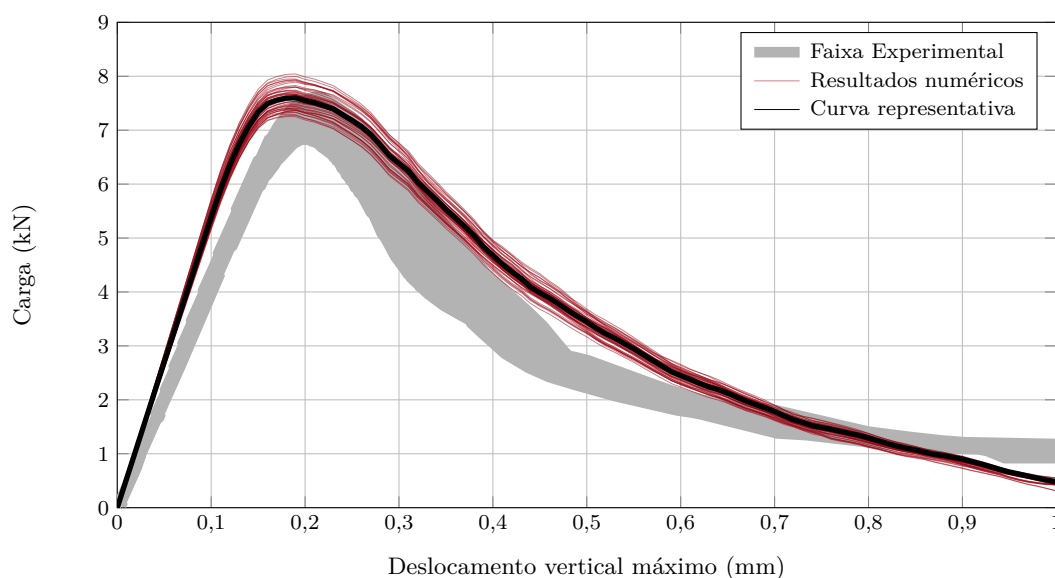


Figura 5.4 – Trajetórias de equilíbrio via simulações de Monte Carlo.

A partir do conjunto de 50 amostras, obteve-se um conjunto de trajetórias de equilíbrio como observado na Fig. 5.4. Comparando-se os resultados da amostragem com o experimento, via uma análise de variâncias das curvas obtidas com a curva média experimental, concluiu-se que a amostra 36 foi a que melhor representa o comportamento do Painel em “L”, cujos valores sorteados são listados na Tab. 5.3.

Tabela 5.3 – Parâmetros pseudoaleatórios da curva com melhor ajuste

Parâmetro	Valor
$G_c$ ( $N/mm$ )	0,06629
$E$ ( $N/mm^2$ )	25639,57
$\kappa_0$	0,0001334
$\beta$	741,14

Na Fig. 5.5 é evidenciado o comportamento estrutural da amostra 36, definida como a curva representativa, em relação ao resultado experimental de Winkler, Hofstetter e

Niederwanger (2001). Alguns dos passos da trajetória de equilíbrio são destacados, para uma análise da evolução dos parâmetros que quantificam a degradação: dano e *phase-field*.

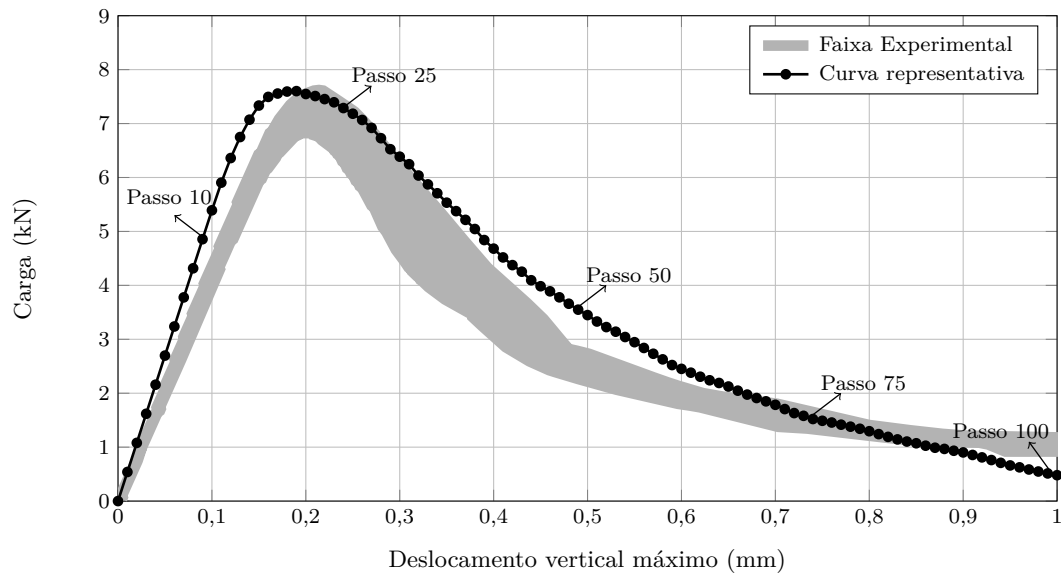


Figura 5.5 – Trajetória de equilíbrio da amostra representativa - passos em destaque.

Na Fig. 5.6 é ilustrada a deformada do painel ao final do carregamento, aplicando-se uma escala de ampliação de 100 vezes para ressaltar a descontinuidade geométrica em consequência da propagação da trinca. Já nas Figs. 5.7 e 5.8 são representadas, respectivamente, as isoformas de dano e *phase-field* da amostra 36 para cada um dos passos destacados na trajetória de equilíbrio (Fig. 5.5), acompanhadas pelo caminho da trinca.

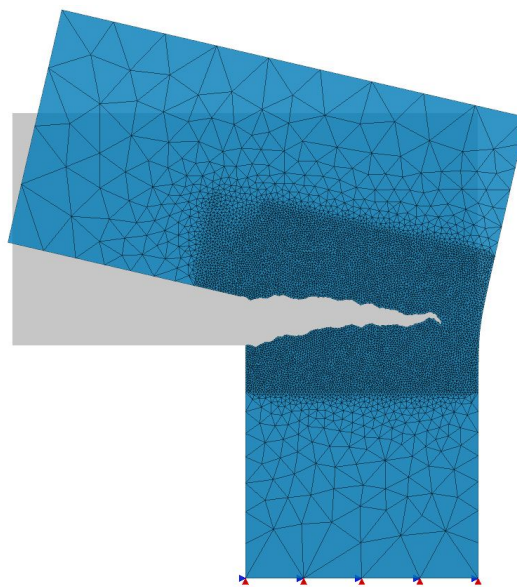


Figura 5.6 – Amostra 36: deformada do painel em “L”.

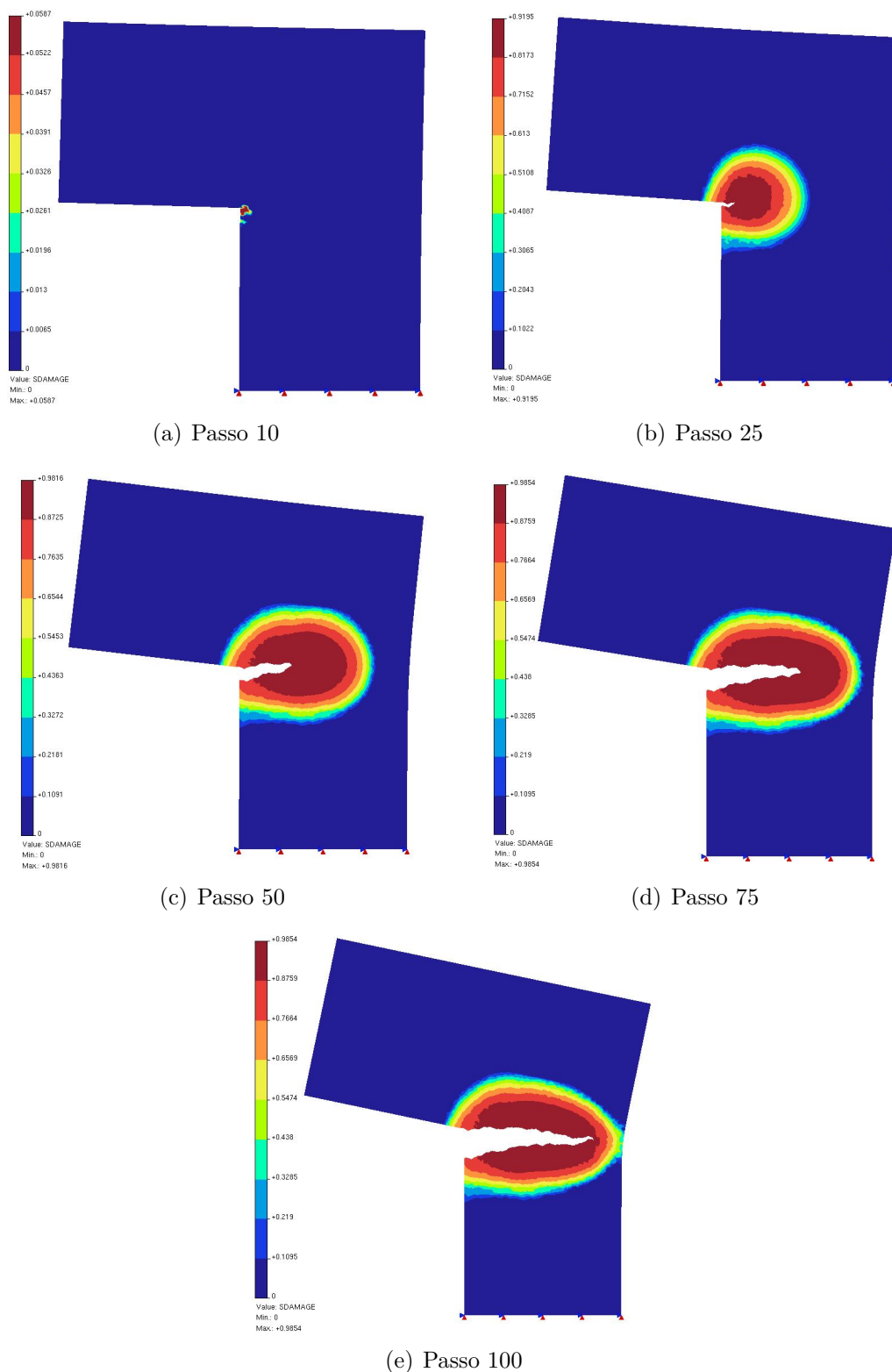


Figura 5.7 – Amostra 36: distribuição de dano com a evolução da análise.

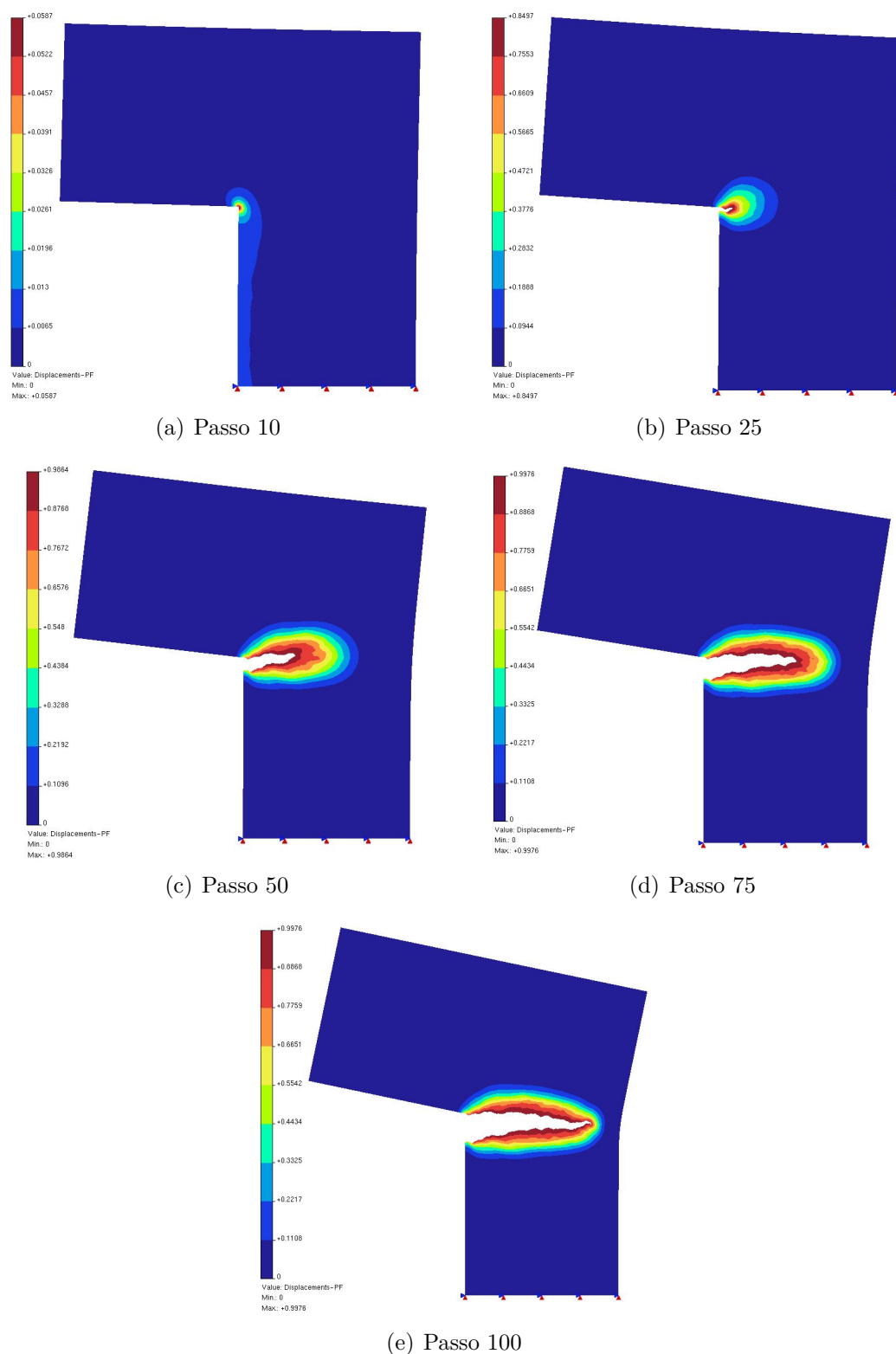


Figura 5.8 – Amostra 36: distribuição de *phase-field* com a evolução da análise.

Definida a parametrização do material, prosseguiu-se com esses parâmetros para os demais estudos desenvolvidos a partir do Painel em “L”.

### 5.3 ASPECTOS DE MALHA

A fim de avaliar a influência da malha de elementos finitos no processo de fraturamento, foram geradas cinco malhas (Fig. 5.9). Inicialmente, foram estabelecidas três malhas com elementos triangulares de três nós distribuídos aleatoriamente, com diferentes níveis de refinamento: malha menos refinada (Fig. 5.9(a)), malha medianamente refinada (Fig. 5.9(b)) e malha refinada (Fig. 5.9(c)). Tentando preservar o grau de refinamento, definiu-se ainda uma malha com elementos triangulares de três nós semiestruturada (Fig. 5.9(d)) e uma malha com elementos quadrilaterais de quatro nós randômica (Fig. 5.9(e)). A partir das respostas dessas malhas (Figs. 5.10, 5.11 e 5.12), são avaliados os seguintes critérios de definição de malha na resposta estrutural:

1. Grau de refinamento da malha;
2. Disposição dos elementos;
3. Tipo de elemento.

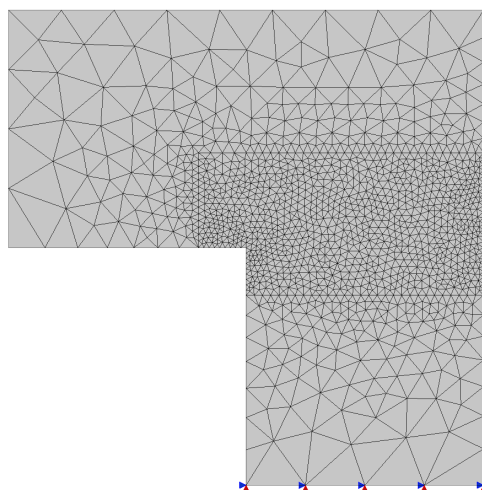
#### 5.3.1 Grau de refinamento da malha

Quanto ao grau de refinamento, foram simuladas três malhas com elementos triangulares de 3 nós distribuídos de forma randômica, com diferentes níveis de refinamento. O objetivo desse estudo é compreender como o número de elementos do modelo interfere nos resultados das análises numéricas em termos de caminho da trinca e trajetória de equilíbrio. Com relação à simulação apresentada na seção anterior, apenas a malha sofreu alteração. As malhas adotadas podem ser caracterizadas por:

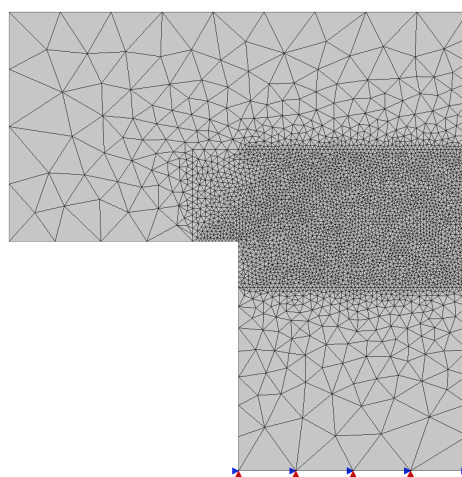
- Malha menos refinada (Fig. 5.9(a)): 2513 elementos;
- Malha medianamente refinada (Fig. 5.9(b)): 6825 elementos;
- Malha refinada (Fig. 5.9(c)): 15428 elementos.

Observa-se que, com relação ao caminho da trinca (Figs. 5.12(a), 5.12(b), 5.12(c) e 5.13), as três malhas apresentaram comportamentos similares. Como foram utilizadas malhas distintas e a descrição da trinca pelo algoritmo ocorre pelas arestas dos elementos, já era esperada uma pequena variação nos caminhos de trinca dessas três malhas.

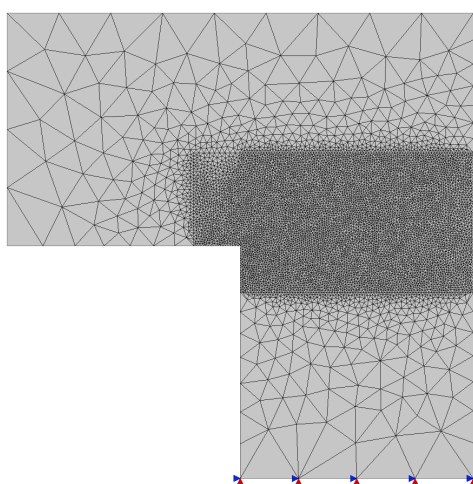
O grau de refinamento não demonstrou influência significativa na análise, indicando que mesmo a malha menos refinada apresenta um número suficiente de elementos para que o caminho da trinca seja descrito com precisão. Apesar do pequeno desvio entre os caminhos de trinca representados pelas simulações numéricas quanto à região de trincas verificadas experimentalmente (Fig. 5.13), os resultados são próximos ao limite inferior dessa região, como observado na seção 5.2. Assim, atribui-se esse desvio à natureza das malhas.



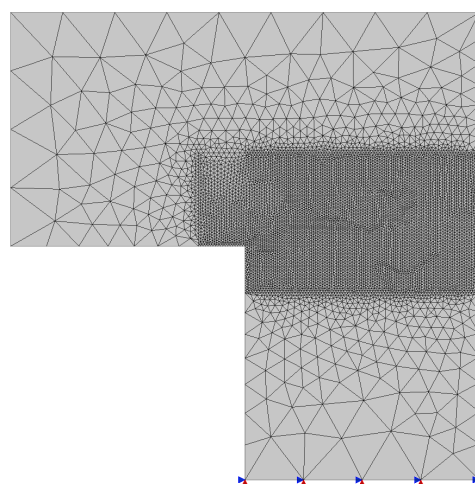
(a) Malha triangular menos refinada randômica



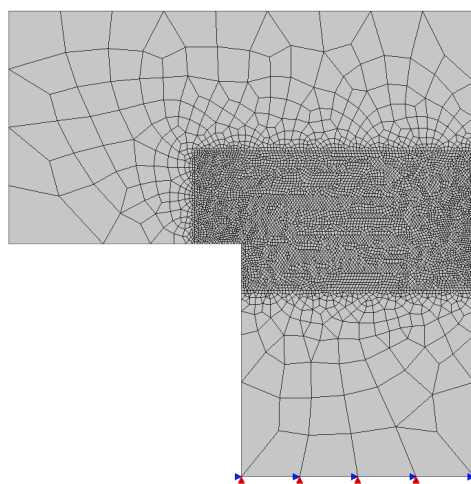
(b) Malha triangular medianamente refinada randômica



(c) Malha triangular refinada randômica

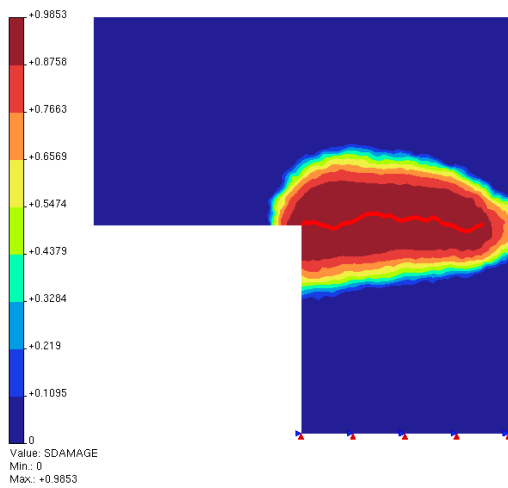


(d) Malha triangular refinada semiestruturada

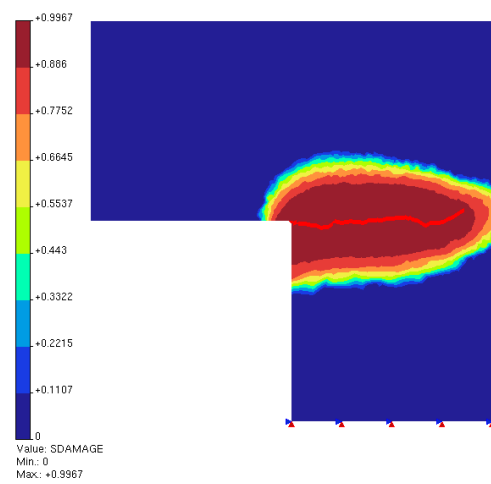


(e) Malha refinada randômica com elementos quadrilaterais

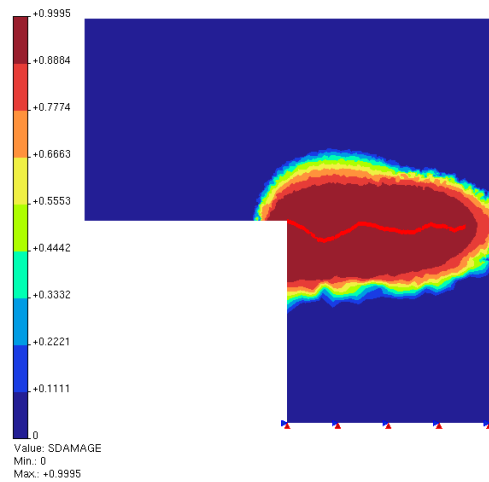
Figura 5.9 – Painel em “L”: propostas de malhas.



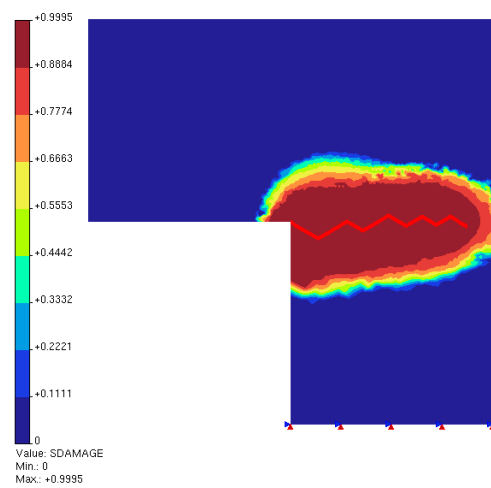
(a) Malha triangular menos refinada randômica



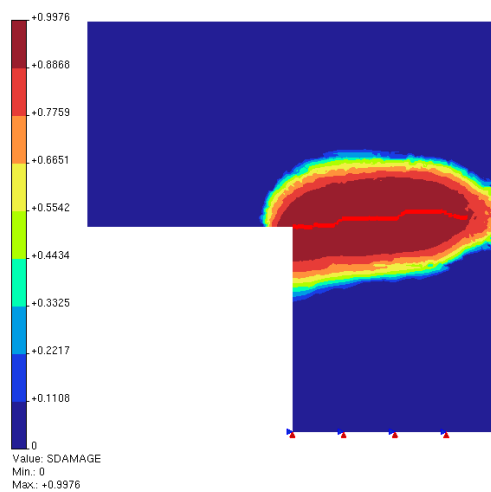
(b) Malha triangular medianamente refinada randômica



(c) Malha triangular refinada randômica

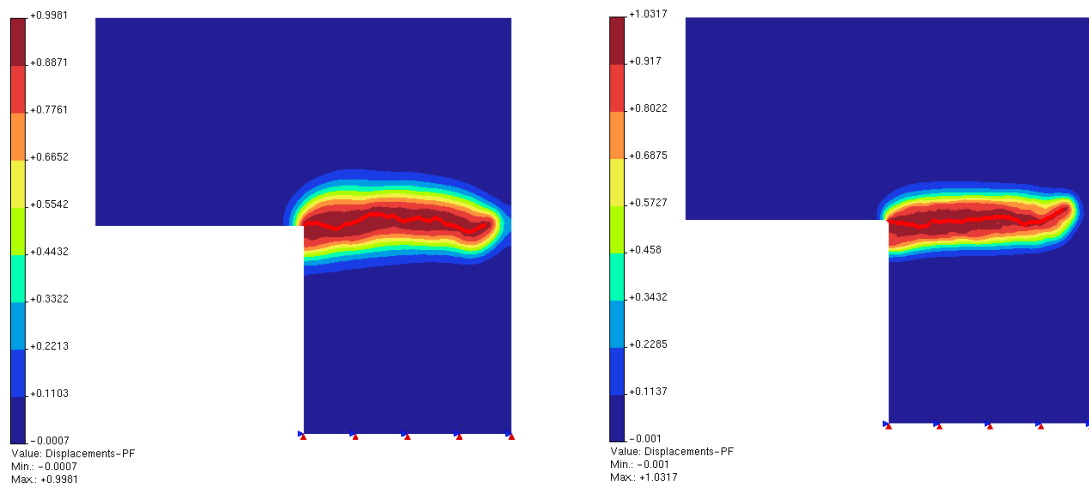


(d) Malha triangular refinada semiestruturada



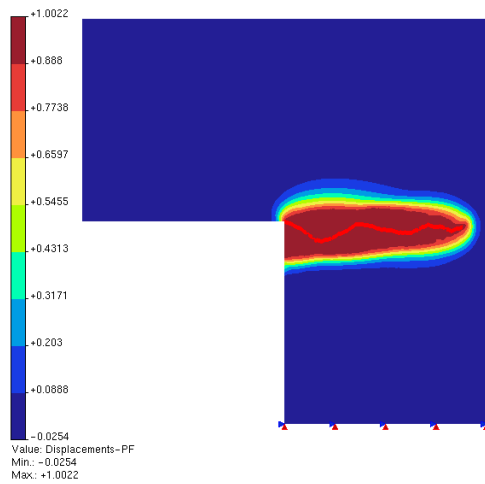
(e) Malha refinada randômica com elementos quadrilaterais

Figura 5.10 – Painel em “L”: distribuição do dano para as diferentes malhas.

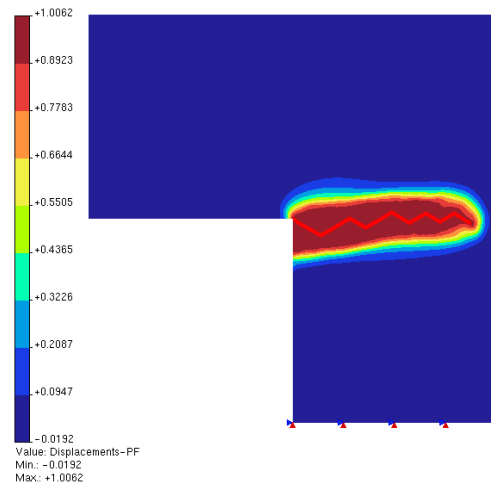


(a) Malha triangular menos refinada randômica

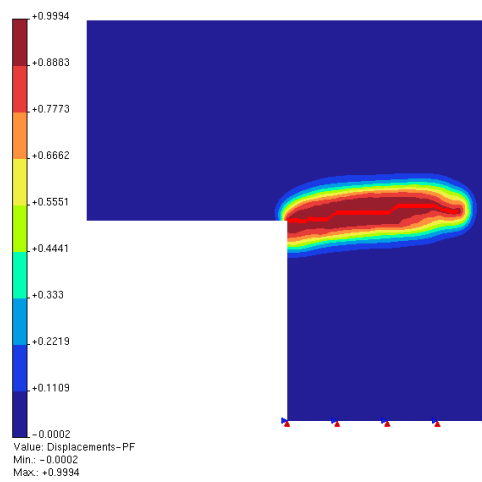
(b) Malha triangular medianamente refinada randômica



(c) Malha triangular refinada randômica



(d) Malha triangular refinada semiestruturada



(e) Malha refinada randômica com elementos quadrilaterais

Figura 5.11 – Painel em “L”: distribuição do *phase-field* para as diferentes malhas.

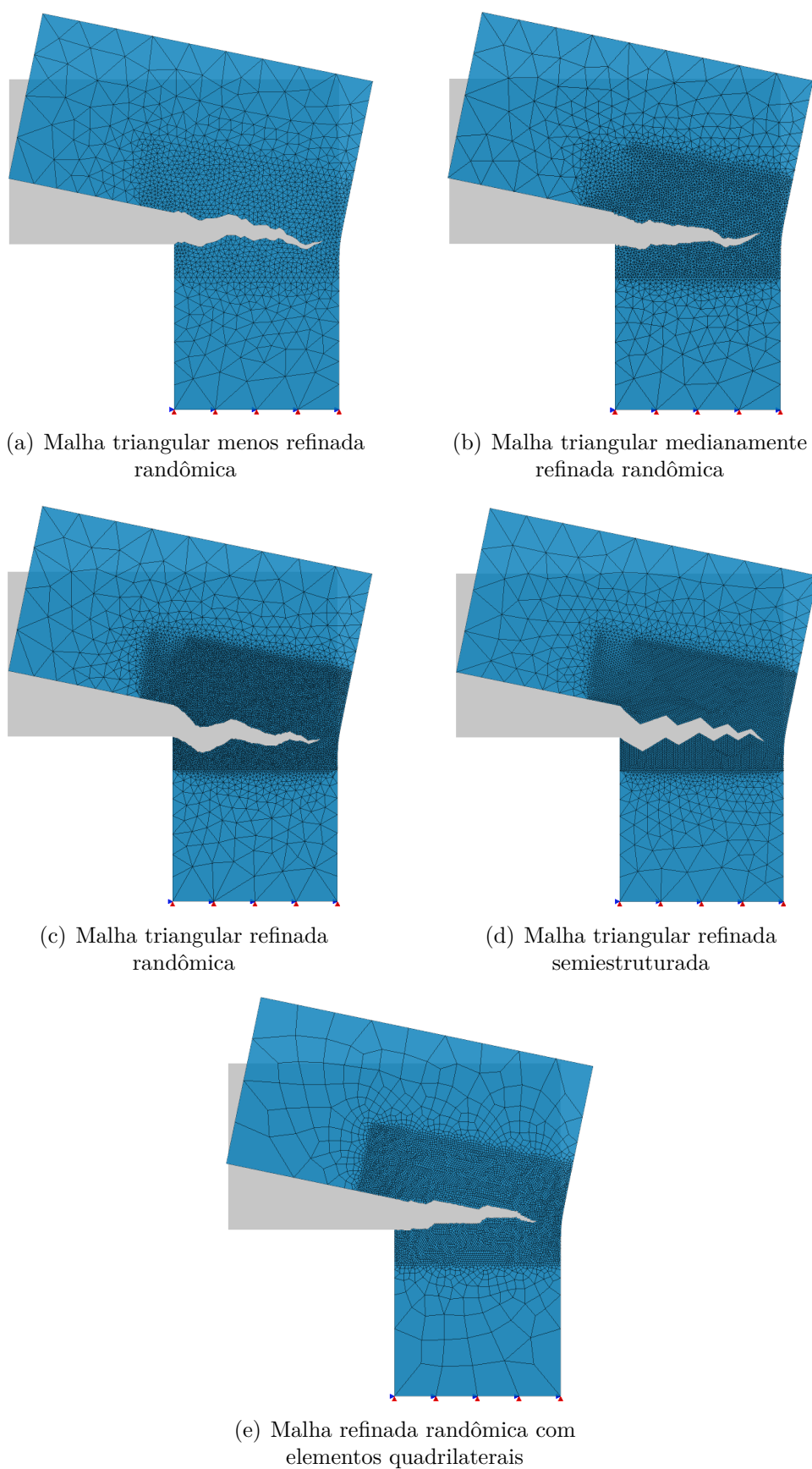


Figura 5.12 – Painel em “L”: trinca discreta para as diferentes malhas.

Quanto às trajetórias de equilíbrio (Fig. 5.14), a malha menos refinada apresentou pequenas instabilidades no ramo de amolecimento, com o surgimento de descontinuidades entre os pontos de equilíbrio. Esse fenômeno resulta de uma propagação mais abrupta da trinca, relacionada ao tamanho dos elementos da malha. Na malha intermediária, essas instabilidades são suavizadas. Entretanto, observa-se um sutil enrijecimento ao final da curva, o qual é corrigido com a malha refinada, que apresenta o melhor ajuste comparado à faixa experimental. Por esse motivo, a malha mais refinada foi admitida como aquela que melhor descreve o fraturamento, sendo mantida nas demais simulações que compõem esse capítulo.

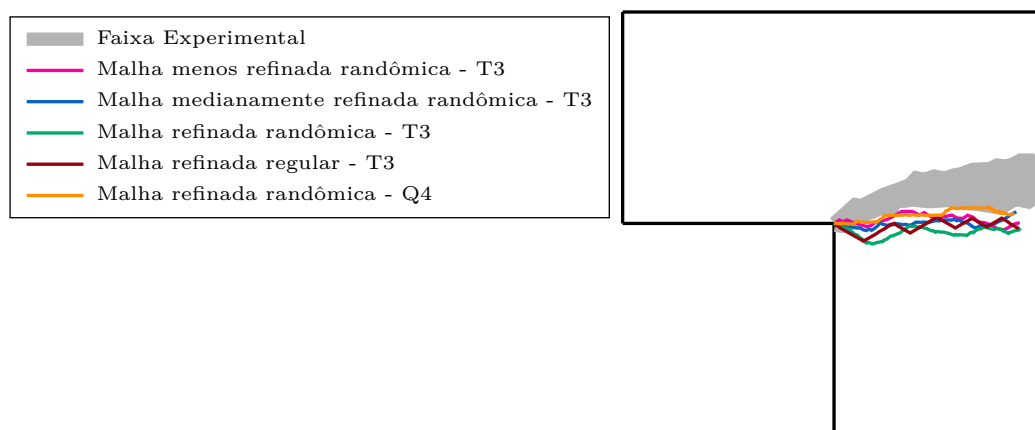


Figura 5.13 – Caminhos de trinca para as diferentes malhas.

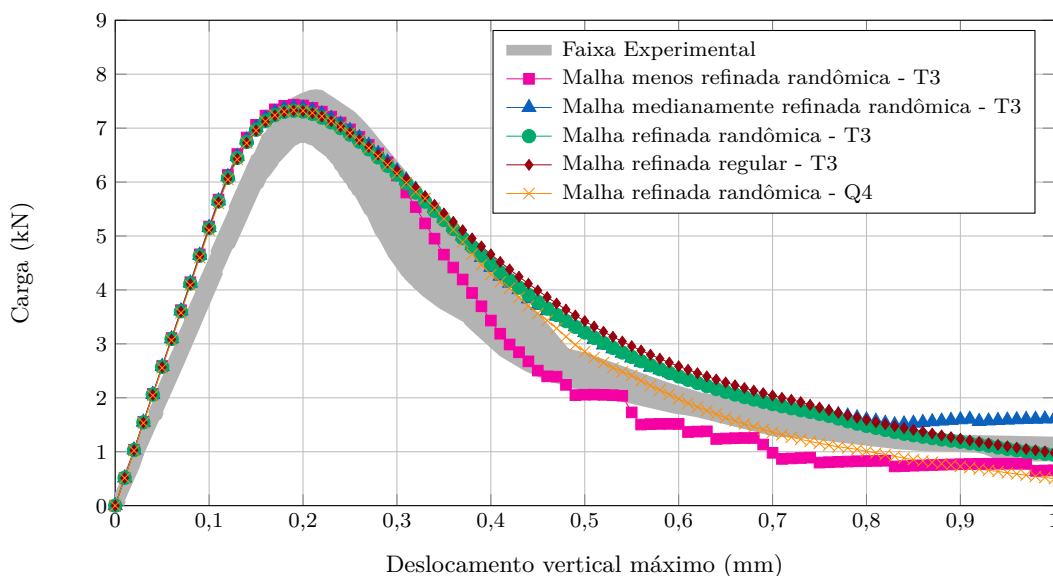


Figura 5.14 – Trajetórias de equilíbrio para cada malha.

### 5.3.2 Análise da disposição dos elementos

A fim de comparar uma malha semiestruturada (Fig. 5.9(d)) com uma malha randômica (Fig. 5.9(c)), para compreender como a disposição dos elementos finitos pode influenciar no caminho da trinca e na resposta estrutural do painel, foi realizada uma simulação de uma malha semiestruturada com 13822 elementos do tipo triangular de 3 nós.

A partir dos resultados representados nas Figs. 5.12(c), 5.12(d), 5.13 e 5.14, pode-se constatar que o caminho da trinca (Fig. 5.13) é o principal impactado pelo uso de malhas com algum tipo de padrão, uma vez que a trinca se propaga nas interfaces de elementos e a estruturação da malha gera um viés de propagação. Assim, é perceptível que o caminho da trinca na malha semiestruturada apresenta uma série de fragmentações, o que indica que malhas randômicas são as mais adequadas para reprodução do fraturamento, permitindo maior liberdade para evolução da trinca.

Com relação às trajetórias de equilíbrio (Fig. 5.14), não há discrepâncias consideráveis na resposta do material para malhas com taxas próximas de refinamento, sejam elas randômicas ou semiestruturadas.

### 5.3.3 Análise do tipo de elemento

Por fim, foi simulada uma análise com malha constituída por 7428 elementos quadrilaterais de 4 nós (Fig. 5.9(e)), distribuídos de forma randômica, para comparar seus resultados com a malha triangular refinada (Fig. 5.9(c)) e compreender como o tipo de elemento finito escolhido afeta as simulações.

A topologia da malha, como esperado, interferiu no caminho da trinca, como pode ser observado na Fig. 5.13. Todavia, essa interferência permanece dentro da região de degradação observada nas simulações com malhas triangulares. Nesse sentido, o caminho da trinca não apresentou grande sensibilidade ao tipo de elemento utilizado.

Quanto à resposta estrutural, a malha com elementos quadrilaterais mostrou grande aderência à faixa experimental. Seu comportamento destoou sutilmente do apresentado pelas malhas triangulares mais refinadas, que, ao final do amolecimento, se aproximaram do limite superior da faixa experimental. Já a malha quadrilateral se ajustou melhor ao limite inferior da faixa experimental. Essas diferenças podem estar associadas à quantidade de pontos de Gauss do modelo quadrilateral, que é superior ao modelo triangular. Todavia, a pequena diferença entre os resultados não justifica o aumento do custo computacional de se adotar uma malha quadrilateral.

Assim, admitiu-se que a malha refinada randômica com elementos triangulares de 3 nós

(Fig. 5.9(c)) foi aquela com melhor performance ao se avaliar o custo computacional e a precisão na descrição do caminho da trinca e da trajetória de equilíbrio.

#### 5.4 CRITÉRIOS DE TRANSIÇÃO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO E DE DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO

Um dos grandes pontos de discussão no desenvolvimento de modelos contínuos-descontínuos é a definição dos critérios de transição de um meio contínuo e degradado para um meio descontínuo com uma trinca explícita, bem como estabelecer a direção de propagação de trincas. Neste trabalho, são analisados três variáveis de controle como critérios de transição contínuo-descontínuo: dano (D), *phase-field* (PF) e variável híbrida (H). Quanto à definição da direção de propagação, pode-se utilizar o valor máximo da variável de controle ( $VC_{máx}$ ) nos nós vizinhos à ponta da trinca, o vetor direção vinculado aos nós conectados à ponta da trinca (nuvem de nós), ou o vetor direção associado aos nós no domínio não local (nl) de propagação. Nesta simulação, esses dois últimos critérios de direção de propagação foram baseados exclusivamente na distância angular, como descrito na seção 4.3.2.

Para avaliar esses critérios, foram mantidos os parâmetros materiais obtidos pela simulação de Monte Carlo e a malha refinada com elementos triangulares. O valor limite para transição contínuo-descontínuo e propagação da trinca para quaisquer das variáveis de controle foi de 0,95. Contudo, ressalta-se que este valor deve ser apropriadamente determinado em função do critério de transição, propriedades do material e comportamento estrutural, análise que será apresentada na seção 5.5.

Os resultados apresentados a partir desse ponto seguem a seguinte nomenclatura: N representa o critério de transição - dano (D), *phase-field* (PF) ou variável híbrida (H) - e P representa o critério de direção de propagação, que avalia a variável de controle (D, PF ou H) segundo seu valor máximo (max) ou o cálculo vetor de direção, que pode ser estabelecido segundo a nuvem de nós (nuvem) ou o domínio não local (nl).

A princípio, o dano foi admitido como variável de controle para a transição contínuo-descontínuo, combinado às diferentes estratégias para definição da direção de propagação. Considerando o caminho da trinca, conforme ilustrado na Fig. 5.15, observa-se que as associações com a direção de propagação por dano máximo e segundo o vetor de direção não local para dano ou *phase-field* foram estratégias efetivas. Os caminhos de trinca convergiram com a região experimental de fraturamento. Todavia, o critério de direção de propagação com o vetor definido apenas pelos nós conectados à ponta da trinca mostrou-se ineficaz, sofrendo grandes desvios comparado aos demais caminhos de trinca. Já a simulação com direção de propagação conduzida pelo *phase-field* máximo apresentou

instabilidades. Como o *phase-field* concentra-se em uma região estreita de degradação (de forma similar ao observado na Fig. 5.11), a trinca tende a voltar ao ponto de origem, o que compromete sua propagação. Isso faz com que a simulação seja encerrada precocemente.

Avaliando o comportamento estrutural representado na Fig. 5.16, nota-se um padrão de comportamento bastante similar em todas as análises numéricas, que vão ao encontro da resposta experimental. Contudo, assim como verificado para o caminho da trinca, a simulação com direção de propagação segundo o dano na nuvem de elementos divergiu das demais respostas ao final do amolecimento, apresentando comportamento com um enrijecimento induzido. A análise com propagação guiada pelo valor máximo da variável *phase-field*, por sua vez, não conseguiu convergir todos os passos, uma vez que a propagação foi comprometida com a trinca retornando à região de nucleação.

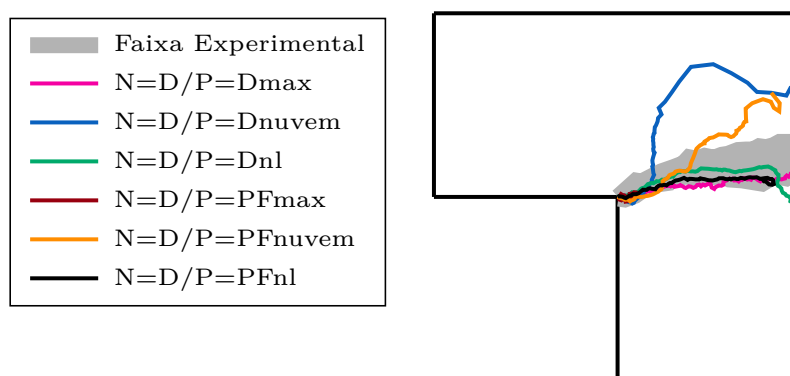


Figura 5.15 – Caminhos de trinca considerando o dano ( $N=D$ ) como critério de nucleação e diferentes estratégias de direção de propagação.

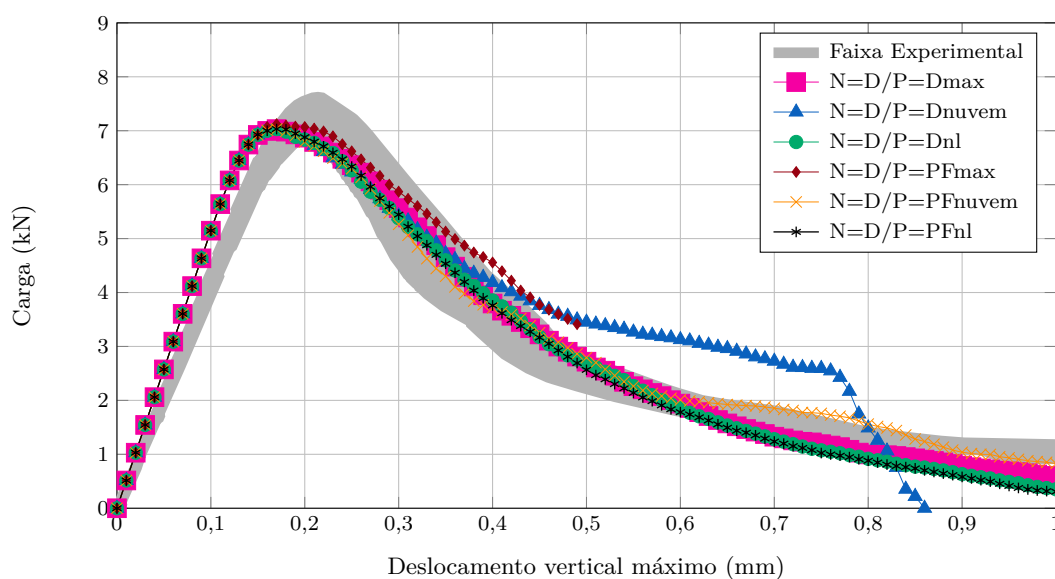


Figura 5.16 – Trajetórias de equilíbrio considerando o dano como critério de nucleação ( $N=D$ ) e diferentes estratégias de direção de propagação.

Alterando o critério de nucleação e evolução para o *phase-field*, foram verificados comportamentos similares aos obtidos com o dano. Quanto ao caminho da trinca, aqueles que mais destoaram do padrão foram as simulações com propagação conduzidas pelo vetor de direção restrito aos nós conectados à ponta da trinca, conforme a Fig. 5.17. Todavia, os desvios não foram tão expressivos quanto os notados para o dano. O critério de *phase-field* máximo falhou pelo mesmo motivo discutido anteriormente, com a trinca retornando à região de nucleação ao invés de se propagar. As trajetórias de equilíbrio, por outro lado, (Fig. 5.18) não foram comprometidas - todas as trajetórias convergiram para a faixa experimental.

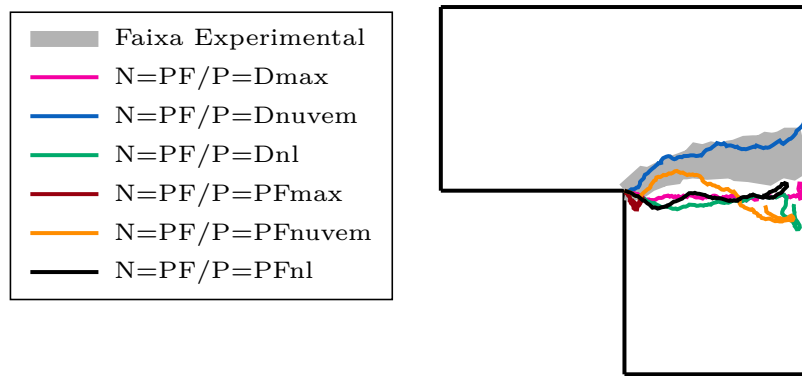


Figura 5.17 – Caminhos de trinca considerando o *phase-field* como critério de nucleação (N=PF) e diferentes estratégias de direção de propagação.

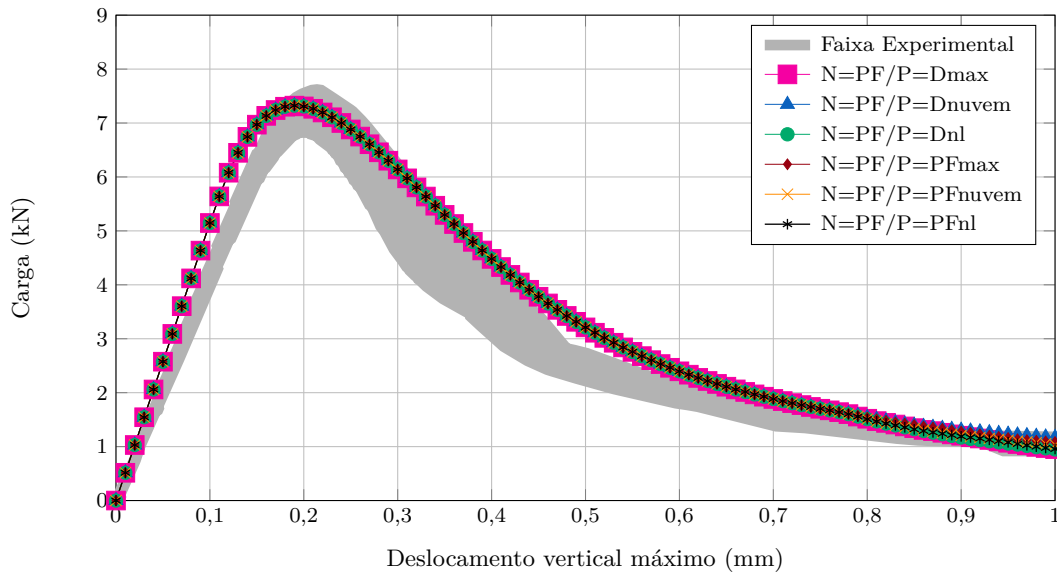


Figura 5.18 – Trajetórias de equilíbrio considerando o *phase-field* como critério de nucleação (N=PF) e diferentes estratégias de direção de propagação.

Por fim, foi avaliada a variável híbrida H como critério de nucleação e evolução e também como variável para determinação da direção de propagação. Como o *phase-field* máximo

se mostrou ineficaz para conduzir a propagação de trincas, assim como o vetor de direções restrito aos nós conectados, optou-se por avaliar apenas o critério mais promissor para a definição da direção de propagação, baseado no vetor de direções calculado no domínio não local.

Após a análise, observou-se que o caminho da trinca foi coerente ao espectro experimental (Fig. 5.19), entretanto, a trajetória de equilíbrio (Fig. 5.20) superestimou a carga de pico. Nesse sentido, a variável híbrida mostrou-se menos sensível ao valor crítico do que as variáveis de dano e *phase-field* quando analisadas individualmente.

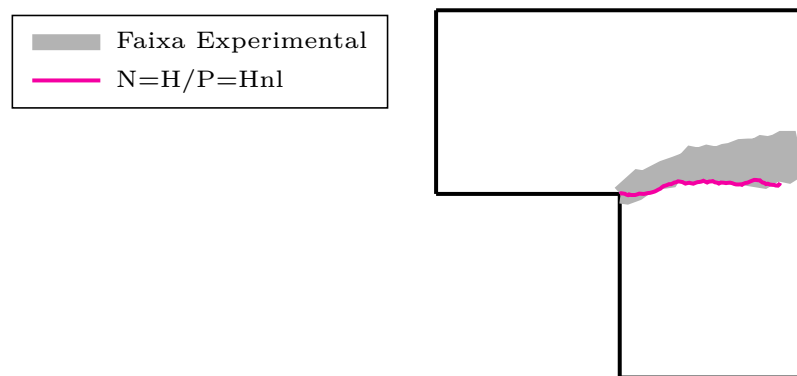


Figura 5.19 – Caminho da trinca considerando a variável híbrida como critério de nucleação ( $N=H$ ) e direção de propagação.

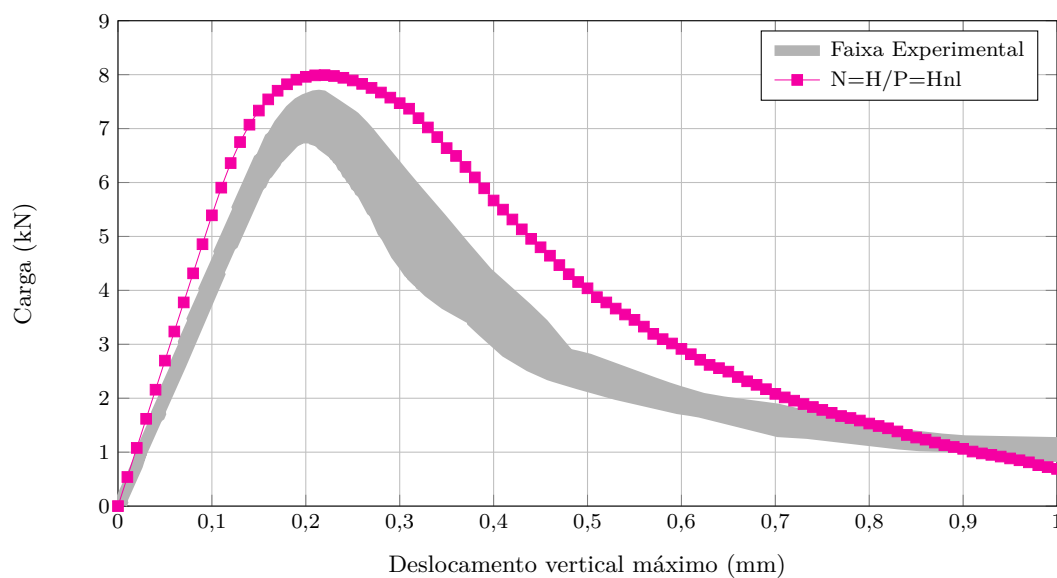


Figura 5.20 – Trajetória de equilíbrio considerando a variável híbrida como critério de nucleação ( $N=H$ ) e direção de propagação.

Portanto, para uma resposta estrutural mais precisa utilizando a variável híbrida como variável de controle, faz-se necessário um ajuste do valor limite da transição contínuo-descontínuo para um valor inferior ao adotado de 0,95. Tal constatação é justificada pelo

fato do dano atingir valores maiores no início da simulação, se estabilizando para valores mais elevados. Já o *phase-field* apresenta um crescimento inicial mais lento, contudo, tem um crescimento mais intenso à medida que a degradação evolui. Nesse cenário, em que a variável híbrida é uma composição de dano e *phase-field*, as características observadas por cada uma dessas grandezas são abarcadas pela medida híbrida. Esse estudo é apresentado na seção 5.5, a seguir.

## 5.5 VALOR CRÍTICO PARA A TRANSIÇÃO

Nas simulações anteriores foi fixado o valor limite da variável de controle como 0,95, que é o valor crítico a partir do qual a fissuração distribuída no meio contínuo culmina em uma trinca discreta (transição contínuo-descontínuo). A opção por esse valor foi pautada na literatura, conforme discussão apresentada na seção 2.4, em que a trinca explícita surge quando a variável responsável pela degradação se aproxima de 1,0. Entretanto, esse valor ainda é muito discutido e valores inferiores são justificados em função do critério de transição adotado.

Na presente seção é proposta uma investigação dos valores limites assumidos pelas variáveis de controle, sendo avaliados valores limites variando de 0,1 a 1,0. Adotou-se incremento de 0,1 em 0,1 para os valores até 0,9. Nas proximidades da unidade, essa variação foi reduzida, analisando os valores de 0,95, 0,99 e 1,0.

### 5.5.1 Dano crítico

Inicialmente, admitiu-se o dano como variável de controle e direção de propagação por dano não local. Os caminhos de trinca são ilustrados na Fig. 5.21. A visualização individual desses caminhos para cada valor de  $L$  está disponível no Apêndice C. As trajetórias de equilíbrio são apresentadas na Fig. 5.22.

Para o valor de dano limite de 1,0 não foi verificada abertura de trinca. Nesse caso, a nucleação da trinca explícita é demasiadamente tardia, de modo que a análise atingiu o estágio mais avançado de carregamento sem que o nó de nucleação alcançasse o valor limite. Assim, essa tornou-se uma análise exclusivamente contínua, sem a introdução da descontinuidade geométrica. Já os valores limites de 0,1 e 0,2 levaram o painel a uma ruptura precoce, ainda no ramo elástico, imediatamente após o surgimento da trinca.

Entre os limites de 0,3 e 0,99 foram obtidos resultados satisfatórios tanto para o caminho da trinca, quanto para a trajetória de equilíbrio. Todos os caminhos de trinca obtidos numericamente ficaram na região de fraturamento observada experimentalmente (Fig. 5.21). Pequenos desvios da trinca foram notados ao final da propagação, devido à região

de compressão que surge na face direita do pórtico. As curvas que melhor aproximaram a carga de pico da faixa experimental (Fig. 5.22) foram aquelas simuladas com limite de 0,9 e 0,95.

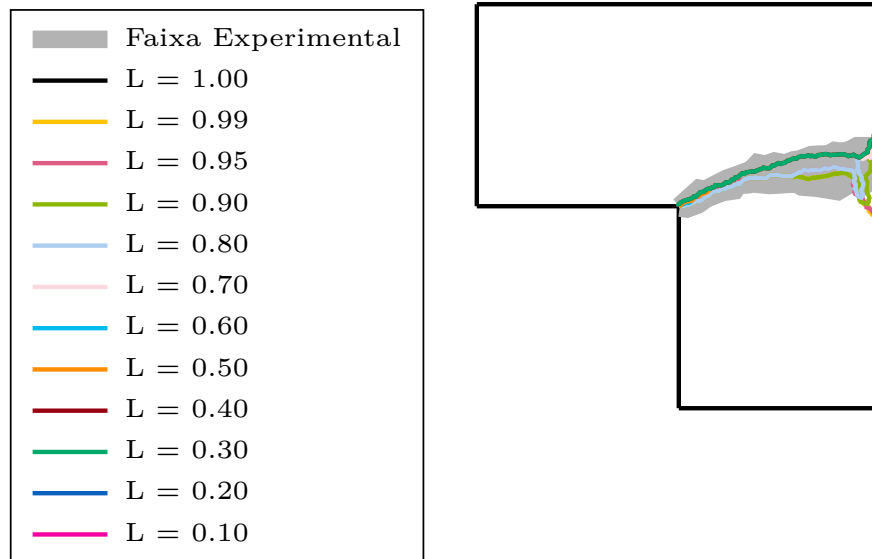


Figura 5.21 – Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por dano não local.

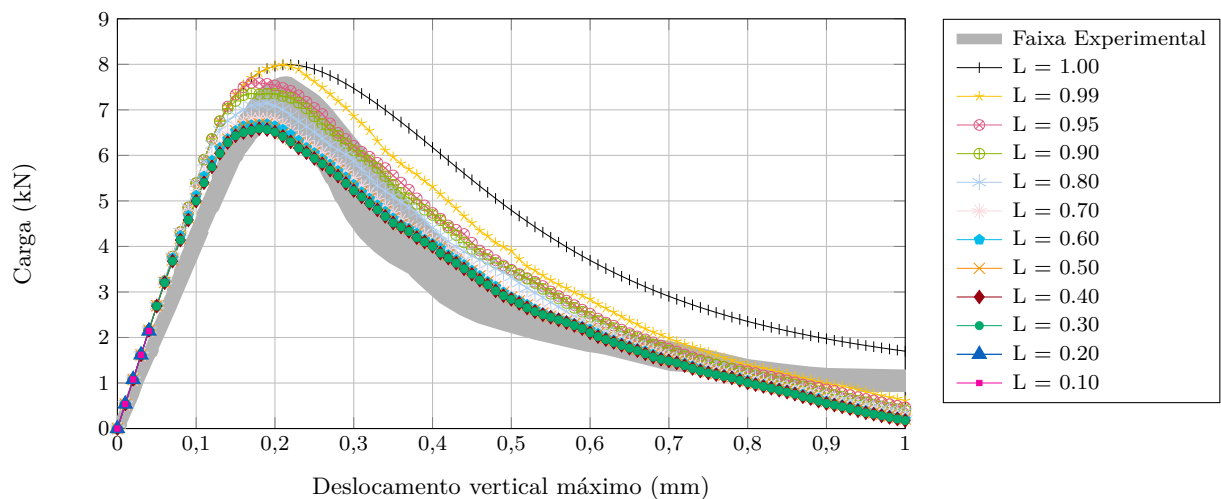


Figura 5.22 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por dano não local.

Mantendo o dano como variável de controle e prescrevendo o *phase-field* para definição do vetor de direções no domínio não local, foram realizadas novas análises, cujos resultados são apresentados nas Figs. 5.23 e 5.24.

Analisando os caminhos de trinca apresentados na Fig. 5.23, ilustrados individualmente no Apêndice C, observou-se que apenas para o limite de  $L = 1,0$  não houve propagação

da trinca, já que esse é o valor extremo, raramente observado nas análises numéricas. Os valores limites de  $L = 0,1$  e  $L = 0,2$  que na análise anterior resultaram em ruptura precoce, com o *phase-field* responsável pela propagação da trinca passaram a indicar caminhos de trinca completos. Como o *phase-field* evolui tardiamente com relação ao dano, mesmo valores baixos dessa grandeza já estão associados a altas taxas de degradação, o que torna possível orientar a trinca com mais precisão.

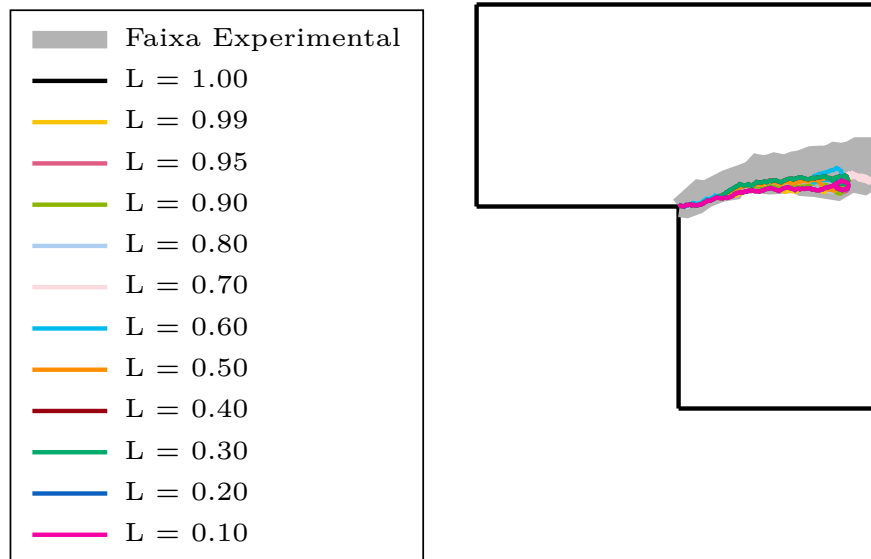


Figura 5.23 – Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por *phase-field* não local.

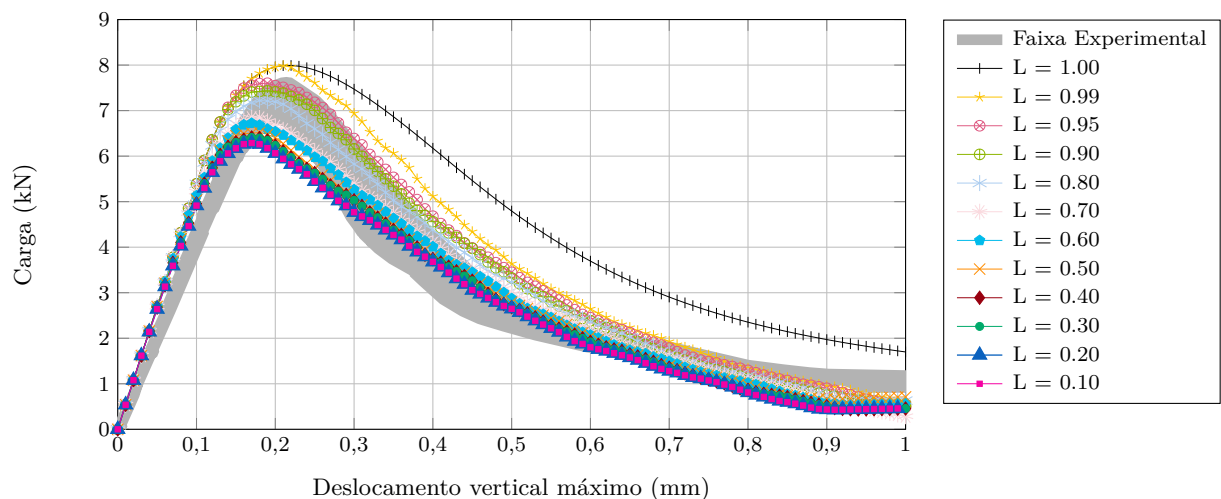


Figura 5.24 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por dano e direção de propagação por *phase-field* não local.

Os caminhos de trinca foram similares, com um menor espalhamento se comparados às simulações totalmente regidas pelo dano. Essa restrição do caminho de propagação a

uma região mais estreita provém da característica do *phase-field* avançar em uma área mais localizada que o dano, que já é naturalmente mais disperso, característica ainda mais acentuada em modelos não locais (Fig. 5.10). Diante disso, o *phase-field* mostrou-se um parâmetro mais preciso na indicação do caminho da trinca. Ao final da propagação, chegando a face direita do painel, as trincas apresentaram a tendência de retornar, dada a região de compressão que ali surge, impedindo o avanço da trinca.

Com relação à resposta estrutural ilustrada na Fig. 5.24, novamente os valores limites de 0,90 e 0,95 foram aqueles que mais se aproximaram da carga de pico experimental. Essas respostas confirmam os resultados da análise anterior e reiteram as discussões da literatura que apontam que, ao se adotar o dano como critério de transição contínuo-descontínuo, os valores limites que marcam a transição contínuo-descontínuo se aproximam da unidade.

### 5.5.2 *Phase-field* crítico

Em seguida, novas simulações foram realizadas adotando-se o *phase-field* como variável de controle, assim como parâmetro para definir o vetor de direção da propagação baseado no domínio não local à frete da trinca. Ressalta-se que a possibilidade de transição contínuo-descontínuo por *phase-field* e direção de propagação por dano foi descartada, uma vez que a variável de dano chega aos valores críticos primeiro que a variável de *phase-field*. Nesse contexto, não há sentido físico em indicar uma trinca explícita em uma região com *phase-field* elevado seguido por uma ZPF com uma taxa de degradação superior à própria trinca.

Os caminhos de trinca obtidos, conforme apresentado na Fig. 5.25 e no Apêndice C, foram praticamente idênticos aos encontrados nas simulações com dano como variável de controle e direção de propagação por *phase-field*. Esses resultados indicam que a trajetória da trinca tem maior dependência do critério que define sua direção de evolução do que da variável de controle escolhida para indicar a transição contínuo-descontínuo.

Quanto à trajetória de equilíbrio (Fig. 5.26), todas as curvas apresentaram boas aproximações da carga de pico e apenas os valores limite de 0,99 e 1,0 superestimaram de forma mais proeminente o ramo de amolecimento. Conclui-se que os valores limites de *phase-field* de 0,1 a 0,95 foram adequados à representação da resposta estrutural com fraturamento.

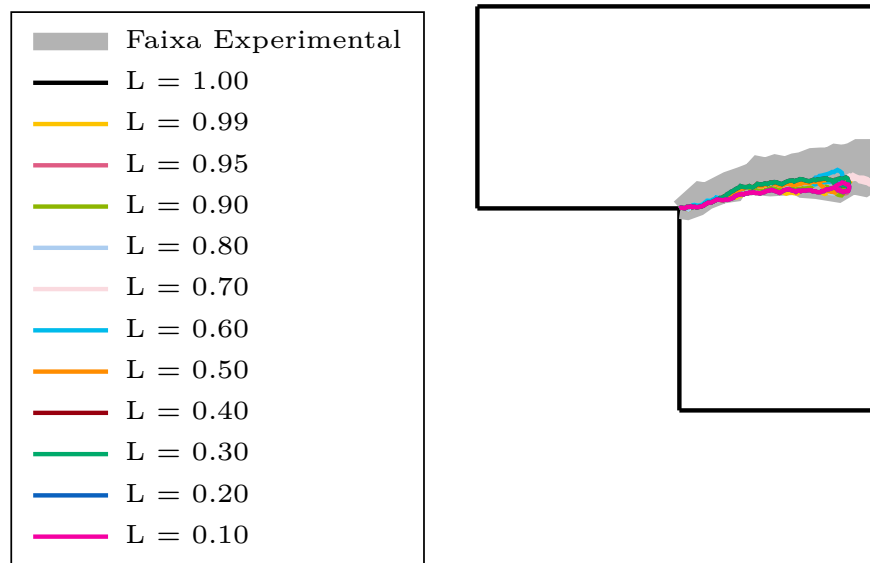


Figura 5.25 – Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por *phase-field* e direção de propagação por *phase-field* não local.

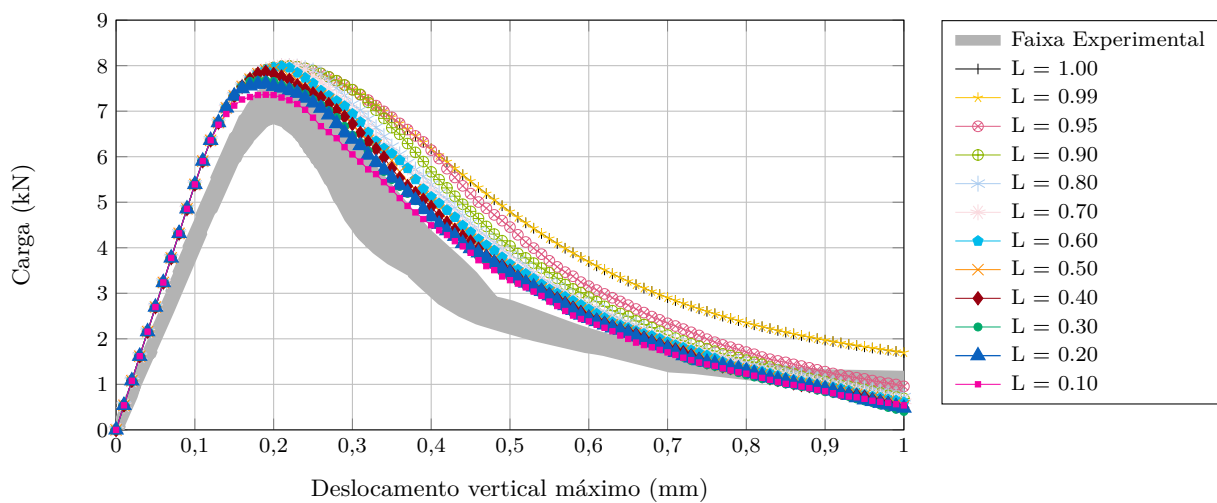


Figura 5.26 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação por *phase-field* e direção de propagação por *phase-field* não local.

### 5.5.3 Variável híbrida crítica

Por fim, o painel foi estudado admitindo a variável híbrida como VC, bem como pelo vetor de direção que rege o caminho de propagação. Conforme esperado, foi observado um comportamento intermediário entre as respostas para dano e *phase-field* isoladamente.

Os caminhos de trinca, ilustrados na Fig. 5.27 e detalhados no Apêndice C, convergiram com aqueles obtidos para o *phase-field* como variável determinante da direção de propaga-

ção. Assim, ainda que dano e *phase-field* tenham sido avaliados nessa análise, o *phase-field* se apresentou como variável preponderante na determinação do caminho da trinca.

Para a resposta estrutural do painel, dada pelas trajetórias de equilíbrio da 5.28, observou-se picos menores de carga para valores de  $H$  menores, e picos maiores para  $H$  próximo da unidade. Esse resultado mostra que a descrição do comportamento estrutural tem maior correlação com a variável de dano, com resposta similar à primeira análise desta seção. Valores intermediários de  $H$ , entre 0,2 e 0,6, foram os que apresentaram respostas compatíveis com a carga de pico experimental.

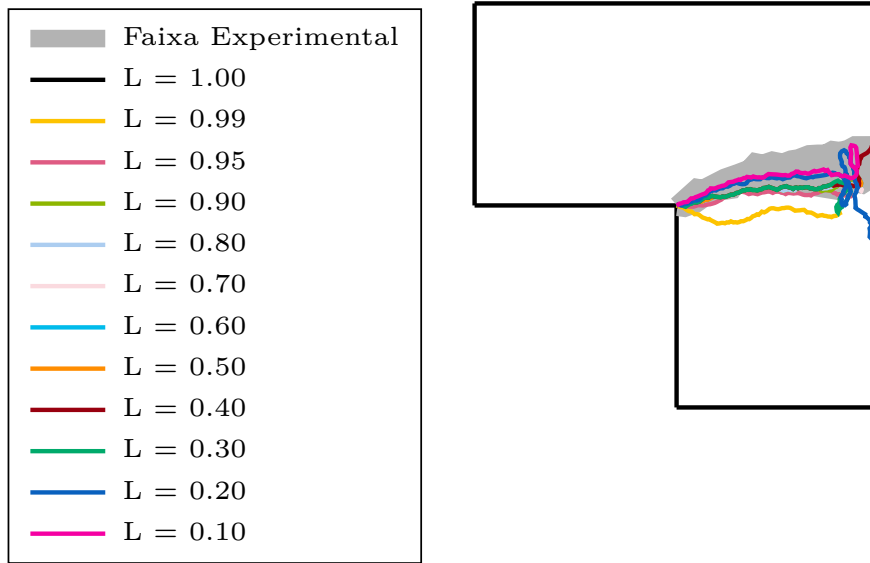


Figura 5.27 – Caminhos de trinca para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação pela variável híbrida e direção de propagação conforme variável híbrida não local.

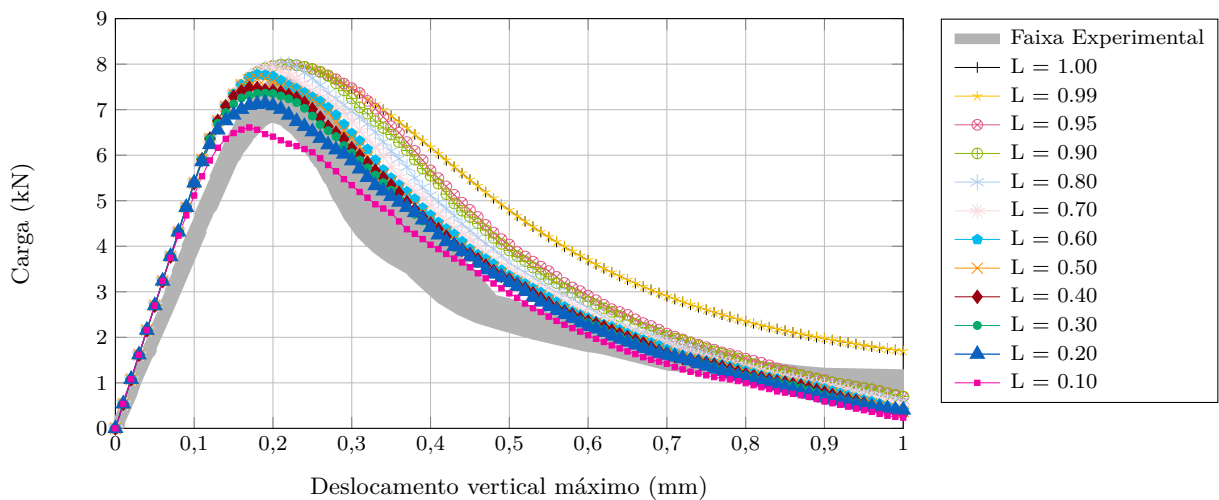


Figura 5.28 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores limites de abertura de trincas - nucleação pela variável híbrida e direção de propagação conforme variável híbrida não local.

## 5.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS

A partir das análises do Painel em “L” apresentadas neste capítulo, foi possível compreender, em termos gerais, o comportamento do modelo contínuo-descontínuo proposto. As principais constatações assumidas segundo os resultados obtidos são sintetizadas em:

- i O processo de parametrização segundo simulações de probabilidades múltiplas se apresenta como uma metodologia para lidar com as incertezas inerentes às propriedades do material e ao fenômeno do fraturamento.
- ii Malhas refinadas com distribuição randômica são as mais adequadas para reprodução de trincas explícitas. O elevado grau de discretização, vinculado a uma malha sem estruturação, amplia as possibilidades de representação de caminhos de trinca diversos.
- iii Tanto dano quanto *phase-field* - e, conseqüentemente, a variável híbrida - mostraram-se critérios eficientes para anunciar a transição contínuo-descontínuo. Contudo, quanto à direção de propagação, o caráter localizado do *phase-field* apontou que essa grandeza tem melhor desempenho como indicador do caminho de evolução da trinca.
- iv Os valores críticos assumidos pelas variáveis de controle dependem da natureza da variável. Pressupõe-se ainda que eles valores têm correlação com o modo de fratura e também com o modelo estrutural analisado, questões que serão discutidas com mais detalhes no capítulo 6.

Essas conclusões são apresentadas de forma gráfica na Fig. 5.29.

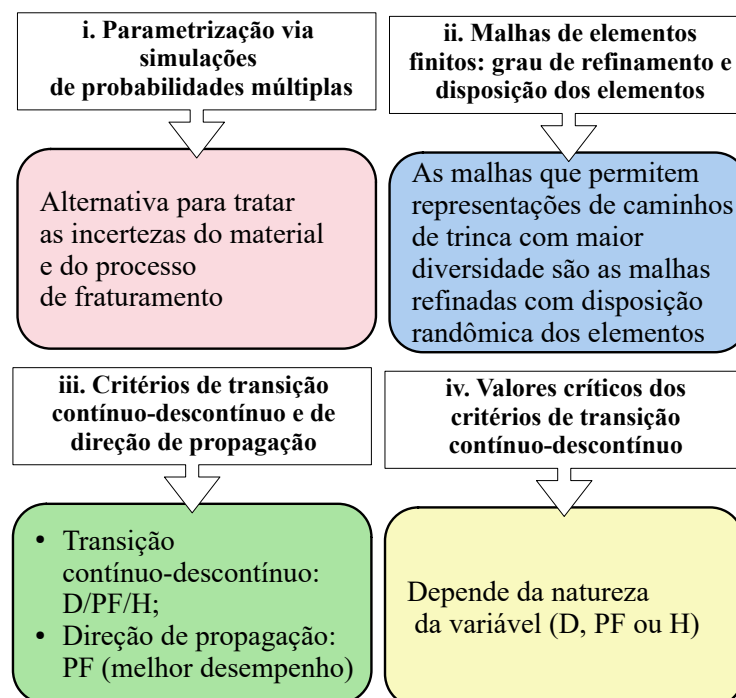


Figura 5.29 – Síntese dos resultados das análises do Painel em “L” .

## 6 Simulações numéricas: análises complementares

Neste capítulo são apresentadas simulações numéricas com diferentes condições de contorno e aspectos de trinca, a fim de estender a aplicação do modelo contínuo-descontínuo desenvolvido a diferentes tipos de estruturas. São apresentadas análises de tração (seção 6.1), flexão em três pontos (seção 6.2), cisalhamento em quatro pontos (seção 6.3), arrancamento (seção 6.4) e da propagação de trinca em uma barragem (seção 6.5).

### 6.1 TRAÇÃO DIRETA

Esta simulação numérica baseia-se na investigação experimental realizada por Hordijk (1991) de uma amostra de concreto com entalhes duplos simétricos submetida à tração uniaxial. A geometria da amostra, ilustrada na Fig. 6.1(a), é dada por uma seção retangular com largura  $b = 60$  mm, altura  $h = 125$  mm e espessura fora do plano de  $t = 50$  mm. Os entalhes simétricos, com dimensões de  $5 \times 5$  mm<sup>2</sup>, foram inseridos ao longo da altura da amostra, no seu eixo central.

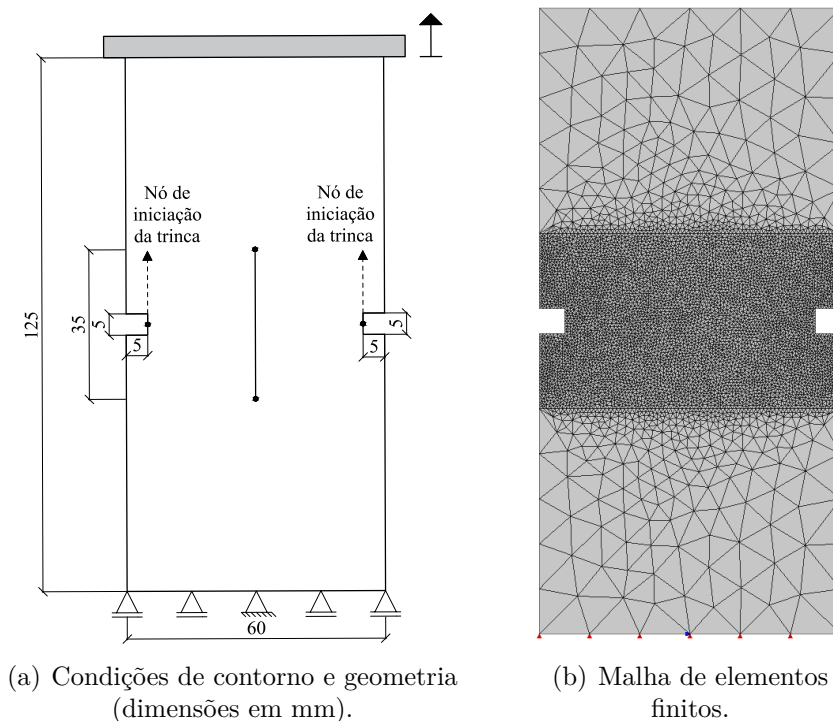


Figura 6.1 – Chapa tracionada - ensaio de Hordijk (1991).

Quanto ao modelo de elementos finitos utilizado nessa análise, foi definida uma malha de 11782 elementos, conforme representado na Fig. 6.34(b). Para garantir a estabilidade da

peça, foi aplicada uma restrição ao grau de liberdade horizontal no nó central da base da amostra. Além disso, todos os nós da borda inferior tiveram o grau de liberdade vertical restrito. Aplicou-se um carregamento distribuído, de resultante unitária, na borda superior da peça, sendo adotado controle direto de deslocamento com incremento de 0,0025 mm dos deslocamentos verticais dos nós situados nessa borda e tolerância para convergência em deslocamentos de  $1,0 \times 10^{-4}$ .

As propriedades do material adotadas foram módulo de elasticidade  $E = 18$  GPa, energia de fratura  $G_c = 0,0593$  N/mm, resistência à tração  $f_t = 3,4$  MPa (HORDIJK, 1991) e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  (PEERLINGS et al., 1998). O modelo de dano empregado foi o modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995), com lei de evolução exponencial, cujos parâmetros foram inicialmente admitidos conforme apresentados por Bobiński e Tejchman (2015):  $k = 10$ ,  $\kappa_0 = 2,1 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0,96$  e  $\beta = 500$ . O raio do modelo não local foi considerado igual a  $\ell = 17$  mm, enquanto o comprimento intrínseco do MPF foi estabelecido como  $l_0 = 1,0$  mm. O critério de nucleação das trincas foi *phase-field*, com orientação de propagação da trinca estabelecida conforme o vetor de direção calculado a partir da média ponderada da distribuição do *phase-field* no domínio da ZPF, nesse caso admitido como o mesmo domínio não local do modelo de dano.

A partir de análises preliminares, observou-se a necessidade de duas simulações de Monte Carlo para uma parametrização adequada do material. A primeira delas (MC1) foi dedicada aos parâmetros da lei de dano exponencial  $\kappa_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Como a evolução do dano é dada por uma lei matemática e há apenas uma estimativa dos parâmetros utilizados por Bobiński e Tejchman (2015), sem a preocupação dos referidos autores por estabelecer uma correspondência direta com propriedades físicas do material, os valores dessas grandezas foram admitidos como pseudoaleatórios gerados dentro dos intervalos apresentados na Tab. 6.1. Observou-se ainda que o valor definido por Bobiński e Tejchman (2015) para  $\beta = 500$  não forneceu um ajuste adequado ao ramo de amolecimento do material e, por isso, essa variável teve seus limites mínimo e máximo redefinidos.

Tabela 6.1 – Parâmetros da lei de dano para a tração - intervalo de valores

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
$\kappa_0$	0,00019	0,00022
$\alpha$	0,9	0,999
$\beta$	1000	2000

Uma segunda simulação de Monte Carlo (MC2) foi realizada considerando que, além dos parâmetros listados na Tab. 6.2, o módulo de elasticidade  $E$  também estaria sujeito a uma variação dentro do intervalo de 16 a 20 GPa. Ao considerar a variabilidade desse parâmetro, buscou-se um melhor ajuste do trecho elástico da simulação confrontada à curva experimental.

As trajetórias de equilíbrio obtidas para a primeira e a segunda parametrização são apresentadas, respectivamente, nas Figs. 6.2 e 6.3. Os parâmetros associados às curvas ótimas são indicados na Tab. 6.2.

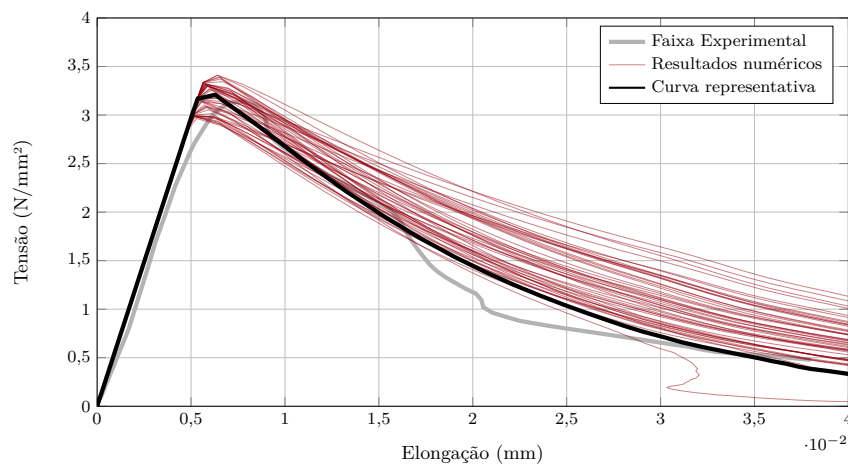


Figura 6.2 – Trajetórias de equilíbrio: MC1.

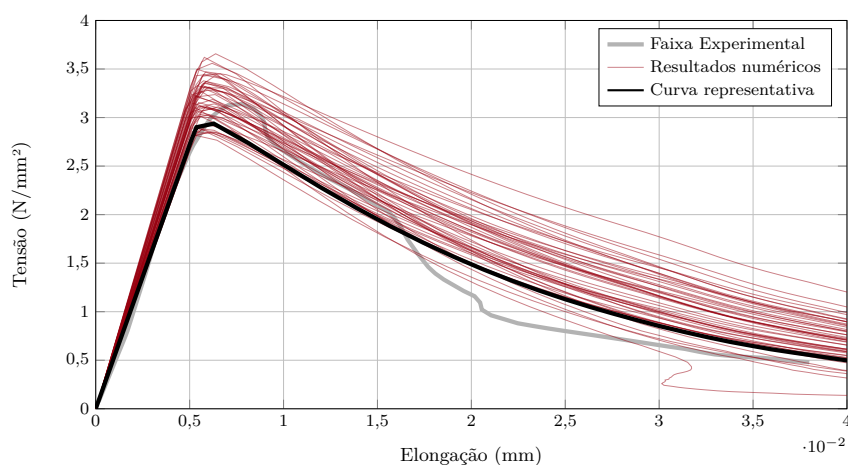


Figura 6.3 – Trajetórias de equilíbrio: MC2.

Tabela 6.2 – Parâmetros associados às curvas ótimas obtidas via simulações de Monte Carlo

Parâmetro	MC1	MC2
$E$ (GPa)	18	16,478
$\kappa_0$	0,000209	0,000208
$\alpha$	0,97	0,95
$\beta$	1984	1773

Quanto aos caminhos das trincas obtidos para as simulações de Monte Carlo, segundo ilustrado na Fig. 6.4, as duas frentes de trinca evoluíram partindo dos entalhes para a região central da chapa, até a ruptura da peça, quando as trincas convergem. As trincas respeitaram um padrão de propagação, com exceção da frente de trinca 2 de uma das

amostras da simulação MC2, que apresentou uma propagação em uma direção próxima a  $45^\circ$ . Esse resultado foi assumido como espúrio, dado que nenhuma das outras 99 amostras apresentaram respostas similares.

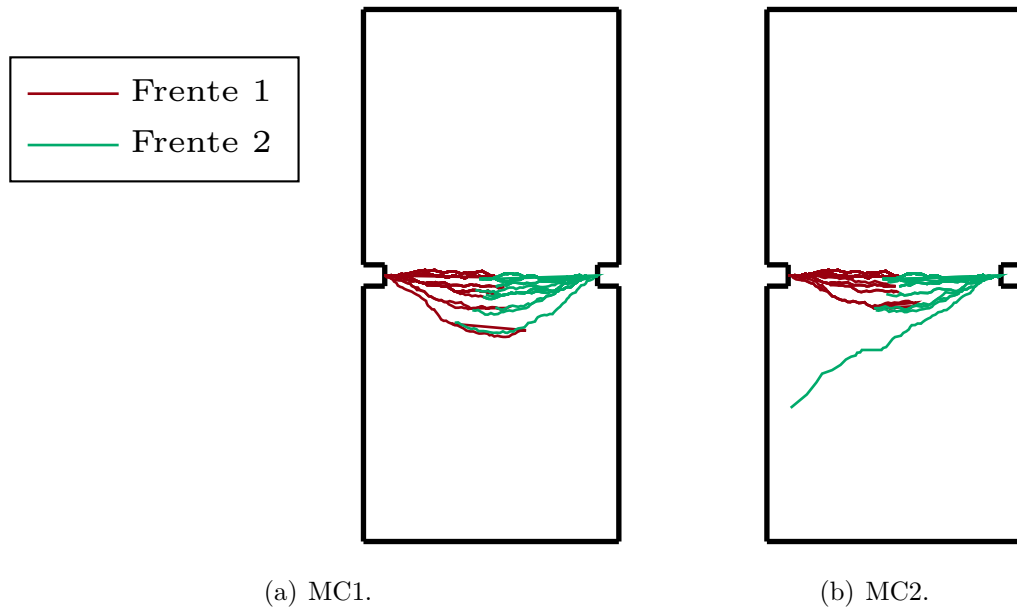


Figura 6.4 – Caminhos de trinca.

Para as amostras associadas às curvas ótimas, são apresentadas as configurações deformadas da chapa tracionada na Fig. 6.5 e a distribuição da degradação na Fig. 6.6 - dano e *phase-field* - ao final das simulações.

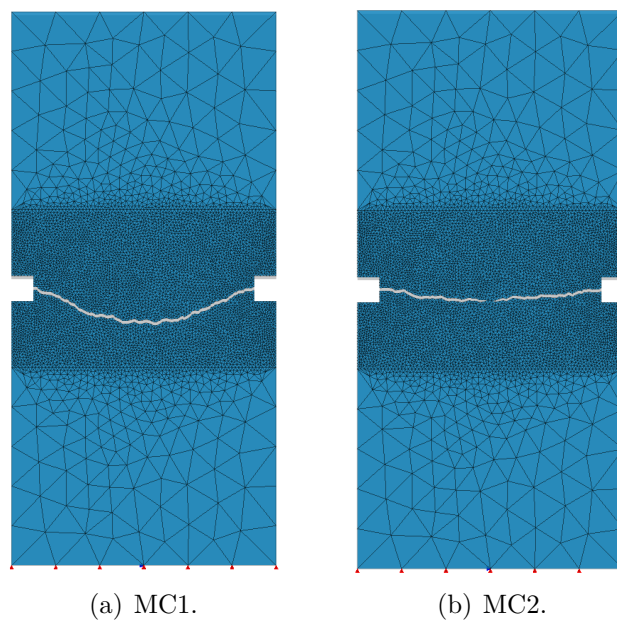


Figura 6.5 – Descontinuidade geométrica.

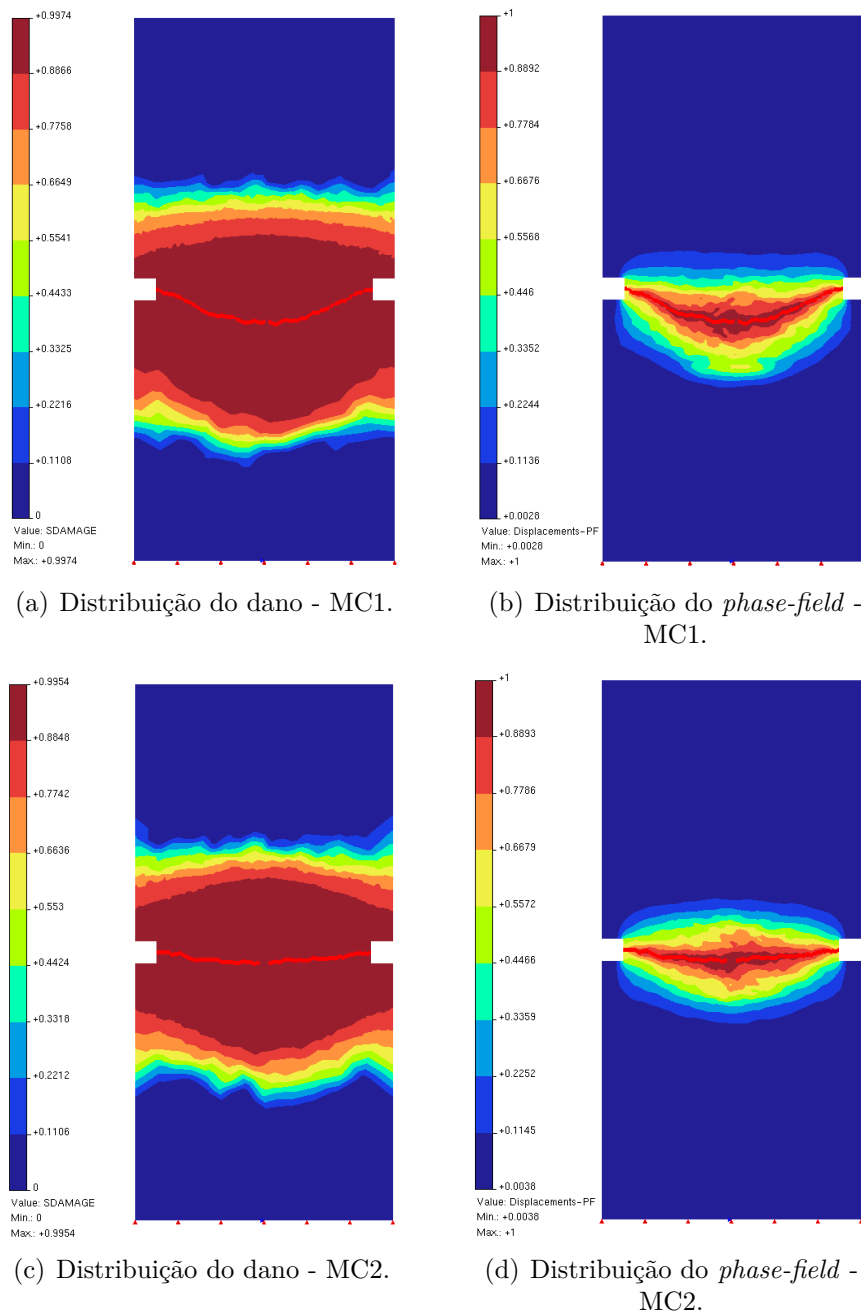


Figura 6.6 – Representação da degradação.

Quanto ao padrão de trincas indicado na Fig. 6.5, os resultados foram bastante similares, embora MC2 tenha apresentado trajetórias de propagação com desvios menores do que os observados em MC1. Observou-se nesta simulação que o modelo contínuo-descontínuo mostrou capacidade em avaliar problemas com múltiplas frentes de trinca independentes, bem como indicar uma possível coalescência entre essas frentes. Todavia, cabe ressaltar que, imediatamente após a convergência das duas frentes de trincas, ocorreu a falha da estrutura. Caso as trincas convergissem para uma trinca única e essa seguisse se propagando, seria necessário definir uma nova direção de propagação resultante das frentes

convergentes. No estado atual, o modelo ainda não possui mecanismos para tratar esse tipo de coalescência em trincas com continuidade de propagação.

Com relação à degradação do meio material, conforme esperado, o dano não local (Figs. 6.6(a) e 6.6(c)) se dispersou por uma faixa bastante larga, enquanto o *phase-field* (Figs. 6.6(b) e 6.6(d)) concentrou-se nas adjacências da trinca. A partir desses resultados, reitera-se a maior precisão do *phase-field* em estabelecer a formação de descontinuidade geométrica na malha.

## 6.2 FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

Nesta seção é apresentada uma simulação da flexão em três pontos originalmente ensaiada por García-Álvarez, Gettu e Carol (2002) e García-Álvarez, Gettu e Carol (2012). A modelagem será realizada para dois diferentes modelos constitutivos de dano, o modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) e o modelo de de Borst e Gutiérrez (1999), a fim de comparar seu desempenho na descrição do meio contínuo. Ambos os modelos foram adotados em seu formato não local, considerando lei de dano polinomial.

A geometria da amostra, bem como suas condições de contorno, são apresentadas na Fig. 6.7. Tem-se uma viga com 250 mm de comprimento, com vão livre de 200 mm, 80 mm de altura e espessura de 50 mm. Na face inferior, no meio do vão da viga, há um entalhe com 20 mm de profundidade e 3 mm de abertura, onde se inicia a trinca, enquanto no centro da face superior é aplicada uma carga unitária. O processo da análise incremental-iterativa foi realizado segundo incremento de deslocamento de 0,0025 mm aplicado ao nó central da face superior da viga e tolerância para convergência em deslocamentos de  $1,0 \times 10^{-4}$ . A malha de elementos finitos utilizada nessas análises contém 11285 elementos, como ilustrado na Fig. 6.8.

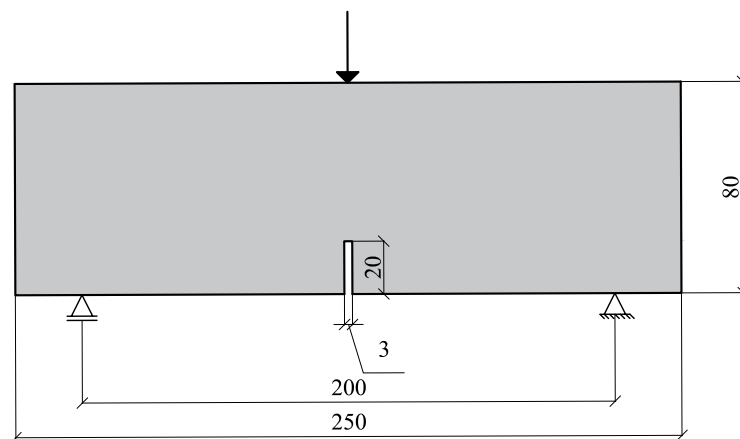


Figura 6.7 – Flexão em três pontos - carregamento, condições de contorno e geometria (dimensões em mm).

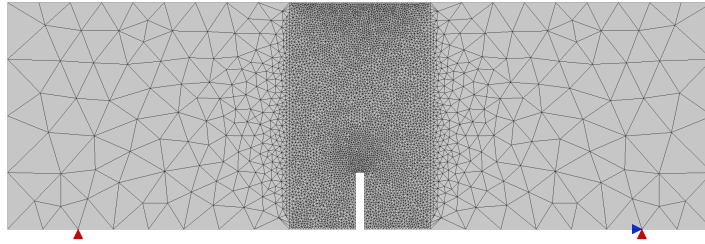


Figura 6.8 – Flexão em três pontos - malha de elementos finitos.

As propriedades do material foram baseadas nas observações experimentais relatadas por García-Álvarez, Gettu e Carol (2002). Contudo, os autores não realizaram ensaios específicos para definição do módulo de elasticidade, da resistência à tração e da energia de fratura, sendo esses valores estimados pelo ensaio de flexão e por correlações com o CEB-FIP (1991).

Diante deste cenário, ressalta-se a necessidade de um processo de solução baseado em amostragem para compreender as incertezas na definição dos parâmetros do material. Para tanto, os valores definidos pelos autores foram adotados como referências iniciais para as simulações. Portanto, adotou-se  $E = 33,8$  GPa, coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,2$ , energia de fratura de  $G_c = 0,080$  N/mm, resistência à compressão de  $f_c = 27,4$  MPa e resistência à tração, estimada como um décimo desse valor, de  $f_t = 2,74$  MPa. A deformação limite, por sua vez, foi  $\varepsilon_t = 1,621 \times 10^{-4}$ , calculada por  $\varepsilon_t = \delta_\varepsilon \times f_t/E$ , com  $\delta_\varepsilon = 2$ .

Dado o enfoque dessa análise no modelo de dano, foram adotados os critérios de nucleação/evolução da trinca por dano limite e de direção de propagação definida pelo vetor  $\mathbf{d}_T$ , considerando o valor do dano no domínio da ZPF.

Os parâmetros cuja aleatoriedade foi admitida na simulação de Monte Carlo foram o dano limite ( $D_L$ ) para a transição contínuo-descontínuo e o fator de deformação limite ( $\delta_\varepsilon$ ). Na lei de dano polinomial, a deformação limite ( $\varepsilon_c$  ou  $\varepsilon_t$ ) está relacionada ao limite de resistência do material ( $f_c$  ou  $f_t$ ). Conforme Carreira e Chu (1985) e Carreira e Chu (1986), esse ponto limite de deformação marca o início do ramo descendente da curva tensão-deformação e pode ser estimado a partir da deformação  $\varepsilon_{0i} = f_i/E$ , dada por:

$$\varepsilon_i = \delta_\varepsilon \cdot \varepsilon_{0i}, \quad (6.1)$$

com  $i = c, t$ , em que c representa compressão e t tração.

Na Tab. 6.3 são apresentados os limites inferiores e superiores dos parâmetros considerados no sorteio pseudoaleatório da simulação de Monte Carlo.

Tabela 6.3 – Parâmetros do material e do modelo para a flexão - intervalo de valores

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
$D_L$	0,85	0,95
$\delta_\epsilon$	1,7	2,0

Os resultados das simulações de Monte Carlo são apresentados nas Figs. 6.9 e 6.10 para o modelo de de Borst e Gutiérrez (1999) e nas Figs. 6.11 e 6.12 para o modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

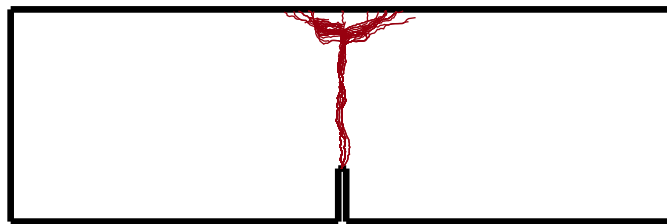


Figura 6.9 – Caminhos de trinca: modelo de dano de de Borst e Gutiérrez (1999).

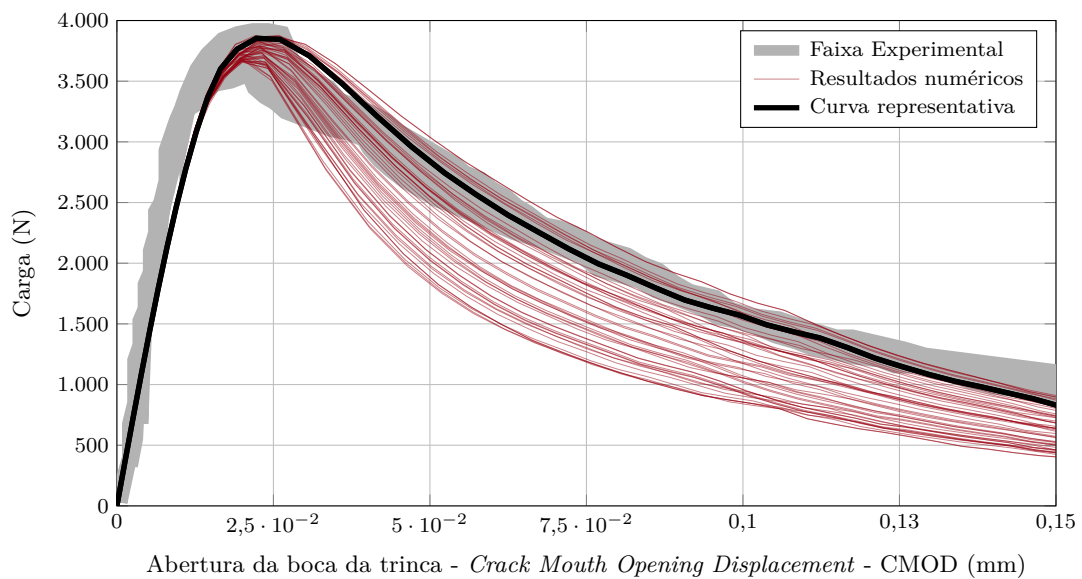


Figura 6.10 – Trajetórias de equilíbrio: modelo de dano de de Borst e Gutiérrez (1999).

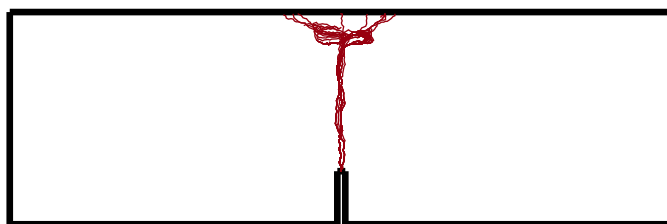


Figura 6.11 – Caminhos de trinca: flexão - modelo de dano de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

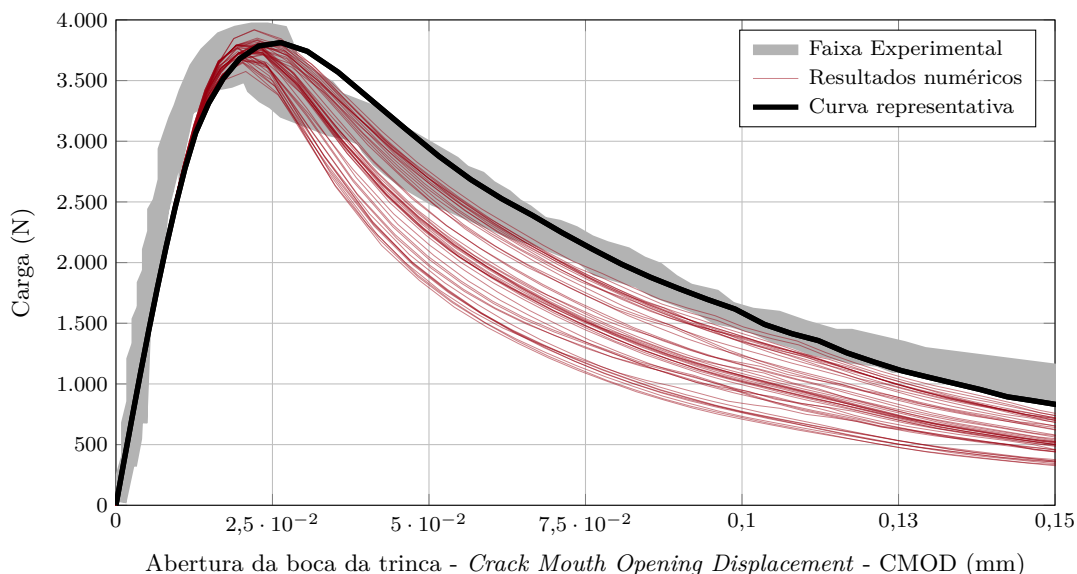


Figura 6.12 – Trajetórias de equilíbrio: flexão - modelo de dano de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

Os padrões de trinca observados nas Figs. 6.9 e 6.11 foram bastante semelhantes, destacando que a trinca, ao se iniciar no entalhe, tende a seguir um caminho reto de propagação, conforme o Modo I de fratura, até que se atinja a região vizinha ao ponto de aplicação da carga, situado na face superior da viga sobre o eixo de simetria. Nessa região, a concentração de tensões de compressão faz com que as trincas desviem-se lateralmente.

Quanto às trajetórias de equilíbrio, observa-se uma estimativa de pico de carga de grande aderência aos resultados experimentais, contudo, ocorre uma maior dispersão na aproximação do ramo descendente. Nas Figs. 6.10 e 6.12 são destacadas as curvas ótimas para cada simulação, cujos parâmetros obtidos no sorteio são apresentados na Tab. 6.4.

Tabela 6.4 – Parâmetros das curvas ótimas obtidas via simulações de Monte Carlo

Parâmetro	$D_L$	$\delta_\varepsilon$
Modelo de de Borst e Gutiérrez (1999)	0,902	1,83
Modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995)	0,861	1,72

As deformadas das amostras ótimas são apresentadas nas Figs. 6.13 e 6.14. Observam-se padrões similares de propagação, os quais divergem apenas quando a trinca se aproxima da região de aplicação da carga. Enquanto para o modelo de dano ortotrópico (Fig. 6.13) a trinca se desvia para a esquerda e consegue atingir a face superior da viga, na simulação com o modelo de dano isotrópico a propagação da trinca é estagnada na área de compressão. O melhor desempenho do modelo de de Borst e Gutiérrez (1999) para

caracterizar o final da propagação da trinca possivelmente deve-se à melhor capacidade desse modelo em representar fenômenos de fissuração com direção preferencial.

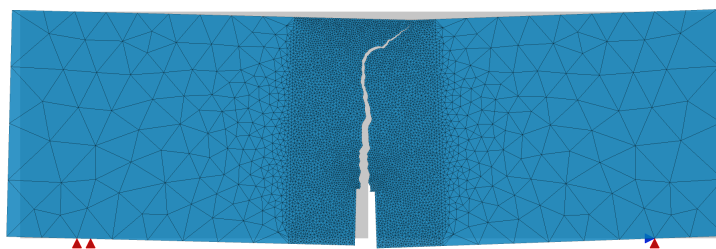


Figura 6.13 – Aspecto da trinca - modelo de de Borst e Gutiérrez (1999).

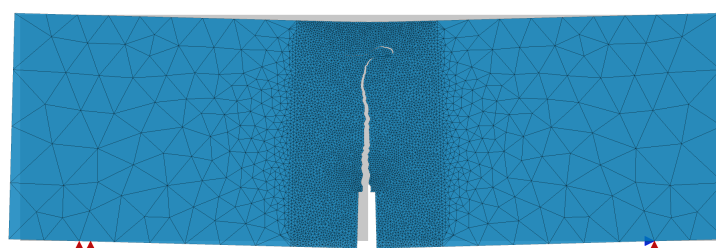


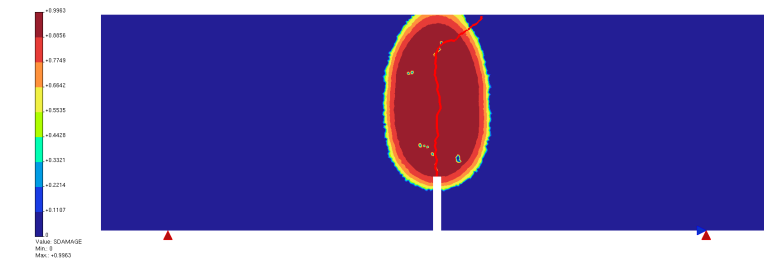
Figura 6.14 – Aspecto da trinca - modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

Por fim, a distribuição da degradação do meio é representada nas Figs. 6.15 e 6.16, em termos de dano e *phase-field*, respectivamente. Observa-se que, conforme esperado para modelos de dano não local, as regiões degradadas apresentam grande espreadimento, que é ainda mais acentuado para o modelo isotrópico (Fig. 6.15(b)) quando comparado ao modelo ortotrópico (Fig. 6.15(a)).

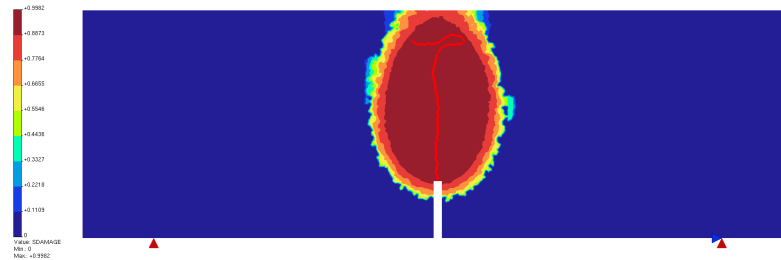
O *phase-field*, por sua vez, é restrito às adjacências da trinca (Fig. 6.16), dada sua particularidade de integrar os conceitos da mecânica da fratura a um modelo contínuo. Para esse parâmetro não há divergência significativa nas respostas obtidas para as análises com os modelos de de Borst e Gutiérrez (1999) (Fig. 6.16(a)) e de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) (Fig. 6.16(b)), uma vez que o *phase-field* é governado pelo modelo de Miehe, Hofacker e Welschinger (2010b) em ambas as simulações.

### 6.3 CISALHAMENTO EM QUATRO PONTOS

A presente simulação numérica tem como escopo o cisalhamento em quatro pontos ensaiado por Arrea e Ingraffea (1982), a fim de avaliar o modelo contínuo-descontínuo mediante modo misto de fratura. A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Fig. 6.17, conforme descrito por Rots et al. (1985).

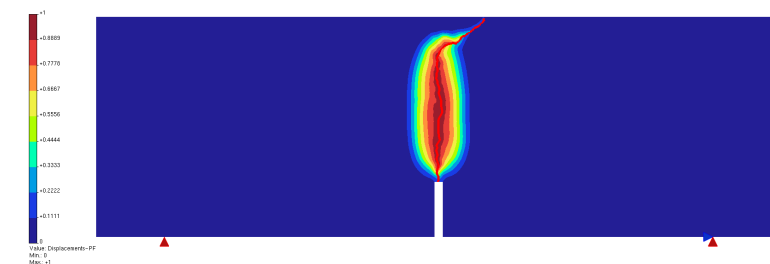


(a) Distribuição de dano - modelo de de Borst e Gutiérrez (1999).

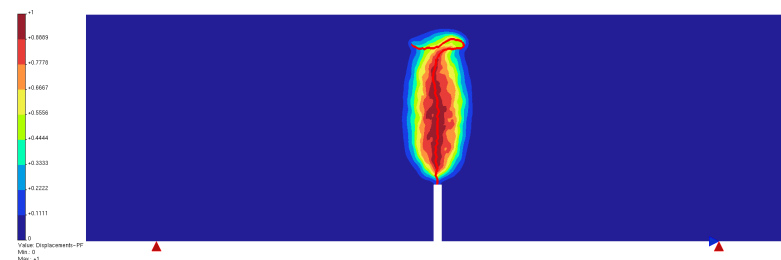


(b) Distribuição de dano - modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

Figura 6.15 – Distribuição de dano.



(a) Distribuição de *phase-field* - modelo de de Borst e Gutiérrez (1999).



(b) Distribuição de *phase-field* - modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995).

Figura 6.16 – Distribuição de *phase-field*.

A malha de elementos finitos adotada conta com 11879 elementos triangulares de três nós, sendo representada na Fig. 6.18. A viga foi restrita em dois pontos na sua face inferior, a partir de um apoio fixo e um apoio móvel. Já a carga incremental foi distribuída em dois pontos na face superior da viga. O ponto mais próximo ao eixo central da viga recebeu

uma carga unitária, enquanto o ponto à esquerda da viga recebeu uma carga igual a 13% da carga de referência. A fim de evitar concentração de tensões, tanto nos pontos de vinculação quanto nos pontos de aplicação de carga foram adotados blocos de materiais rígidos para que transferência de forças ocorra de forma suavizada.

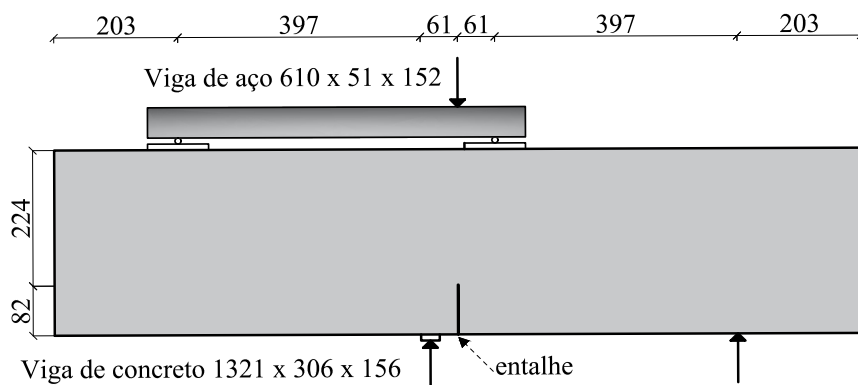


Figura 6.17 – Cisalhamento em quatro pontos: carregamento, condições de contorno e geometria (dimensões em mm).

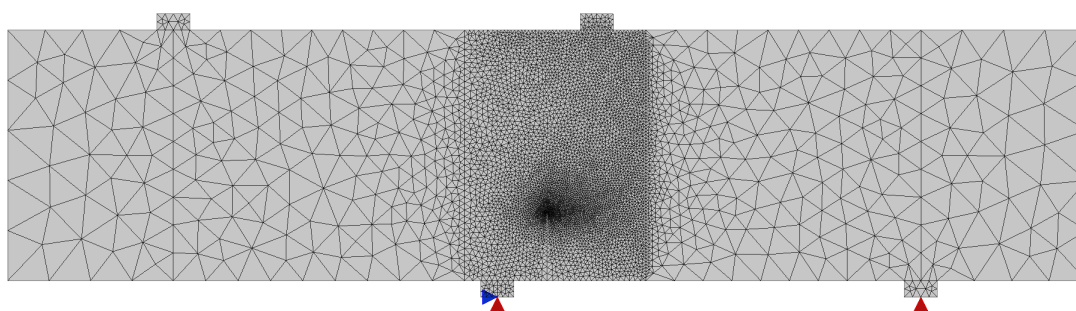


Figura 6.18 – Cisalhamento em quatro pontos: malha de elementos finitos.

A análise não linear foi conduzida pelo método de controle direto de deslocamento, com incremento do deslocamento vertical de  $-0,001$  mm aplicado ao nó da face inferior da viga onde inicia-se o entalhe. A tolerância para convergência em deslocamentos foi determinada por  $1,0 \times 10^{-4}$ . Foi adotado o modelo de dano de Vree, Brekelmans e Gils (1995) em sua versão não local, estabelecida segundo um domínio limitado pelo raio não local de  $\ell = 20$  mm. O comprimento intrínseco do MPF foi definido como  $l_0 = 2,2$  mm. O critério de transição contínuo-descontínuo foi *phase-field*, com orientação de propagação da trinca segundo o vetor de direção obtido a partir da distribuição do *phase-field* no domínio da ZPF, assumida a mesma dimensão do domínio não local do modelo de dano.

Quanto às propriedades do material, fez-se um levantamento de dados apresentados em um conjunto de artigos para definir os parâmetros da simulação ((ROTS et al., 1985), (GÁLVEZ et al., 1998), (GÁLVEZ et al., 2002), (GÁLVEZ et al., 2013)). No trabalho de Gálvez et al. (2002) é apresentado um resumo dos resultados experimentais conduzidos

por Arrea e Ingraffea (1982). Em síntese, foram ensaiadas três séries de experimentos denominadas A, B e C e as únicas propriedades do concreto obtidas nesses testes foram a resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ), o módulo de elasticidade ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). No presente estudo descartou-se a série A uma vez que ela difere das séries B e C quanto à espessura da viga e à profundidade do entalhe, além de se tratar apenas da matriz cimentícia, enquanto as demais séries têm o concreto como material ensaiado. Portanto, foi adotado o valor médio da resistência à compressão, calculado a partir das séries B e C (Tab. 6.5).

Tabela 6.5 – Parâmetros obtidos experimentalmente por Arrea e Ingraffea (1982)

Série	$f_c$ (MPa)	$E$ (GPa)	$\nu$
B	45,5	24,8	0,18
C	43,4	24,8	0,18
Média	44,45	24,8	0,18

Os valores da energia de fratura ( $G_f$ ) e da resistência à tração ( $f_t$ ) foram estimados a partir dos parâmetros apresentados na Tab. 6.5 e com base nas relações indicadas no CEB-FIP (1991). A energia de fratura pode ser obtida como:

$$G_c = G_{c0}(f_c/f_{c0})^{0,7}, \quad (6.2)$$

em que  $G_{c0}$  é um valor base de energia de fratura associado ao diâmetro máximo do agregado graúdo e  $f_{c0} = 10$  MPa. Na Tab. 6.6, são apresentados os valores de  $G_c$  adotados por Gálvez et al. (2002) para as séries testadas.

Tabela 6.6 – Energia de fratura segundo Gálvez et al. (2002)

Série	$G_c$ (N/mm)
B	0,107
C	0,110
Média	0,1085

A partir do valor médio da energia de fratura (0,1085 N/mm) e da equação 6.2, estimou-se  $G_{c0} = 0,038$  N/mm. A dimensão do agregado, todavia, não foi informada por Arrea e Ingraffea (1982). Para estimá-la, utilizou-se a Tab. 6.7, que indica a relação entre o diâmetro máximo do agregado graúdo e  $G_{c0}$  segundo o CEB-FIP (1991).

Tabela 6.7 – Valor base da energia de fratura - CEB-FIP (1991)

$d_{máx}$ (mm)	$G_{c0}$ (N/mm)
8	0,025
16	0,030
32	0,058

Estima-se, por interpolação linear,  $d_{máx} = 20$  mm, tomando a Tab. 6.7 como referência e considerando  $G_{c0} = 0,038$  N/mm.

Dada a incerteza associada ao valor da energia de fratura optou-se por incluí-la como um parâmetro pseudoaleatório na simulação de Monte Carlo, com valores limites dados por  $[0,107;0,110]$  N/mm.

Para estimar o valor da resistência à tração, admitiu-se inicialmente os dados apresentados por Gálvez et al. (2002), com  $f_t = 3,7$  MPa para a série B e  $f_t = 3,4$  MPa para a série C. Todavia, esses valores apresentam incompatibilidade com os valores obtidos por Arrea e Ingraffea (1982) para a resistência à compressão. Por isso, adotou-se a relação disponível no CEB-FIP (1991), dada por

$$f_t = 1,4 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{2/3}, \quad (6.3)$$

assim, como indicado na Tab. 6.8, tem-se para as duas séries a estimativa da resistência à tração.

Tabela 6.8 – Resistência à tração ( $f_t$ ) - CEB-FIP (1991)

Série	$f_t$ (MPa)
B	3,84
C	3,72

Os valores de  $f_t$  estimados para as séries B e C foram muito próximos. Assumindo as incertezas associadas a esse parâmetro, o qual não foi medido experimentalmente, optou-se por variar os valores estimados em cerca de 10% (para mais e para menos), estabelecendo um intervalo para a simulação de Monte Carlo, com  $f_t$  entre  $[3,4;4,0]$  MPa.

Além de  $G_c$  e  $f_t$ , o fator de deformação limite  $\delta_\varepsilon$ , associado à lei de dano polinomial, também foi incluído como parâmetro pseudoaleatório nas simulações de Monte Carlo.

Por fim, o valor crítico que marca a transição contínuo-descontínuo também foi considerado como variável aleatória. Como trata-se de um caso de modo misto de abertura de trinca, admitiu-se valores menores para o *phase-field* crítico, com intervalo estimado entre 0,15 e 0,20.

Na Tab. 6.9 são apresentados os valores adotados como pseudoaleatórios nas simulações de Monte Carlo e seus limites inferior e superior.

Tabela 6.9 – Parâmetros do material e do modelo - intervalos de valores

Parâmetro	Limite inferior	Limite superior
$G_c$ (N/mm)	0,107	0,110
$f_t$ (MPa)	3,4	4,0
$\delta_\varepsilon$	1,7	2,1
$PF_L$	0,15	0,20

Para o cisalhamento em quatro pontos foram realizadas três simulações de Monte Carlo, variando a estratégia utilizada para cálculo da direção de propagação da trinca. Na primeira simulação o caminho da trinca foi mapeado na direção da menor distância angular  $\theta$  (definida na seção 4.3.2) entre o vetor  $\mathbf{d}_T$  e os vetores formados pela ponta da trinca com os nós candidatos à propagação. Na segunda simulação considerou-se como a próxima ponta da trinca o nó da vizinhança cujo valor da raiz quadrada do produto do  $\cos\theta$  com a variável de controle (equação 4.29) resulte no maior valor. Na terceira simulação a ponta de trinca foi definida de forma análoga à simulação anterior, adotando para tanto a média aritmética entre o  $\cos\theta$  e o valor assumido pela variável de controle (equação 4.28) como parâmetro de definição da direção de propagação. Mais detalhes sobre essas estratégias de propagação foram discutidos na seção 4.3.2.

Os resultados da primeira, segunda e terceira simulação são apresentados, respectivamente nas Figs. 6.19 e 6.20, 6.21 e 6.22, e 6.23 e 6.22, tanto em termos de caminho da trinca quanto em termos de resposta estrutural, representada pelas trajetórias de equilíbrio.

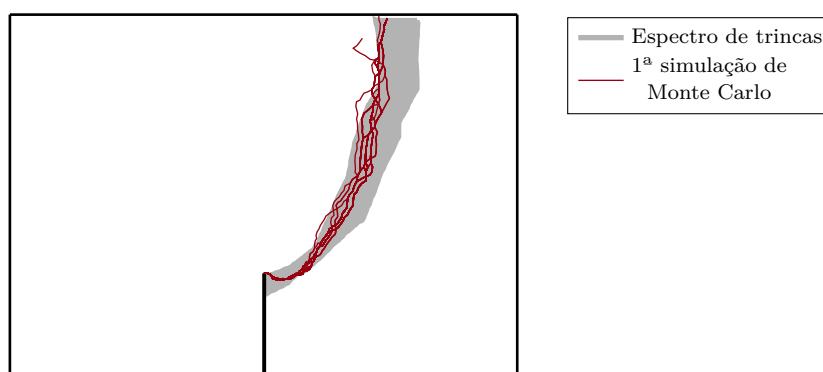


Figura 6.19 – Caminhos de trinca: primeira simulação de Monte Carlo.

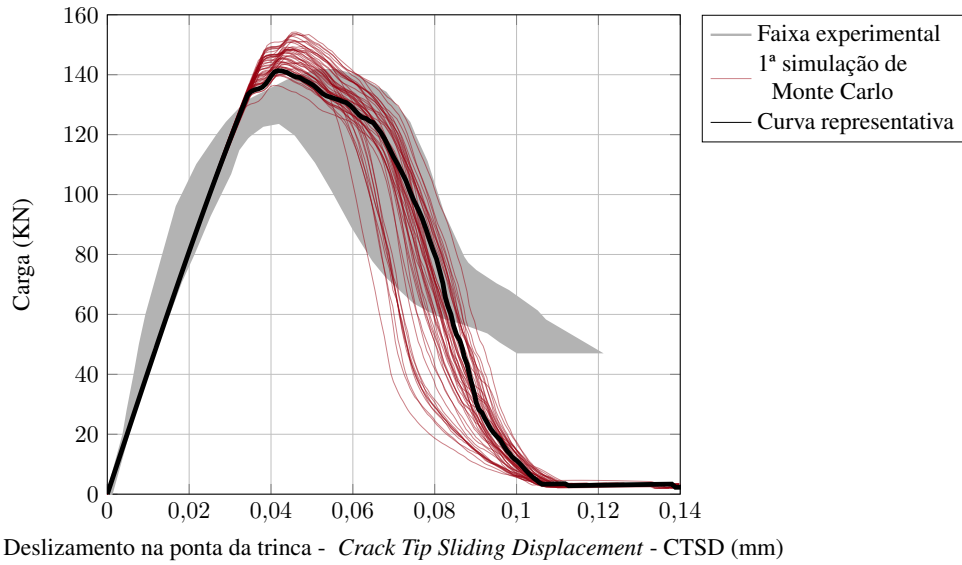


Figura 6.20 – Trajetórias de equilíbrio: primeira simulação de Monte Carlo.

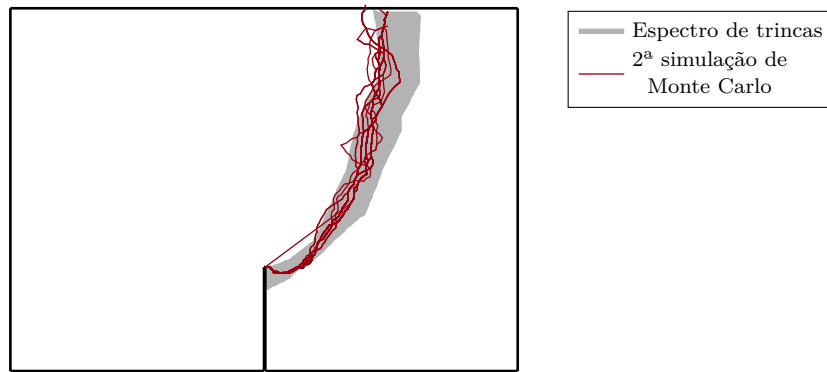


Figura 6.21 – Caminhos de trinca: segunda simulação de Monte Carlo.

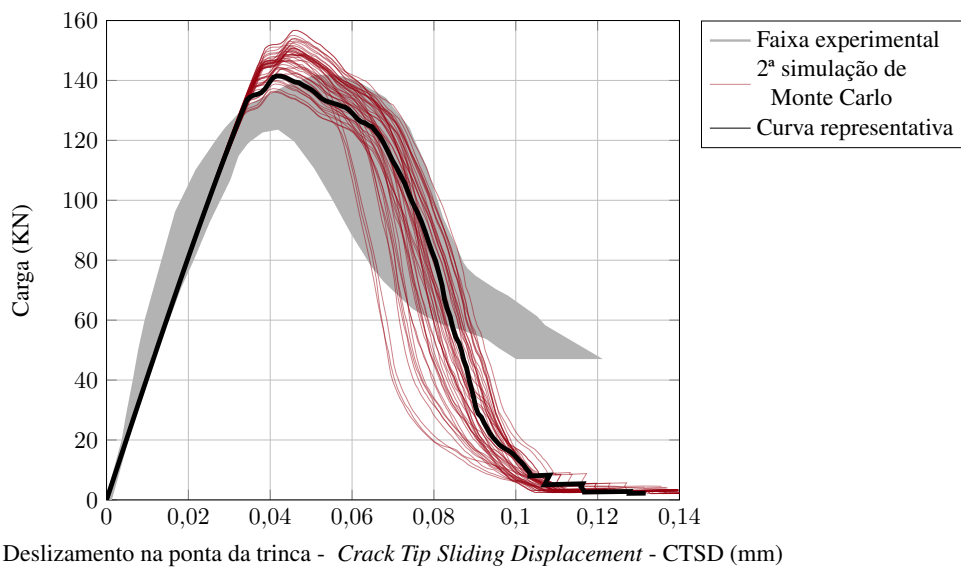


Figura 6.22 – Trajetórias de equilíbrio: segunda simulação de Monte Carlo.

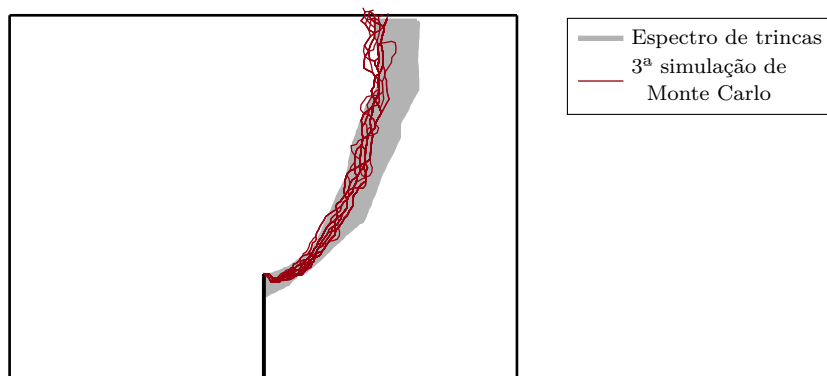


Figura 6.23 – Caminhos de trinca: terceira simulação de Monte Carlo.

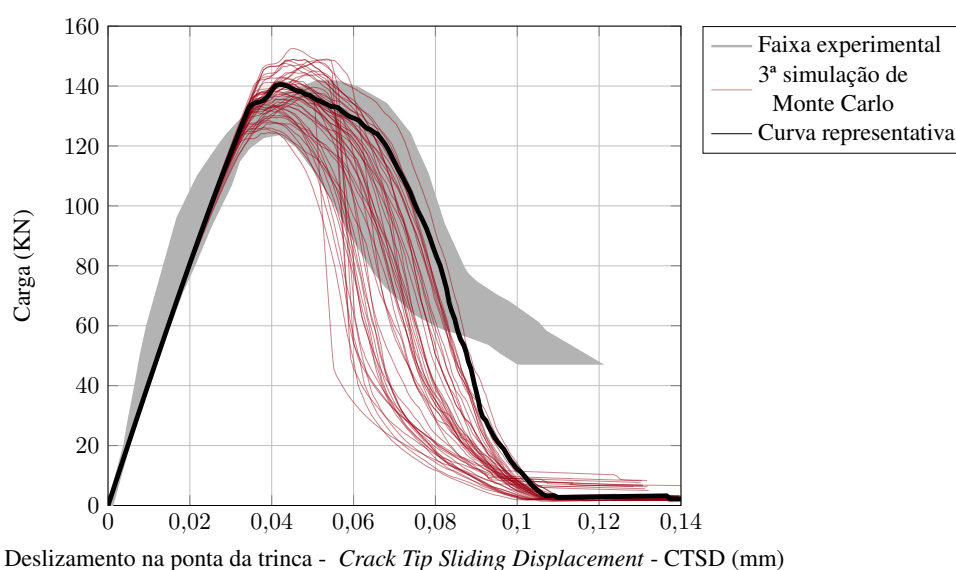


Figura 6.24 – Trajetórias de equilíbrio: terceira simulação de Monte Carlo.

Avaliando os resultados, observou-se que os caminhos de trinca obtidos nas simulações (Figs. 6.19, 6.21 e 6.23) apresentaram ótima conformidade com a região de trincas observada experimentalmente. Todavia, as duas primeiras simulações apresentaram alguns pequenos desvios ao longo da propagação da trinca, enquanto a terceira simulação de Monte Carlo apresentou trajetórias mais estáveis e com menor dispersão entre si. As diminutas diferenças observadas estão relacionadas à aleatoriedade no sorteio dos parâmetros do material e do modelo, associada ao critério de direção de propagação. Nesse cenário de extensas probabilidades, tais variações são inerentes à modelagem e não interferiram nos resultados de forma relevante. Diante disso, pode-se inferir que, para as simulações realizadas, a definição da direção de propagação segundo a média de  $\cos\theta$  e da variável de controle apresentou a melhor performance.

Analisando as trajetórias de equilíbrio (Figs. 6.20, 6.22 e 6.24), nota-se que as três simulações de Monte Carlo conduziram respostas compatíveis com a faixa experimental, tanto

para o ramo elástico quanto para a estimativa da carga máxima e do ramo descendente. A curva representativa apresentada em preto para cada uma das simulações é aquela com o melhor ajuste em relação ao comportamento médio experimental, cujos valores pseudoaleatórios são indicados na Tab. 6.10.

Tabela 6.10 – Parâmetros pseudoaleatórios das simulações - valores associados às curvas ótimas

Parâmetro	$G_c$ (N/mm)	$f_t$ (MPa)	$\delta_\epsilon$	$PF_L$
MC1	0,1071	3,436	1,96	0,1564
MC2	0,1077	3,450	1,88	0,1781
MC3	0,1076	3,781	1,92	0,1917

Observa-se que os valores energia de fratura para as curvas ótimas, obtidos por sorteio em cada simulação, são muito próximos, indicando a importância desse parâmetro para uma boa aderência entre a curva material e a resposta numérica. Os demais parâmetros, todavia, sofreram pequenas variações dentro das margens de valores especificadas.

Para a primeira simulação de Monte Carlo, a resposta ótima pode ser representada em termos de deformada (Fig. 6.25), distribuição do dano (Fig. 6.26) e distribuição do *phase-field* (Fig. 6.27). De forma análoga, as Figs. 6.28, 6.29 e 6.30 compilam os resultados da segunda simulação enquanto a terceira tem seus resultados ilustrados nas Figs. 6.31, 6.32 e 6.33. De forma qualitativa, as três simulações conduziram a respostas bastante semelhantes, embora a terceira simulação tenha apresentado melhor aderência quando comparada à resposta experimental. Esse resultado pode indicar que o cálculo da direção de propagação se torna mais preciso quando incorpora não apenas a distância angular  $\cos\theta$ , mas também o valor da variável de controle, sendo a média aritmética desses dois parâmetros a medida matemática que melhor aproximou a trajetória da trinca.

O modelo contínuo-descontínuo proposto, por sua vez, mostrou-se adequado também a reproduzir padrões de fratura em modo misto.

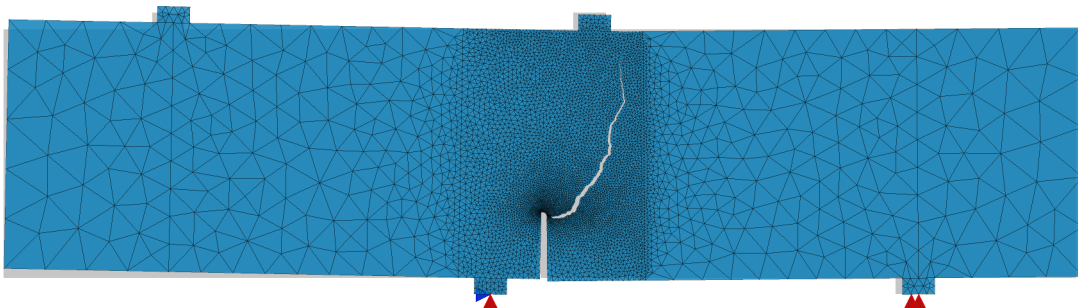


Figura 6.25 – Trinca explícita: primeira simulação de Monte Carlo.

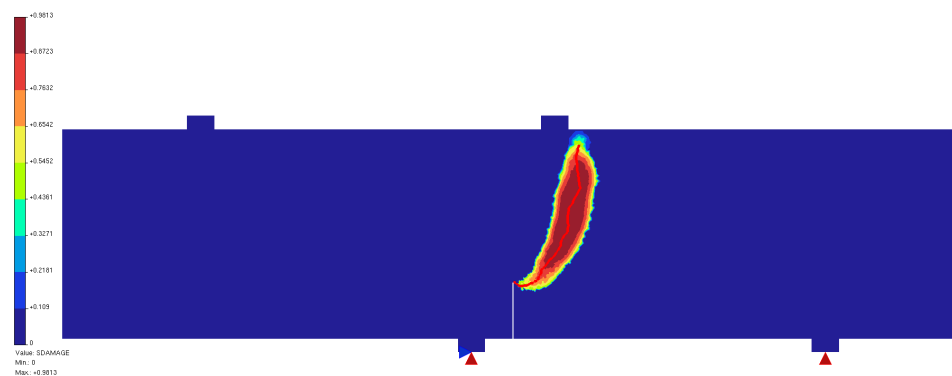


Figura 6.26 – Distribuição do dano: primeira simulação de Monte Carlo.

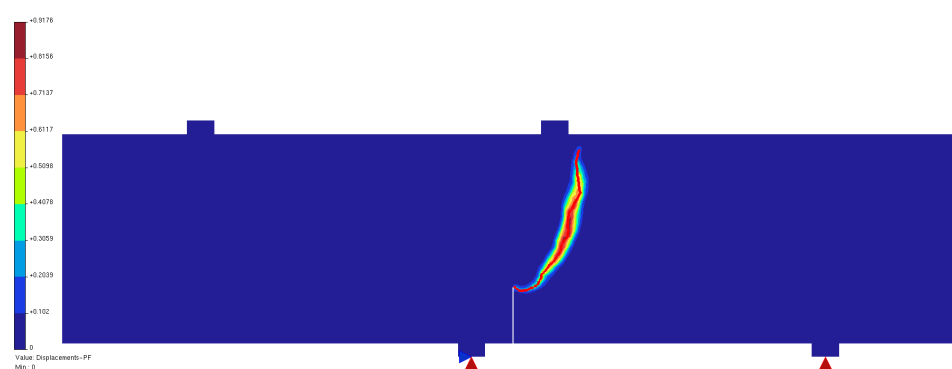


Figura 6.27 – Distribuição do *phase-field*: primeira simulação de Monte Carlo.

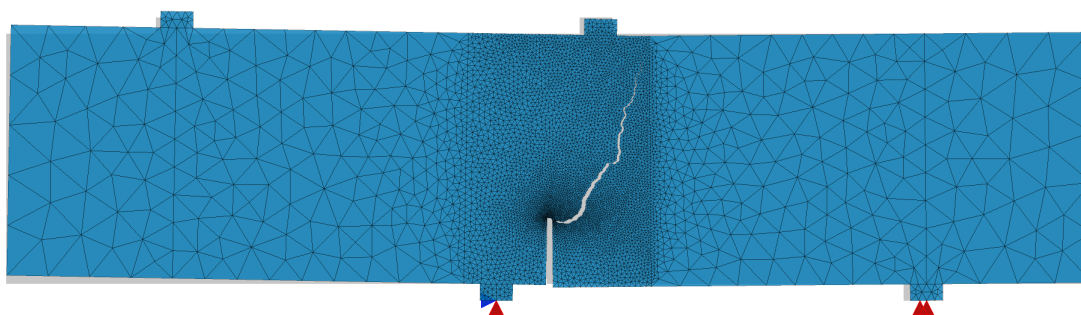


Figura 6.28 – Trinca explícita: segunda simulação de Monte Carlo.

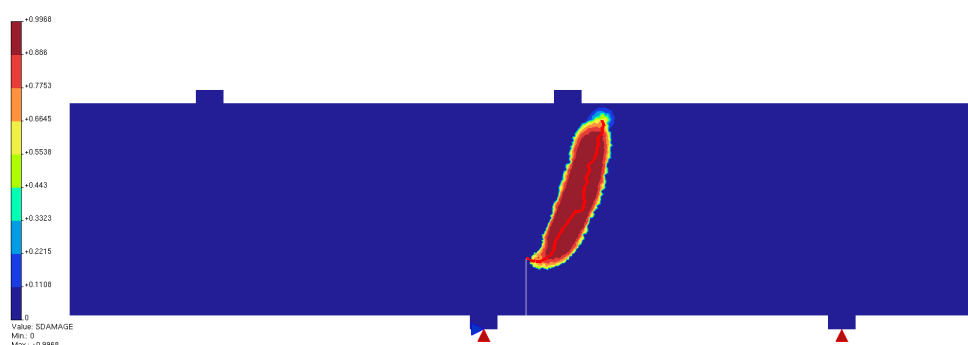


Figura 6.29 – Distribuição do dano: segunda simulação de Monte Carlo.

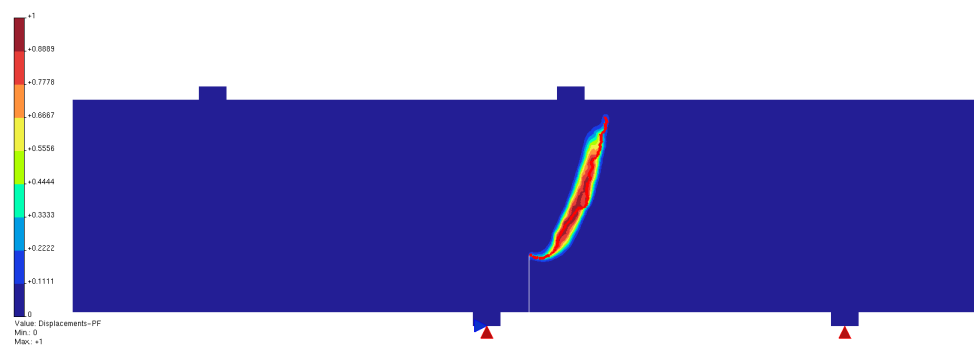


Figura 6.30 – Distribuição do *phase-field*: segunda simulação de Monte Carlo.

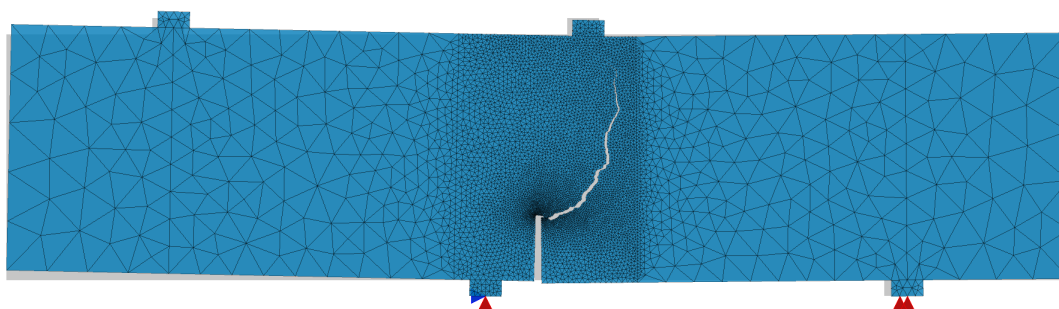


Figura 6.31 – Trinca explícita: terceira simulação de Monte Carlo.

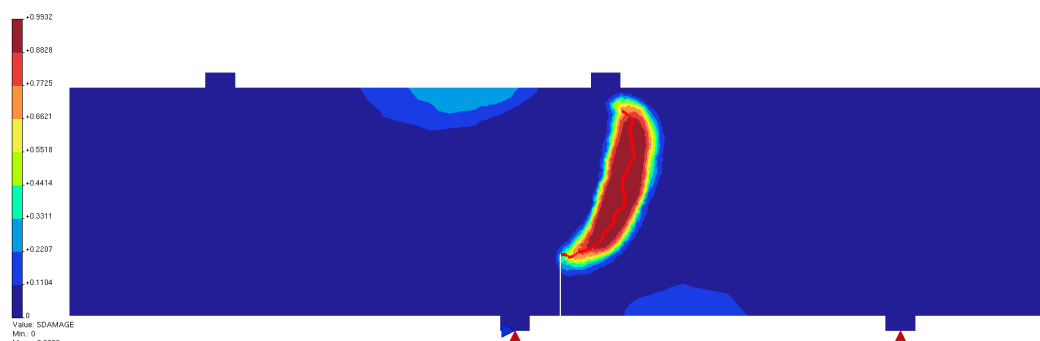


Figura 6.32 – Distribuição do dano: terceira simulação de Monte Carlo.

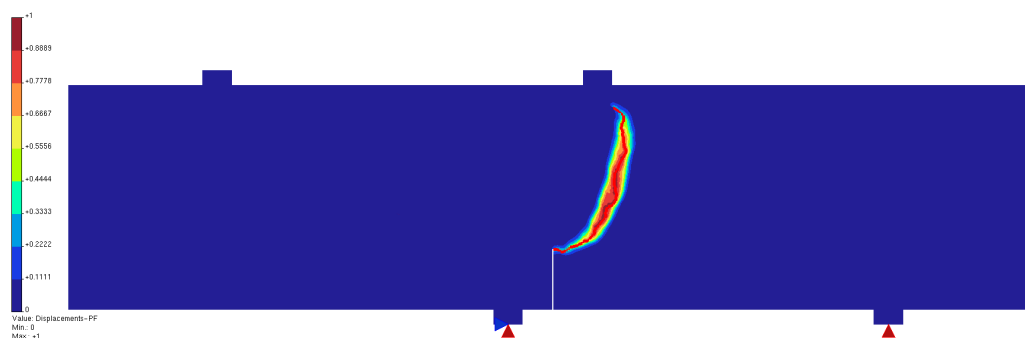


Figura 6.33 – Distribuição do *phase-field*: terceira simulação de Monte Carlo.

## 6.4 ENSAIO DE ARRANCAMENTO

A partir do estudo experimental conduzido por Vervuurt, van Mier e Schlangen (1994) e das análises numéricas realizadas por Soparat e Nanakorn (2008), essa seção é dedicada à investigação dos padrões de trincas obtidos a partir de ensaios de arrancamento de chumbadores. Ressalta-se que nesse ensaio tem-se duas frentes de trincas independentes, cada uma surgindo de um dos lados da cabeça do chumbador, conforme observado experimentalmente e nas simulações.

A geometria e as condições de contorno adotadas neste estudo são apresentadas na Fig. 6.34(a), em que a distância (a) é uma variável relativa aos pontos com restrição vertical de deslocamento, que assume os valores de 75 mm, 150 mm e 300 mm. Por simplicidade da modelagem, optou-se por não discretizar o pino de arrancamento, por isso o carregamento total aplicado, de 350 N, foi distribuído ao longo dos 30 mm (15 mm de cada lado) que delimitam as interfaces horizontais entre a região da cabeça do chumbador e a base de concreto. A malha de elementos finitos adotada é ilustrada na Fig. 6.34(b) e conta com 22369 elementos triangulares de três nós.

Nas simulações de arrancamento foi dispensada a parametrização do material e do modelo via Monte Carlo, já que os dados provenientes de ensaios encontrados na literatura não apresentaram um padrão que facilitasse a definição de intervalos de valores para parâmetros sujeitos à pseudoaleatoriedade. Assim, em estudos futuros, sugere-se explorar as diversas nuances desse ensaio documentadas na literatura e compiladas no trabalho de Elfgren, Eligehausen e Rots (2001).

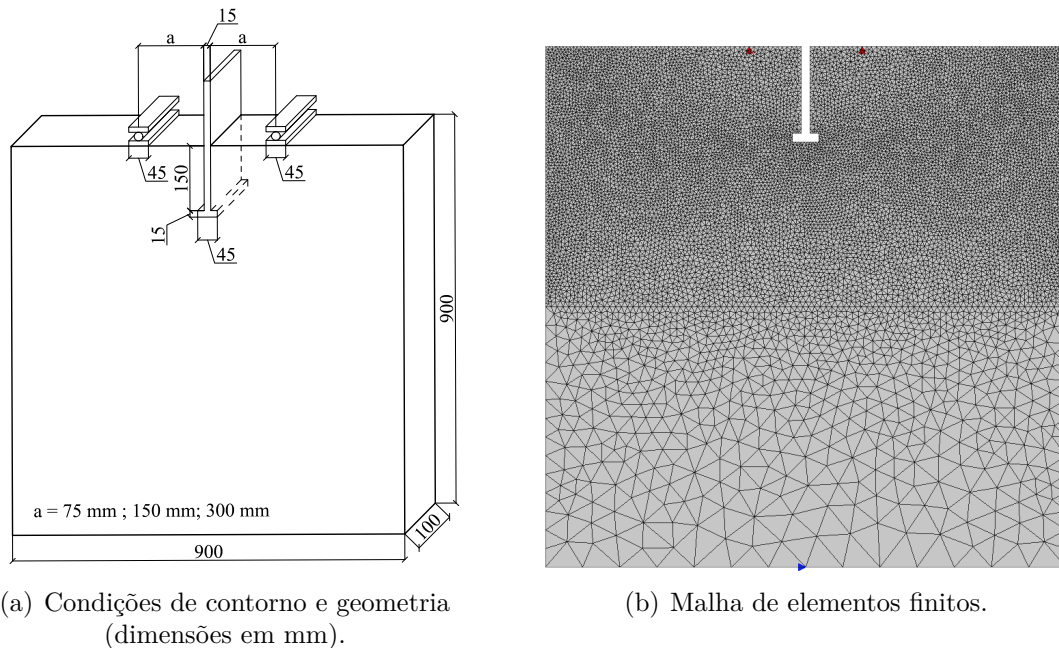
Na descrição do meio contínuo adotou-se o modelo de dano isotrópico com deformação equivalente de de Vree, Brekelmans e Gils (1995), com raio não local de  $\ell = 24$  mm, que corresponde a três vezes o diâmetro máximo do agregado usado por Vervuurt, van Mier e Schlangen (1994).

Na modelagem do ensaio em questão foram consideradas duas hipóteses para o modelo contínuo-descontínuo. Na primeira hipótese, adotou-se o dano como grandeza de condução da análise e, na segunda hipótese, adotou-se o *phase-field*. Em ambas as análises, a variável de controle considerada (dano ou *phase-field*) foi responsável pela nucleação da trinca e também pela definição da direção de propagação. Ressalta-se que a direção de propagação foi calculada pelo vetor  $\mathbf{d}_T$  conforme definido na seção 4.3.2. Por fim, tendo em vista que nesse ensaio tem-se o modo I de fratura, estabeleceu-se como dano e *phase-field* limite o valor de 0,95 para a transição contínuo-descontínuo.

Os parâmetros do material adotados foram:  $E = 35$  GPa,  $\nu = 0,2$  e  $G_c = 0,1$  N/mm (SUÁ-

REZ; GÁLVEZ; CEDÓN, 2019). Segundo os dados compilados por Elfgren, Eligehausen e Rots (2001) referentes ao ensaio de arrancamento, estimou-se  $f_t = 3,8$  MPa e  $\kappa_r = f_c/f_t = 13,33$ . A partir de uma identificação paramétrica, para a lei de dano polinomial ( $D_{pol}$ ) foi adotada a deformação limite  $\kappa_0 = 2,8 \cdot 10^{-4}$ , enquanto para a lei de dano exponencial ( $D_{exp}$ ) estimou-se  $\alpha = 0,999$ ,  $\beta = 250$  e deformação limite de  $\kappa_0 = 1,02857 \cdot 10^{-4}$ .

A análise não linear incremental-iterativa foi processada a partir do incremento vertical de deslocamento direto de 0,001 mm aplicado aos nós de contato da placa com o chumbador. Adotou-se a convergência por deslocamentos com tolerância de  $1,0 \times 10^{-4}$ .



(a) Condições de contorno e geometria (dimensões em mm).

(b) Malha de elementos finitos.

Figura 6.34 – Definições de geometria e de malha do ensaio de arrancamento.

Foram realizadas quatro simulações para cada valor da variável (a): 75 mm, 150 mm e 300 mm, variando o critério de transição do contínuo-descontínuo - que foi o mesmo para a direção de propagação - entre dano e *phase-field* e adotando para cada caso leis de evolução de dano polinomial e exponencial. Nas Figs. 6.35 e 6.36 são apresentados os resultados da simulação para  $a = 75$  mm em termos de trajetória de trincas e resposta estrutural, respectivamente. De forma análoga, têm-se os resultados para  $a = 150$  mm compilados nas Figs. 6.37 e 6.38, enquanto nas Figs. 6.39 e 6.40 são ilustrados os resultados para  $a = 300$  mm.

Observa-se que para menores valores de (a) (Fig. 6.35) têm-se padrões de trincas mais curvos e também trincas que se propagam em diagonal. À medida que o vão (a) aumenta, as trincas têm espaço suficiente para se estabilizarem na horizontal (Fig. 6.37 e 6.39).

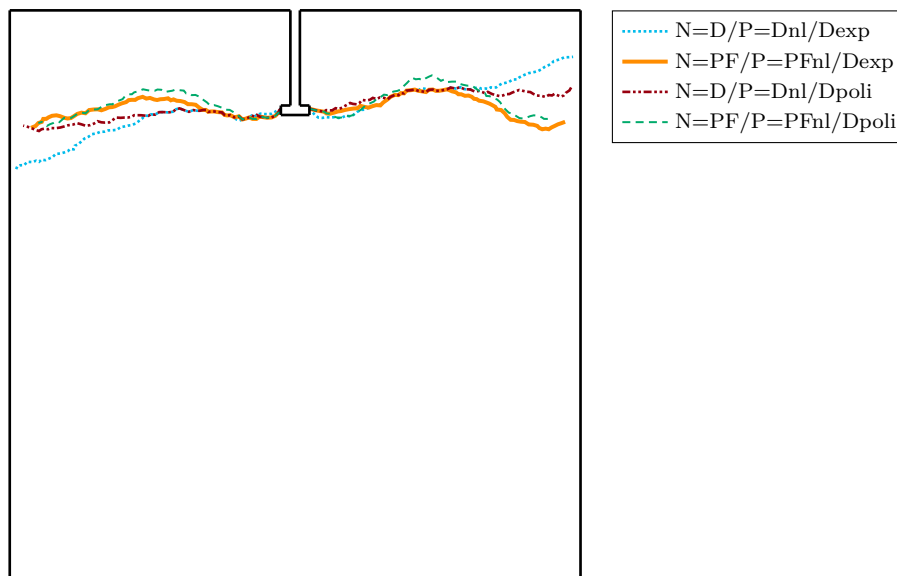


Figura 6.35 – Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 75$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação.

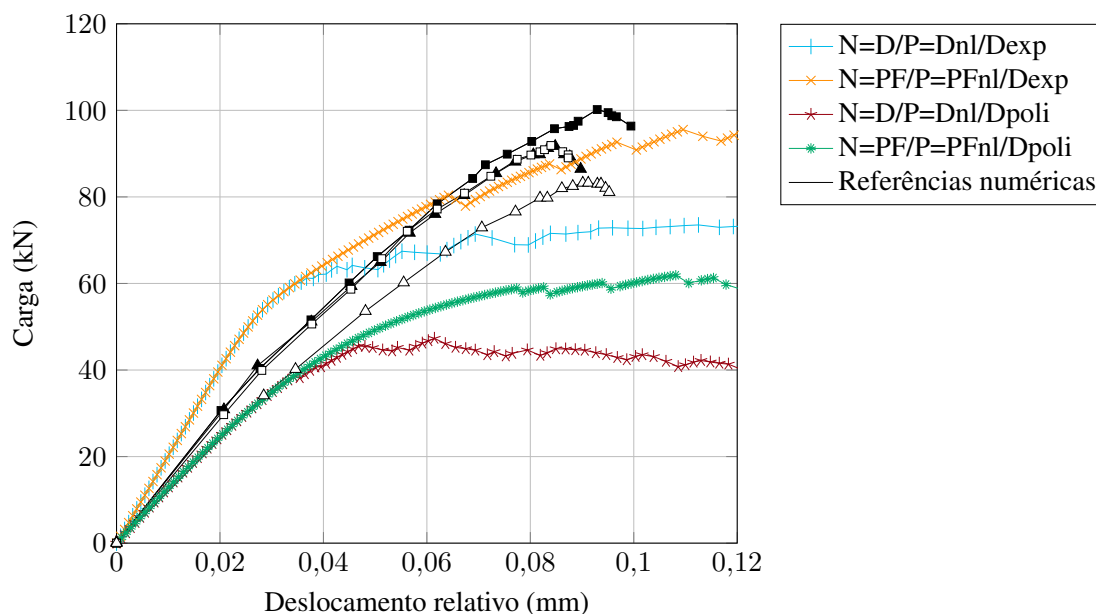


Figura 6.36 – Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 75$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008).

Quanto à curva carga-deslocamento, para  $a = 75$  mm (Fig. 6.36), a carga de pico foi melhor representada pela simulação adotando modelo de dano exponencial com propagação de trinca conduzida pela variável de *phase-field*. Todavia, para os vãos de  $a = 150$  mm e  $a = 300$  mm (Figs. 6.38 e 6.40), as melhores respostas foram obtidas considerando o dano como variável de transição entre contínuo-descontínuo. Levanta-se a possibilidade de que, para o vão menor, o *phase-field*, por apresentar uma resposta mais concentrada,

conseguiu reproduzir de forma mais precisa o caminho da trinca. Já para vãos maiores, a característica mais dispersa da dano permitiu uma propagação mais lenta da trinca, sem superestimativa da carga crítica.

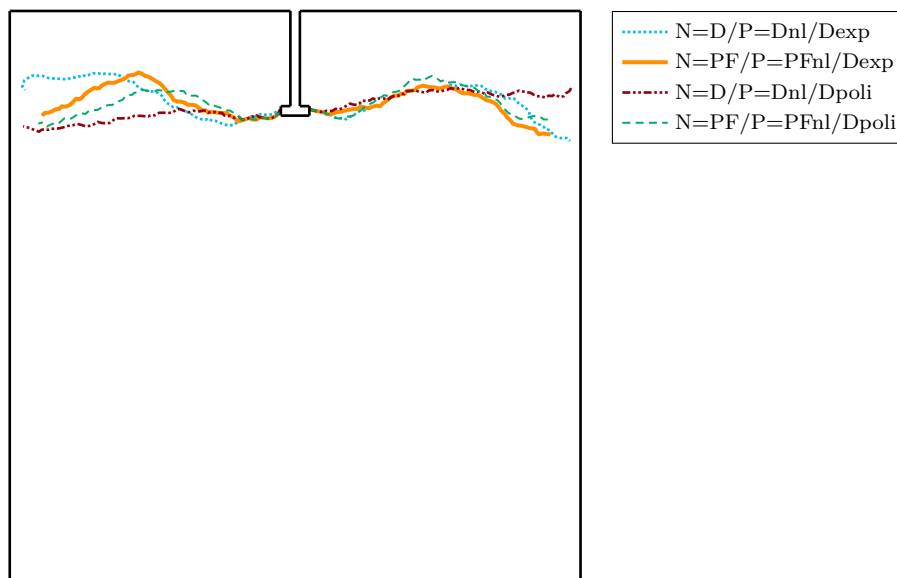


Figura 6.37 – Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 150$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação.

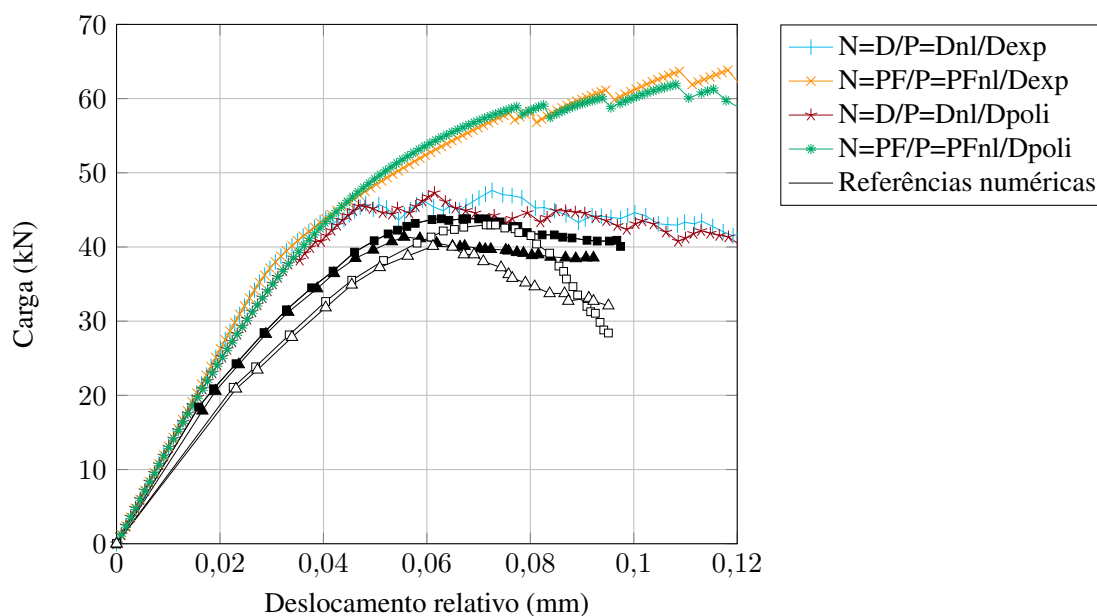


Figura 6.38 – Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 150$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008).

Por fim, são apresentados na Fig. 6.41 os padrões de trinca obtidos para  $a = 75$  mm a partir das deformadas das amostras simuladas. Ressalta-se a versatilidade em representar

padrões diversos de fratura do modelo contínuo-descontínuo proposto. A distribuição da degradação quanto à variável de dano e o *phase-field* é ilustrada nas Figs. 6.42 e 6.43, respectivamente. Conforme esperado, o dano apresentou maior espalhamento, enquanto o *phase-field* se concentrou na vizinhança da trinca explícita.

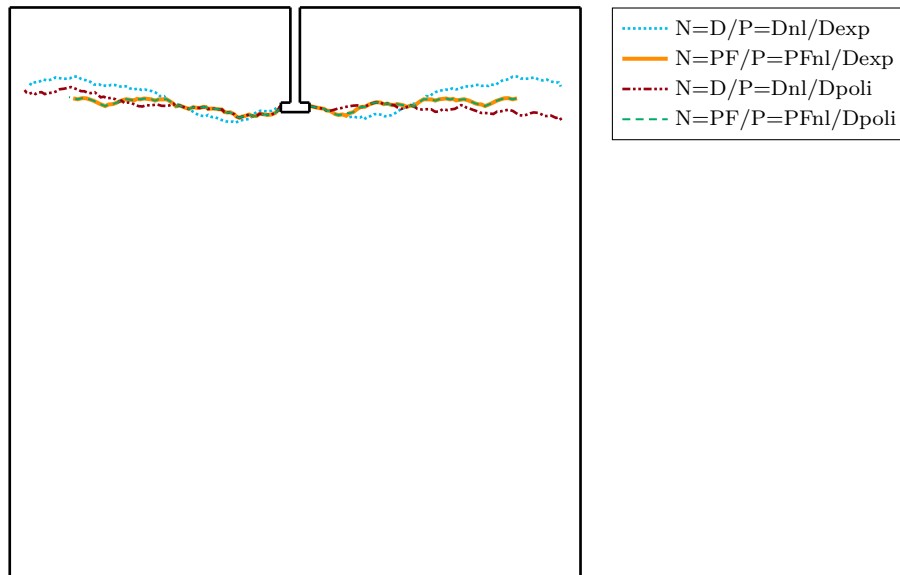


Figura 6.39 – Caminhos de trinca: arrancamento ( $a = 300$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação.

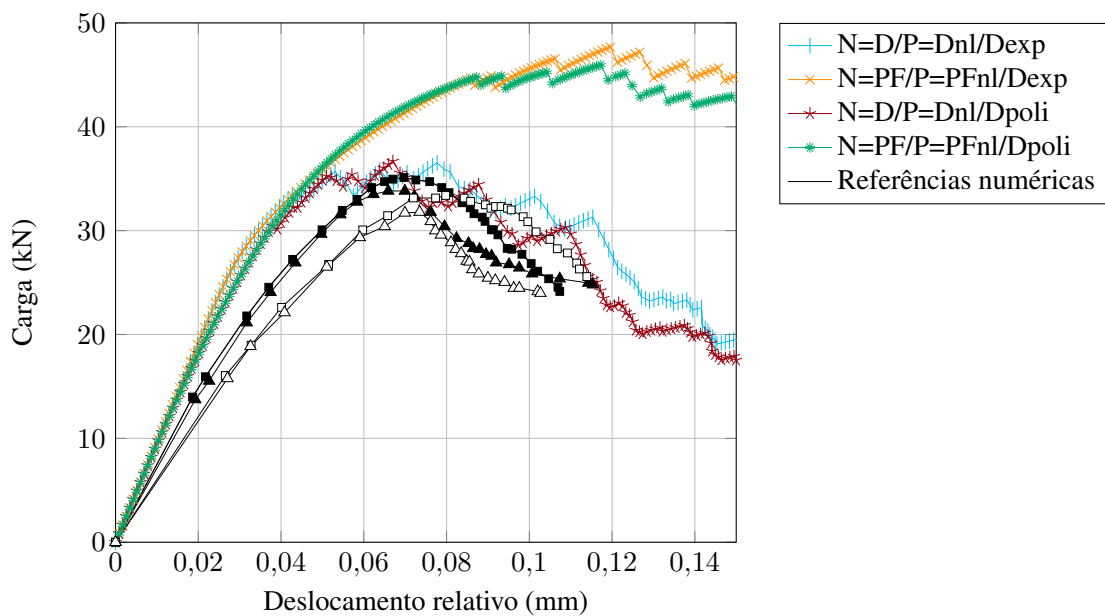
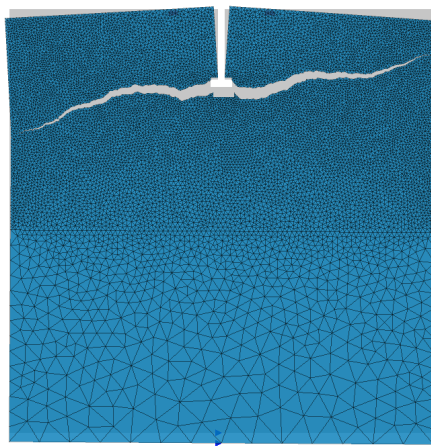
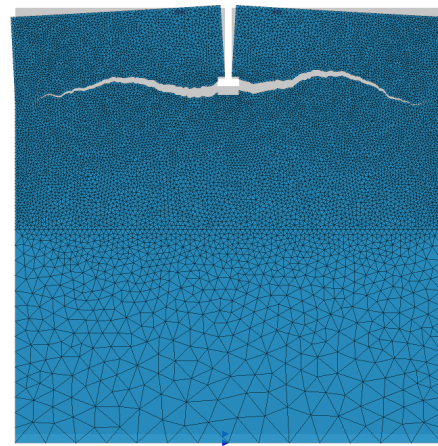


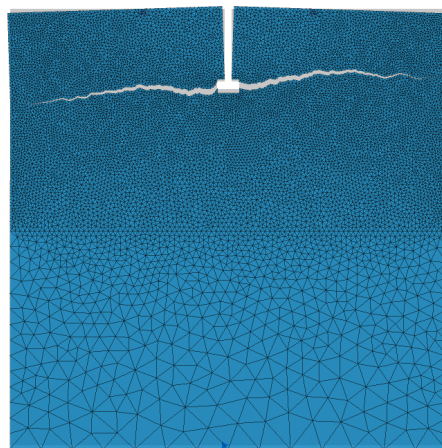
Figura 6.40 – Trajetórias de equilíbrio: arrancamento ( $a = 300$  mm) - para diferentes critérios de nucleação e propagação. Referências numéricas de Soparat e Nanakorn (2008).



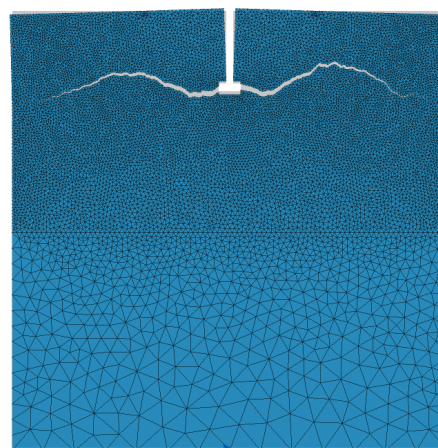
(a) Análise via modelo de dano com lei exponencial.



(b) Análise via modelo de *phase-field* com lei exponencial.

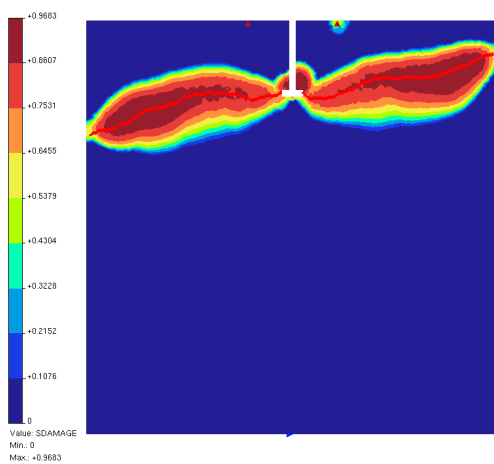


(c) Análise via modelo de dano com lei polinomial.

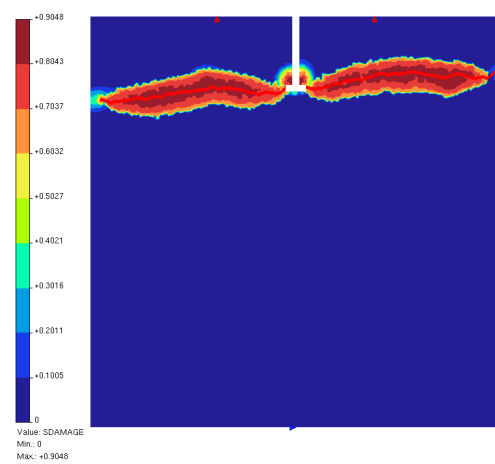


(d) Análise via modelo de *phase-field* com lei polinomial.

Figura 6.41 – Arrancamento ( $a = 75$  mm): trincas macroscópicas.



(a) Análise via modelo de dano com lei exponencial.



(b) Análise via modelo de dano com lei polinomial.

Figura 6.42 – Arrancamento ( $a = 75$  mm): distribuição do dano.

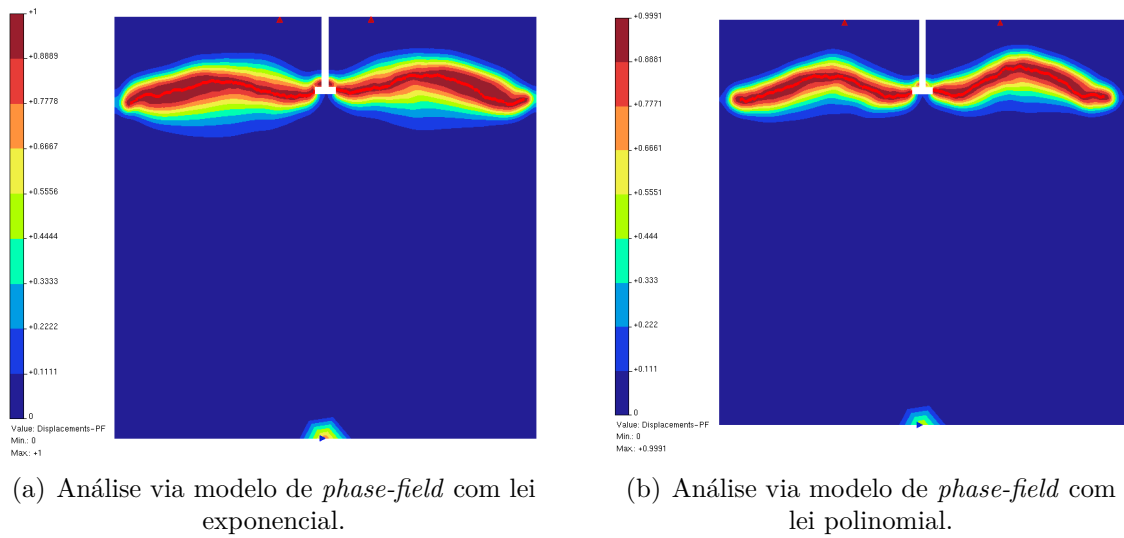


Figura 6.43 – Arrancamento ( $a = 75$  mm): distribuição do *phase-field*.

### 6.5 BARRAGEM

Nesta seção são apresentadas simulações de uma barragem de gravidade originalmente estudada, experimental e numericamente, pelo Laboratório do Instituto de Experimentos em Materiais e Estruturas (ISMES) em Bérghamo, Itália (BARPI; VALENTE, 2000). A geometria da barragem e suas condições de contorno são representadas na Fig. 6.44. A espessura da barragem fora do plano é de 300 mm, com exceção do seu rodapé de base, que foi alargado para 450 mm.

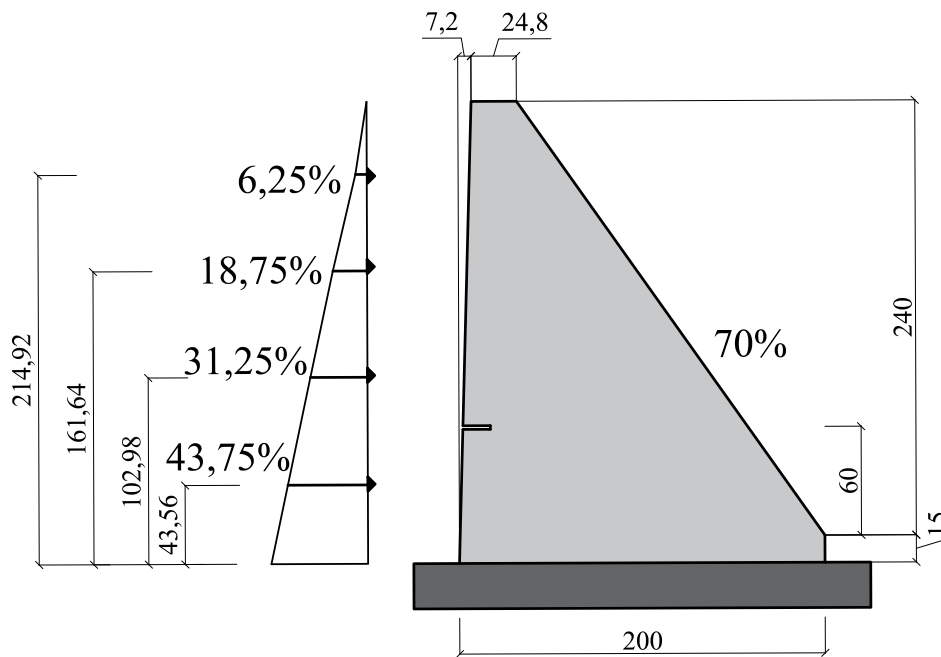


Figura 6.44 – Barragem: condições de contorno e geometria (dimensões em mm).

No estudo, foi analisada a interferência do tamanho do entalhe inicial no caminho da trinca e na resposta estrutural da barragem. Os entalhes iniciais avaliados foram de 150 mm e 300 mm. Para cada dimensão de entalhe foram ensaiadas malhas com três graus de refinamento, conforme apresentado na Fig. 6.45.

A análise não linear foi realizada a partir do incremento do deslocamento horizontal de 0,01 mm do nó situado na extremidade esquerda do topo da barragem, com tolerância de convergência em deslocamentos de  $1,0 \times 10^{-4}$ .

As propriedades do material obtidas experimentalmente por Carpinteri et al. (1992) e apresentadas por Barpi e Valente (2000) são dadas por:  $E = 35,7$  GPa,  $f_t = 3,6$  MPa,  $\nu = 0,1$  e  $G_c = 0,184$  N/mm. A resistência do concreto à compressão foi definida segundo a especificação do CEB-FIP (1991), conforme a equação 6.3, de modo que  $f_c$  foi estimado em 41,6 MPa. Consequentemente, determinou-se  $\kappa_r = f_c/f_t = 11,55$ .

O modelo de dano adotado foi o modelo de de Vree, Brekelmans e Gils (1995) em sua versão não local, com domínio definido pelo raio  $\ell = 60$  mm. Para o modelo de *phase-field*, considerou-se o comprimento intrínseco de 20 mm, atendendo ao mínimo recomendado por Wu et al. (2020), de aproximadamente duas vezes a dimensão dos menores elementos da malha. Foram avaliadas tanto as leis de evolução de dano exponencial ( $D_{exp}$ ) quanto polinomial ( $D_{pol}$ ), cujos parâmetros foram obtidos a partir de identificação paramétrica e são apresentados nas Tabs. 6.11 e 6.12, respectivamente.

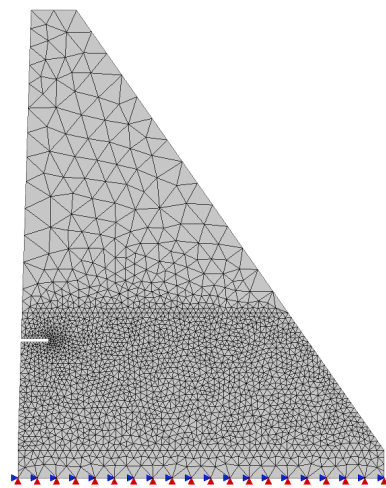
Tabela 6.11 – Parâmetros da lei de dano exponencial

Parâmetro	Valor
$\kappa_0$	0,0001
$\alpha$	0,999
$\beta$	1174

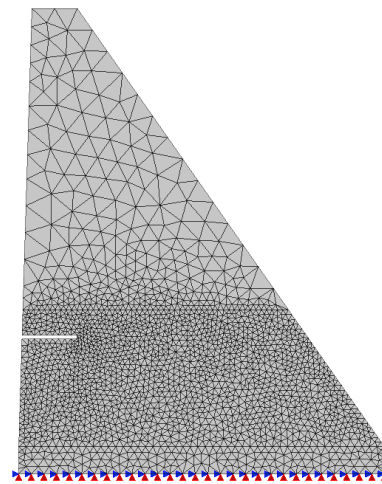
Tabela 6.12 – Parâmetros da lei de dano polinomial

Parâmetro	Valor
$f_e$ (MPa)	3,6
$\tilde{E}$ (GPa)	35,7
$\kappa_0$	0,00018

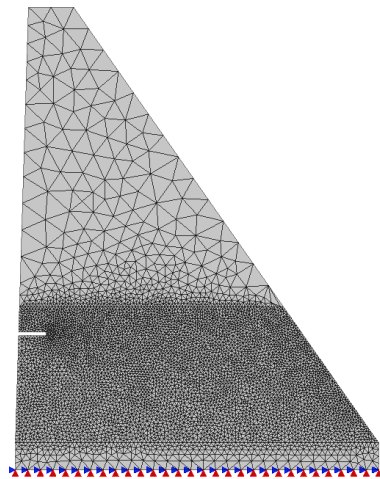
Na simulação procurou-se representar o comportamento estrutural da barragem e confrontar as respostas das diferentes variáveis de controle propostas no trabalho (seção 4.3.1), dadas por: dano, *phase-field* e variável híbrida. Uma vez definida a variável de transição entre contínuo e descontínuo, essa foi também a variável cuja média não local determinou a direção de propagação de trinca.



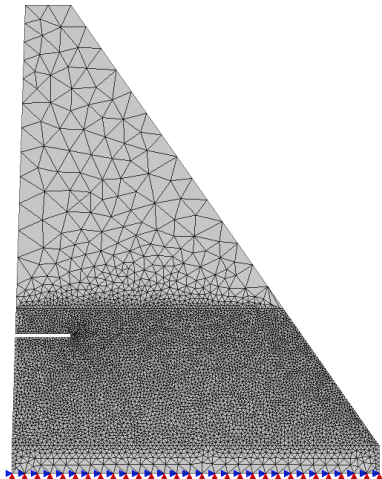
(a) Malha menos refinada (MC): 3952 elementos - entalhe de 150 mm.



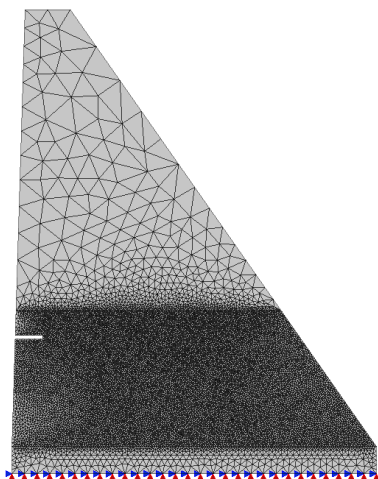
(b) Malha menos refinada (MC): 3905 elementos - entalhe de 300 mm.



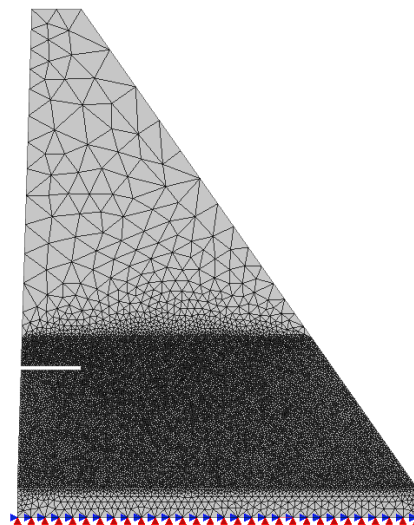
(c) Malha medianamente refinada (MM): 11257 elementos - entalhe de 150 mm.



(d) Malha medianamente refinada (MM): 11352 elementos - entalhe de 300 mm.



(e) Malha refinada (MF): 30853 elementos - entalhe de 150 mm.



(f) Malha refinada (MF): 31537 elementos - entalhe de 300 mm.

Figura 6.45 – Barragem: propostas de malhas.

Quanto aos valores críticos para marcar a passagem da fissuração para uma trinca explícita tomou-se  $D_L = 0,95$ ,  $PF_L = 0,2$  e  $H_L = 0,6$ . Por se tratar de um caso de propagação em modo I de abertura, inicialmente atribuiu-se o valor de 0,95 a todas as variáveis limites. Entretanto, para valores de *phase-field* mais elevados a simulação não chegou a apresentar propagação da trinca a partir de entalhe, rompendo na base da barragem. Notou-se que, por essa ser uma variável que nos passos iniciais da análise numérica assume valores menores, seria necessário trabalhar com um limite mais baixo para se observar evolução da trinca. Uma hipótese que justifica tal observação é o fato do *phase-field* ser mais sensível à captação de comportamentos estruturais frágeis, como os constatados nesta simulação. Tendo em vista que a variável híbrida é uma ponderação que depende tanto de  $D$  quanto de  $PF$ , seu valor crítico foi considerado como um valor intermediário.

As respostas considerando as diferentes malhas, leis de dano e variáveis de controle são dispostas em termos de caminho de trinca e trajetória de equilíbrio, respectivamente, nas Figs. 6.46 e 6.47 para o entalhe de 150 mm e nas Figs. 6.48 e 6.49 para o entalhe de 300 mm.

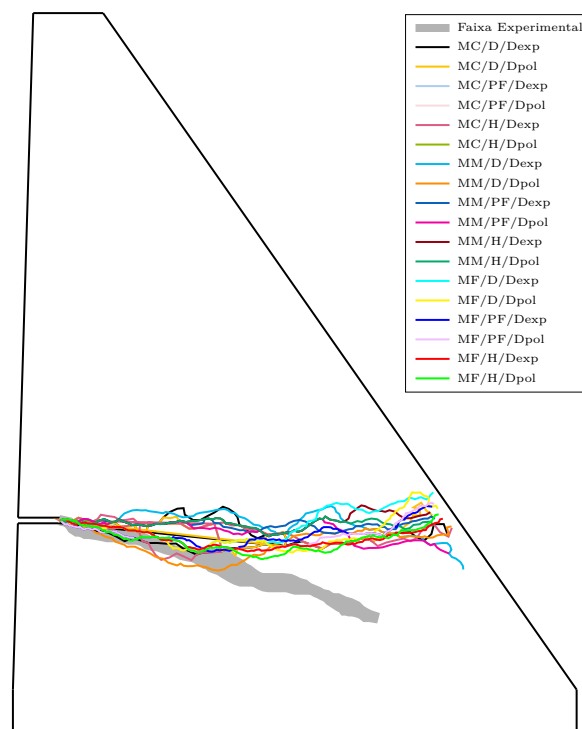


Figura 6.46 – Caminhos de trinca para as diferentes malhas: entalhe com 150 mm. Resultado experimental de Barpi e Valente (2000).

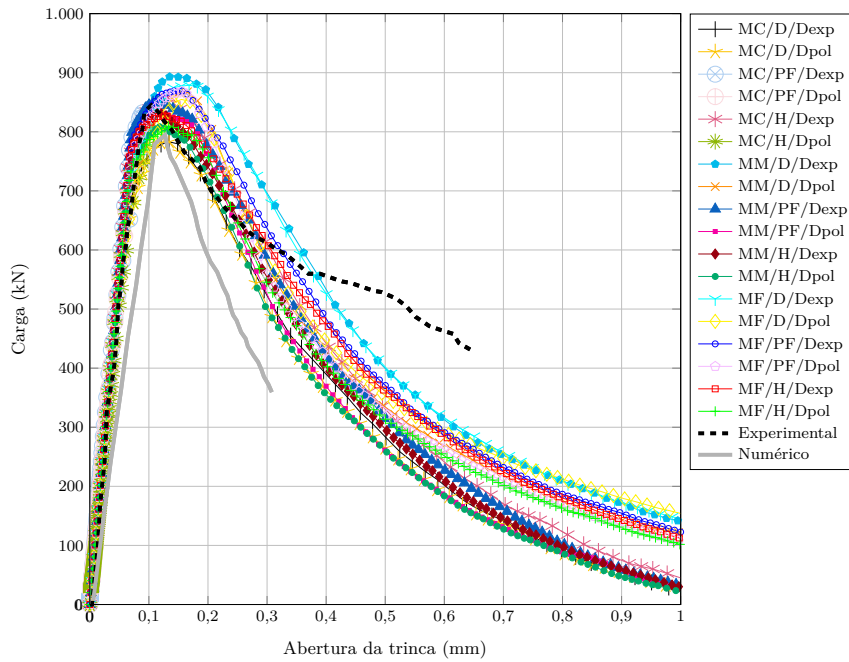


Figura 6.47 – Trajetórias de equilíbrio para as diferentes malhas: entalhe com 150 mm. Resultado experimental e numérico de Barpi e Valente (2000).

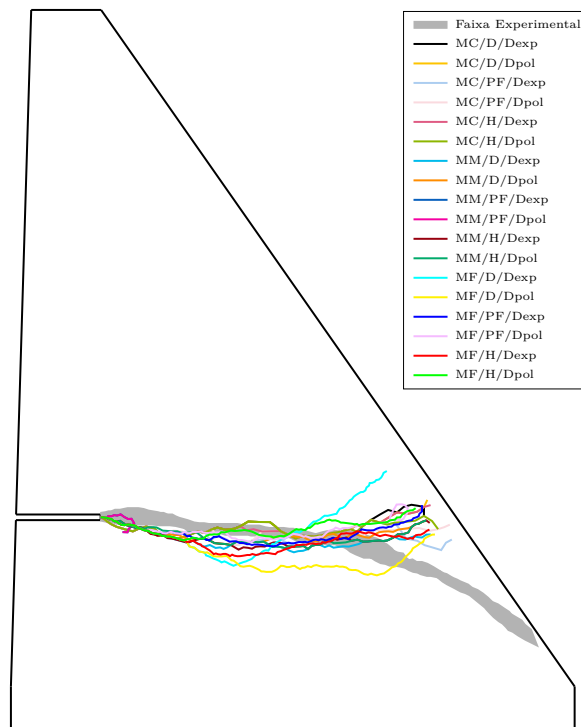


Figura 6.48 – Caminhos de trinca para as diferentes malhas: entalhe com 300 mm. Resultado experimental de Barpi e Valente (2000).

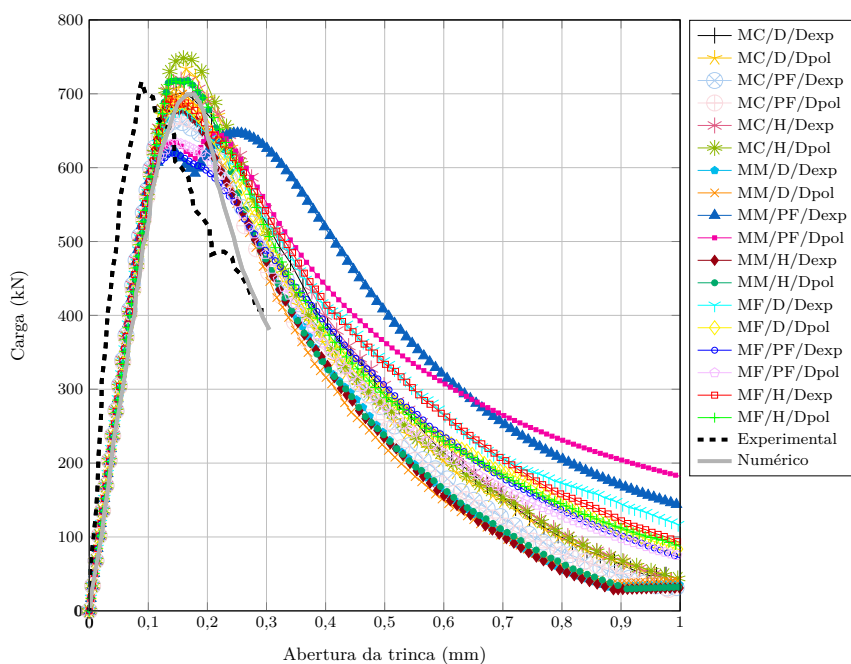


Figura 6.49 – Trajetórias de equilíbrio para as diferentes malhas: entalhe com 300 mm. Resultado experimental e numérico de Barpi e Valente (2000).

Analisando a Fig. 6.46, nota-se que, para o entalhe de 150 mm, Carpinteri et al. (1992) observou experimentalmente uma tendência da fratura se desviar para a base desde o início da análise. Esse fenômeno não foi observado nas simulações numéricas desenvolvidas, que seguiram um caminho de tendência horizontal de propagação. Apesar da dispersão entre as trajetórias obtidas numericamente, o comportamento qualitativo de todas foi similar, independentemente da taxa de refinamento, da lei de evolução de dano adotada e da variável de controle da propagação.

Quanto ao comportamento estrutural (Fig. 6.47), o resultado experimental de Carpinteri et al. (1992) diferiu do resultado numérico de Barpi e Valente (2000). Todavia, as análises processadas com o modelo contínuo-descontínuo proposto apresentaram boa aderência com a curva experimental de referência. A aproximação da carga máxima foi mais precisa para as malhas refinadas com critério de transição segundo a variável híbrida.

Já para o entalhe de 300 há um padrão de trinca experimental inicialmente horizontal, que só se desvia na direção da base ao final da análise, provavelmente como resultado do surgimento de uma área de compressão na face inclinada da barragem. Assim, as simulações numéricas captaram melhor esse trajeto, conforme indicado na Fig. 6.48. Quanto à curva carga *versus* abertura de trinca (Fig. 6.49), o resultado experimental destoa dos demais ainda no trecho elástico, o que pode ser produto da natureza mais rígida do experimento, a qual não foi captada numericamente pelo modelo proposto. No entanto, os resultados numéricos obtidos são compatíveis com o resultado numérico de

Barpi e Valente (2000) e, novamente, a aproximação da carga máxima ficou mais próxima para as malhas refinadas com critério de transição segundo a variável híbrida. A simulação MM/PF/Dexp apresentou uma instabilidade no pico, diferentemente das demais, embora não tenha sido identificado nenhum motivo aparente para essa divergência.

Por fim, são apresentados os resultados de (MF/PF/Dexp) em termos da configuração deformada (Fig. 6.50) e isofaixas de dano e *phase-field*, (Figs. 6.51 e 6.52).

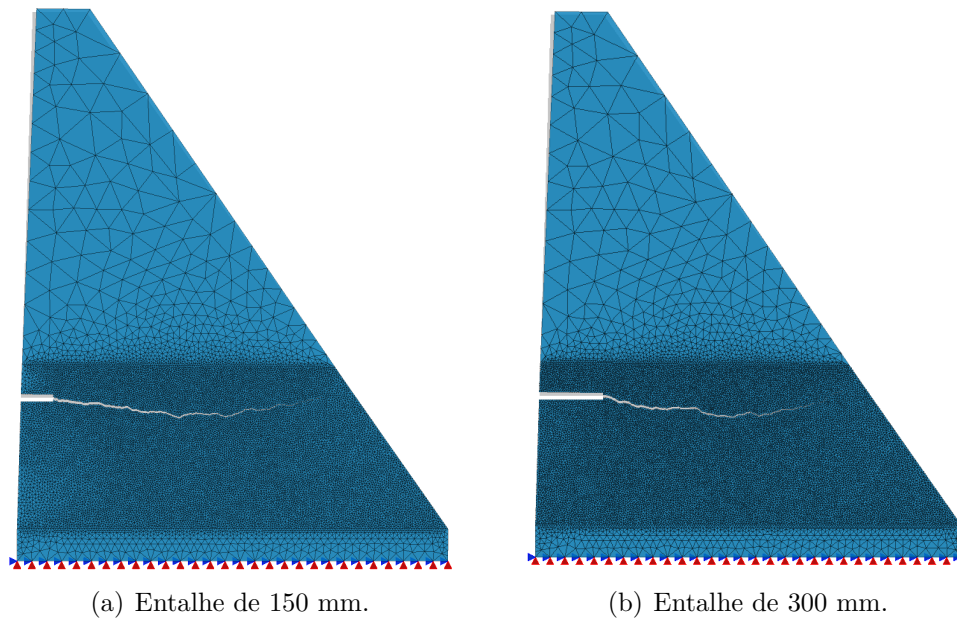


Figura 6.50 – Aspecto da trinca macroscópica (MF/PF/Dexp).

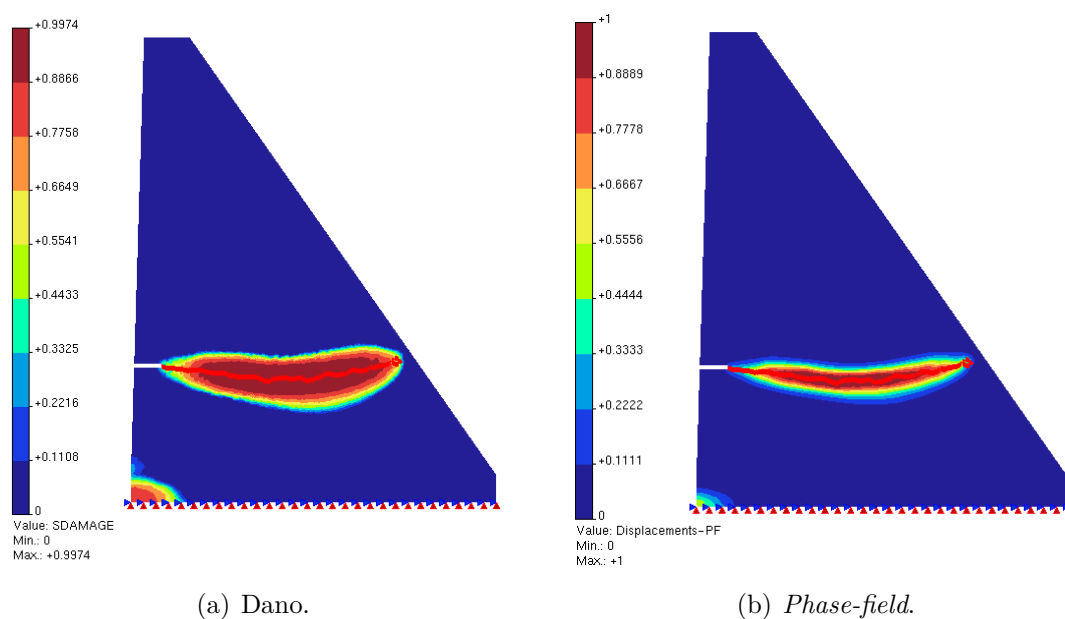
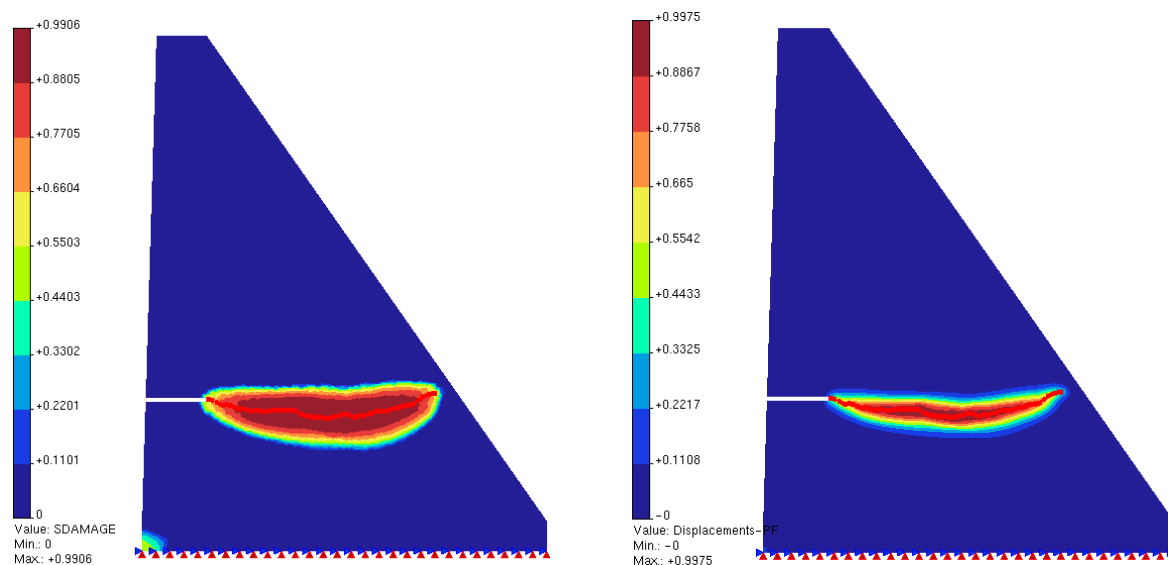


Figura 6.51 – Aspecto da degradação: entalhe com 150 mm (MF/PF/Dexp).



(a) Dano.

(b) *Phase-field*.

Figura 6.52 – Aspecto da degradação: entalhe com 300 mm (MF/PF/Dexp).

## 7 Considerações finais

Esta tese teve como objetivo a descrição por completo do fenômeno de fraturamento do concreto a partir da proposta de um modelo contínuo-descontínuo. Seu caráter de ineditismo provém da investigação da variável de *phase-field*, e também do dano e da variável híbrida desenvolvida, como marcadores transicionais entre fissuração distribuída e abertura de trincas explícitas, além das estratégias desenvolvidas para definir a direção de propagação. Para tanto, aliou-se um modelo de dano não local a um modelo de *phase-field*, associado a um algoritmo de duplicação nodal responsável pela quebra da malha.

As considerações finais da presente tese são organizadas neste capítulo e destacam pontos relevantes observados ao longo dos capítulos anteriores, em especial aqueles dedicados aos resultados. Na seção 7.1 são apresentadas as principais constatações provenientes do estudo detalhado desenvolvido para o painel em “L”, descrito no capítulo 5. Em seguida, a seção 7.2 abrange observações pautadas nos diversos modelos estruturais e padrões de trinca reproduzidos no capítulo 6. Apresentam-se na seção 7.3 as principais contribuições dessa tese no contexto da descrição do comportamento mecânico do concreto frente à degradação. Por fim, a seção 7.4 levanta temas de interesse para trabalhos futuros correlacionados a lacunas e limitações identificadas nesta pesquisa.

### 7.1 CONCLUSÕES SOBRE O MODELO CONTÍNUO-DESCONTÍNUO PROPOSTO

No capítulo 5, diferentes aspectos do modelo contínuo-descontínuo proposto foram explorados a partir de uma bateria de simulações numéricas aplicadas ao painel em “L” estudado experimentalmente por Winkler, Hofstetter e Niederwanger (2001) e Winkler, Hofstetter e Lehar (2004). Analisando os resultados obtidos, foi possível inferir acerca do modelo que é objeto desta tese:

- i O processo de parametrização dos ensaios via método de Monte Carlo permite um ajuste da resposta numérica à curva experimental segundo as respostas fornecidas pelas amostras dos ensaios. Assim, todos os parâmetros do modelo puderam ser correlacionados a propriedades medidas experimentalmente, incluindo uma pseudoaleatoriedade à simulação para suprir as lacunas inerentes à caracterização do material.
- ii O fenômeno de fraturamento requer malhas mais refinadas para representar adequadamente o caminho da trinca e a trajetória de equilíbrio, sem que haja instabilidades numéricas típicas da propagação de trincas discretas em malhas grosseiras. Além disso, a organização randômica de elementos da malha permite uma representação

menos restrita da trinca, já que malhas estruturadas ou semiestruturadas, considerando a propagação da trinca nas interfaces entre elementos, tende a criar vieses de propagação.

- iii Quanto ao tipo de elemento finito adotado nos modelos numéricos, esse não parece ser um parâmetro que influencie de forma significativa nem o caminho da trinca, nem a resposta estrutural. Assim, pode-se optar pelo elemento estrutural mais simples (o elemento triangular de três nós) para redução do custo computacional das análises.
- iv A análise dos critérios de nucleação e direção de propagação apontaram que o *phase-field* e o dano atuam de forma eficiente como variáveis de anúncio da duplicação nodal. Contudo, dentre os critérios estabelecidos para direcionamento da trinca, foram eliminados aqueles associados ao vetor de direção limitado aos nós conectados a ponta da trinca (pela instabilidade tanto do caminho da trinca quanto da trajetória de equilíbrio), como também o critério de *phase-field* máximo, dado que essa variável tem seu crescimento limitado a uma faixa muito estreita da malha, podendo restringir o crescimento da trinca a região em que essa surge (resultando em uma tendência da trinca retornar às adjacências da sua origem). Isso indica que, embora a fratura seja um fenômeno localizado, a predição do caminho de propagação e estimativa de direção da trinca tem caráter mais global, relativo à ZPF. Foram estabelecidos então três critérios eficazes para definir a direção de propagação da trinca: dano máximo e vetor de direções no domínio da ZPF (tanto para *phase-field* quanto para dano). Esses critérios também podem ser aplicados à variável híbrida. Todavia, dado o espalhamento do dano nos modelos não locais e a maior concentração do *phase-field* nas adjacências da trinca, o PF se apresentou como uma alternativa mais precisa na determinação do vetor de direção de propagação.
- v Com relação ao valor crítico que delimita a transição entre contínuo e descontínuo, observou-se que para o modo I de fratura, as melhores respostas, tanto em termos de caminho da trinca quanto em comportamento estrutural, ocorreram para dano crítico entre 0,90 e 0,95, *phase-field* limite entre 0,1 e 0,95 e variável híbrida no intervalo de 0,2 a 0,6. Nota-se, portanto, que só há surgimento de trincas explícitas quando o dano está bastante avançado (próximo da unidade). Todavia, o *phase-field* já é capaz de apontar frentes de trinca para valores bastante reduzidos. Conforme esperado, a variável híbrida tem um comportamento intermediário entre D e PF.

## 7.2 CONSIDERAÇÕES EXTRAS A PARTIR DAS SIMULAÇÕES DE VALIDAÇÃO DO MODELO

O capítulo 6 buscou estender a aplicação do modelo proposto a diferentes padrões de trinca. A partir dos ensaios de tração direta, flexão em três pontos, cisalhamento em quatro pontos, arrancamento e análise de uma barragem de gravidade foi possível constatar

algumas características do modelo contínuo-descontínuo que não haviam sido exploradas com o estudo do painel em “L”. Essas características são resumidas em:

- i Na tração direta com entalhes simétricos avaliou-se, pela primeira vez, a capacidade do modelo contínuo-descontínuo em reproduzir padrões de fratura com mais de uma frente de trinca. As respostas foram satisfatórias e coerentes com o esperado, contudo, observou-se a necessidade de um estudo mais aprofundado a respeito da coalescência de trincas formando uma frente única de propagação.
- ii O estudo da flexão em três pontos buscou comparar como a utilização de modelos de dano distintos (de Vree, Brekelmans e Gils (1995) e de Borst e Gutiérrez (1999)) para descrição do comportamento contínuo da estrutura pode impactar na resposta numérica tanto em relação à trajetória da trinca quanto com relação ao comportamento estrutural. Observou-se que não houve diferença significativa nos resultados, embora o modelo de de Borst e Gutiérrez (1999), por admitir o dano ortotrópico, tenha mostrado superioridade em redirecionar a trinca em zonas de compressão.
- iii Quando ao cisalhamento em quatro pontos, analisou-se a performance do modelo contínuo-descontínuo perante um modo misto de fratura. O modelo desenvolvido não apresentou dificuldade em reproduzir esse padrão de trinca, contudo, foi necessário reduzir o valor do *phase-field* limite que define a transição entre fissuração distribuída e fratura discreta. Foram encontradas boas respostas para  $PF_L$  entre 0,15 e 0,20. Tal resultado deve-se à conhecida dificuldade de se reproduzir o modo II de fratura, dada a preponderância do modo I de abertura.
- iv O ensaio de arrancamento, por sua vez, foi avaliado numericamente para compreender se o modelo desenvolvido é capaz de capturar diferentes padrões de fratura, à medida que se variava a distância entre os vínculos da estrutura. As respostas das simulações convergiram para diferentes aspectos, mostrando a flexibilidade do modelo em reproduzir trajetórias diversas de trincas.
- v Por fim, o exemplo da barragem de gravidade foi estudado com o intuito de aferir os diferentes critérios de transição contínuo-descontínuo e as estratégias propostas para definição da direção de propagação. Embora os dados experimentais indiquem diferenças no padrão de trinca para cada dimensão de trinca inicial, a simulação numérica não apresentou sensibilidade a esse parâmetro, mantendo uma trajetória de propagação equivalente para ambos os casos. A resposta estrutural e a estimativa da carga de pico, entretanto, foram coerentes com as referências adotadas.

### 7.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Ao final desse estudo, sintetiza-se as principais contribuições advindas do modelo contínuo-descontínuo desenvolvido para representação completa do fraturamento do concreto:

1. Estabelecimento de um procedimento padrão de parametrização de materiais e modelos constitutivos a partir de dados experimentais via simulações de probabilidades múltiplas pelo método de Monte Carlo. Uma das grandes dificuldades de se reproduzir experimentos numericamente é a ausência e a divergência dos dados relatados na literatura. Uma alternativa a essa limitação é incorporar a pseudoaleatoriedade aos parâmetros cercados por incertezas, obtendo seus valores ótimos ao se comparar a amostragem de curvas numéricas com a resposta experimental.
2. Elaboração de um algoritmo de duplicação nodal capaz de introduzir trincas explícitas em uma malha de elementos finitos dispensando adaptatividade de malhas e capaz de lidar com nucleação automática de trincas e múltiplas frentes de trinca se desenvolvendo simultaneamente. Sua variável histórica é a direção de propagação da ponta da trinca, que permite redefinir a incidência dos elementos com precisão após a fratura. Esse algoritmo foi implementado de forma a suportar diferentes variáveis de controle para conduzir os processos de nucleação e evolução de trincas. Portanto, novos critérios podem ser facilmente incluídos e testados sem demandar intervenções significativas no código.
3. Análise da variável transicional que delimita a passagem da fissuração distribuída para a fratura explícita. Conforme discutido na revisão da literatura, esse é um ponto de discussão entre autores, que carece de investigações. Assim, avaliou-se o potencial do dano  $e$ , principalmente, do *phase-field* - e posteriormente da variável híbrida proposta - em atuar como variáveis de controle dessa transição. De forma original, estudou-se a possibilidade de se empregar o *phase-field* nessa função, dada sua natureza que estabelece um elo de ligação entre os modelos de mecânica do dano contínuo e os modelos de fratura. Seu desempenho nas análises numéricas foi adequado e, por vezes, mostrou-se superior ao dano na descrição do caminho de trinca, dada sua característica de se concentrar em uma área restrita às adjacências da fratura.
4. Combinar modelos de dano não local com modelos de *phase-field* de modo a se obter um modelo contínuo-descontínuo. Esse modelo se mostrou hábil em representar o processo de degradação desde os primeiros sinais em escala microscópica até a abertura de trincas macroscópicas que conduzem a estrutura ao colapso. Em uma única análise tornou-se possível descrever com precisão tanto a resposta estrutural quanto as áreas de degradação crítica do meio.
5. Proposição de uma variável híbrida englobando dano e *phase-field* em sua constituição para representação da degradação.

## 7.4 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Para além das contribuições desta tese, foram também observadas lacunas que merecem atenção em trabalhos futuros dedicados à descrição do comportamento do concreto mediante fratura. Alguns desses tópicos são destacados a seguir:

- i Aprofundamento da análise estatística para parametrização do material. Cabe averiguar com maior minúcia quantas amostras são necessárias para uma resposta média satisfatória segundo simulações de Monte Carlo, bem como se aprimorar o cálculo da curva representativa. Neste estudo, foi considerado que 50 amostras já são suficientes para uma resposta média estável e a curva ótima foi estabelecida comparando, ponto a ponto, cada uma das curvas amostradas com uma média experimental. Contudo, percebeu-se que o procedimento de parametrização proposto tem potencial para ser amplamente aplicado em análises numéricas que buscam replicar ensaios de laboratório. Isso porque não há um procedimento padrão claramente definido quanto à definição de várias propriedades do material e do modelo para alimentar as análises computacionais. Assim, um estudo aprimorado a partir do procedimento de parametrização adotado nessa tese poderia gerar como produto um guia de aquisição de dados para modelagens computacionais partindo de ensaios.
- ii Análise de outras grandezas como potenciais variáveis de controle para anunciação de trincas e definição da direção de propagação, como tensões e deformações principais. O escopo do trabalho limitou-se a estudar o caráter transicional do *phase-field* e do dano, entretanto, há outros parâmetros que estão diretamente correlacionados à presença de trincas explícitas e poderiam ser testados como marcadores da passagem do contínuo para o descontínuo.
- iii Extensão do modelo proposto para casos em que múltiplas frentes de trinca sofram coalescência, formando uma frente única que segue se propagando, ou em que se verifique bifurcação de trincas. Por enquanto o algoritmo não está preparado para esse tipo de demanda, uma vez que a frente de trinca sempre se propaga conforme a direção de propagação anterior. Entretanto, quando múltiplas trincas convergem, há várias direções prévias de referência e é necessário ponderar como, a partir dessas direções, será estabelecida uma direção única após a convergência dos caminhos de fratura.
- iv Incorporação de leis coesivas ao modelo, a fim de investigar se a presença de coesão nas faces da fratura aprimora a representação da degradação progressiva de modo que malhas menos refinadas possam ser utilizadas nas simulações numéricas.
- v Ampliação do modelo contínuo-descontínuo para representar estruturas de concreto armado e concreto reforçado com fibras. Avaliar ainda a possibilidade combinar o modelo desenvolvido com a reprodução da heterogeneidade do concreto, que

inclui a diferenciação de suas fases (matriz cimentícia, agregado graúdo e regiões de interface).

- vi Análise da eficiência computacional do modelo proposto. Até então, o modelo proposto foi avaliado de forma qualitativa. Entretanto, conhecer sua performance a partir de dados quantitativos, como tempo de processamento e memória alocada, pode servir de parâmetro para avaliar sua viabilidade frente a outras estratégias de representação de trincas.
- vii Estudo da consistência energética do modelo contínuo-descontínuo. Ao se integrar dois modelos de naturezas distintas, como dano e *phase-field* e, ainda, associá-los a um algoritmo de redefinição de malha para representação da degradação do concreto, pode ser que surjam inconsistências energéticas embutidas no modelo, as quais devem ser investigadas e, caso necessário, corrigidas.

## Referências

- AGATHOS, K.; VENTURA, G.; CHATZI, E.; BORDAS, S. P. Stable 3d xfem/vector level sets for non-planar 3d crack propagation and comparison of enrichment schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 113, n. 2, p. 252–276, 2018a.
- ALESSI, R.; AMBATI, M.; GERASIMOV, T.; VIDOLI, S.; e Lorenzis, L. Comparison of phase-field models of fracture coupled with plasticity. In: OñATE, E.; PERIC, D.; NETO, E. de S.; CHIUMENTI, M. (Ed.). *Advances in Computational Plasticity. Computational Methods in Applied Sciences*. Cham: vol 46. Springer.
- ALESSI, R.; MARIGO, J.-J.; VIDOLI, S. Gradient damage models coupled with plasticity: Variational formulation and main properties. *Mechanics of Materials*, v. 80, p. 351–367, 2015.
- ALESSI, R.; VIDOLI, S.; De Lorenzis, L. A phenomenological approach to fatigue with a variational phase-field model: The one-dimensional case. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 190, p. 53–73, 2018b.
- ALMEIDA, M. L. *Elementos finitos paramétricos implementados em Java*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2005.
- AMBATI, M.; GERASIMOV, T.; De Lorenzis, L. Phase-field modeling of ductile fracture. *Computational Mechanics*, v. 55, p. 1017–1040, 2015.
- AMBATI, M.; KRUSE, R.; De Lorenzis, L. A phase-field model for ductile fracture at finite strains and its experimental verification. *Computational Mechanics*, v. 57, p. 149–167, 2016.
- AMENDOLA, G.; FABRIZIO, M.; GOLDEN, J. Thermomechanics of damage and fatigue by a phase field model. *Journal of Thermal Stresses*, v. 39, n. 5, p. 4887–499, 2016.
- AMOR, H.; MARIGO, J.-J.; MAURINI, C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, p. 1209–1229, 2009.
- ANDERSON, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Boca Raton, FL, USA: Taylor & Francis Group, 2017. ISBN 13: 978-1-4987-2813-3.
- ARREA, M.; INGRAFFEA, A. R. *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*. Ithaca, New York, 1982.
- ASSIS, N.; PENNA, S. S. Coupling of discrete crack and continuous damage model to describe the complete process of concrete fracture. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 46, n. 696, p. 1–19, 2024.

- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium crack in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, p. 55–129, 1962.
- BARPI, F.; VALENTE, S. Numerical simulation of prenotched gravity dams. *J. Eng. Mech.*, v. 126, n. 6, p. 611–619, 2000.
- BAŽANT, Z.; JIRÁSEK, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 28, p. 1119–1149, 2002.
- BAŽANT, Z. P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 102, n. 2, p. 331–344, 1976.
- BAŽANT, Z. P. Imbricate continuum and its variational derivation. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, n. 12, p. 1693–1712, 1984.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Blunt crack band propagation in finite element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 105, p. 297–315, 1979.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Fracture mechanics of reinforced concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 105, p. 1287–1306, 1980.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Finite element modeling of crack band propagation. *Journal of Structural Engineering*, v. 109, n. 1, p. 69–92, 1983.
- BAŽANT, Z. P.; LIN, F.-B. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering*, v. 114, n. 11, p. 2493–2510, 1988.
- BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux at Constructions*, v. 16, n. 93, p. 155–177, 1983.
- BAŽANT, Z. P.; PIJAUDIER-CABOT, G. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, v. 55, p. 287–293, 1988.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 46, n. 5, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering*, v. 17, n. 4, p. 1–24, 2009.
- BELYTSCHKO, T.; LIN, J. I. A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion. *International Journal of Impact Engineering*, v. 5, n. 1-4, p. 111–127, 1987.
- BLEYER, J.; ROUX-LANGLOIS, C.; MOLINARI, J.-F. Dynamic crack propagation with a variational phase-field model: limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms. *International Journal of Fracture*, v. 204, p. 79–100, 2017.
- BOBIŃSKI, J.; TEJCHMAN, C. J. Modelling of concrete behaviour with a non-local continuum damage approach. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, v. 52, n. 3, p. 243–263, 2015.

- BOLDRINI, J.; MORAES, E. B. de; CHIARELLI, L.; FUMES, F.; BITTENCOURT, M. A non-isothermal thermodynamically consistent phase field framework for structural damage and fatigue. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 312, p. 395–427, 2016.
- BORDAS, S.; RABCZUK, T.; ZI, G. Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, n. 5, p. 943–960, 2008.
- BORDEN, M. J.; HUGHES, T. J. R.; LANDIS, C. M.; ANVARI, A.; LEE, I. J. A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 312, p. 130–166, 2016.
- BORDEN, M. J.; VERHOOSSEL, C. V.; SCOTT, M. A.; HUGHES, T. J. R.; LANDIS, C. M. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 217, p. 77–95, 2012.
- BOURDIN, B.; FRACFORT, G. A.; MARIGO, J.-J. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 48, p. 797–826, 2000.
- BOURDIN, B.; FRACFORT, G. A.; MARIGO, J.-J. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, v. 91, n. 1, p. 5–148, 2008.
- BOURDIN, B.; LARSEN, C. J.; RICHARDSON, C. L. A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization. *International Journal of Fracture*, v. 168, n. 2, p. 133–143, 2011.
- BOURDIN, B.; MARIGO, J.-J.; MAURINI, C.; SICSIC, P. Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks. *Physical Review Letters*, v. 112, n. 014301, p. 1–5, 2014.
- BROEK, D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group, 1982. ISBN 13: 978-94-010-8425-3.
- CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. Damage and fatigue described by a fractional derivative model. *Journal of Computational Physics*, v. 293, p. 400–408, 2015.
- CAROL, I.; RIZZI, E.; WILLAM, K. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, p. 2835–2865, 1994.
- CAROL, I.; RIZZI, E.; WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation. i. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 491–518, 2001.
- CAROL, I.; RIZZI, E.; WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation. ii. generalized pseudo-rankine model for tensile damage. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 519–546, 2001.
- CARPINTERI, A.; VALENTE, S. V.; FERRARA, G.; IMPERATO, L. Experimental and numerical fracture modelling of a gravity dam. In: *Fracture mechanics of concrete structures*. Stuttgart: CRC Press, 1992. p. 351–360.

- CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal, ACI*, v. 82, n. 6, p. 797–804, 1985.
- CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *American Concrete Institute Journal, ACI*, v. 83, n. 1, p. 21–28, 1986.
- CEB-FIP. *Model Code*. Lausanne, Suíça, 1991.
- CHABOCHE, J. L. Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, v. 79, p. 309–319, 1984.
- CHEN, L.; LIU, G. R.; JIANG, Y.; ZENG, K.; ZHANG, J. A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for crack analyses in anisotropic media. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 78, n. 1, p. 85–109, 2011.
- CHEN, L.; LIU, G. R.; NOURBAKHSH, N.; ZENG, K. A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for bimaterial interface cracks. *Computational Mechanics*, v. 45, n. 2-3, p. 109–125, 2001.
- CLAYTON, J. D.; KNAP, J. A geometrically nonlinear phase field theory of brittle fracture. *International Journal of Fracture*, v. 189, n. 2, p. 139–148, 2014.
- COMI, C.; MARIANI, S.; PEREGO, U. An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 31, p. 213–238, 2007.
- CUVILLIEZ, S.; FEYEL, F.; LORENTZ, E.; MICHEL-PONELLE, S. A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 237-240, p. 244–259, 2012.
- DE BORST, R. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 35, p. 521–539, 1992.
- DE BORST, R.; GEERS, M.; PEERLINGS, R.; BENALLAL, A. Some remarks on gradient and nonlocal damage theories. In: ELSEVIER. *Damage Mechanics in Engineering Materials*. Online, 1998. v. 46, p. 223–236.
- DE BORST, R.; GUTIÉRREZ, M. A. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture*, v. 95, p. 261–277, 1999.
- DE BORST, R.; SLUYS, L. J.; MÜHLHAUS, H.-B.; PAMIN, J. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, v. 10, p. 99–121, 1993.
- DE VREE, J. H.; BREKELMANS, W. A. M.; GILS, M. A. J. van. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers e Structures* 55 (4), p. 581–588, 1995.
- DESAI, C. S.; ZAMAN, M. M.; LIGHTNER, G. J.; SIRIWARDANE, H. J. Thin-layer element for interfaces and joints. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 8, p. 19–43, 1984.

- DUDA, F. P.; CIARBONETTI, A.; SÁNCHEZ, P. J.; HUESPE, A. E. A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids. *International Journal of Plasticity*, v. 65, p. 269–296, 2015.
- DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, p. 100–104, 1960.
- DVORKIN, E. N.; CUITINO, A. M.; GIOIA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, n. 3, p. 541–564, 1990.
- EGGER, A.; PILLAI, U.; AGATHOS, K.; KAKOURIS, E.; CHATZI, E.; ASCHROFT, I. A.; TRIANTAFYLLOU, S. P. Discrete and phase field methods for linear elastic fracture mechanics: a comparative study and state-of-the-art review. *Applied Sciences*, v. 9, p. 2436–1–64, 2019.
- ELFGREN, L.; ELIGEHAUSEN, R.; ROTS, J. G. Anchor bolts in concrete structures: summary of round robin tests and analysis arranged by rilem tc 90-fma fracture mechanics of concrete- applications. *Material and Structures*, v. 34, p. 541–457, 2001.
- ENSSLIN, L.; ENSSLIN, S. R.; PINTO, H. de M. Processo de investigação e análise bibliométrica: avaliação da qualidade dos serviços bancários. *Revista de Administração Contemporânea*, v. 17, n. 3, p. 325–349, 2013.
- FAIRBAIRN, E. M. R.; EBECKEN, N. F. F.; PAZ, C. N. M.; ULM, F.-J. Determination of probabilistic parameters of concrete: solving the inverse problem by using artificial neural networks. *Computer and Structures*, v. 78, n. 78, p. 497–503, 2000.
- FEIST, C.; KERBER, W.; LEHAR, H.; HOFSTETTER, G. A comparative study of numerical models for concrete cracking. In: *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Jyväskylä: ECCOMAS, 2004. p. 1–19.
- FONSECA, F. T. *Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2008.
- FONSECA, M. T. *Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não linear com modelos reticulados de seções transversais compostas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2006.
- FRACFORT, G. A.; MARIGO, J.-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 46, n. 8, p. 1319–1342, 1998.
- FREDDI, F.; IURLANO, F. Numerical insight of a variational smeared approach to cohesive fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 98, p. 156–171, 2017.
- FREDDI, F.; ROYER-CARFAGNI, G. Regularized variational theories of fracture: A unified approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 58, p. 1154–1174, 2010.

- FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, v. 27, n. 1, p. 365–390, 1903.
- FRIES, T.-P.; BAYDOUN, M. Crack propagation with the extended finite element method and a hybrid explicit-implicit crack description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 89, n. 12, p. 1527–1558, 2012.
- FUINA, J. S. *Métodos de controle de deformações para análise não linear de estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2004.
- FUINA, J. S. *Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Abril 2009.
- GÁLVEZ, J. C.; ČERVENKA, J.; CEDÓN, D. A.; SOUMA, V. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 32, p. 1567–1585, 2002.
- GÁLVEZ, J. C.; ELICES, M.; GUINEA, G. V.; PLANAS, J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Fracture*, v. 94, p. 267–284, 1998.
- GÁLVEZ, J. C.; PLANAS, J.; SANCHO, J. M.; REYES, E.; CENDÓN, D. A.; CASATI, M. J. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 109, p. 369–386, 2013.
- GARCÍA-ÁLVAREZ, V. O.; GETTU, R.; CAROL, I. Analysis of mixed model fracture in quasi-brittle materials using the discrete crack method. *Anales de Mecánica de la Fractura*, v. 19, p. 361–366, 2002.
- GARCÍA-ÁLVAREZ, V. O.; GETTU, R.; CAROL, I. Analysis of mixed model fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model. *Sadhana*, v. 37, p. 187–205, 2012.
- GEELEN, R. J. M.; LIU, Y.; DOLBOW, J. E.; RODRIGUEZ-FERRAN, A. An optimization-based phase-field method for continuous-discontinuous crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 116, p. 1–20, 2018.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, p. 375–389, 1977.
- GIOVANARDI, B.; SCOTTI, A.; FOMAGGIA, L. A hybrid xFEM - phase field (xField) method for crack propagation in brittle elastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 320, p. 396–420, 2017.
- GONÇALVES, M. A. B. *Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2004.
- GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R.; BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 94, n. 3, p. 637–659, 1968.

- GOPALARATNAM, V.; GERSTLE, W.; DARWIN, D. *Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures*. Farmington Hills, MI, 1997.
- GORI, L. *Failure analysis of quasi-brittle media using the micropolar continuum theory, elastic-degrading constitutive models, and smoothed point interpolation methods*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Junho 2018.
- GRIFFITH, A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, v. 221, p. 163–198, 1921.
- GUPTA, P.; DUARTE, C. A. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 38, n. 13, p. 1397–1430, 2014.
- GÜRSES, E.; MIEHE, C. A computational framework of three-dimensional configurational-force-driven brittle crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 15-16, p. 1413–1428, 2009.
- HAKIM, V.; KARMA, A. Crack path prediction in anisotropic brittle materials. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 23, p. 235–501, 2005.
- HEUZE, F. E.; BARBOUR, T. G. New models for rock joints and interfaces. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, v. 108, n. GT5, p. 757–776, 1982.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Anylis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v. 6, p. 773–782, 1976.
- HOFACKER, M.; MIEHE, C. Continuum phase field modeling of dynamic fracture: variational principles and staggered fe implementation. *International Journal of Fracture*, v. 178, n. 1, p. 113–129, 2012.
- HOFACKER, M.; MIEHE, C. A phase field model of dynamic fracture: Robust field updates for the analysis of complex crack patterns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 93, n. 3, p. 276–301, 2013.
- HORDIJK, D. A. *Local approach to fatigue of concrete*. Tese (Doutorado) — Universidade Técnica de Delft, Delft, 1991.
- HUANG, J.; FENG, C.; WANG, X.; ZHANG, Y. Continuous–discontinuous element method for simulating three-dimensional reinforced concrete structures. *Structural Concrete*, v. 25, n. 2, p. 1–16, 2024.
- HUTCHINSON, J. W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, p. 13–31, 1968.
- INGRAFFEA, A. R.; SAOUMA, V. E. Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: SIH, G. C.; DITOMMASO, A. (Ed.). *Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1985. p. 171–225.

- IRWIN, G. R. Fracture dynamics. In: AMERICAN SOCIETY FOR METAL. *Fracturing of metals*. Cleveland, 1948. p. 147–166.
- IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 361–364, 1957.
- JAHANITABAR, A. A.; LOTFI, V. Formulation and efficient implementation of coupled anisotropic damage-plasticity model for plain concrete. *Acta Mech*, v. 235, p. 4575–4605, 2024.
- JANSON, J.; HULT, J. Fracture mechanics and damage mechanics - a combined approach. *Journal de Mécanique Appliquée*, v. 1, p. 69–84, 1977.
- JIANG, Y.; LIU, G. R.; ZHANG, Y. W.; CHEN, L.; TAY, T. E. A singular ES-FEM method for plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 45-46, p. 2943–2955, 2011.
- JIRÁSEK, M. Nonlocal damage mechanics with application to concrete. *Revue Française de Génie Civil*, v. 8, p. 683–707, 2004.
- JIRÁSEK, M. Nonlocal damage mechanics. *Revue Européenne de génie civil*, v. 11, n. 7-8, p. 993–1021, 2007.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model. Part II. Combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, n. 6, p. 1291–1305, 2001. ISSN 00295981.
- JOHNSON, G. R.; STRYK, R. A. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions. *International Journal of Impact Engineering*, v. 5, n. 1-4, p. 411–421, 1987.
- KACHANOV, L. M. Rupture time under creep conditions (in russian). *Otd. Tech. Nauk.*, v. 8, p. 26–31, 1958.
- KACHANOV, L. M. *Introduction to continuum damage mechanics*. Brookline, MA, USA: Springer-Science+Business Media, 1986.
- KACZMARCZYK, A.; ULLAH, Z.; PEARCE, C. J. Energy consistent framework for continuously evolving 3d crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 324, p. 54–73, 2017.
- KAPLAN, M. E. Crack propagation and fracture of concrete. *ACI JOURNAL, Proceedings*, v. 58, 1961.
- KARAMNEJAD, A.; NGUYEN, V. P.; SLUYS, L. J. A multi-scale rate dependent crack model for quasi-brittle heterogeneous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 104, p. 96–113, 2013.
- KARIHALOO, B. L. *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1995. ISBN 0-470-24988-9.
- KUHN, C.; NOLL, T.; MÜLLER, R. On phase field modeling of ductile fracture. *GAMM-Mitteilungen*, v. 39, n. 1, p. 35–54, 2016.

- LABANDA, N. A.; GIUSTI, S. M.; LUCCIONI, B. M. Meso-scale fracture simulation using an augmented lagrangian approach. *Damage Mechanics*, v. 27, n. 1, p. 138–175, 2018.
- LANCIONI, G.; ROYER-CARFAGNI, G. The variational approach to fracture mechanics. a practical application to the french Panthéon in Paris. *Journal of Elasticity*, v. 95, p. 1–30, 2009.
- LARSEN, C. J.; ORTNER, C.; SALI, E. Existence of solutions to a regularized model of dynamic fracture. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 20, n. 7, p. 1021–1048, 2010.
- LEÃO, H. M. *A critical study on phase-field modelling of fracture*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2021.
- LEBLOUBA, M.; TRABIN, M.; ZAHRI, M. Probabilistic analysis and simulation of crack propagation in concrete pavements and surfaces. *Scientific Reports*, v. 12, n. 14157, p. 1–17, 2022.
- LECKIE, F. A.; HAYHURST, D. R. Creep rupture of structures. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 340, p. 323–347, 1974.
- LECLERC, J.; WU, L.; NGUYEN, V. D.; NOELS, L. A damage to crack transition model accounting for stress triaxiality formulated in a hybrid nonlocal implicit discontinuous Galerkin-cohesive band model framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 113, n. 3, p. 374–410, jan 2017. ISSN 00295981.
- LEGENDRE, D.; MAZARS, J. Damage and Fracture Mechanics for Concrete (a Combined Approach). In: S.R. Taplin, D.M.R. Rao, P. Rama, J.F. Knott, R. Dubey, S. V. (Ed.). *Advances in fracture research: proceedings of the 6th International Conference on Fracture (ICF6)*. New Delhi, India: International Congress on Fracture (ICF), 1984. v. 4, n. 1976, p. 2841–2848. ISBN 0080293093.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-21503-4.
- LI, B.; PECO, C.; MILLÁN, D.; ARIAS, I.; ARROYO, M. Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 102, p. 711–727, 2015.
- LI, T.; MARIGO, J.-J.; GUILNAUD, D.; POTAPOV, S. Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 108, n. 11, p. 1381–1405, 2016.
- LIU, G. R.; NOURBAKHSHNIA, N.; ZHANG, Y. W. A novel singular ES-FEM method for simulating singular stress fields near the crack tips for linear fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 78, n. 6, p. 863–876, 2011.

- LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, v. 82, p. 1013–1024, 1977.
- MANZOLI, O. L.; GAMINO, A. L.; CLARO, E. A. R. and G. K. S. Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computers and Structures*, v. 94-95, p. 70–82, 2012.
- MANZOLI, O. L.; MAEDO, M. A.; BITENCOURT, L. A.; RODRIGUES, E. A. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 153, p. 151–170, 2016.
- MARIGO, J.-J.; MAURINI, C.; PHAM, K. An overview of the modelling of fracture by gradient damage models. *Mecanica*, v. 51, p. 3107–3128, 2016.
- MAY, S.; VIGNOLLET, J.; DE BORST, R. A numerical assessment of phase-field models for brittle and cohesive fracture:  $\gamma$ -convergence and stress oscillations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v. 52, p. 72–84, 2015.
- MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese (Doutorado) — Université Paris, Paris, 1984.
- MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier Science Ltd, v. 33, n. 20-22, p. 3327–3342, 1996. ISSN 00207683.
- MEDIAVILLA, J.; PEERLINGS, R. H. J.; GEERS, M. G. D. A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations. *Computers and Structures*, v. 84, p. 604–623, 2006.
- MIEHE, C.; HOFACKER, M.; WELSCHINGER, F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, p. 2765–2778, 2010b.
- MIEHE, C.; SCHANZEL, L.-M.; ULMER, H. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part i. balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 294, p. 449–485, 2015a.
- MIEHE, C.; WELSCHINGER, F.; HOFACKER, M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field fe implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 83, p. 1273–1311, 2010a.
- MÖES, N.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, n. 7, p. 813–833, 2002.
- MÖES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 46, n. 1, p. 131–150, 1999.

- MOONEN, P.; CAMELIET, J.; SLUYS, L. A continuous-discontinuous approach to simulate fracture processes in quasi-brittle materials. *Philosophical Magazine*, v. 88, n. 28-29, p. 3281–3298, 2008.
- MOONEN, P.; SLUYS, L.; CARMELIET, J. A continuous-discontinuous approach to simulate physical degradation processes in porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 84, p. 1009–1037, 2010.
- MURAKAMI, S. *Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Dordrecht, Netherlands: Springer Netherlands, 2012. ISBN 978-94-007-2665-9.
- MURAKAMI, S.; OHNO, N. A continuum theory of creep and creep damage. In: PONTER, A.; HAYHURST, D. (Ed.). *Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981.
- NEGI, A.; KUMAR, S. A continuous–discontinuous localizing gradient damage framework for failure analysis of quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 390, n. 114434, p. 1–41, 2022. ISSN 0045-7825.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *American Concrete Institute Journal*, v. 64, n. 3, p. 152–163, 1967.
- NGUYEN, T. T.; RÉTHORÉ, J.; BAIETTO, M. C. Phase field modelling of anisotropic crack propagation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, v. 65, p. 279–288, 2017.
- NGUYEN, T. T.; YVONNET, J.; ZHU, Q.-Z.; BORNERT, M.; CHATEAU, C. A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 312, p. 567–595, 2016.
- NGUYEN, V. P.; LLOBERAS-VALLS, O.; STROVEN, M.; SLUYS, L. J. Homogenization-based multiscale crack modelling: From micro-diffusive damage to macro-cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, p. 1220–1236, 2011.
- NGUYEN, V. P.; STROVEN, M.; SLUYS, L. J. An enhanced continuous-discontinuous multiscale method for modelling mode-I failure in random heterogeneous quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 79, p. 78–102, 2012.
- NILSON, A. H. Nonlinear analysis of concrete by the finite element method. *American Concrete Institute Journal*, v. 65, n. 9, p. 757–766, 1968.
- OLIVEIRA, T. S. *Abordagens estáveis do MEFG/X na simulação de trincas com modelo de zona coesiva em meios parcialmente frágeis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Dezembro 2024.
- ORTIZ, M.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 61, n. 2, p. 189–214, 1987.
- PANDOLFI, A.; ORTIZ, M. An eigenstrain approach to brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 92, p. 694–714, 2012.

- PEERLINGS, R. H. J.; DE BORST, R.; BREKELMANS, W. A. M.; GEERS, M. G. D. Gradient enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mech. Cohes.-Friction. Mater.*, v. 3, p. 323–342, 1998.
- PENG, R.; QIU, W.; JIANG, M. Application of a micro-model for concrete to the simulation of crack propagation. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 116, n. 103081, p. 1–18, 2021.
- PENNA, S. S. *Pós-processador para modelos bidimensionais não lineares do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2007.
- PENNA, S. S. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2011.
- PEREIRA, L. R. S. *Formulação de modelos de dano tensorial para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos e cíclicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2020.
- PEREZ, N. *Fracture Mechanics*. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. ISBN 978-3-319-24997-1.
- PIJAUDIER-CABOT, G.; BAŽANT, Z. P. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 113, n. 10, p. 1512–1533, 1987.
- RABCZUK, T. Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids: state-of-the-art review and future perspectives. *International Scholarly Research Notices*, v. 2013, n. ID 849231, p. 1–38, 2013.
- RABCZUK, T.; BORDAS, S.; ZI, G. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. *Computers & structures*, v. 88, n. 23-24, p. 1391–1411, 2010.
- RABOTNOV, Y. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.
- RASHID, Y. R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, v. 7, p. 334–344, 1968.
- REINOSO, J.; DURAND, P.; BUDARAPU, P. R.; PAGGI, M. Crack patterns in heterogeneous rocks using a combined phase field-cohesive interface modeling approach: A numerical study. *Energies*, v. 12, n. 6, 2019. ISSN 19961073.
- RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v. 35, p. 379–386, 1968.
- ROBOTNOV, Y. N. Creep rupture in applied mechanics. In: *Proceedings of the 12th International Congress on Applied Mechanics*. Stanford, CA, USA: North-Holland Publishing Company, 1968. p. 342–349.

- ROTH, S. N.; LÉGER, P.; SOULAÏMANI, A. A combined XFEM-damage mechanics approach for concrete crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, p. 923–955, 2015. ISSN 00457825.
- ROTS, J.; NOUTA, P.; KUSTERS, G. M. A.; BLAAUWENDRAAD, J. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, Delft University of Technology, v. 30, n. 1, p. 1–48, 1985.
- ROTS, J. G. *Computational modeling of concrete fracture*. Tese (Doutorado) — Universidade Técnica de Delft, Delft, Setembro 1988.
- SCHLÜTER, A.; WILLENBÜCHER, A.; KUHN, C.; MÜLLER, R. Phase field approximation of dynamic brittle fracture. *Computational Mechanics*, v. 54, n. 5, p. 1141–1161, 2014.
- SILLING, S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v. 48, p. 175–209, 2000.
- SILVA, L. L. *Estreatégia para descrição micromórfica do í a partir do contínuo clássico*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2019.
- SIMONE, A.; WELLS, G. N.; SLUYS, L. J. From continuous to discontinuous failure in a gradiente-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 4581–4607, 2003.
- SOPARAT, P.; NANAKORN, P. Analysis of anchor bolt pullout in concrete by the element-free galerkin method. *Engineering Structures*, v. 30, p. 3574–3586, 2008.
- SOUZA, P. L. F. B. *Modelo ortotrópico não local aplicado à regularização de resultados na análise fisicamente não linear*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2016.
- SOUZA, R. A. *Análise de fraturamento em estruturas de concreto utilizando programas de análise estrutural*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, Maio 2001.
- STEINKE, C.; ÖZENC, K.; CHINARYAN, G.; KALISKE, M. A comparative study of the r-adaptive material force approach and the phase-field method in dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, v. 201, p. 97–118, 2016.
- SUÁREZ, F.; GÁLVEZ, J. C.; CEDÓN, D. A. A material model to reproduce mixed-mode fracture in concrete. *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, v. 42, p. 223–238, 2019.
- SUN, Y.; LIU, Z.; TANG, X. A hybrid FEMM-Phase field method for fluid-driven fracture propagation in three dimension. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 113, p. 40–54, 2020.
- TAMAYO-MAS, E.; FELIU-FABÀ, J.; CASADO-ANTOLIN, M.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A. A continuous-discontinuous model for crack branching. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 120, n. 1, p. 86–104, 2019. ISSN 10970207.

- TEICHTMEISTER, S.; KIENLE, D.; ALDAKHEEL, F.; KEIP, M.-A. Phase field modeling of fracture in anisotropic brittle solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 97, p. 1–21, 2017.
- TRAN, T. V.; NGUYEN-XUAN, H.; ZHUANG, X. Investigation of crack segmentation and fast evaluation of crack propagation, based on deep learning. *Front. Struct. Civ. Eng.*, v. 18, n. 4, p. 516–535, 2021.
- VARDOULAKIS, I.; MÜHLHAUS, H.-B.; PAMIN, J. The thickness of shear bands in granular materials. v. 37, n. 3, p. 271–283, 1987.
- VERHOOSEL, C. V.; DE BORST, R. A phase-field model for cohesive fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 96, p. 43–62, 2013.
- VERHOOSEL, C. V.; SCOTT, M. A.; DE BORST, R.; HUGHES, T. J. R. An isogeometric approach to cohesive zone modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 87, n. 1-5, p. 336–360, jul 2011. ISSN 00295981.
- VERVUURT, A. H. J. M.; van Mier, J. G. M.; SCHLANGEN, E. Analyses of anchor pull-out in concrete. *Material Structures*, v. 27, n. 169, p. 251 – 259, 1994.
- VIGNOLLET, J.; MAY, S.; DE BORST, R.; VERHOUSEL, C. V. Phase-field models for brittle and cohesive fracture. *Meccanica*, v. 49, n. 11, p. 2587–2601, 2014.
- VOLEGOV, P. S.; GRIBOV, D. S.; TRUSOV, P. V. Damage and fracture: classical continuum theories. *Physical Mesomechanics*, v. 20, n. 2, p. 157–173, 2017.
- WANG, X.; YANG, Z.; YATES, J.; JIVKOV, A.; ZHANG, C. Monte carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores. *Construction and Building Materials*, v. 75, p. 35–45, 2015.
- WANG, Y.; WAISMAN, H. From diffuse damage to sharp cohesive cracks: A coupled xfm framework for failure analysis of quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 299, p. 57–89, 2016. ISSN 0045-7825.
- WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; LEHAR, H. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 28, p. 797–819, 2004.
- WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; NIEDERWANGER, G. Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. In: JOURNAL OF MATERIALS: DESIGN AND APPLICATIONS. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L. Journal of Materials: Design and Applications*. Austria, 2001. p. 75–86.
- WU, J.; NGUYEN, V. P.; NGUYEN, C. T.; BORDAS, S. P. A. Phase-field modeling of fracture. In: BORDAS, S. P. A.; BALINT, D. S. (Ed.). *Advances in Applied Mechanics*. Online: Elsevier, 2020. v. 53, p. 1–183. Chapter One.
- WU, J.-Y. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 103, p. 72–99, 2017.
- WU, J.-Y. A geometrically regularized gradient-damage model with energetic equivalence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 328, p. 612–637, 2018.

- WU, J.-Y.; NGUYEN, V. P. A length scale insensitive phase-field damage model for brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 119, p. 20–42, 2018.
- WU, J. Y.; NGUYEN, V. P.; NGUYEN, C. T.; SUTULA, D.; SINAIE, S.; BORDAS, S. Phase-field modeling of fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 53, in press, 2019.
- XUE, L.; FENG, Y.; HAI, L.; REN, X.; LI, J. Advancing the non-local damage approach for reinforced concrete structures: The extended gradient damage model. *Engineering Structures*, v. 332, n. 119970, p. 1–19, 2025.
- XUE, L.; FENG, Y.; REN, X. An extended gradient damage model for anisotropic fracture. *International Journal of Plasticity*, v. 179, n. 104042, p. 1–34, 2024.
- XUE, L.; REN, X.; FREDDI, F. Analytical solution of a gradient-enhanced damage model for quasi-brittle failure. *Applied Mathematical Modelling*, v. 132, p. 342–365, 2024.
- YAKIN, H. N.; REJAB, M. R. M.; HASHIM, N. A.; NIKABDULLAH, N. A new quasi-brittle damage model implemented under quasi-static condition using bond-based peridynamics theory for progressive failure. *Theoretical and Applied Mechanics*, v. 50, p. 73–102, 2023.
- YIN, B.; KALISKE, M. A ductile phase-field model based on degrading the fracture toughness: theory and implementation at small strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 366, p. 113068–1–22, 2020.
- YUN, K.; KIM, M.-H.; CHU, P.-H. A modified phase field model for predicting the fracture behavior of quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 122, n. 20, p. 5656–5675, oct 2021. ISSN 0029-5981.
- YUN, K.; KWAK, S.; WANG, Z.; CHANG, M.; KIM, J.; LIU, J.; RI, C. A damage model reflecting the interaction between delamination and intralaminar crack for failure analysis of FRP Laminates. *Applied Sciences (Switzerland)*, v. 9, n. 2, 2019. ISSN 20763417.
- ZHANG, F.; HUANG, W.; LI, X.; ZHANG, S. A study on phase-field models for brittle fracture. *arXiv:1805.07357*, v. 1, p. 1–38, 2018a.
- ZHANG, P.; HU, X.; WANG, X.; YAO, W. An iteration scheme for phase field model for cohesive fracture and its implementation in abaqus. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 204, p. 268–287, 2018b.
- ZHANG, S.; CAI, Y. *Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 9783642047077.
- ZHOU, S.; ZHUANG, X.; RABCZUK, T. A phase-field modeling approach of fracture propagation in poroelastic media. *Engineering Geology*, v. 240, p. 189–203, 2018b.
- ZHOU, S.; ZHUANG, X.; ZHU, H.; RABCZUK, T. Phase field modelling of crack propagation, branching and coalescence in rocks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 96, p. 174–192, 2018a.

## APÊNDICE A – Revisão sistemática: portfólio bibliográfico e análise bibliométrica

Este apêndice tem por objetivo aplicar o método *Knowledge Development Process - Constructivist (ProKnow-C)*, desenvolvido no Laboratório de Metodologias Multicritério de Apoio à Decisão (LabMCDA) da Universidade Federal de Santa Catarina, para realizar um levantamento de artigos relevantes para o tema da presente tese. O foco desta revisão sistemática abrange, essencialmente, o estado da arte de modelos que representam a degradação do meio material segundo abordagens contínuas-descontínuas, descrevendo o processo de fraturamento da nucleação de microfissuras até o colapso estrutural. A partir desse Portfólio Bibliográfico (PB) pretende-se responder às perguntas:

- Quais as principais metodologias contínuas-descontínuas adotadas para descrever a degradação de meios parcialmente frágeis?
- Quais as vantagens e desvantagens das metodologias apresentadas na literatura?
- Quais as lacunas identificadas na literatura quanto ao processo de descrição da degradação material?

### A.1 Procedimento metodológico

A aplicação do *Proknow-C* como instrumento de definição de um portfólio conduz a um procedimento metodológico que, segundo Ensslin, Ensslin e Pinto (2013), tem objetivos exploratório-descritivos, dado que gera conhecimento aos pesquisadores e descreve as características das publicações selecionadas para compor o portfólio. A natureza do método, por sua vez, é teórico-ilustrativa, com a busca orientada pelo tema do pesquisador. A análise é do tipo indutiva, uma vez que o pesquisador tem como objeto de estudo um problema com questões que ainda não foram completamente sanadas pelo meio científico. Quanto à coleta de dados, os dados primários são as delimitações arbitradas pelo pesquisador para compor o portfólio bibliográfico, enquanto os dados secundários derivam da análise desse portfólio. A abordagem do problema é qualitativa e quantitativa: primeiro são identificados os artigos relevantes a pesquisa e, então, prossegue-se para a quantificação das variáveis de interesse. Por fim, pode-se conceituar o presente trabalho como um procedimento técnico de pesquisa bibliográfica, construído a partir de publicações revisadas e indexadas, disponíveis nas bases de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A decisão por adotar um instrumento de pesquisa como o *Proknow-C* ao iniciar uma pes-

quisa é pertinente diante da variedade de informações disponíveis na literatura, norteadando a etapa de identificação de artigos relevantes ao tema, a partir dos quais o conhecimento será construído e a pesquisa será desenvolvida.

Em relação ao *Proknow-C*, os passos que compõem esse processo de mapeamento do conhecimento são:

1. seleção do portfólio de artigos relacionados ao tema da pesquisa;
2. análise bibliométrica do portfólio;
3. análise sistêmica (análise de conteúdo do PB);
4. definição da pergunta de pesquisa e do objetivo de pesquisa.

### A.1.1 Seleção do portfólio bibliográfico

A seleção do portfólio de artigos é a etapa inicial do processo de pesquisa, que possibilita que o pesquisador levante um conjunto de artigos vinculados ao seu tema de pesquisa a partir da sua percepção e das delimitações estabelecidas. Ao final dessa etapa, tem-se o portfólio Bibliográfico, composto por artigos alinhados ao tema de pesquisa e considerados relevantes pelo pesquisador.

Essa etapa pode ser subdividida em três fases:

1. seleção dos artigos nas bases de dados para formar o Banco de Artigos Bruto (BAB);
2. filtragem dos artigos do BAB conforme o alinhamento com o tema de pesquisa;
3. teste de aderência do portfólio bibliográfico.

#### A.1.1.1 Seleção do banco de artigos brutos - BAB

A fim de delimitar o banco de artigos bruto, foram determinados quatro eixos de pesquisa. Para estabelecer um universo de artigos mais abrangente, o idioma escolhido para realização da pesquisa foi o inglês. O primeiro eixo (*discrete crack models*) representa os modelos discretos de degradação; o segundo eixo trata dos modelos distribuídos (*smearred crack models*); o terceiro eixo abrange os modelos de *phase-field* (*phase-field models*); por fim, o quarto eixo dedica-se à combinação de estratégias contínuas e descontínuas para representar o fenômeno de degradação em sua totalidade (*continuous-discontinuous models*).

Estabelecidos os eixos, o banco de artigos bruto é constituído segundo quatro passos: (a) determinação das Palavras-Chave (PCs); (b) escolha da base de dados; (c) busca de artigos na base de dados a partir das palavras-chave; (d) teste de aderência das palavras-chave.

Tabela A.1 – Combinações dos eixos de pesquisa

Eixo	Palavras-chave		
<i>Discrete crack models</i>	<i>Discrete crack</i>		
<i>Smearred crack models</i>	<i>smearred crack</i>	<i>continuum damage</i>	<i>nonlocal damage</i>
<i>Phase-field models</i>	<i>phase-field</i>		
<i>Continuous-discontinuous models</i>	<i>continuous-discontinuous</i>	<i>combined approaches for fracture</i>	<i>transition variable</i>

O primeiro passo destina-se à definição das palavras-chave para cada um dos eixos. Para o Eixo 1 optou-se por uma única palavra-chave, (*discrete-crack*), dado que esse termo reúne os modelos de degradação que introduzem de fato uma descontinuidade na malha de elementos finitos para representação da fratura. No eixo 2 foram selecionadas três palavras-chave: (*smearred crack*), (*continuum damage*) e (*nonlocal damage*). A escolha dessas palavras-chave foi motivada pela popularidade dos modelos de dano para descrição da degradação segundo a abordagem distribuída, bem como pela necessidade de modelos não locais para problemas que requerem malhas refinadas. Considerou-se a palavra-chave (*phase-field*) adequada para a descrição do eixo 3. Por fim, o eixo 4, que engloba modelos que associam abordagens contínuas-descontínuas, foi representado pelas palavras-chave (*continuous-discontinuous*); (*combined approaches for fracture*); e (*transition variable*). Tais termos foram escolhidos para identificar os modelos contínuos-descontínuos disponíveis na literatura, bem como a variável responsável pela transição entre essas duas abordagens de representação da degradação (Tab. A.1).

A partir dessas palavras-chave, considerando o cruzamento dos quatro eixos, foram geradas nove combinações de pesquisa as quais alimentaram a busca por publicações na base de dados do Portal CAPES.

De posse dos eixos de pesquisa e das palavras-chave, o passo seguinte é a seleção das bases de dados para levantamento dos artigos. Nesta análise bibliométrica a busca da literatura de referência foi limitada ao Portal de Periódicos da CAPES. Dentro desse portal foram identificadas as bases mais relevantes e alinhadas com o tema de pesquisa:

- Academic Search Premier - ASP (EBSCO);
- ACS Journals Search;
- American Physical Society Journals;
- ArXiv.org;
- Computers and Applied Sciences Complete (EBSCO);
- Directory of Open Access Journals - DOAJ;
- Emerald Journals;

- IEEE Xplore;
- MEDLINE Complete (EBSCO);
- ROAD Directory of Open Access scholarly Resources;
- SAGE Open;
- ScienceDirect (Elsevier);
- Wiley Online Library.

Definidas as bases de pesquisa, o processo de busca teve início com a utilização do recurso de buscas avançadas do Portal CAPES, que restringiu a pesquisa às combinações de palavras-chave dispostas na Tab. A.1. Para tanto foram utilizados os filtros de busca *qualquer campo* (título, autor e assunto) e *contém*, além do operador *E*, que permitiu combinar palavras-chave de cada um dos quatro eixos de pesquisa.

Como resultado foi obtido o Banco de Artigos Bruto (BAB), composto por 354 artigos revisados por pares, publicados em inglês entre 2006 e 2024. Realizou-se, em seguida, o teste de aderência do portfólio bruto de artigos, a fim de avaliar a necessidade de redefinir as palavras-chave de pesquisa. Para tanto, foram selecionados dois artigos do BAB cujo título, resumo e palavras-chave foram considerados alinhados à pesquisa. A partir desses artigos verificou-se aderência das PCs de pesquisa, dispensando a demanda de uma nova busca.

Procedeu-se para a filtragem do Banco de Artigos Brutos. Primeiramente, o processo de filtragem eliminou artigos redundantes, que apareceram mais de uma vez dentre as combinações de pesquisa selecionadas. Ao final dessa etapa, o número de artigos foi reduzido para 161 artigos. Em seguida, realizou-se a leitura de todos os títulos, resumos e PCs, eliminando do portfólio de referência as publicações não alinhadas ao tema de pesquisa. Após essa seleção, obteve-se um total de 39 artigos. Quanto à disponibilidade de acesso desses artigos, todos encontram-se disponíveis na íntegra no Portal CAPES.

Seguiu-se, então, para uma avaliação do grau de reconhecimento científico dessas 39 publicações a partir do Google Acadêmico. Foram consideradas como representativos os artigos responsáveis por cerca de 90 % do total de citações, descartando os artigos que compõem os 10 % restantes, com menos de 30 citações. Determinados esses limites, o repositório de artigos passou a conter 17 trabalhos de reconhecimento científico. Das 22 publicações remanescentes, foi feita uma análise com o objetivo de identificar artigos com potencial de aproveitamento, uma vez que o número reduzido de citações a eles associado pode ser fruto de sua recente publicação. Considerando, pois, os artigos dos últimos 5 anos (2017 em diante), 19 produções dentre as 22 descartadas foram reincorporados ao portfólio de 17 artigos, gerando um novo repositório com 36 artigos.

Tabela A.2 – Portfólio bibliográfico sobre modelos contínuos-descontínuos para representação da fratura

Autores (Ano)	Título	Periódico	Citações
Verhoosel et al. (2011)	<i>An isogeometric approach to cohesive zone modeling</i>	<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	203
Wang e Waisman (2016)	<i>From diffuse damage to sharp cohesive cracks: A coupled XFEM framework for failure analysis of quasi-brittle materials</i>	<i>Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.</i>	114
Leclerc et al. (2017)	<i>A damage to crack transition model accounting for stress triaxiality formulated in a hybrid nonlocal implicit discontinuous Galerkin-cohesive band model framework</i>	<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	20
Geelen et al. (2018)	<i>An optimization-based phase-field method for continuous-discontinuous crack propagation</i>	<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	35
Reinoso et al. (2019)	<i>Crack patterns in heterogenous rocks using a combined phase field-cohesive interface modeling approach: A numerical study</i>	<i>Energies</i>	11
Tamayo-Mas et al. (2019)	<i>A continuous-discontinuous model for crack branching</i>	<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	8
Yun et al. (2019)	<i>A damage model reflecting the interaction between delamination and intralaminar crack for failure analysis of FRP Laminates</i>	<i>Appl. Sci.</i>	7
Sun, Liu e Tang (2020)	<i>A hybrid FEM-Phase field method for fluid-driven fracture propagation in three dimension</i>	<i>Eng. Anal. Bound. Elem.</i>	4
Yun, Kim e Chu (2021)	<i>A modified phase field model for predicting the fracture behavior of quasi-brittle materials</i>	<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	1

A fase seguinte foi dedicada à leitura integral dos 36 artigos que constituem o portfólio bibliográfico. Dentre eles, 9 foram considerados alinhados ao tema de estudo, concluindo o processo de filtragem. A Tab. A.2 apresenta o portfólio obtido ao final dessa etapa.

## A.2 Análise bibliométrica do portfólio

Esta seção apresenta uma análise quantitativa dos artigos que constituem o portfólio bibliográfico (Tab. A.2) e das referências citadas nesses artigos.

### A.2.1 Análise dos artigos do portfólio

Os artigos científicos do portfólio bibliográfico são avaliados segundo a relevância dos periódicos em que foram publicados, seu reconhecimento científico, os autores de maior destaque e as palavras-chave mais recorrentes.

### A.2.1.1 Relevância dos periódicos

Dentre as nove publicações do portfólio bibliográfico, destaca-se o *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, com cinco publicações. O escopo dessa revista é divulgar novos estudos em métodos numéricos que sejam aplicados a problemas de engenharia e uma das suas principais áreas de interesse é o estudo da degradação e do fraturamento do meio material. Tendo em vista o tema desta pesquisa, justifica-se a recorrência dos artigos do PB nesse periódico. Os demais artigos foram publicados em quatro periódicos distintos, como apresentado na Fig. A.1.

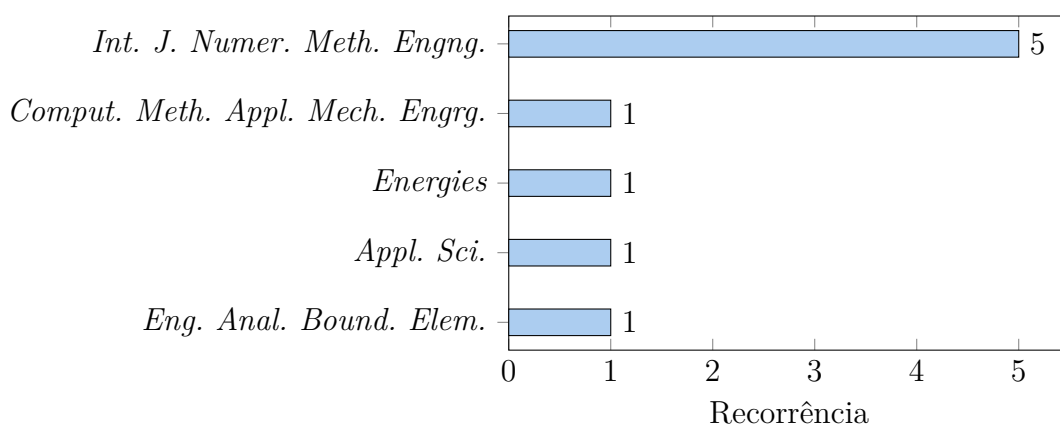


Figura A.1 – Periódicos presentes no portfólio bibliométrico.

Dos 466 artigos citados nas referências do PB, mais uma vez o *International Journal for Numerical Methods in Engineering* destacou-se, apresentando a maior recorrência: 85 publicações. A revista *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* também apresentou relevância, com 81 publicações. A Fig. A.2 elenca ainda outros periódicos que apareceram com frequência nas referências dos artigos do portfólio bibliográfico. Por fim, 144 artigos foram publicados em periódicos diversos, com recorrência pouco significativa dentre o acervo em análise.

### A.2.1.2 Reconhecimento científico dos artigos

A análise bibliométrica avalia também o impacto na comunidade científica dos periódicos em que são veiculados os artigos do PB. Para tanto, foram considerados três indicadores: o Periódicos Qualis CAPES, o *Journal Impact Factor* (JCR) e o *SCImago Journal Rankings* (SJR).

O sistema Periódicos Qualis CAPES analisa a qualidade de artigos a partir dos periódicos científicos em que são publicados, considerando 49 áreas de avaliação. Para esta pesquisa, será considerada a categoria Engenharias I, que abrange Engenharia Civil e, na ausência dessa categoria, será tomado o menor indicador dentre as demais engenharias avaliadas (Engenharias II, Engenharias III e Engenharias IV). A categorização de qualidade vai de

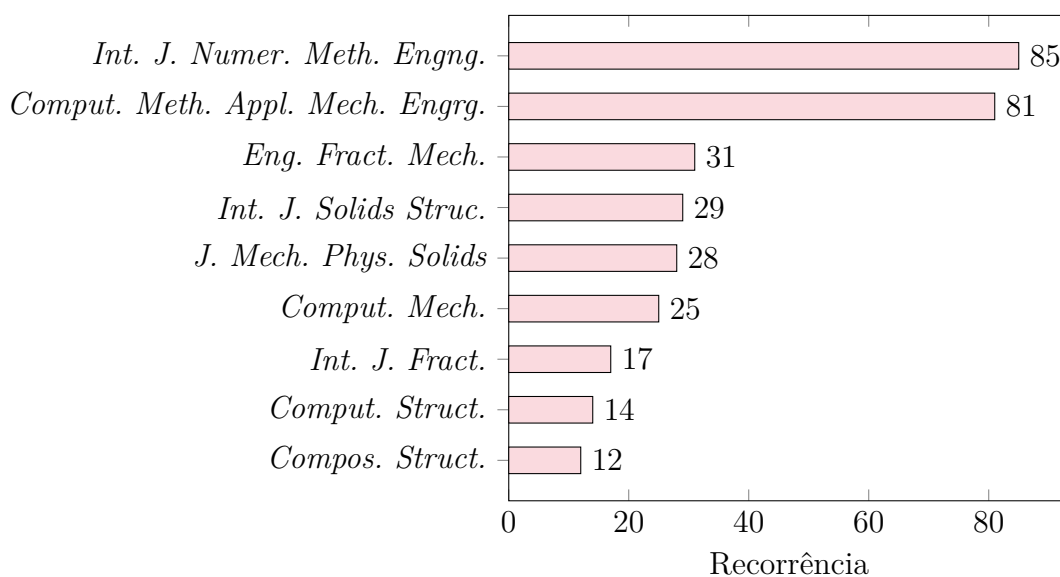


Figura A.2 – Periódicos recorrentes dentre as referências do PB.

A1 (mais elevada), passando por A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C (mais baixa). Seus critérios de classificação incluem: qualidade dos artigos, periodicidade das revistas, qualidade do corpo editorial, diversidade de origens dos trabalhos, difusão e popularidade da revista e indexação.

O JCR, por sua vez, mede o número médio de citações de artigos publicados recentemente em um periódico. Já o SJR leva em consideração o prestígio científico dos periódicos, de modo que as citações são avaliadas não somente em termos de quantidade, mas também de qualidade. O SJR, assim como o Periódicos Qualis CAPES, baseia-se na concepção de área do conhecimento. Nesta pesquisa, optou-se por extrair os indicadores SJR dos periódicos do PB segundo a grande área *Engineering*.

Conhecidos esses indicadores, a Tab. A.3 apresenta a classificação dos periódicos presentes no portfólio bibliográfico. Nota-se que todos os periódicos listados são indexados nas bases JCR e SJR. Com relação ao sistema de Periódicos Qualis CAPES, apenas a revista *Applied Sciences* ainda não foi avaliada para as áreas de Engenharia. Nota-se, pois, que os periódicos dos artigos do PB detêm relevância científica, destacando-se com as melhores classificações aqueles que foram os mais recorrentes nas referências do portfólio: o *International Journal for Numerical Methods in Engineering* e o *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

#### A.2.1.3 Autores de maior destaque

Quanto aos autores dos artigos que compõem o portfólio bibliométrico, apenas dois deles foram responsáveis por dois trabalhos: Antonio Rodríguez-Ferran e Yun Kumchol. Os outros autores constam como autores de apenas um trabalho. Expandindo essa análise

Tabela A.3 – Periódicos presentes no PB e sua relevância científica

Periódico	Qualis (2013-2016)	JCR (2020)	SJR (2020)
<i>Int. J. Numer. Meth. Engng.</i>	A1	3,477	1,421
<i>Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.</i>	A1	6,756	2,530
<i>Energies</i>	B1	3,004	0,598
<i>Appl. Sci.</i>	-	2,679	0,293
<i>Eng. Anal. Bound. Elem.</i>	A1	2,964	0,925

para as referências do PB, foram identificados 1356 estudiosos que contribuíram para a escrita dos 466 artigos analisados. A Tab. A.3 elenca os oito autores que apareceram com maior frequência nessas publicações. O cruzamento desses oito autores de destaque com os autores do PB conduziu a três nomes: René de Borst, Thomas J.R. Hughes e Clemens V. Verhoosel.

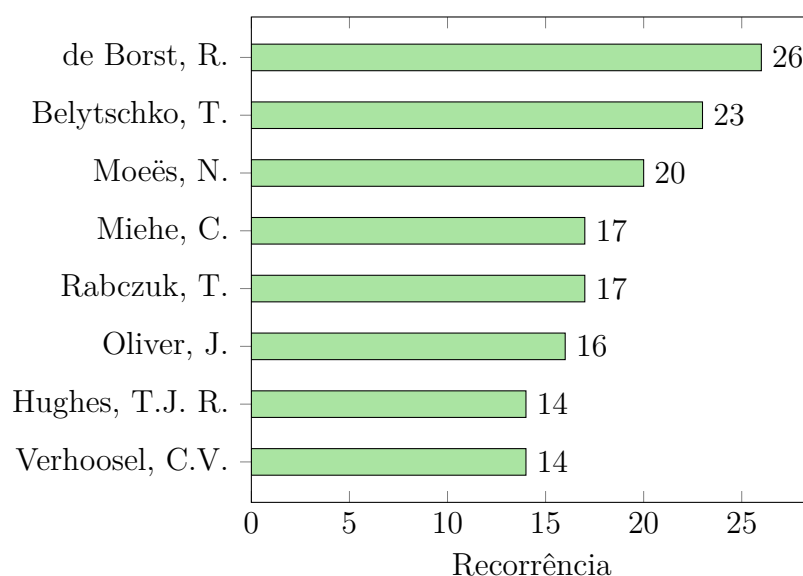


Figura A.3 – Autores de destaque nas referências do portfólio bibliométrico.

#### A.2.1.4 Palavras-chave

Para se ratificar o mapeamento do tema via *Proknow-C* avalia-se o conjunto de palavras do PB. Dentre os nove artigos analisados, foram verificadas 49 palavras-chave. Dentre esses termos, 33 foram distribuídos em oito eixos principais, conforme indicado na Fig. A.4. As outras 16 palavras, todavia, não se enquadraram em nenhum dos eixos, referindo-se a temas diversos.

É possível observar que essas palavras-chave estão alinhadas àquelas estabelecidas na Tab. A.2.1.4, comprovando a aderência dos termos que conduziram a busca de artigos para composição do portfólio bibliográfico.

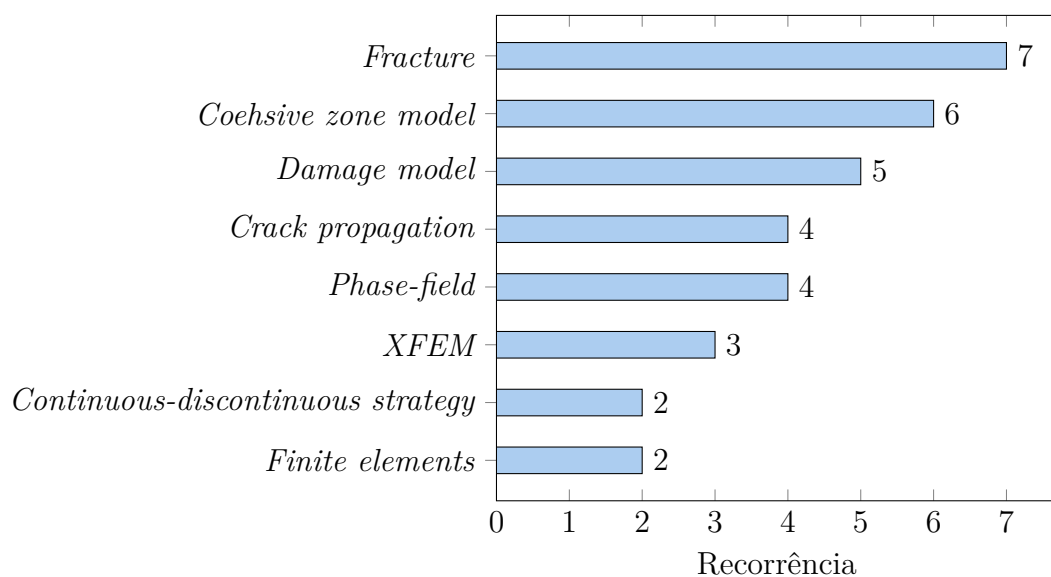


Figura A.4 – Palavras-chave do portfólio bibliométrico.

### A.3 Metodologias contínuas-descontínuas do PB

Assim como na Tab. 2.1 apresentada no capítulo 2, os conteúdos dos artigos que compõem o PB foram estudados e as estratégias contínuas-descontínuas adotadas pelos autores para descrição completa do fenômeno de fratura foram sumarizadas na Tab. A.4.

Cabe destacar que todos os artigos relacionam um modelo contínuo com um modelo discreto, com exceção do trabalho de Yun, Kim e Chu (2021), que associam dois modelos contínuos. Dentre as estratégias contínuas, predominam os modelos de dano não local e os modelos de *phase-field*, dado que esses são modelos regularizados e adequados a simulações que requerem malhas refinadas, como as análises que visam reproduzir o surgimento e propagação de trincas.

Em relação aos modelos descontínuos, destacam-se os modelos de zona coesiva e o MEFX. Quanto ao MEFX, deve-se salientar que ainda que esse seja considerado um método discreto, em geral, não há uma descrição geométrica explícita da trinca. Assim, a ausência de uma representação fiel da descontinuidade permanece. Para suprir essa lacuna, os autores optam por alternativas como combinar o MEFX com algoritmos que excluem domínios triangulares.

Tabela A.4 – Resumo das abordagens contínuas-descontínuas presentes na literatura

Autor	Contínuo	Descontínuo	Transição	Direção
Verhoosel et al. (2011)	lei linear elástica	modelo de zona coesiva	via abordagem isogeométrica	calculada a partir do tensor de tensões suavizado
Wang e Waisman (2016)	Modelo de dano não local	modelo de zona de dano discreto	equivalência termodinâmica	direção com maior dano à frente da ponta da trinca
Leclerc et al. (2017)	modelo de dano não local	modelo de banda coesiva	valor crítico de tensão efetiva	segundo a localização da zona coesiva
Geelen et al. (2018)	<i>phase-field</i>	MEFX	funcional do comprimento da trinca	campo de dano auxiliar
Yun et al. (2019)	modelo de dano	modelo de zona coesiva	taxa de liberação de energia	calculada a partir dos componentes de tensões
Reinoso et al. (2019)	<i>phase-field</i>	modelo de zona coesiva	taxa de liberação de energia	minimização do funcional de energia

Autor	Contínuo	Descontínuo	Transição	Direção
Tamayo-Mas et al. (2019)	modelo de dano não local	MEFX	dano crítico (0,9-0,995)	eixo médio de uma isofaixa de dano
Sun, Liu e Tang (2020)	<i>phase-field</i>	MSM	parâmetro crítico <i>a</i> , relacionado ao tamanho da malha e ao comprimento da trinca	minimização do funcional de energia
Yun, Kim e Chu (2021)	modelo de dano isotrópico + <i>phase-field</i>	ausente	variável histórica	minimização do funcional de energia

Para transitar entre contínuo e descontínuo, a maior parte dos artigos do PB utiliza de critérios energéticos ou valores críticos de variáveis como tensão e dano. Quando optam pelos critérios energéticos, verificou-se duas estratégias principais: incorporação de novos termos ao funcional de energia do problema ou a observação da variável energia de fratura ( $G_c$ ). Aqueles que adotam critérios de valor crítico, todavia, não apresentam uma definição rigorosa da escolha de qual variável controlar e de qual é o valor que marca a transição contínuo-descontínuo, adotando inclusive valores distintos para simulações distintas. Logo, fica evidente que esse é um ponto de divergência entre os autores e que carece de maiores estudos.

Por fim, quando se trata da determinação da direção de propagação da trinca, observa-se que os trabalhos que utilizam do *phase-field* para descrição do meio contínuo utilizam a minimização do funcional de energia para estabelecer o caminho da fratura. Assim, os autores beneficiam-se de uma das principais vantagens dessa teoria: a capacidade de captar complexos padrões de trinca, incluindo nucleação, propagação e coalescência, sem a demanda por critérios externos à formulação. Outras estratégias que se destacam para definir a direção de evolução das trincas são aquelas que mapeiam na vizinhança da trinca o campo de determinada variável, como dano e tensão, orientando a fratura para os pontos em que essa variável assume valor máximo.

#### A.4 Vantagens e desvantagens das metodologias do PB

A análise dos artigos do PB também permitiram identificar prós e contras das metodologias contínuas-descontínuas apresentadas na literatura. Dentre as vantagens, destacam-se:

- representação de todo o processo de falha dos meios parcialmente frágeis: da nucleação de microfissuras ao desenvolvimento de descontinuidades macroscópicas;
- capacidade de descrever padrões de trinca com geometrias diversas;
- possibilidade de abranger múltiplos mecanismos de falha.

Em contrapartida, as principais desvantagens observadas são:

- distorções aparecem nos elementos mais danificados, o que induz à propagação de danos espúrios e problemas numéricos;
- necessidade de desenvolver algum tipo de adaptação que aumente a eficiência computacional desses métodos.

## A.5 Lacunas identificadas nos artigos do PB

Por fim, foram levantadas demandas apontadas nos artigos do PB para estudos futuros, a fim de se estabelecer os principais hiatos na literatura quanto aos modelos contínuos-descontínuos. São eles:

- avaliar com maior minúcia o limite de transição entre contínuo e descontínuo;
- buscar estratégias com processo de implementação mais simples;
- em modelos baseados no *phase-field* para descrição do contínuo, verificar se é possível restringir o cálculo dessa variável apenas a regiões críticas do elemento estrutural;
- extensão para problemas 3D, atentando-se à representação geométrica da trinca;
- abranger também fratura em materiais anisotrópicos;
- adaptar as formulações para problemas com grandes deformações;
- incorporar aos métodos descritos a capacidade de simular trincas de diversas naturezas (frágeis, dúcteis, coesivas, etc.).

## APÊNDICE B – Demonstrações matemáticas

Este capítulo dedica-se à demonstração de algumas das equações apresentadas no capítulo 3 para descrição da abordagem variacional da fratura. Para esse fim será utilizado o equacionamento apresentado por Leão (2021).

### B.1 Condição de conservação de energia - equação 3.44

O balanço de energia pode ser dado pelo seguinte funcional:

$$E_{tot} = \int_{\Omega} \psi_0(\varepsilon_{ij}) \, d\mathcal{V} - \int_{\Omega} b_i u_i \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} t_i u_i \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.1})$$

Cuja derivação em relação ao tempo conduz a:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} - \int_{\Omega} (\dot{b}_i u_i + b_i \dot{u}_i) \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} (\dot{t}_i u_i + t_i \dot{u}_i) \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.2})$$

A primeira integral apresentada na equação B.2 pode ser desenvolvida como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left( \frac{\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}}{2} \right) \, d\mathcal{V}. \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} \, d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{j,i} \, d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Invertendo o índice mudo no último termo da equação B.3, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} \, d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} \, d\mathcal{V}.$$

Considerando a simetria do tensor de tensões  $\underline{\sigma}$ , sabe-se que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , de modo que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} \, d\mathcal{V}. \quad (\text{B.4})$$

A fim de simplificar a equação B.4, aplica-se o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} &= \sigma_{ij,j} \dot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} \\ \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} &= (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \dot{u}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo a equação B.5 na equação B.4 e aplicando novamente o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \dot{u}_i \, d\mathcal{V}. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo, então, a equação B.6 na equação B.2, após algum desenvolvimento, encontra-se:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_{ij}n_j - t_i)u_i \, d\mathcal{A} + \int_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij}n_j\dot{u}_i \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i)u_i \, d\mathcal{V} - \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} \dot{t}_i u_i \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.7})$$

Como  $\sigma_{ij}n_j - t_i = 0$  e  $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ , a equação B.7 é reescrita como:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij}n_j\dot{u}_i \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega} \dot{b}_i u_i \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} \dot{t}_i u_i \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.8})$$

Que na notação simbólica é dada por:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n}) \cdot \dot{\underline{u}} \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega} \dot{\underline{b}} \cdot \bar{\underline{u}} \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\Omega_t} \dot{\underline{t}} \cdot \bar{\underline{u}} \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Condição estacionária unilateral - equação 3.45

A primeira derivada do funcional de energia  $E_{tot}$ , dada por 3.45, pode ser escrita como:

$$\delta E_{tot} = \delta\Psi_s + \delta\Psi_c - \delta P_{ext}. \quad (\text{B.10})$$

A condição estacionária unilateral aponta que a equação B.10 deve resultar em um valor maior ou igual a zero. Nesse contexto, cada uma das parcelas dessa equação será demonstrada.

Antes da perturbação ( $\epsilon$ ), a energia de deformação é definida como:

$$\Psi_{s\epsilon} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \psi(\varepsilon_{ij}(u_{\epsilon_{ij}}), \Gamma_{\epsilon}) \, d\mathcal{V}. \quad (\text{B.11})$$

Sua derivação, conseqüentemente, leva a:

$$\begin{aligned} \delta\Psi_s &= \left. \frac{\partial\Psi_{s\epsilon}}{\partial\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \, d\mathcal{V} + \left( \frac{\partial\Psi_{s\epsilon}}{\partial\Gamma_{\epsilon}} \frac{\partial\Gamma_{\epsilon}}{\partial\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \, d\mathcal{V} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\Gamma} \delta\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Aplicando o teorema da divergência à equação B.12, tem-se:

$$\delta\Psi_s = \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_{ij}n_j) \delta u_i \, d\mathcal{A} + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}n_j) \delta u_i \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\sigma_{ij,j} u_i) \, d\mathcal{V} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\Gamma} \delta\Gamma. \quad (\text{B.13})$$

A energia de superfície, relacionada ao crescimento da trinca, é escrita como:

$$\delta\Psi_c = \left. \frac{\partial\Psi_{c\epsilon}}{\partial\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\epsilon} \left( \int_{\Gamma} G_c d\Gamma + \epsilon G_c \delta\Gamma \right)$$

$$\delta\Psi_c = G_c\delta\Gamma. \quad (\text{B.14})$$

Já o trabalho das forças externas é expresso conforme a formulação de elementos finitos como:

$$\delta P_{ext} = \int_{\Omega\setminus\Gamma} b_i\delta u_i \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_t} t_i\delta u_i \, d\mathcal{A} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo as equações B.13, B.14 e B.15 em B.10, encontra-se a equação B.16, conforme desejava-se demonstrar.

$$\delta E_{tot} = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}n_j\delta u_i \, d\mathcal{A} + \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_{ij}n_j - t_i)\delta u_i \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega\setminus\Gamma} (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i \, d\mathcal{V} + \left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial\Gamma} + G_c\right)\delta\Gamma \quad (\text{B.16})$$

Que no formato simbólico é:

$$\delta E_{tot} = \int_{\Gamma} (\underline{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}})\delta \underline{u} \, d\mathcal{A} + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega\setminus\Gamma} (\nabla \underline{\sigma} + \underline{\mathbf{b}}) \cdot \delta \underline{u} \, d\mathcal{V} + \left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial\Gamma} + G_c\right)\delta\Gamma. \quad (\text{B.17})$$

### B.3 Critério de Griffith - equação 3.49

A derivada da equação 3.40 com relação ao tempo é:

$$\dot{E}_{tot} = \dot{\Psi}_s + \dot{\Psi}_c - \dot{P}_{ext}. \quad (\text{B.18})$$

Sendo que cada um dos termos da equação B.18 pode ser calculado separadamente.

Começando pela derivada de  $\Psi_s$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_s &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega\setminus\Gamma} \psi(\varepsilon_{ij}(u_i), \Gamma) \, d\mathcal{V} \\ \dot{\Psi}_s &= \int_{\Omega\setminus\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} \, d\mathcal{V} + \frac{\partial\psi_s}{\partial\Gamma} \dot{\Gamma}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ , é obtido que:

$$\dot{\Psi}_s = \int_{\Omega\setminus\Gamma} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \, d\mathcal{V} + \frac{\partial\psi_s}{\partial\Gamma} \dot{\Gamma} \quad (\text{B.19})$$

Cuja aplicação do teorema da divergência conduz a:

$$\dot{\Psi}_s = \int_{\Omega\setminus\Gamma} b_i\dot{u}_i \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_t} t_i\dot{u}_i \, d\mathcal{A} + \int_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij}n_j\dot{u}_i \, d\mathcal{A} + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\Gamma} \dot{\Gamma}. \quad (\text{B.20})$$

Quanto à derivada de  $\Psi_c$ , tem-se que:

$$\dot{\Psi}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma} G_c \, d\Gamma = G_c \dot{\Gamma}. \quad (\text{B.21})$$

Por fim, a derivada do potencial de energia devido às forças externas  $P_{ext}$  é:

$$\dot{P}_{ext} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\dot{b}_i u_i + b_i \dot{u}_i) \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_t} (\dot{t}_i u_i + t_i \dot{u}_i) \, d\mathcal{A}. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo B.20, B.21 e B.22 em B.18, encontra-se:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_u} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \dot{b}_i u_i \, d\mathcal{V} - \int_{\Omega_t} \dot{t}_i u_i \, d\mathcal{A} + \left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Gamma} + G_c \right) \dot{\Gamma}. \quad (\text{B.23})$$

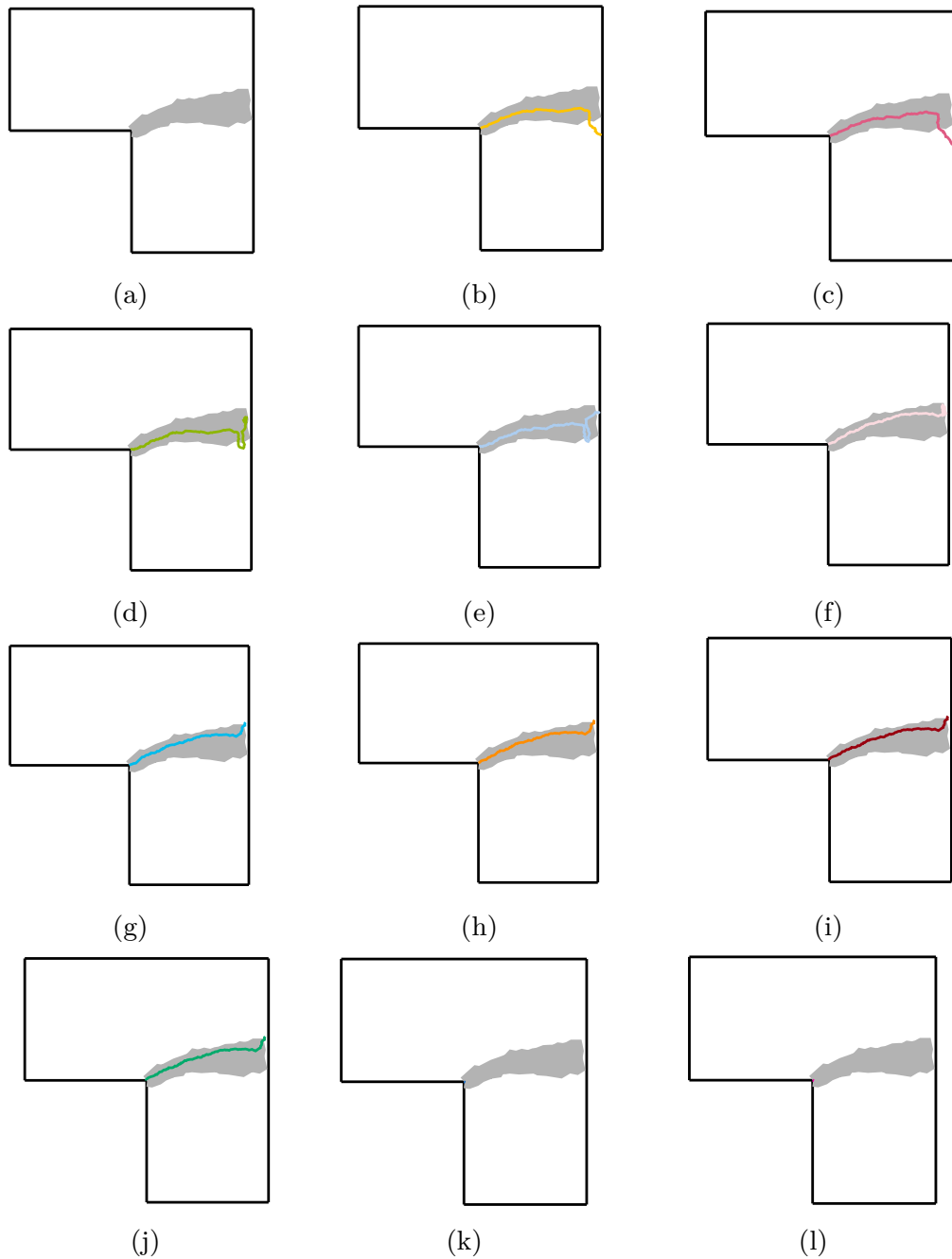
Que no formato simbólico é:

$$\dot{E}_{tot} = \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \bar{n}) \cdot \dot{\bar{u}} \, d\mathcal{A} - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \dot{\bar{b}} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{V} - \int_{\Omega_t} \dot{\bar{t}} \cdot \bar{u} \, d\mathcal{A} + \left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Gamma} + G_c \right) \dot{\Gamma}. \quad (\text{B.24})$$

Confrontando B.24 com 3.44, fica demonstrado que:

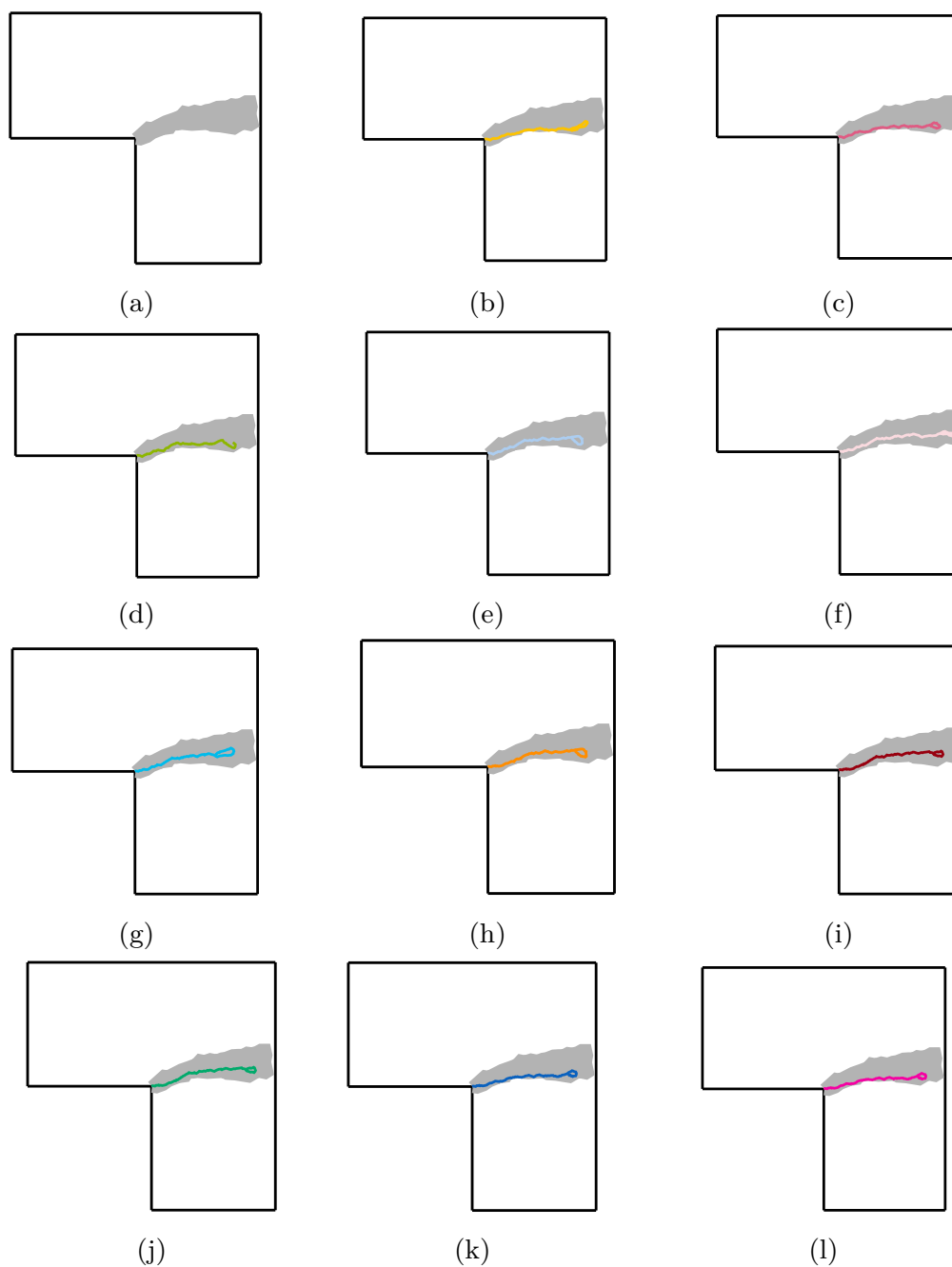
$$\left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial \Gamma} + G_c \right) \dot{\Gamma} = 0 \Rightarrow (\mathcal{G} - G_c) \dot{\Gamma} = 0. \quad (\text{B.25})$$

## APÊNDICE C – Trajetória de trinca do painel em “L”



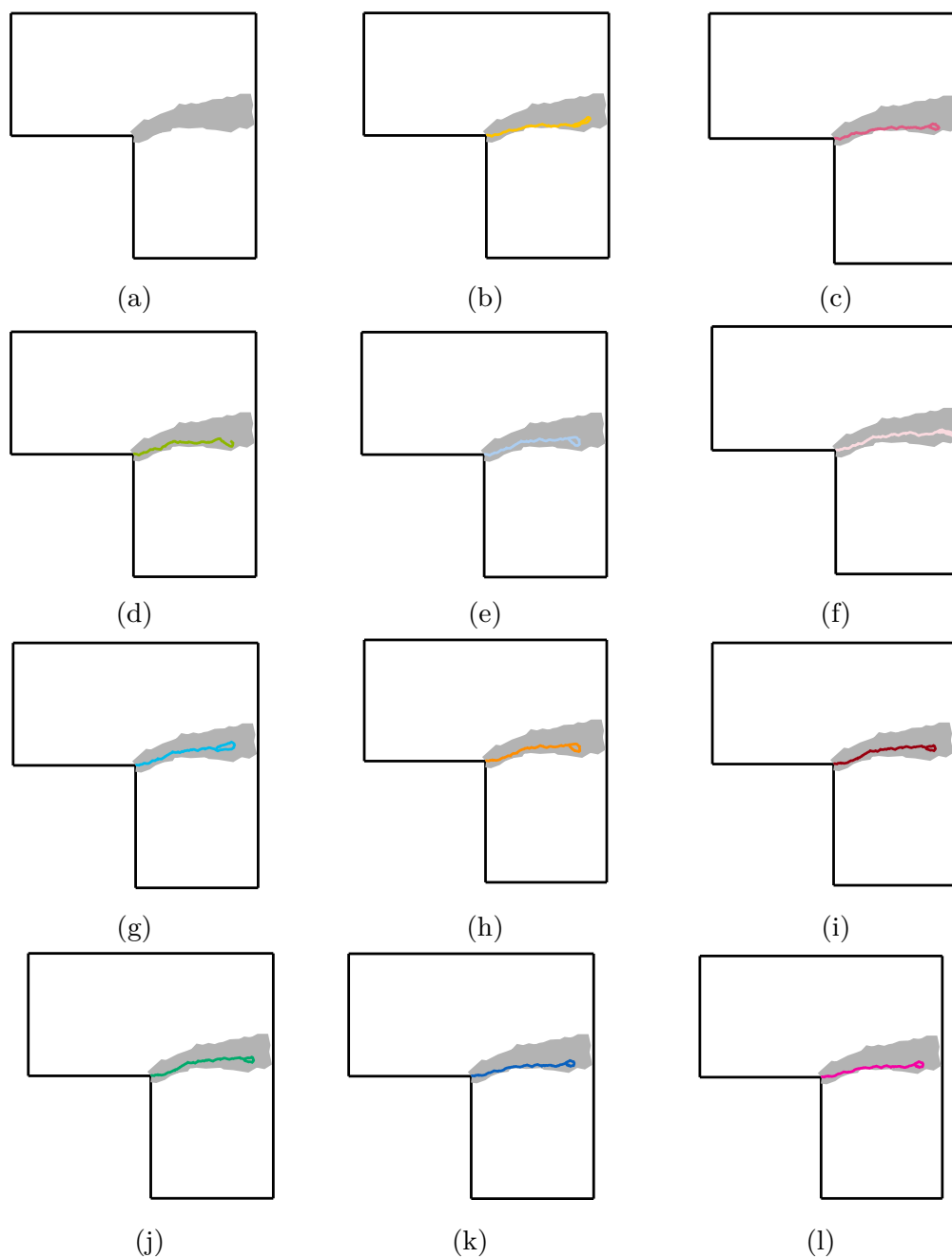
a)  $L = 1.00$ , b)  $L = 0.99$ , c)  $L = 0.95$ , d)  $L = 0.90$ , e)  $L = 0.80$ , f)  $L = 0.70$ ,  
 g)  $L = 0.60$ , h)  $L = 0.50$ , i)  $L = 0.40$ , j)  $L = 0.30$ , k)  $L = 0.20$ , l)  $L = 0.10$ .

Figura C.1 – Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por D e propagação por D não local.



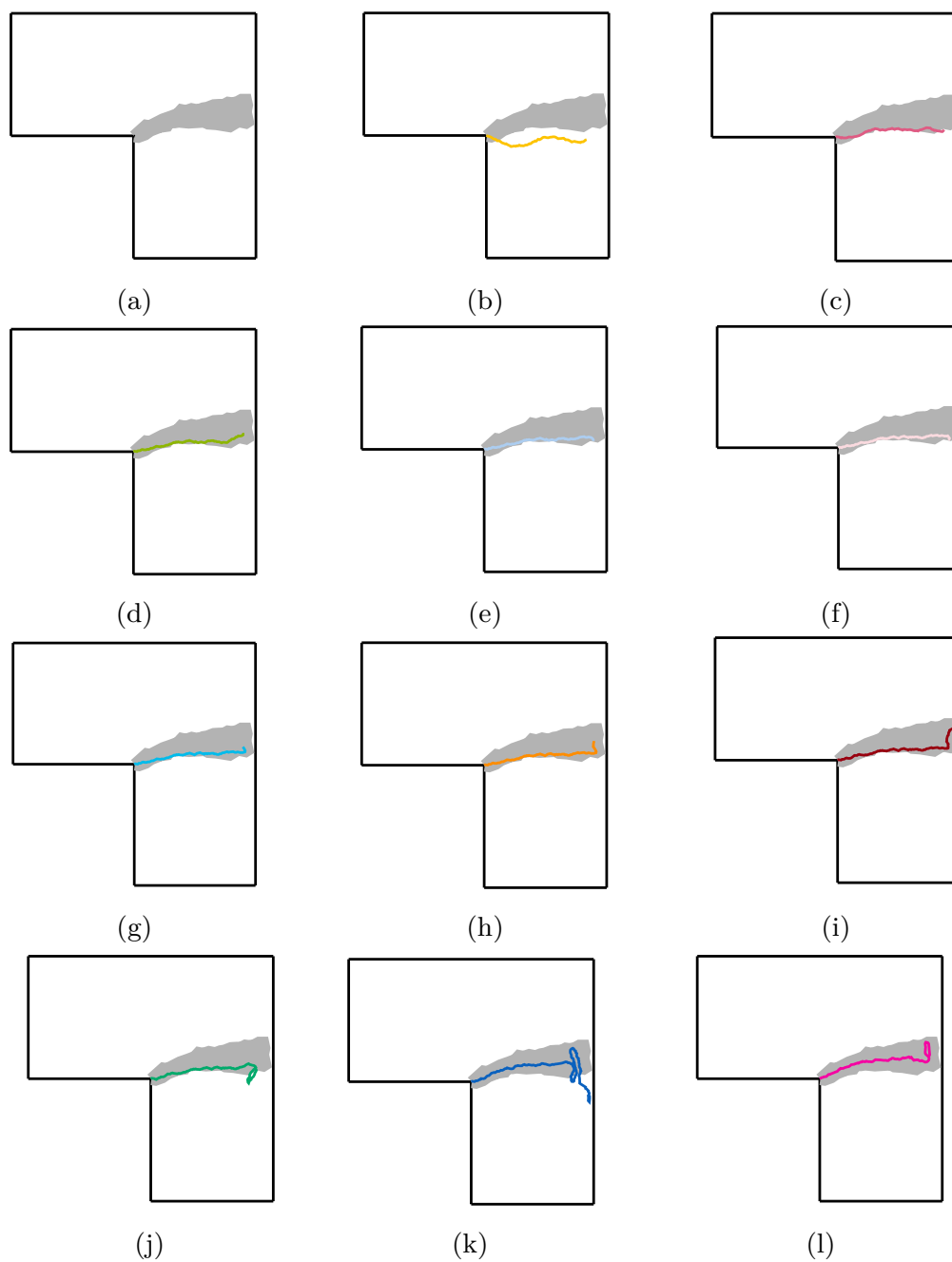
a)  $L = 1.00$ , b)  $L = 0.99$ , c)  $L = 0.95$ , d)  $L = 0.90$ , e)  $L = 0.80$ , f)  $L = 0.70$ ,  
 g)  $L = 0.60$ , h)  $L = 0.50$ , i)  $L = 0.40$ , j)  $L = 0.30$ , k)  $L = 0.20$ , l)  $L = 0.10$ .

Figura C.2 – Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por D e propagação por PF não local.



a)  $L = 1.00$ , b)  $L = 0.99$ , c)  $L = 0.95$ , d)  $L = 0.90$ , e)  $L = 0.80$ , f)  $L = 0.70$ ,  
 g)  $L = 0.60$ , h)  $L = 0.50$ , i)  $L = 0.40$ , j)  $L = 0.30$ , k)  $L = 0.20$ , l)  $L = 0.10$ .

Figura C.3 – Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por PF e propagação por PF não local.



a)  $L = 1.00$ , b)  $L = 0.99$ , c)  $L = 0.95$ , d)  $L = 0.90$ , e)  $L = 0.80$ , f)  $L = 0.70$ ,  
 g)  $L = 0.60$ , h)  $L = 0.50$ , i)  $L = 0.40$ , j)  $L = 0.30$ , k)  $L = 0.20$ , l)  $L = 0.10$ .

Figura C.4 – Caminho da trinca para diferentes valores limites: nucleação por H e propagação por H não local.