UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM ADMINISTRAÇÃO

Wanderci Alves Bitencourt

REGIMES DE VOLATILIDADE NA GESTÃO DINÂMICA DE PORTFÓLIO:
Estudos Empíricos de Medidas de Risco

BELO HORIZONTE
2025

Wanderci Alves Bitencourt

Regimes de Volatilidade na Gestão Dinâmica de Portfólio:
Estudos Empíricos de Medidas de Risco

Tese apresentada ao Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Administração.

Linha de Pesquisa: Finanças

Orientador: Robert Aldo Iquiapaza Coaguila

Belo Horizonte
2025

Ficha catalográfica

B624r 2025

Bitencourt, Wanderci Alves.
Regimes de volatilidade na gestão dinâmica de portfólio: [manuscrito] : estudos empíricos de medidas de risco / Wanderci Alves Bitencourt – 2025.
1v.: il.

Orientador: Robert Aldo Iquiapaza Coaguila.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração.
Inclui bibliografia.

1. Finanças – Teses. 2. Administração – Teses. I. Coaguila, Robert Aldo Iquiapaza II. Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração. III. Título.

CDD: 332

Elaborado por Adriana Kelly Rodrigues CRB-6/2572
Biblioteca da FACE/UFMG. – AKR/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ATA

FACE - COLEGIADO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO - SECRETARIA

ATA DA DEFESA DE TESE EM ADMINISTRAÇÃO da Senhora **WANDERCI ALVES BITENCOURT** REGISTRO Nº 337/2025. No dia 14 de julho de 2025, às 09:00 horas, reuniu-se de forma remota, por videoconferência, a Comissão Examinadora de Tese, indicada pelo Colegiado do Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração do CEPEAD, em 11 de junho de 2025, para julgar o trabalho final intitulado “Regimes de Volatilidade na Gestão Dinâmica de Portfólio: Estudo empíricos de medidas de risco", requisito para a obtenção do Grau de Doutora em Administração, linha de pesquisa: Finanças. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila, após dar conhecimento aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra a candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da candidata. Logo após, a Comissão se reuniu sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do seguinte resultado final:

(x) APROVAÇÃO

( ) REPROVAÇÃO

O resultado final foi comunicado publicamente a candidata pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Senhor Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 14 de julho de 2025.

Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila - Orientador UFMG
Prof. Dr. Aureliano Angel Bressan - UFMG
Prof. Dr. Flávio Luiz de Moraes Barboza - UFU
Prof. Dr. Leandro dos Santos Maciel - USP
Prof. Dr. Cristiano Arbex Valle - UFMG

Documento assinado eletronicamente por **Robert Aldo Iquiapaza Coaguila**, **Professor do Magistério Superior**, em 14/07/2025, às 13:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Aureliano Angel Bressan**, **Professor do Magistério Superior**, em 14/07/2025, às 13:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Cristiano Arbex Valle**, **Professor do Magistério Superior**, em 14/07/2025, às 14:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Flavio Luiz de Moraes Barboza**, **Usuário Externo**, em 18/07/2025, às 10:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Leandro dos Santos Maciel**, **Usuário Externo**, em 18/07/2025, às 12:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4368230** e o código CRC **CCCD190D**.

Referência: Processo nº 23072.242447/2025-72 SEI nº 4368230

Dedico este trabalho ao meu esposo, Diego, por compartilhar meus devaneios e estar sempre disposto a uma boa conversa.
Ao meu filho, Otávio, meu presente de Deus, por sua paciência, carinho e amor incondicional.
À minha mãe por tentar compreender meus caminhos e, movida pela saudade, esperar que eles sempre voltem até ela.
A Deus, sempre.

AGRADECIMENTOS

O doutorado é, ao mesmo tempo, um percurso enriquecedor e desafiador. Um convite contínuo à humildade, que nos ensina que somos apenas um grão de areia diante do imenso oceano do conhecimento. É também um período singular de autoconhecimento, no qual aprendemos a lidar com limites, silêncios, descobertas e a reconhecer que sempre há mais a apre(e)nder.

Neste percurso, agradeço, primeiramente, a Deus, por me sustentar nos momentos de dúvida, acolher meu silêncio e iluminar meu caminho.

Ao meu orientador, Professor Robert Aldo Iquiapaza, pela orientação generosa, escuta atenta e pelas reflexões que sempre me impulsionaram a ir além. Sua confiança e dedicação foram fundamentais para a concretização deste trabalho. A generosidade com que compartilhou conhecimento e cedeu, inclusive, seus finais de semana para me orientar, é incomensurável.

Aos professores do CEPEAD, em especial aos professores da área de finanças, que contribuíram para minha formação acadêmica, registro meu sincero reconhecimento.

Aos colegas da turma de doutorado de 2021, pelas conversas e pelos cafezinhos compartilhados. E aos colegas de outras turmas, pelos momentos de troca e aprendizado.

À minha família e aos amigos, por compreenderem os momentos de ausência. À minha mãe, Luzia, por seu carinho e preocupação constantes. Ao meu esposo, Diego, pelo companheirismo e por partilhar cada passo desta jornada. Ao meu filho, Otávio, por sua paciência e amor incondicional, você é, e sempre será, meu presente mais precioso.

Aos meus companheiros de quatro patas, por trazerem alegria mesmo nos dias difíceis. Aos cachorrinhos Clark, que partiu no meio desse processo, e Bruce, por sua lealdade e presença acolhedora. E ao meu gatinho Barry, que nos adotou em meio à despedida do Clark, pela ternura inesperada nos momentos mais duros.

Ao IFMG – Campus Formiga, minha instituição de origem, pelo apoio institucional que tornou possível minha dedicação plena ao doutorado.

À Universidade Federal de Minas Gerais, por me acolher com excelência. A UFMG foi mais do que um espaço acadêmico: foi um lugar de crescimento, troca e construção.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende”

—Leonardo da Vinci

RESUMO

A Moderna Teoria de Portfólio tem como objetivo otimizar o equilíbrio entre risco e retorno. O modelo pioneiro proposto por Markowitz, denominado Modelo de Média-Variância, é reconhecido como o marco inicial dos estudos sobre alocação de ativos. Entretanto, ao restringir a avaliação do risco à variância dos retornos, tal abordagem apresenta limitações que fomentaram o surgimento de métricas alternativas de risco e estimularam o debate acerca de sua adequação e aplicabilidade. Diversas extensões e novos enfoques foram propostos, buscando tornar o modelo mais aderente às demandas reais dos investidores e mitigar erros de especificação e de estimativa que comprometem a robustez das estratégias estáticas. Nesse contexto, observa-se um interesse crescente por estratégias que maximizem o retorno ajustado ao risco de perda, com destaque para métricas como o Conditional Value-at-Risk (CVaR) e o Conditional Drawdowns-at-Risk (CDaR). Considerando, ainda, que as condições de mercado alternam-se entre diferentes regimes, e que a Teoria da Utilidade Estado-Dependente sugere que as preferências dos investidores variam, a medida de risco torna-se intrinsecamente dependente do regime vigente, uma vez que períodos de elevada volatilidade tendem a aumentar a correlação e a volatilidade dos ativos, reduzindo a eficácia da diversificação tradicional. Diante desse cenário, esta tese, estruturada em três artigos científicos, busca avaliar se a adoção de funções de risco adaptadas ao regime influencia o desempenho de estratégias de alocação de ativos. No primeiro artigo, analisa-se a capacidade de diferentes *proxies* de volatilidade (histórica, condicional e implícita) em identificar regimes por meio de um Modelo Oculto de Markov (HMM). O segundo artigo compara o desempenho de carteiras otimizadas com variância, CVaR e CDaR em ambientes de baixa e alta volatilidade, identificados via HMM. Por fim, o terceiro artigo propõe um modelo multiperíodo com controle preditivo (MPC), no qual a função de risco é adaptada dinamicamente ao regime vigente: CVaR em períodos de baixa volatilidade e CDaR em períodos de alta. Os resultados indicam que a volatilidade condicional se destaca como a *proxy* mais eficaz para a identificação de regimes. Verifica-se que o CVaR proporciona melhores resultados em contextos de baixa volatilidade, enquanto o CDaR é mais eficiente em cenários de alta volatilidade. Além disso, a estratégia multiperíodo com risco condicional ao regime de volatilidade supera, em termos de desempenho, sua contraparte de risco fixo e regime único, em especial, em termos de retorno equivalente certo. Esses achados evidenciam a relevância de estratégias de gestão de risco dinâmicas, oferecendo subsídios práticos para investidores que buscam aprimorar a adaptação de seus portfólios frente às mudanças nas condições de mercado.

Palavras-chave: Modelo oculto de Markov; Risco de cauda; Volatilidade; Otimização de portfólio; Mudança de regime.

ABSTRACT

Modern Portfolio Theory (MPT) seeks to optimize the risk-return tradeoff. Its foundational Mean-Variance model, pioneered by Markowitz, is the cornerstone of asset allocation. However, this approach's reliance on variance as the sole risk measure presents limitations that have spurred the development of alternative risk metrics and a debate on their applicability. Numerous extensions have been proposed to mitigate the specification and estimation errors that compromise the robustness of static strategies and to better align models with investor needs. In this context, strategies that maximize downside risk-adjusted returns are gaining traction, featuring metrics like Conditional Value-at-Risk (CVaR) and Conditional Drawdown at Risk (CDaR). As market conditions switch between different regimes, the optimal risk measure becomes regime-dependent, a concept supported by State-Dependent Utility Theory. During high-volatility periods, for instance, rising asset correlations reduce the effectiveness of traditional diversification. This thesis, comprising three articles, evaluates whether adopting regime-adaptive risk functions enhances asset allocation performance. The first article assesses various volatility proxies (historical, conditional, and implied) for identifying market regimes via a Hidden Markov Model (HMM). The second article compares the performance of portfolios optimized with variance, CVaR, and CDaR within the HMM-identified low- and high-volatility regimes. The third article introduces a multi-period Model Predictive Control (MPC) framework that dynamically switches the risk function based on the prevailing regime—CVaR for low volatility and CDaR for high volatility. Results show that conditional volatility is the most effective proxy for regime identification. We find that CVaR performs best in low-volatility environments, whereas CDaR is superior in high-volatility scenarios. Crucially, the dynamic, regime-conditional risk strategy outperforms its static, single-regime counterpart, especially in terms of certainty equivalent return. These findings underscore the importance of dynamic risk management and provide practical guidance for investors aiming to build more adaptive portfolios in fluctuating market conditions.
Keywords: Hidden Markov Model; Tail Risk; Volatility; Portfolio Optimization; Regime Switching.

LISTA DE FIGURAS

2.1 Efeito da diversificação no risco do portfólio para carteiras de média-variância simuladas. 25
2.2 Ilustração de *drawdowns*. 38
2.3 Ilustração da duração de um máximo *drawdown*. 39
2.4 Distribuição conjunta das variações de valor de dois ativos. 43
2.5 Estrutura de dependência do HMM. 43
2.6 Representação do modelo HMM com dois estados para o Ibovespa. 46
2.7 Distribuições de probabilidade dependentes ao regime. 47
2.8 Implementação padrão do MPC aplicado ao problema de otimização de portfólio . 50
3.1 Representação da janela móvel para estimar o HMM 62
3.2 Média e Desvio Padrão dos Retornos por Ano e Regime de Volatilidade 69
3.3 Evolução dos pesos entre os regimes 73
4.1 Distribuição de perda, VaR, CVaR e perda máxima. 83
4.2 Retorno acumulado dos ativos no período de 01/2019 a 12/2024. 95
4.3 Evolução temporal dos pesos dos ativos por função de risco e regime de volatilidade. 98
5.1 Retorno acumulado das estratégias no período de janeiro de 2020 a abril de 2025 e horizonte de planejamento igual a 5. 123
A.1 Fluxograma representativo da estrutura geral e progressão da tese. 154
A.2 Fluxograma metodológico para o Artigo 1: Comparação de proxies de volatilidade, identificação de regimes e alocação baseada em regimes. 155
A.3 Fluxograma metodológico para o Artigo 2: Influência de regimes de volatilidade na escolha de medidas de risco. 156
A.4 Fluxograma metodológico para o Artigo 3: Processo adaptativo 157

LISTA DE TABELAS

3.1 Descrição das Variáveis Financeiras Analisadas 59
3.2 Estatísticas descritivas das séries utilizadas como *proxy* para volatilidade 65
3.3 Comparação das Medidas de Ajuste do Modelo HMM com diferentes medidas de Volatilidade 66
3.4 Indicadores dos ETFs por mercado e ano 68
3.5 Matriz de Correlação dos Ativos por Regime de Volatilidade e Período Completo . 70
3.6 Pesos médios dos ativos por regime de volatilidade, nível de aversão e custo de transação de 0.05%. 72
3.7 Comparação de Desempenho das Estratégias de Alocação 75
4.1 Descrição dos dados 88
4.2 Resumo dos dados por ano no período de 2019 a 2024. 96
4.3 Pesos médios por regime de volatilidade e medida de risco ($\lambda = 4$ e $\phi = 0.001$.) . . 97
4.4 Desempenho das estratégias otimizadas por medida de risco 100
5.1 Descrição dos dados 113
5.2 Métricas de desempenho das estratégias entre janeiro de 2020 a abril de 2025. . . . 124
5.3 Tracking Error entre pares de estratégias. 127
5.4 Estatísticas do portfólio HMM-MPC-Adaptive, condicionadas à métrica de risco ativa (CVaR ou CDaR). 128

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADD	*Drawdown* Médio, do inglês *Average Drawdown*
ART	Transformação de Postos Alinhados, do inglês *Aligned Rank Transform Test*
B3	Brasil, Bolsa, Balcão
CER	Retorno de Certeza-Equivalente, do inglês *Certainty Equivalent Return*
CDaR	*Drawdown* Condicional em Risco, do inglês *Conditional Drawdown-at-Risk*
CDD	*Drawdown* Condicional, do inglês *Conditional Drawdown*
CED	*Drawdown* Esperado Condicional, do inglês *Conditional Expected Drawdown*
CVaR	Valor Condicional em Risco, do inglês *Conditional Value-at-Risk*
eopDD	*Drawdown* de final de período
ERoD	Perda Esperada Relativa ao *Drawdown*, do inglês *Expected Regret of Drawdown*
ETFs	Fundos de índices, do inglês, *Exchange Traded Funds*
EW	Igualmente ponderada, do inglês, *Equally Weighted*
GARCH	Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva Generalizada, do inglês, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*
HME	Hipótese de Mercado Eficiente
HMA	Hipótese de Mercado Adaptativo
HMM	Modelo Oculto de Markov, do inglês *Hidden Markov Model*
Ibovespa	Índice da Bolsa de Valores de São Paulo
VIXBR	Índice de Volatilidade Implícita do índice Ibovespa
LPM	Momentos Parciais Inferiores
MAE	Erro absoluto médio, do inglês *Mean Absolute Error*
MPC	Modelo de Controle Preditivo, do inglês *Model Predictive Control*
MDD	Máximo *Drawdown*
MTP	Moderna Teoria de Portfólio
MMV	Modelo de Média-Variância
TPMP	Teoria do Portfólio Pós-Moderna
RMSE	Erro médio quadrático, do inglês *Root Mean Squared Error*
Selic	Taxa Selic efetiva, média dos títulos públicos federais
VaR	Valor em Risco, do inglês *Value-at-Risk*
VIX	Volatilidade implícita do índice S&P500, do inglês *Volatility Index*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO GERAL 15
1.1 Contextualização 17
1.2 Justificativa e Relevância 20
1.3 Problema de Pesquisa 22
1.4 Objetivos 22
1.4.1 Objetivos específicos 22
1.5 Estrutura da Tese 23
2 REVISÃO DE LITERATURA 24
2.1 Modelo de Média-Variância 24
2.1.1 Limitações e tendências do Modelo de Média-Variância 27
2.2 Medidas de Risco de Perda 31
2.2.1 Axiomas de coerência 32
2.2.2 *Value at Risk* 33
2.2.3 *Conditional Value at Risk* 35
2.2.4 *Drawdown risk* 36
2.3 Modelo Oculto de Markov 41
2.4 Modelo de Controle Preditivo 48
3 ANÁLISE COMPARATIVA DE PROXIES DE VOLATILIDADE E ALOCAÇÃO DE ATIVOS BASEADA EM REGIMES 52
3.1 Introdução 52
3.2 Revisão de literatura 54
3.3 Metodologia 57
3.3.1 Dados 58
3.3.2 Modelo Oculto de Markov 60
3.3.2.1 Critério de Avaliação das Proxies de Volatilidade 62
3.3.3 Portfólios 63
3.4 Resultados Empíricos 64
3.4.1 Volatilidade e Ajuste do Modelo HMM 64
3.4.2 Utilizando o HMM para Investimento em Carteiras 68
3.5 Considerações Finais 77
4 A INFLUÊNCIA DE REGIMES DE VOLATILIDADE NA ESCOLHA DE MEDIDAS DE RISCO PARA ALOCAÇÃO ÓTIMA DE PORTFÓLIO 79
4.1 Introdução 79
4.2 Revisão de literatura 81
4.2.1 Valor em risco condicional 82
4.2.2 Drawdown Condicional em Risco 84
4.2.3 Mudança de regime 86

4.3 Metodologia . . . 88
4.3.1 Dados . . . 88
4.3.2 Identificação dos regimes via HMM . . . 89
4.3.3 Formulação do problema de otimização . . . 90
4.3.4 Definição dos Parâmetros do Modelo . . . 92
4.3.5 Avaliação empírica do desempenho . . . 93
4.4 Resultados Empíricos . . . 94
4.5 Considerações Finais . . . 103
5 ALOCAÇÃO ÓTIMA MULTIPERÍODO COM RISCO CONDICIONAL AOS REGIMES DE VOLATILIDADE . . . 105
5.1 Introdução . . . 105
5.2 Revisão de literatura . . . 108
5.3 Metodologia . . . 112
5.3.1 Dados . . . 113
5.3.2 Identificação de regimes de volatilidade . . . 114
5.3.3 Otimização Multi-período . . . 115
5.3.3.1 Portfólio com risco condicional ao regime . . . 116
5.3.4 Definição dos Parâmetros do Modelo . . . 119
5.3.5 Procedimentos de Avaliação e Métricas de Desempenho . . . 120
5.4 Resultados Empíricos . . . 122
5.5 Considerações Finais . . . 130
6 CONCLUSÃO GERAL . . . 133
REFERÊNCIAS . . . 136
APÊNDICE A — FLUXOGRAMAS . . . 154
APÊNDICE B — FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS . . . 158

1 INTRODUÇÃO GERAL

O mercado financeiro exerce papel fundamental na alocação eficiente de recursos, ao permitir que investidores individuais e institucionais diversifiquem suas estratégias, busquem retornos atrativos e, simultaneamente, controlem sua exposição ao risco. Contudo, um dos principais desafios enfrentados pelos investidores reside na gestão de portfólios em contextos de incerteza, caracterizados por oscilações abruptas e mudanças nos níveis de volatilidade.

Existe um corpo substancial da literatura de finanças dedicado à seleção de portfólios. O modelo pioneiro de alocação ótima por meio da diversificação de carteiras foi introduzido por Markowitz (1952), conhecido como Modelo de Média-Variância (MMV). Este modelo estabeleceu as bases da Moderna Teoria de Portfólio (MTP) e, desde então, vem sendo continuamente aprimorado, com a proposição de inúmeras extensões e aplicações práticas (Rubinstein, 2002; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Iquiapaza; Vaz; Borges, 2016; Lee; Eid Junior, 2018).

No âmbito da MPT, o modelo MMV considera que a aversão ao risco é capturada pela penalização da covariância dos retornos. No entanto, essa premissa de uma distribuição simétrica dos riscos nem sempre reflete adequadamente a tolerância dos investidores (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Além disso, num ambiente de alta volatilidade, as estimativas de retorno tornam-se menos confiáveis, dificultando a otimização de carteiras baseadas somente em expectativas de retorno (De Jong, 2018; Mangee, 2024). Conforme apontado na literatura, mudanças abruptas na volatilidade desafiam modelos tradicionais, como a própria MPT e a Hipótese de Mercado Eficiente (HME) (Fama, 1970; Ang; Bekaert, 2004), revelando limitações em sua capacidade de explicar movimentos extremos durante crises financeiras, devido aos elevados níveis de incerteza dos parÂmetros e mercados durante esses períodos (Focardi; Fabozzi, 2012; Mushir; Suryavanshi, 2021).

Essas críticas, longe de invalidarem a teoria original, reforçam a necessidade de adaptar sua estrutura para atender às demandas contemporâneas dos investidores, que buscam maior confiabilidade, estabilidade dos pesos e robustez em suas estratégias de investimentos (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Chen; Yuan, 2016).

Após eventos como a crise financeira de 2008 e a pandemia de COVID-19, cresceu o interesse em entender como as mudanças nas condições de mercado afetam a gestão de portfólios, especialmente em cenários de crise, caracterizados por elevada volatilidade (Habib; Hasan; Jiang, 2018; Zhu et al. 2020; Mushir; Suryavanshi, 2021). A oscilação entre os níveis de volatilidade do mercado expõem as limitações das estratégias de alocação estáticas, que ignoram que o desempenho dos ativos é condicionado ao ambiente de mercado e que as condições se alternam entre diferentes regimes de volatilidade. Diante desse cenário, há uma exigência crescente por abordagens mais sofisticadas, dinâmicas e adaptativas, capazes de ajustar as estratégias de investimento conforme as mudanças nas condições do mercado (Tu, 2010; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Nystrup et al. 2019; Lewin; Campani, 2020; MacLean; Yu; Zhao,

2022). Neste contexto, surgem abordagens que visam incorporar mais dinamismo à gestão de portfólios.

Como destacam Ardia et al. (2018), Campani, Garcia e Lewin (2021) e DeMiguel, Martín-utrera e Uppal (2024), os processos estocásticos que regem os preços de mercado diferem significativamente entre períodos de estabilidade e de estresse, exigindo cuidado ao modelar dados intertemporais. Evidências empíricas mostram que o desempenho dos ativos varia conforme o regime de mercado vigente (Nguyen; Nguyen, 2015; Uysal; Mulvey, 2021), e que os investidores tendem a ajustar sua tolerância ao risco em resposta às condições de mercado (Jarrow; Li, 2021; Mushir; Suryavanshi, 2021).

Como consequência dessas observações, e diante da evidência de que a percepção de risco e as preferências dos investidores não são estáticas, mas variam conforme as condições de mercado, cresce a adoção de modelos capazes de capturar mudanças de regime. O Modelo Oculto de Markov, do inglês *Hidden Markov Model* (HMM), por exemplo, tem se destacado por sua crescente aplicação no campo de finanças, sendo particularmente eficaz ao permitir a modelagem de transições entre estados não observáveis diretamente (Wang; Lin; Mikhelson, 2020).

Os modelos de mudança de regime, como o HMM, permitem diferenciar o mercado em momentos de baixa e alta volatilidade, que podem ser associados, por exemplo, a regimes 'bullish' (retornos esperados positivos e volatilidade relativamente baixa) e 'bearish' (baixos retornos esperados e alta volatilidade), ou a regimes 'normais' e de 'evento'. Em cada um desses regimes, o mercado apresenta propriedades estatísticas distintas, com diferentes distribuições de dados e parâmetros (Boyd et al. 2017; Lewin; Campani, 2024).

Estudos recentes apontam vantagens significativas na gestão de risco e na construção de carteiras com base em estimativas específicas de cada regime, uma vez que as estratégias de alocação adaptativas demonstram melhor desempenho em termos de retorno e controle de risco quando comparadas a abordagens tradicionais (Kritzman; Page; Turkington, 2012; Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Peng; Kim; Mittnik, 2022; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Lewin; Campani, 2024). Essa abordagem dinâmica, regime condicional, de otimização possibilita ao investidor gerir sua carteira proativamente, aproveitando regimes favoráveis para otimizar retornos e, ao mesmo tempo, reduzindo potenciais perdas durante regimes adversos (Boyd et al. 2017).

Paralelamente, diversas *proxies* para mensuração de risco vêm sendo propostas, cada uma capturando aspectos distintos da distribuição dos retornos dos ativos. Medidas tradicionais como a variância, a semi-variância, o Valor em Risco, do inglês *Value-at-Risk* (VaR) e o Valor Condicional em Risco, do inglês *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) são consideradas medidas estáticas (Ding; Uryasev, 2022). Em contraste, métricas baseadas em *drawdowns* são dependentes do caminho percorrido pelos retornos, permitindo identificar eventos de perda cumulativa superiores ao esperado (Geboers; Depaire; Annaert, 2022). Assim, considerando que a distribuição dos retornos varia com o regime de mercado, é razoável supor que o

desempenho das diferentes medidas de risco também será impactado pelas mudanças de regime da volatilidade.

Dessa forma, o desenvolvimento da teoria de portfólios tem caminhado em direção a estruturas significativamente mais complexas e adaptativas, superando as limitações do modelo de Média-Variância (MMV) originalmente proposto por Markowitz (1952). A necessidade de maior aderência às realidades contemporâneas dos mercados financeiros, marcadas por incerteza, oscilações abruptas e variações nos níveis de volatilidade, bem como a observação de que as preferências dos investidores são estado-dependentes, impulsionou essa evolução. Nesse esforço contínuo de inovação na gestão de carteiras, a avaliação de estruturas de risco condicionadas ao regime, como as que utilizam o Modelo Oculto de Markov (HMM) para identificar estados e o Modelo de Controle Preditivo (MPC) para otimização multiperíodo (Boyd et al. 2017; Mayne et al. 2000), torna-se fundamental para construir portfólios mais robustos e resilientes aos diferentes cenários do mercado.

1.1 Contextualização

A moderna teoria de portfólio postula que, por meio da diversificação, conforme formulada no MMV, o investidor pode reduzir o risco (indesejável) e, ao mesmo tempo, manter um retorno esperado (desejável), *ceteris paribus*. Essa diversificação é representada pela fronteira eficiente, um agrupamento de portfólios que proporcionam o maior retorno esperado para cada grau de risco.

Conforme mencionado, o pioneiro na formalização matemática da diversificação foi Markowitz (1952). De acordo com Rubinstein (2002), sua principal contribuição foi reconhecer que o risco relevante para o investidor não é o risco individual de cada ativo, mas sua contribuição para o risco da carteira como um todo. Em outras palavras, é necessário analisar os ativos conjuntamente, já que a correlação entre eles possibilita diminuir o risco total sem comprometer o retorno.

A estrutura clássica do MMV requer o conhecimento da média e da matriz de covariância dos ativos, cujos parâmetros verdadeiros não são conhecidos. Na prática, esses *inputs* podem ser baseados em séries históricas, previsões ou estimativas de especialistas, mas estão sujeitos a incertezas que podem gerar erros significativos nas estimativas e, consequentemente, comprometer a etapa de otimização, levando a soluções instáveis ou excessivamente concentradas (Michaud, 1989; Black; Litterman, 1992; Chen; Yuan, 2016).

Esses erros de estimativas deterioram significativamente o desempenho dos portfólios fora da amostra (Chopra; Ziemba, 2013), mas mais do que isso, como apontado por De Jong (2018), existe a necessidade de diferenciar entre erros de estimação e a ausência fundamental de incerteza nos modelos tradicionais.

Neste contexto, é importante destacar que, mesmo que gestores ativos de investimento, ou simplesmente investidores, tivessem conhecimento profundo dos ativos e setores, é amplamente

reconhecido que retornos e correlações variam ao longo do tempo, conforme as condições do mercado (Ang; Timmermann, 2012; Abate; Bonafini; Ferrari, 2022). Ademais, existem evidências empíricas de que a percepção de risco e as preferências dos investidores não são estáticas, mas podem variar conforme as condições de mercado, sugerindo que a utilidade do investidor é estado dependente (Jarrow; Li, 2021).

Em resposta a esses problemas, abordagens recentes incorporam a incerteza nas estimativas, propondo ajustes na estrutura do modelo de média-variância e adicionando restrições para melhorar sua robustez (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Chen; Yuan, 2016). Isso resultou em uma vasta literatura que explora diferentes técnicas para construção de portfólios, gestão de risco e avaliação de desempenho (Lee; Eid Junior, 2018).

Esses avanços deram origem a duas importantes vertentes: a Teoria do Portfólio Pós-Moderna (TPMP) e a Hipótese de Mercado Adaptativo (HMA) (Rom; Ferguson, 1994; Lee; Eid Junior, 2018). A TPMP introduz a noção de risco assimétrico, destacando a relevância de medidas como o *downside risk* para capturar as perdas potenciais mais relevantes para os investidores (Rasiah, 2012). Já a HMA desafia o pressuposto da HME, propondo que os mercados passam por ciclos alternados de eficiência e ineficiência, em resposta à adaptação dos agentes (Lo, 2004, 2005, 2012).

Com a intensificação das crises nos últimos anos, também cresceu o interesse por medidas de risco mais sensíveis às perdas, em especial aquelas voltadas aos eventos de alta volatilidade (Geboers; Depaire; Annaert, 2022). A maximização do retorno esperado sujeita a uma medida de risco de cauda, conforme defendido pela TPMP, surge como uma proposta mais alinhada às preferências reais dos investidores.

O risco de cauda representa a probabilidade de perdas severas decorrentes de eventos de estresse dos mercados financeiros, localizados nas caudas à esquerda das distribuições de retorno. Trata-se, portanto, da vulnerabilidade de um portfólio diante de movimentos abruptos e de estresse do mercado, como crises financeiras ou choques de liquidez (Peng; Kim; Mittnik, 2022; Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

Entre as medidas mais conhecidas, o VaR destaca-se por sua ampla utilização, inclusive em contextos regulatórios (Zhou et al. 2017). Apesar de sua simplicidade e facilidade de interpretação, o VaR possui restrições significativas: não é uma medida de risco consistente com os axiomas de Artzner et al. (1999) e desconsidera a magnitude das perdas além do percentil crítico (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Maciel, 2011; Morettin; Singer, 2022). Essas limitações motivaram o surgimento de alternativas, como o CVaR (também conhecido como *Expected Shortfall*) (Rockafellar; Uryasev, 2000, 2002), e medidas fundamentadas em *drawdowns*, como o *Drawdown* Condicional em Risco, do inglês *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR) (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005).

Segundo Goldberg e Mahmoud (2017), o *drawdown* é definido como a queda, ou perda acumulada, entre um máximo (pico) e o subsequente ponto mínimo (vale) no valor de um investimento. Medidas baseadas em *drawdown* são amplamente reconhecidas por sua relevância

na gestão de risco e por levarem em consideração o comportamento dinâmico do investidor frente a perdas (Grossman; Zhou, 1993; Cvitanic; Karatzas, 1995; Alexander; Baptista, 2006; Brandi; Mendes, 2004; Pospisil; Vecer, 2010; Choi; Kim; Kim, 2021; Ding; Uryasev, 2022). Elas possuem a vantagem de considerar a trajetória dos retornos e capturar efeitos de dependência temporal, o que é especialmente relevante sob a ótica da HMA, que valoriza o processo de aprendizagem e adaptação dos agentes ao ambiente de mercado (Johansen; Sornette, 2002).

Diante da diversidade de *proxies* de risco, a escolha da medida adequada torna-se um elemento crítico no processo de alocação de ativos (Gilbert; Meiklejohn, 2019; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024). No entanto, como observa Smith e Timmermann (2022), uma boa estratégia de investimento não depende apenas da métrica de risco utilizada, mas de sua capacidade de manter desempenho ajustado ao risco ao longo do tempo, ou seja, sua resiliência intertemporal.

Desta forma, assumindo que as condições de mercado mudam ao longo do tempo, um desafio constante para os participantes desse mercado é detectar essas mudanças e responder a elas (Wang; Lin; Mikhelson, 2020), reforçando a necessidade de que as estratégias se adaptem, uma vez que o que funciona em um ambiente pode não ser eficaz em outro (Lo, 2012). Nesse cenário de incertezas, estratégias estáticas, que assumem um único regime de volatilidade durante todo o período de investimento, tendem a ser menos eficazes.

Assim, para que a diversificação seja mais eficiente, é preciso considerar a dependência dos retornos e riscos em relação aos estados subjacentes da economia ou ao sentimento dos investidores (Costa; Araujo, 2008; Wu; Li, 2011; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Nystrup et al. 2015; Giamouridis; Sakkas; Tessaromatis, 2017; Campani; Garcia; Lewin, 2021).

Essa compreensão implica que uma abordagem de gestão de portfólio adaptativa deve ser capaz de ajustar a própria função de risco utilizada na otimização, de modo que ela reflita o perfil de risco mais pertinente ao regime de volatilidade prevalente. Tal flexibilidade é crucial para evitar erros de especificação do modelo, garantindo que as estratégias de alocação de ativos estejam mais alinhadas com as prioridades reais dos investidores e com a dinâmica intrínseca dos mercados financeiros.

O estudo proposto por DeMiguel, Martín-utrera e Uppal (2024), por exemplo, investiga se os investidores podem melhorar o desempenho dos portfólios multifatoriais ajustando a exposição a fatores de risco com base nas condições de mercado e sugerem que reduzir a exposição a fatores de risco quando a volatilidade é alta poderia melhorar o desempenho. Estudos como Costa e Araujo (2008), Bielelcki, Crépey e Herbertsson (2011), Nystrup et al. (2019) e Lewin e Campani (2020), por sua vez, mostram ganhos expressivos ao incorporar modelos de mudança de regime na alocação de ativos.

Os modelos de mudança de regime são especialmente úteis para capturar choques exógenos de incerteza, algo particularmente importante para mercados emergentes, que tendem a ser mais sensíveis a esse tipo de instabilidade (Anaya; Hachula; Offermanns, 2017; De Paula; Fritz; Prates, 2024). Recentemente, um modelo que tem se destacado por sua crescente aplicação

no campo de finanças é o HMM (Roman; Mitra, 2009; Nystrup; Madsen; Lindström, 2018; Wang; Lin; Mikhelson, 2020; Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Peng; Kim; Mittnik, 2022).

Consequentemente, desenvolver estratégias de alocação que proporcionem retornos que sejam resilientes aos diferentes comportamentos do mercado ao longo do tempo e atrativos dentro de níveis de risco aceitáveis demanda não apenas a escolha da medida de risco, mas também o reconhecimento da influência das condições de mercado e um olhar multiperíodo (Ang; Timmermann, 2012; Kritzman; Page; Turkington, 2012). Avaliar medidas de risco de cauda, especialmente as derivadas de *drawdowns*, sob diferentes regimes de volatilidade e em estratégias de investimento multiperíodos torna-se, portanto, uma iniciativa relevante para a gestão de portfólios (Masala; Petroni, 2023).

Contudo, as medidas baseadas em *drawdowns*, embora promissoras, podem levar a estratégias excessivamente conservadoras em períodos de normalidade, com impacto negativo no retorno (Van Hemert et al. 2020). Isso corrobora expectativa de que não existe uma medida de risco universalmente ótima (Ortobelli et al. 2005), reforçando a importância da análise do comportamento das medidas de risco ao longo de diferentes regimes de volatilidade. Análises dessa natureza têm o potencial de contribuir para estratégias mais equilibradas e alinhadas à realidade dinâmica dos mercados.

1.2 Justificativa e Relevância

A gestão de ativos por meio da diversificação da carteira permanece um desafio central tanto para investidores institucionais quanto individuais, sendo um elemento crucial, por exemplo, no planejamento de aposentadorias (Rasiah, 2012). Embora a MPT, introduzida por Markowitz (1952), tenha estabelecido as bases para a alocação de ativos, o ambiente de alta volatilidade dos mercados contemporâneos demanda abordagens mais sofisticadas e adaptativas (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014), fato que tem levado a sua evolução constante.

A evolução da MPT foi impulsionada pelo avanço do poder computacional, pelo surgimento de novos modelos de decisão multiperíodo, pela incorporação de medidas de risco mais alinhadas às preferências reais dos investidores e outros aprimoramentos que resultou na TPMP. A principal inovação da TPMP foi reconhecer que variância e desvio-padrão, embora úteis, não capturam adequadamente a percepção de risco dos investidores, especialmente sua maior aversão a perdas do que a ganhos (Rom; Ferguson, 1994).

A necessidade de novas abordagens tornou-se ainda mais evidente frente ao aumento da frequência de eventos de estresse do mercado financeiro, como a crise financeira global de 2008 e a pandemia de COVID-19. A recorrência de tais eventos expôs a fragilidade dos pressupostos de linearidade e estacionariedade embutidos nos modelos tradicionais de gestão de portfólios, ressaltando a importância de estratégias que se adaptem dinamicamente às condições de mercado (Lee; Eid Junior, 2018; Geboers; Depaire; Annaert, 2022; DeMiguel; Martín-utrera;

Uppal, 2024).

Consequentemente, cresce o interesse acadêmico e prático pelas medidas de risco de cauda, como o VaR, o CVaR e as métricas da família de *drawdown-risk* como o CDaR (Geboers; Depaire; Annaert, 2022; Masala; Petroni, 2023). Em particular, as medidas de *drawdown* ganham destaque por incorporarem a trajetória dos retornos, capturando de forma mais realista a percepção de risco dos investidores em ambientes dinâmicos e adaptativos.

Apesar desse avanço teórico, a maioria das estratégias de alocação ainda assume uma função de risco invariante ao longo do tempo, desconsiderando que mudanças nos regimes de volatilidade podem alterar a adequação relativa entre diferentes funções de risco. Esse é um ponto crucial, especialmente ao se considerar que não apenas as condições de mercado não são estáticas, mas a utilidade do investidor é estado-dependente, ou seja, a satisfação ou a aversão ao risco de um investidor se altera em resposta ao 'estado' (ou regime) identificado (Jarrow; Li, 2021). Por exemplo, em períodos de alta volatilidade e perdas acumuladas (*drawdowns*), a utilidade do investidor pode ser desproporcionalmente impactada, levando-o a priorizar a preservação de capital e a aversão a perdas sequenciais. Inversamente, em regimes de baixa volatilidade, o foco pode se voltar para a captura de oportunidades, com uma tolerância maior a flutuações que não caracterizem perdas extremas.

A ausência dessa adaptação ao assumir um modelo de otimização de portfólio que desconsidera a variação das preferências dos investidores em diferentes estados de volatilidade do mercado pode levar a um erro de especificação do modelo.

Essa lacuna é particularmente relevante em mercados emergentes, como o brasileiro, onde os choques exógenos de incerteza tendem a ser mais pronunciados (Anaya; Hachula; Offermanns, 2017).

Notadamente, o mercado brasileiro, apresenta um histórico de instabilidade interna (inflação, crises fiscais e políticas) que o torna um campo fértil para investigar a robustez e o desempenho de estratégias de alocação sensíveis a regimes. Adicionalmente, o perfil do investidor brasileiro, que ainda representa uma parcela da população com espaço para crescimento, tende a priorizar tanto o retorno quanto a segurança em suas decisões de investimento (ANBIMA, 2024), o que pode levar a uma valorização especial de abordagens que ofereçam controle robusto sobre perdas extremas, como as investigadas nesta tese.

Além disso, embora existam muitos trabalhos que avaliam e comparam o desempenho de diferentes classes de medidas de risco (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; Gilbert; Meiklejohn, 2019; Geronazzo; Chela, 2020; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024), existe uma carência de trabalhos que avaliem as medidas de risco por regime.

Assim, esta pesquisa justifica-se pela necessidade de investigar se estratégias de alocação dinâmicas, que adaptam a função de risco conforme o regime de volatilidade, oferecem vantagens sobre abordagens tradicionais de risco invariante ao longo do tempo. Tal investigação pretende avançar a fronteira teórica no campo da gestão de portfólios, além de oferecer implicações práticas relevantes para gestores ativos de investimentos em ambientes de elevada incerteza.

Ao analisar o desempenho de diferentes funções de risco, como variância, CVaR e CDaR, sob distintos regimes de volatilidade, esta tese visa preencher uma lacuna relevante na literatura contemporânea de finanças e contribuir para o desenvolvimento de estratégias de alocação mais resilientes e alinhadas com as dinâmicas dos mercados financeiros modernos.

1.3 Problema de Pesquisa

O mercado financeiro, essencial para a alocação eficiente de recursos, impõe desafios significativos à gestão de portfólios devido à incerteza e às oscilações de volatilidade, que expõem as limitações dos modelos tradicionais de Média-Variância ao ignorarem as dinâmicas reais do mercado e as preferências estado-dependentes dos investidores. Essa realidade exige abordagens mais sofisticadas e adaptativas, que permitem diferenciar o mercado em momentos de baixa e alta volatilidade. Diante da evidência de que as condições de mercado impactam diretamente o comportamento dos ativos e dos agentes, e que a utilidade do investidor não é estática, mas varia conforme o regime vigente, surge a necessidade de repensar as estruturas tradicionais de gestão de portfólios, levando à questão de pesquisa:

Sob a presença de mudanças de regime de volatilidade, os gestores ativos de investimentos devem alterar a medida de risco utilizada no processo de alocação de ativos?

1.4 Objetivos

Analisar se a adoção de diferentes medidas de risco impacta o desempenho das estratégias de alocação dinâmica de ativos sob mudança de regimes de volatilidade.

1.4.1 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

I. Estimar regimes de volatilidade testando indicadores como a volatilidade implícita, a volatilidade histórica e a volatilidade condicional, utilizando um HMM;
II. Analisar o desempenho de diferentes funções de risco (variância, CVaR e CDaR) sob distintos regimes de volatilidade;
III. Construir uma estratégia dinâmica de alocação *long-only* de ativos multiperíodo, incorporando a alternância da medida de risco condicional ao regime vigente por meio de um Modelo de Controle Preditivo, do inglês *Model Predictive Control* (MPC);
IV. Comparar o desempenho da estratégia dinâmica de alocação baseada em regimes com o desempenho de estratégias tradicionais de risco invariante ao longo do tempo (fixo).

1.5 Estrutura da Tese

Esta tese adota o formato de artigos científicos e está estruturada em seis capítulos. O primeiro capítulo é destinado à introdução, na qual são apresentadas a contextualização do tema, a formulação do problema de pesquisa, a definição dos objetivos gerais e específicos, além da justificativa teórica e prática do estudo. O segundo capítulo corresponde à revisão de literatura, cujo objetivo é consolidar o arcabouço teórico que fundamenta a pesquisa, abordando a evolução da teoria de portfólios, as medidas de risco de cauda, os modelos de mudança de regime e as estratégias multiperídos de alocação de ativos.

O terceiro capítulo apresenta o primeiro artigo, voltado para a estimação de regimes de volatilidade, atendendo ao objetivo específico I. Este artigo foca na utilização de diferentes *proxies* de volatilidade empregando o Modelo Oculto de Markov (HMM) como ferramenta de segmentação dos regimes de volatilidade.

O quarto capítulo reúne o segundo artigo, relacionado ao objetivo específico II, no qual é realizada a análise comparativa do desempenho de diferentes medidas de risco, em função dos regimes de volatilidade estimados.

O quinto capítulo apresenta o terceiro artigo, que contempla os objetivos específicos III e IV, propondo a construção de uma estratégia dinâmica de alocação *long-only* de ativos baseada em uma estrutura de risco dependente do regime de volatilidade, e comparando seu desempenho em relação a estratégias tradicionais de risco invariante no tempo.

Destaca-se que os estudos empíricos desenvolvidos nos artigos que compõem esta tese utilizaram Fundos de índices, do inglês, *Exchange Traded Funds* (ETFs) negociados em bolsa como universo de ativos. A escolha por ETFs se justifica por suas vantagens-chave como liquidez, diversificação, representatividade de segmentos de mercado e custos operacionais reduzidos (Matos; Iquiapaza; Ferreira, 2014), o que os tornou instrumentos ideais para testar as estratégias de alocação dinâmica propostas.

Por fim, o sexto capítulo reúne as considerações finais, nas quais são sintetizados os principais achados do estudo, discutidas suas contribuições teóricas e práticas, identificadas as limitações da pesquisa e sugeridas direções para trabalhos futuros.

Embora cada artigo tenha sido desenvolvido de forma independente, respeitando os padrões de elaboração científica, a tese assegura coesão temática e alinhamento com os objetivos da introdução, garantindo uma progressão lógica entre seus capítulos.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo apresenta uma revisão detalhada da literatura que fundamenta o presente estudo, abordando a Moderna Teoria de Portfólio (MPT), suas limitações e evoluções, com ênfase nas medidas de risco de cauda e nos modelos de mudança de regime. Também são exploradas as abordagens de alocação dinâmica de ativos, com destaque para a integração de modelos de controle preditivo e de mudança de regime na otimização de portfólios.

2.1 Modelo de Média-Variância

Proposta por Markowitz (1952), a Moderna Teoria de Portfólio fornece as bases de como o investidor deve alocar seus recursos mediante as diversas opções de investimentos disponíveis no mercado, usando para tal, as informações de risco e retorno dos ativos. Segundo Rubinstein (2002), Markowitz foi o primeiro a formalizar matematicamente a ideia de diversificação, postulando que o investidor pode maximizar o retorno esperado de um portfólio enquanto minimiza a variância do retorno do portfólio. Essa escolha de carteira é feita, geralmente, resolvendo um problema de otimização quadrática, conhecido como Modelo de Média-Variância.

Conforme Elton, Gruber e Brown (2012), Markowitz forneceu uma caracterização completa da fronteira eficiente para *trade-off* entre risco e retorno, demonstrando que o risco individual do ativo não é o mais relevante para a tomada de decisão em investimentos, uma vez que as carteiras eficientes são formadas pela escolha de um ativo com base em sua interação com outros ativos da mesma carteira, bem como em sua contribuição para a carteira geral, e não com base em seu desempenho independente.

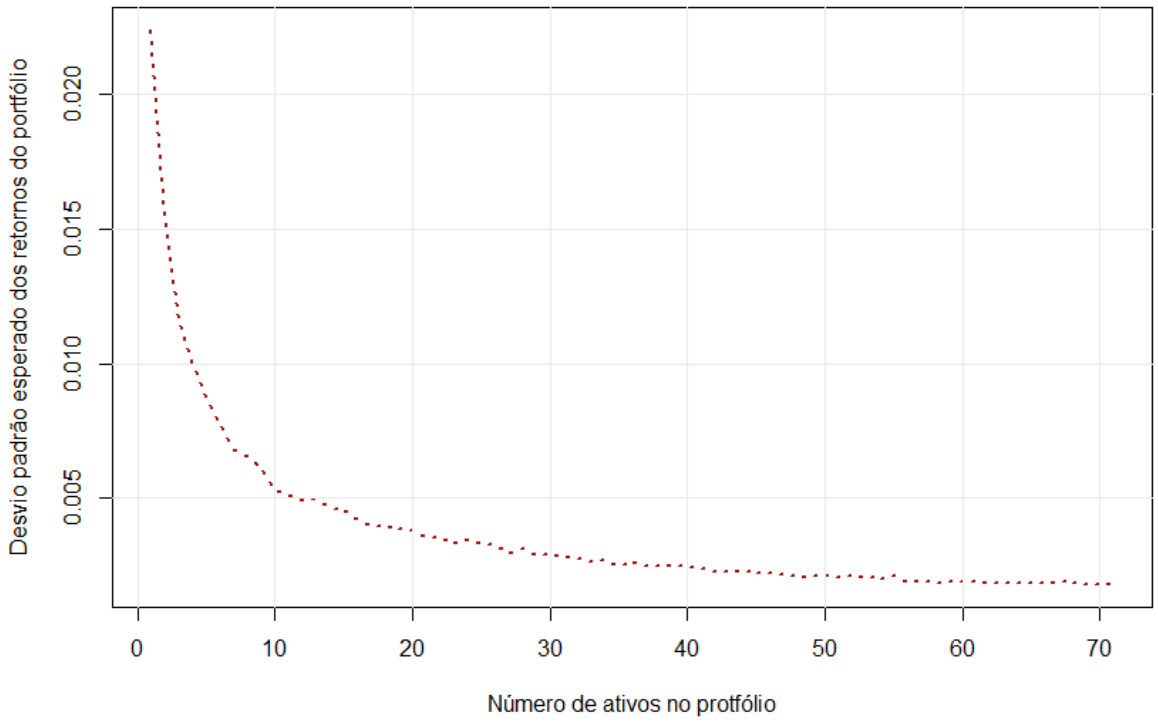
A Figura 2.1 ilustra a evolução do risco de um portfólio em função do número de ativos, a partir de carteiras de média-variância simuladas com dados dos retornos mensais de 194 ações negociadas na B3, de janeiro de 2010 a julho de 2020. O risco residual, não eliminado com diversificação, é o chamado risco sistêmico ou de mercado. O risco que pode ser eliminado é chamado de risco não sistêmico, específico, ou idiossincrático (Sharpe, 1964).

Assumindo um conjunto de n ativos com retornos futuros incertos $r_1, r_2, ..., r_n$, o retorno esperado do portfólio ($\mathbf{r}_p$) é linearmente dependente dos pesos w_i de cada ativo i, como representado em 2.1, onde o vetor de pesos (ω) representa a alocação para todos os ativos.

$$\mathbf{r}_p = w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}. \tag{2.1}$$

Considerando σ_i o desvio-padrão de r_i, ρ_{ij} o coeficiente de correlação entre os ativos i e j (para $i \neq j$), a matriz de covariância Σ é uma matriz simétrica $n \times n$, conforme apresentado na Equação 2.2.

Figura 2.1 – Efeito da diversificação no risco do portfólio para carteiras de média-variância simuladas.



Fonte: Elaboração própria.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Em que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ (para $i \neq j$). Todas as matrizes de covariâncias válidas são positivas semidefinidas ($\boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega} \geq 0 \ \forall \ \boldsymbol{\omega}$). Além disso, para que a matriz Σ seja inversível (uma condição comum em muitos modelos de otimização de portfólio), é necessário que ela seja positiva definida ($\boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega} > 0 \ \forall \ \boldsymbol{\omega} \neq 0$). Para uma carteira p, sua variância e o desvio-padrão dos retornos são dados por 2.3 e 2.4, respectivamente.

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega} \tag{2.3}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega}} \tag{2.4}$$

O desvio-padrão do retorno da carteira σ_p, também conhecido como volatilidade da carteira, é frequentemente usado como medida de risco (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Essa

escolha se baseia na suposição de que a volatilidade histórica é a melhor estimativa do risco esperado, ou seja, assume-se que o comportamento passado do retorno dos ativos é um bom indicador da incerteza futura. No entanto, essa abordagem é uma estimativa e, como tal, está sujeita a incertezas e limitações inerentes às flutuações de mercado.

Para Roman e Mitra (2009), o uso do desvio-padrão como medida de risco tem sido criticado, principalmente por sua natureza simétrica e pela falta de consistência com modelos axiomáticos de escolha, como a dominância estocástica. A Dominância Estocástica refere-se a uma relação de preferência entre duas distribuições de retornos, onde uma distribuição é considerada superior à outra com base nas preferências de um investidor avesso ao risco. Se uma distribuição domina estocasticamente outra, isso significa que a primeira é preferida em termos de utilidade esperada para todos os níveis de aversão ao risco. Além disso, o próprio Markowitz, ao revisitar seu estudo seminal, apontou as falhas dessa abordagem e incentivou o aperfeiçoamento do modelo (Markowitz, 1959, 1991).

Os pesos w_i são sujeitos às restrições impostas ao portfólio e o retorno esperado dos ativos, dado por 2.5.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Em que $\mu_i = E(r_i)$ para $i = 1, ..., n$. Assim, o problema de otimização do Modelo de Média-Variância é especificado como representado em 2.6.

$$\max_{\omega \in \Omega} \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\omega} - \lambda.\boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega} \tag{2.6}$$

Nesta equação da otimização de preferências quadrática, que deriva de uma função de utilidade exponencial negativa da riqueza sob a premissa de que os retornos seguem uma distribuição normal (Huang; Litzenberger, 1988), o parâmetro λ representa a aversão ao risco específica do investidor. Ele define o *trade-off* entre o risco e retorno esperado da carteira, sendo que um valor mais elevado de λ indica investidores com maior aversão ao risco. A notação $\omega \in \Omega$ significa que a escolha desses pesos deve pertencer a um conjunto viável de alocações (Ω), determinado pelas restrições de investimento.

Formulações alternativas deste problema são obtidas maximizando o retorno esperado sujeito a um limite superior na variância do portfólio (σ^2_{max}), ou minimizando a variância do portfólio sujeito a retorno mínimo esperado (R_{min}), como representado em 2.7 e 2.8.

$$\begin{aligned} &\max_{\omega \in \Omega} \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\omega} \\ &s.t.\ \ \boldsymbol{\omega}'\Sigma\boldsymbol{\omega} \leq \sigma^2_{max} \\ &\sum \boldsymbol{\omega} = 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ou

$$\begin{aligned} &\min_{\omega \in \Omega} \ \boldsymbol{\omega}' \Sigma \boldsymbol{\omega} \\ &s.t. \ \ \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\omega} \geq R_{min} \\ &\qquad \sum \boldsymbol{\omega} = 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nas equações acima, se o conjunto de restrições se caracterizarem como restrições lineares de igualdade e desigualdade, então tem-se um problema de programação quadrática.

2.1.1 Limitações e tendências do Modelo de Média-Variância

O Modelo de Média-Variância (MMV) é um pilar da teoria de portfólios, mas sua aplicação prática é limitada por uma série de deficiências documentadas, principalmente relacionadas às incertezas nos parâmetros de entrada do modelo.

Para analisar essas falhas, Staden, Dang e Forsyth (2021) propõem o uso do termo Erro de Especificação de Modelo (Misspecificação). Segundo esses autores, esse é o termo abrangente para quando o investidor desenvolve uma estratégia de investimento ótima com base em um 'modelo do investidor' (modelo escolhido para descrever a dinâmica dos ativos subjacentes), mas essa estratégia é implementada em um mercado que é, na realidade, governado por uma dinâmica potencialmente diferente (o 'modelo verdadeiro'). A otimização do problema MMV é feita assumindo implicitamente que a dinâmica especificada pelo investidor é uma descrição precisa da realidade. O Erro de Especificação de Modelo ocorre quando o modelo do investidor não corresponde ao modelo verdadeiro, seja em termos de parâmetros ou em termos dos tipos fundamentais de modelo.

Assim, as duas categorias principais de erros de especificação podem ser classificadas como: erro de especificação de categoria I (Erro de especificação Fundamental do Tipo de Modelo) e categoria II (Erro de especificação de Parâmetros).

O erro de estimação devido aos parâmetros dos modelos (Categoria II) tem sido extensivamente estudado. Chung et al. (2022), aprofundam a análise da natureza e do impacto desses erros de estimativa e ao examinar todas as informações da distribuição dos retornos, constataram que as correlações exibem padrões bem distintos em comparação com outros parâmetros do modelo Média-Variância (MMV). Os efeitos de erros nas médias, desvios-padrão e variâncias diminuem drasticamente à medida que o número de ativos aumenta, enquanto para as correlações, o comportamento é quase inverso. Além disso, os efeitos de erros nas médias e desvios-padrão parecem ter tendências de aumento linear com o período de estimação (T). Em contraste, o efeito dos erros nas correlações mostra uma tendência decrescente quando a magnitude do erro é pequena, parecendo quase irrelevante para T em outras situações. As variâncias também não demonstram relação com T. Adicionalmente, à medida que a magnitude do erro aumenta, o efeito dos erros nas médias, desvios-padrão e variâncias cresce mais

rapidamente do que o efeito dos erros nas correlações (Chung et al. 2022, p. 1902). Isso reforça a importância de utilizar procedimentos apropriados para capturar essas alterações.

Contudo, a distinção entre as categorias pode ser sutil. De Jong (2018) argumenta que a própria suposição do MMV de que os parâmetros são conhecidos com certeza no momento da otimização é, em si, uma falha fundamental. Nessa perspectiva, o que é tradicionalmente visto como um erro de estimação (Categoria II) poderia ser reinterpretado como um erro de especificação do modelo fundamental (Categoria I), pois o modelo falha em especificar a presença de incerteza do mercado.

Além dessas questões, a crítica à variância como medida de risco, por sua incapacidade de distinguir entre volatilidade positiva e negativa, é antiga. Já em 1952, Roy (1952) , com sua Teoria *Safety-First*, propôs que a principal preocupação do investidor é evitar retornos abaixo de um nível de “desastre", focando no risco de queda (*downside risk*) em vez da variação total.

Consequentemente, o Modelo de Média-Variância de Markowitz (1952) é visto hoje como uma ideia básica sobre a seleção ideal. No entanto, em mercados reais, a complexidade e imprevisibilidade passam a exigir requisitos mais específicos e dinâmicos. Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) e Zhang, Li e Guo (2018) mencionam que algumas extensões ao modelo tradicional ao Modelo de Média-Variância buscam:

1. incluir os custos de transação;
2. adicionar restrições que consideram diretrizes específicas de investimento e características institucionais, tais como restrições práticas referentes às regras de negociação;
3. controlar o impacto dos erros de estimativa nas previsões de risco e retorno das carteiras por meio de técnicas Bayesianas, otimização estocástica ou abordagens de otimização robusta, uma vez que as carteiras ideais são muitas vezes sensíveis aos erros de estimativa do valor e do desvio dos parâmetros amostrais;
4. incorporar efeitos intertemporais considerando estratégias de negociação multiperíodo, para representar os mercados financeiros constantemente dinâmicos (mudança nos níveis de incerteza).

Os custos de transação são importantes para a gestão de investimentos porque são um dos principais determinantes de seus retornos líquidos. Desta forma, desconsiderá-los pode levar a uma solução sub-ótima devido ao impacto que estes custos podem ter sobre os retornos ajustados ao risco realizado (Mansini; Ogryczak; Speranza, 2015). Um modelo pode contabilizar os custos de transação de diferentes maneiras e estas diferentes formas de contabilização têm sido amplamente estudadas (Woodside-Oriakhi; Lucas; Beasley, 2013; Valle; Meade; Beasley, 2014; Mei; DeMiguel; Nogales, 2016; Mei; Nogales, 2018; Babazadeh; Esfahanipour, 2019; González-Díaz et al. 2021; Mei; Zhu; Chen, 2022).

Uma forma de considerar o custo de transação no problema de otimização de portfólio é incluir penalidades na função objetivo. Estudos recentes tem considerado como base para o cálculo da penalização a distância entre as posições da carteira w no tempo t e $t + 1$ (Li; Uysal; Mulvey, 2022; Mei; Zhu; Chen, 2022). A distância de Manhattan (norma ℓ_1) é a distância em

valor absoluto e penaliza o número de negociações, enquanto a distância Euclidiana (norma ℓ_2) é a distância quadrática e penaliza o tamanho das negociações. Uma formulação que contempla tanto o número de negociações quanto o impacto no preço dado o volume é encontrado em Nystrup et al. (2019), conforme proposição 2.9.

$$\phi_t^{trade}(w_{t+1} - w_t) = k_1^T |w_{t+1} - w_t| + k_2^T (w_{t+1} - w_t)^2 \tag{2.9}$$

Onde k_1 e k_2 são vetores de fatores de penalização e os valores absolutos e quadrados são calculados elemento por elemento. Conforme os autores, existem outras possibilidades para a penalização dos custos de transação, tais como $(w_{t+1} - w_t)^T \Sigma_t (w_{t+1} - w_t)$ que captura o custo relacionado ao impacto no preço dos ativos devido à volatilidade do mercado e $|x|^{3/2}$, onde é assumido que o custo da transação cresce (aproximadamente) com a potência 3/2 do tamanho da transação, em valor financeiro x.

Os modelos baseados em restrições buscam, entre outros aspectos, incorporar características que são consideradas relevantes ao gestor de investimentos e à tomada de decisão. O próprio custo de transação pode ocorrer sobre a forma de restrições, assim como podem ser incorporados a perspectiva de lotes mínimos de negociação, limites de investimentos máximos ou mínimos, dentre outros (Mansini; Ogryczak; Speranza, 2014).

Kalayci, Ertenlice e Akbay (2019) realizam uma revisão dos modelos determinísticos e suas aplicações para otimização de portfólio de média-variância. Em seu estudo, eles apontam que, na formulação original, o Modelo de Média-Variância não atende às aplicações do mundo real, tornando necessário o uso de restrições adicionais para resolver problemas realistas, dentre as quais:

1. restrições de limites inferiores e/ou superiores para o peso de cada um dos ativos;
2. restrições de cardinalidade, definindo o número de ativos investidos na carteira;
3. restrições associadas aos custos de transação;
4. restrição de lote mínimo, garantindo que o valor investido em um título seja múltiplo do lote mínimo de negociação;
5. restrições de capitalização por setor;
6. restrição de volume de negócios, que define a rotatividade do ativo e sua liquidez.

O uso de restrições é defendido por Chen e Yuan (2016). Segundo os autores, a perda da otimalidade do modelo devido à imposição de uma restrição, como a imposição de restrição ao número de opções de investimento, pode ser compensada pela redução do erro de estimativa.

Um estudo recente de Conlon, Cotter e Kynigakis (2025) discute o papel dos custos de transação na função objetivo de mínima variância, que corresponde ao modelo de Média-Variância com o parâmetro de aversão ao risco (λ) tendendo ao infinito. O trabalho também analisa as propriedades de concentração dos portfólios resultantes, reforçando a importância dos modelos com restrições estendidas

A abordagem para o problema de portfólio sob a ótica da otimização robusta se baseia na proposição dos chamados modelos robustos, os quais buscam melhorar os diferentes tipos de

incertezas relacionadas aos parâmetros que alimentam os modelos de otimização (Pham; Wei; Zhou, 2022) por meio da definição da estrutura sobre os conjuntos de incerteza que fornecerão soluções tratáveis no processo de otimização, sendo as mais conhecidas a incerteza dos retornos esperados, a incerteza na matriz de covariância e o conjunto de incertezas conjuntas (Kim; Kim; Fabozzi, 2014).

Ademais, como apontado por De Jong (2018), em um mundo incerto, as carteiras são vulneráveis a choques inesperados nos preços, levando a uma necessidade dupla para gestão de portfólios, a de minimizar a variância e de maximizar a diversificação. Para a autora, o modelo de pesos Igualmente ponderada, do inglês, *Equally Weighted* (EW) (DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009), os modelos que assumem a abordagem de encolhimento da covariância (Ledoit; Wolf, 2003), o modelo de paridade de risco (Qian, 2005, 2011), o modelo de Black e Litterman (1992), dentre outros considerados menos sensíveis ao erro de estimativas e a concentração, são considerados uma generalização do problema de média-variância de Markowitz, quando esses modelos são avaliados sob diferentes níveis de incerteza.

Desta forma, considerando que a gestão de portfólio no mundo real é feita em um ambiente incerto e, geralmente, com a necessidade de considerar longos períodos de investimento, os modelos de período único podem ser sub-ótimos (Oprisor; Kwon, 2021). Isso ocorre em consequência dos efeitos intertemporais decorrentes de mercados financeiros dinâmicos (Chang; Chen; Zolotoy, 2017). Evidências empíricas apontam que a estrutura da volatilidade muda em função do estado do mercado (Campbell; Koedijk; Kofman, 2002; Ang; Timmermann, 2012; DeMiguel; Martín-utrera; Uppal, 2024). Para Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) assumir uma otimização de um portfólio sobre multiperíodos muda a percepção da gestão tradicional de uma visão estática para uma visão dinâmica, onde as carteiras passam a ser alvos móveis que buscam equilibrar o *trade-off* risco e retorno.

Apesar dos avanços na Moderna Teoria de Portfólio (MTP) e suas extensões para lidar com as incertezas e custos de transação, uma crítica central persiste, a suposição de que as preferências dos investidores e a própria forma de mensurar o risco são estáticas e invariantes ao longo do tempo. No entanto, a dinâmica dos mercados financeiros, com suas alternâncias entre períodos de estabilidade e turbulência, sugere que a aversão ao risco e a utilidade esperada dos investidores podem ser dependentes das condições do mercado e sua volatilidade, ou seja, estado-dependente (Jarrow; Li, 2021). Essa perspectiva, que será explorada mais adiante, aponta para a necessidade de medidas de risco e estratégias de alocação que se adaptem proativamente aos regimes vigentes.

Portanto, a estratégia ideal é aquela que consegue abarcar este conjunto de características descritas anteriormente e que, dada a complexidade do tema, continuam sendo estudadas e descritas ao longo do tempo.

2.2 Medidas de Risco de Perda

Antes do trabalho de Markowitz (1952), o risco financeiro era considerado um fator de correção aplicado ao retorno esperado, sendo os retornos ajustados ao risco estabelecidos de forma *ad hoc* (Szegö, 2002). Markowitz revolucionou essa abordagem ao propor a medição do risco associado à expectativa do retorno de cada investimento por meio da variabilidade em torno destes retornos, ou seja, a média e a variância. Para uma carteira de ativos, ele sugeriu que o risco fosse medido por meio da covariância entre os ativos. No entanto, essa abordagem trata o risco de forma simétrica, o que não captura adequadamente o impacto potencial de grandes perdas (riscos de cauda). Nesse contexto, surgiram as medidas de risco de perda, que oferecem uma visão mais realista das preocupações dos gestores ativos de investimentos.

Para Nawrocki (1999) as medidas de risco *downside* são uma melhoria em relação à teoria tradicional de portfólio, uma vez que as medidas de risco simétricas como as tratadas por Markowitz (1952) não apontam intuitivamente para o risco como um resultado indesejável, por penalizar desvios favoráveis (*upside*) da esperança do retorno igualmente aos desvios desfavoráveis (*downside*), o que resultou no estudo sobre quais medidas poderiam ser consideradas coerentes para mensurar o risco (Artzner et al. 1999; Delbaen, 2002; Mansini; Ogryczak; Speranza, 2015).

Além disso, a flexibilidade na escolha de diferentes medidas de risco permite que a análise vá além da abordagem quadrática tradicional proposta por Markowitz. Isso possibilita que os gestores ativos de investimento escolham medidas que estejam mais alinhadas às suas preferências de risco e às condições do mercado, como em cenários de alta volatilidade ou crises financeiras, onde medidas como o *Conditional Value at Risk* (CVaR) ou o *drawdown* podem ser mais apropriadas (Maier-Paape; Zhu, 2018).

Conforme Roman e Mitra (2009) a suposição de um risco assimétrico ou, similarmente, de *downside risk* constituem a base da Teoria Pós-Moderna do Portfólio (TPMP). A TPMP é considerada uma abordagem mais flexível, precisa e robusta para a construção de combinações ótimas de portfólio, uma vez que traz melhorias nos trabalhos fundamentais de Markowitz (1952) e Sharpe (1964) ao assumir o risco de *downside* e distribuições assimétricas de retorno (Rom; Ferguson, 1994; Lee; Eid Junior, 2018).

Segundo Huang e Ying (2013) a evolução da teoria do portfólio resultou em dois tipos básicos de metodologias de seleção de ativos. O primeiro baseia-se nas medidas de risco que medem diretamente os níveis de desvio do retorno esperado e indiretamente a perda de dinheiro dos investidores (modelos de variância média, semivariância média e desvio absoluto médio). Já o segundo tipo de metodologia se baseia nas medidas de risco que mensuram diretamente as perdas dos investidores (medidas de risco de cauda). As medidas mais investigadas na literatura do segundo tipo são *Value at Risk* e o *Conditional Value at Risk*. Contudo, mais recentemente, o risco de *drawdown*, também caracterizado como um risco de perda, tem ganhado atenção no contexto de otimização de carteiras (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005).

Assim, considerando que os gestores de investimentos geralmente estão mais preocupados com o risco de perda potencial do que com a variação geral da carteira (como medido pela variância), as medidas de risco de cauda ganham importância crescente, especialmente em cenários de crise onde as distribuições de retorno são altamente assimétricas e os eventos de cauda se tornam mais prováveis (Alexander; Baptista, 2002). Essa transição reflete uma evolução necessária na gestão de portfólio, buscando uma avaliação de risco mais alinhada com as reais preocupações dos investidores.

Conforme discutido por Elton, Gruber e Brown (2012), a TPMP se distingue por focar no *downside risk*, ou seja, o risco de um ativo performar abaixo de um retorno mínimo aceitável (γ) pelo investidor. Para quantificar este risco de forma sistemática, empregam-se as Medidas de Risco de Perda, Momentos Parciais Inferiores (LPM), cuja formulação geral é $LPM_n(\gamma) = E[max(0, \gamma - R)^n]$. A estrutura da LPM foi projetada para capturar diferentes dimensões da aversão à perda e a ordem n da medida permite calibrar a análise: 0 mede a frequência com que o ativo falha em atingir o alvo γ (*shortfall probability*); 1 calcula a magnitude média dessa falha (*expected shortfall*); 2 penaliza de forma quadrática as perdas, refletindo uma maior aversão a desvios negativos extremos e correspondendo à semivariância quando $\gamma = E[R]$. Este arcabouço permite uma análise de risco mais alinhada à psicologia do investidor e serve como base para a aplicação de critérios de decisão como a dominância estocástica.

Destaca-se que não existe uma única medida de risco que resuma todas as propriedades desejáveis de uma medida de risco "ideal", capaz de capturar plenamente todas as preferências dos investidores em todos os cenários de investimento (Ortobelli et al. 2005), mas isso não invalida a procura por aquela que tenha uma melhor representatividade destas preferências (Rachev et al. 2008; Roman; Mitra, 2009).

Nas subseções seguintes, são descritos os axiomas de coerência para as medidas de risco e apresentadas algumas medidas de *downside risk* consideradas na literatura de finanças e baseadas na probabilidade de perdas potenciais que um gestor ativo de investimento enfrentaria ao investir.

2.2.1 Axiomas de coerência

Segundo Righi e Ceretta (2014), a correta especificação de uma medida de risco é crucial para a gestão de risco em mercados e instituições. Isso levou à estruturação de um sólido arcabouço teórico, focado em definir as propriedades necessárias para que uma medida de risco seja considerada coerente, garantindo assim uma avaliação mais precisa e confiável dos riscos envolvidos no investimento.

Como apontado por Acerbi e Tasche (2002a) e Szegö (2002) o conceito de medidas de risco coerentes foi inicialmente proposto por Artzner et al. (1999) com a definição de quatro axiomas que devem ser satisfeitas para uma medida ser considerada uma de medição de risco coerente. Seguindo esta definição, qualquer medida que não satisfaça algum dos axiomas

produzirá resultados incoerentes e, desta forma, fornecerá uma avaliação errada dos riscos relativos, não devendo sequer ser denominada de medida de risco (Acerbi; Tasche, 2002a).

Os axiomas de Artzner et al. (1999) se referem às condições de otimização do risco e podem ser classificadas como: monotonicidade, homogeneidade, invariância de translação e subaditividade. Assim, considerando $\mathcal{G}$ é um conjunto de variáveis aleatórias que representam os resultados futuros (e.g., lucros ou perdas) de diferentes posições financeiras. Se $X \in \mathcal{G}$ é o resultado de uma posição, $\rho(X)$ denota o risco associado a essa posição. Sendo R o conjunto dos reais, a função $\rho : \mathcal{G} \to R$ é chamada uma medida de risco se atender a:

- Invariância por Translação (T): $\forall X \in \mathcal{G}$ e $\alpha \in R$, tem-se $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$.
- Subaditividade (S): $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{G}$, $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.
- Homogeneidade Positiva (PH): $\forall \lambda \geq 0$ e $\forall X \in \mathcal{G}$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
- Monotonicidade (M): $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ com $X_1 \leq X_2$, tem-se $\rho(X_2) \leq \rho(X_1)$

As implicações dos axiomas são: o axioma T, indica que na combinação de dois ativos em uma carteira, sendo um deles de ganho certo, haverá uma redução no risco da carteira na proporção da posição do ativo de ganho certo (α), ou na linguagem mais usual na literatura de portfólio, do ativo livre de risco; para o axioma S, a combinação de dois ativos com risco resultará em um risco menor ou igual à soma dos riscos individuais, seguindo o princípio da diversificação; no axioma PH, o tamanho da posição (λ) influencia diretamente o risco, devido a problemas que devem ser considerados o tempo para se desfazer da posição devido à liquidez e custos de corretagem; o axioma M representa que maiores retornos devem estar associado a maiores riscos.

Roorda, Schumacher e Engwerda (2005) adicionam um axioma à proposição de Artzner et al. (1999), o de consistência dinâmica, para a representação em termos de coleções de medidas de probabilidade multiperíodo. O axioma adicionado diz que, se uma posição é aceitável no próximo instante de tempo em todos os cenários possíveis, então esta posição também é aceitável no tempo corrente.

2.2.2 *Value at Risk*

O Valor em Risco (em inglês, *Value at Risk* - VaR) é a medida de *downside risk* mais conhecida e difundida no mercado (Maciel, 2011). Elaborado pelo banco J.P. Morgan (Longerstaey; Spencer, 1996), o VaR assume que o retorno de um ativo em determinado intervalo de tempo não pode ser conhecido com antecedência, sendo possível apenas medir uma perda máxima a qual um ativo ou portfólio está exposto. Sendo assim, pode ser definido como a pior perda prevista em um horizonte de tempo, que não excederá a um nível de confiança pré-estabelecido (Jorion, 2006). Em outras palavras, é uma medida quantílica que controla o risco de cauda da riqueza terminal que permite integrar e comparar diversos ativos em diferentes mercados, proporcionando controles com estabelecimento de limites (Cui et al. 2019).

Matematicamente, o Valor em Risco (VaR) para um nível de confiança $\alpha \in (0, 1)$ é

definido como o quantil de ordem α da distribuição de perdas L. Ele representa o menor valor v tal que a probabilidade de a perda ser menor ou igual a v seja ao menos α.

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) \tag{2.10}$$

Onde F_L^{-1} é a função quantílica (inversa da função de distribuição acumulada) da perda L. A Equação 2.10 implica que a probabilidade de a perda exceder VaR_α é de exatamente $1-\alpha$, ou seja, $P(L > VaR_\alpha(L)) = 1-\alpha$.

A estimação do VaR pode ser paramétrica, na qual se visa ajustar uma distribuição conhecida nos retornos passados dos ativos, ou não paramétrica, onde a estimação do VaR é dada pela simulação histórica e técnicas computacionalmente intensivas baseadas em séries históricas como *bootstrapping* ou mesmo simulação de Monte Carlo (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014).

A vantagem da abordagem não paramétrica é não necessitar de nenhuma hipótese a respeito da distribuição dos retornos, uma vez que ela determina o risco financeiro diretamente da distribuição empírica dos retornos passados por meio da extração dos percentis de uma amostra de retorno, dado a um nível de significância % pré-determinado. A única hipótese assumida é que o histórico passado dos retornos reflete, de maneira adequada, o que deverá ocorrer no futuro (Morettin; Singer, 2022).

O VaR paramétrico já depende de uma aferição precisa da probabilidade na cauda da distribuição dos retornos, necessitando de dois parâmetros básicos a serem escolhidos: o nível de confiança α (ou nível de significância $1-\alpha$), onde $\alpha \in [0,1]$, e o horizonte de tempo do investimento. Com a distribuição, é possível determinar o intervalo de confiança e assim obter a medida. Sua determinação depende de técnicas estatísticas de estimação, introduzindo incertezas em seu cálculo.

A distribuição Normal é a mais usual, porém observa-se que ela subestima os efeitos das caudas pesadas. Como alternativa, podem-se utilizar outras distribuições como a distribuição *t-Student*, que tem mais pesos nas caudas. Assumindo que a função de distribuição de probabilidade segue uma distribuição Normal, o VaR será dado pela formulação 2.11.

$$VaR_\alpha = P_0 \cdot (z_\alpha \sigma_p - \mu_p), \tag{2.11}$$

em que, $P \sim (\mu_p, \sigma_p^2)$ são os retornos da carteira, P_0 o valor inicial e z_α é o α-quantil da distribuição normal padrão (e.g., para um nível de significância de 0.05, $z_{0.95} \approx 1.645$).

A Equação 2.11 apresenta o cálculo do VaR paramétrico sob a hipótese de normalidade dos retornos. Para horizontes de tempo curtos, onde o retorno esperado μ_p pode ser considerado próximo de zero, a fórmula pode ser simplificada para:

$$VaR_\alpha \approx P_0 \cdot z_\alpha \sigma_p \tag{2.12}$$

Com os trabalho de Artzner et al. (1999) sobre medidas coerentes de risco, são introduzidos os axiomas que devem ser obedecidos pelas medidas de risco e, por meio destes,

Acerbi e Tasche (2002b) demonstram que o VaR viola o princípio da subaditividade, não podendo, desta forma, ser considerado uma medida coerente de risco. Os autores argumentam que, ao violar este axioma, a diversificação pode produzir um aumento do VaR do portfólio.

De acordo com Maciel (2011) o VaR recebe críticas não apenas por não ter condição de subaditividade, mas também por não capturar a magnitude de perda caso essa ocorra. Essas críticas resultaram na proposição do *Conditional-Value-at-Risk* (CVaR), também conhecido como *Expected Shortfall* (Rockafellar; Uryasev, 2000)

Além disso, alguns trabalhos empíricos apontam um desempenho indesejado do VaR na alocação de ativos. Basak e Shapiro (2001) examinam o problema da maximização da utilidade esperada sob uma restrição que envolve o VaR, concluindo de que os agentes que usam esta medida para gerenciar o risco geralmente optam por uma maior exposição a ativos arriscados do que agentes que não gerenciam risco, o que acarretaria uma maior volatilidade do mercado de ações. Os autores sugerem que, na presença de grandes perdas, os investimentos cujo gerenciamento de risco é baseado em VaR apresentarão perdas maiores.

2.2.3 *Conditional Value at Risk*

O CVaR é uma medida de risco coerente segundo os axiomas de Artzner et al. (1999) e amplamente disseminada na comunidade financeira. Consequentemente, na literatura acadêmica são observadas várias abordagens de otimização com o CVaR. Em Rockafellar e Uryasev (2000), o CVaR é proposto como uma medida de risco para a carteira em substituição à variância, onde os autores propõem um problema de otimização convexa para calcular o portfólio ideal de CVaR. Em Rockafellar e Uryasev (2002), os autores apresentam um conjunto de pequenas modificações sobre o CVaR demonstrando sua aplicabilidade em distribuições com saltos. Alexander e Baptista (2004) compararam o uso do VaR e CVaR como componentes de restrições em um Modelo de Média-Variância, sugerindo que a restrição CVaR é mais eficaz do que uma restrição VaR para controlar riscos para agentes com maior aversão ao risco.

O CVaR mede a perda esperada média quando os retornos de um portfólio estão abaixo de uma potencial perda financeira pré-estabelecida ou de um Valor em Risco. Desta forma, o CVaR incorpora informações sobre o VaR e sobre as perdas que excedem o VaR. Em outras palavras, o CVaR controla a probabilidade de uma perda ocorrer e captura a magnitude da perda se ela ocorrer (Maciel, 2011).

Seja p um intervalo de probabilidade acumulada com $p \in [0, 1]$, para um nível de confiança α, o CVaR é a média de todas as perdas que se encontram na cauda de $(1 - \alpha)\%$ da distribuição, ou seja, o CVaR é definido como a expectativa condicional das perdas que excedem o VaR no nível de confiança α. Em outras palavras, o CVaR representa a média das piores perdas, assumindo que a perda ultrapassou o limite imposto pelo VaR_α. Para distribuições contínuas, o CVaR pode ser expresso por:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)] \tag{2.13}$$

Alternativamente, o CVaR pode ser interpretado como a média dos quantis superiores à ordem α, ou seja:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \text{VaR}_p(L), dp \tag{2.14}$$

Essa formulação evidencia o CVaR como uma média ponderada dos valores em risco mais extremos da distribuição de perdas, tornando-o uma medida sensível à cauda e, portanto, mais conservadora e coerente do que o VaR.

Rockafellar e Uryasev (2000, 2002) demonstraram que o CVaR pode ser computado resolvendo um problema de otimização convexo auxiliar no qual o VaR não precisa ser conhecido com antecedência. Assim, quando as incertezas são modeladas por variáveis aleatórias discretas com realizações finitas, esse problema de otimização convexa auxiliar degenera-se para um problema de programação linear, que pode ser tratado de forma eficiente.

Um nível de significância menor representa uma preocupação mais elevada do investidor com perdas. Portanto, um investidor que utiliza $\alpha = 99\%$ (focando no 1% das piores perdas) é considerado mais avesso ao risco do que um que utiliza $\alpha = 95\%$ (focando nos 5% das piores perdas).

2.2.4 *Drawdown risk*

Segundo Nystrup et al. (2019), momentos no mercado em que são observadas grandes perdas desafiam a tolerância financeira e psicológica dos investidores, podendo levar a um comportamento de fuga do mercado e à demissão de gestores de investimento. Além disso, um investimento que aumenta constantemente de valor será provavelmente percebido de forma diferente de um investimento com movimentos de preços voláteis, mesmo que apresentem o mesmo retorno acumulado para um dado período de investimento. Neste sentido, Geboers, Depaire e Annaert (2022) realizam uma revisão a respeito de medidas de *drawdown risk* e apontam para a importância destas medidas no processo de decisão relacionada à gestão de risco e otimização de carteiras, uma vez que essa medida captura esse movimento (trajetória) dos preços.

O conceito de *drawdown* pode ser utilizado para expressar uma perda relevante no valor de um ativo, investimento ou portfólio, caracterizando-se como uma medida popular para avaliação das carteiras entre os gestores, que tem ganhado atenção devido às recentes quedas dos mercados (Chen et al. 2015; Almahdi; Yang, 2017). Assim, o processo de *drawdown* tem sido objeto de considerável interesse para modelagem financeira e na construção de medidas de risco/desempenho tratáveis e dependentes da trajetória.

Numericamente, um *drawdown* corresponde ao retorno negativo observado entre um máximo local (pico) e o próximo mínimo local (vale) (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005). Assim, uma série temporal de *drawdowns* D_i fornece, a cada ponto i, a perda incorrida em relação ao máximo anterior. O peso atribuido à D_i e janela temporal considerada para identificação entre o máximo e mínimo, vão determinar as propriedades das medidas de *drawdown* (Korn; Möller; Schwehm, 2022).

Destaca-se que, embora grandes perdas sejam mais frequentes do que um evento raro, focar somente em eventos de cauda na construção de um portfólio poderá resultar em um desempenho inferior ao longo do tempo (Zhu et al. 2020), fato que sugere a necessidade da avaliação da adequação da medida de risco em função do regime de volatilidade do mercado. Em períodos de estresse do mercado caracterizados por maiores níveis de volatilidade, o risco de *drawdown* pode ser mais adequado, enquanto em períodos normais outras medidas podem ser consideradas mais apropriadas. Essa composição de risco dependente do regime pode fornecer uma estratégia com equilíbrio entre o risco-retorno superior ao longo do tempo comparativamente a uma estratégia que assuma um risco único durante todo o período de investimento.

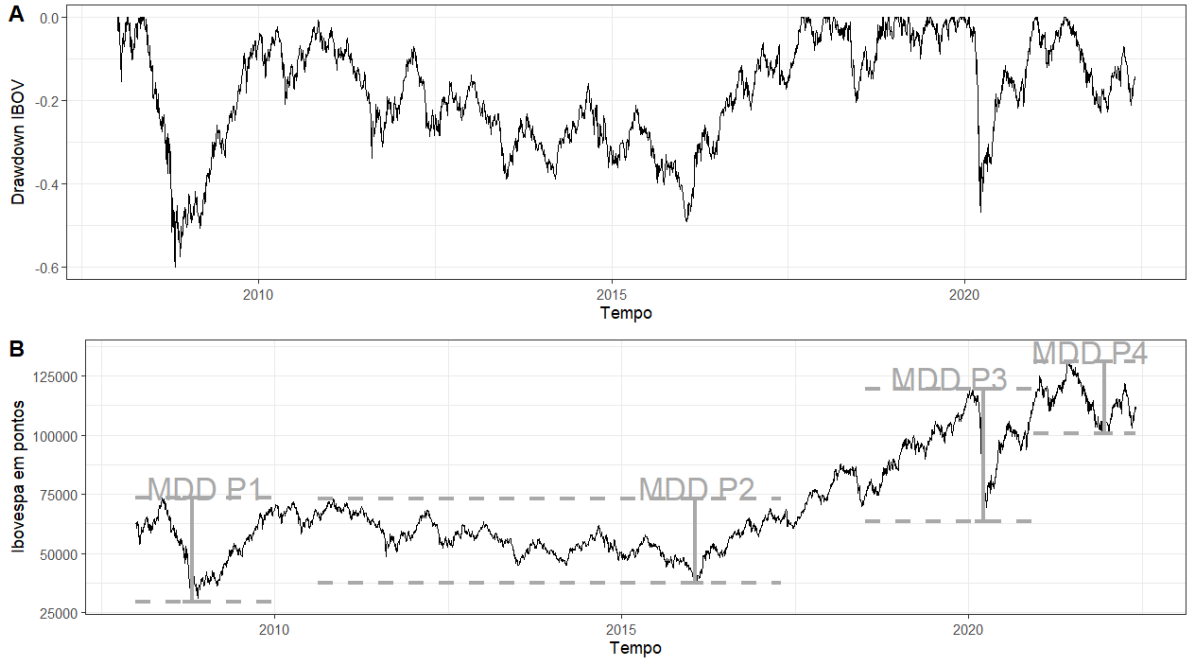
A distribuição de *drawdown* (A) e os pontos de *drawdown* máximos (B) para o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa), no período de 2008 a 2022, podem ser observados na Figura 2.2. Nela, MDD P1, MDD P2, MDD P3 e MDD P4 são períodos temporais escolhidos para exemplificar o máximo *drawdown*, correspondendo a outubro de 2008 (perda de 60%); a janeiro de 2016 (perda de 48%); a março de 2020 (perda de 47%) e a dezembro de 2021 (23%); respectivamente.

Ressalta-se que o tempo de queda e recuperação do Máximo *Drawdown* (MDD) também é uma informação relevante. Como pode ser observado no Painel B da Figura 2.2, durante o período da crise da Covid-19 (MDD P3) a velocidade com que a série atingiu o vale histórico local foi mais rápida do que a observada na crise do *Subprime* (MDD P1). A Figura 2.3 ilustra esta interpretação, em que o pico denota o início do processo de perda máxima (MDD), o fundo denota a primeira vez que o MDD é atingido, as linhas tracejadas na vertical representam o momento temporal de cada um destes eventos, e a reta horizontal mostra o tempo de recuperação deste processo.

As medidas de *drawdown* quantificam o risco penalizando as perdas de ganhos anteriores e, desta forma, capturam aspectos importantes do que os investidores consideram como 'risco', incluindo aspectos psicológicos de arrependimento (Korn; Möller; Schwehm, 2022; Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

Muitos autores apontam que as medidas de *drawdowns* são relevantes por serem de fácil compreensão, por serem conhecidas e usadas no dia a dia do mercado, por fornecerem uma exemplificação do efeito das correlações nas variações dos preços e por serem medidas de risco dependente da trajetória, o que as distingue de medidas como a volatilidade, VaR e CVaR (Grossman; Zhou, 1993; Cvitanic; Karatzas, 1995; Brandi; Mendes, 2004; Chekhlov; Uryasev;

Figura 2.2 – Ilustração de *drawdowns*.



Nota: O painel A, superior, representa a distribuição de *drawdown*. O painel B, inferior, é a série dos preços de fechamento do Ibovespa.
Fonte: Elaboração própria.

Zabarankin, 2004; Leal; Melo Mendes, 2005; Alexander; Baptista, 2006; Reveiz; León, 2010; Baghdadabad, 2015; Goldberg; Mahmoud, 2017; Mendes; Lavrado, 2017; Choi, 2021; Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

O trabalho de Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2005) examina as propriedades de várias medidas de *drawdown*, introduzindo a ideia de *drawdown* condicional, definido como a média de uma porcentagem das piores perdas da carteira, dado um intervalo assumido.

Korn, Möller e Schwehm (2022) apontam que existem diferentes medidas de *drawdown*. Geboers, Depaire e Annaert (2022) classificam as medidas de *drawdown* em termos de:

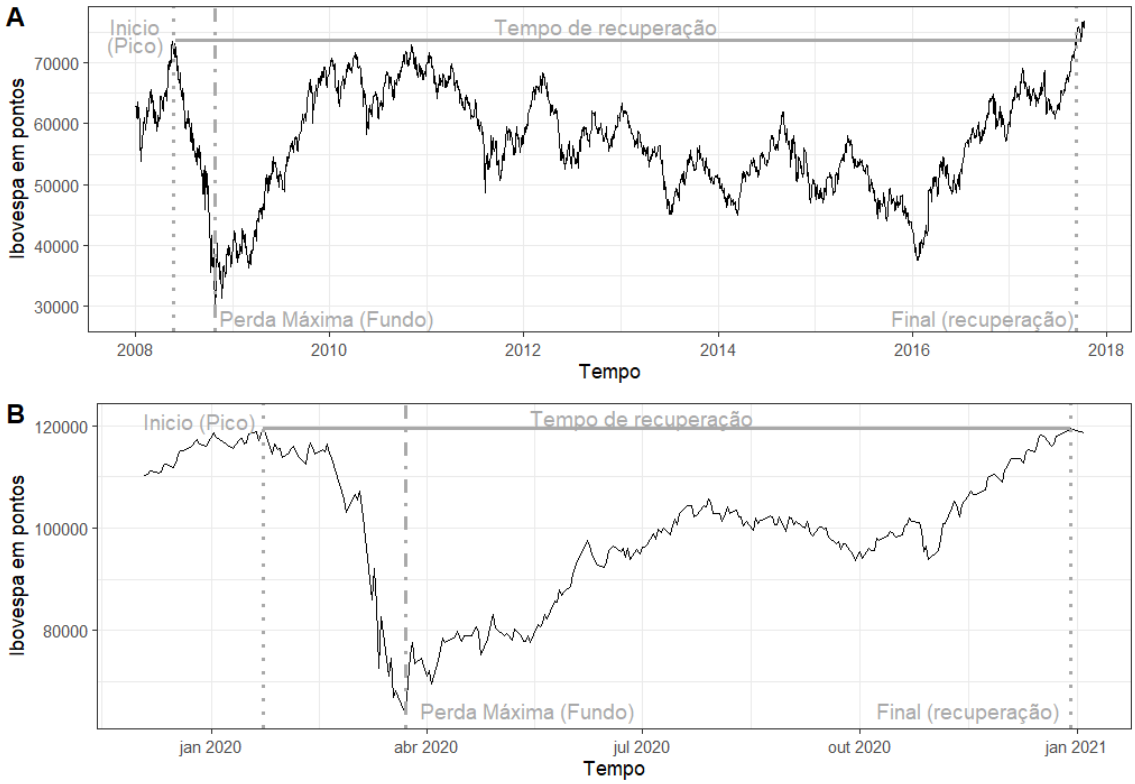
i. magnitude:
   - perda máxima entre dois pontos (*max loss*);
   - puros, definidos como a diferença entre um máximo e um mínimo local (*loc max vs loc min*).

ii. natureza: medidas de riscos e medidas de desempenho.

Dessa forma, observa-se que não há apenas uma única maneira de se considerar o risco de *drawdown*, mas sim uma família de medidas, cada qual com características próprias que capturam diferentes aspectos da trajetória dos retornos.

A formulação geral proposta por Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2004, 2005), denominada *Drawdown* Condicional, do inglês *Conditional Drawdown* (CDD), representa uma classe paramétrica de medidas, definido genericamente como a média dos piores $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ drawdowns. Dependendo do valor do parâmetro α, o CDD se especializa em

Figura 2.3 – Ilustração da duração de um máximo *drawdown*.



Nota: O painel A, superior, representa o período do MDD P1 da Figura 2.2. O painel B, inferior, representa o período do MDD P3 da Figura 2.2.
Fonte: Elaboração própria.

diferentes métricas: quando $\alpha = 1$, ele se reduz ao máximo *drawdown*; quando $\alpha = 0$, corresponde ao *Drawdown* Médio, do inglês *Average Drawdown* (ADD) (média dos *drawdowns*); e, para valores intermediários de α, resulta no CDaR, que mede a média dos piores *drawdowns* que excedem o quantil associado a α.

Complementarmente, Goldberg e Mahmoud (2017) propuseram o *Drawdown* Esperado Condicional, do inglês *Conditional Expected Drawdown* (CED), que calcula a expectativa condicional do máximo *drawdown* além de um determinado nível crítico, oferecendo uma medida que integra tanto a frequência quanto a severidade das quedas extremas.

Outra abordagem, apresentada por Möller (2018), é o *Drawdown* de final de período (eopDD), que mede o *drawdown* entre o pico e o valor final do portfólio no horizonte de investimento, sendo particularmente útil para capturar perdas não recuperadas ao fim do período.

Mais recentemente, Ding e Uryasev (2022) propuseram o Perda Esperada Relativa ao *Drawdown*, do inglês *Expected Regret of Drawdown* (ERoD), uma medida que combina o tamanho do *drawdown* com a aversão comportamental ao arrependimento, buscando capturar o desconforto psicológico que grandes perdas provocam nos investidores.

Essas diferentes formulações, sistematizadas por autores como Korn, Möller e Schwehm (2022) e Geboers, Depaire e Annaert (2022), ilustram a diversidade de perspectivas para

avaliação do risco de *drawdown*, reforçando a importância da escolha criteriosa da métrica de risco de acordo com o perfil do investidor e com o ambiente de mercado vigente.

Para o máximo *drawdown* considera-se a maior diferença entre um pico e um vale. É uma medida usual e simples, mas considerada, isoladamente, limitada, ao focar apenas em um número específico relacionado ao caminho do preço específico (Geboers; Depaire; Annaert, 2022). Na prática, é uma medida popular como indicador de risco de investimentos em fundos e entre analistas, utilizada como uma medida de desempenho ajustada ao *drawdown* máximo, como o Índice Calmar, de Sterling e de Burke (Goldberg; Mahmoud, 2017).

Como apontado por Möller (2018), todas as medidas de *drawdowns* são derivadas da distribuição de *drawdowns*. Contudo, conforme a investigação realizada por estes autores, considerando as medidas de Máximo *drawdown* (MDD), *Drawdown* Condicional-at-Risk (CDaR), *Drawdowns* Esperado Condicional (CED) e *Drawdown* de fim de período (eopDD), os efeitos dos momentos de retorno sobre estas medidas diferem entre si, tornando a escolha por uma destas medidas uma decisão não aleatória. Destaca-se que embora os autores tenham comparado os efeitos dos momentos da distribuição sobre estas medidas, nenhuma análise foi realizada para as diferenças entre estas medidas no contexto de portfólios.

Nesta mesma linha, Korn, Möller e Schwehm (2022) ao avaliarem o uso de diferentes medidas de *drawdowns* para identificar a habilidade de gestores de portfólios, concluem que, embora existam similaridades, elas não são todas iguais. Assim, o *drawdown-risk* não é uma única medida, mas uma classe de medidas (Masala; Petroni, 2023), que medem e fornecem características distintas umas das outras, o que pode resultar em diferentes resultados no processo de alocação de ativos, tornando a sua seleção uma escolha não aleatória.

Os estudos que utilizam o risco de *drawdown* no processo de alocação (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005; Alexander; Baptista, 2006; Pospisil; Vecer, 2010; Reveiz; León, 2010; Chen et al. 2015; Goldberg; Mahmoud, 2017; Almahdi; Yang, 2017; Nystrup et al. 2019), sugerem que essas medidas são mais adequadas às reais preocupações dos investidores, uma vez que estes optam por controlar, em algum nível, a persistência do risco de perda, mesmo que isso implique em algum sacrifício no desempenho do portfólio (Fleming; Kirby; Ostdiek, 2003).

Baseando-se nos estudos expostos anteriormente, observa-se que a inadequação da variância como métrica de risco impulsionou o desenvolvimento de medidas focadas no risco de perda (downside risk). A literatura financeira consolidou duas abordagens principais com naturezas fundamentalmente distintas. De um lado, medidas baseadas em quantis da distribuição de perdas, como o Conditional Value-at-Risk (CVaR), que mensura a perda esperada dado que ela ultrapassou um determinado limiar (Rockafellar; Uryasev, 2000). De outro, medidas dependentes da trajetória, notadamente a família de métricas de *drawdown*, que focam especificamente na magnitude e persistência de perdas acumuladas a partir de um pico de riqueza (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005; Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

A distinção entre essas duas classes já é, por si só, uma fonte de resultados potencialmente

divergentes na alocação de ativos. Essa heterogeneidade fundamental implica que a escolha de uma ou outra medida no problema de otimização não é uma decisão trivial. Uma vez que cada medida reflete uma filosofia distinta de gestão de risco, é razoável esperar que sua minimização conduza a estruturas de portfólio significativamente diferentes. Estes apontamentos fundamentam a primeira hipótese desta pesquisa:

H1: *As medidas de risco de cauda capturam diferentes aspectos do histórico das séries de retornos e, consequentemente, influenciam de maneira distinta as alocações de ativos*.

Contudo, a constatação de que diferentes medidas de risco levam a diferentes alocações (H1) levanta uma questão subsequente, a da inexistência de uma única medida de risco 'ótima' para todos os ciclos de mercado e regimes de volatilidade aos quais os investidores são expostos ao longo de um investimento. A literatura sobre os axiomas de coerência (Artzner et al. 1999) estabeleceu um padrão de qualidade para as medidas, mas mesmo entre as coerentes, como o CVaR e certas formas de *drawdown*, a adequação aos interesses do investidor pode variar a depender das condições do mercado.

A dinâmica dos mercados financeiros, com suas alternâncias entre períodos de estabilidade e turbulência, sugere que as preferências de risco do investidor não são estáticas. O conceito de função de utilidade estado-dependente (Jarrow; Li, 2021) formaliza essa ideia, postulando que a aversão a certos tipos de risco (como perdas acumuladas) se intensifica em regimes de volatilidade específicos. Ignorar essa dinâmica e adotar uma única medida de risco para todos os cenários pode constituir um erro de especificação do modelo (Categoria I) (Staden; Dang; Forsyth, 2021), onde o modelo de otimização não reflete a verdadeira função de utilidade do investidor. Essa perspectiva justifica a investigação de estratégias que adaptem a gestão de risco ao regime de mercado vigente, o que nos leva à necessidade de modelar essas mudanças de estado.

2.3 Modelo Oculto de Markov

Compreender o comportamento de um mercado ao longo do tempo e suas implicações sobre as estratégias de investimento é altamente relevante para compreender os riscos incorridos e para a construção de carteiras (Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

Conforme Ang e Bekaert (2004), estratégias de seleção de portfólio que consideram a possibilidade de mudança de regime permitem maior adaptabilidade aos movimentos observados no mercado financeiro, visto que, na maioria das vezes, eles correspondem com certa precisão a diferentes períodos de regulação, políticas e outras mudanças seculares, todos com potencial de afetar o desempenho dos investimentos.

Nas últimas décadas, cresceu o interesse nos períodos de alta volatilidade e em relação à assimetria negativa na distribuição de retornos de ações em cenários de quedas acentuadas

no mercado (Habib; Hasan; Jiang, 2018). Existem evidências de que os períodos de alta volatilidade, como em períodos de crises, tendem a ampliar a aversão ao risco, levando os investidores a uma maior chance de saída do mercado (Szczygielski et al. 2022), algo que pode ser prejudicial tanto para o investidor quanto para o próprio mercado (Tu, 2010). Ademais, quando quase todos os ativos perdem repentinamente seu valor nominal em uma queda de mercado, a diversificação construída sobre pressupostos de risco em condições normais do mercado não funciona, desafiando a tolerância financeira e psicológica do investidor (Nystrup et al. 2019; Zhu et al. 2020).

Assim, após as recentes crises financeiras, cresce a necessidade de mensurar adequadamente os riscos. Essa necessidade é reforçada tanto por acordos regulatórios (como os da Basileia) quanto pela própria dinâmica dos mercados. Mensurar adequadamente o risco equivale a conseguir capturar corretamente as perdas potenciais incorridas pelos investidores, considerando os possíveis estados do mercado. Um estado ou regime é caracterizado como um período que persiste por algum tempo e por uma distribuição específica dos dados, ou seja, caracterizado por diferentes propriedades estatísticas dos retornos de ativos. A distribuição pode ser modelada como uma função de um conjunto de parâmetros, e os próprios parâmetros podem mudar quando o regime muda (Zucchini; MacDonald, 2009; Tu, 2010).

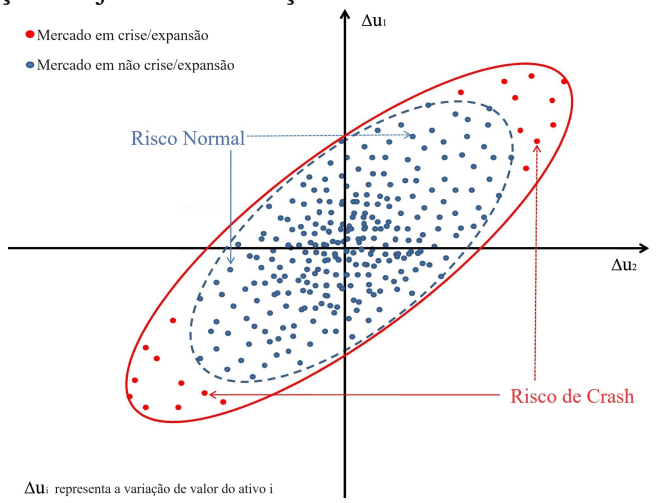
Desta forma, assumindo que o mercado pode ter diferentes estados e que estes se alternam entre períodos de alta e baixa volatilidade, é possível considerar esta dinâmica do mercado com uso de Cadeias de Markov, técnica que também recebe o nome de mudança de regime. Essa estratégia tem como potencial permitir a seleção de portfólio em um processo dinâmico e flexível, o que é desejável pelos investidores, uma vez que assumir uma estratégia de diversificação baseada somente em cenários de alta volatilidade ou de baixa volatilidade do mercado não é eficiente (Zhu et al. 2020). Se um investidor for muito conservador em cenários de normalidade do mercado, ele poderá comprometer potenciais oportunidades de investimento, por outro lado, talvez em um cenário de estresse do mercado, um maior conservadorismo se faça necessário.

A Figura 2.4 ilustra uma distribuição conjunta para a variação de valor de dois ativos hipotéticos, com objetivo de representar o risco desses ativos em um mercado de baixa volatilidade (normalmente associado ao *bullish*) e em um mercado de alta volatilidade (normalmente associado ao *bearish*) (Lewin; Campani, 2024).

Recentemente, muitos estudos têm explorado modelos de alocação dinâmica com menor custo computacional, utilizando o modelo oculto de Markov (*Hidden Markov Model* - HMM) como gerador de regimes. O HMM é particularmente eficaz porque permite a modelagem de transições entre regimes que regem um comportamento ou fenômeno que não são observáveis diretamente, sendo útil no contexto da área de finanças, por permitir capturar de forma dinâmica as mudanças nas condições de mercado e seus regimes de volatilidade (Bae; Kim; Mulvey, 2014; Nystrup; Madsen; Lindström, 2018; Nystrup et al. 2019; Ling; Sun; Wang, 2020; Uysal; Mulvey, 2021; Fons et al. 2021; MacLean; Yu; Zhao, 2022; Peng; Kim; Mittnik, 2022).

Um Modelo Oculto de Markov (HMM) assume duas séries: (S_t), é um processo de

Figura 2.4 – Distribuição conjunta das variações de valor de dois ativos.



Fonte: Zhu et al. (2020, p.3)

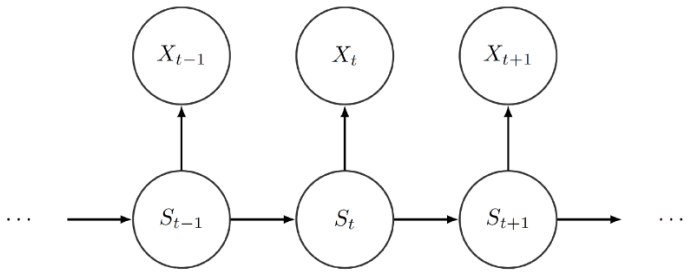
Markov de primeira ordem com estados latentes (não observáveis) e (X_t), uma série de variáveis observáveis (Nystrup et al. 2015). Assim, em um HMM, a distribuição das observações X_t dependerá somente do estado de uma cadeia de Markov subjacente e não observável.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_t|S_{1:T}, X_{t-1}) & = \mathbb{P}(X_t|S_t) \\ \mathbb{P}(S_t|S_{1:t-1}) & = \mathbb{P}(S_t|S_{t-1}) \end{cases} \tag{2.15}$$

No contexto de finanças e, em particular, nesse estudo, (S_t) representa os regimes de volatilidade ocultos, enquanto (X_t) são as diferentes medidas de volatilidade em torno dos retornos dos ativos observados pelos investidores.

A Figura 2.5 ilustra como é a estrutura HMM, onde a observação X_t depende do estado atual S_t, mas não depende de observações ou estados anteriores, cujos estados latentes compreendem informações sobre o ambiente onde o modelo é aplicado.

Figura 2.5 – Estrutura de dependência do HMM.



Fonte: Zucchini e MacDonald (2009, p.30)

A principal vantagem é que este modelo permite traçar a evolução dos estados ocultos

indiretamente, com base na observação de $(X_t)_{t=0}^{T}$, utilizando algoritmos recursivos eficientes para calcular a estimativa do estado oculto, conforme apresentado na Equação 2.16.

$$\hat{S}_t = E(S_t|X_j, j \leq t) \qquad t = 0, ..., T. \tag{2.16}$$

Assim, em cada tempo $t = 0, ..., T-1$, o vetor de probabilidade $\hat{S}_t$ descreve a distribuição de S_t condicionada às observações passadas $(X_j)_{j=0}^{t}$.

Assim, um HMM é caracterizado por cinco componentes chave:

1. É dito sem memória, pois a distribuição condicional dos estados futuros depende apenas do estado atual, não de todo o histórico

$$P(S_{t+1})|S_t, S_{t-1}, ..., S_1) = P(S_{t+1}|S_t)$$

2. A sequência de símbolos observados é dada por X_t, t $\in N^+$.
   X_t pode ser uma variável aleatória discreta ou contínua. No caso discreto assumimos $X_t \in$ 1, 2,. . . , M.
3. Contém uma matriz de transição de estados ocultos $A = (a_{ij})_{N\times N}$, onde

$$a_{ij} = P(S_{t+1} = j|S_t = i) \text{ e } \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1.$$

4. A distribuição de probabilidade condicional das observações dado os estados ocultos $P(X_t|S_t)$ é conhecida como probabilidades de emissão. Quando X_t é discreto, $B = (b_j(k))_{N\times M}$, onde

$$b_j(k) = P(X_t = k|S_t = j) \text{ e } \sum_{k=1}^{M} b_j(k) = 1.$$

5. A distribuição inicial de estados ocultos $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$ é dada por,

$$\pi_i = P(S_1 = i),\ 1 \leq i \leq N.$$

Observe que as probabilidades de transição de estado e as probabilidades de emissão não variam com o tempo. Diante do exposto, assumindo dois estados, a matriz de probabilidade de transição será dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} & a_{22} \end{bmatrix},$$

onde $a_{11} = P(S_t = 1|S_{t-1} = 1)$ e $a_{22} = P(S_t = 2|S_{t-1} = 2)$. Para qualquer período t, X_t segue uma distribuição normal associada ao estado S que prevalece em t. No período $t + 1$, X_{t+1} o regime pode permanecer o mesmo (i.e., manter-se no estado corrente) e, portanto, seguir a probabilidade de transição dada por a_{11} ou a_{22}, ou pode mudar para outro regime com probabilidade de transição associada a $1 - a_{11}$ ou $1 - a_{22}$, respectivamente.

Considerando λ = (A, B π) os parâmetros do modelo. O HMM permite responder a três questões:

1. Como calcular a probabilidade da sequência X_t ter sido produzida por λ; $P(X|\lambda)$?
2. Dado X_t e $lambda$, como escolher de forma otimizada uma sequência de estados que melhor explique as observações?
3. Como ajustar os parâmetros do modelo λ para maximizar $P(X|\lambda)$, ou seja, o modelo que melhor explica os dados observados?

Estes problemas nem sempre podem ser respondidos de forma analítica devido ao seu custo computacional (Zucchini; MacDonald, 2009). Alternativamente, eles podem ser resolvidos com algoritmos recursivos já estabelecidos na literatura. O algoritmo *forward* ou *backward* podem ser usados para resolver o problema 1, o algoritmo de Viterbi para resolver o problema 2 e o algoritmo Baum-Welch para o problema 3.

A incorporação de um modelo de mudança de regime relaxa a suposição de uma distribuição única do modelo de Markowitz, uma vez que os retornos esperados e as variâncias deixam de ser fixos e passam a ser vinculados a probabilidade de ocorrência em cada estado, o converte o modelo estático de média-variância num problema de otimização sob incerteza (Bae; Kim; Mulvey, 2014).

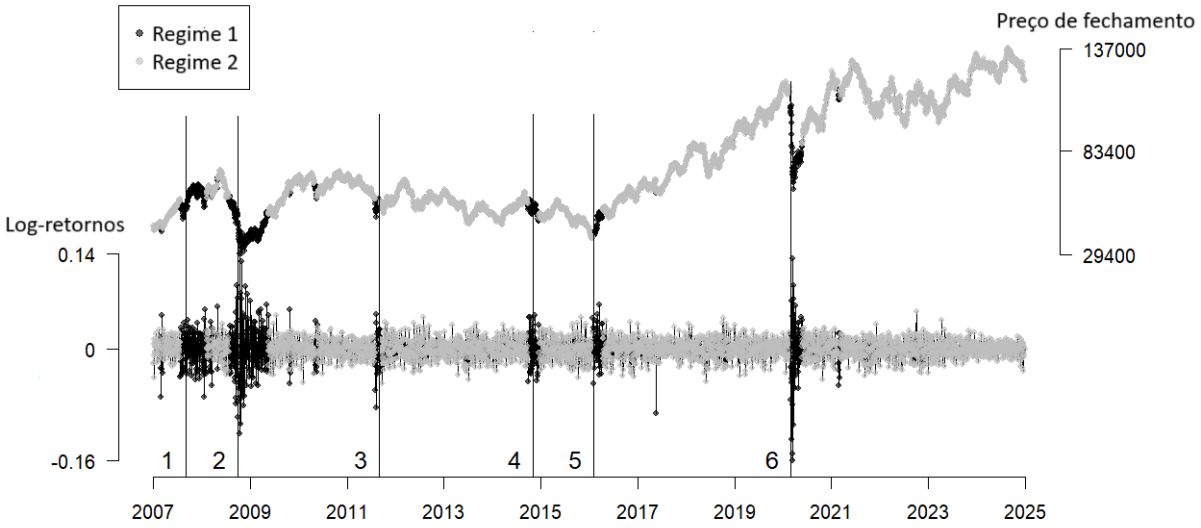
O modelo HMM assume que as observações são dependentes de um estado latente, ou seja, que o sentimento do mercado (*bullish* ou *bearish*) não pode ser observado diretamente, mas mudanças de preços ou volumes de negociação, que dependem claramente do sentimento do mercado, podem ser observados. Um mercado pode ser considerado *bullish* quando está em uma tendência de alta ou quando os investidores têm expectativas de que ele suba no futuro. Os movimentos de alta são associados a uma percepção otimista e de confiança dos investidores em relação ao mercado. Por outro lado, um mercado é considerado *bearish* quando está em uma tendência de baixa ou quando a expectativa dos investidores é que ele caia no futuro. Isso está geralmente associado a pessimismo e incerteza dos investidores em relação ao mercado. Conforme Lewin e Campani (2024), durante regimes *bull*, o mercado geralmente experimenta retornos esperados positivos e volatilidade relativamente baixa, enquanto em regimes de *bear*, o mercado enfrenta baixos retornos esperados e alta volatilidade.

Kritzman, Page e Turkington (2012) avaliam estratégias de investimento sobre a presença de dois regimes, denominados de regime 'normal' e regime de 'evento'. Segundo os autores, o regime de eventos é caracterizado, em média, por condições de investimento mais desafiadoras e por maior volatilidade. Davoodi, Fereydooni e Rastegar (2024) também assumem dois regimes, combinando um modelo de Mudança de Markov e um modelo de Tomada de Decisão Multicritério para otimização de carteiras de Média-Variância com fatores ambientais, sociais e de governança. Segundo estes autores, o modelo de mudança de regime reconhece períodos de alta e baixa volatilidade, permitindo aos investidores ajustar suas estratégias de investimento conforme as condições do mercado para potencialmente obter melhores resultados em termos de rentabilidade e risco.

Uma ilustração para o modelo HMM, com dados diários de fechamento do Ibovespa, no período de 01/01/2007 a 30/12/2024 é apresentada na Figura 2.6. Para a elaboração da

Figura, são utilizados dois estados, onde podemos observar que o regime 1 é menos frequente, caracterizado pela maior volatilidade dos retornos, enquanto o regime 2 é mais frequente e com menor volatilidade. Também é possível notar que os choques mais explícitos coincidem com alguns eventos bem documentados na economia, como: a crise do *subprime* (1 e 2); a crise europeia (3); a crise interna relacionada ao esgotamento da nova matriz econômica (4); a crise fiscal, consequência da crise interna anterior (5); e, a crise da Covid-19 (6).

Figura 2.6 – Representação do modelo HMM com dois estados para o Ibovespa.



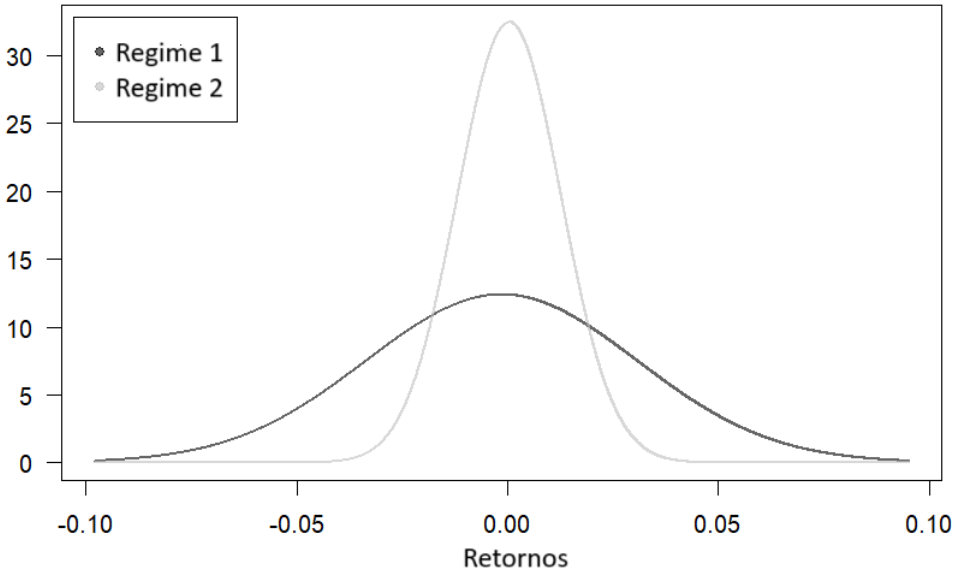
Fonte: Elaboração própria.

A análise das distribuições dependentes de estado, apresentada na Figura 2.7, permite observar que o regime 2, ou estado 2, pode ser classificado como de baixa volatilidade. Sua distribuição de probabilidade é marcadamente leptocúrtica, com um pico elevado e variância reduzida, concentrando a maior parte da massa de probabilidade em torno de retornos próximos a zero. Tal característica é consistente com períodos de estabilidade de mercado, onde flutuações com maior amplitude são eventos anormais. O regime 1, ou estado 1, é identificado como o de alta volatilidade. A sua distribuição é visivelmente mais dispersa e possui caudas mais pesadas. A maior variância desta distribuição é indicativa de períodos de incerteza e estresse sistêmico, nos quais o mercado experimenta oscilações diárias de elevada magnitude.

Considerando que a maioria dos problemas da indústria financeira dependem de encontrar uma estratégia de investimento ótima num horizonte de investimento de longo prazo (Lee; Eid Junior, 2018), um investimento ideal computado em apenas um cenário não se mostra apropriado, uma vez que o tomador de decisão ficará exposto a qualquer mudança no comportamento econômico do sistema financeiro (Benati; Conde, 2022).

Destaca-se que o investimento deve ser escolhido conforme o risco que o investidor está disposto a assumir e este pode variar ao longo do tempo (Lo, 2012), como consequência de

Figura 2.7 – Distribuições de probabilidade dependentes ao regime.



Fonte: Elaboração própria.

alterações no ambiente do mercado (regimes de volatilidade) ou mudanças nos objetivos do investidor. O horizonte temporal também é um fator relevante na alocação estratégica de ativos de longo prazo, uma vez que o investidor deve ter em mente que o risco será influenciado pelos regimes de volatilidade (Zhang; Li; Guo, 2018; Masala; Petroni, 2023)

Cada regime econômico tem características próprias, as quais fornecem informações que contribuem para um melhor controle do risco do investimento e, por outro lado, também permitem aproveitar oportunidades (Nystrup; Madsen; Lindström, 2018). Consequentemente, ignorar a presença de regimes de volatilidade distintos aumenta a probabilidade de falha das abordagens tradicionais de alocação, especialmente em períodos de instabilidade (Chang; Chen; Zolotoy, 2017). Em contrapartida, estratégias dinâmicas que estimam adaptativamente os retornos dos ativos por meio de um Modelo Oculto de Markov (HMM) podem mitigar essas deficiências (Nystrup et al. 2016). Em síntese, a modelagem dinâmica oferecida pelo HMM permite uma gestão de risco mais eficaz, ajustando as estratégias de investimento de acordo com as condições do mercado.

Na hipótese da presença de regimes de volatilidade, torna-se necessária a avaliação da adequação da *proxy* para a medida de risco assumida ao regime identificado. Medidas de *drawdown*, por exemplo, são consideradas mais conservadoras, o que pode auxiliar no controlar perdas em períodos de estresse, mas também resultar em estratégias com ganhos limitados em cenários de risco normal (Möller, 2018; Nystrup et al. 2019).

Por outro lado, os modelos construídos com base na suposição de que o mercado é regido por um único período representam uma visão distorcida do mercado (Giamouridis; Sakkas; Tessaromatis, 2017; Valladão; Silva; Poggi, 2019; Lewin; Campani, 2020). Assim, os modelos multiperíodo com mudanças de regime têm vantagens sobre os modelos de período único, por

serem flexíveis e permitirem a incorporação de características que representam melhor a prática do mercado, tais como a inclusão de custos de transação, fluxos de caixa intermediários, medidas de risco baseadas em metas e a mudança do ambiente de mercado subjacente (Mei; DeMiguel; Nogales, 2016; Nystrup et al. 2019; Peng; Kim; Mittnik, 2022; Li; Uysal; Mulvey, 2022).

Para Nystrup, Madsen e Lindström (2018), na presença de oportunidades de investimento que variam no tempo, os pesos devem ser ajustados com a chegada de novas informações, agregando valor em relação ao reequilíbrio de pesos estáticos e reduzindo potenciais perdas. Segundo esses autores, essa é uma vantagem do HMM, que permite que a alocação ocorra em função do estado dos mercados. Contudo, mudar a alocação assumindo uma regra de decisão estática previamente definida pode não resultar em boas estratégias fora da amostra. Uma abordagem alternativa consiste em optimizar dinamicamente a carteira com base nas probabilidades e parâmetros do regime inferidos, considerando os custos de transação, a aversão ao risco e, possivelmente, outras restrições. Algo que pode ser obtido com o uso do Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC), tal como proposto por Boyd et al. (2017).

Desse modo, baseando-se nos elementos destacados acima, é possível estabelecer a segunda hipótese de pesquisa:

H2: *O uso de medidas de risco de cauda dependentes do regime na alocação dinâmica de ativos melhora o desempenho das carteiras em comparação com estratégias baseadas em um único regime de volatilidade.*

2.4 Modelo de Controle Preditivo

O modelo original de média-variância é restrito a um modelo estático, onde o investidor toma a decisão e espera por resultados até o término do horizonte do investimento. Algo considerado pouco coerente com a prática do mercado, visto que um investidor pode revisar sua carteira periodicamente (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Nessa estrutura de "período único" os atritos que impactam a formação ou reequilíbrio do portfólio são todos negligenciados. Assim, existe uma perda de utilidade associada a este tipo investimento míope (Mei; DeMiguel; Nogales, 2016).

Os problemas multiperíodos consideram o caso mais geral em que um investidor toma uma sequência de decisões, cada uma impactando possivelmente as seguintes. O objetivo é encontrar, em cada período, a decisão de alocação que considere um conjunto de oportunidades e riscos futuros, os quais mudam ao longo do tempo. Eles possibilitam uma alocação dinâmica e permitem incorporar a tomada de decisão restrições mais realísticas, tais como considerar os custos de transação, considerar metas de investimento, bem como pode fornecer uma maior clareza sobre as mudanças do ambiente do mercado subjacente (Li; Uysal; Mulvey, 2022).

Os estudos que avaliam a formulação da otimização multiperíodo não são recentes. Trabalhos como Mossin (1968), Merton (1969) e Samuelson (1975) já propunham o uso de

modelos com essa natureza. Entretanto, as dificuldades envolvendo a otimização dinâmica são apontadas como um fator limitante para seu uso (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014).

Para Oprisor e Kwon (2021) a otimização de múltiplos períodos é uma área de pesquisa promissora, mas ainda é um campo muito acadêmico e raramente aplicado na prática do mercado devido à dificuldade de se estimar com precisão o retorno/risco para vários períodos, visto que estes modelos são computacionalmente intensivos ("maldição da dimensionalidade") e as formulações propostas ainda não lidarem com restrições que representam bem a realidade do mercado (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Valladão; Silva; Poggi, 2019; Ling; Sun; Wang, 2020).

Estudos apontam que combinar modelos de previsão adaptativos a modelos de controle preditivo fornece uma estrutura flexível para incorporar novas informações em um problema de otimização multiperíodo (Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022).

O Modelo de Controle Preditivo (em inglês, *model predictive control* - MPC) resolve um problema de controle ótimo considerando o estado inicial como o atual e sem a necessidade de determinar um controle ideal para todos os estados, o que o torna eficiente em relação ao seu tempo de execução (Mayne et al. 2000). É uma solução muito consolidada em problemas da indústria (Camacho; Bordons, 1999; Oprisor; Kwon, 2021), mas tem ganhado espaço na área de finanças por ser um modelo que permite a alocação dinâmica aproximada (Boyd et al. 2017; Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021). Nele, todos os retornos futuros dos ativos são simplesmente substituídos pelos seus valores esperados. Portanto, o MPC é frequentemente escolhido por sua capacidade de lidar com restrições de portfólio, bem como por suas propriedades atraentes em termos de desempenho e robustez (Primbs, 2019).

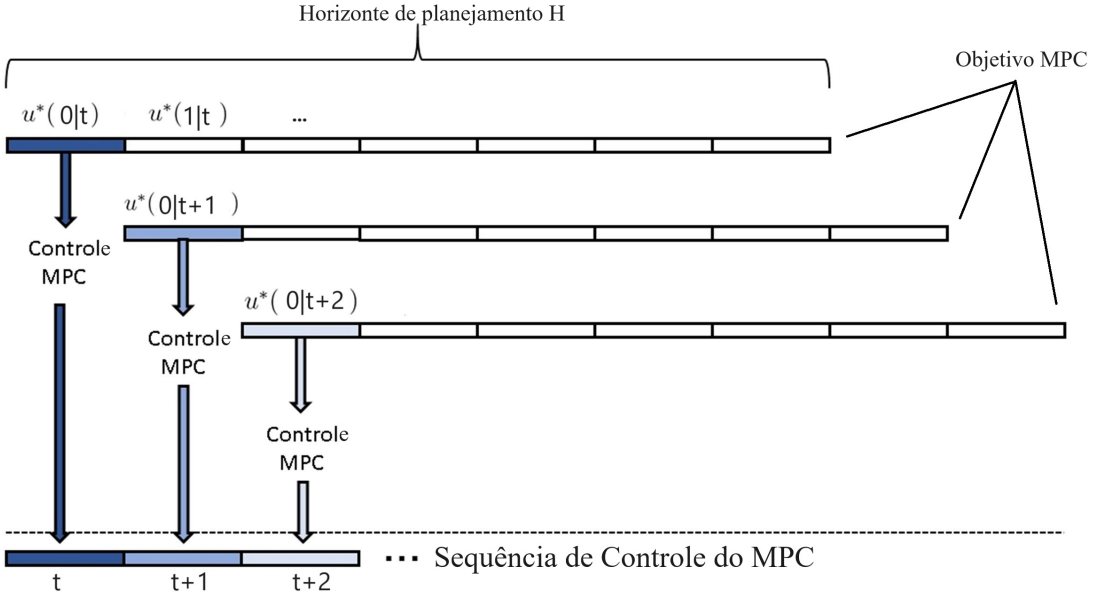
Ele é construído em torno da ideia de controlar um sistema prevendo sua evolução e escolhendo um controle ideal com base na trajetória prevista. Segundo Camacho e Bordons (1999) um modelo de controle preditivo é um conjunto de estratégias de controle que, apesar de serem utilizadas em diferentes áreas de conhecimento, possuem um mesmo processo: 1) definição do modelo do sistema e restrições para o cálculo da saída nos instantes futuros; 2) cálculo da sequência de controle que minimiza uma função custo; 3) aplicação do primeiro valor da sequência de controle ótima calculada; 4) deslocamento do horizonte de predição de um passo, recomeçando o processo inicial.

Em outras palavras, o MPC prevê o comportamento futuro do sistema H períodos à frente e a cada passo de tempo, resolve um problema de otimização multiperíodo usando informações (estimativas de risco, retorno e custos de transação) conhecidas no tempo t. Apesar de obter as carteiras ideais para cada um dos períodos no horizonte H, apenas a carteira do primeiro período é implementada e o problema de otimização é resolvido novamente com informações atualizadas obtidas no tempo $t + 1$ (Primbs, 2019).

Uma representação da implementação de um MPC aplicado a otimização de portfólio pode ser na Figura 2.8. Como pode ser observado, o MPC pressupõe uma janela móvel do método de predição e dos otimizadores com a série temporal, o que faz com que o intervalo que contém as observações necessárias para realizar as previsões se desloque no tempo e forneça

informações mais atuais ao modelo.

Figura 2.8 – Implementação padrão do MPC aplicado ao problema de otimização de portfólio



Fonte: Primbs (2019, p.674)

Considere uma carteira de n ativos, mais um valor em caixa (aplicado à taxa livre de risco), ao longo de um horizonte de tempo finito dividido em períodos discretos $t = 1, ..., T$, em dias. Onde $h_t \in \mathrm{R}^{n+1}$ denota as participações dos ativos no início do período t, onde $(h_t)_i$ é o valor da posição no ativo i. Assumindo $(h_t)_i > 0$ para $i = 1, ..., n$ a carteira denomina-se *Longo-Only* e posições short ($(h_t)_i < 0$) não são admitidas. O ativo $n + 1$ representa o valor em caixa e $(h_t)_{n+1} = 0$ implica que no momento t a carteira está totalmente investida e nenhum valor se encontra em caixa. O valor monetário total da carteira, no momento t, é expresso por $v_t = 1^T h_t$.

Seguindo a metodologia descrita por Boyd et al. (2017), no MPC os retornos futuros são substituídos pelos seus valores médios estimados $\hat{\mu}_{\tau|t}, \tau = t = 1, ..., t + H$, onde $\hat{\mu}_{\tau|t}$ é a previsão feita no tempo t do retorno no tempo τ. Isso faz com o problema, originalmente de controle estocástico, torne-se em um problema de otimização determinístico.

Nystrup, Madsen e Lindström (2018), Nystrup et al. (2019) e Oprisor e Kwon (2021) sugerem o uso do MPC para seleção de portfólio de vários períodos, associado ao modelo oculto de Markov multivariado para previsão de retorno, sugerindo que o MPC é uma abordagem intuitiva e computacionalmente rápida que combina a previsão adaptativa do HMM e fornece uma estrutura flexível para incorporar novas informações em um portfólio, à medida que ela se torna disponível.

Outro trabalho que propõe a otimização em vários períodos utilizando controles preditivos com o ambiente de mercado descrito por um HMM é apresentado por Ling, Sun e Wang (2020). Os autores aplicam o MPC com objetivo controlar a variação média e adotar a

paridade de risco no ajuste do modelo, concluindo que os modelos de multiperíodos têm um desempenho melhor do que seus pares de período único para dados fora da amostra.

Vários métodos podem ser usados para gerar cenários sobre retornos e riscos futuros e estes serem combinados ao MPC. Contudo, Modelos ocultos de Markov (HMMs) são métodos poderosos para modelar a dinâmica variável no tempo de um processo estatístico e requerem apenas um conjunto de suposições (suaves) (Zucchini; MacDonald, 2009), permitindo a alternância dos parâmetros da dinâmica dos preços por regimes de mercado identificado, o que fornece uma maior flexibilidade a estratégia de alocação (Nystrup et al. 2019; Li; Uysal; Mulvey, 2022).

Como sugerido por Nystrup et al. (2019) e Ling, Sun e Wang (2020), para tratar a questão da dimensionalidade no processo de otimização, na abordagem do MPC todos os parâmetros desconhecidos (i.e., retorno de ativos, matriz de covariância, etc.) são substituídos por seus valores previstos em um horizonte de planejamento. Isso transforma o problema do controle estocástico em um problema de otimização determinística de vários períodos, que a depender das características de suas restrições e função objetivo poderá ser linear e, portanto, facilmente computável.

Diante do exposto, a presente revisão da literatura converge para a necessidade de superar a rigidez dos modelos de alocação estáticos. A dinâmica de parâmetros, tanto dos mercados quanto das preferências dos investidores, exige abordagens que evitem os erros de especificação de Categoria I e II, como definidos por Staden, Dang e Forsyth (2021). Dessa forma, esta pesquisa sugere o uso de um Modelo Oculto de Markov (HMM) para identificar regimes e o uso de um Modelo de Controle Preditivo (MPC) para otimização múlti-períodos.

A inovação desta abordagem reside na implementação de uma função de utilidade estado-dependente, fundamentada teoricamente em Jarrow e Li (2021), que se manifesta pela comutação dinâmica da métrica de risco conforme o regime prevalente. Com efeito, argumenta-se que ignorar essa dinâmica, assumindo uma função de utilidade fixa em um mercado com múltiplos regimes de volatilidade, constitui um erro fundamental de especificação do modelo, pois este se torna incapaz de refletir a 'verdadeira' utilidade do investidor. Essa abordagem é, portanto, apresentada como uma solução robusta que visa reduzir a magnitude dos erros de especificação, tanto de Categoria I (ao reconhecer diferentes comportamentos de risco nos regimes) quanto de Categoria II (ao recalibrar os parâmetros do modelo dinamicamente).

Os capítulos subsequentes são dedicados à construção e validação deste arcabouço. Serão apresentados o desenvolvimento detalhado dos objetivos da pesquisa, cada qual com sua abordagem metodológica, implementação e análise de resultados.

3 ANÁLISE COMPARATIVA DE PROXIES DE VOLATILIDADE E ALOCAÇÃO DE ATIVOS BASEADA EM REGIMES

Resumo:

A incerteza inerente aos mercados financeiros, especialmente em economias emergentes, exige abordagens inovadoras para a alocação de ativos. Neste contexto, este estudo investiga a eficácia de diferentes *proxies* de volatilidade (histórica, implícita e condicional) na detecção de regimes de volatilidade, utilizando o Modelo Oculto de Markov (HMM), com foco em ETFs negociados nos mercados brasileiro e norte-americano. Os resultados revelam que a volatilidade condicional, estimada por modelos GARCH, oferece a maior precisão na identificação de regimes. Com base nessa *proxy*, desenvolvemos estratégias de alocação de ETFs condicionadas aos regimes, utilizando janelas móveis de 252 dias. Essa estratégia supera significativamente a de regime invariante no tempo, demonstrando uma capacidade de reduzir perdas máximas. Adicionalmente, observamos um aumento na correlação entre ETFs durante regimes de alta volatilidade. Este estudo contribui para a literatura ao fornecer evidências empíricas robustas e implicações práticas para gestores ativos de investimentos que buscam otimizar a alocação de ativos em mercados voláteis.

Palavras-chave: Hidden Markov Model, volatilidade, regime de volatilidade, alocação dinâmica, ETFs.

3.1 Introdução

A crescente vulnerabilidade econômica global e a intensificação da volatilidade dos mercados financeiros, impulsionadas pela incerteza política e econômica, têm exposto as carteiras de investimento a riscos de perdas significativas ou *downside risk*, despertando preocupações entre investidores e gestores ativos de portfólio (Bekaert; Hoerova, 2014; Asgharian; Christiansen; Hou, 2023). Esse cenário desafiador exige estratégias que superem as abordagens tradicionais e estáticas, especialmente em mercados emergentes, onde a sensibilidade a choques externos amplifica as variações de risco e demanda uma gestão de portfólio mais dinâmica e adaptável.

A alocação de ativos transcende a mera seleção de ativos e ponderação da carteira; ela demanda ajustes dinâmicos, dada a volatilidade dos retornos e mudanças nas correlações (Ang; Timmermann, 2012). Estratégias predominantemente estáticas ignoram a intrínseca relação entre o desempenho dos ativos e as flutuações das condições econômicas e comprometem a capacidade de adaptação ao risco (Tu, 2010; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Nystrup et al. 2019; Lewin; Campani, 2020; MacLean; Yu; Zhao, 2022). Essa rigidez expõe os gestores ativos de investimento, ou simplesmente investidores, à vulnerabilidade em períodos de alta volatilidade,

podendo desalinhar a carteira do perfil de risco individual.

A superação das limitações das estratégias estáticas exige carteiras adaptáveis a mudanças abruptas e cíclicas, refletindo a transição entre regimes de risco e retorno. Modelos de mudança de regime, como o Modelo Oculto de Markov (HMM), têm se destacado por sua capacidade de incorporar incertezas de preços e identificar estados latentes do mercado a partir de variáveis observáveis (Haghani; Dewey, 2016; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Zucchini; MacDonald, 2009; Nystrup et al. 2015). Essa abordagem oferece uma visão mais realista dos riscos, propiciando maior eficiência das estratégias de investimento.

A volatilidade, um fator crítico na gestão de risco e alocação de ativos, exige a aplicação de modelos avançados para otimizar portfólios, conforme evidenciado por Bai e Cai (2024). A diversidade de metodologias para calcular a volatilidade impõe uma análise rigorosa para identificar a abordagem mais adequada para capturar os regimes de volatilidade.

A eficácia do Modelo Oculto de Markov (HMM) na detecção de regimes está intrinsecamente ligada à seleção de uma ou mais variáveis observáveis. Estas variáveis devem refletir com precisão a dinâmica dos preços e discriminar claramente os diferentes estados de volatilidade do mercado.

Além disso, os regimes de volatilidade refletem padrões distintos da distribuição dos retornos dos ativos, impactando diretamente a exposição ao risco e a alocação ideal de portfólios. A modelagem dessas mudanças permite prever variações de risco e ajustar a composição do portfólio, otimizando os retornos e minimizando perdas.

Nesse sentido, o uso de modelos com mudança de regime para ajustar estratégias de alocação tem sido amplamente estudado nos últimos anos (Roman; Mitra, 2009; Kritzman; Page; Turkington, 2012; Nystrup et al. 2015; Nystrup; Madsen; Lindström, 2018; Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Campani; Garcia; Lewin, 2021; Davoodi; Fereydooni; Rastegar, 2024), com evidências de que estratégias dinâmicas permitem otimizar os retornos em cenários favoráveis e mitigar perdas em períodos adversos.

Apesar do reconhecimento da volatilidade como um fator crucial nas decisões de gestão de risco e alocação de ativos, conforme destacado por Ardia, Bluteau e Rüede (2019), a literatura existente apresenta uma lacuna significativa. Grande parte dos estudos concentra-se em modelos estáticos ou com foco em uma única métrica de volatilidade, negligenciando uma análise comparativa da eficácia de diferentes medidas na identificação e previsão de regimes por meio de Modelos Ocultos de Markov (HMM). Nesse contexto, surge a seguinte questão de pesquisa: qual *proxy* de volatilidade melhor identifica regimes de volatilidade e como essa identificação impacta a eficiência de estratégias de alocação de ativos?

Este estudo contribui para o preenchimento dessa lacuna ao comparar a capacidade de três medidas de volatilidade (histórica, implícita e condicional) em estimar e prever regimes de volatilidade, considerando diferentes janelas temporais nos mercados brasileiro e americano. A medida mais eficaz é então aplicada para otimizar a alocação de uma carteira composta por quatro fundos ETFs (*Exchange Traded Funds*), avaliando-se o desempenho da estratégia baseada

em regimes em comparação a carteiras de regime invariante no tempo (com rebalanceamento trimestral) e a uma estratégia ingênua, na qual os pesos são distribuídos igualmente entre os ativos $(1/n)$.

Destaca-se que o recente contexto econômico-financeiro reforça a relevância deste estudo. O período de 2019 a 2024 foi marcado por choques extremos, incluindo a pandemia da COVID-19, a subsequente ação dos bancos centrais globais com elevação das taxas de juros, e crises geopolíticas, como a guerra na Ucrânia e as tensões no Oriente Médio. Esses eventos intensificaram a volatilidade dos mercados, principalmente em economias emergentes, ampliando a importância de abordagens adaptativas de gestão de risco e de alocação de ativos. Nesse cenário de alta instabilidade, estratégias capazes de detectar regimes e ajustar dinamicamente as carteiras tornaram-se essenciais para mitigar perdas e preservar capital.

Dessa forma, este estudo contribui para a literatura ao realizar uma comparação empírica inédita entre diferentes *proxies* de volatilidade na identificação de regimes de volatilidade, incorporando as previsões realizadas pelo HMM às estratégias de alocação de ativos. Ao integrar análise comparativa de proxies com avaliação prática da performance de portfólios, a pesquisa fornece evidências robustas sobre a importância de abordagens adaptativas na gestão de risco, especialmente em contextos de alta incerteza, como os observados entre 2019 e 2024, e para investidores mais conservadores que buscam maior resiliência em ambientes voláteis.

3.2 Revisão de literatura

Os conceitos de otimização e diversificação de carteiras têm sido fundamentais no desenvolvimento e compreensão dos mercados financeiros, assim como na tomada de decisões de investimento (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Em geral, os gestores ativos de investimentos buscam maximizar retornos enquanto minimizam riscos, equilibrando objetivos de investimento com seus respectivos perfis de risco (Markowitz, 1952).

A Moderna Teoria de Portfólio, proposta por Markowitz (1952), fornece uma base quantitativa para a gestão de carteiras, utilizando retornos esperados e covariâncias dos ativos para estabelecer um *trade-off* entre risco e retorno. Contudo, por ser um modelo de um período, quando aplicado, sem os devidos ajustes, em cenários variáveis por mais de um período, pode ser sensível a erros de estimativa (MacLean; Zhao; Zhang, 2025). Essa sensibilidade e o pressuposto de relações estáveis ao longo do tempo podem limitar sua eficácia, especialmente em cenários de alta volatilidade (Michaud, 1989; Tu, 2010). Esses desafios sugerem a necessidade de modelos dinâmicos, capazes de captar alterações nas condições de mercado e se adequar a essas mudanças.

Modelos de mudança de regime têm sido amplamente explorados para superar essas limitações, permitindo que estratégias de seleção de portfólio incorporem a dinâmica dos mercados financeiros (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Em particular, modelos baseados em Cadeias de Markov ganharam destaque desde o trabalho seminal de Hamilton (1989), pois possibilitam mapear transições entre estados econômicos distintos, como recessões e expansões

(Ang; Timmermann, 2012). Essa abordagem tem sido cada vez mais aplicada para modelar séries temporais sujeitas a mudanças de regime (Ang; Timmermann, 2012; Zucchini; MacDonald, 2009; Oliveira; Filomena; Righi, 2018).

Dentro desse contexto, o Modelo Oculto de Markov (HMM) sobressai por sua notável capacidade de identificar estados latentes em séries temporais financeiras (Zucchini; MacDonald, 2009). Esse modelo probabilístico, que opera sob o pressuposto da ausência de memória, modela uma série temporal como uma cadeia de Markov, permitindo a inferência de regimes não observáveis diretamente a partir de dados mensuráveis, como retornos e volatilidade. Ademais, conforme destacado por Fereydooni e Mahootchi (2023), a segmentação de séries temporais em tendências ascendentes e descendentes, com o auxílio do HMM, possibilita capturar e incorporar a não linearidade inerente aos dados.

A flexibilidade do HMM o torna amplamente utilizado em finanças, abrangendo aplicações em alocação dinâmica de ativos (Kritzman; Page; Turkington, 2012; Nguyen; Nguyen, 2015; Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021), análise de fatos estilizados dos retornos (Nystrup et al. 2015), e identificação de diferentes *clusters* de volatilidade do mercado (Ardia et al. 2018). Em particular, a previsão da volatilidade é um desafio essencial para a gestão de carteiras e estratégias de hedge, reforçando a importância de modelos sofisticados para capturar regimes de risco (Bai; Cai, 2024).

O HMM tem se mostrado especialmente eficaz na adaptação a diferentes regimes de mercado, possibilitando a detecção precoce de períodos de estresse econômico e a implementação de estratégias mais robustas (Bae; Kim; Mulvey, 2014; Nystrup; Madsen; Lindström, 2018; Uysal; Mulvey, 2021; Fons et al. 2021; MacLean; Yu; Zhao, 2022; Peng; Kim; Mittnik, 2022). Essa abordagem permite compreender a relação entre regimes de mercado e volatilidade, facilitando a identificação de padrões que afetam os preços dos ativos e melhorando a tomada de decisão.

Recentemente, Aigner (2022) aplicou um modelo HMM com mistura gaussiana para modelar a Volatilidade implícita do índice S&P500, do inglês *Volatility Index* (VIX) (mede a expectativa de volatilidade do mercado de ações com base nas opções do índice S&P 500), demonstrando que diferentes estados do mercado podem ser identificados com sucesso, permitindo a previsão de condições de alta e baixa volatilidade. Esses resultados reforçam o potencial dos modelos HMM na previsão de regimes, evidenciando sua utilidade para a adaptação dinâmica de estratégias de investimento em diferentes condições de mercado.

Assim, considerando os efeitos intertemporais inerentes à natureza dinâmica dos investimentos nos mercados financeiros (Chang; Chen; Zolotoy, 2017), cada regime de mercado apresenta uma distribuição de retornos distinta, tornando o uso do HMM relevante, por fornecer uma descrição mais realista da distribuição dos retornos (Li; Uysal; Mulvey, 2022). Evidências empíricas indicam, por exemplo, que a estrutura da volatilidade se altera conforme o estado do mercado (Ang; Timmermann, 2012; Ardia et al. 2018; Ardia; Bluteau; Rüede, 2019), permitindo inferir a existência dos regimes de volatilidade. Desta forma, na

presença de regimes, a estratégia de alocação de ativos deve incorporar o uso desses modelos para capturar a mudança de regime devido à volatilidade introduzida nos retornos dos ativos e em suas correlações ao longo do tempo.

Neste sentido, Oprisor e Kwon (2021) e Davoodi, Fereydooni e Rastegar (2024) demonstram que o uso do HMM na alocação é eficaz para alinhar a carteira às condições do mercado, permitindo uma gestão de risco mais precisa e adaptável. Estratégias de negociação baseadas em estados identificados pelo HMM demonstraram melhores desempenhos em termos de retorno e controle de risco quando comparadas a abordagens tradicionais (Nystrup et al. 2015, 2019; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Fereydooni; Mahootchi, 2023).

Nystrup et al. (2019) argumentam que dois regimes são suficientes para modelar transições de mercado, e essa visão foi corroborada por Costa e Kwon (2019), Ma et al. (2019), Oprisor e Kwon (2021), Fons et al. (2021), Li, Uysal e Mulvey (2022) e Davoodi, Fereydooni e Rastegar (2024). A simplicidade desses modelos reduz o risco de sobreajustes e facilita sua aplicação prática, um aspecto que não pode ser negligenciado quando se pensa na contribuição dos estudos acadêmicos para práticas reais do mercado. Contudo, um ponto crítico no processo da identificação correta dos estados latentes no HMM se refere à escolha das séries observáveis como *inputs* para o modelo, sendo indispensável sua representatividade sobre o fenômeno a ser estudado.

Diversos estudos demonstram que períodos de alta volatilidade estão fortemente associados a recessões econômicas e crises financeiras. Neste sentido, Chauvet, Senyuz e Yoldas (2015) analisam como a volatilidade pode fornecer sinais antecipados de crises macroeconômicas, enquanto Megaritis, Vlastakis e Triantafyllou (2021) mostram que choques de incerteza macroeconômica têm um impacto significativo sobre a volatilidade dos mercados acionários. Esses achados reforçam a necessidade de modelos mais sofisticados para a previsão da volatilidade e o papel desempenhado por ela na identificação de regimes de volatilidade.

O modelo Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva Generalizada, do inglês, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model* (GARCH) é uma ferramenta consolidada, empregada tanto para a estimação da volatilidade condicional quanto para a mensuração do risco de mercado. No entanto, Ma et al. (2019) argumentam que a previsão de volatilidade pode ser aprimorada ao incorporar memória longa e mudanças de regime em modelos heterocedásticos. Apesar de sua eficácia, esses modelos apresentam limitações na previsão de mudanças abruptas de regime, justificando a crescente utilização dos HMMs como alternativa para capturar regimes latentes de volatilidade. Como demonstrado, Ardia et al. (2018) o uso de mudança de regime associado aos modelos GARCH pode capturar melhor as dinâmicas da volatilidade do que modelos GARCH tradicionais.

Além disso, Bekaert e Hoerova (2014) examinam a relação entre a volatilidade implícita, o prêmio de variância e a volatilidade do mercado de ações, destacando que a volatilidade implícita pode conter informações importantes sobre regimes futuros da volatilidade. Peng, Kim e Mittnik (2022) exploram a otimização de portfólios multivariados usando modelos

RS-GARCH, destacando que a incorporação de regimes ocultos melhora significativamente a modelagem da volatilidade condicional e o desempenho das estratégias de investimento. Já Ardia, Bluteau e Rüede (2019) analisam mudanças de regime na volatilidade do Bitcoin utilizando um modelo Markov-switching GARCH, evidenciando que a volatilidade dos criptoativos pode ser modelada de forma mais eficiente com abordagens baseadas em regimes.

O artigo de MacLean, Zhao e Zhang (2025) explora a natureza cíclica dos mercados financeiros e como essa dinâmica impacta as decisões de portfólio, por meio da proposição de um modelo auto-regressivo de troca de regime para fatores macroeconômicos, que influencia a distribuição dos retornos dos ativos. Segundo os autores, essa estrutura permite que a otimização de média-variância incorpore as condições de mercado correntes, mediante parâmetros dependentes do regime. A pesquisa compara decisões de investimento baseadas na expectativa sobre regimes com a seleção do regime inferido mais provável. Os resultados indicam que o modelo com regime inferido e transições se adapta melhor às mudanças da volatilidade do mercado, demonstrando um crescimento de riqueza superior em comparação com outras estratégias.

Embora os modelos HMM e suas variantes tenham demonstrado grande eficácia na identificação de regimes de volatilidade, ainda há pouca investigação sobre a escolha da variável observável na estimação dos estados latentes. Trabalhos recentes, como os de Peng, Kim e Mittnik (2022), destacam a importância da volatilidade condicional na previsão de regimes, enquanto Bekaert e Hoerova (2014) reforçam o papel da volatilidade implícita como um indicador prospectivo do risco de mercado. No entanto, a literatura ainda carece de estudos comparando empiricamente a eficácia dessas diferentes *proxies* de volatilidade na modelagem de regimes. Essa lacuna motiva a presente pesquisa, que busca avaliar a capacidade preditiva de distintas medidas de volatilidade na identificação de regimes de alta e baixa volatilidade em mercados desenvolvidos e emergentes.

3.3 Metodologia

A seguir, são apresentados os dados e os procedimentos metodológicos empregados neste estudo, organizados em duas etapas principais. Na primeira etapa, detalha-se a implementação dos Modelos Ocultos de Markov (HMM), utilizando diferentes *proxies* de volatilidade e janelas móveis. Na segunda etapa, expõe-se a alocação ótima de ativos condicionada aos regimes identificados, além da comparação dos portfólios associados aos distintos estados de volatilidade, destacando-se seu desempenho em relação a estratégias de alocação simplistas que ignoram a existência de mudanças de regime.

3.3.1 Dados

Para o cálculo das medidas de volatilidade, foram utilizados os retornos dos principais índices acionários de cada país: o Ibovespa, representando o mercado brasileiro, e o S&P500, o mercado norte-americano, no período de janeiro de 2019 a dezembro de 2024, com dados diários.

A escolha desse horizonte de análise fundamenta-se em dois fatores principais. Primeiramente, o período abrange uma fase de instabilidade financeira sem precedentes. A pandemia da COVID-19 desencadeou uma crise sanitária e econômica que acentuou a volatilidade nos mercados financeiros internacionais. Subsequentemente, a rápida elevação das taxas de juros pelos principais bancos centrais, em resposta às pressões inflacionárias, e as crises geopolíticas, como a guerra na Ucrânia e as tensões no Oriente Médio, intensificaram os movimentos abruptos nos preços dos ativos. Esses eventos alteraram significativamente a dinâmica dos regimes de volatilidade e a estrutura de correlações entre diferentes classes de ativos, tornando o período especialmente relevante para a análise de abordagens adaptativas de gestão de portfólios.

Em segundo lugar, a definição do período considerou a disponibilidade de dados para o mercado brasileiro. A negociação de fundos de índice (ETFs) no Brasil foi iniciada em 2008, mas somente a partir de 2018, houve a expansão para o segmento de renda fixa, com o lançamento do FIXA11, seguido em 2019 pelo IMAB11, fundo que replica títulos públicos federais indexados à inflação (IMA-B). Assim, embora no mercado americano esses títulos tenham uma maior série de dados disponíveis, optou-se, por uma questão metodológica, por alinhar o horizonte de análise para os dois mercados.

As *proxies* de volatilidade consideradas neste estudo foram a volatilidade histórica, a volatilidade condicional e a volatilidade implícita. A volatilidade histórica foi obtida pelo desvio-padrão dos log-retornos diários de cada índice, calculado em uma janela móvel de 21 dias. A volatilidade condicional foi estimada por meio do GARCH(1,1), assumindo uma distribuição condicional normal, com estimação via máxima verossimilhança implementada no pacote `rugarch` do software R (Ghalanos, 2023). A volatilidade implícita foi inferida a partir dos índices de volatilidade específicos para cada mercado, refletindo as expectativas de risco futuro dos investidores.

O índice de volatilidade implícita considerado para o mercado norte-americano foi a VIX, calculado pela Chicago Board Options Exchange (CBOE). Para o mercado brasileiro, dada a inexistência de uma série única e contínua para todo o período de análise, construiu-se uma série composta a partir de duas fontes: o índice IVol-BR, disponibilizado pelo Centro Brasileiro de Pesquisa em Economia Financeira da Universidade de São Paulo (NEFIN, 2017), com dados de 01/08/2011 a 29/04/2022, e o índice VXBR, calculado pela S&P Dow Jones Índices (S&P Dow Jones Indices, 2024), disponível a partir de 06/05/2021. Ambos os índices são derivados de opções sobre o Ibovespa, mas apresentam diferenças metodológicas: o VXBR

Tabela 3.1 – Descrição das Variáveis Financeiras Analisadas

Variável	Mercado	Descrição
Fundos de investimento em índices (ETFs):		
BOVA11	BR	Acompanha o desempenho do índice Ibovespa.
SMAL11	BR	Acompanha o desempenho do índice de *Small Caps* brasileiras.
IMAB11	BR	Replica títulos públicos federais indexados ao IPCA (IMA-B).
FIXA11	BR	Replica títulos públicos federais com taxa de juros prefixada.
IVV	EUA	Acompanha o desempenho do índice S&P500.
IWM	EUA	Replica ações *Small Caps* dos EUA, com base no índice Russell 2000.
IEF	EUA	Replica títulos prefixados de médio prazo do Tesouro dos EUA.
TIP	EUA	Composto por Títulos do Tesouro dos EUA indexados à inflação.
Taxa livre de risco:		
Selic	BR	Taxa de juros de curto prazo definida pelo Banco Central do Brasil.
IRX	EUA	Taxa dos T-bills de 13 semanas do Tesouro dos EUA.

Nota: BR refere-se aos dados do mercado brasileiro, em reais, e EUA aos dados do mercado americano, em dólares. Todos os dados são utilizados em frequência diária. Os retornos são na forma de log-retornos dos preços de fechamento. As séries do S&P500, Ibovespa, ETFs, VIX e IRX foram obtidas em https://finance.yahoo.com/ e os dados para a Taxa Selic efetiva, média dos títulos públicos federais (Selic) em https://www.bcb.gov.br/.

considera a volatilidade esperada para os próximos 30 dias, enquanto o IVol-BR adota um horizonte aproximado de 42 dias úteis. A compatibilidade entre as séries foi avaliada no período de sobreposição (06/05/2021 a 29/04/2022), identificando-se uma correlação positiva de 67.4%, além de médias e desvios-padrão similares, o que sustenta a viabilidade da série composta para representar a volatilidade implícita no mercado brasileiro.

Dado que os índices de volatilidade implícita são expressos em termos anualizados, procedeu-se à conversão para base diária utilizando a transformação $\text{vol}_{\text{diária}} = \text{vol}_{\text{anual}}/\sqrt{252}$, garantindo a padronização da frequência entre todas as medidas de volatilidade.

Na etapa de alocação de ativos, foram utilizados quatro ETFs representativos para cada mercado. Como as alocações são realizadas separadamente para Brasil e Estados Unidos, os ativos permaneceram denominados em suas respectivas moedas locais, sem necessidade de conversão cambial. A Tabela 3.1 apresenta uma descrição detalhada dos ativos utilizados, para o período de janeiro de 2020 a dezembro de 2024, com dados diários.

A escolha pela classe de ativos, fundos de índice para a estratégia de alocação de ativos, justifica-se por serem negociados em bolsa e representarem uma alternativa eficiente e inovadora no mercado financeiro global. A seleção dos ETFs buscou refletir estratégias de investimentos que pressupõem uma carteira diversificada e composta por ativos mais agressivos e conservadores, sendo, desta forma, considerados dois fundos de índice que replicam índices atrelados à renda variável e dois atrelados à renda fixa. Para o mercado americano, alguns bancos de investimento recomendam a alocação de 60% em ações e 40% em títulos de menor risco como renda fixa (Grant; Kwon; Satchell, 2024). Esse portfólio apresentou perdas no período pós-pandemia da COVID-19, mas evidências recentes indicam que ele continua apresentando bons resultados em 2024 (Kandhari, 2024).

Destaca-se que os ETFs proporcionam acessibilidade a diferentes perfis de investidores,

permitindo exposição a diversas classes de ativos sem a necessidade de gestão ativa, o que os torna uma ferramenta atrativa para estratégias de alocação baseadas em risco, com a flexibilidade da negociação de ações (Matos; Iquiapaza; Ferreira, 2014).

No Brasil, embora ainda correspondam a uma fração relativamente pequena do mercado total de fundos de investimento, sua adoção tem crescido, principalmente devido à diversificação que oferecem e à estrutura de custos reduzida em comparação com fundos tradicionais. O investidor brasileiro é tido como um investidor conservador, que valoriza em um produto financeiro a rentabilidade, a segurança, a facilidade e comodidade de acesso e retirada (ANBIMA, 2024), características encontradas nos ETFs.

3.3.2 Modelo Oculto de Markov

O Modelo Oculto de Markov (HMM) possibilita a modelagem de fenômenos por meio de processos estocásticos, descrevendo a dinâmica de eventos observáveis, Y_t (como movimentos de preços ou volatilidade), influenciados por estados ocultos, X_t (tais como regimes de volatilidade ou fases do ciclo econômico).

O HMM tenta replicar o comportamento das condições de mercado financeiro subjacente, buscando, basicamente, determinar uma tendência do comportamento do mercado (Nystrup et al. 2016). O HMM também tenta modelar quais são as implicações de estar no respectivo estado (também conhecidos como regimes), sendo que essas implicações são quantificadas como os parâmetros do HMM e também podem variar com o tempo.

Neste estudo, assim como Nystrup et al. (2019) assumimos que não há ganhos em se assumir o número de estados superior a 2, privilegiamos a manutenção da interpretabilidade dos resultados do modelo e evitando o risco de sobreajuste dos dados. Desta forma, no contexto deste estudo, o modelo classifica os regimes de volatilidade como alta ou baixa, inferindo suas probabilidades a partir dos dados históricos. Em cada um dos regimes, é assumida uma distribuição Gaussiana cujos parâmetros dependem do regime subjacente.

O HMM segue a suposição de primeira ordem de uma Cadeia de Markov, em que cada observação depende somente do estado que a produziu, sendo completamente independente de qualquer outro estado da cadeia. Assim, as transições entre esses dois regimes são descritas por uma matriz de transição $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$
onde a_{11} representa a probabilidade de permanecer no regime de baixa volatilidade no próximo período, dado que o período anterior também era de baixa volatilidade. De maneira análoga, a_{22} corresponde à probabilidade de permanecer no regime de alta volatilidade, condicionada ao fato de que o período anterior já estava nesse regime.

O conceito subjacente do modelo é fazer previsões dos retornos, covariâncias e regimes atualmente desconhecidos para os futuros dias. Considerando dois estados, a previsão de retornos futuros e as matrizes de covariância são fundamentadas nos parâmetros estimados

do HMM. Assume-se que os retornos seguem uma distribuição normal $N(\mu_{11}, \sigma_{11}^2)$ no regime 1 e $N(\mu_{22}, \sigma_{22}^2)$ no regime 2. A probabilidade associada ao estado no momento t é representada por q_t, então:

i) a probabilidade $\hat{q}$ de que o mercado esteja sob regime de baixa volatilidade no momento $(t + 1)$ é

$$\hat{q}_{t+1} = q_t a_{11} + (1 - q_t)(1 - a_{22}); \tag{3.1}$$

ii) a previsão do retorno esperado $\hat{\mu}$ no momento $(t + 1)$ é

$$\hat{\mu}_{t+1} = \hat{q}_{t+1}\mu_1 + (1 - \hat{q}_{t+1})\mu_2; \tag{3.2}$$

iii) a previsão da matriz de covariância de retornos $\hat{\Sigma}$ no momento $(t + 1)$ é

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (\hat{q}_{t+1}\sigma_1^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})\sigma_2^2) + (\hat{q}_{t+1}(\mu_1 - \hat{\mu}_{t+1})^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})(\mu_2 - \hat{\mu}_{t+1})^2). \tag{3.3}$$

Com base nessas previsões, deve-se adaptar a estratégia de alocação. Se o modelo sugerir, com alta probabilidade, que o mercado esteja em um estado de alta volatilidade, uma postura mais conservadora pode ser adotada pelo investidor. Por outro lado, o oposto ocorrerá se o modelo estimar que o mercado estiver em um estado de baixa volatilidade.

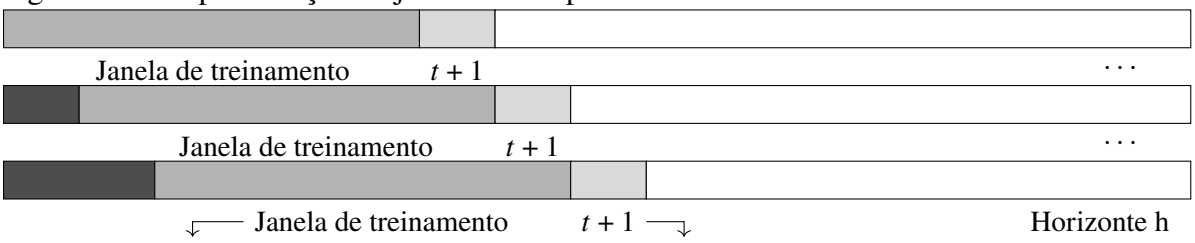
Os parâmetros do HMM foram estimados com os algoritmos *Expectation Maximization* e Viterbi, utilizando o pacote depmixS4 (Visser; Speekenbrink, 2010) do software R. Para estimação e avaliação do modelo foram utilizadas as diferentes medidas de volatilidade, descritas na seção 3.3.1, e janelas móveis de 126, 252 e 504 dias. É importante considerar e testar diferentes tamanhos de janelas móveis para que (i) a estimativa seja feita com base nos dados mais recentes do mercado e (ii) para os dados incluírem ao menos um ciclo de volatilidade completo.

Jacobs e Karagozoglu (2014) analisaram as correlações entre os ativos ao longo do tempo e identificaram que, para a maioria deles, essas correlações variam significativamente durante crises financeiras, sendo que algumas chegam a aumentar substancialmente conforme as diferentes condições de mercado. Em seu estudo, os autores consideraram janelas de 22, 66, 126, 252, 504 e 756 dias, concluindo que, para algumas correlações, as janelas ideais situaram-se entre 190 e 240 dias negociáveis.

Destaca-se que, para assegurar que as análises empíricas sejam realizadas com dados pertencentes a um período de teste fora da amostra, a estimação dos parâmetros do HMM foi conduzida com base nas medidas de volatilidade ao longo de uma janela móvel. A previsão do regime é realizada para um passo à frente, ou seja, considerando uma janela de dados de tamanho fixo de T dias, a projeção do regime corresponde ao dia $t + 1$, sendo que os primeiros T dias da amostra são utilizados como período de *warm-up*. A implementação dessa abordagem de janela móvel está ilustrada na Figura 3.1.

A rotulagem dos regimes foi realizada a partir de um ponto de corte de 0.5, isto é, se a probabilidade estimada pelo HMM for maior ou igual a 0.5, o regime é classificado como 1; caso contrário, como 2. Como a previsão do regime ocorre a cada instante t, ao longo do horizonte h da amostra, é necessário padronizar o significado dos regimes 1 e 2 em termos do

Figura 3.1 – Representação da janela móvel para estimar o HMM



A cada iteração uma janela de tamanho fixo T é definida no intervalo $[t-T, t]$, onde são estimadas as probabilidades de transição (A), as probabilidades iniciais (Π) e os parâmetros das distribuições de observação (x). O deslocando da janela a cada iteração é de um dia $(t \rightarrow t+1)$.

A cada iteração, em $t+1$, o regime provável é previsto e rotulado como pertencente a um estado de alta ou baixa volatilidade. Ao final do processo, obtém-se uma série temporal de previsões fora da amostra e os parâmetros utilizados na previsão são armazenados.

Fonte: Elaboração própria.

objeto central deste estudo, a volatilidade. Assim, os regimes são classificados como de alta ou baixa volatilidade, com base na variabilidade estimada para cada um deles: o regime com menor variabilidade é classificado como regime de baixa volatilidade, enquanto aquele com maior variabilidade é identificado como regime de alta volatilidade.

3.3.2.1 Critério de Avaliação das Proxies de Volatilidade

A escolha da *proxy* de volatilidade mais adequada para a identificação de regimes de volatilidade foi realizada com base na comparação da performance preditiva dos modelos HMM ajustados a cada *proxy*. Para isso, foram utilizados o Erro médio quadrático, do inglês *Root Mean Squared Error* (RMSE) e o Erro absoluto médio, do inglês *Mean Absolute Error* (MAE), calculados fora da amostra. Essas métricas quantificam a capacidade de previsão dos regimes futuros, proporcionando um critério objetivo para selecionar a medida de volatilidade que melhor captura a dinâmica latente da volatilidade do mercado. Assim, a *proxy* que apresentou menor RMSE e MAE nas previsões *out-of-sample* foi utilizada na etapa de otimização da alocação de ativos.

O MAE mede a média das diferenças absolutas entre os valores previstos e os valores observados. Ele fornece uma estimativa direta da magnitude média dos erros:

$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i| \tag{3.4}$$

O RMSE mede a raiz quadrada da média dos erros ao quadrado e penaliza os erros maiores:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \tag{3.5}$$

Onde: y_i representa o valor observado e $\hat{y}_i$ o valor previsto, para n observações.

A escolha da janela de estimação também foi com base na comparação dos erros médios quadráticos (RMSE) e absolutos médios (MAE) fora da amostra, considerando a capacidade preditiva dos modelos HMM.

3.3.3 Portfólios

Para compreender a alocação ótima em diferentes regimes de volatilidade, foram ajustados portfólios diários com base no regime identificado a partir dos resultados obtidos na etapa de ajuste do HMM.

A cada período t, com $t = 1, ..., h$, o modelo de otimização é resolvido usando informações sobre o risco e retorno dos n ativos disponíveis para a alocação. Esses parâmetros são calculados com base no período da janela móvel utilizada para previsão do regime no período corrente e condicionados a ele.

A estratégia de alocação de ativos condicionada aos regimes identificados foi estruturada como um problema de otimização quadrática, com o objetivo de maximizar a utilidade esperada do investidor, penalizando simultaneamente o risco e os custos de transação, em uma estratégia *Long-Only*. A função objetivo adotada segue a estrutura de utilidade quadrática ponderada, conforme proposto por Boyd et al. (2017). Foi adotada uma função de penalidade l_1 para o turnover, ou alterações dos pesos em relação ao período anterior, conforme a Equação 3.6.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}_t} \quad & E[\mathbf{r}_t^T \mathbf{w}_t] - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}_t^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_t - \phi \|\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}\|_1 \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{w} \geq 0 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Em que $\mathbf{r}_t$ é o vetor de retornos esperados no tempo t; $\boldsymbol{\Sigma}$ representa a matriz de covariância dos retornos; $\mathbf{w}_t$ é o vetor de pesos da carteira no período t; $\lambda \in [0, \infty)$ é o parâmetro de aversão ao risco; e $\phi \in [0, \infty)$ é o parâmetro de custo de transação, o qual regula o impacto das mudanças nos pesos da carteira ao longo do tempo. A restrição $\mathbf{w}_t \geq 0$ impõe que apenas posições compradas são permitidas. Já o produto $\mathbf{1}^T \mathbf{w}_t$ representa a soma dos pesos, e ao ser igualado a 1, assegura que todo o capital disponível seja integralmente alocado.

O modelo descrito na Equação 3.6 foi aplicado utilizando exclusivamente os dados do HMM estimado com a *proxy* e a janela móvel identificada como mais adequada para a determinação dos regimes de volatilidade. Os dados utilizados na otimização desconsideram o período de *warm-up* do modelo HMM, tendo início em janeiro de 2020.

Como parâmetro de aversão ao risco, adotaram-se os valores $\lambda = 1$, 5 e 10. Um λ menor leva a uma alocação mais agressiva, na qual o investidor busca retornos mais elevados, aceitando maior risco. Por outro lado, valores maiores de λ resultam em portfólios mais conservadores, priorizando a minimização da volatilidade em detrimento de retornos potencialmente mais altos

(Li; Uysal; Mulvey, 2022).

Para os custos de transação, foram testados os parâmetros de 0.03%, 0.05% e 0.1%. Embora em número reduzido e em um intervalo restrito, a comparação entre diferentes valores é relevante, uma vez que existe a sensibilidade dos modelos ao rebalanceamento (Lewin; Campani, 2024), e há necessidade de passar por um processo de calibração (Han, 2020).

Cada mercado avaliado contou com quatro ativos, conforme detalhado na Tabela 3.1. A decisão de avaliar quatro ativos por mercado fundamenta-se no objetivo de comparar o comportamento entre eles. Essa abordagem comparativa demandou a identificação de fundos de índice com características semelhantes nos diferentes países. Contudo, como os ativos ETFs são recentes no mercado brasileiro, houve uma limitação no número de ativos que apresentavam a similaridade desejada.

A preferência pelos ETFs decorre de suas características vantajosas, como a combinação da diversificação de um fundo de investimento com a liquidez e a acessibilidade. Assim, em vez de analisar e adquirir títulos individuais, o investidor pode simplesmente comprar cotas de um ETF atrelado a um índice específico, o que representa um investimento indireto nos ativos componentes desse índice.

Para avaliar a efetividade do modelo HMM na alocação de portfólio, comparamos o desempenho da estratégia baseada em regimes de volatilidade com um portfólio de regime invariante no tempo (regime único) e uma estratégia ingênua. O portfólio de regime único segue a Equação 3.6, mas ignora a existência de regimes e realiza rebalanceamento trimestral. Assume-se, nesse caso, que os gestores ativos atualizam suas carteiras após a divulgação dos balanços das empresas, o que ocorre quatro vezes ao longo do ano. Já a estratégia ingênua consiste em alocar, diariamente, o orçamento disponível igualmente entre os ativos da carteira, sem considerar retorno esperado, risco, correlações ou qualquer outra informação disponível.

Formalmente, o peso de cada ativo i na carteira é dado por: $w_i = \frac{1}{n}, \quad \text{para } i = 1, ..., n,$ onde n representa o número de ativos disponíveis. Segundo Han (2020), a estratégia de pesos igualmente ponderados tende a ser um portfólio de referência eficaz, tanto teoricamente quanto empiricamente.

A comparação entre as estratégias é realizada por meio de métricas clássicas de desempenho: o retorno médio, o risco (medido pelo desvio-padrão dos retornos da carteira), o índice de Sharpe e o máximo *drawdown*.

3.4 Resultados Empíricos

3.4.1 Volatilidade e Ajuste do Modelo HMM

A Tabela 3.2 apresenta as estatísticas descritivas das séries utilizadas como *proxy* para volatilidade, empregadas no ajuste dos parâmetros do HMM para os mercados brasileiro e norte-americano. Observa-se que todas as medidas apresentam assimetria positiva e alta curtose,

indicando distribuições assimétricas e com caudas pesadas, características típicas de séries financeiras. Essas características ressaltam a adequação dos modelos com mudança de regime, como o HMM, para tratamento dessas séries, já que modelos tradicionais podem falhar em capturar adequadamente tais aspectos não lineares e extremos das séries financeiras.

Tabela 3.2 – Estatísticas descritivas das séries utilizadas como *proxy* para volatilidade

	Série	Média	Desvio_Pad	Assimetria	Curtose
BR	Volatilidade Implícita (VIXBR)	1.540	0.545	4.08	34.46
	Volatilidade Histórica (Ibovespa)	0.013	0.010	5.00	32.11
	Volatilidade Condicional (Ibovespa)	0.014	0.008	5.03	32.34
EUA	Volatilidade Implícita (VIX)	1.349	0.521	2.52	14.13
	Volatilidade Histórica (S&P500)	0.011	0.008	3.88	22.54
	Volatilidade Condicional (S&P500)	0.011	0.008	4.26	28.07

Nota: BR é a abreviação para Brasil e EUA para Estados Unidos da América. As séries de volatilidade são diárias e o período de análise de janeiro de 2020 a dezembro de 2024.

No mercado brasileiro, o Índice de Volatilidade Implícita do índice Ibovespa (VIXBR) apresenta média de 1.540 e volatilidade de 0.545, valores superiores aos apresentados pelas medidas de volatilidade histórica e condicional do Ibovespa, que apresentam valores médios semelhantes entre si. O mesmo comportamento é observado nos EUA, onde a volatilidade implícita (VIX) exibe média de 1.349 e desvio-padrão de 0.521. As volatilidades histórica e condicional do S&P500, apesar de apresentarem médias idênticas, possuem maiores níveis de assimetria e curtose em comparação com a volatilidade implícita.

Esses resultados indicam que a volatilidade implícita, refletindo expectativas futuras sobre o risco, tende a ser mais elevada devido à incerteza antecipada pelos investidores. Por outro lado, a volatilidade histórica e condicional capturam mais diretamente a dinâmica recente do mercado, o que pode explicar suas similaridades. Todas as *proxies* analisadas revelam características estatísticas não normais, reforçando a importância do uso de modelos flexíveis, como os Modelos Ocultos de Markov, capazes de lidar adequadamente com mudanças estruturais e eventos extremos presentes nas séries financeiras.

Seguindo os procedimentos metodológicos propostos, são discutidos inicialmente os resultados a respeito das estimativas obtidas pelo modelo HMM. Os resultados da performance para as diferentes medidas de volatilidade na identificação de regimes de volatilidade são apresentados na Tabela 3.3.

O teste de Kruskal-Wallis revela diferenças estatisticamente significativas entre os índices de volatilidade em relação ao ajuste do HMM, corroborando a importância da métrica escolhida para representar a volatilidade como um fator crucial no processo de identificação dos regimes. Isso evidencia que essa escolha não pode ser feita de maneira arbitrária. Por outro lado, não foram encontradas evidências de diferença estatística nas janelas avaliadas.

Os resultados mostram que a volatilidade implícita apresenta os maiores valores de RMSE

Tabela 3.3 – Comparação das Medidas de Ajuste do Modelo HMM com diferentes medidas de Volatilidade

Índice	**Janela**	**Brasil**		**Estados Unidos**	
		RMSE	MAE	RMSE	MAE
Volatilidade Implícita	126	0.3695	0.1632	0.3220	0.1858
	252	0.4089	0.2050	0.3836	0.2429
	504	0.4237	0.2120	0.4255	0.2498
Volatilidade Condicional	126	0.0045	0.0018	0.0054	0.0027
	252	0.0059	0.0025	0.0060	0.0031
	504	0.0065	0.0027	0.0065	0.0033
Volatilidade Histórica	126	0.0057	0.0025	0.0048	0.0025
	252	0.0069	0.0032	0.0062	0.0033
	504	0.0074	0.0034	0.0062	0.0032

Nota: O teste de Kruskal-Wallis indica diferenças estatisticamente significativas entre os índices de volatilidade (RMSE - *p-valor* = 0.0304 e MAE - *p-valor* = 0.0213). No entanto, não foram encontradas diferenças significativas entre as janelas analisadas (RMSE - *p-valor* = 0.1299 e MAE - *p-valor* = 0.2199).

e MAE entre todas as medidas avaliadas, tanto no Brasil quanto nos EUA. Já as volatilidades condicional e histórica apresentaram valores menores de RMSE e MAE, sugerindo que ambas são mais eficientes em capturar a dinâmica do mercado e suas transições entre regimes de volatilidade. Contudo, em termos absolutos, a volatilidade condicional estimada via modelos GARCH apresentou um desempenho levemente superior no período analisado. Observa-se também que o comportamento das medidas de volatilidade e das janelas móveis é similar entre os dois mercados.

Com base nos resultados apresentados, embora a volatilidade implícita seja amplamente utilizada (Bekaert; Hoerova, 2014; Chauvet; Senyuz; Yoldas, 2015; Aigner, 2022; Bai; Cai, 2024), a volatilidade condicional mostrou-se mais eficaz para identificar regimes no caso específico analisado. Esses resultados corroboram os achados de Nystrup et al. (2016), que, embora não tenham testado diretamente diferentes medidas de volatilidade usando HMM, constataram que pontos de mudança identificados em retornos do S&P 500 (relacionados à volatilidade realizada ou condicional) são potencialmente mais lucrativos para estratégias dinâmicas do que aqueles derivados da volatilidade implícita (VIX).

Desta forma, a volatilidade condicional pode fornecer uma descrição mais estável e consistente da estrutura da volatilidade do mercado. Modelos GARCH são reconhecidos por capturar características fundamentais das séries financeiras, como o agrupamento de volatilidade e a assimetria dos choques informacionais, vantagens que se mantêm mesmo em contextos de mudanças de regime (Ardia et al. 2018). Tais características são essenciais para distinguir regimes de volatilidade, possivelmente não tão claramente refletidos na volatilidade implícita, que está mais focada nas expectativas futuras.

Destaca-se que a volatilidade implícita, apesar de ser uma medida prospectiva valiosa derivada dos preços de opções, pode ser influenciada por fatores externos ao regime do ativo

subjacente, como o sentimento geral do mercado, a oferta e demanda por opções, e prêmios de risco específicos do mercado de derivativos. Em contraste, a volatilidade condicional reflete mais diretamente a dinâmica histórica dos retornos do próprio ativo ou índice (Bekaert; Hoerova, 2014; Aigner, 2022).

A seguir, exploramos a segmentação dos regimes de mercado a partir dessa *proxy* e avaliamos seu impacto na alocação de portfólios, considerando uma janela móvel de 252 dias (aproximadamente um ano). Como discutido, a escolha da janela não apresentou uma diferença estatisticamente significativa, tornando-se, portanto, uma decisão arbitrária entre os períodos avaliados. No entanto, a opção por 252 dias se mostra a mais razoável, ao equilibrar a necessidade de capturar a dinâmica dos regimes sem comprometer a robustez da análise. E esse valor está próximo do ideal reportado por Jacobs e Karagozoglu (2014).

Uma janela de 126 dias (aproximadamente seis meses) poderia resultar em um conjunto de dados reduzido para cada regime, prejudicando a etapa de alocação. Por outro lado, uma janela de 504 dias (aproximadamente dois anos) aumentaria o risco de deterioração da capacidade preditiva da volatilidade, dado que janelas mais longas podem suavizar excessivamente as transições entre regimes. Assim, a escolha de 252 dias representa uma opção adequada entre estabilidade dos pesos e capacidade preditiva.

Dessa forma, considerando a volatilidade condicional, uma janela de 252 dias e a presença de dois regimes, verificou-se que a frequência das transições entre regimes foi semelhante nos mercados analisados. No período estudado, o mercado brasileiro alternou entre regimes 33 vezes (2.65%), enquanto o mercado americano registrou 35 mudanças (2.78%). Em termos de duração, o Brasil permaneceu aproximadamente 30% do período analisado em regime de alta volatilidade, enquanto os Estados Unidos apresentaram 39% do tempo nesse regime.

Esses resultados estão em linha com estudos anteriores, que apontam que períodos de baixa volatilidade tendem a ser mais longos e frequentes do que períodos de alta volatilidade, os quais, por sua vez, estão tipicamente associados a crises e recessões (Chauvet; Senyuz; Yoldas, 2015; Ma et al. 2019; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Peng; Kim; Mittnik, 2022; Asgharian; Christiansen; Hou, 2023).

Ademais, a elevada persistência observada nos regimes corrobora o fenômeno estilizado de agrupamento de volatilidade, no qual períodos de volatilidade elevada costumam ser seguidos por mais períodos de volatilidade elevada, enquanto períodos de volatilidade baixa tendem a permanecer nessa condição. Em outras palavras, os regimes de volatilidade não ocorrem de forma aleatória, mas sim em *clusters*, caracterizando períodos prolongados de estabilidade ou turbulência nos mercados (Pfaff, 2016; Ma et al. 2019).

Verifica-se que, ao contrário do que se poderia esperar, o mercado americano esteve exposto a um período mais prolongado de maior volatilidade em comparação com o mercado brasileiro. Esse resultado pode parecer contraintuitivo, uma vez que mercados emergentes, como o Brasil, tendem a ser mais sensíveis a choques externos (De Paula; Fritz; Prates, 2024). No entanto, conforme apontado por Asgharian, Christiansen e Hou (2023), a incerteza econômica

e política atua como um *driver* da volatilidade, influenciando a persistência e a intensidade dos regimes de alta e baixa volatilidade, o que pode justificar o comportamento observado. O período analisado, além de incluir um período pós-pandêmico, contempla dois conflitos bélicos relevantes (guerra na Ucrânia e as tensões no Oriente Médio), os quais podem ter impactado mais diretamente os Estados Unidos devido à sua atuação ativa em crises geopolíticas, seja por meio de sanções ou apoio diplomático e militar (Douglas; Conrad; Frederick, 2025).

Essas diferenças refletem características estruturais dos mercados analisados. A maior persistência da alta volatilidade nos Estados Unidos durante o período analisado pode ser atribuída à sua exposição direta a eventos geopolíticos recentes, enquanto o mercado brasileiro, apesar de historicamente mais volátil, apresentou um comportamento relativamente mais resiliente nesse ciclo.

3.4.2 Utilizando o HMM para Investimento em Carteiras

Para a etapa de construção de portfólios, conforme listado na Tabela 3.1, foram usados quatro ETFs para cada um dos mercados, brasileiro e americano. Os ETFs considerados para o mercado americano foram o IVV, IWM, IEF e TIP, todos denominados em dólares americanos. Os ETFs para o mercado brasileiro foram o BOVA11, SMAL11, FIXA11 e IMAB11, denominados em reais (doravante, BOVA, SMAL, FIXA e IMAB). Na Tabela 3.4, são apresentados alguns indicadores desses ativos, para uma análise exploratória inicial.

Tabela 3.4 – Indicadores dos ETFs por mercado e ano

	Brasil				**EUA**			
Ano	**BOVA**	**SMAL**	**IMAB**	**FIXA**	**IVV**	**IWM**	**IEF**	**TIP**
Retornos em excesso anualizados (%)								
2020	-8.64	-13.19	3.96	5.75	15.72	17.92	8.45	9.13
2021	-19.34	-25.12	-11.41	-13.36	27.01	13.42	-4.16	1.17
2022	-0.10	-22.81	-8.08	-5.64	-21.51	-23.69	-18.76	-19.67
2023	18.25	10.43	3.28	4.52	19.47	10.19	-4.40	-4.05
2024	-19.13	-32.0	-15.41	-15.46	18.86	5.03	-8.88	-5.71
Performances para o período completo (anualizadas)								
Retorno em Excesso (%)	-2.95	-13.76	-1.63	-1.04	10.26	1.92	-3.74	-2.04
Volatilidade (%)	26.18	32.28	10.01	7.32	21.45	27.55	7.97	7.34
Índice de Sharpe	-0.11	-0.43	-0.16	-0.14	0.48	0.07	-0.47	-0.28
Índice de Sharpe Corrigido	-0.008	-0.044	-0.002	-0.001	0.478	0.070	-0.003	-0.001

Nota: EUA é a abreviação para Estados Unidos da América. A descrição para os ETFs pode ser obtida na Tabela 3.1. Os valores do retorno em excesso são calculados subtraindo a taxa livre de risco média ao ano do retorno médio ao ano do ETF. A *proxy* para taxa livre de risco no Brasil é a taxa básica de juros (Selic), enquanto no mercado americano é utilizado o IRX. O Índice de Sharpe é calculado como o quociente entre o retorno médio em excesso anualizado e o desvio-padrão anualizado dos retornos. O Índice de Sharpe Corrigido considera o ajuste proposto por Israelsen (2005) quando o retorno em excesso é negativo.

A análise da Tabela 3.4 permite observar que os diferentes ativos apresentaram

comportamentos distintos ao longo dos anos avaliados. O ano de 2023 destacou-se como um período de recuperação, especialmente para o mercado brasileiro; no entanto, em 2024, retornos negativos voltaram a prevalecer, com exceção dos ETFs atrelados ao mercado acionário norte-americano. Considerando o período completo, constata-se que a volatilidade dos ETFs vinculados à renda fixa foi consistentemente menor do que a dos ETFs atrelados à renda variável, refletindo as características intrínsecas dos ativos subjacentes.

Analisando os índices de Sharpe, percebe-se que o período foi desafiador em relação ao risco-retorno dos ativos considerados. No mercado brasileiro, o ETF atrelado ao índice de mercado (BOVA11) teve desempenho próximo aos ETFs de renda fixa, enquanto o ETF vinculado a *small caps* teve desempenho inferior aos demais ativos. Esses resultados sugerem que não houve um prêmio significativo pelo risco no mercado brasileiro, no período estudado, diferentemente do que foi observado no mercado americano.

É importante ressaltar que o período estudado coincide com o cenário pós-crise da pandemia da COVID-19, caracterizado pela elevação das taxas básicas de juros nos mercados globais, em resposta ao avanço da inflação, o que foi impulsionado por conflitos geopolíticos e desequilíbrios econômicos a partir de 2022. De maneira geral, em um cenário de alta de juros, novos títulos de renda fixa são emitidos com taxas mais elevadas, tornando os títulos antigos menos atrativos e, consequentemente, pressionando negativamente os ativos de renda variável, ao reduzir o apelo de investimentos mais arriscados. Isso pode levar os gestores de carteira a realocar capital da renda variável para a renda fixa, em especial no mercado brasileiro (ANBIMA, 2024).

Os efeitos dos regimes de alta e baixa volatilidade sobre o comportamento médio das estatísticas descritivas dos ativos podem ser observados na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Média e Desvio Padrão dos Retornos por Ano e Regime de Volatilidade

Nota: EUA é a abreviação para Estados Unidos da América e a descrição para os ETFs fornecida na Tabela 3.1. Os valores para o Retorno (média) e Risco (desvio-padrão) anualizados são expressos em percentual. LowVol representa o regime de baixa volatilidade e HighVol representa o regime de alta volatilidade.
Fonte: Elaboração própria.

A partir dos retornos médios e da volatilidade para os dois estados classificados em regimes de volatilidade (HighVol e LowVol), observa-se, no geral, um comportamento semelhante entre o mercado brasileiro e o americano. Em ambos os mercados, anos de alta volatilidade (HighVol) tendem a apresentar retornos médios anualizados mais variáveis e negativos, ao passo que a volatilidade anual tende a ser maior. Esse comportamento é esperado, pois períodos de alta incerteza no mercado frequentemente resultam em quedas acentuadas nos preços dos ativos. Por outro lado, em anos de baixa volatilidade (LowVol), os retornos médios anualizados são mais frequentemente positivos e a volatilidade anualizada é menor. Os ETFs atrelados a títulos de renda fixa exibem um comportamento mais defensivo, com menor volatilidade em comparação com os ETFs atrelados a títulos de ações, para ambos os regimes.

Essa dinâmica reforça a importância das estratégias de alocação dependentes de regime, dado que diferentes ativos reagem de maneira distinta às mudanças nas condições gerais do mercado. Essa abordagem tem sido amplamente discutida na literatura, conforme apontado em estudos recentes (Oprisor; Kwon, 2021; Campani; Garcia; Lewin, 2021; Nystrup et al. 2019; Li; Uysal; Mulvey, 2022).

A Tabela 3.5 apresenta as correlações entre os ativos segundo os regimes de alta e baixa volatilidade, e para o período completo. Os resultados confirmam achados da literatura, como apontado por Ang e Timmermann (2012), Jacobs e Karagozoglu (2014), Peng, Kim e Mittnik (2022) e Davoodi, Fereydooni e Rastegar (2024), indicando que a correlação entre os ativos varia conforme o regime. Essa mudança tem implicações diretas sobre a dinâmica do risco sistêmico e a eficácia da diversificação do portfólio.

Tabela 3.5 – Matriz de Correlação dos Ativos por Regime de Volatilidade e Período Completo

Regime de Volatilidade/Período			**Pares de Ativos**			
BR	BOVA/SMAL	BOVA/IMAB	BOVA/FIXA	SMAL/IMAB	SMAL/FIXA	IMAB/FIXA
HighVol	0.91	0.56	0.57	0.57	0.57	0.66
LowVol	0.81	0.19	0.30	0.23	0.33	0.35
Completo	0.87	0.44	0.43	0.45	0.45	0.51
EUA	IVV/IWM	IVV/IEF	IVV/TIP	IWM/IEF	IWM/TIP	IEF/TIP
HighVol	0.92	-0.22	0.09	-0.16	0.16	0.67
LowVol	0.79	0.05	0.12	0.03	0.12	0.81
Completo	0.87	-0.10	0.09	-0.07	0.13	0.74

Nota: BR é a abreviação para Brasil e EUA para Estados Unidos da América. A descrição para os ETFs fornecida na Tabela 3.1. Completo representa todo o período de análise de 2020 a 2024, LowVol representa o período correspondente ao regime de baixa volatilidade e HighVol representa o período correspondente ao regime de alta volatilidade.

As correlações entre ativos tendem a aumentar em ambientes de alta volatilidade e, como apontado por Kritzman, Page e Turkington (2012) e Jacobs e Karagozoglu (2014), esse tipo de vínculo entre ativos é muito relevante, por implicar que a diversificação tradicional pode ser menos eficaz em momentos de estresse de mercado, ao limitar as oportunidades de redução de

risco através da diversificação.

Destaca-se que tanto no mercado brasileiro quanto no americano, a correlação entre os ETFs atrelados aos índices de mercado e os ETFs atrelados a índices de empresas *Small Caps* apresentou elevada correlação positiva nos períodos de alta volatilidade, acima de 90%. Esse resultado também sugere que a diversificação entre ações de grande e pequeno porte pode ser menos eficaz em momentos de alta volatilidade.

A diversificação condicional aos regimes, ao contrário da tradicional, pode gerar ganhos ao longo de um ciclo completo de mercado (Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022). Isso ocorre porque a estratégia de rebalanceamento baseada em regimes permite ajustes dinâmicos que reduzem perdas excessivas durante períodos turbulentos e otimizam retornos na recuperação do mercado (Bae; Kim; Mulvey, 2014). Os resultados do HMM, identificando no mercado os regimes de alta e baixa volatilidade, são usados para determinar os pesos necessários entre os ativos.

O rebalanceamento dos portfólios dinâmicos é realizado quando a previsão do regime de volatilidade na data corrente muda em relação ao regime anterior. Essa abordagem visava evitar custos de transação excessivos, decorrentes de ajustes frequentes não fundamentados em mudanças significativas nas condições de mercado. No rebalanceamento, os pesos dos ativos são recalculados com base nos parâmetros estimados para o regime identificado, caracterizando a carteira como pertencente a um ambiente de alta ou baixa volatilidade. A estratégia adotada consistia exclusivamente em posições compradas, e o modelo de otimização busca maximizar a utilidade do investidor, equilibrando o retorno esperado, o risco e os custos de transação (Equação 3.6).

A Tabela 3.6 apresenta os pesos médios atribuídos aos ETFs quando identificados o regime de baixa ou de alta volatilidade.

Tabela 3.6 – Pesos médios dos ativos por regime de volatilidade, nível de aversão e custo de transação de 0.05%.

Mercado	λ	Regime	Ativos				SumEquity	SumFixed
			BOVA	**SMAL**	**IMAB**	**FIXA**		
BR	5	HighVol	0.2680	0.2227	0.2631	0.2462	0.4907	0.5093
		LowVol	0.2721	0.1434	0.2705	0.3141	0.4155	0.5846
	10	HighVol	0.2517	0.1593	0.2753	0.3137	0.411	0.589
		LowVol	0.2387	0.1118	0.2822	0.3674	0.3505	0.6496
			IVV	**IWM**	**IEF**	**TIP**		
EUA	5	HighVol	0.2829	0.3709	0.1764	0.1698	0.6538	0.3462
		LowVol	0.2765	0.2561	0.2172	0.2502	0.5326	0.4674
	10	HighVol	0.3655	0.2343	0.215	0.1852	0.5998	0.4002
		LowVol	0.2559	0.2019	0.2514	0.2908	0.4578	0.5422

Nota: BR é a abreviação para Brasil e EUA para Estados Unidos da América. A descrição para a abreviatura dos ETFs é fornecida na Tabela 3.1. Os pesos médios representam a alocação média dos ativos em cada regime de volatilidade, no período de 2020 a 2024, em uma estratégia *LongOnly*. SumEquity indica a alocação total em ETFs atrelados à ações, enquanto SumFixed representa a alocação em ETFs atrelados à renda fixa. LowVol representa o regime de baixa volatilidade e HighVol representa o regime de alta volatilidade. λ representa a aversão ao risco e ϕ o custo de transação.

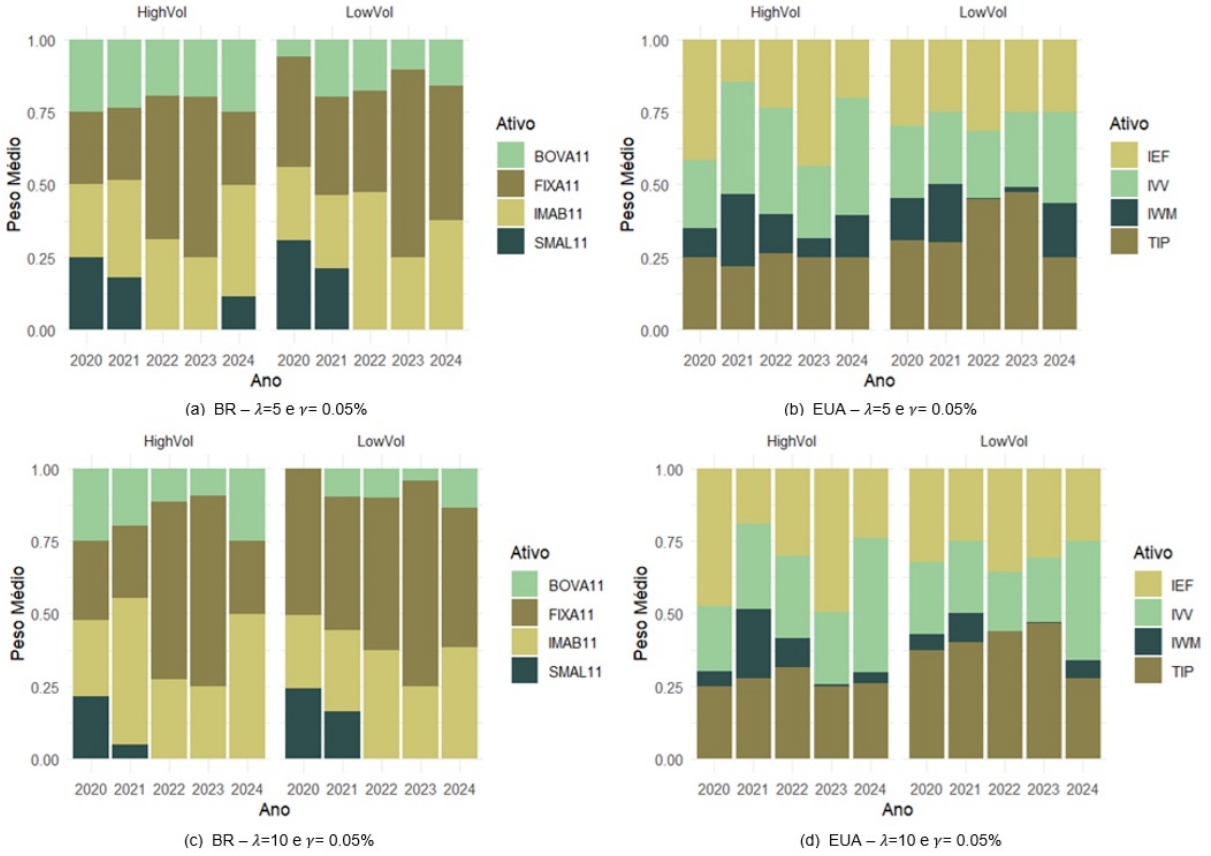
Embora a Tabela 3.6 apresente os pesos das carteiras apenas para $\lambda = 5$, $\lambda = 10$ e $\phi = 0.05\%$, conforme descrito nos procedimentos metodológicos, neste artigo λ também assumiu o valor 1, de forma a avaliar a sensibilidade das carteiras quanto à aversão ao risco. Para o parâmetro de custo de transação, foram considerados adicionalmente os valores de 0.03% e 0.1%. Os resultados correspondentes não foram incluídos na Tabela 3.6 por questões de espaço e organização. Ademais, os resultados observados para esses parâmetros adicionais foram consistentes com o esperado, isto é, o aumento da aversão ao risco tende a tornar a carteira mais conservadora e o aumento do custo de transação inibe variações nos pesos da carteira (DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Grant; Kwon; Satchell, 2024; Lewin; Campani, 2024).

O aumento de λ resultou em maior concentração dos pesos em ETFs atrelados a índices de renda fixa, o que é condizente com perfis de investidores mais conservadores. Embora o comportamento dos pesos seja o esperado em relação ao nível de aversão assumido, surpreendentemente, a concentração média nesses ativos foi ainda maior durante períodos classificados como de baixa volatilidade, comparativamente aos períodos de alta volatilidade.

Para o Brasil, a concentração entre renda fixa e variável foi oposta à observada para os Estados Unidos. No Brasil, dependendo do regime e da aversão ao risco adotada, a concentração em renda variável não ultrapassou 50%, com alocação em renda fixa chegando a 65% no regime LowVol e agentes mais avessos ao risco. No caso dos Estados Unidos, em geral, observou-se maior concentração em renda variável, sem diferir substancialmente da alocação 60/40 indicada por Kandhari (2024) e Grant, Kwon e Satchell (2024), com exceção do caso LowVol que considera um investidor mais avesso ao risco. A média dos pesos entre os ETFs, por regime e

ano, pode ser observada na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Evolução dos pesos entre os regimes



Nota: BR é a abreviação para Brasil e EUA para Estados Unidos da América. A descrição para os ETFs fornecida na Tabela 3.1. LowVol representa o regime de baixa volatilidade e HighVol representa o regime de alta volatilidade. λ representa a aversão ao risco e ϕ o custo de transação.
Fonte: Elaboração própria.

Contudo, esse comportamento também pode ser explicado pela própria lógica do modelo de otimização, que objetiva maximizar o retorno esperado e minimizar simultaneamente o risco da carteira, penalizando o custo de transação (Equação 3.6). Durante períodos de baixa volatilidade, ainda que o risco percebido no mercado acionário seja menor, os ETFs que replicam títulos de renda fixa podem oferecer uma relação risco-retorno mais atraente, particularmente em contextos econômicos específicos, como aqueles marcados por taxas de juros reais elevadas.

Durante o período considerado para a alocação de ativos, 2020 a 2024, a taxa básica de juros no mercado brasileiro aumentou 10.25 pontos percentuais, enquanto no mercado americano houve aumento de 4.5 pontos percentuais. O movimento ascendente da taxa básica de juros exerce pressão negativa sobre o *valuation* das empresas, uma vez que eleva o custo do capital e reduz o valor presente dos fluxos futuros de caixa, resultando em queda nos preços das ações e, consequentemente, redução no valor de mercado das empresas (Kim, 2003). Por outro lado, aumentos na taxa de juros elevam a rentabilidade dos títulos de renda fixa sem necessariamente

alterar a percepção de risco desses títulos, tornando-os relativamente mais atrativos em termos de *trade-off* risco-retorno. O modelo, ao captar essa condição favorável, amplia naturalmente a alocação nesses ativos.

Opostamente, durante períodos de alta volatilidade, embora pudesse ser esperada uma maior alocação em ETFs que replicam índices de renda fixa, indicando uma maior procura por ativos com maior previsibilidade e segurança, o modelo pode identificar oportunidades pontuais de retorno em ativos de renda variável, especialmente após correções expressivas nos preços, ampliando a flexibilidade na alocação. Assim, paradoxalmente, a carteira pode apresentar, em média, um peso menor em ETFs de renda fixa nesses períodos, sugerindo que o modelo aproveita momentos específicos para capturar ganhos de curto prazo na renda variável. Além disso, em todo momento, além de ponderar o *trade-off* retorno e risco o modelo também considera a perda de bem-estar pela troca excessiva das posições da carteira.

Destaca-se que, durante o período analisado, a amplitude do aumento da taxa de juros no mercado brasileiro foi maior comparativamente ao mercado americano, justificando, em parte, a alta concentração média recomendada pelo modelo em ETFs atrelados à renda fixa, independentemente do regime de volatilidade observado. Nos Estados Unidos, entretanto, a menor amplitude do ciclo de juros permitiu maior flexibilidade do modelo em alternar entre os ETFs.

Esses resultados sugerem, assim como em Chauvet, Senyuz e Yoldas (2015), uma relação entre volatilidade financeira e flutuações macroeconômicas, reforçando a importância de uma análise detalhada das condições macroeconômicas e financeiras associadas a cada regime, e ressaltam a capacidade do modelo de otimização em identificar nuances relevantes para a alocação dinâmica de ativos, superando os padrões heurísticos tradicionais de alocação estática, como a divisão 60/40, frequentemente encontrada na literatura.

Além disso, conforme já mencionado, quanto maior o custo de transação, menor a predisposição do modelo em relação aos ajustes nos pesos do portfólio. O custo de 0.1% mostrou-se excessivo, resultando em alocações praticamente constantes e restringindo, sobretudo, a flexibilidade do modelo com mudança de regime. Por outro lado, o custo de 0.03% permitiu ajustes mais agressivos, o que pode gerar um *turnover* elevado e, consequentemente, custos acumulados ao longo do tempo. O custo intermediário de 0.05% proporcionou um equilíbrio adequado, permitindo alocações dinâmicas, porém sem mudanças excessivas, indicando também a importância da calibração apropriada dos parâmetros (Han, 2020).

Dessa forma, os parâmetros que apresentaram o equilíbrio mais favorável entre estabilidade dos pesos e flexibilidade foram $\lambda = 5$ ou $\lambda = 10$ e um custo de transação de 5 pontos-base (0.05%). Estudos como os de Li, Uysal e Mulvey (2022) e Boyd et al. (2017) apontam que uma aversão ao risco em torno de 5 costuma fornecer boa estabilidade dos pesos ao portfólio.

A Tabela 3.7 apresenta uma comparação do desempenho das estratégias de alocação testadas para o mercado brasileiro (BR) e norte-americano (EUA). As métricas avaliadas incluem

Tabela 3.7 – Comparação de Desempenho das Estratégias de Alocação

Mercado	λ	**Estratégia**	**Ret.Acum.**	**Sharpe**	**Sortino**	**MaxDD**	**Volat.**
BR	5	Regime Dinâmico	-6.40	-1.45	0.08	36.96	17.60
		Regime Único	-43.95	-5.42	-3.00	51.39	23.73
		EW	**2.00**	**-1.07**	**0.89**	**30.99**	**16.49**
	10	Regime Dinâmico	1.06	**-1.03**	0.74	32.04	**15.37**
		Regime Único	-38.72	-4.95	-2.64	51.39	22.24
		EW	**2.00**	-1.07	**0.89**	**30.99**	16.49
EUA	5	Regime Dinâmico	**12.81**	-1.38	2.07	29.12	14.21
		Regime Único	-6.52	-5.27	0.15	41.30	18.12
		EW	12.52	**-0.85**	**2.15**	**23.88**	**12.46**
	10	Regime Dinâmico	**16.02**	**-0.82**	**2.57**	24.30	12.67
		Regime Único	1.23	-4.72	0.78	35.08	15.73
		EW	12.52	-0.85	2.15	**23.88**	**12.46**

Nota: BR é a abreviação para Brasil e EUA para Estados Unidos da América. Os valores em negrito representam os indicadores com melhor desempenho entre as estratégias para um dado nível de aversão ao risco e mercado. O período de análise compreende janeiro de 2020 a dezembro de 2024. EW representa a carteira de pesos igualmente ponderados. Ret.Acum. é a abreviação para retorno acumulado, MaxDD para Máximo Drawdown e Volat. para volatilidade. Os valores de retorno acumulado, máximo Drawdown e volatilidade estão apresentados em percentual. Sharpe, refere-se ao índice de Sharpe com correção conforme proposto por Israelsen (2005) quando o retorno em excesso é negativo.

Retorno Acumulado, Índice de Sharpe, Índice de Sortino, Máxima Perda (Máximo *Drawdown*) e Volatilidade, permitindo avaliar a alocação condicional à mudança de regime e à incerteza do mercado, no período analisado (2020–2024).

No mercado brasileiro, considerando uma aversão ao risco de 5 e custo de transação de 0.05%, a estratégia de Regime Dinâmico apresentou um retorno acumulado (-6.40%) superior ao da estratégia de Regime Único, mas inferior ao da estratégia Ingênua (2%). Esse padrão se repete nos demais indicadores: o Regime Dinâmico apresenta desempenho intermediário entre as duas estratégias. Com o aumento da aversão ao risco para 10, o Regime Dinâmico melhora seu retorno (1.06%) e passa a apresentar a menor volatilidade (15.37%). No entanto, a estratégia Ingênua continua com melhor retorno e menores *drawdowns*, permanecendo a mais eficiente em termos gerais. A estratégia de Regime Único, por sua vez, apresentou desempenho consistentemente inferior em todas as métricas analisadas.

A análise da significância estatística dos Índices de Sharpe, via teste de Ledoit e Wolf (2008), confirma essa hierarquia: a estratégia de Regime Único mostrou-se estatisticamente inferior à Ingênua (p-valor = 0.043 para lambda=5), enquanto a superioridade do Regime Dinâmico sobre o Regime Único foi marginalmente significativa (p-valor < 0.10 para ambos os níveis de lambda). Notavelmente, a aparente vantagem da carteira Ingênua sobre a de Regime Dinâmico não se traduziu em uma diferença estatisticamente significativa em termos de retorno ajustado ao risco (p-valor > 0.46).

No mercado norte-americano, os resultados favorecem a estratégia de Regime Dinâmico. Para $\lambda = 5$, ela apresenta retorno acumulado de 12.81%, ligeiramente superior ao da carteira

Ingênua (12.52%). Já para $\lambda = 10$, o Regime Dinâmico se destaca para o retorno acumulado (16.02%) e os índices referentes aos retornos ajustados ao risco (Sharpe e Sortino). Ainda assim, a carteira Ingênua continua exibindo, ligeiramente, uma menor volatilidade (12.46%) e menor *drawdown* (23.88%). Contudo, apesar da superioridade pontual do Regime Dinâmico em vários indicadores, o teste de Ledoit e Wolf (2008) não apontou diferenças estatisticamente significativas nos Índices de Sharpe entre nenhuma das três estratégias (p-valor > 0.38 para todos os pares e níveis de lambda). Isso sugere que, em termos de eficiência de risco-retorno, as estratégias Dinâmica e Ingênua foram estatisticamente indistinguíveis no mercado dos EUA durante o período. A estratégia de Regime Único novamente apresenta os piores resultados, reforçando suas limitações em capturar a dinâmica da volatilidade.

A aplicação dos testes de hipótese revela uma perspectiva multifacetada do desempenho. Os resultados sugerem que a vantagem da estratégia de Regime Dinâmico sobre a abordagem de Regime Único é estatisticamente significativa (ou marginalmente) em termos de eficiência em termos da geração de retorno por unidade de risco. No entanto, quando comparadas as estratégias Dinâmica e a Ingênua, embora a abordagem Dinâmica tenha gerado, em alguns cenários, um retorno acumulado superior, seu Índice de Sharpe não se mostrou estatisticamente diferente da estratégia $1/n$. Esses resultados são complementares e sugerem que, a superioridade do modelo dinâmico em termos de retorno acumulado observada em alguns cenários não corresponde a uma maior eficiência (retorno por unidade de risco). Este achado é particularmente relevante, pois indica que a complexidade do modelo dinâmico, embora útil para o controle de risco, não garantiu uma melhora inequívoca na performance ajustada ao risco em relação à simples diversificação 1/n.

A diferença de desempenho entre os mercados pode estar relacionada à maior persistência do regime de alta volatilidade nos EUA, que representou aproximadamente 40% do período amostral, comparado a cerca de 30% no mercado brasileiro. Essa característica pode ter ampliado a eficácia do modelo de mudança de regime para o mercado americano, ao permitir melhor adaptação às variações do mercado. Já no Brasil, apesar da menor frequência de mudanças de regime, apresentou retornos mais negativos, em especial em regimes de alta volatilidade, e maiores quedas, comparado ao mercado americano (3.2). Elementos que refletem um ambiente de maior instabilidade e incerteza, o que pode ter favorecido a robustez da estratégia Ingênua.

Conforme argumentado por De Jong (2018), apesar de sua simplicidade, a estratégia de carteiras igualmente ponderadas pode ser robusta em mercados altamente incertos. Essa ideia é amplamente discutida por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), segundo os quais um portfólio 1/n frequentemente supera modelos dinâmicos baseados em regras ótimas. No modelo analisado, a incerteza dos parâmetros é inerente à estimação das probabilidades de transição e das distribuições de retornos em cada regime identificado pelo Modelo Oculto de Markov (HMM), mas outras propostas podem utilizar a penalização do desvio de um portfólio de referência, como o 1/n, para aumentar a robustez das estratégias de alocação (Han, 2020).

Embora o mercado brasileiro, especificamente, tenha apresentado uma menor frequência

de mudanças de regime e a menor permanência em períodos de alta volatilidade, por ser um mercado emergente, é caracterizado como um mercado de maior instabilidade, favorecendo com que a estratégia ingênua capturasse retornos sem depender de previsões explícitas sobre regimes (Santiago; Leal, 2015). Esse resultado pode decorrer de benefícios relacionados à redução dos custos de transação (Han, 2020). Contudo, a ausência de um mecanismo adaptativo limita a capacidade da carteira Ingênua em se ajustar a diferentes níveis de risco, o que é evidenciado pelo fato de que, à medida que a aversão ao risco aumenta, o desempenho da estratégia de Regime Dinâmico melhora, enquanto o da estratégia Ingênua permanece inalterado.

Dessa forma, os resultados obtidos neste estudo corroboram a crescente evidência na literatura de que modelos de múltiplos regimes, como o modelo HMM, são particularmente eficazes na alocação dinâmica de ativos. Estudos recentes, como os de Fons et al. (2021) e Li, Uysal e Mulvey (2022), destacam a capacidade desses modelos de identificar mudanças nas condições de mercado, permitindo o ajuste mais preciso das estratégias de investimento em comparação com as abordagens baseadas em regimes únicos. Além disso, a abordagem dinâmica se mostra uma estratégia eficaz para o controle da exposição ao risco, especialmente quando o objetivo é alinhar a exposição ao risco com o perfil do investidor.

3.5 Considerações Finais

Este estudo avaliou o desempenho de diferentes medidas de volatilidade (histórica, condicional e implícita) na identificação de regimes em mercados financeiros, utilizando Modelos Ocultos de Markov (HMM). Os resultados empíricos sugerem que, dentre as medidas analisadas, a volatilidade condicional estimada com modelos GARCH apresentou melhor desempenho na identificação e previsão dos regimes, tanto no mercado brasileiro quanto no norte-americano. Por outro lado, as diferentes janelas móveis testadas não apresentaram diferença estatisticamente significativa para o ajuste dos modelos.

Os mercados brasileiro e norte-americano exibiram padrões distintos ao longo do período estudado. Surpreendentemente, o Brasil, como economia emergente, permaneceu por menos tempo em regime de alta volatilidade em comparação com os Estados Unidos, que enfrentaram períodos mais prolongados de volatilidade elevada, potencialmente influenciados por instabilidades geopolíticas recentes. Ademais, assim como em outros estudos da literatura, constatou-se que as correlações entre ativos variam conforme o regime vigente, reforçando a relevância de estratégias dinâmicas para otimizar a diversificação de portfólios.

Do ponto de vista da alocação de ativos, as estratégias condicionadas aos regimes identificados pelos modelos HMM demonstraram maior eficiência no controle de risco das carteiras, especialmente quando comparadas à abordagem tradicional de regime único. Para o cenário analisado, no mercado brasileiro, a estratégia de Regime Dinâmico apresentou retorno acumulado inferior à da carteira igualmente ponderada (EW). Já no mercado norte-americano, a estratégia de Regime Dinâmico superou as demais em termos de retorno acumulado e apresentou

os melhores índices de Sharpe e Sortino, especialmente para níveis mais altos de aversão ao risco. Em ambos os mercados, verificou-se que o aumento da aversão ao risco favorece o desempenho da estratégia dinâmica, enquanto a carteira ingênua, por sua natureza não adaptativa, mantém seu desempenho constante. Isso indica que a abordagem baseada em regimes é particularmente adequada para investidores com perfil conservador.

Quanto à composição dos portfólios, embora ETFs atrelados à renda fixa tenham apresentado maior peso médio em ambos os regimes, notou-se uma concentração elevada nesses ativos em períodos de baixa volatilidade, algo inicialmente não esperado. Contudo, este comportamento reflete, em grande medida, um contexto macroeconômico caracterizado por taxas de juros reais elevadas tanto no mercado brasileiro quanto no americano. Ressalta-se que no mercado americano, onde as mudanças de regime foram mais frequentes e prolongadas, observou-se maior disposição do modelo na alocação entre os ETFs, o que se mostra coerente com a menor amplitude do ciclo de juros observado, comparativamente ao mercado brasileiro.

Em síntese, a principal contribuição deste estudo consiste em integrar a avaliação da eficácia de *proxies* de volatilidade na identificação de regimes com a análise do impacto prático dessas escolhas na gestão de portfólios. Evidenciamos a importância da escolha criteriosa da métrica de volatilidade, dado que diferentes *proxies* apresentam desempenho variável na identificação dos regimes. Ao demonstrar a superioridade de abordagens regime-dependentes fundamentadas em HMM, aplicadas a mercados emergentes e desenvolvidos, esta pesquisa oferece suporte empírico sólido à adoção de estratégias dinâmicas de alocação como instrumento de mitigação de riscos em ambientes de elevada volatilidade.

Embora os resultados sejam robustos, este estudo apresenta algumas limitações que podem ser exploradas em futuras pesquisas. A decisão metodológica de utilizar dois regimes favoreceu a interpretabilidade dos resultados, mas limita a captura de dinâmicas de volatilidade mais complexas; investigações futuras podem explorar a utilização de três ou mais regimes. Além disso, a análise de diferentes graus de aversão ao risco, ou mesmo a consideração da aversão como variável endógena ao regime, representa um caminho promissor. A calibração ideal dos parâmetros de custo de transação e aversão ao risco, por meio de simulações e testes de estresse, também pode ser aprofundada. Por fim, recomenda-se expandir o estudo para incluir outros mercados e ativos, permitindo uma análise mais abrangente do comportamento dos regimes em contextos macroeconômicos diversos.

4 A INFLUÊNCIA DE REGIMES DE VOLATILIDADE NA ESCOLHA DE MEDIDAS DE RISCO PARA ALOCAÇÃO ÓTIMA DE PORTFÓLIO

Resumo:

O presente artigo se propõe a avaliar o desempenho condicional de três diferentes métricas de risco (variância, Conditional Value-at-Risk e Conditional Drawdown-at-Risk) na alocação ótima de portfólios sob regimes distintos de volatilidade. A proposta é analisar como cada métrica se comporta em contextos de alta e baixa volatilidade, identificados por um modelo de mudança de regime (HMM), oferecendo uma perspectiva mais robusta e alinhada com as condições reais enfrentadas por gestores ativos de investimento, ou simplesmente investidores. Utilizando dados do mercado brasileiro e dois regimes de volatilidade (alta e baixa), os resultados revelam que as medidas de risco escolhidas influenciam significativamente o desempenho das estratégias, o que pode sugerir que a escolha da medida de risco a ser utilizada na decisão de alocação de ativos é regime-condicional. Em regimes de baixa volatilidade, a estratégia com o Conditional Value-at-Risk (CVaR) apresenta desempenho superior às demais, enquanto em regime de alta volatilidade, o Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR) se destaca. Testes estatísticos baseados na Transformação de Postos Alinhados, do inglês *Aligned Rank Transform Test* (ART), confirmaram a significância dessas diferenças de desempenho condicionadas ao regime. Esses resultados reforçam a importância de considerar a dinâmica do mercado na gestão de carteiras, justificando sua presença em políticas de investimento.

Palavras-chave: Hidden Markov Model; Portfólio; Média-variância; Conditional Value-at-Risk; Conditional Drawdown-at-Risk.

4.1 Introdução

O mercado financeiro desempenha um papel essencial na gestão de recursos, permitindo que investidores individuais e institucionais diversifiquem suas estratégias em busca de retornos atrativos, enquanto controlam a exposição ao risco. Entretanto, as recentes crises e a volatilidade dos mercados financeiros, especialmente em economias emergentes, aumentam a preocupação dos investidores em relação às potenciais perdas que um investimento pode sofrer em cenários de alta volatilidade e, consequentemente, a necessidade de estratégias mais robustas de alocação de ativos.

Historicamente, a alocação de ativos foi pautada pela Teoria Moderna de Portfólio (MTP), conforme proposta por Markowitz (1952, 1959). A principal contribuição de Markowitz reside na formalização matemática da diversificação, enfatizando que o risco relevante para o investidor não é o risco individual dos ativos, mas sua contribuição conjunta para o risco total da carteira, mensurado tradicionalmente pela variância ou desvio-padrão (Rubinstein, 2002; Kolm;

Tütüncü; Fabozzi, 2014).

Nas últimas décadas, esta abordagem tem sido alvo de ressalvas em relação ao uso de medidas de risco simétricas, como a variância, e devido à suposição de uma covariância estática, que ignora a evolução dos retornos e das correlações ao longo do tempo. Além disso, há discussões relevantes sobre a sensibilidade do modelo a erros de estimação (Ang; Timmermann, 2012; DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009).

Diante dessas limitações, a literatura tem buscado alternativas, levando ao desenvolvimento da chamada Teoria Pós-Moderna de Portfólio, cujos esforços concentram-se em três linhas principais, uma relacionada à proposição de medidas alternativas de risco, como as medidas de risco de cauda, outra se debruça sobre a questão da eficiência dos modelos e, por fim, uma última que busca tornar os modelos de decisão mais alinhados às características reais do mercado (Rom; Ferguson, 1994; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Righi; Borenstein, 2018).

Dentre as métricas de risco mais utilizadas, destaca-se o Value at Risk (VaR), que estima perdas máximas esperadas em um nível de confiança predefinido. Apesar de sua popularidade, o VaR não é subaditivo e pode não respeitar o princípio da diversificação, tornando-o inadequado para algumas aplicações (Artzner et al. 1999). Para mitigar essas deficiências, Rockafellar e Uryasev (2000, 2002) realizaram a definição formal do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), que considera a média das perdas além do VaR, e estabeleceram o desenvolvimento de metodologias para sua otimização.

Métricas baseadas em *drawdown* também têm ganhado destaque, ao considerarem não somente a magnitude, mas também a trajetória dos retornos, refletindo a preocupação dos gestores de investimentos com quedas sequenciais e o potencial de arrependimento (Geboers; Depaire; Annaert, 2022). O *Drawdown* Condicional em Risco (CDaR) fornece informações complementares às medidas de cauda tradicionais, capturando a dinâmica acumulada das perdas, um aspecto particularmente relevante em períodos de crise (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005; Goldberg; Mahmoud, 2017).

Embora diversos estudos tenham comparado empiricamente métricas de risco em contextos de otimização de portfólio e demonstrado que diferentes métricas podem levar a alocações de ativos e performances distintas (Alexander; Baptista, 2004; Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009; Gilbert; Meiklejohn, 2019; Righi; Borenstein, 2018; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024), nenhum deles considera explicitamente a influência dos regimes de volatilidade sobre a eficácia dessas métricas, um fator que pode impactar na capacidade de resposta de uma ou outra medida de risco. Conforme Roman e Mitra (2009) e Ang e Timmermann (2012), a alternância entre regimes de alta e de baixa é uma característica inerente aos mercados financeiros e a existência desses regimes impacta a estrutura de correlação entre ativos e, consequentemente, tem potencial para afetar a alocação de ativos.

Nesse contexto, modelos de mudança de regime, como os *Hidden Markov Models* (HMMs), emergem como ferramentas promissoras para aprimorar a gestão de risco, permitindo

uma adaptação dinâmica das medidas de risco às condições de mercado identificadas. Esses modelos permitem uma alocação dinâmica eficiente, reduzindo erros sistemáticos e adaptando as decisões às condições de mercado (Fereydooni; Mahootchi, 2023). Adicionalmente, o uso de modelos que capturam a mudança de regime ajudam a mitigar os efeitos da não linearidade dos dados financeiros (Campani; Garcia; Lewin, 2021; Ma et al. 2019; Peng; Kim; Mittnik, 2022).

Neste artigo, abordamos o problema da alocação de ativos sob mudança de regime, comparando o desempenho de três métricas distintas de risco (variância, CVaR e CDaR) em períodos de alta e baixa volatilidade. Este estudo diferencia-se da literatura existente ao analisar explicitamente o desempenho das métricas de risco tradicionais (variância) e alternativas (CVaR e CDaR) em diferentes regimes de volatilidade identificados por um modelo HMM. Até onde sabemos, esta abordagem integrada ainda não foi explorada em estudos anteriores, representando uma contribuição original à literatura acadêmica sobre gestão de risco e alocação de ativos.

Para identificar esses regimes, utilizamos um modelo HMM aplicado à volatilidade condicional do Ibovespa, estimada por meio de um modelo GARCH(1,1). As previsões desse modelo orientam uma estratégia dinâmica de alocação em carteiras *long-only* compostas por fundos de índices brasileiros. Incorporamos custos de transação proporcionais e o nível de aversão ao risco ao nosso modelo, aproximando nossas análises das condições reais enfrentadas por gestores ativos de investimento. Para testar a significância das diferenças de desempenho entre as estratégias, foi utilizado o método Aligned Rank Transform (ART), aplicado para avaliar o impacto da medida de risco, do regime de volatilidade e de sua interação sobre o desempenho das estratégias.

Dessa forma, este estudo contribui para a literatura ao evidenciar, de maneira empírica, que a eficácia das principais medidas de risco utilizadas na otimização de portfólios (variância, CVaR e CDaR) varia significativamente conforme o regime de volatilidade do mercado. Ao investigar o desempenho das estratégias de alocação sob regimes de alta e baixa volatilidade, demonstra-se que a escolha da métrica de risco não deve ser uniforme entre esses regimes, mas sim sensível ao ambiente de mercado, oferecendo novas perspectivas para uma gestão de portfólios mais adaptada às condições vigentes.

4.2 Revisão de literatura

Para Krokhmal, Uryasev e Zrazhevsky (2005), as metodologias formais de gerenciamento de portfólio assumem alguma medida de risco e a escolha dessa medida afeta a alocação do portfólio. Assim, a mensuração do risco é fundamental para a tomada de decisões de investimento e tem evoluído significativamente nas últimas décadas. Conforme mencionado anteriormente, a eficácia das métricas de risco pode variar dependendo do regime de volatilidade vigente. Nesse contexto, ter um bom entendimento dos *trade-offs* entre o desempenho do portfólio sob diferentes medidas de risco e regimes deve fazer parte da melhor prática em gerenciamento de portfólio.

Antes do trabalho seminal de Markowitz (1952), o risco financeiro era considerado um fator de ajuste aplicado ao retorno esperado de maneira *ad hoc* (Szegö, 2002). O modelo clássico de Markowitz de Média-variância identifica o risco como a volatilidade (desvio padrão) do portfólio (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Contudo, com as recentes crises, cresce o interesse por medidas de risco associadas à probabilidade de ocorrência de choques negativos e de maior volatilidade no mercado financeiro, que estão nas caudas da distribuição de retornos, ou seja, representam a chance de que um ativo ou portfólio tem de experimentar uma perda significativa (Peng; Kim; Mittnik, 2022).

O risco de cauda é uma classe de medidas de risco que mensuram diretamente as perdas dos investidores, uma medida da vulnerabilidade de um portfólio a eventos menos frequentes, mas potencialmente devastadores. Geboers, Depaire e Annaert (2022) destacam que muitas técnicas de construção de portfólio controlam direta ou indiretamente a volatilidade para um determinado retorno, mas que o risco da volatilidade difere do risco de cauda, sendo que o risco de cauda pode ser considerado menos frequente, mas com um potencial relevante de corroer a riqueza acumulada pelos investidores ao longo de vários anos em um único evento.

Duas medidas de risco de cauda que representam avanços relativamente recentes no campo do gerenciamento de risco, e que são de especial interesse neste estudo, são o Valor Condicional em Risco (CVaR) (Artzner et al. 1999; Rockafellar; Uryasev, 2000, 2002) e o *Drawdown* Condicional em Risco (CDaR) (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005). O CVaR foi inicialmente proposto por Artzner et al. (1999) como uma medida coerente de risco, tendo suas formulações para fins de otimização amplamente desenvolvidas por Rockafellar e Uryasev (2000, 2002). Por sua vez, o CDaR combina o conceito de *drawdown* com a estrutura do CVaR (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005), buscando capturar a severidade média das quedas extremas do portfólio.

Comparações entre diferentes métricas de risco, incluindo o CVaR e a tradicional abordagem Média-variância, são recorrentes na literatura sobre otimização de portfólios (Alexander; Baptista, 2004; Gilbert; Meiklejohn, 2019; Righi; Borenstein, 2018; Peng; Kim; Mittnik, 2022; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024), dada sua relevância empírica e as distinções conceituais entre essas medidas. Essas comparações visam avaliar o impacto das métricas tanto na alocação ótima de ativos quanto no desempenho resultante das carteiras.

4.2.1 Valor em risco condicional

O *Value-at-Risk* (VaR) uma medida de risco muito conhecida e utilizada na gestão de portfólios. No entanto, suas limitações, como a violação da propriedade de subaditividade (Artzner et al. 1999; Acerbi; Tasche, 2002b) e a incapacidade de capturar a magnitude das perdas que excedem seu limiar, motivaram o desenvolvimento do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), também conhecido como *Expected Shortfall*. Essa medida busca estimar a perda média esperada nos piores cenários, sendo particularmente adequada para modelar riscos extremos (Rockafellar;

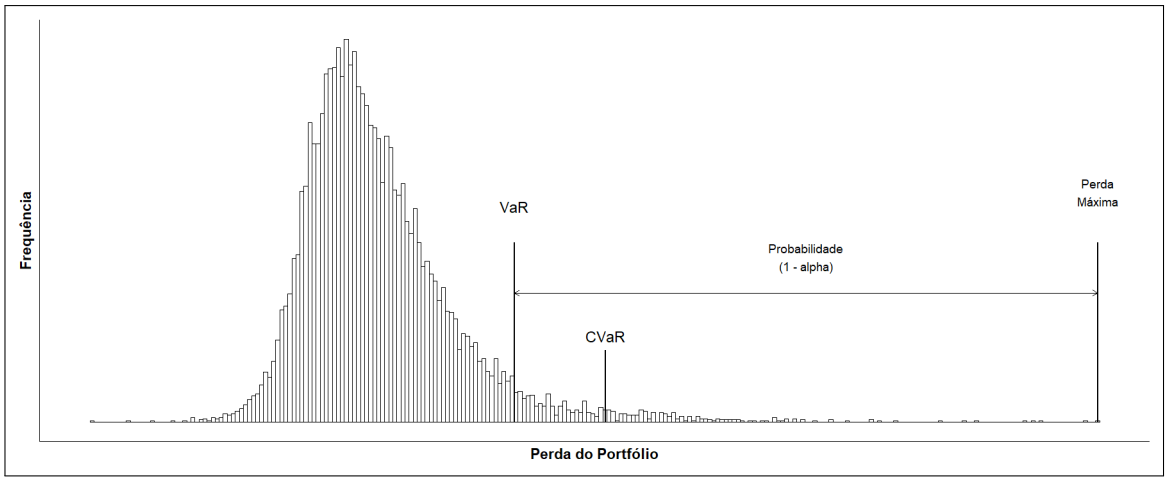
Uryasev, 2000, 2002).

De forma oposta ao VaR, o CVaR é uma medida de risco considerada *coerente*, uma vez que satisfaz os axiomas de Artzner et al. (1999). Tais propriedades são fundamentais para a construção de carteiras eficientes, especialmente em ambientes de alta volatilidade, nos quais a correlação entre ativos pode se comportar de maneira atípica (Gilbert; Meiklejohn, 2019).

Pioneiramente formalizado e estudado por Rockafellar e Uryasev (2000, 2002), o CVaR é proposto como uma alternativa robusta à variância, permitindo uma quantificação mais realista dos riscos de cauda. Embora a variância seja uma medida útil sob condições de normalidade e estabilidade dos retornos (Markowitz, 1952), seu caráter simétrico a torna limitada em contextos em que perdas extremas são mais prováveis ou mais relevantes (Gilbert; Meiklejohn, 2019).

Por definição, dado um nível de confiança $\alpha \in (0, 1)$, o α-CVaR de um portfólio representa a expectativa das perdas que excedem o VaR correspondente. Em distribuições contínuas, o CVaR coincide com a expectativa condicional das perdas localizadas na cauda esquerda da distribuição. Em outras palavras, o CVaR não apenas incorpora o limite de perda medido pelo VaR, como também captura a severidade esperada das perdas que o superam (Maciel, 2011). A Figura 4.1 ilustra graficamente essa relação, para a distribuição de perdas.

Figura 4.1 – Distribuição de perda, VaR, CVaR e perda máxima.



Fonte: Szegö (2002, p. 22)

Matematicamente, o CVaR contínuo no nível de confiança α pode ser definido como:

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p, dp, \tag{4.1}$$

onde VaR_p representa o quantil de ordem p da distribuição de perdas. Essa formulação destaca o CVaR como a média dos valores de VaR correspondentes aos níveis de confiança mais extremos, isto é, aqueles acima de α, caracterizando-o como uma medida sensível à cauda da distribuição.

Rockafellar e Uryasev (2000, 2002) demonstraram que o CVaR pode ser calculado

por meio da solução de um problema de otimização convexa, no qual o VaR não precisa ser previamente conhecido. Quando as incertezas são modeladas por variáveis aleatórias discretas com suporte finito, esse problema se reduz a um problema de otimização linear, o que permite sua resolução de forma eficiente mesmo em aplicações de grande escala (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005).

O nível de significância α escolhido reflete diretamente a aversão ao risco do investidor: quanto menor o valor de α, maior a preocupação com perdas severas. Por exemplo, um investidor que adota $\alpha = 99\%$ é mais avesso ao risco do que aquele que utiliza $\alpha = 90\%$. Nesse contexto, Alexander e Baptista (2004) analisaram a inclusão do VaR e do CVaR como restrições em modelos de Média-variância, concluindo que o CVaR oferece um controle mais eficaz sobre os riscos extremos, especialmente para perfis conservadores.

Adicionalmente, em períodos de maior incerteza ou instabilidade nos mercados, a capacidade do CVaR de capturar a severidade das perdas o torna uma ferramenta mais robusta do que medidas que consideram apenas a dispersão dos retornos, como a variância (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024).

4.2.2 Drawdown Condicional em Risco

Segundo Nystrup et al. (2019), momentos no mercado em que são observadas grandes perdas desafiam a tolerância financeira e psicológica dos investidores, podendo levar a um comportamento de fuga do mercado e à demissão de gestores de investimento. Um investimento que aumenta constantemente de valor será provavelmente percebido de forma diferente de um investimento com movimentos de preços voláteis (Geboers; Depaire; Annaert, 2022). Considerando tais preocupações, as medidas baseadas em *drawdown* têm ganhado destaque por considerarem a trajetória dos retornos e a ocorrência sequencial de quedas nos retornos, aspectos cruciais em períodos de crise (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005; Goldberg; Mahmoud, 2017).

O conceito de *drawdown* expressa uma perda acumulada no valor de um ativo, investimento ou portfólio, correspondendo ao retorno negativo observado entre um máximo (pico) e um mínimo (vale), que pode ser global ou local (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004). Assim, uma série temporal de *drawdowns* D_i fornece, a cada ponto i, a perda incorrida em relação ao máximo anterior e como esses *drawdowns* são considerados, se global ou local, se em valores médios, relativos ou absolutos, vão determinar as propriedades dessa medida (Korn; Möller; Schwehm, 2022).

Existem diversas formas de quantificar o *drawdown*. Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2005) introduziram o *Conditional Drawdown* (CDD) como um termo guarda-chuva para a função de risco baseada em percentis de *drawdowns* e demostraram a sua utilidade para resolver problemas de alocação de ativos. O CDD com um nível de confiança α é definido genericamente como a média dos piores $(1-\alpha)\cdot 100\%$ *drawdowns*. O *Maximum Drawdown* (MDD) corresponde

a $\alpha \to 0$, e o *Average Drawdown* (ADD) corresponde a $\alpha \to 1$. Quando se calcula a média dos piores *drawdowns* ao longo de um intervalo de tempo, obtém-se a medida denominada CDaR *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR). Desta forma, uma mesma série temporal de *drawdowns* pode ser utilizada para calcular o MDD, o ADD ou o CDaR. Estas três medidas estão ligadas a um único histórico de preços ou trajetória de estratégia, mas fornecem informações ligeiramente diferentes ao gestor ativo de investimentos.

Korn, Möller e Schwehm (2022), por exemplo, demonstram que diferentes métricas de *drawdown* podem levar a diferentes decisões em relação a gestão de portfólios.

Outras medidas são o *Conditional Expected Drawdown* (CED), que representa a média das perdas na cauda da distribuição do drawdown máximo (Goldberg; Mahmoud, 2017) e o *end-of-period drawdown* (eopDD), que busca incorporar o arrependimento na avaliação do risco (Möller, 2018).

Destaca-se que, embora o CED e o CDaR sejam ambas medidas condicionais, o CED considera a distribuição do máximo drawdown, enquanto o CDaR considera todos os drawdowns acima de um limiar. O primeiro enfatiza o pior cenário; o segundo captura múltiplas perdas severas ao longo do tempo. Para uma visão mais abrangente sobre as medidas de *drawdowns*, sugerimos Geboers, Depaire e Annaert (2022).

As medidas de *drawdown* são populares por focarem em cenários de pior caso e capturarem aspectos psicológicos relevantes para os investidores, como a aversão à perda e o arrependimento de ganhos anteriores não realizados (Korn; Möller; Schwehm, 2022; Geboers; Depaire; Annaert, 2022). A análise de *drawdowns* é crucial para a gestão de risco e para problemas de alocação de ativos, fornecendo informações valiosas sobre o potencial de perdas significativas. O estudo da distribuição estatística dos *drawdowns* também é de grande interesse prático para avaliar a probabilidade de perdas de uma dada magnitude.

Muitos autores apontam que as medidas de *drawdowns* são relevantes por serem de fácil compreensão, por serem conhecidas e usadas no dia a dia do mercado, por fornecerem uma exemplificação do efeito das correlações nas variações dos preços e por serem medidas de risco dependente da trajetória, o que as distingue de medidas como a volatilidade, VaR e CVaR (Brandi; Mendes, 2004; Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004; Alexander; Baptista, 2006; Reveiz; León, 2010; Baghdadabad, 2015; Goldberg; Mahmoud, 2017; Mendes; Lavrado, 2017; Choi, 2021).

O trabalho de Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2005) examina as propriedades de várias medidas de *drawdown*, introduzindo a ideia do Conditional *drawdown* at risk, definido como a média de uma porcentagem dos piores perdas da carteira, dado um intervalo assumido.

A função de risco do CDaR é baseada no conceito de CVaR, sendo conceitualmente funções de percentil relacionadas, o que permite que a abordagem de otimização desenvolvida para CVaR por Rockafellar e Uryasev (2000) e Rockafellar e Uryasev (2002) seja estendida diretamente à otimização do CDaR (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004).

Seja N o número de subperíodos de tempo no intervalo $[0, T]$, e $\alpha \in (0, 1]$ o nível

de confiança. O $CDaR_\alpha$ é definido como a média dos piores $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dos *drawdowns* ocorridos nesse intervalo. Por exemplo, se $\alpha = 0.95$, o $CDaR_{0.95}$ representa a média dos 5% piores *drawdowns*.

Matematicamente, o C*onditional Drawdown-at-Risk* (CDaR) no nível de confiança α pode ser expresso, no caso contínuo, como a média dos *drawdown-at-risk* (DaR) correspondentes aos níveis de confiança mais extremos:

$$\mathrm{CDaR}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{DaR}_p\, dp, \tag{4.2}$$

onde DaR_p representa o quantil de ordem p da distribuição dos *drawdowns*. Assim como o CVaR, o CDaR mede a expectativa condicional dos piores casos, sendo sensível à cauda da distribuição. A substituição do VaR pelos *drawdowns* torna essa métrica particularmente adequada para avaliar o impacto de perdas acumuladas e persistentes ao longo do tempo.

Os estudos que utilizam o risco de *drawdown* no processo de alocação (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005; Alexander; Baptista, 2006; Pospisil; Vecer, 2010; Reveiz; León, 2010; Goldberg; Mahmoud, 2017; Nystrup et al. 2019), sugerem que essas medidas são mais adequadas às reais preocupações dos gestores ativos de investimento, uma vez que estes optam por controlar, em algum nível, o risco de perda, mesmo que isso implique em algum sacrifício no desempenho do portfólio (Fleming; Kirby; Ostdiek, 2003).

Tais propriedades reforçam o uso do CDaR como alternativa robusta ao CVaR, sobretudo em contextos onde a sequência temporal das perdas e os aspectos comportamentais são determinantes para a tomada de decisão (Savaei; Alinezhad; Eghtesadifard, 2024).

4.2.3 Mudança de regime

O comportamento dos mercados financeiros é marcado por ciclos nos quais períodos de alta e baixa volatilidade se alternam, afetando tanto os retornos quanto as correlações entre ativos (Ang; Timmermann, 2012; Abate; Bonafini; Ferrari, 2022). Nesse contexto, modelos de mudança de regime, especialmente os Modelos Ocultos de Markov, têm sido amplamente utilizados para identificar estados latentes do mercado.

A premissa central desses modelos é que os dados não são gerados por uma única distribuição estatística ao longo do tempo, mas por uma sequência de distribuições distintas, cada uma associada a um regime específico, com características estatísticas relativamente homogêneas em um mesmo regime, mas heterogêneas entre os regimes (Ang; Timmermann, 2012; Ardia et al. 2018). Assim, as observações pertencentes a um mesmo regime seguem uma distribuição com parâmetros próprios, como média e variância em modelos gaussianos.

Um dos diferenciais do HMM é sua capacidade de capturar diversos fatos estilizados de séries financeiras, como caudas pesadas, agrupamento de volatilidade, assimetria e correlações dinâmicas (Fons et al. 2021; Aydınhan et al. 2024). Para Fereydooni e Mahootchi (2023), sua principal vantagem reside na habilidade de reduzir a não linearidade dos dados. Essas

propriedades podem ser aprimoradas com o uso de janelas móveis para atualização dos parâmetros, tornando o modelo mais sensível tanto à persistência quanto às transições abruptas, características recorrentes em mercados emergentes (Lewin; Campani, 2024).

Diversos estudos demonstram o potencial dos HMMs na integração com estratégias de alocação de ativos (Bae; Kim; Mulvey, 2014; Nystrup et al. 2019; Fons et al. 2021; Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Fereydooni; Mahootchi, 2023). Os resultados empíricos sugerem que a combinação entre modelos de regime e técnicas de otimização multiperíodo, com ajuste dinâmico dos pesos da carteira conforme alterações nos parâmetros de risco e custos de transação, pode melhorar significativamente a relação risco-retorno (Boyd et al. 2017; Nystrup et al. 2019). Essa abordagem contrasta com as estratégias estáticas, apontando que alocações adaptativas oferecem maior proteção contra perdas extremas e melhor desempenho em mercados voláteis.

A modelagem com múltiplos regimes aumenta a flexibilidade para lidar com a instabilidade dos mercados financeiros (Aydınhan et al. 2024). Por exemplo, Oprisor e Kwon (2021) mostram que regimes distintos demandam estratégias distintas de alocação e gestão de risco, com superioridade das abordagens sensíveis ao regime em períodos de incerteza. De forma semelhante, Uysal e Mulvey (2021) demonstram que, sob regimes adversos, métricas como o CVaR superam a variância na mitigação de perdas extremas. Já Campani, Garcia e Lewin (2021), ao aplicar um modelo com quatro regimes à economia brasileira, destacam que políticas de portfólio devem ser ajustadas conforme o regime vigente, superando os *benchmarks* estáticos na proteção contra choques.

A alternância entre regimes impacta fortemente o comportamento dos mercados (Ardia et al. 2018), tornando essencial avaliar o desempenho das métricas de risco em cada fase. A forma como essas métricas capturam a distribuição dos retornos é crucial na construção de portfólios resilientes.

Mesmo fora do contexto de mudança de regime, a eficácia das métricas de risco tem sido amplamente estudada. Trabalhos como Krokhmal, Uryasev e Zrazhevsky (2005), Gilbert e Meiklejohn (2019) e Lorimer, Schalkwyk e Szczygielski (2024) evidenciam a superioridade de métricas assimétricas e de cauda. Por outro lado, Ortobelli et al. (2005) argumentam que nenhuma métrica é universalmente superior. Righi e Borenstein (2018), ao compararem onze métricas, chegam à mesma conclusão. Além disso, Zhu et al. (2020) alertam que o foco exclusivo em eventos extremos pode comprometer o desempenho ao longo do tempo, reforçando a importância de alinhar a métrica ao regime vigente.

Este estudo propõe a avaliação de três abordagens de risco — variância, CVaR e CDaR — condicionadas a regimes de volatilidade. A análise compara duas medidas de cauda com enfoques distintos: o CVaR, que captura a média das perdas extremas, e o CDaR, que considera quedas acumuladas; além da variância, referência clássica da teoria de Markowitz. Essa abordagem busca contribuir para a prática de gestores que desejam maior sensibilidade de suas estratégias às mudanças estruturais do mercado.

4.3 Metodologia

A seguir, são apresentados os dados e os procedimentos metodológicos adotados neste estudo. Em primeiro lugar, é necessário identificar os períodos de alta e baixa volatilidade mediante um Modelo Oculto de Markov (HMM). Em seguida, alocam-se os ativos para cada regime identificado, testando-se três diferentes medidas de risco. Essa abordagem permite avaliar o desempenho de cada métrica de risco na alocação de portfólio, considerando os distintos regimes de volatilidade.

4.3.1 Dados

Os dados utilizados são de frequência diária e compreendem o período de de janeiro de 2019 a dezembro de 2024. Esse horizonte de análise é condicionado pela disponibilidade de dados sobre fundos de índice (Exchange-Traded Funds — ETFs) no mercado brasileiro, uma vez que a oferta de ETFs de renda fixa nesse mercado é relativamente recente. O primeiro ETF desse segmento, o FIXA11, foi lançado em 2018, seguido pelo IMAB11 em 2019, delimitando, assim, o início da série histórica considerada. Uma descrição detalhada das variáveis é apresentada na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Descrição dos dados

Variável	Descrição
Fundos de investimento em índices (ETFs):	
BOVA11	Acompanha o desempenho do índice Ibovespa.
SMAL11	Acompanha o desempenho do índice de *Small Caps* brasileiras.
IMAB11	Replica títulos públicos federais indexados ao IPCA (IMA-B).
FIXA11	Composto por títulos públicos federais com taxa de juros prefixada.
Taxa livre de risco:	
Selic	Taxa de juros de curto prazo definida pelo Banco Central do Brasil.

Nota: Os retornos são na forma de log-retornos dos preços de fechamento. As séries do Ibovespa e ETFs foram obtidas em https://finance.yahoo.com/ e os dados da Selic em https://www.bcb.gov.br/.

Para o cálculo da volatilidade condicional, utilizaram-se os log-retornos dos preços de fechamento do índice Ibovespa, principal indicador do mercado acionário brasileiro, com base em um modelo GARCH(1,1), estimado por meio do pacote rugarch na linguagem R (Ghalanos, 2023).

A escolha pela utilização de ETFs como base da estratégia de alocação justifica-se por aliarem diversificação, acessibilidade e flexibilidade operacional, com possibilidade de negociação intradiária como ações tradicionais (Matos; Iquiapaza; Ferreira, 2014). Negociados em bolsa, os ETFs representam uma alternativa prática à gestão ativa, permitindo exposição diversificada a diferentes classes de ativos com custos reduzidos e execução facilitada (B3 - Brasil Bolsa, 2023). Embora sua participação ainda seja modesta no total de fundos no Brasil, esse tipo de veículo tem demonstrado potencial de crescimento, sobretudo por atender

características valorizadas por investidores locais, como rentabilidade, segurança e facilidade de resgate (ANBIMA, 2024).

Além disso, a seleção dos quatro ETFs utilizados visou representar uma carteira diversificada, com ativos que refletem diferentes perfis de risco. Dois dos fundos são associados à renda variável (BOVA11 e SMAL11); os outros dois são atrelados à renda fixa (FIXA11 e IMAB11). Essa combinação permite testar a eficácia das métricas de risco sob diferentes regimes de volatilidade, considerando ativos com dinâmicas de retorno e risco distintas.

4.3.2 Identificação dos regimes via HMM

O Modelo Oculto de Markov (HMM) permite modelar fenômenos por meio de processos estocásticos, ou seja, descreve a dinâmica de eventos observáveis Y_t (por exemplo, movimentos dos preços) influenciados por estados ocultos X_t (como regimes de volatilidade ou fases do ciclo econômico).

Em linha com Nystrup et al. (2019), assumimos a ausência de evidências de ganho preditivo ao se considerar mais de dois estados, optando assim por um modelo mais parcimonioso e de fácil interpretação. Assim, no contexto deste estudo, o modelo classifica os regimes de volatilidade como alta ou baixa. A inferência acerca das probabilidades dos regimes é feita utilizando como Y_t a volatilidade condicional do Ibovespa, estimada por um modelo GARCH(1,1). A escolha dessa medida fundamenta-se em sua representatividade para a identificação dos regimes e em sua capacidade de capturar características típicas das séries temporais financeiras, conforme destacado por Pfaff (2016).

O HMM segue a suposição de primeira ordem de uma Cadeia de Markov, em que cada observação depende apenas do estado que a produziu, sendo completamente independente de qualquer outro estado da cadeia. As dinâmicas de transição entre os regimes são modeladas por uma matriz de transição de primeira ordem, denotada por A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} & a_{22} \end{bmatrix},$$

onde a_{11} representa a probabilidade de permanecer no regime de baixa volatilidade no próximo período, dado que o período anterior também era de baixa volatilidade. De maneira análoga, a_{22} corresponde à probabilidade de permanecer no regime de alta volatilidade, condicionado ao fato de que o período anterior já estava nesse regime. Consulte Nystrup, Madsen e Lindström (2018) para maiores detalhes sobre o funcionamento do HMM.

Considerando dois estados, a previsão de retornos futuros e as matrizes de covariância são fundamentadas nos parâmetros estimados do HMM. Assume-se que os retornos seguem uma distribuição normal $N(\mu_{11}, \sigma_{11}^2)$ no regime 1 e $N(\mu_{22}, \sigma_{22}^2)$ no regime 2. A probabilidade associada ao estado do mercado no momento t é representada por q_t, então:

i) a probabilidade $\hat{q}$ de que o mercado esteja sob regime de baixa volatilidade no momento

$(t + 1)$ é

$$\hat{q}_{t+1} = q_t a_{11} + (1 - q_t)(1 - a_{22}); \tag{4.3}$$

ii) a previsão do retorno esperado $\hat{\mu}$ no momento $(t + 1)$ é

$$\hat{\mu}_{t+1} = \hat{q}_{t+1}\mu_1 + (1 - \hat{q}_{t+1})\mu_2; \tag{4.4}$$

iii) a previsão da matriz de covariância de retornos $\hat{\sigma}^2$ no momento $(t + 1)$ é

$$\hat{\sigma}^2_{t+1} = (\hat{q}_{t+1}\sigma_1^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})\sigma_2^2) + (\hat{q}_{t+1}(\mu_1 - \hat{\mu}_{t+1})^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})(\mu_2 - \hat{\mu}_{t+1})^2). \tag{4.5}$$

Utilizamos uma abordagem de janelas móveis para as análises serem realizadas em um período de teste fora da amostra, incluindo a estimativa dos parâmetros do modelo oculto de Markov (HMM). Para estimar os parâmetros do HMM, utilizaram-se os algoritmos *Expectation Maximization* e Viterbi, por meio do pacote depmixS4 (Visser; Speekenbrink, 2010) na linguagem R, e a volatilidade condicional dos últimos 252 dias. Desta forma, a cada janela, realiza-se a previsão do regime para o tempo $t + 1$. Assim, considerando o regime corrente estimado, armazenam-se as datas históricas que apresentaram o mesmo regime identificado na janela de estimação corrente e, com base nessas datas, estimam-se os retornos e as matrizes de covariância dos ativos elegíveis para o estudo empírico de alocação.

A cada período, estima-se uma alocação ótima do portfólio, assumindo o regime previsto, de alta ou baixa volatilidade, e as previsões dos parâmetros. Para essa etapa, são considerados quatro ETFs (Tabela 4.1) e uma função objetivo que se altera ao assumir uma das três funções de risco de interesse desse estudo. Devido à janela móvel de 252 dias, o primeiro ano da amostra (2019) é reservado como período de aquecimento do modelo HMM (*warm-up*). Assim, a alocação efetiva do portfólio ocorre entre janeiro de 2020 e dezembro de 2024, com base em previsões fora da amostra.

4.3.3 Formulação do problema de otimização

A cada período t, com $t = 1, ..., T$, o modelo de otimização é resolvido com base em informações do risco e retorno, dos n ativos disponíveis para a alocação. Conforme mencionado, esses parâmetros são calculados com base no período da janela móvel utilizada para previsão do regime no período corrente e condicionados a ele.

A formulação da função objetivo de alocação de ativos neste estudo baseia-se na abordagem clássica proposta por Markowitz (1952), buscando maximizar a utilidade esperada penalizada pela medida de risco escolhida. O Valor em Risco Condicional (CVaR) e o Drawdown Condicional em Risco (CDaR) são utilizados como *proxies* alternativas à variância como medida de risco. Além disso, os custos de transação são incorporados ao modelo de forma proporcional, utilizando a penalização pela norma ℓ_1 da variação dos pesos de alocação, conforme sugerido

por Boyd et al. (2017). Assim, a formulação geral pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}_t} \quad & \hat{\mathbf{r}}_t^T \mathbf{w}_t - \hat{\phi}_t^{\text{trade}} \|\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}\|_1 - \lambda_t \hat{\psi}_t(\mathbf{w}_t) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & \sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \\ & w_i \geq 0, \quad \forall i, \end{aligned} \tag{4.6}$$

em que as restrições garantem que o portfólio permaneça completamente investido ($\sum w_i = 1$), admitindo apenas posições compradas ($w_i \geq 0$). $\hat{r}_t$ representa o vetor de retornos esperados dos ativos no tempo t, $\mathbf{w}_t$ e $\mathbf{w}_{t-1}$ são os vetores de pesos da carteira nos tempos t e $t-1$, respectivamente. $\hat{\phi}_t^{\text{trade}}$ é o parâmetro de penalização associado aos custos de transação, aplicado à norma ℓ_1 das mudanças de alocação. λ_t é o coeficiente de aversão ao risco no tempo t. $\hat{\psi}_t(\cdot)$ representa a função de risco da carteira, que pode assumir diferentes formas.

Para cada regime de volatilidade identificado pelo HMM, a função $\hat{\psi}_t(\cdot)$ é substituída por uma das medidas de risco de interesse (variância, CVaR ou CDaR). As três funções de risco são convexas, permitindo a resolução do problema por meio de programação convexa com ferramentas como o pacote CVXR em R (Fu; Rajaratnam; Boyd, 2020) e os resultados para cada um dos modelos serão comparados, a fim de se identificar qual medida mostrou-se mais adequada para cada regime.

Dessa forma, função $\hat{\psi}_t(\cdot)$ pode ser:

(a) *Variância*:

$$\hat{\psi}_t^{\text{Var}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \Sigma_t \mathbf{w}; \tag{4.7}$$

onde Σ é a matriz de covariância dos retornos.

(b) *Conditional Value-at-Risk* (CVaR): O CVaR representa a expectativa das perdas que excedem o valor em risco (VaR), com um nível de confiança α. Sua formulação contínua é dada pela Equação 4.1.

Com base em Rockafellar e Uryasev (2000, 2002), o CVaR pode ser reformulado como um problema de otimização convexa, onde o VaR é modelado como uma variável auxiliar. Essa abordagem evita a necessidade de estimar o VaR previamente e permite a resolução eficiente do problema via programação linear. Para uma amostra discreta com T observações, sua formulação assume a forma:

$$\hat{\psi}_t^{\text{CVaR}}(\mathbf{w}) = \eta + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{t=1}^{T} \max(-R_t(\mathbf{w}) - \eta, 0) \tag{4.8}$$

onde η é o limiar (VaR) estimado como variável de decisão.

(c)*Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR): O CDaR é uma medida baseada em *drawdown*, representando a média dos piores *drawdowns* que excedem o quantil α da

distribuição histórica. Conforme Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2005), define-se primeiro:

$$V_t(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{t} r_k(\mathbf{w}), \qquad M_t(\mathbf{w}) = \max_{u \le t} V_u(\mathbf{w}),$$

$$D_t(\mathbf{w}) = M_t(\mathbf{w}) - V_t(\mathbf{w}),$$

onde V_t é o valor acumulado do portfólio até o tempo t, M_t é o máximo histórico e D_t é o *drawdown*. Assim:

$$\hat{\psi}^{\mathrm{CDaR}}(\mathbf{w}) = \eta + \frac{1}{(1-\alpha)\,T} \sum_{s=1}^{T} \max\big(D_s(\mathbf{w}) - \eta,\ 0\big), \tag{4.9}$$

onde η é o *drawdown-at-risk* (DaR), ou seja, o *threshold* tal que $\Pr[D \le \eta] = \alpha$.

A otimização é conduzida dinamicamente, recalculando os pesos sempre que há uma mudança de regime. Os níveis de aversão ao risco e custos de transação são parâmetros a serem definidos no modelo por meio e uma estratégia *data-driven*.

4.3.4 Definição dos Parâmetros do Modelo

Para aprimorar as estratégias de alocação sob diferentes regimes de volatilidade, adotou-se uma abordagem *data-driven* na otimização simultânea do coeficiente de aversão ao risco (λ) e do parâmetro de penalização dos custos de transação (ϕ). O método utilizado foi o algoritmo *Iterated Racing* (Irace) (Lopez-Ibanez et al. 2016).

A métrica escolhida para calibração do Irace foi o Retorno de Certeza-Equivalente, do inglês *Certainty Equivalent Return* (CER), definido por Han (2020) como:

$$CER = \bar{r}_p - \frac{\lambda}{2}\sigma_p^2, \tag{4.10}$$

onde $\bar{r}_p$ é o retorno médio do portfólio, σ_p^2 é a variância dos retornos, e o valor de λ corresponde ao sorteado pelo Irace, evitando circularidade.

Para comparar diferentes configurações, o CER foi normalizado pelo CER de um portfólio igualmente ponderado (CER_{ew}):

$$CER_{Normalizado} = \frac{CER_p}{CER_{ew}}, \tag{4.11}$$

com ajuste de sinal quando necessário.

A otimização envolveu as etapas:

a) Espaço de Parâmetros: limites $\lambda \in [1, 20]$ e $\phi \in [0.0005, 0.001]$, contínuos. Esses intervalos foram sugeridos considerando uma gama de valores assumidos em diferentes estudos (Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Campani; Garcia; Lewin, 2021), cobrindo aversões típicas e custos reais.

b) Implementação da Função Avaliadora: A função de avaliação executa a rotina de alocação de ativos utilizando a função objetivo descrita na Equação 4.6. Os pesos do portfólio são atualizados exclusivamente nos pontos de mudança de regime identificados pelo HMM. A função computa o CER resultante da estratégia e retorna seu valor normalizado (Equação 4.11).

c) Configuração do Cenário de Otimização: O conjunto de instâncias avaliadas foi composto por janelas históricas da amostra principal (2020–2024). Os parâmetros internos como *elitism*, número de experimentos, número mínimo de sobreviventes e nível de confiança, seguiram as recomendações padrão da literatura (ver Lopez-Ibanez et al. (2016) para detalhes adicionais). Foi utilizada uma semente aleatória fixa para garantir total reprodutibilidade.

d) Execução e Seleção das Configurações: O Irace atualizou iterativamente uma distribuição probabilística sobre o espaço de busca, concentrando-se nas regiões que apresentaram maior potencial em termos do CER normalizado. Ao final, os melhores parâmetros individuais para os três modelos de risco (variância, CVaR e CDaR) foram avaliados utilizando o critério de minimização da perda máxima (*min-max regret*), definido na Equação 4.12, privilegiando robustez entre modelos:

$$(\lambda^*, \phi^*) = \arg\min_{\lambda,\phi} \left\{ 1 - \max_{m \in \{\text{Var, CVaR, CDaR}\}} \frac{CER_m(\lambda, \phi)}{\max\limits_{\lambda', \phi'} CER_m(\lambda', \phi')} \right\}, \tag{4.12}$$

onde $CER_m(\lambda, \phi)$ representa o *Certainty-Equivalent* para o modelo de risco m dado o par (λ, ϕ). Este critério garante que nenhum dos modelos fique excessivamente distante do seu ótimo individual, privilegiando robustez e comparabilidade entre modelos, mesmo que o par escolhido não seja ótimo para cada modelo isoladamente.

4.3.5 Avaliação empírica do desempenho

Para conduzir uma análise comparativa robusta entre as estratégias, foram empregados dois testes estatísticos complementares. Primeiramente, utilizou-se o teste proposto por Ledoit e Wolf (2008) para avaliar a existência de diferenças significativas entre os Índices de Sharpe dos pares de carteiras. Em seguida, aplicou-se o teste Aligned Rank Transform (ART).

O teste proposto por Ledoit e Wolf (2008) é uma ferramenta estatística robusta, não paramétrica, para testar a hipótese nula de que os Índices de Sharpe de dois portfólios são iguais. O método utiliza técnicas de *bootstrapping* ou estimadores consistentes para a matriz de covariância dos retornos, como o estimador HAC (*Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent*), para calcular o desvio padrão da diferença entre os Índices de Sharpe.

O ART é uma técnica não paramétrica que permite a aplicação de análises fatoriais, como ANOVA, mesmo quando os pressupostos de normalidade e homocedasticidade dos resíduos não são atendidos (Wobbrock et al. 2011). O procedimento consiste em alinhar os dados em relação

aos efeitos principais e interações de interesse e, em seguida, aplicar um teste de postos (*rank transform*) tradicional. Assim, o ART possibilita a análise de efeitos principais e interações, respeitando a estrutura do experimento fatorial.

Neste estudo, o modelo ART foi especificado tendo o retorno acumulado como variável resposta e considerando dois fatores principais: a medida de risco (variância, CVaR, CDaR) e o regime de volatilidade (alta ou baixa), bem como a interação entre eles. A implementação foi realizada no software R, por meio do pacote `ARTool` (Kay; Wobbrock, 2021)

Como medidas de desempenho foram utilizadas métricas tradicionais de performance de portfólios, tais como o retorno anualizado, o índice de Sharpe com correção para retornos negativos, o índice de Sortino e o máximo *drawdown*. Além disso, foi calculado o *Tracking Error* em relação a um portfólio igualmente ponderado $(1/n)$.

Essa abordagem permite a identificação de uma combinação única de parâmetros que mantém comparabilidade robusta entre as métricas de risco, fundamentada diretamente no histórico dos retornos e regimes de volatilidade estimados. A próxima seção apresenta e discute detalhadamente os resultados obtidos.

4.4 Resultados Empíricos

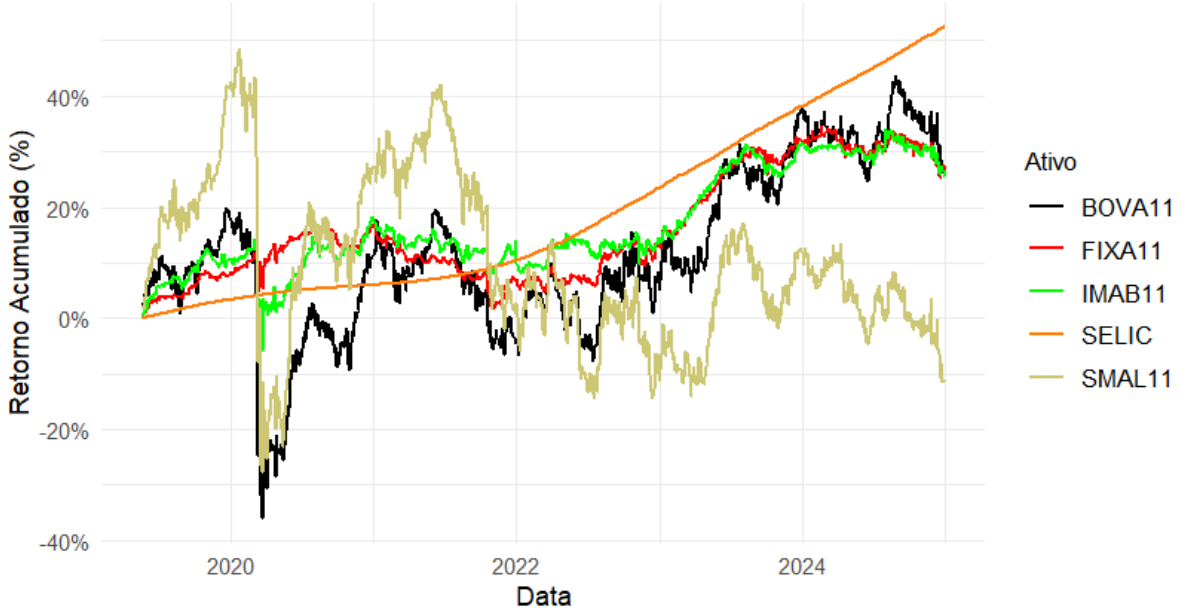
O período de 2019 a 2024 foi caracterizado por choques estruturais relevantes que alteraram significativamente a dinâmica dos mercados financeiros, incluindo a pandemia da Covid-19, medidas de estímulo e aperto monetário, e instabilidades políticas e fiscais no Brasil. Esse contexto representa um ambiente empírico ideal para investigar como diferentes métricas de risco respondem a mudanças nos padrões de volatilidade. A presença de regimes distintos altera a distribuição dos retornos e a intensidade dos choques, afetando diretamente a eficácia relativa de cada medida.

A Figura 4.2 apresenta os retornos acumulados dos principais ETFs brasileiros e da taxa livre de risco (Selic). Observa-se que, no período pré-pandemia, os ETFs de renda variável apresentaram desempenho superior, com destaque para o SMAL11 (*small caps*). Durante a crise de 2020, os ativos de ações sofreram perdas expressivas, enquanto a renda fixa demonstrou maior resiliência. A partir de 2021, com a intensificação das pressões inflacionárias, o Banco Central iniciou um ciclo de alta da Selic.

Conforme destaca Borio (2014), políticas de aperto monetário visam restaurar a estabilidade de preços e ancorar expectativas, sendo especialmente relevantes em contextos de instabilidade como o observado no Brasil. No que diz respeito à alocação de ativos, este movimento afeta a relação entre risco e retorno das diferentes classes de ativos. À medida que os juros sobem, o rendimento esperado da renda fixa aumenta, tornando-a relativamente mais atrativa e induzindo uma realocação dos portfólios.

A Tabela 4.2 detalha os indicadores anuais dos ativos e evidência uma forte heterogeneidade nos retornos e volatilidades ao longo do tempo. Devido aos choques a partir

Figura 4.2 – Retorno acumulado dos ativos no período de 01/2019 a 12/2024.



Nota: A descrição para a abreviação dos ETFs pode ser obtida na Tabela 4.1.
Fonte: Elaboração própria.

de 2020, os ETFs de ações passaram a registrar retornos médios inferiores à taxa Selic, frequentemente associados a índices de Sharpe negativos. Isso indica que, nesse período, a renda variável não conseguiu compensar adequadamente o risco assumido pelos gestores de portfólio.

Esse padrão está em linha com a literatura sobre ciclos financeiros em economias emergentes, como o Brasil, onde choques exógenos amplificam as oscilações do mercado de capitais (Claessens; Kose; Terrones, 2012; Borio, 2014) e reforçam a hipótese de que o risco de mercado é regime-condicional, justificando a adoção de um modelo de mudança de regime para capturar essas dinâmicas.

Para identificar essas mudanças no padrão da volatilidade no mercado, foi estimado um HMM com dois regimes latentes com janelas móveis de 252 dias. O modelo identificou 33 mudanças de regime no período, com presença de regime de alta volatilidade em cerca de 30% do tempo.

Nas estratégias condicionadas ao regime, os rebalanceamentos ocorrem a cada mudança identificada pelo HMM (33 vezes). Na estratégia de regime invariante no tempo, utilizada uma das estratégias como benchmark, a realocação ocorre trimestralmente (16 vezes), simulando um processo de revisão baseado em novas informações contábeis. Enquanto para a estratégia de alocação de pesos igualmente ponderados (ingênua), a segunda estratégia de benchmark, o rebalanceamento é diário. O impacto dessas diferentes frequências de rebalanceamento sobre os custos de transação deve ser cuidadosamente avaliado por afetar diretamente a rentabilidade líquida dos portfólios e a comparabilidade entre estratégias.

Tabela 4.2 – Resumo dos dados por ano no período de 2019 a 2024.

Ano	Ativo	Retorno Médio	Volatilidade	Retorno em Excesso	Sharpe	Selic
2019	BOVA11	0.327	0.159	0.270	1.696	0.057
	FIXA11	0.140	0.042	0.113	2.656	
	IMAB11	0.184	0.061	0.139	2.269	
	SMAL11	0.795	0.171	0.670	3.919	
2020	BOVA11	-0.059	0.449	-0.191	-0.086	0.028
	FIXA11	0.085	0.088	-0.023	-0.002	
	IMAB11	0.067	0.162	0.010	0.064	
	SMAL11	-0.104	0.515	-0.132	-0.068	
2021	BOVA11	-0.149	0.216	-0.193	-0.042	0.045
	FIXA11	-0.089	0.062	-0.214	-0.013	
	IMAB11	-0.070	0.090	-0.202	-0.018	
	SMAL11	-0.207	0.257	-0.315	-0.081	
2022	BOVA11	0.124	0.216	0.067	0.308	0.125
	FIXA11	0.068	0.068	0.040	0.595	
	IMAB11	0.044	0.090	-0.001	0.000	
	SMAL11	-0.104	0.295	-0.228	-0.067	
2023	BOVA11	0.315	0.173	0.183	1.054	0.132
	FIXA11	0.177	0.070	0.069	0.980	
	IMAB11	0.165	0.056	0.108	1.910	
	SMAL11	0.236	0.234	0.209	0.891	
2024	BOVA11	-0.083	0.134	-0.128	-0.017	0.108
	FIXA11	-0.046	0.075	-0.171	-0.013	
	IMAB11	-0.046	0.067	-0.178	-0.012	
	SMAL11	-0.212	0.218	-0.320	-0.070	

Nota: A descrição para a abreviação dos ETFs pode ser obtida na Tabela 4.1. Os valores do retorno em excesso é a diferença entre o retorno médio anual e a taxa livre de risco anual. O Índice de Sharpe utilizado é a versão proposta por Israelsen (2005) que aplica uma correção quando o retorno em excesso é negativo.

Todas as estratégias consideradas (condicionais e estática) adotaram o mesmo nível de aversão ao risco (λ) e custo de transação (ϕ), calibrados por meio do algoritmo `irace`, com uma abordagem *data-driven*. Devido ao uso simultâneo das três funções de risco (variância, CVaR e CDaR), foi adotado o critério *min-max regret* sobre o desempenho fora da amostra (utilidade CER) para identificar parâmetros robustos entre os modelos, resultando em $\lambda = 4$ e $\phi = 0.001$.

A partir dessa configuração, os pesos das carteiras passaram a ser otimizados de forma dinâmica, condicionados às mudanças de regime identificadas pelo modelo HMM. Esse procedimento foi aplicado às três funções de risco consideradas (variância, CVaR e CDaR) permitindo comparações diretas entre seus desempenhos sob diferentes regimes de volatilidade. A Tabela 4.3 apresenta a alocação média dos ativos para cada combinação de regime e função de risco.

Tabela 4.3 – Pesos médios por regime de volatilidade e medida de risco ($\lambda = 4$ e $\phi = 0.001$.)

Medida	**Regime**	**BOVA11**	**SMAL11**	**IMAB11**	**FIXA11**	**SumEquity**	**SumFixed**
Variância	Alta	0.362	0.211	0.369	0.0575	0.573	0.427
	Baixa	0.372	0.140	0.441	0.0471	0.512	0.488
CVaR	Alta	0.138	0.365	0.282	0.215	0.503	0.497
	Baixa	0.056	0.278	0.291	0.374	0.334	0.666
CDaR	Alta	0.018	0.014	0.447	0.521	0.094	0.906
	Baixa	0.030	0.017	0.158	0.794	0.047	0.952

Nota: Os pesos médios representam a alocação média dos ativos para cada função de risco assumida na Equação 4.6 (variância, CVaR e CDaR), no período de 2020 a 2024. A descrição para a abreviação dos ETFs pode ser obtida na Tabela 4.1. SumEquity é a alocação total em ETFs que replicam índices de ações, enquanto SumFixed é a alocação total em ETFs que replicam índices de renda fixa. LowVol indica o regime de baixa volatilidade e HighVol o regime de alta volatilidade.

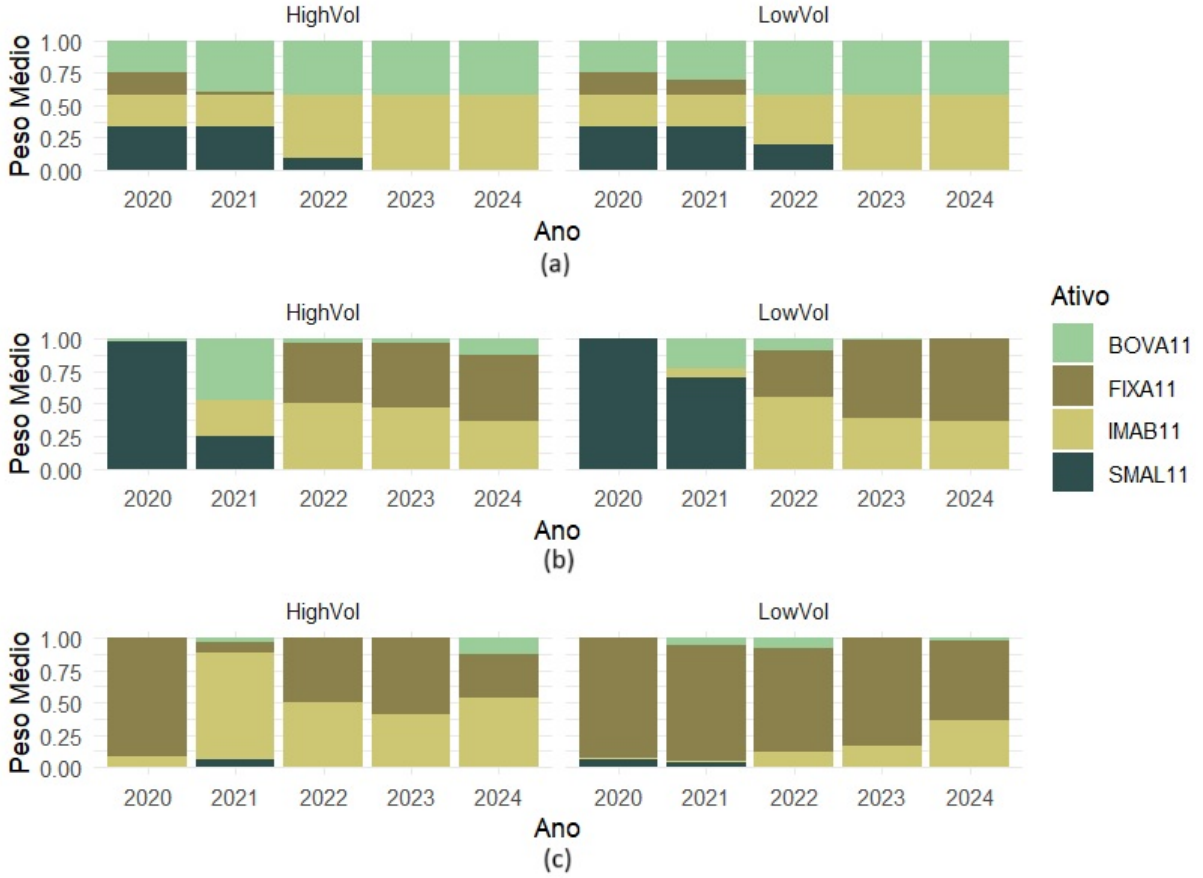
A análise da Tabela 4.3 oferece um vislumbre operacional das diferenças de desempenho observadas e confirmadas estatisticamente. A sensibilidade das estratégias aos regimes de volatilidade variou significativamente conforme a métrica adotada. A estratégia baseada em variância ajustou sua alocação em ETFs de renda variável entre os regimes de 57.3% para 51.2%, destacando-se por ser a estratégia com maiores alocações em ETFs de ações, em ambos os regimes. O CVaR promoveu uma alteração mais expressiva dos pesos em ETFs de ações, de 50.3% para 33.4% e o CDaR, por sua vez, manteve uma postura conservadora em ambos os cenários, com exposição inferior a 5% em renda variável mesmo em períodos de baixa volatilidade.

A postura extremamente conservadora do CDaR, com alocações de aproximadamente 90% e 95% em ETFs de renda fixa nos regimes de alta e baixa volatilidade, respectivamente, reflete sua prioridade em evitar *drawdowns* a todo custo, o que se traduz nos menores níveis de risco registrados na Tabela 4.4.

O posicionamento das carteiras em ETFs de renda fixa justifica-se em função das características do período analisado. O aumento dos juros básicos observado no período favoreceu a atratividade relativa dos ativos de renda fixa, especialmente em mercados emergentes como o brasileiro, que historicamente praticam elevadas taxas de juros.

A Figura 4.3 ilustra a evolução dos pesos dos ativos ao longo do tempo, segmentada por regime de volatilidade e função de risco adotada, possibilitando visualizar como cada medida de risco ajusta seus pesos em resposta às transições de regime do que a variância. O painel (a) apresenta os pesos obtidos com a variância, (b) os resultantes do CVaR, e (c) os derivados do CDaR.

Figura 4.3 – Evolução temporal dos pesos dos ativos por função de risco e regime de volatilidade.



Nota: o painel (a) representa apresenta os pesos obtidos com a variância (b) os resultantes do CVaR, e (c) os derivados do CDaR. LowVol representa o regime de baixa volatilidade e HighVol representa o regime de alta volatilidade. A descrição para a abreviação dos ETFs pode ser obtida na Tabela 4.1.
Fonte: Elaboração própria.

Observa-se por meio da Figura 4.3 que métricas como o CVaR e o CDaR ajustam mais seus pesos em resposta às transições dos regimes do que a variância. Este padrão é consistente com as alocações médias observadas na Tabela 4.3.

O modelo baseado na variância, embora procure ajustar a exposição da carteira aos regimes, apresenta uma capacidade de adaptação limitada. Essa limitação decorre da própria natureza da variância como métrica de risco, uma vez que ela se baseia nas flutuações em torno da média e não distingue entre desvios positivos e negativos (DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009). Além disso, como a variância depende da matriz de covariância dos ativos, ela é sensível à estabilidade das correlações, e, em períodos de alta volatilidade, as correlações entre ativos tendem a se elevar (Ang; Timmermann, 2012), reduzindo os benefícios da diversificação do modelo tradicional. Como resultado, os retornos esperados relativos às ações não se deterioram suficientemente para justificar realocações maiores. Consequentemente, a estratégia baseada na variância permanece relativamente exposta ao risco de mercado, mesmo em cenários de crise.

Por outro lado, métricas de cauda, como CVaR e CDaR, conseguem capturar com maior

eficiência os riscos assimétricos e extremos, e se mostram mais responsivas à deterioração das condições de mercado. Destaca-se que a postura defensiva mantida pelo CDaR, mesmo em regimes de baixa volatilidade (Tabela 4.3), não reflete mera inércia. Em vez disso, há mudanças ativas na composição do portfólio entre os ETFs de renda fixa, o que demonstra uma estratégia deliberada de proteção contínua contra *drawdowns* (Figura 4.3).

Tais evidências corroboram a literatura que aponta as métricas de cauda como mais eficazes em ambientes de incerteza (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024). A escolha da métrica de risco é, portanto, uma questão crítica, dado que diferentes métricas reagem de maneiras distintas às mudanças estruturais na volatilidade do mercado. Enquanto métricas como o CDaR priorizam a contenção de quedas prolongadas em ambientes instáveis e o CVaR as perdas, a variância, por priorizar a variação sem distinção dos movimentos positivos ou negativos, pode apresentar respostas menos eficazes. Compreender essa relação é fundamental para orientar decisões estratégicas de alocação de ativos frente à dinâmica dos regimes de volatilidade, com implicações diretas sobre a composição do portfólio, sua resiliência e seu desempenho em diferentes regimes de volatilidade.

Para verificar se as diferenças observadas são estatisticamente significativas, adotou-se o teste Aligned Rank Transform (ART), utilizando como variável dependente os retornos acumulados das estratégias ao final do período de investimento. Foram considerados como efeitos fixos os fatores medidas de risco (variância, CVaR e CDaR) e regime de volatilidade (alta e baixa), bem como a interação entre eles. As comparações entre pares de estratégias foram realizadas com ajuste de Tukey para controle do erro tipo I em múltiplas comparações. Os resultados, juntamente com os indicadores de desempenho das estratégias no horizonte de 2020 a 2024, considerando a atualização dos pesos a cada transição de regime identificada pelo modelo HMM, estão sintetizados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Desempenho das estratégias otimizadas por medida de risco

Medida	**Regime**	**Ret**$_{acum.}$	**Ret**$_{anual.}$	**Vol.**	**Sharpe**	**Sortino**	**MDD**	**Dif.**	**TE**
Variância	Alta†	-0.196^{b}	-0.141	0.276	-0.026	-0.032	0.341	11.0	0.047
	Baixa†	0.233^{b}	0.066	0.113	0.039	**0.054**	0.132	-11.4	0.036
CVaR	Alta†	-0.279^{b}	-0.204	0.408	-0.022	-0.026	0.499	17.4	0.188
	Baixa†	**0.293**^{b}	**0.082**	0.142	**0.040**	**0.054**	0.141	-17.0	0.075
CDaR	Alta†	**0.039**^{a}	**0.027**	**0.101**	**0.020**	**0.025**	**0.070**	–	0.188
	Baixa†	0.122^{a}	0.035	**0.065**	0.035	0.051	**0.098**	–	0.069
Pesos $1/n$		0.020	0.004	0.165	-0.027	0.009	0.310	–	0.009
Média-variância		**0.039**	0.008	0.160	-0.024	0.011	0.310	–	0.000

Nota: A carteira $1/n$ é uma carteira com pesos igualmente ponderados. O portfólio passivo utilizado para cálculo do *Tracking Error* (TE) é igualmente ponderado ($1/n$). O valor em negrito representa o melhor valor para a métrica avaliada por regime e modelo. O símbolo † indica que o Retorno Acumulado difere estatisticamente entre os regimes de alta e baixa volatilidade ($p < 0.001$), conforme análise do teste ART. Letras diferentes (a, b) indicam diferenças estatisticamente significativas ($p < 0.05$) entre as medidas de risco dentro de cada regime. Medidas que compartilham a mesma letra não diferem estatisticamente. A coluna Dif. apresenta a diferença estimada no retorno acumulado entre CDaR e as demais métricas, conforme resultado do teste ART, servindo como medida adicional da magnitude da superioridade estatística.

Para uma avaliação estatística robusta do desempenho, foram adotadas duas abordagens complementares. Primeiramente, para testar a performance ajustada ao risco, comparou-se os Índices de Sharpe de todos os pares de estratégias através do teste de Ledoit e Wolf (2008). Os resultados indicaram que não há diferenças estatisticamente significativas entre os Índices de Sharpe, mesmo ao comparar as estratégias dentro do mesmo regime de volatilidade.

Este achado, a princípio contraintuitivo, sugere que as vantagens de uma estratégia sobre a outra não residem na melhora no retorno ajustado ao risco. Por essa razão, para capturar o impacto efetivo sobre o resultado final do investidor, que pode ser influenciado por riscos de cauda e pela composição dos retornos ao longo do tempo, adotou-se o teste Aligned Rank Transform (ART) sobre os retornos acumulados. A análise via ART revelou que, ao desconsiderar o regime, não há diferenças estatisticamente significativas entre as medidas de risco. Contudo, observou-se que tanto o efeito regime de volatilidade quanto o efeito interação entre as medidas de risco e os regimes influenciaram significativamente o desempenho das estratégias. Isso indica que o comportamento das medidas de risco varia conforme o regime vigente, ou seja, as métricas reagem de forma distinta em cenários de alta ou baixa volatilidade, em termos de retornos acumulados.

A análise da Tabela 4.4 revela que, em regimes de alta volatilidade, a estratégia baseada no CDaR foi a única a apresentar desempenho positivo, com retorno anualizado de 2.7% e acumulado de 3.9%. Além disso, registrou a menor volatilidade (10%) e o menor *drawdown* máximo (7%) entre as estratégias. A análise estatística via ART confirma a robustez desses resultados, indicando que o CDaR superou o CVaR em aproximadamente 17.4 pontos percentuais e a variância em cerca de 11.0 pontos percentuais no retorno acumulado, com ambas as diferenças estatisticamente significativas ($p \leq 0.011$).

A superioridade do CDaR em regimes de alta volatilidade, conforme evidenciado pelo teste ART, está associada à sua capacidade de capturar tanto a magnitude quanto a persistência das perdas acumuladas. Essa abordagem fornece uma avaliação de risco mais alinhada ao comportamento de investidores avessos a perdas, especialmente em contextos marcados por choques sucessivos. Esses achados estão em consonância com a literatura que reconhece a eficácia das medidas baseadas em *drawdown* em ambientes de elevada incerteza (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005; Goldberg; Mahmoud, 2017; Geboers; Depaire; Annaert, 2022).

Em contrapartida, nos períodos de baixa volatilidade, o CVaR apresentou, em média, o melhor desempenho entre as métricas analisadas, com retorno acumulado de 29.3% e retorno anualizado de 8.2%. A análise estatística via ART indicou que o CVaR superou significativamente o CDaR em aproximadamente 17 pontos percentuais ($p = 0.001$), enquanto a diferença em relação à variância não foi estatisticamente significativa ($p = 0.259$).

Ainda que a diferença entre CVaR e variância não seja estatisticamente significativa em termos de retorno acumulado, o CVaR demonstrou performance ajustada ao risco superior, sugerindo maior eficiência relativa em ambientes de normalidade do mercado. Esses resultados são compatíveis com a literatura, que destaca o CVaR como uma métrica capaz de equilibrar retornos esperados e perdas potenciais (Rockafellar; Uryasev, 2000). Essa capacidade de capturar os riscos além do VaR torna o CVaR especialmente indicado para contextos em que não se exigem estratégias excessivamente defensivas.

No regime de baixa volatilidade, embora o CDaR tenha exibido desempenho inferior em termos absolutos, destacou-se por apresentar a menor volatilidade e o menor *drawdown* entre as estratégias avaliadas. Esses achados reforçam seu perfil conservador e sua adequação a investidores com alta aversão a perdas acumuladas, conforme discutido por Krokhmal, Uryasev e Zrazhevsky (2005).

Em consonância com Savaei, Alinezhad e Eghtesadifard (2024), que propõem um modelo robusto com foco exclusivo no CDaR em ambientes incertos, os resultados obtidos sustentam sua relevância em contextos adversos. Contudo, ao incorporar explicitamente os regimes via HMM, este estudo evidencia que a eficácia das métricas de risco é regime-condicional. Assim, enquanto o CDaR se mostra eficaz em períodos de estresse, sua manutenção em contextos de normalidade do mercado implica perdas de eficiência, em termos de retorno ajustado ao risco, e compromete a rentabilidade da carteira.

Os resultados alcançados indicam que o modelo de Média-variância condicionado ao regime não apresentou desempenho superior em nenhum dos cenários analisados. Ressalta-se que, embora amplamente utilizada, a variância é considerada por diversos autores como uma métrica de risco que não satisfaz as propriedades de coerência, além de penalizar tanto ganhos quanto perdas, uma limitação particularmente relevante em contextos de elevada aversão ao risco (Artzner et al. 1999; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Righi; Borenstein, 2018; Gilbert; Meiklejohn, 2019), elementos que isoladamente já reforçariam o uso de medidas alternativas de

risco.

A avaliação do desempenho das abordagens estáticas, que desconsideram a existência de regimes e utilizadas como benchmark, evidencia sua inferioridade em relação às estratégias condicionadas, tanto em termos de retorno ajustado ao risco quanto no controle de *drawdowns*. O modelo estático baseado na Média-variância apresentou um retorno anualizado de apenas 0.8%, enquanto a estratégia ingênua alcançou 0.4%, contrastando com os desempenhos superiores do CDaR (2.7%) em regimes de alta volatilidade e do CVaR (8.2%) em regimes de baixa volatilidade. Esses resultados reforçam as limitações de modelos estacionários em ambientes caracterizados por transições recorrentes de regime, como o mercado brasileiro.

Em termos de Tracking Error (TE), as estratégias baseadas em CDaR e CVaR registraram os maiores desvios em relação à estratégia $1/n$, especialmente no regime de alta volatilidade (cerca de 18%) e, em menor grau, no regime de baixa volatilidade (cerca de 7%), refletindo uma postura mais ativa em relação à carteira passiva. A estratégia baseada na variância, por sua vez, apresentou TE inferior a 5% em ambos os regimes, evidenciando maior aderência ao portfólio igualmente ponderado ($1/n$), mas com desempenho mais vulnerável durante os períodos de crise. Embora um TE elevado indique maior afastamento em relação à alocação passiva, tal comportamento pode ser característico de estratégias ativas que visam ganhos superiores ou menor exposição a riscos específicos, ao se apoiarem em métricas mais responsivas à estrutura do mercado (Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024).

A aplicação do teste Aligned Rank Transform (ART) forneceu evidências estatisticamente significativas de que a eficácia das métricas de risco varia de forma substancial conforme o regime de volatilidade vigente. Ao comparar explicitamente o desempenho das medidas sob diferentes regimes identificados por HMM, esta análise robusta representa uma contribuição original à literatura, ampliando estudos anteriores que não incorporaram formalmente a estrutura de mudança de regime.

Dessa forma, a estratégia adaptativa baseada em HMMs demonstrou-se superior ao modelo ingênuo e ao modelo de regime invariante no tempo com rebalanceamento periódico. Sabendo da importância do custo de transação para o desempenho líquido das carteiras, destaca-se que, embora a alocação dinâmica envolva maior número de realocações, 33 *versus* 16 na alocação de regime invariante no tempo, essas mudanças ocorreram em momentos-chave, permitindo decisões mais oportunas e alinhadas ao ambiente de mercado. Conforme argumentam Nystrup et al. (2019), estratégias condicionadas a regimes oferecem um horizonte de alocação mais compatível com a dinâmica dos ciclos econômicos, aspecto particularmente relevante em economias sujeitas a choques estruturais, como a brasileira.

Como consequência, os resultados fornecem indícios de que os gestores ativos de investimentos devem ajustar suas estratégias de alocação conforme o regime prevalente no mercado, priorizando métricas de risco que maximizem a relação risco-retorno em cada contexto. Os resultados indicam que o CDaR é mais eficaz em cenários de estresse, ao passo que o CVaR apresenta desempenho superior em ambientes estáveis, por equilibrar retorno e controle de

perdas. Essa abordagem adaptativa, fundamentada em modelos HMM, permite capturar com maior precisão as dinâmicas de mercado, por meio dos regimes de volatilidade, orientando decisões baseadas em evidências quantitativas, em lugar de regras fixas de rebalanceamento.

4.5 Considerações Finais

Este estudo investigou como diferentes métricas de risco (variância, CVaR e CDaR) influenciam a alocação ótima de portfólio sob regimes distintos de volatilidade no mercado brasileiro, utilizando um modelo de mudança de regime baseado em *Hidden Markov Models* (HMM). A metodologia combinou rebalanceamentos condicionados às transições de regime identificados e utilizou a calibração *data-driven* dos parâmetros de aversão ao risco e custo de transação, configurando uma abordagem prática e adaptativa para a gestão de portfólios.

A pesquisa foi motivada pela escassez de investigações que avaliem, com rigor empírico e estatístico, a sensibilidade de métricas de risco à presença de regimes de volatilidade. Este trabalho contribui para preencher essa lacuna ao demonstrar, por meio do teste Aligned Rank Transform (ART), que a eficácia de medidas como variância, CVaR e CDaR é significativamente condicionada ao regime de volatilidade.

A análise estatística via ART confirmou que essas diferenças são estatisticamente significativas e regime-condicional, quando considerados os retornos acumulados: especificamente, o CDaR superou o CVaR e a variância em regimes de alta volatilidade, enquanto o CVaR e a variância foram superiores ao CDaR em ambientes de baixa volatilidade. Por outro lado, o teste estatístico de Ledoit e Wolf (2008) não encontrou diferenças estatisticamente significativas para a diferença entre os Índices de Sharpe. Dessa forma, a vantagem das medidas em relação ao regime parece residir sobre o sobre o resultado final do investidor, medido pelo retorno acumulado.

Em cenários de alta volatilidade, o CDaR destacou-se por apresentar retorno positivo, menor volatilidade e controle superior de *drawdowns*. Essa performance pode ser atribuída à sua formulação, que prioriza a contenção de perdas sequenciais e a proteção contra quedas prolongadas, características críticas em ambientes incertos. Em contraste, em regimes de baixa volatilidade, o CVaR se mostrou mais eficiente, equilibrando retorno e risco extremo ao focar na média das perdas além do VaR, sem incorrer no extremo conservadorismo que caracteriza o CDaR.

A variância, embora tradicionalmente adotada como métrica de risco, apresentou desempenho intermediário. Embora não tenha se diferenciado estatisticamente do CVaR pelo ART, seus retornos e indicadores ajustados ao risco foram inferiores aos do CVaR em ambos os regimes, evidenciando limitações relevantes na captura de riscos de cauda.

Do ponto de vista teórico, os achados reforçam a superioridade das métricas de cauda na mensuração do risco em ambientes incertos, ao passo que expõem as limitações da abordagem média-variância.

No plano metodológico, a principal contribuição deste estudo reside na integração entre a identificação de regimes via HMM e a comparação direta da eficácia das métricas de risco sob diferentes condições de mercado. Ao analisar como os pesos dos portfólios se adaptam a cada transição de regime, foi possível observar que a eficácia relativa das métricas varia de maneira significativa entre ambientes de alta e baixa volatilidade. Essa abordagem demonstrou que a escolha da métrica de risco influencia decisivamente o desempenho do portfólio, validando a hipótese de que a eficácia das métricas é regime-condicional.

Sob a ótica prática, os resultados têm implicações diretas para gestores ativos de investimentos. O CDaR mostrou-se uma alternativa eficaz em ambientes de estresse, sendo particularmente adequado para perfis conservadores focados em preservação de capital. O CVaR, por sua vez, evidenciou melhor equilíbrio entre retorno e risco extremo em contextos de normalidade do mercado, sendo mais adequado para estratégias que buscam maximizar o retorno ajustado ao risco, em regimes de baixa volatilidade.

Dessa forma, este estudo avança a literatura ao integrar a avaliação do desempenho das métricas de risco ao contexto dinâmico dos regimes de volatilidade, demonstrando que decisões de alocação mais eficientes podem ser alcançadas ao considerar explicitamente o regime de volatilidade na escolha da medida de risco.

Como limitações, destaca-se a aplicação restrita ao mercado brasileiro, cujas especificidades institucionais e macroeconômicas podem restringir a generalização dos resultados. Pesquisas futuras poderiam ampliar a avaliação para incluir outras medidas de risco, aplicar esta metodologia em mercados desenvolvidos ou ainda incorporar variáveis macroeconômicas para aprimorar a identificação dos regimes. Uma linha promissora seria a integração de modelos de mudança de regime com técnicas de *Reinforcement learning*, visando aprimorar a capacidade preditiva e a robustez das estratégias de alocação dinâmicas.

5 ALOCAÇÃO ÓTIMA MULTIPERÍODO COM RISCO CONDICIONAL AOS REGIMES DE VOLATILIDADE

Resumo:

A gestão de portfólios enfrenta o desafio de acomodar regimes de volatilidade que alternam entre fases de tranquilidade e turbulência, especialmente em economias emergentes. Modelos tradicionais de período único, baseados na estrutura Média-Variância, mostram-se frágeis diante de riscos extremos, mudanças de volatilidade e erros de estimação. Para enfrentar essas limitações, este estudo propõe uma abordagem multiperíodo que combina a capacidade de detecção de regimes dos Modelos Ocultos de Markov (HMM) com a flexibilidade do Model Predictive Control (MPC). A contribuição central consiste na introdução de uma métrica de risco regime-condicional: o modelo adota o Conditional Value-at-Risk (CVaR) em períodos de baixa volatilidade e o Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR) em períodos de alta volatilidade. Essa alternância permite que a função-objetivo reflita melhor o perfil de risco prevalente, enquanto o MPC internaliza custos de transação e penalização por concentração ao longo de um horizonte deslizante. A estratégia é testada com dados de ETFs da Brasil, Bolsa, Balcão (B3) e comparada a carteiras de regime invariante no tempo (regime único), abordagens multiperíodo com risco independente do regime e alocação igualmente ponderada. Os resultados mostram que a estratégia com risco condicional ao regime apresenta desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco, sem aumento significativo de risco absoluto. Testes estatísticos não paramétricos confirmam a significância das diferenças observadas. Conclui-se que a escolha dinâmica da métrica de risco, orientada por estados latentes e operacionalizada via MPC, constitui uma alternativa robusta às abordagens estáticas tradicionais, ampliando a utilidade do gestor ativo de investimento, ou simplesmente investidor, e fortalecendo a resiliência da alocação de ativos em mercados voláteis.

Palavras-chave: Hidden Markov Model; Portfólio; Modelo de controle preditivo; Conditional Value-at-Risk; Conditional Drawdown-at-Risk.

5.1 Introdução

A alocação ótima de portfólios, tradicionalmente dominada pelo Modelo Média-Variância (MMV) de Markowitz Markowitz (1952, 1959), busca o equilíbrio ideal entre retorno esperado e risco, comumente a variância dos retornos. Apesar de sua inegável relevância teórica, a aplicação prática do modelo MMV enfrenta críticas significativas (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; De Jong, 2018).

As fragilidades do modelo MMV foram particularmente intensificadas nos períodos

de crises financeiras e mudanças estruturais nos mercados, evidenciando a incapacidade das abordagens estáticas e de período único de lidar com riscos de cauda e alterações abruptas de volatilidade ao longo do horizonte de investimento (Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022). Em economias emergentes, como a brasileira, tais limitações mostram-se ainda mais pronunciadas, dado que os ciclos de negócios e financeiros tendem a ser mais intensos (Claessens; Kose; Terrones, 2012; Borio, 2014; Anaya; Hachula; Offermanns, 2017; Azad; Serletis, 2022).

Como resposta a essas deficiências dos modelos de regime único, frequentemente considerados míopes, cresceram as discussões a respeito de modelos multiperíodos. Contudo, historicamente, a resolução de modelos multiperíodo completos, como aqueles baseados em Programação Dinâmica, encontrou aplicação prática limitada devido à sua complexidade computacional (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Nesse cenário de busca por tratabilidade, o Model Predictive Control (MPC) emergiu recentemente como uma alternativa viável para problemas de controle ótimo multiperíodo (Li; Uysal; Mulvey, 2022).

O MPC tem como sua principal vantagem a capacidade de traduzir previsões de mercado em decisões de negociação, resultando em estratégias de investimento reativas e continuamente adaptativas às mudanças nas condições de mercado (Nystrup et al. 2019).

Paralelamente a esses avanços em otimização, os Modelos Ocultos de Markov (HMMs) consolidaram-se como ferramentas analíticas em finanças. Sua força reside na capacidade de identificar e modelar regimes ocultos de mercado, estados latentes com distintas características estatísticas de retorno, volatilidade e correlação (Nystrup et al. 2015; Nystrup; Madsen; Lindström, 2018; Aydınhan et al. 2024). Os HMMs permitem, assim, estimar parâmetros condicionais a esses regimes, fornecendo uma base para estratégias que reagem dinamicamente às mudanças nas condições de mercado (Li; Uysal; Mulvey, 2022).

Consequentemente, a integração da capacidade preditiva dos HMMs com *frameworks* multiperíodo baseados em MPC representa um avanço significativo na alocação dinâmica de ativos (Oprisor; Kwon, 2021). Essa abordagem combinada permite que as informações sobre regimes de volatilidade, inferidas pelo HMM, sejam incorporadas dinamicamente nas decisões de alocação ótimas resolvidas pelo MPC, oferecendo potencial para tratar a não linearidade dos dados, capturar mudanças relevantes do mercado financeiro e embasar decisões atuais com uma visão de horizonte futuro próximo.

Embora a integração de Modelos Ocultos de Markov (HMM) com o Model Predictive Control (MPC) represente um avanço significativo na alocação dinâmica de ativos, a literatura existente revela que a maioria das abordagens HMM-MPC mantém uma métrica de risco fixa ao longo do investimento, independentemente do regime de volatilidade. Esta rigidez impede que o modelo se adapte plenamente à natureza mutável da percepção de risco do investidor.

Diante do exposto, e partindo do pressuposto de que o mercado opera sob regimes (Ang; Bekaert, 2004; Ang; Timmermann, 2012; Kritzman; Page; Turkington, 2012), emerge uma clara lacuna na literatura quanto ao ajuste dinâmico na própria forma como o risco é incorporado e avaliado na função de utilidade do investidor, o que pode ser realizado utilizando o regime de

volatilidade previsto pelo HMM. Essa capacidade de modular a caracterização das preferências de risco do gestor ativo de investimentos é fundamental para uma gestão de riscos, especialmente em mercados voláteis ou em períodos de crise.

A comutação entre métricas, condicionada ao regime, pode ser interpretada como uma aproximação dinâmica para maximizar uma função de utilidade estado-dependente, onde o 'estado' é o regime de volatilidade inferido pelo HMM, alinhando-se à compreensão de que o risco afeta a utilidade de maneiras não homogêneas dependendo das condições do mercado (Jarrow; Li, 2021). Essa abordagem permite que a função objetivo do problema de escolha do portfólio reflita mais precisamente o perfil de risco prevalente e as prioridades do gestor de investimentos em diferentes cenários do mercado. Faltam, portanto, propostas que implementem um chaveamento adaptativo entre diferentes tipos de medidas de risco que busquem otimizar a utilidade esperada da riqueza do portfólio no médio e longo prazo.

Este estudo preenche essa lacuna ao propor um modelo de otimização de portfólio multiperíodo, baseado em MPC, onde a métrica de risco utilizada é regime-condicional. Especificamente, adotando uma aproximação da função de utilidade estado-dependente que se manifesta na comutação entre o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) em regimes de baixa volatilidade e o *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR) em regimes de alta volatilidade.

A atenção ao regime de volatilidade é crucial, dada a fragilidade da premissa de um *trade-off* risco-retorno estável frente à volatilidade (DeMiguel; Martín-utrera; Uppal, 2024) e as limitações dos modelos tradicionais em ambientes voláteis (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Regimes de alta volatilidade associam-se frequentemente a distribuições de caudas pesadas, exigindo ferramentas mais sensíveis aos extremos. Nesse contexto, foi escolhido combinar o CVaR e o CDaR, devido às propriedades dessas medidas. O CVaR, amplamente usado para distribuições relativamente estáveis (Gilbert; Meiklejohn, 2019), reflete bem os interesses do gestor ativo de investimentos em baixa volatilidade. O CDaR, por outro lado, capta mais diretamente o risco de queda acumulada, sendo mais conservador e relevante em alta volatilidade (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005).

Ao combinar essas métricas de forma regime-condicional, o modelo proposto busca alinhar a função objetivo à estrutura temporal dos riscos, promovendo uma alocação mais responsiva. A abordagem visa aprimorar o desempenho ajustado ao risco, oferecendo gestão adaptativa que preserva capital em cenários adversos sem conservadorismo excessivo em períodos de normalidade. Para além da relevância teórica, o modelo apresenta implicações práticas significativas, fornecendo uma ferramenta robusta para alocação, particularmente útil em mercados emergentes.

Este artigo propõe um modelo preditivo para a alocação de ativos que se baseia na estrutura do Controle Preditivo por Modelo (MPC). A inovação central reside na comutação dinâmica entre duas métricas de risco, o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) e o *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR). A transição é conduzida por um Modelo Oculto de Markov (HMM), que prevê o regime de volatilidade predominante no mercado. A metodologia é

submetida a uma avaliação empírica utilizando dados do mercado financeiro brasileiro. Os resultados demonstram que a estratégia proposta confere vantagens em relação aos *benchmarks* convencionais, superando, em particular, as abordagens de alocação de ativos que empregam métricas de risco fixas.

5.2 Revisão de literatura

A literatura sobre seleção ótima de portfólio acumula mais de sete décadas de desenvolvimento, desde o trabalho seminal de Markowitz (1952). A criação do modelo Média-Variância (MMV) forneceu uma forma matematicamente elegante de mensurar e gerenciar o risco em finanças, extrapolando as abordagens *ad hoc* adotadas à época (Szegö, 2002). Markowitz definiu formalmente o risco como a variância (ou desvio-padrão) dos retornos e propôs um método para selecionar portfólios que oferecessem o melhor equilíbrio entre o retorno esperado e o risco.

A proposição e justificativa do MMV apresentadas em Markowitz (1952, 1959), transformou a alocação de ativos e se tornou a base do que hoje chamamos de Teoria Moderna do Portfólio (MTP) (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Embora amplamente criticado, como destacado por Tu (2010) seu *framework* ainda é o principal modelo usado na prática atual de alocação de ativos e gestão de portfólio ativa.

As críticas ao modelo de média-variância emergiram, sobretudo, pela forma usual de definição dos parâmetros do modelo, retornos esperados e covariâncias, serem estimados com base em dados históricos (Michaud, 1989). Para De Jong (2018) a discussão deve ir além da questão dos erros de estimação, argumentando que o cerne do problema com a MTP reside na ausência de um arcabouço para lidar com a incerteza intrínseca dos mercados financeiros, propondo uma generalização do modelo MMV para dois objetivos: minimização da variância para os riscos previsíveis, mas também a maximização da diversificação como forma de proteção contra choques. De acordo com a autora, a própria adequação da abordagem ótima para otimização de portfólios depende fundamentalmente do ambiente de investimento e do nível de incerteza considerado.

Segundo Roman e Mitra (2009), as fragilidades do modelo tradicional de MMV motivaram a busca por abordagens mais robustas, incluindo modelos multiperíodo e o uso de métricas alternativas de risco. O próprio Markowitz (2010), ao revisitar seu trabalho, reconheceu que a aproximação MMV à função utilidade falha sob alta alavancagem ou distribuições muito dispersas, sugerindo alternativas como a média geométrica e a semi-variância.

Para Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014), as principais abordagens propostas na literatura para mitigar ou contornar essas questões são a abordagem Black–Litterman (Black; Litterman, 1992), abordagem de paridade de risco (Qian, 2005), estratégia de pesos igualmente ponderados (DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009) e técnicas de otimização robusta.

O modelo Black–Litterman é uma abordagem de *market based shrinkage* que combina estimativas de retorno de equilíbrio de mercado com as visões do investidor, ponderadas pela volatilidade dos ativos e a confiança nas previsões (Oprisor; Kwon, 2021). A estratégia de paridade de risco se concentra na diversificação de risco, fugindo da necessidade de retornos estimados, um elemento apontado como mais crítico dentro da discussão a respeito dos erros de estimativa (Chopra; Ziemba, 2013). Já a otimização robusta constitui uma classe de técnicas para lidar com a incerteza dos parâmetros, incorporando explicitamente essa incerteza na formulação do problema (Han, 2020).

As estratégias ingênuas, ou alocação igualmente ponderada ($1/n$), independem de modelos de retorno e risco e, portanto, não estão sujeitas a erros de estimativas dos parâmetros e, frequentemente, superam extensões sofisticadas do MMV em diversos cenários (DeMiguel; Garlappi; Uppal, 2009). Para De Jong (2018) a eficácia das estratégias ingênuas é resultado da sua capacidade em lidar com a imprevisibilidade inerente aos mercados financeiros. Segundo a autora, em um cenário de incerteza fundamental, onde o poder de previsão é limitado e os resultados são igualmente prováveis, a alocação igualmente ponderada é vista como uma estratégia ótima para minimizar a vulnerabilidade a eventos imprevistos e proteger o capital investido. Contudo, Hwang, Xu e In (2018) apontam que a simplicidade dessas estratégias acarreta um custo implícito, particularmente em termos de maior exposição a riscos de cauda e eventos extremos, aspectos que também não são totalmente capturados pela média e variância.

Nesse esforço em mitigar a sensibilidade a erros de estimação, Tu (2010) propõe uma estratégia alternativa focada na combinação da regra ingênua $1/n$ com regras sofisticadas baseadas na teoria de portfólio de Markowitz e suas extensões. Essa abordagem é sugerida como uma forma de melhorar o desempenho e superar as limitações das estratégias MMV na presença de incerteza de parâmetros ou erros de estimação. A combinação pode ser interpretada estatisticamente como um estimador de encolhimento, buscando um equilíbrio entre o viés da regra $1/n$ (que é viesada, mas tem variância zero) e a variância das regras sofisticadas (que podem ter variância considerável em pequenas amostras, embora assintoticamente não viesadas).

Um ponto de debate adicional é que o modelo MMV é inerentemente de período único, o que destoa da natureza intertemporal das decisões de investimento em mercados dinâmicos e sujeitos a mudanças de regime (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Nystrup et al. 2019; Cui et al. 2022). A abordagem ótima para otimização de portfólios depende do ambiente de investimento, especificamente do nível de incerteza (De Jong, 2018).

O reconhecimento de que as decisões de investimento não se restringem a um único ponto no tempo, e de que os gestores ativos de investimento, ou simplesmente investidores, enfrentam custos de transação, fluxos de caixa intermediários e mudanças nas condições de volatilidade, enfatizam a necessidade de gerenciar riscos de forma contínua ao longo do horizonte de investimento e impulsionam o avanço de modelos multiperíodo (Boyd et al. 2017). Conforme DeMiguel, Martín-utrera e Uppal (2024), o nível da volatilidade de mercado muda ao longo do tempo, o que não pode ser ignorado, tal como os custos de transação, uma vez que ambos são

determinantes para se obter estratégias de outperformance.

Entretanto, abordagens baseadas em Programação Dinâmica, frequentemente aplicadas a modelos multiperíodo, embora teoricamente robustas, enfrentam severas limitações computacionais que restringem sua aplicabilidade prática (Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014). Recentemente, uma alternativa a essa abordagem que tem se mostrado viável em ambientes reais é o Model Predictive Control (MPC), apontado como uma solução promissora para aplicações em finanças (Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Li; Uysal; Mulvey, 2022). Conforme apontado por Cui et al. (2022), a resolução de problemas de otimização multiperíodo é intrinsecamente complexa e tecnicamente desafiadora, o que justifica a adoção de abordagens mais tratáveis do ponto de vista computacional, como o modelo de controle preditivo (MPC) ou o modelo de Campani, Garcia, e Lewin (CGL).

O Modelo CGL, proposto por Campani e Garcia (2019) e Campani, Garcia e Lewin (2021), é apresentado como um método analítico aproximado para resolver um problema de estratégia de alocação dinâmica. Sua particularidade reside em fornecer uma solução analítica aproximada para a alocação dinâmica de ativos, considerando como as preferências do investidor evoluem ao longo do tempo. Por outro lado, o Model Predictive Control (MPC) é uma proposição mais consolidada, com histórico de uso bem-sucedido em muitas aplicações industriais. Mais recentemente, o MPC foi estendido para finanças, incluindo otimização de portfólio.

Mayne et al. (2000) é uma referência no campo do controle ótimo, ao estabelecer os fundamentos teóricos para a estabilidade e a otimização em Model Predictive Control (MPC) com restrições, destacando sua relevância tanto acadêmica quanto prática. A aplicação do MPC à negociação e alocação multiperíodo, via otimização convexa, foi inicialmente explorada por Boyd et al. (2017), que demonstraram que esse framework proporciona maior estabilidade nas alocações ao longo do tempo, quando comparado a modelos baseados em um único regime.

O MPC é uma abordagem para tomar decisões sequenciais em que, a cada instante t, resolve-se um problema de otimização considerando apenas os próximos H períodos (horizonte finito), implementa-se apenas a primeira decisão e, em seguida, avança o tempo para $t + 1$, repete-se o mesmo procedimento sobre o novo conjunto de informações disponíveis (Boyd et al. 2017). Essa abordagem, embora possa resultar em uma política subótima em comparação com a solução de Programação Dinâmica de horizonte completo, oferece eficiência computacional, a capacidade de incorporar restrições e custos importantes (como custos de transação) e a habilidade de reagir dinamicamente à medida que novas informações sobre as condições de mercado e previsões se tornam disponíveis (Nystrup; Madsen; Lindström, 2018).

Em um avanço adicional, Nystrup et al. (2019) aplicaram o MPC ao controle de *drawdown*, evidenciando a capacidade do modelo de incorporar restrições dinâmicas alinhadas ao perfil de aversão a perdas acumuladas. Apesar desses avanços, tais estudos mantiveram a variância como métrica central de risco, sem explorar medidas alternativas mais sensíveis a caudas extremas, como o CVaR ou o CDaR, potencialmente mais adequadas para capturar riscos em contextos de alta volatilidade ou regimes de crise.

Além disso, a constatação de que os mercados operam sob diferentes regimes estimulou a aplicação dos Modelos Ocultos de Markov (HMM) à modelagem financeira, conforme introduzido por Hamilton (1989). Esses modelos constituem uma abordagem prática e amplamente implementável para capturar a natureza mutável das distribuições de retorno, permitindo representar a alternância de regimes com diferentes características estatísticas (Cui et al. 2022). Diversos autores enfatizam a importância de considerar a dependência dos riscos e retornos em relação ao estado subjacente da economia ou ao sentimento dos investidores (Costa; Araujo, 2008; Araújo; Camargos; Pinho, 2018; Wu; Li, 2011; Kolm; Tütüncü; Fabozzi, 2014; Nystrup et al. 2015; Lewin; Campani, 2024).

Os HMMs tornaram-se uma ferramenta amplamente utilizada para a identificação de regimes de volatilidade e retorno, oferecendo suporte a decisões adaptativas com base nas probabilidades de transição entre estados ocultos (Bae; Kim; Mulvey, 2014; Ardia et al. 2018; Ardia; Bluteau; Rüede, 2019; MacLean; Yu; Zhao, 2022; Peng; Kim; Mittnik, 2022). Ao incorporar inteligência sobre os regimes de mercado ou volatilidade, esses modelos complementam estratégias multiperíodo ao permitir parametrizações condicionais que enriquecem o processo decisório dinâmico.

A literatura recente, como exemplificado por DeMiguel, Martín-utrera e Uppal (2024), que propõem portfólios multifatoriais condicionais à volatilidade, reforça a necessidade de modelos dinâmicos. Isso levou a um crescente interesse na integração da capacidade preditiva dos HMMs com a flexibilidade do MPC. Trabalhos como os de Nystrup, Madsen e Lindström (2018) (média-variância HMM-MPC), Li, Uysal e Mulvey (2022) (HMM-MPC com Paridade de Risco) e Oprisor e Kwon (2021) (HMM-MPC com Black-Litterman) demonstram o potencial dessa combinação, com Cui et al. (2022) corroborando que a variação entre regimes afeta diretamente os retornos esperados, motivando políticas condicionais.

No entanto, mesmo com esses progressos, a maioria das abordagens HMM-MPC existentes tende a utilizar uma métrica de risco fixa na função objetivo, limitando a capacidade adaptativa do modelo. Esta é uma lacuna significativa, pois a natureza da própria medida de risco permanece inalterada, independentemente do regime previsto.

Essa limitação direciona o foco para a escolha da métrica de risco em si. Estudos avançaram na adoção de alternativas à variância, reconhecendo sua inadequação em cenários de crise ou alta volatilidade (Alexander; Baptista, 2004). Como salientam Ortobelli et al. (2005), provavelmente não existe uma única medida de risco ideal, e a escolha pode impactar significativamente o desempenho (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; Gilbert; Meiklejohn, 2019; Korn; Möller; Schwehm, 2022; Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024).

Nesse sentido, medidas coerentes focadas na cauda da distribuição, como o Conditional Value-at-Risk (CVaR) (Rockafellar; Uryasev, 2000) e o Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR) (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2004, 2005), passaram a se destacar. O CVaR, embora coerente, pode ter limitações em cenários de caudas muito pesadas (Gilbert; Meiklejohn, 2019). É aqui que o CDaR, focado em perdas acumuladas, surge como uma medida potencialmente mais

conservadora e complementar, especialmente em regimes de alta volatilidade onde a gestão de *drawdowns* é prioritária (Harris; Mazibas, 2013; Korn; Möller; Schwehm, 2022).

Ainda assim, observa-se que a maioria das abordagens de alocação, mesmo utilizando essas métricas mais sofisticadas, tende a aplicá-las de forma fixa ao longo do tempo. Diante da evidência de que os mercados exibem comportamentos distintos em diferentes regimes de volatilidade (Ang; Bekaert, 2004; Ang; Timmermann, 2012; Kritzman; Page; Turkington, 2012), persiste uma lacuna crucial referente à avaliação de estratégias que adaptem dinamicamente a própria métrica de risco com base no regime de volatilidade previsto. A ausência dessa adaptação, como sugere Zhu et al. (2020) ao enfatizar a importância da transição entre cenários, pode levar a uma má avaliação do risco.

Adicionalmente, a ideia de comutar entre medidas de risco encontra forte respaldo na Teoria da Utilidade estado-dependente ($U(x, s)$) (Jarrow; Li, 2021). Se a utilidade do investidor é sensível ao 'estado' do mercado (neste estudo em particular, ao regime de volatilidade), então uma estratégia de risco condicional ao regime pode ser vista como uma aproximação dinâmica para maximizar essa utilidade, reconhecendo que diferentes tipos de perdas afetam o investidor de maneiras distintas em contextos diferentes.

Nesse contexto de modelagem das preferências do investidor, emerge também uma discussão relevante a respeito da diferença entre os erros na estimação dos parâmetros do modelo e o erro da especificação do próprio modelo. Este último ocorre quando o modelo subjacente que o investidor utiliza para derivar sua estratégia difere fundamentalmente do modelo que realmente governa a dinâmica dos ativos no mercado (Staden; Dang; Forsyth, 2021). Tal erro de especificação pode surgir, por exemplo, quando o modelo de otimização desconsidera que a função de utilidade do investidor é, na realidade, estado-dependente, falhando em adaptar a caracterização do risco às mudanças de regime.

Diante do exposto, o presente trabalho propõe e avalia um modelo de alocação de portfólios que integra Modelos Ocultos de Markov (HMM) e Model Predictive Control (MPC). A contribuição central reside na implementação de uma comutação dinâmica da métrica de risco, utilizando o Conditional Value-at-Risk (CVaR) em regimes de baixa volatilidade e o Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR) em regimes de alta volatilidade. O objetivo é investigar se essa abordagem adaptativa resulta em desempenho superior e em maior utilidade esperada para o investidor, quando comparada a estratégias multiperíodo que empregam métricas de risco fixas.

5.3 Metodologia

Para endereçar os objetivos deste estudo, a metodologia proposta centra-se no desenvolvimento e avaliação de uma estratégia de alocação de ativos dinâmica e adaptativa. O cerne desta abordagem reside na comutação da métrica de risco, alternando entre Conditional Value-at-Risk (CVaR) e Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR), condicionada ao regime de

volatilidade prevalente. Este regime é identificado por meio do Modelo Oculto de Markov (HMM), estimado sobre a volatilidade condicional, em janelas móveis de 252 dias. As previsões de regime e os parâmetros de retorno associados são então integrados a um *framework* de Otimização Multiperíodo (MPO) baseado em Model Predictive Control (MPC). A eficácia desta estratégia regime-condicional é subsequentemente avaliada contra benchmarks de risco fixo e uma estratégia ingênua, utilizando métricas de desempenho e testes de significância estatística.

5.3.1 Dados

Para a estimação dos parâmetros do Modelo Oculto de Markov (HMM), utilizou-se como variável observável a volatilidade condicional do mercado, estimada por meio de um modelo GARCH(1,1), ao longo do período de janeiro de 2019 a abril de 2025. A escolha da volatilidade condicional como *proxy* para os regimes segue a literatura que a considera um indicador determinante das condições do mercado (Araújo; Camargos; Pinho, 2018) e gestão de risco (Ardia et al. 2018). Como a identificação dos regimes foi realizada com uma janela móvel de 252 dias, os dados referentes ao ano de 2019 foram utilizados exclusivamente como período de aquecimento, não sendo incluídos nas análises preditivas e de alocação subsequentes.

Na etapa de alocação, são utilizados os retornos diários de um conjunto de dez fundos de índices (ETFs) negociados no mercado brasileiro. O período de análise entre janeiro de 2020 a abril de 2025. Uma descrição mais detalhada é apresentada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Descrição dos dados

Variável	Descrição
Fundos de investimento em índices (ETFs):	
BOVA11	Acompanha o desempenho do índice Ibovespa/B3.
SMAL11	Acompanha o desempenho do índice de *Small Caps* brasileiras.
IVVB11	Acompanha o desempenho do índice S&P500.
DIVO11	Tem como objetivo refletir a performance do índice Dividendos - IDIV/B3.
MATB11	Reflete a performance do índice de Materiais Básicos - IMAT/B3
FIND11	Replica a performance do índice Financeiro (IFNC) da B3
ECOO11	Acompanha o desempenho do índice ICO2/B3
GOVE11	Replica o desempenho do índice B3 de Governança Corporativa Trade (IGCT)
IMAB11	Replica títulos públicos federais indexados ao IPCA (IMA-B).
FIXA11	Composto por títulos públicos prefixados, com prazos entre 2.5 e 3 anos.
Taxa livre de risco:	
Selic	Taxa de juros de curto prazo definida pelo Banco Central do Brasil.

Nota: Os retornos são na forma de log-retornos dos preços de fechamento. As séries do Ibovespa e ETFs foram obtidas em https://finance.yahoo.com/ e os dados da Selic em https://www.bcb.gov.br/. Os dados passaram por um pré-processamento padrão, com exclusão de dias sem negociação.

Como a negociação de ETFs no mercado brasileiro é algo relativamente recente, a disponibilidade de dados para essa classe de ativos ainda é limitada. Assim, a escolha do conjunto de ativos avaliados teve como critério ser um ativo negociado na B3 e ter iniciado

sua negociação antes de janeiro de 2020. Uma segunda condição é a não sobreposição entre os ETFs, ou seja, havendo dois ETFs lastrados a um mesmo índice de mercado, foi escolhido o com maior volume financeiro em negociação.

5.3.2 Identificação de regimes de volatilidade

O Modelo Oculto de Markov (HMM) é uma ferramenta analítica apropriada para modelar a dinâmica de mercados financeiros, dada sua capacidade de identificar e inferir regimes ocultos (estados latentes) que não são diretamente observáveis pelos investidores. Esses regimes se distinguem por características estatísticas de retorno, volatilidade e correlação, e o HMM permite representar a alternância entre eles.

Neste estudo, a variável observável (Y_t) utilizada para inferir esses estados é a volatilidade condicional do mercado, estimada através de um modelo GARCH(1,1) sobre os retornos do Ibovespa. Os estados ocultos (X_t) são representados por dois regimes distintos: alta volatilidade e baixa volatilidade. A escolha de dois estados está alinhada à literatura recente e facilita a interpretação das decisões de investimento, mitigando o risco de sobreajuste (Nystrup et al. 2019).

A estimação dos parâmetros do HMM (incluindo as probabilidades de transição entre regimes) é realizada utilizando os algoritmos *Expectation Maximization* e Viterbi, ajustados em uma janela móvel de 252 dias. Uma vez ajustado, o HMM fornece as probabilidades de cada observação pertencer a um regime específico, que são então utilizadas para gerar previsões dos momentos (vetor de médias e matriz de covariância) dos retornos dos ativos para a otimização de portfólio. Essa capacidade de previsão de regimes permite que a função-objetivo de alocação de ativos seja condicional ao regime de volatilidade identificado, uma contribuição central deste trabalho.

As transições entre os regimes de volatilidade são descritas por uma matriz de transição $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$,
onde a_{11} representa a probabilidade de permanecer no regime de baixa volatilidade no próximo período, dado que o período anterior também era de baixa volatilidade. De maneira análoga, a_{22} corresponde à probabilidade de permanecer no regime de alta volatilidade, condicionada ao fato de que o período anterior já estava nesse regime.

Assumindo que os retornos sigam distribuições normais $N(\mu_{11}, \sigma_{11}^2)$ no regime de baixa volatilidade (LowVol) e $N(\mu_{22}, \sigma_{22}^2)$ no regime de alta volatilidade (HighVol), a probabilidade do mercado estar no regime de baixa volatilidade no período $t + 1$ é calculada com base na probabilidade de estar no regime LowVol no período t e na matriz de transição estimada, dado por:

$$\hat{q}_{t+1} = q_t a_{11} + (1 - q_t)(1 - a_{22}); \tag{5.1}$$

O vetor de retorno esperado previsto para o período $t + 1$ ($\hat{\mu}_{t+1}$) é uma média ponderada dos

retornos médios dos regimes, onde os pesos são as probabilidades previstas de estar em cada regime:

$$\hat{\mu}_{t+1} = \hat{q}_{t+1}\mu_1 + (1 - \hat{q}_{t+1})\mu_2; \tag{5.2}$$

A previsão da matriz de covariância de retornos $\hat{\sigma}^2$ no momento $(t + 1)$ é :

$$\hat{\sigma}^2_{t+1} = (\hat{q}_{t+1}\sigma_1^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})\sigma_2^2) + (\hat{q}_{t+1}(\mu_1 - \hat{\mu}_{t+1})^2 + (1 - \hat{q}_{t+1})(\mu_2 - \hat{\mu}_{t+1})^2). \tag{5.3}$$

Os parâmetros para H períodos $(t + 2, ..., t + H)$ podem ser estimados iterativamente, utilizando a matriz de transição estimada e as previsões condicionais de regime, aplicadas recursivamente para os períodos seguintes.

O modelo GARCH(1,1) foi estimado utilizando o pacote rugarch (Ghalanos, 2023) e o HMM foi ajustado com auxílio do pacote depmixS4 (Visser; Speekenbrink, 2010), ambos da Linguagem R.

5.3.3 Otimização Multi-período

Diferentemente da alocação de período único, que determina os pesos dos ativos considerando o desempenho da carteira ao longo do tempo com base em uma única decisão no período inicial da aplicação, a otimização multi-período (MPO) considera que os pesos dos ativos na alocação para o período atual devem ser escolhidos sobre um horizonte de planejamento que se estende H períodos no futuro, de t a $t + H - 1$.

Considerar períodos futuros na otimização é vantajoso, por permitir uma melhor adequação do modelo a questões práticas, como incorporar à decisão os custos de transação e informações sobre mudanças futuras conhecidas na volatilidade e retornos, ajustando posições antecipadamente. Assim, a otimização sobre as alocações futuras é realizada como um exercício de planejamento para garantir que as ações atuais não coloquem a carteira numa posição desfavorável no futuro.

A alocação multi-período foi historicamente resolvida via programação dinâmica, o que limitava seu uso devido à maldição da dimensionalidade, fenômeno no qual o tempo de execução cresce exponencialmente à medida que a complexidade do problema aumenta. Recentemente, para melhor endereçar esse problema, Boyd et al. (2017) desenvolveram um modelo que generaliza da otimização do período único a um MPO, conhecido como Modelo de Controle Preditivo (MPC), onde, através da otimização convexa para todos os objetivos e restrições, o modelo pode permanecer tratável, apesar de introduzir vários períodos e muitas restrições para cada período.

Na abordagem MPC, todos os parâmetros desconhecidos (retornos de ativos, matriz de covariância etc.) são substituídos por seus valores esperados previstos sobre um horizonte de planejamento e apesar de obter ações ideais para vários períodos futuros, apenas as ações do primeiro período são implementadas e o problema de otimização é resolvido novamente com informações atualizadas obtidas no tempo $t + 1$. Esse procedimento de horizonte recuperado

simplifica o problema completo de programação dinâmica do horizonte, mantendo os tempos de reação rápidos para a mudança dos mercados financeiros.

Assim como Oprisor e Kwon (2021) e Li, Uysal e Mulvey (2022) serão avaliados horizontes de planejamento curtos, de 5 e 10 períodos, a fim de garantir a qualidade das previsões do retorno e risco, algo que vai se deteriorando com o aumento do horizonte de previsão.

5.3.3.1 Portfólio com risco condicional ao regime

A alocação dos ativos baseada no portfólio de risco condicional ao risco foi proposta utilizando para previsão dos retornos e regimes o Modelo Oculto de Markov (HMM) e para otimização dos pesos o Model Predictive Control (MPC), em um horizonte deslizante. A estratégia permitiu somente posições compradas, com rebalanceamento dependente da mudança no fundamento do mercado, ou seja, havendo mudança no regime de volatilidade e com a escolha da medida de risco dependente ao regime identificado.

Nesta abordagem, identificada a mudança de regime, a cada t, um problema de otimização em horizonte finito de H passos é resolvido, com a medida de risco condicionada ao regime identificado em t e excetuada a primeira decisão (w_{t+1}). No dia subsequente, o problema é reestimado com dados e previsões de regime atualizadas (Boyd et al. 2017; Li; Uysal; Mulvey, 2022; Oprisor; Kwon, 2021).

A formulação de otimização generalizada por Boyd et al. (2017) pode ser escrita em termos dos pesos ajustados para um horizonte de investimento H, que seja considerado relevante para uma decisão de investimento a ser tomada na data corrente, como:

$$\begin{aligned} \max_{\{w_{t+h|t}\}_{h=1}^{H}} \quad & \sum_{h=1}^{H} \left(\hat{r}_{t+h|t}^{\top} w_{t+h|t} - \lambda \cdot \psi_t^{\text{risk}}(w_{t+h|t}) - \phi \cdot \|w_{t+h|t} - w_{t+h-1|t}\|_1 - \beta \cdot \|w_{t+h|t}\|_2^2 \right) \\ & \text{s.t.} \\ & 1^{\top} w_{t+h|t} = 1, \quad \forall h = 1, \ldots, H \\ & w_{t+h|t} \geq 0, \quad \forall h = 1, \ldots, H \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde $w_{t+h|t} \in \mathrm{R}^N$ representa o vetor de alocação de ativos a ser decidido para cada passo do horizonte de planejamento $h = 1, \ldots, H$, com base nas informações disponíveis no tempo t. O termo $\hat{r}_{t+h|t}$ refere-se ao vetor de retornos esperados, enquanto $\psi_t^{\text{risk}}(w_{t+h|t})$ denota a medida de risco condicional ao regime identificado em t. Os termos $\phi\|w_{t+h|t} - w_{t+h-1|t}\|_1$ e $\beta\|w_{t+h|t}\|_2^2$ penalizam, respectivamente, o custo de transação (variações de pesos entre períodos) e a concentração do portfólio, promovendo maior diversificação. As restrições garantem a total alocação dos recursos ($\sum w = 1$) e a ausência de posições vendidas ($w \geq 0$).

Usamos τ para denotar genericamente cada instante futuro do horizonte de decisão, ou seja, $\tau = t + 1, ..., t + H$. Assim, toda variável indexada por τ refere-se ao respectivo valor no passo h do horizonte preditivo, condicionado à informação disponível em t.

Um aspecto central deste modelo é a alternância da função de risco de acordo com o regime de volatilidade estimado via HMM. Assim, a função de risco $\psi_\tau^{\text{risk}}(\cdot)$, utilizada em cada horizonte de decisão, é definida por:

$$\psi_t^{\text{risk}}(.) = \begin{cases} \hat{\psi}_t^{\text{CVaR}}(\mathbf{w}_\tau), & \text{se o regime identificado for de baixa volatilidade} \\ \hat{\psi}_t^{\text{CDaR}}(\mathbf{w}_\tau), & \text{se o regime identificado for de alta volatilidade} \end{cases} \tag{5.5}$$

Ambas as funções $\hat{\psi}_t^{\text{CVaR}}$ e $\hat{\psi}_t^{\text{CDaR}}$ são funções convexas de w_τ e podem ser formuladas como problemas de programação linear, o que torna o modelo adaptativo computacionalmente viável para aplicações práticas em janelas móveis ou de reotimização sequencial (Rockafellar; Uryasev, 2000; Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005).

O $CVaR_\alpha$ representa a expectativa das perdas que excedem o VaR_α, sendo expresso por:

$$\hat{\psi}t^{\text{CVaR}}(\mathbf{w}_\tau) = \eta + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T} \max\left(-R_t(\mathbf{w}_\tau) - \eta, , 0\right) \tag{5.6}$$

onde η é o limiar de perdas (isto é, o VaR_α) e $R_t(\mathbf{w}_\tau)$ representa o retorno da carteira com pesos $\mathbf{w}_\tau$ no período t.

O CDaR, por sua vez, é uma medida baseada em *drawdown*. Calculado para um nível de confiança $\alpha \in (0, 1)$, ele captura a média dos piores *drawdowns*, ou seja, aqueles que excedem o DaR (*Drawdown-at-Risk*) correspondente. Inicialmente, define-se:

$$V_{\tau|t}(\mathbf{w}_\tau) = \sum_{k=1}^{t} r_k(\mathbf{w}_\tau), \qquad M_{\tau|t}(\mathbf{w}_\tau) = \max_{u \le t} V_u(\mathbf{w}_\tau), \qquad D_{\tau|t}(\mathbf{w}_\tau) = M_{\tau|t}(\mathbf{w}_\tau) - V_{\tau|t}(\mathbf{w}_\tau),$$

onde $V_{\tau|t}$ é o valor acumulado do portfólio até o instante t, $M_{\tau|t}$ é o máximo histórico até t, e $D_{\tau|t}$ representa o *drawdown* observado nesse ponto.

Assim, o CDaR é dado por:

$$\hat{\psi}t^{\text{CDaR}}(\mathbf{w}_\tau) = \eta + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T} \max\left(D_t(\mathbf{w}_\tau) - \eta, , 0\right) \tag{5.7}$$

onde η é o *drawdown-at-risk* (DaR) associado ao nível de confiança α, isto é, o menor valor tal que $\mathbb{P}(D \le \eta) = \alpha$, ou equivalentemente, $\mathbb{P}(D > \eta) = 1 - \alpha$.

Dessa forma, busca-se maximizar a função utilidade estado-dependente com o uso de uma função objetivo que reflete não somente o retorno esperado, mas também a gestão de risco adaptada ao regime de volatilidade, custos de transação e diversificação, garantindo robustez e aderência ao comportamento observado nos mercados emergentes.

A função de utilidade estado-dependente impede o uso de uma medida de risco fixa e exige uma abordagem que seja sensível ao estado e/ou distinga entre diferentes tipos de risco

com base em sua relação com a dependência do estado na utilidade, fornecendo as bases teóricas para comutação entre diferentes medidas de risco, condicionada ao regime de volatilidade.

A escolha das métricas CVaR e CDaR foi motivada pela literatura recente, que sugere a maior adequação do CVaR em ambientes de menor instabilidade financeira devido ao seu foco em perdas condicionais extremas e do CDaR em ambientes mais voláteis, dada sua maior sensibilidade à acumulação de perdas (Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005; Harris; Mazibas, 2013; Ding, 2023). Para ambas as medidas, o nível de significância α foi fixado em 0.95.

Nesse sentido, o CVaR pode ser interpretado como alinhado a uma função utilidade que penaliza perdas de cauda, sendo uma medida de risco coerente que quantifica a perda esperada além de um determinado VaR e, particularmente, adequada para caracterizar perdas de cauda e otimizável via formulação convexa. Em regimes de baixa volatilidade, a preocupação primordial do gestor de carteiras pode ser a proteção contra tais eventos de cauda, sem incorrer no conservadorismo excessivo que limitaria ganhos em um mercado predominantemente estável. A utilidade do investidor, neste cenário, é mais sensível à magnitude das perdas extremas do que a pequenas flutuações ou *drawdowns* moderados.

Por outro lado, em regimes de alta volatilidade, a preocupação do gestor ativo de investimentos com o risco de cauda pode se intensificar, e a experiência de perdas acumuladas (*drawdowns*) pode ter um impacto desproporcionalmente negativo na utilidade do investidor. O CDaR, que é formulado de maneira análoga ao CVaR, porém em relação aos *drawdowns*. O CDaR, ao focar na limitação dessas quedas sequenciais, alinha-se a uma função utilidade que é particularmente sensível à trajetória da riqueza e à preservação do capital em ambientes turbulentos. A escolha pelo CDaR reflete, portanto, uma tentativa de mitigar o desconforto (desutilidade) associado a ver o patrimônio sofrer quedas de forma contínua, mostrando-se uma medida especialmente relevante em ambientes voláteis (Daniel, 2025).

Essa alternância entre CVaR e CDaR é uma resposta sofisticada às limitações da variância como medida de risco, que ignora as caudas das distribuições de retorno financeiro. O problema de otimização convexa descrito na Equação 5.4, que incorpora essas métricas de risco, foi implementado e resolvido utilizando o pacote CVXR (Fu; Rajaratnam; Boyd, 2020) na linguagem R, com o solver ECOS (Embedded Cone Solver).

A abordagem proposta de alocação multiperíodo com risco condicional ao regime é comparada as suas contrapartes de alocação multiperíodo e de regime único com risco incondicional, além de uma alocação ingênua, com pesos igualmente ponderados ($1/n$). Devido às distribuições não-normais frequentemente observadas nos retornos financeiros, foi utilizado o método estatístico não-paramétrico *Aligned Rank Transform* (ART) para realizar testes de comparação de desempenho entre as estratégias (Wobbrock et al. 2011).

5.3.4 Definição dos Parâmetros do Modelo

A otimização de portfólio requer a especificação de parâmetros desconhecidos na prática. A necessidade de estimar esses parâmetros a partir de dados históricos introduz riscos de estimação, que são um grande desafio e podem levar a portfólios estimados que se comportam mal fora da amostra (*out-of-sample*).

Diante desses riscos, adotar abordagens *data-driven* (orientadas por dados) para a definição de parâmetros da otimização é essencial (Han, 2020). A calibração *data-driven* busca determinar valores de parâmetros que mitiguem o impacto dos erros de estimação nos dados observados (Kircher; Rösch, 2021)

Neste trabalho, a definição desses hiperparâmetros que regulam a otimização do portfólio, incluindo aversão ao risco, penalização por concentração e custo de transação, é realizada por meio de uma abordagem *data-driven* com o uso do algoritmo `irace` (*Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration*). O `irace` conduz um processo de calibração que busca os valores ótimos dos parâmetros ao longo de um conjunto de simulações, minimizando uma função-objetivo específica.

Para este estudo, a função-objetivo escolhida foi baseada no *Certainty Equivalent Return* (CER), que fornece uma medida fundamentada da utilidade dos investidores, capturando o *trade-off* entre o retorno esperado e o risco percebido. Essa função avalia o desempenho fora da amostra das estratégias de alocação e, para melhor representar o modelo adaptativo proposto, introduzimos um parâmetro de custo de transação proporcional ao giro da carteira (*turnover*). Assim, o retorno líquido do custo de transação fora da amostra ($r_{p,t}^{\text{líquido}}$) é definido como:

$$r_{p,t}^{\text{bruto}} = \sum_i w_{i,t} \cdot r_{i,t} \tag{5.8}$$

$$r_{p,t}^{\text{líquido}} = r_{p,t}^{\text{bruto}} - (\phi \cdot \|w_t - w_{t-1}\|_1) \tag{5.9}$$

e o CER como:

$$CER = r_{p,t}^{\text{líquido}} - \frac{\lambda}{2} \cdot \sigma_{p,t}^2, \tag{5.10}$$

em que w_t são os pesos do portfólio, $r_{p,t}^{\text{bruto}}$ o retorno bruto do portfólio, $r_{p,t}^{\text{líquido}}$ o retorno líquido do portfólio, $\sigma_{p,t}^2$ é a variância dos retornos na sua forma líquida.

A cada simulação, os parâmetros de aversão ao risco (λ), penalização por concentração (β) e custo de transação proporcional (ϕ) são automaticamente determinados e extraídos do vetor de configuração gerado pela ferramenta `irace`. O uso do irace é crucial por fornecer uma metodologia reprodutível e sistemática para o ajuste de hiperparâmetros, mitigando riscos inerentes ao backtesting manual. A fixação de uma semente aleatória garante a reprodutibilidade total dos resultados.

Com base nos parâmetros otimizados pelo irace, a função de otimização determina os pesos da carteira para cada data de teste. Um aspecto distintivo desta metodologia é a adaptação dinâmica da métrica de risco conforme o regime de volatilidade previsto pelo modelo HMM: *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) para o regime de baixa volatilidade e *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR) para o de alta volatilidade.

O espaço de busca dos hiperparâmetros foi definido como:

- $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50\}$. Este amplo espectro permite ao irace explorar diversos perfis de aversão ao risco. A relevância de valores mais elevados para λ é corroborada por experimentos numéricos que demonstram que valores de λ elevados podem resultar em um melhor Sharpe ratio e um menor *drawdown* máximo em comparação com valores menores (Daniel, 2025);
- $\phi \in \{0.0001, 0.0005, 0.001, 0.002, 0.003\}$ representam taxas proporcionais de custo de transação de 1 a 30 pontos-base. A inclusão desses custos é essencial para uma avaliação realista do desempenho da carteira;
- $\beta \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ permitem controlar a diversificação da carteira. A penalização por concentração atua para promover a diversificação, o que é fundamental para melhorar o desempenho prático da carteira.

Esses intervalos foram definidos à luz dos resultados empíricos e sugestões encontradas em trabalhos recentes (Nystrup et al. 2019; Oprisor; Kwon, 2021; Campani; Garcia; Lewin, 2021; Daniel, 2025). Os parâmetros internos do Irace seguiram as recomendações padrão da literatura (para detalhes, consultar Lopez-Ibanez et al. (2016)). Todas as análises foram realizadas utilizando uma semente aleatória fixa, garantindo reprodutibilidade total dos resultados.

5.3.5 Procedimentos de Avaliação e Métricas de Desempenho

A performance das estratégias de alocação propostas e dos benchmarks foi comparada com base em um conjunto abrangente de métricas, contemplando dimensões de retorno, risco absoluto e relativo, bem como eficiência ajustada ao risco. A significância estatística das diferenças de desempenho foi posteriormente aferida por meio de um teste não paramétrico apropriado ao contexto. As métricas utilizadas são detalhadas a seguir.

O risco absoluto foi avaliado por meio da Volatilidade Anualizada — calculada como o desvio-padrão dos retornos diários multiplicado pela raiz do número de dias de negociação no ano (252) — e do Máximo *Drawdown* (MDD), que representa a maior perda percentual observada entre um pico e um vale no retorno acumulado da carteira.

Em relação ao custo de transação e à atividade de rebalanceamento, utilizou-se o *Turnover* da carteira, uma métrica que reflete a intensidade da gestão ativa e os custos implícitos decorrentes das mudanças nos pesos dos ativos. O cálculo foi realizado conforme a seguinte

expressão:

$$\text{Turnover} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^{N} |w_{i,t} - w_{i,t-1}|, \tag{5.11}$$

em que $w_{i,t}$ representa o peso do ativo i no instante t.

O risco relativo foi mensurado por meio do *Tracking Error* (TE), utilizado para avaliar o desvio ativo de uma estratégia em relação a um benchmark. O TE foi calculado como o desvio-padrão anualizado da diferença entre os retornos diários da carteira (R_t^{estrat}) e os retornos do benchmark (R_t^{bench}):

$$TE = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (R_t^{\text{estrat}} - R_t^{\text{bench}})^2} \times \sqrt{252} \tag{5.12}$$

Para mensurar o retorno ajustado ao risco, foram empregados os índices de Sharpe, Sortino e Omega.

Proposto por Sharpe (1966), o índice de Sharpe é amplamente utilizado para medir o retorno excedente de um ativo ou portfólio em relação à taxa livre de risco, ajustado pela volatilidade total dos retornos. É definido como:

$$\text{Sharpe} = \frac{\mathbb{E}[R_p - R_f]}{\sigma_p} \tag{5.13}$$

onde $\mathbb{E}[R_p - R_f]$ é o retorno excedente esperado e σ_p é o desvio-padrão dos retornos do portfólio. Embora seja simples e intuitivo, o Sharpe ratio assume simetria na distribuição dos retornos e penaliza da mesma forma volatilidades positivas e negativas. Para contornar a limitação do Sharpe em relação à penalização de toda a volatilidade, o índice de Sortino (Sortino; Price, 1994) utiliza apenas a volatilidade dos retornos negativos (desvio-padrão abaixo de um limiar ou retorno alvo). Assim, ele foca no risco de queda (*downside risk*):

$$\text{Sortino} = \frac{\mathbb{E}[R_p - \tau]}{\sigma_D} \tag{5.14}$$

onde τ é o retorno mínimo desejado (threshold) e σ_D representa o desvio-padrão dos retornos que ficaram abaixo de τ. O Sortino ratio é mais apropriado em contextos assimétricos, nos quais apenas os retornos negativos devem ser penalizados.

O índice Omega, introduzido por Keating e Shadwick (2002), é uma medida mais abrangente que utiliza toda a distribuição dos retornos. Ele é definido como a razão entre o ganho esperado e a perda esperada em relação a um retorno alvo τ:

$$\Omega(\tau) = \frac{\int_{\tau}^{\infty} [1 - F(r)]\, dr}{\int_{-\infty}^{\tau} F(r)\, dr} \tag{5.15}$$

em que $F(r)$ representa a função de distribuição acumulada dos retornos. O índice Omega permite uma avaliação mais flexível da relação risco-retorno, adaptando-se ao perfil do investidor por meio da escolha de τ. Valores de $\Omega > 1$ indicam que os ganhos esperados superam as perdas em relação ao limiar estipulado.

Além disso, dado o caráter não-normal das distribuições de retorno, os testes de significância estatística foram conduzidos por meio do método não paramétrico *Aligned Rank Transform* (ART) (Wobbrock et al. 2011). Esse procedimento permite a análise de efeitos de interação em delineamentos fatoriais (como o confronto entre diferentes estratégias) utilizando a ANOVA tradicional. O ART consiste em alinhar os dados em relação ao efeito de interesse, aplicar uma transformação por postos sobre os dados alinhados e, em seguida, realizar uma análise de variância padrão sobre os dados transformados.

Neste estudo, o ART foi aplicado à série temporal do Índice de Sharpe diário, calculado com base em uma janela móvel de 252 dias. A variável principal foi a estratégia de alocação, considerada fator de comparação. Para as análises múltiplas *post-hoc*, empregou-se o teste de Tukey, visando identificar quais estratégias apresentavam diferenças estatisticamente significativas. A implementação dos testes foi realizada na linguagem R, com o suporte do pacote `ARTool`.

Adicionalmente, para verificar se a diferença no desempenho ajustado ao risco (medido pelo Índice de Sharpe anualizado) entre pares de carteiras é estatisticamente significativa, ou se a diferença observada pode ser atribuída ao acaso, foi implementado o teste proposto por Ledoit e Wolf (2008). Esse método utiliza o *bootstrap* circular studentizado para lidar com características típicas de séries temporais financeiras, como a não normalidade e a autocorrelação dos retornos. A implementação foi realizada por meio do pacote `PeerPerformance` (Ardia; Boudt, 2018), desenvolvido na linguagem R.

5.4 Resultados Empíricos

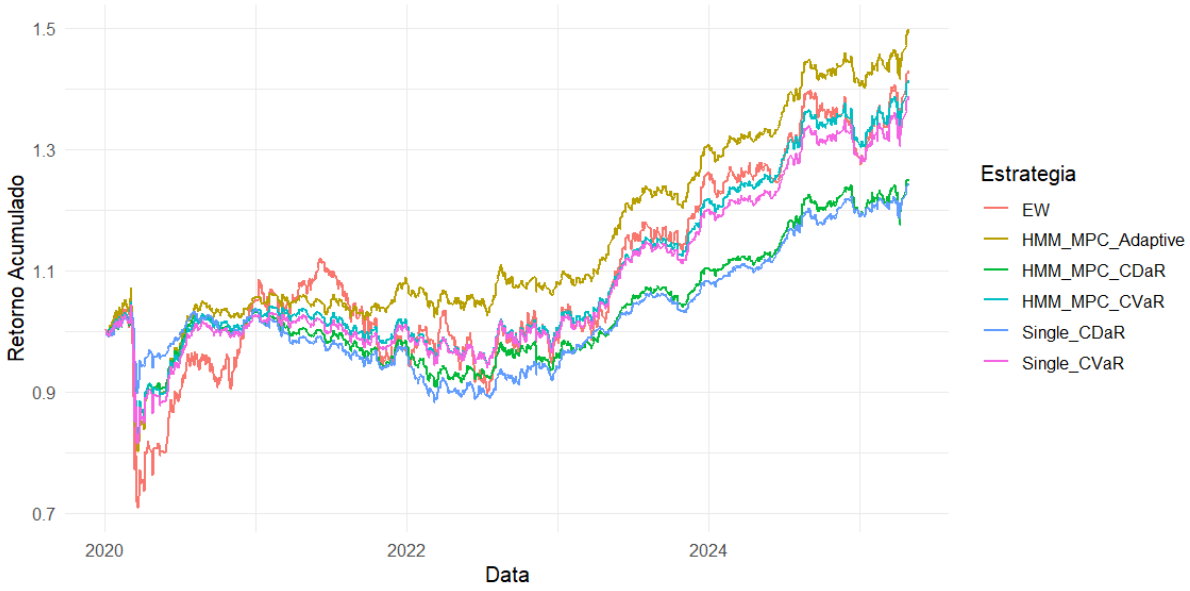
Nesta seção, discutimos os resultados empíricos obtidos com o modelo de alocação dinâmica proposto, que integra Model Predictive Control (MPC) e Modelos Ocultos de Markov (HMM), permitindo que a métrica de risco seja escolhida de forma condicionada ao regime de volatilidade. O CVaR é escolhido em regimes de baixa volatilidade para não ser excessivamente conservador e capturar oportunidades, enquanto o CDaR é ativado em regimes de alta volatilidade para focar na proteção contra perdas acumuladas e *drawdowns* severos. A avaliação utiliza dados históricos de ETFs negociados na B3, cobrindo diferentes ciclos econômicos e capturando regimes distintos de volatilidade.

A Figura 5.1 ilustra a trajetória do retorno acumulado das estratégias avaliadas. A principal proposta do estudo, a estratégia HMM-MPC-Adaptive, combina previsões de regime obtidas por um Modelo Oculto de Markov (HMM) com um arcabouço de otimização multiperíodo via Model Predictive Control (MPC), alternando dinamicamente e de forma condicional ao regime a métrica de risco utilizada na função objetivo.

Para fins comparativos, testamos duas estratégias que compartilham a mesma estrutura multiperíodo e a previsão de regime fornecida pelo HMM, mas com métrica de risco fixa (não condicional ao regime): a HMM-MPC-CVaR, que utiliza apenas o CVaR, e a HMM-MPC-

CDaR, que adota exclusivamente o CDaR durante todo o período. Também avaliamos dois modelos com horizonte de decisão de período único, baseados em previsões de regime pelo HMM, mas sem o componente de otimização multiperíodo: a Single-CVaR e a Single-CDaR, ambas com risco fixo ao longo do tempo. Como referência adicional, incluímos a carteira *Equal Weight* (EW).

Figura 5.1 – Retorno acumulado das estratégias no período de janeiro de 2020 a abril de 2025 e horizonte de planejamento igual a 5.



Nota: HMM-MPC-Adaptive representa a estratégia com medida de risco condicional ao regime. As estratégias HMM-MPC-CVaR e HMM-MPC-CDaR também utilizam o arcabouço HMM-MPC, mas com risco fixo (CVaR e CDaR, respectivamente). As estratégias Single-CVaR e Single-CDaR usam HMM para previsão, mas não incluem o controle preditivo (MPC). EW representa a carteira de referência 1/n.
Fonte: Elaboração própria.

Todas as estratégias, à exceção da carteira ingênua, utilizam o mesmo conjunto de hiperparâmetros: $\lambda = 3$ (aversão ao risco), $\phi = 0.2\%$ (custo de transação proporcional) e $\beta = 0.1$ (penalização à concentração). Esses valores foram selecionados de forma *data-driven* pelo algoritmo irace, garantindo que qualquer diferença de desempenho decorra unicamente em função da abordagem proposta pela estratégia de investimento avaliada.

Como se observa na Figura 5.1, a estratégia HMM-MPC-Adaptive apresenta um desempenho superior, em termos de retorno acumulado, em relação às demais estratégias ao longo do intervalo amostral. Essa evidência gráfica é confirmada pelas métricas resumidas na Tabela 5.2, que sintetizam o desempenho das diferentes abordagens.

A Tabela 5.2 apresenta as métricas de desempenho dos modelos multiperíodo com horizontes de planejamento $H = 5$ e $H = 10$. O horizonte de 10 períodos foi incluído apenas como teste de robustez e mostra que as conclusões não sofrem alterações significativas que justifiquem a inclusão de passos adicionais na previsão. Baseando-se no fato de que horizontes

Tabela 5.2 – Métricas de desempenho das estratégias entre janeiro de 2020 a abril de 2025.

Estrategia	R.Acum.	R.Anual.	Sharpe	Sortino	Omega	MDD	Volat	Turn.	CER
Multiperíodo com H = 5:									
HMM-MPC-Adaptive	48.63	8.84	**0.046**	**0.071**	**1.20**	20.58	10.74	1.17	**7.10**
HMM-MPC-CDaR	37.18	6.99	0.035	0.063	1.18	18.78	9.68	1.12	5.49
HMM-MPC-CVaR	41.47	7.70	0.041	0.064	1.17	19.47	10.43	0.58	6.34
Multiperíodo com H = 10:									
HMM-MPC-Adaptive	**49.79**	**9.02**	**0.046**	0.065	**1.20**	25.14	11.92	1.30	6.96
HMM-MPC-CDaR	25.09	4.90	0.030	0.041	1.12	21.37	10.62	1.05	3.25
HMM-MPC-CVaR	41.34	7.68	0.041	0.060	1.17	21.34	10.98	0.59	6.21
Regime único:									
HMM-Single-CDaR	24.39	4.78	0.030	0.052	1.13	**15.30**	**8.13**	1.18	3.51
HMM-Single-CVaR	38.70	7.24	0.040	0.057	1.16	21.89	11.00	0.61	5.75
Benchmark ingênuo:									
Ingênua	42.91	7.93	0.041	0.043	1.10	32.34	18.04	**0.00**	4.85

Nota: HMM-MPC-Adaptive representa a estratégia com medida de risco condicional ao regime. As estratégias HMM-MPC-CVaR e HMM-MPC-CDaR também utilizam o arcabouço HMM-MPC, mas com risco fixo (CVaR e CDaR, respectivamente). As estratégias HMM-Single-CVaR e HMM-Single-CDaR usam HMM para previsão, mas não incluem o controle preditivo (MPC). A estratégia ingênuca é uma carteira de referência 1/n. Os valores em negrito indicam o melhor resultado da coluna (máximo ou mínimo, conforme aplicável). Todas as estratégias permitem somente posições compradas. Ret.Acum. e Ret.Anual. são abreviações para retorno acumulado e retorno anualizado, respectivamente. MDD a abreviação para Máximo Drawdown, Volat. para volatilidade e Turn para turnover. CER representa Certainty Equivalent Return, líquido dos custos de transação. Os valores de R.Acum., R.Anual., MDD, volat. e CER estão apresentados em percentual. Sharpe, refere-se ao índice de Sharpe.

curtos reduzem o erro de previsão (Li; Uysal; Mulvey, 2022), e que, segundo Campani, Garcia e Lewin (2021) o horizonte de planejamento, não impacta a estratégia de alocação multiperíodo, na presença de rebalanceamento frequentes, adotamos $H = 5$ como configuração padrão nas análises subsequentes. Além disso, embora H=10 tenha tido um retorno bruto um pouco maior, o H=5 se mostrou superior em termos de CER, reforçando a escolha.

Conforme indica a Tabela 5.2, a estratégia HMM-MPC-Adaptive apresenta superioridade em diversas métricas de desempenho. Para o período de janeiro de 2020 a abril de 2025, a estratégia multiperíodo com risco condicional ao regime entrega 48.63% de retorno acumulado, superando a carteira ingênua $1/n$ (42.91%).

As estratégias multiperíodo com métrica de risco incondicional ao regime (risco fixo) também exibiram retornos acumulados superiores aos seus equivalentes de regime único; contudo, o ganho relativo é mais modesto quando se compara a diferença entre a abordagem de risco condicional. Esses resultados corroboram a literatura que destaca a relevância de estratégias capazes de se adaptar às mudanças estruturais dos mercados financeiros (Li; Uysal; Mulvey, 2022; Oprisor; Kwon, 2021).

A comutação entre CVaR (regimes normais) e CDaR (regimes turbulentos) mostrou-se útil para maximizar retorno sem sacrificar proteção ao capital: o CVaR evita conservadorismo excessivo em baixa volatilidade; o CDaR limita *drawdowns* prolongados em alta volatilidade.

Tais resultados reforçam a tese de que não existe métrica de risco universalmente ótima (Ortobelli et al. 2005) e de que a escolha da medida impacta materialmente o desempenho (Lorimer; Schalkwyk; Szczygielski, 2024). Isso Valida a premissa de que se adaptar ao nível de incerteza predominante nos regimes de volatilidade leva a um melhor equilíbrio risco-retorno e maior utilidade para o gestor ativo de investimentos.

Contudo, as estratégias multiperíodo com métrica de risco fixa (HMM-MPC-CVaR e HMM-MPC-CDaR) não conseguiram superar o retorno acumulado da carteira ingênua. Esse resultado sugere que os benefícios da otimização baseada em regimes foram neutralizados pelos custos de transação. Como a carteira $1/n$, neste estudo, não incorreu em custos de rebalanceamento, ela se torna um *benchmark* difícil de superar para estratégias ativas, um ponto que destaca a importância crítica da modelagem de custos na avaliação de desempenho.

Em síntese, os modelos HMM-MPC com risco incondicional superam carteiras de regime único, mas não o modelo adaptativo e nem a ingênua, enfatizando que o sucesso da estratégia depende tanto do horizonte multiperíodo quanto da métrica de risco adotada (Gilbert; Meiklejohn, 2019). A vantagem adaptativa também valida a relevância de métricas de cauda em mercados de retornos não normais (Harris; Mazibas, 2013).

Quanto ao retorno ajustado ao risco, a HMM-MPC-Adaptive mantém sua vantagem. A carteira $1/n$, ainda que robusta a erros de estimação (Tu; Zhou, 2011), exibe um índice de Sharpe (0.014) inferior às estratégias HMM-MPC-Adaptive e HMM-MPC-CVaR. O índice Omega, embora similar entre as estratégias multiperíodo, também confirma a superioridade do modelo HMM-MPC-Adaptive, indicando uma relação entre ganho e perda de 20% ($\Omega = 1.2$).

O critério *Certainty Equivalent Return* (CER), utilizado neste estudo tanto para a calibração de parâmetros quanto para a avaliação do desempenho fora da amostra, representa o retorno certo que um investidor com uma função de utilidade quadrática ($U(R) = E[R] - \frac{\lambda}{2}Var(R)$) consideraria equivalente a um investimento com retorno arriscado. O uso do CER como critério de avaliação *out-of-sample* garante consistência teórica, pois reflete diretamente o objetivo da otimização da Equação 5.4, e segundo esse critério, a estratégia HMM-MPC-Adaptive obteve o maior CER (7.10%) entre todas as estratégias avaliadas. Observa-se que a abordagem multiperíodo, ao empregar risco condicional ao regime, acrescenta 0.76 p.p. de CER sobre a abordagem multiperíodo com risco CVaR regime-incondicional, 1.61 p.p. de CER sobre a abordagem multiperíodo com risco CDaR regime-incondicional e 2.25 p.p. sobre a carteira igualmente ponderada.

Este resultado confirma empiricamente a eficácia da abordagem multiperíodo com risco condicional ao regime em maximizar a utilidade ajustada ao risco na perspectiva do investidor. A superioridade de uma estratégia em termos de CER é vista como um indicador de que ela oferece uma utilidade geral esperada maior ao investidor, considerando tanto os lucros potenciais quanto as perdas.

Ao comparar as medidas de risco absoluto, nota-se que as estratégias multiperíodo, tanto com risco condicional quanto incondicional ao regime, exibem níveis muito próximos

de Máximo Drawdown e volatilidade anualizada. Além disso, a volatilidade da HMM-MPC-Adaptive (10.74%) é menor do que a estratégia 1/n (18.04%). O fato de a estratégia adaptativa manter o risco absoluto equivalente ao dos demais modelos multiperíodos, enquanto alcança os melhores retornos ajustado ao risco e CER, indica que adaptar a medida de risco ao cenário de volatilidade do mercado melhora o equilíbrio retorno–risco sem sacrificar proteção contra perdas extremas ou, inversamente, perder oportunidades de investimento em cenários normais de volatilidade.

O turnover é um elemento crucial em estratégias multiperíodo, ao refletir tanto a intensidade da gestão ativa quanto os custos de transação incorridos. Menores níveis de turnover são observados para a estratégia que tem o CVaR como medida de risco, indicando que o conservadorismo do CDaR e a dinâmica do modelo HMM-MPC-Adaptive geram maiores variações nos pesos portfólios. Todas as abordagens, à exceção da carteira $1/n$, ajustam os pesos sempre que o regime de volatilidade previsto se altera; contudo, somente a versão adaptativa alterna também a métrica de risco.

O Tracking Error (TE) evidencia quão distante a trajetória de uma estratégia ativa se afasta do seu benchmark. Conforme a Tabela 5.3, a HMM-MPC-Adaptive mantém TE de 10.37% frente à carteira $1/n$, indicando que o mecanismo de rebalanceamento regime-condicional entrega retornos superiores sem produzir volatilidade ativa excessiva. Essa consistência reforça a eficiência da abordagem, que já internaliza prospectivamente o custo de transação no horizonte de planejamento, e confirma a tese de que a alternância da medida de risco condicional ao regime melhora o *trade-off* retorno–risco.

Os maiores desvios concentram-se nas carteiras guiadas por CDaR (TE de até 13.01% em relação a $1/n$). Tal elevação decorre de dois fatores combinados: (i) natureza *path-dependent* do CDaR, que aciona cortes de risco mais profundos após *drawdowns* prolongados; e, (ii) realocações mais abruptas quando o HMM sinaliza transição de regime, ampliando o *turnover* da estratégia. TE alto, porém, não implica menor qualidade, o modelo HMM-MPC-CDaR mantém Máximo Drawdown e volatilidade menores do que o da abordagem adaptativa, ilustrando que trajetórias mais defensivas podem melhorar preservação de capital ao custo de divergência em relação ao *benchmark*, resultado compatível com a literatura que distingue métricas focadas em *drawdown* das que tratam apenas cauda pontual de perdas (Chekhlov; Uryasev; Zabarankin, 2005; Krokhmal; Uryasev; Zrazhevsky, 2005).

Para verificar se as diferenças de desempenho observadas são estatisticamente relevantes, aplicou-se o *Aligned Rank Transform* (ART) seguido de ANOVA de efeitos fixos, sobre o índice de Sharpe com frequência diária (calculado usando uma janela móvel de 252 dias de retornos diários) e, em seguida, a diferença entre os Índices de Sharpe anualizados globais foi avaliada pelo teste de **leidoit2008robust**

Para o ART, o teste global revelou heterogeneidade significativa entre as seis estratégias ($F = 458.43$, $p < 2.2 \cdot 10^{-16}$), rejeitando a hipótese nula de que todas exibem o mesmo retorno ajustado. Assim, pelo menos uma estratégia difere das demais em distribuição de desempenho. As

Tabela 5.3 – Tracking Error entre pares de estratégias.

Estratégia	**Benchmark**				
	HMM MPC-CDaR	HMM MPC-CVaR	HMM-Single CDaR	HMM-Single CVaR	Equal Weight
HMM-MPC-Adaptive	3.23	3.06	5.80	3.20	10.37
HMM-MPC-CDaR	–	3.47	4.58	4.15	11.84
HMM-MPC-CVaR	–	–	4.67	1.96	9.84
HMM-Single-CDaR	–	–	–	5.39	13.01
HMM-Single-CVaR	–	–	–	–	9.28

Nota: HMM-MPC-Adaptive representa a estratégia com medida de risco condicional ao regime. As estratégias HMM-MPC-CVaR e HMM-MPC-CDaR também utilizam o arcabouço HMM-MPC, mas com risco fixo (CVaR e CDaR, respectivamente). As estratégias HMM-Single-CVaR e HMM-Single-CDaR usam HMM para previsão, mas não incluem o controle preditivo (MPC). A estratégia equal weight é uma carteira de referência 1/n. Como a matriz é simétrica, exibe-se somente o triângulo superior. A comparação é feita sobre dados dos retornos diários dos portfólios.

comparações *post-hoc* de Tukey, já corrigidas para múltiplos testes, confirmam o desempenho promissor do modelo HMM-MPC-Adaptive. O contraste para HMM-MPC-Adaptive versus demais estratégias sugere diferenças estatisticamente significativas para todos os pares, com significância de 1%.

Contudo, o teste específico para a diferença entre os Índices de Sharpe anualizados de cada par de estratégias de Ledoit e Wolf (2008), sugere que nenhuma das comparações apresentou uma diferença estatisticamente significativa. A comparação entre a estratégia HMM_MPC_Adaptive e a Single_CDaR foi a que mais se aproximou da significância, com um p-valor de 0.116. A ausência de significância estatística sugere que, embora a estratégia HMM_MPC_Adaptive tenha apresentado o maior Índice de Sharpe, sua superioridade sobre as demais estratégias, incluindo o benchmark EW, não foi estatisticamente comprovada com esse teste.

Destaca-se que o teste ART é um procedimento não paramétrico que avalia a significância estatística de fatores e suas interações sobre a distribuição da variável resposta. No contexto do estudo, essa variável é a série temporal de valores do Índice de Sharpe. Ele é robusto a desvios da normalidade, mas não a autocorrelação. Por outro lado, o teste de Ledoit e Wolf (2008) é reconhecido por sua robustez a desvios da normalidade, autocorrelação e heterocedasticidade, características comuns em retornos financeiros. Essa robustez é alcançada por meio da construção de um intervalo de confiança bootstrap studentizado para a série das diferença entre os Índices de Sharpe. O teste de Ledoit e Wolf (2008) é mais conservador ao rejeitar a hipótese nula de igualdade. Isso significa que ele, além de mais adequado para avaliar as diferenças entre os Índices de Sharpe, exige evidências estatísticas substanciais para concluir que uma diferença é estatisticamente significativa.

Embora o teste de Ledoit e Wolf (2008) não tenha comprovado uma superioridade estatisticamente significativa do Índice de Sharpe da estratégia HMM-MPC-Adaptive, vantagens da abordagem adaptativa são observadas em indicadores que refletem o objetivo do investidor em

termos de retorno acumulado final e o retorno equivalente certo (CER). Conforme demonstrado, a estratégia HMM-MPC-Adaptive gerou resultados superiores nessas duas métricas, indicando que ela foi mais eficaz em aumentar a riqueza do investidor e sua utilidade esperada.

Essa combinação de resultados reforça a conclusão central deste estudo: a capacidade da abordagem adaptativa de se ajustar aos regimes de volatilidade resulta em vantagens em termos de utilidade e riqueza final. A obtenção de um Índice de Sharpe estatisticamente superior, por outro lado, mostra-se mais desafiadora em ambientes de mercado com alta imprevisibilidade.

Para aprofundar a compreensão sobre os mecanismos subjacentes ao desempenho da estratégia HMM-MPC-Adaptive, realizou-se uma análise do comportamento do portfólio condicionada ao regime de volatilidade identificado pelo HMM e, consequentemente, à métrica de risco ativa (CVaR em regimes de baixa volatilidade e CDaR em regimes de alta volatilidade). A Tabela 5.4 resume as estatísticas descritivas dos retornos diários do portfólio sob cada uma dessas condições.

Tabela 5.4 – Estatísticas do portfólio HMM-MPC-Adaptive, condicionadas à métrica de risco ativa (CVaR ou CDaR).

Risco	Obs.	Media	Mediana	SD	Min.	Max.	Perc_5	Perc_95	Assim.	Curt.	MDD
CVaR	858	7e-04	1e-03	0.008	-0.034	0.029	-0.012	0.013	-0.159	0.937	0.123
CDaR	369	-4e-04	2e-04	0.017	-0.121	0.077	-0.022	0.022	-1.645	11.822	0.321

Nota: As estatísticas são calculadas sobre os retornos diários. Obs. representa o número de dias em que a respectiva métrica de risco esteve ativa. SD é o Desvio padrão dos retornos. Min e Max os retornos diários mínimo e máximo observados. Perc.5 é o percentil 5 dos retornos diários (valor abaixo do qual se encontram 5% dos retornos) e Perc.95 o percentil 95 dos retornos diários (valor abaixo do qual se encontram 95% dos retornos). Assim. e Curt. são os coeficientes de assimetria e curtose. MDD é o pior Máximo *Drawdown* (perda percentual do pico ao vale) ocorrido durante qualquer período contínuo em que a respectiva métrica de risco esteve ativa.

Observa-se que a estratégia operou sob a lógica do CVaR na maior parte do tempo, aproximadamente 70% do período de *backtesting*), indicando uma predominância de regimes de baixa volatilidade identificados pelo HMM.

Analisando o comportamento dos retornos diários (Tabela 5.4) sob cada métrica, observam-se dinâmicas distintas que corroboram a lógica da comutação. Durante os períodos de CVaR ativo (baixa volatilidade), o portfólio buscou capturar oportunidades, apresentando uma média de retorno diário positiva de 0.067% e mediana de 0.098%, com uma volatilidade de 0.805%. A distribuição dos retornos mostrou um comportamento quase simétrico (assimetria de -0.159) e caudas moderadamente pesadas (curtose de 0.937). Esses resultados, incluindo um pior *drawdown* contínuo intra-regime de 12.3%, sugerem que o CVaR permitiu uma exposição para ganhos sem um conservadorismo excessivo, alinhando-se à sua função em regimes mais estáveis.

Em contraste, nos períodos de CDaR ativo (alta volatilidade), o ambiente de mercado se mostrou mais desafiador. A média diária dos retornos do portfólio foi de -0.036% (embora a mediana tenha permanecido positiva em 0.025%), e a volatilidade diária saltou para 1.75%.

A distribuição dos retornos nesse cenário foi caracterizada por uma forte assimetria negativa (-1.65) e uma curtose extremamente elevada (11.8), indicando a presença de grandes variações diárias, incluindo perdas mínimas de -12.2% e ganhos máximos de +7.74%. Este perfil é típico de mercados em crise. Embora as perdas diárias extremas tenham sido mais acentuadas, a capacidade de ainda registrar uma mediana positiva e, crucialmente, capturar ganhos expressivos em dias de recuperação, aponta para uma característica importante da estratégia sob CDaR, evitar uma postura tão restritiva que impeça a participação em 'repique' do mercado.

A principal justificativa para o emprego do CDaR em regimes de alta volatilidade, no entanto, reside em sua capacidade de limitar *drawdowns* prolongados. A análise do pior drawdown contínuo intra-regime (Tabela 5.4) revela que, durante as fases de CDaR ativo, o portfólio enfrentou um máximo *drawdown* de 32.1%. Notavelmente, este valor coincide com o maior *drawdown* geral sofrido pela estratégia HMM-MPC-Adaptive, ocorrido durante o ápice da crise da COVID-19 em março de 2020, um período em que o CDaR estava ativo, conforme previsto pelo HMM. Embora a volatilidade diária e as perdas pontuais tenham sido elevadas, refletindo a severidade do ambiente de mercado, a eficácia do CDaR em gerenciar a profundidade da perda acumulada torna-se evidente quando comparada a *benchmarks*. Durante este mesmo período crítico, de março de 2020, o Ibovespa sofreu um *drawdown* de 50.24%.

Portanto, a análise condicional detalhada (Tabela 5.4) fornece evidências empíricas que suportam as premissas da estratégia HMM-MPC-Adaptive. Observou-se que, durante os regimes de baixa volatilidade, a ativação do CVaR coincidiu com a geração de retornos médios positivos e um controle de risco que não impediu a captura de oportunidades, alinhando-se à expectativa de evitar conservadorismo excessivo. Em contrapartida, nos regimes de alta volatilidade, a ativação do CDaR, apesar do ambiente de mercado mais adverso e da ocorrência de perdas diárias pontuais significativas, demonstrou ser eficaz para a proteção da carteira. Dessa forma, os períodos de CVaR ativo foram os principais contribuintes para o retorno acumulado positivo, enquanto o CDaR focou na preservação de capital durante as fases turbulentas, contribuindo para o desempenho ajustado ao risco superior da estratégia global por meio desse controle de perdas acumuladas.

Esses achados da análise condicional ressaltam como a escolha da métrica de risco orientada pelo regime HMM se revelou determinante para o desempenho da carteira. O design da estratégia HMM-MPC-Adaptive, ao alternar entre CVaR em regimes de baixa volatilidade e CDaR em períodos de alta volatilidade, busca precisamente conciliar os benefícios de capturar oportunidades de retorno (evitando o conservadorismo excessivo do CDaR em mercados estáveis) com a proteção robusta contra perdas acumuladas em cenários adversos (superando a insuficiência do CVaR para riscos sequenciais em crises). De fato, quando CVaR ou CDaR são utilizados de forma incondicional, como nas estratégias benchmark de risco fixo, esse equilíbrio adaptativo é perdido.

Além dos ganhos táticos associados à alternância da métrica, a proposta também endereça deficiências estruturais dos modelos tradicionais de alocação. Ao empregar um

arcabouço multiperíodo via Model Predictive Control (MPC), com penalizações explícitas para concentração e custos de transação, com comutação do risco orientado por regimes estimados via Modelos Ocultos de Markov (HMM), essa abordagem aproxima-se de uma função de utilidade estado-dependente, podendo ser interpretada como um mecanismo da estratégia de alocação de ativos contra o erro de especificação do modelo conforme discutido por Staden, Dang e Forsyth (2021). Enquanto Staden et al. mostram a robustez da otimização média-variância a erros nos parâmetros, nosso modelo aborda um tipo diferente de erro de especificação: a falha em reconhecer que a própria função de utilidade do investidor (ou seja, sua forma de avaliar o risco) muda com o regime de volatilidade. Ao comutar entre CVaR e CDaR, o modelo não presume uma única forma correta de medir o risco, mas se adapta àquela que é mais pertinente ao estado latente da volatilidade do mercado, mitigando perdas decorrentes de uma especificação de risco rígida e inadequada.

Embora nosso modelo não preveja explicitamente qual será o 'modelo verdadeiro' dos retornos em um dado momento, a adaptação da métrica de risco reflete a percepção do gestor ativo de investimentos sobre o perfil de risco predominante, que se molda a diferentes características de cauda da distribuição dos retornos, características estas que seriam representadas por modelos subjacentes distintos (e.g., distribuição mais simétrica em baixa volatilidade versus caudas pesadas em alta volatilidade).

Essa abordagem também dialoga com a literatura recente em finanças, que reconhece a relevância de estratégias adaptativas diante da heterogeneidade dos regimes de volatilidade (DeMiguel; Martín-utrera; Uppal, 2024). Como mostram os resultados, a adaptação da métrica de risco não apenas melhora o retorno ajustado, como também contribui para a estabilidade da alocação em face de mudanças estruturais, ampliando a utilidade esperada líquida do investidor, evidência capturada pela superioridade do *Certainty Equivalent Return* (CER).

Portanto, ao permitir que a função objetivo se molde dinamicamente ao regime de risco predominante, o modelo HMM-MPC-Adaptive oferece uma solução prática e eficaz para o desafio de alocação de ativos em mercados com volatilidade intertemporal. Trata-se de uma contribuição teórica e empírica relevante, com implicações diretas para a prática de gestão de portfólios, sobretudo em economias emergentes.

5.5 Considerações Finais

Este estudo desenvolveu e avaliou um modelo de alocação dinâmica que integra o *Model Predictive Control* (MPC) com Modelos Ocultos de Markov (HMM), introduzindo uma inovação conceitual relevante: um arcabouço multiperíodo no qual a métrica de risco é selecionada de forma condicional ao regime de volatilidade vigente. Especificamente, a função objetivo alterna entre o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) em períodos de baixa volatilidade e o *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR) em regimes de alta volatilidade, conforme identificado pelo HMM. O MPC, por sua vez, resolve o problema de otimização em horizonte deslizante, incorporando

explicitamente custos de transação e penalizações de concentração. Essa integração preenche uma lacuna relevante na literatura, uma vez que estudos anteriores, mesmo com estrutura multiperíodo, tipicamente adotam uma métrica de risco fixa ao longo do tempo, limitando sua capacidade de adaptação a mudanças estruturais nos regimes de volatilidade.

A principal contribuição teórica reside na operacionalização de uma função de utilidade estado-dependente por meio dessa abordagem de otimização prática. A teoria da utilidade estado-dependente postula que a aversão ao risco do investidor não é constante, mas varia conforme o estado da economia ou o regime de volatilidade. Nosso modelo oferece uma aproximação tratável e inovadora para essa teoria: em vez de modelar a função de utilidade diretamente, ele adapta a métrica de risco na função-objetivo ao regime de volatilidade inferido pelo HMM. A comutação entre CVaR e CDaR funciona como uma *proxy* para a mudança na sensibilidade do gestor ativo de investimento a diferentes tipos de perdas (pontuais vs. acumuladas), alinhando as decisões de alocação de forma dinâmica à aversão ao risco prevalecente. Em ambientes de baixa volatilidade, o CVaR evita o conservadorismo excessivo, permitindo a captura de oportunidades, enquanto o CDaR foca na limitação de *drawdowns* prolongados em regimes de alta volatilidade, protegendo o capital em cenários turbulentos. Essa adaptação dinâmica da medida de risco é interpretada como um mecanismo contra o erro de especificação do modelo, que ocorreria se o modelo subjacente do investidor desconsiderasse que sua utilidade é, na realidade, estado-dependente. Ao ajustar a métrica de risco e, consequentemente, o perfil do portfólio, o modelo busca alinhar-se de forma mais eficaz com as prioridades de risco percebidas pelo gestor da carteira em cada contexto, visando, em última instância, aprimorar a utilidade esperada da riqueza no longo prazo.

Os testes empíricos utilizaram um conjunto representativo de ETFs listados na B3 entre janeiro de 2020 e abril de 2025, período que captura a crise da COVID-19, episódios de instabilidade fiscal e múltiplas transições de regime de volatilidade no Brasil. A estratégia HMM-MPC-Adaptive superou sistematicamente todos os *benchmarks* considerados: carteiras de regime único, variantes multiperíodo com risco incondicional e, especialmente, a alocação $1/n$. Essa superioridade foi validada pelo teste ART, mas não pela análise do teste de Ledoit e Wolf (2008). Contudo, os retornos acumulados sugerem ganhos com o uso da estratégia adaptativa.

Essa dominância reflete-se diretamente na superioridade em termos de *Certainty Equivalent Return* (CER), onde a estratégia HMM-MPC-Adaptive alcançou o maior valor (7.10%), sugerindo que esta estratégia oferece uma utilidade geral esperada maior ao investidor, mesmo após considerar custos de transação que são um elemento crucial e que podem corroer significativamente os retornos e os benefícios de estratégias de alocação dinâmica. Adicionalmente, a estratégia adaptativa manteve um nível de risco absoluto (Máximo Drawdown e volatilidade) comparável aos demais modelos multiperíodo, e inferior à estratégia 1/n, reforçando que a adaptação da medida de risco melhora o equilíbrio retorno-risco sem sacrificar proteção. O turnover, embora maior do que as estratégias com

CVaR fixo, reflete a natureza ativa da gestão e a capacidade de adaptação do modelo, com um tracking error que valida a eficiência da abordagem.

Do ponto de vista teórico, dois achados merecem destaque. Primeiro, a alternância entre as medidas de risco de cauda (CVaR e CDaR) fornece evidência de que nenhuma métrica domina em todos os regimes: a utilidade marginal de cada uma é regime-dependente, corroborando trabalhos como Ortobelli et al. (2005) e Gilbert e Meiklejohn (2019). Segundo, o desempenho superior da estratégia adaptativa sugere que horizontes multiperíodo curtos (como H=5) são suficientes para capturar ganhos preditivos relevantes sem amplificar o erro de estimação, convergindo com os resultados de Campani, Garcia e Lewin (2021). Este achado também dialoga com a ênfase de DeMiguel, Martín-utrera e Uppal (2024) em modelos dinâmicos que se reajustam com base em sinais de mercado (como a volatilidade), onde a frequência do rebalanceamento e a qualidade das previsões de curto prazo são mais críticas do que a extensão do horizonte de planejamento.

Do ponto de vista prático, os resultados reforçam a importância de estratégias que incorporam mudanças de regime e métricas de risco heterogêneas, posicionando essa abordagem como uma alternativa promissora às práticas tradicionais de gestão de portfólios, especialmente em mercados emergentes, marcados por menor liquidez, maiores *spreads* e volatilidade elevada. A integração HMM-MPC oferece uma arquitetura capaz de absorver novas informações, controlar *drawdowns* e, simultaneamente, ampliar o retorno ajustado ao risco, representando um avanço sobre estudos anteriores que mantinham risco fixo.

Apesar das contribuições, algumas limitações devem ser reconhecidas. A ausência de significância estatística na superioridade do Índice de Sharpe anualizado pela abordagem de Ledoit e Wolf (2008) sugere que, embora os retornos das estratégias adaptativas seja promissor, há uma incerteza implícita que afeta o controle do risco em um horizonte mais amplo. Este ponto abre uma via interessante para pesquisas futuras, que poderiam focar em metodologias para refinar a estimação, buscando aprimorar a robustez estatística do desempenho ajustado ao risco.

Além disso, a análise está restrita a ETFs negociados no mercado brasileiro, o que limita a generalização direta dos resultados. Pesquisas futuras podem explorar a aplicabilidade da abordagem em outros contextos, tanto em mercados desenvolvidos quanto em emergentes, bem como testar a comutação entre outras métricas de risco, como o EVaR e o EDaR, que possuem propriedades desejáveis de convexidade e podem oferecer um perfil de risco-retorno diferente. Considerando a importância dos custos de transação para estratégias multiperíodos, trabalhos futuros poderiam aprimorar a análise comparativa ao avaliar uma estratégia $1/n$, incorporando os custos do seu rebalanceamento. Adicionalmente, seria valioso testar outras formas de cálculo para os custos de transação, o que pode auxiliar a compreender de forma mais profunda como este elemento afeta as diferentes estratégias de alocação.

6 CONCLUSÃO GERAL

A gestão de portfólios em mercados financeiros contemporâneos, intrinsecamente voláteis e suscetíveis a choques, impõe um desafio perene: otimizar a relação risco-retorno em um ambiente de incerteza fundamental. Partindo do reconhecimento das limitações dos modelos tradicionais de Média-Variância (MMV), especialmente sua premissa de risco simétrico e parâmetros estáticos, esta tese dedicou-se a explorar e propor abordagens mais sofisticadas e adaptativas. O problema de pesquisa central investigou se, sob a presença de mudanças de regime de volatilidade, os gestores ativos de investimento deveriam alterar a medida de risco utilizada no processo de alocação de ativos. Assim, o objetivo geral foi analisar se a adoção de diferentes funções de risco, adaptadas ao regime, influencia o desempenho de estratégias de alocação dinâmica de ativos. Para alcançar tal propósito, a pesquisa foi estruturada em três artigos científicos interconectados, cada um abordando objetivos específicos cruciais.

A investigação iniciou-se, no Artigo 1, com o objetivo específico I, de estimar regimes de volatilidade e testar a capacidade de diferentes *proxies* (volatilidade histórica, condicional e implícita) e identificá-los por meio de um Modelo Oculto de Markov (HMM). Os resultados empíricos revelaram que a volatilidade condicional, estimada por modelos GARCH, destacou-se como a *proxy* mais eficaz para a identificação de regimes tanto no mercado brasileiro quanto no norte-americano, oferecendo maior precisão e consistência na captura da dinâmica da volatilidade e suas transições entre regimes. Ademais, verificou-se que as correlações entre ativos tendem a aumentar em ambientes de alta volatilidade, evidenciando a limitação da diversificação tradicional em momentos de estresse.

Subsequentemente, o Artigo 2 atendeu ao segundo específico II ao analisar o desempenho de diferentes funções de risco, variância, *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) e *Conditional Drawdown-at-Risk* (CDaR), sob distintos regimes de volatilidade, utilizando dados do mercado brasileiro. A principal conclusão foi a natureza regime-condicional da eficácia das métricas de risco, confirmando que a escolha da medida de risco ideal não é universal, mas intrinsecamente ligada ao regime de volatilidade vigente. Estatisticamente, comprovou-se que o CVaR proporcionou desempenho superior em contextos de baixa volatilidade, por equilibrar retorno esperado e perdas potenciais sem conservadorismo excessivo. Em contrapartida, o CDaR mostrou-se mais eficiente em cenários de alta volatilidade, ao priorizar a contenção de perdas sequenciais e a proteção contra quedas prolongadas. A variância, por sua vez, demonstrou limitações em capturar riscos de cauda, com desempenho inferior em ambos os regimes. Esses achados corroboram com a hipótese 1 (H1) levantada, que postula a influência distinta das medidas de risco de cauda nas alocações de ativos.

Culminando a análise empírica, o Artigo 3 concretizou os objetivos específicos III e IV ao propor e avaliar um modelo de alocação ótima multiperíodo, combinando a capacidade de detecção de regimes do HMM com a flexibilidade do *Model Predictive Control* (MPC). A

inovação central foi a introdução de uma métrica de risco regime-condicional: a função objetivo adota o CVaR em períodos de baixa volatilidade e o CDaR em períodos de alta volatilidade. Essa comutação dinâmica entre as medidas de risco é teoricamente justificada pela função utilidade estado-dependente, que postula que a aversão ao risco e a utilidade do investidor se alteram em resposta ao 'estado' da volatilidade. A ausência dessa adaptação pode levar a um erro de especificação do modelo, pois a função objetivo não refletiria a verdadeira utilidade do investidor. Os resultados empíricos, utilizando ETFs negociados na B3, demonstraram que a estratégia HMM-MPC-Adaptive superou, em termos de retornos acumulados, as abordagens tradicionais de risco fixo e regime único, apresentando retornos ajustados ao risco superiores e maior utilidade esperada para o investidor, conforme mensurado pelo *Certainty Equivalent Return* (CER). Essa superioridade corrobora com a hipótese 2 (H2).

Como contribuição teórica, a presente tese ancorou a dinâmica da gestão de risco na Teoria da Utilidade Estado-Dependente. Ao adaptar a métrica de risco na função objetivo ao regime de volatilidade inferido pelo HMM, o modelo oferece uma aproximação tratável para essa teoria, mitigando o erro de especificação (Categoria I) que ocorre ao assumir uma função de utilidade fixa em mercados dinâmicos. Ao demonstrar que nenhuma métrica de risco é universalmente ótima e que a adaptação da função de risco melhora a utilidade do investidor, a tese reforça a necessidade de adaptação, desafiando modelos estáticos e confirmando as hipóteses de pesquisa (H1 e H2).

A contribuição metodológica baseia-se na integração e validação empírica da combinação de Modelos Ocultos de Markov (HMM) para identificação de regimes, *Model Predictive Control* (MPC) para otimização multiperíodo, e uma estratégia de chaveamento dinâmico das métricas de risco (CVaR e CDaR) condicionada ao regime. Adicionalmente, empregou uma abordagem *data-driven* para calibração de parâmetros e testes estatísticos robustos para validação dos resultados.

Como contribuição prática, os achados fornecem subsídios diretos para investidores e gestores de portfólios. A abordagem é especialmente relevante em mercados emergentes como o brasileiro, onde choques internos e externos são mais intensos em magnitude. Os resultados indicam a importância de estratégias dinâmicas para mitigar perdas e preservar capital nesses ambientes, oferecendo diretrizes sobre quando utilizar CVaR (em regimes de baixa volatilidade) e CDaR (em regimes de alta volatilidade). Isso significa que, em um cenário de estresse, um gestor de portfólio usando a estratégia HMM-MPC-Adaptive seria proativamente guiado a uma alocação com foco em CDaR para preservar o capital, enquanto em momentos de estabilidade, o foco em CVaR permitiria capturar oportunidades de retorno sem um excesso de conservadorismo.

Ressalta-se que a ausência de significância estatística no Índice de Sharpe, conforme o teste de Ledoit e Wolf (2008), não invalida a relevância da estratégia adaptativa, mas abre uma linha de discussão para trabalhos futuros sobre a representatividade de cada medida de desempenho ao objetivo do investidor. O fato do CER da estratégia dinâmica, considerado

fundamental para avaliar a performance sob a perspectiva da utilidade do investidor, ter resultado em maior utilidade esperada e retornos acumulados superiores é a evidência de sua relevância prática.

O estudo apresenta algumas limitações, como o foco em ativos do mercado brasileiro, a exceção do primeiro artigo, e a escolha de dois regimes para interpretabilidade. Pesquisas futuras podem explorar a aplicabilidade da abordagem em outros mercados (desenvolvidos e emergentes) para testar a generalização dos resultados. Poderiam também incorporar variáveis macroeconômicas para aprimorar a identificação de regimes, ou investigar outras métricas de risco regime-condicional. Adicionalmente, considerando a robustez da estratégia ingênua $(1/n)$, seria valioso aprimorar a análise comparativa ao avaliar uma estratégia $1/n$, incorporando os custos de seu rebalanceamento, para uma comparação mais equitativa. Uma linha promissora seria a integração de modelos de mudança de regime com técnicas de *Reinforcement Learning*, visando aprimorar a capacidade de identificação de regimes e otimização das políticas de alocação de forma autônoma e adaptativa.

REFERÊNCIAS

ABATE, Guido; BONAFINI, Tommaso; FERRARI, Pierpaolo. Portfolio Constraints: An Empirical Analysis. **International Journal of Financial Studies**, MDPI, v. 10, n. 1, p. 9, 2022. DOI: 10.3390/ijfs10010009.

ACERBI, Carlo; TASCHE, Dirk. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. **Economic notes**, v. 31, n. 2, p. 379–388, 2002a. DOI: 10.1111/1468-0300.00091.

_____. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1487–1503, 2002b. DOI: 10.1016/S0378-4266(02)00283-2.

AIGNER, Andreas A. A Gaussian Mixture Hidden Markov Model for the VIX. **Available at SSRN 4389763**, 2022.

ALEXANDER, Gordon J; BAPTISTA, Alexandre M. A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model. **Management science**, v. 50, n. 9, p. 1261–1273, 2004. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0201.

_____. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 26, n. 7-8, p. 1159–1193, 2002. DOI: 10.1016/S0165-1889(01)00041-0.

_____. Portfolio selection with a drawdown constraint. **Journal of Banking & Finance**, v. 30, n. 11, p. 3171–3189, 2006. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2005.12.006.

ALMAHDI, Saud; YANG, Steve Y. An adaptive portfolio trading system: A risk-return portfolio optimization using recurrent reinforcement learning with expected maximum drawdown. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 87, p. 267–279, 2017. DOI: 10.1016/j.eswa.2017.06.023.

ANAYA, Pablo; HACHULA, Michael; OFFERMANNS, Christian J. Spillovers of US unconventional monetary policy to emerging markets: The role of capital flows. **Journal of International Money and Finance**, Elsevier, v. 73, p. 275–295, 2017. DOI: 10.1016/j.jimonfin.2017.02.008.

ANBIMA. **Raio X do Investidor Brasileiro**. Acessado em março de 2025. 2024. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-brasileiro.htm.

ANG, Andrew; BEKAERT, Geert. How regimes affect asset allocation. **Financial Analysts Journal**, v. 60, n. 2, p. 86–99, 2004. DOI: 10.2469/faj.v60.n2.2612.

ANG, Andrew; TIMMERMANN, Allan. Regime changes and financial markets. **Annual Review of Financial Economics**, Annual Reviews, v. 4, n. 1, p. 313–337, 2012. DOI: 10.1146/annurev-financial-110311-101808.

ARAÚJO, Breno Valente Fontes; CAMARGOS, Marcos Antônio de; PINHO, Frank Magalhães de. Modeling conditional volatility by incorporating non-regular trading hours into the APARCH model. **Revista Contabilidade & Finanças**, SciELO Brasil, v. 30, p. 202–215, 2018. DOI: 10.1590/1808-057x201806100.

ARDIA, David; BLUTEAU, Keven; RÜEDE, Maxime. Regime changes in Bitcoin GARCH volatility dynamics. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 29, p. 266–271, 2019. DOI: 10.1016/j.frl.2018.08.009.

ARDIA, David; BOUDT, Kris. The peer performance ratios of hedge funds. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 87, p. 351–368, 2018.

ARDIA, David et al. Forecasting risk with Markov-switching GARCH models: A large-scale performance study. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 733–747, 2018. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2018.05.004.

ARTZNER, Philippe et al. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999. DOI: 10.1111/1467-9965.00068.

ASGHARIAN, Hossein; CHRISTIANSEN, Charlotte; HOU, Ai Jun. The effect of uncertainty on stock market volatility and correlation. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 154, p. 106929, 2023. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2023.106929.

AYDINHAN, Afşar Onat et al. Identifying patterns in financial markets: extending the statistical jump model for regime identification. **Annals of Operations Research**, Springer, p. 1–37, 2024. DOI: 10.1007/s10479-024-06035-z.

AZAD, Nahiyan Faisal; SERLETIS, Apostolos. Spillovers of US monetary policy uncertainty on inflation targeting emerging economies. **Emerging Markets Review**, Elsevier, v. 51, p. 100875, 2022. DOI: 10.1016/j.ememar.2021.100875.

B3 - BRASIL BOLSA, Balcão. **20 anos de ETF no Brasil**. [*S. l.: s. n.*], 2023. Relatório técnico.

BABAZADEH, Hossein; ESFAHANIPOUR, Akbar. A novel multi period mean-VaR portfolio optimization model considering practical constraints and transaction cost. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 361, p. 313–342, 2019. DOI: 10.1016/j.cam.2018.10.039.

BAE, Geum Il; KIM, Woo Chang; MULVEY, John M. Dynamic asset allocation for varied financial markets under regime switching framework. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 450–458, 2014. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.03.032.

BAGHDADABAD, Mohammad Reza Tavakoli. Maximum Drawdown and Risk Tolerances. **Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies**, World Scientific, v. 18, n. 01, p. 1550003, 2015. DOI: 10.1142/S0219091515500034.

BAI, Yunfei; CAI, Charlie X. Predicting VIX with adaptive machine learning. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, p. 1–17, 2024. DOI: 10.1080/14697688.2024.2439458.

BASAK, Suleyman; SHAPIRO, Alexander. Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. **The review of financial studies**, v. 14, n. 2, p. 371–405, 2001. DOI: 10.1093/rfs/14.2.371.

BEKAERT, Geert; HOEROVA, Marie. The VIX, the variance premium and stock market volatility. **Journal of econometrics**, Elsevier, v. 183, n. 2, p. 181–192, 2014. DOI: 10.1016/j.jeconom.2014.05.008.

BENATI, Stefano; CONDE, Eduardo. A relative robust approach on expected returns with bounded CVaR for portfolio selection. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 296, n. 1, p. 332–352, 2022. DOI: 10.1016/j.ejor.2021.04.038.

BIELELCKI, Tomasz R; CRÉPEY, Stéphane; HERBERTSSON, Alexander. Markov chain models of portfolio credit risk. **The Oxford Handbook of Credit Derivatives**, 2011. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199546787.013.0010.

BLACK, Fischer; LITTERMAN, Robert. Global portfolio optimization. **Financial analysts journal**, v. 48, n. 5, p. 28–43, 1992. DOI: 10.2469/faj.v48.n5.28.

BORIO, Claudio. The financial cycle and macroeconomics: What have we learnt? **Journal of banking & finance**, Elsevier, v. 45, p. 182–198, 2014. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2013.07.031.

BOYD, Stephen et al. Multi-period trading via convex optimization. **Foundations and Trends® in Optimization**, Now Publishers, Inc., v. 3, n. 1, p. 1–76, 2017. DOI: 10.1561/2400000023.

BRANDI, Vinicius Ratton; MENDES, Beatriz Vaz de Melo. Assessing Drawdown-at-Risk in Brazilian Real Foreign Exchange Rates. **Brazilian Review of Finance**, v. 2, n. 2, pp–207, 2004. DOI: 10.12660/rbfin.v2n2.2004.1142.

CAMACHO, Eduardo F; BORDONS, Carlos. **Model predictive control (advanced textbooks in control and signal processing)**. [*S. l.*]: Springer, 1999.

CAMPANI, Carlos Heitor; GARCIA, René. Approximate analytical solutions for consumption/investment problems under recursive utility and finite horizon. **The North American Journal of Economics and Finance**, Elsevier, v. 48, p. 364–384, 2019. DOI: 10.1016/j.najef.2019.03.005.

CAMPANI, Carlos Heitor; GARCIA, René; LEWIN, Marcelo. Optimal portfolio strategies in the presence of regimes in asset returns. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 123, p. 106030, 2021. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2020.106030.

CAMPBELL, Rachel; KOEDIJK, Kees; KOFMAN, Paul. Increased correlation in bear markets. **Financial Analysts Journal**, v. 58, n. 1, p. 87–94, 2002. DOI: 10.2469/faj.v58.n1.2512.

CHANG, Xin; CHEN, Yangyang; ZOLOTOY, Leon. Stock liquidity and stock price crash risk. **Journal of financial and quantitative analysis**, Cambridge University Press, v. 52, n. 4, p. 1605–1637, 2017. DOI: 10.1017/S0022109017000473.

CHAUVET, Marcelle; SENYUZ, Zeynep; YOLDAS, Emre. What does financial volatility tell us about macroeconomic fluctuations? **Journal of Economic Dynamics and Control**, Elsevier, v. 52, p. 340–360, 2015. DOI: 10.1016/j.jedc.2015.01.002.

CHEKHLOV, Alexei; URYASEV, Stanislav; ZABARANKIN, Michael. Drawdown measure in portfolio optimization. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 8, n. 01, p. 13–58, 2005. DOI: 10.1142/S0219024905002767.

_____. Portfolio optimization with drawdown constraints. *In:* SUPPLY chain and finance. [*S. l.*]: World Scientific, 2004. p. 209–228. DOI: 10.1142/9789812562586_0013.

CHEN, Jiaqin; YUAN, Ming. Efficient portfolio selection in a large market. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, v. 14, n. 3, p. 496–524, 2016. DOI: 10.1093/jjfinec/nbw003.

CHEN, Xinfu et al. On minimizing drawdown risks of lifetime investments. **Insurance: Mathematics and Economics**, Elsevier, v. 65, p. 46–54, 2015. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2015.08.007.

CHOI, Jaehyung. Maximum drawdown, recovery, and momentum. **Journal of Risk and Financial Management**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 14, n. 11, p. 542, 2021. DOI: 10.3390/jrfm14110542.

CHOI, Jaehyung; KIM, Hyangju; KIM, Young Shin. Diversified reward-risk parity in portfolio construction. **Available at SSRN 3871944**, 2021.

CHOPRA, Vijay K; ZIEMBA, William T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *In:* HANDBOOK of the fundamentals of financial decision making: Part I. [*S. l.*]: World Scientific, 2013. p. 365–373. DOI: 10.1142/9789814417358_0021.

CHUNG, Munki et al. The effects of errors in means, variances, and correlations on the mean-variance framework. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 22, n. 10, p. 1893–1903, 2022. DOI: 10.1080/14697688.2022.2083009.

CLAESSENS, Stijn; KOSE, M Ayhan; TERRONES, Marco E. How do business and financial cycles interact? **Journal of International economics**, Elsevier, v. 87, n. 1, p. 178–190, 2012. DOI: 10.1016/j.jinteco.2011.11.008.

CONLON, Thomas; COTTER, John; KYNIGAKIS, Iason. Asset allocation with factor-based covariance matrices. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 325, n. 1, p. 189–203, 2025. DOI: 10.1016/j.ejor.2025.03.015.

COSTA, Giorgio; KWON, Roy H. Risk parity portfolio optimization under a Markov regime-switching framework. **Quantitative finance**, Taylor & Francis, v. 19, n. 3, p. 453–471, 2019. DOI: 10.1080/14697688.2018.1486036.

COSTA, Oswaldo LV; ARAUJO, Michael V. A generalized multi-period mean–variance portfolio optimization with Markov switching parameters. **Automatica**, v. 44, n. 10, p. 2487–2497, 2008. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.02.014.

CUI, Xiang-Yu et al. Survey on multi-period mean–variance portfolio selection model. **Journal of the operations research society of china**, Springer, v. 10, n. 3, p. 599–622, 2022. DOI: 10.1007/s40305-022-00397-6.

CUI, Xiangyu et al. Time-consistent and self-coordination strategies for multi-period mean-Conditional Value-at-Risk portfolio selection. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 276, n. 2, p. 781–789, 2019. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.01.045.

CVITANIC, Jaksa; KARATZAS, Ioannis. On portfolio optimization under"drawdown"constraints. **IMA Volumes in Mathematics and its Applications**, n. 65, p. 35–46, 1995.

DANIEL, P Palomar. **Portfolio Optimization: Theory and Application**. [*S. l.*]: CAMBRIDGE University Press, 2025.

DAVOODI, Shayan; FEREYDOONI, Ali; RASTEGAR, Mohammad Ali. Can portfolio construction considering ESG still gain high profits? **Research in International Business and Finance**, Elsevier, v. 67, p. 102126, 2024. DOI: 10.1016/j.ribaf.2023.102126.

DE JONG, Marielle. Portfolio optimisation in an uncertain world. **Journal of Asset Management**, Springer, v. 19, n. 4, p. 216–221, 2018. DOI: 10.1057/s41260-017-0066-3.

DE PAULA, Luiz Fernando; FRITZ, Barbara; PRATES, Daniela. The metamorphosis of external vulnerability from 'original sin'to 'original sin redux': currency hierarchy and financial globalization in emerging economies. **Review of International Political Economy**, Taylor & Francis, p. 1–28, 2024. DOI: 10.1080/09692290.2024.2370340.

DELBAEN, Freddy. Coherent risk measures on general probability spaces. *In:* ADVANCES in finance and stochastics. [*S. l.*]: Springer, 2002. p. 1–37.

DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? **The review of Financial studies**, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009. DOI: 10.1093/rfs/hhm075.

DEMIGUEL, Victor; MARTÍN-UTRERA, Alberto; UPPAL, Raman. A Multifactor Perspective on Volatility-Managed Portfolios. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 79, n. 6, p. 3859–3891, 2024. DOI: 10.1111/jofi.13395.

DING, Rui. f-Betas and portfolio optimization with f-divergence induced risk measures. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 23, n. 10, p. 1483–1496, 2023. DOI: 10.1080/14697688.2023.2230629.

DING, Rui; URYASEV, Stan. Drawdown beta and portfolio optimization. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, p. 1–12, 2022. DOI: 10.1080/14697688.2022.2037698.

DOUGLAS, James W; CONRAD, Justin; FREDERICK, Joseph A. Budgeting for the human-made disaster of war: US aid to Ukraine. **Public Money & Management**, Taylor & Francis, v. 45, n. 3, p. 247–255, 2025. DOI: 10.1080/09540962.2024.2339320.

ELTON, Edwin; GRUBER, Martin; BROWN, Stephen. **Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos**. [*S. l.*]: Elsevier Brasil, 2012.

FAMA, Eugene F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. **The journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. DOI: 10.2307/2325487.

FEREYDOONI, Ali; MAHOOTCHI, Masoud. An algorithmic trading system based on a stacked generalization model and hidden Markov model in the foreign exchange market. **Global Finance Journal**, Elsevier, v. 56, p. 100825, 2023. DOI: 10.1016/j.gfj.2023.100825.

FLEMING, Jeff; KIRBY, Chris; OSTDIEK, Barbara. The economic value of volatility timing using "realized" volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 67, n. 3, p. 473–509, 2003. DOI: 10.1016/S0304-405X(02)00259-3.

FOCARDI, Sergio M; FABOZZI, Frank J. What's wrong with today's economics? The current crisis calls for an approach to economics rooted more on data than on rationality. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 38, n. 3, p. 104–119, 2012.

FONS, Elizabeth et al. A novel dynamic asset allocation system using Feature Saliency Hidden Markov models for smart beta investing. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 163, p. 113720, 2021. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113720.

FU, Anqi; RAJARATNAM, Bala; BOYD, Stephen. CVXR: An R Package for Disciplined Convex Optimization. **Journal of Statistical Software**, v. 94, n. 14, p. 1–34, 2020. DOI: 10.18637/jss.v094.i14.

GEBOERS, Hans; DEPAIRE, Benoıt; ANNAERT, Jan. A review on drawdown risk measures and their implications for risk management. **Journal of Economic Surveys**, Wiley Online Library, 2022. DOI: 10.1111/joes.12520.

GERONAZZO, Arthur; CHELA, João Luiz. Stress test techniques using drawdown metrics: a Brazilian case study. **International Journal of Financial Markets and Derivatives**, Inderscience Publishers (IEL), v. 7, n. 4, p. 315–336, 2020. DOI: 10.1504/IJFMD.2020.111886.

GHALANOS, Alexios. **rugarch: Univariate GARCH models**. [*S. l.*], 2023. R package version 1.5-3.

GIAMOURIDIS, Daniel; SAKKAS, Athanasios; TESSAROMATIS, Nikolaos. Dynamic asset allocation with liabilities. **European Financial Management**, Wiley Online Library, v. 23, n. 2, p. 254–291, 2017. DOI: 10.1111/eufm.12097.

GILBERT, Evan; MEIKLEJOHN, Luke. A comparative analysis of risk measures: A portfolio optimisation approach. **Investment Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 48, n. 3, p. 223–239, 2019.

GOLDBERG, Lisa R; MAHMOUD, Ola. Drawdown: from practice to theory and back again. **Mathematics and Financial Economics**, Springer, v. 11, n. 3, p. 275–297, 2017. DOI: 10.1007/s11579-016-0181-9.

GONZÁLEZ-DÍAZ, Julio et al. Global optimization for bilevel portfolio design: Economic insights from the Dow Jones index. **Omega**, Elsevier, v. 102, p. 102353, 2021. DOI: 10.1016/j.omega.2020.102353.

GRANT, Andrew; KWON, Oh Kang; SATCHELL, Steve. Properties of risk aversion estimated from portfolio weights. **Journal of Asset Management**, Springer, v. 25, n. 5, p. 427–444, 2024. DOI: 10.1057/s41260-024-00375-y.

GROSSMAN, Sanford J; ZHOU, Zhongquan. Optimal investment strategies for controlling drawdowns. **Mathematical finance**, v. 3, n. 3, p. 241–276, 1993. DOI: 10.1111/j.1467-9965.1993.tb00044.x.

HABIB, Ahsan; HASAN, Mostafa Monzur; JIANG, Haiyan. Stock price crash risk: review of the empirical literature. **Accounting & Finance**, Wiley Online Library, v. 58, p. 211–251, 2018. DOI: 10.1111/acfi.12278.

HAGHANI, Victor; DEWEY, Richard. A Case Study for Using Value and Momentum at the Asset Class Level. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 42, n. 3, p. 101–113, 2016.

HAMILTON, James D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. **Econometrica: Journal of the econometric society**, p. 357–384, 1989. DOI: 10.2307/1912559.

HAN, Chulwoo. How much should portfolios shrink? **Financial Management**, Wiley, v. 49, n. 3, p. 707–740, 2020. DOI: 10.1111/fima.12282.

HARRIS, Richard DF; MAZIBAS, Murat. Dynamic hedge fund portfolio construction: A semi-parametric approach. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 37, n. 1, p. 139–149, 2013. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2012.08.017.

HUANG, Chifu; LITZENBERGER, Robert H. **Foundations for Financial Economics**. [*S. l.*]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

HUANG, Xiaoxia; YING, Haiyao. Risk index based models for portfolio adjusting problem with returns subject to experts' evaluations. **Economic Modelling**, Elsevier, v. 30, p. 61–66, 2013. DOI: 10.1016/j.econmod.2012.09.032.

HWANG, Inchang; XU, Simon; IN, Francis. Naive versus optimal diversification: Tail risk and performance. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 265, n. 1, p. 372–388, 2018. DOI: 10.1016/j.ejor.2017.07.066.

IQUIAPAZA, Robert Aldo; VAZ, Gustavo Fiuza Costa; BORGES, Sergio Louro. Portfolio evaluation of volatility timing and reward to risk timing investment strategies: The brazilian case. **Revista de Finanças Aplicadas**, v. 7, n. 2, p. 1–19, 2016.

ISRAELSEN, Craig. A refinement to the Sharpe ratio and information ratio. **Journal of Asset Management**, v. 5, n. 6, p. 423–427, 2005.

JACOBS, Michael; KARAGOZOGLU, Ahmet K. On the characteristics of dynamic correlations between asset pairs. **Research in International Business and Finance**, v. 32, p. 60–82, 2014. ISSN 0275-5319. DOI: 10.1016/j.ribaf.2014.03.004. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S027553191400018X.

JARROW, Robert; LI, Siguang. Concavity, stochastic utility, and risk aversion. **Finance and Stochastics**, Springer, v. 25, p. 311–330, 2021. DOI: 10.1007/s00780-021-00448-5.

JOHANSEN, Anders; SORNETTE, Didier. Large stock market price drawdowns are outliers. **Journal of Risk**, v. 4, n. 2, p. 69–110, 2002. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0010050.

JORION, Philippe. **Value at risk: the new benchmark for controlling market risk**. [*S. l.*]: McGraw-Hill, 2006.

KALAYCI, Can B; ERTENLICE, Okkes; AKBAY, Mehmet Anil. A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 125, p. 345–368, 2019. DOI: 10.1016/j.eswa.2019.02.011.

KANDHARI, Jitania. **Big Picture: Return of the 60/40**. [*S. l.*], abr. 2024. Disponível em: https://www.morganstanley.com/im/en-us/individual-investor/insights/articles/big-picture-return-of-the-60-40.html.

KAY, Matthew; WOBBROCK, Jacob. ARTool: aligned rank transform for nonparametric factorial ANOVAs. **R package version 0.11**, v. 1, n. 10.5281, 2021.

KEATING, Con; SHADWICK, William F. A universal performance measure. **Journal of performance measurement**, v. 6, n. 3, p. 59–84, 2002.

KIM, Ki-ho. Dollar exchange rate and stock price: evidence from multivariate cointegration and error correction model. **Review of Financial economics**, v. 12, n. 3, p. 301–313, 2003. DOI: 10.1016/S1058-3300(03)00026-0.

KIM, Jang Ho; KIM, Woo Chang; FABOZZI, Frank J. Recent developments in robust portfolios with a worst-case approach. **Journal of Optimization Theory and Applications**, Springer, v. 161, n. 1, p. 103–121, 2014. DOI: 10.1007/s10957-013-0329-1.

KIRCHER, Felix; RÖSCH, Daniel. A shrinkage approach for Sharpe ratio optimal portfolios with estimation risks. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 133, p. 106281, 2021. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2021.106281.

KOLM, Petter N; TÜTÜNCÜ, Reha; FABOZZI, Frank J. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 356–371, 2014. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.10.060.

KORN, Olaf; MÖLLER, Philipp M; SCHWEHM, Christian. Drawdown measures: Are they all the same? **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 48, n. 5, p. 104–120, 2022. DOI: 10.3905/jpm.2022.1.346.

KRITZMAN, Mark; PAGE, Sebastien; TURKINGTON, David. Regime shifts: Implications for dynamic strategies (corrected). **Financial analysts journal**, Taylor & Francis, v. 68, n. 3, p. 22–39, 2012. DOI: 10.2469/faj.v68.n3.3.

KROKHMAL, Pavlo; URYASEV, Stan; ZRAZHEVSKY, Grigoriy. Numerical comparison of conditional value-at-risk and conditional drawdown-at-risk approaches: application to hedge funds. *In:* APPLICATIONS of stochastic programming. [*S. l.*]: SIAM, 2005. p. 609–631. DOI: 10.1137/1.9780898718799.ch2.

LEAL, Ricardo Pereira Câmara; MELO MENDES, Beatriz Vaz de. Maximum drawdown: models and applications. **The Journal of Alternative Investments**, v. 7, n. 4, p. 83–91, 2005.

LEDOIT, Oliver; WOLF, Michael. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, v. 15, n. 5, p. 850–859, 2008.

LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of empirical finance**, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003. DOI: 10.1016/S0927-5398(03)00007-0.

LEE, Stefan Colza; EID JUNIOR, William. Portfolio construction and risk management: theory versus practice. **RAUSP Management Journal**, SciELO Brasil, v. 53, p. 345–365, 2018. DOI: 10.1108/RAUSP-04-2018-009.

LEWIN, Marcelo; CAMPANI, Carlos Heitor. Estratégias restritas ótimas para investimentos baseados em fatores no mercado de ações brasileiro. **Revista Contabilidade & Finanças**, SciELO Brasil, v. 35, e2051, 2024. DOI: 10.1590/1808-057x20242051.pt.

_____. Gestão de Carteiras sob Múltiplos Regimes: Estratégias que Performam Acima do Mercado. **Revista de Administração Contemporânea**, SciELO Brasil, v. 24, p. 300–316, 2020. DOI: 10.1590/1982-7849rac2020190161.

LI, Xiaoyue; UYSAL, A Sinem; MULVEY, John M. Multi-period portfolio optimization using model predictive control with mean-variance and risk parity frameworks. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 299, n. 3, p. 1158–1176, 2022. DOI: 10.1016/j.ejor.2021.10.002.

LING, Aifan; SUN, Jie; WANG, Meihua. Robust multi-period portfolio selection based on downside risk with asymmetrically distributed uncertainty set. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 285, n. 1, p. 81–95, 2020. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.01.012.

LO, Andrew W. Adaptive markets and the new world order (corrected May 2012). **Financial Analysts Journal**, Taylor & Francis, v. 68, n. 2, p. 18–29, 2012. DOI: 10.2469/faj.v68.n2.6.

_____. Reconciling efficient markets with behavioral finance: the adaptive markets hypothesis. **Journal of investment consulting**, v. 7, n. 2, p. 21–44, 2005.

_____. The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004.

LONGERSTAEY, Jacques; SPENCER, Martin. Risk Metrics. **J.P.Morgan: New York**, v. 51, p. 54, 1996.

LOPEZ-IBANEZ, Manuel et al. The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. **Operations Research Perspectives**, Elsevier, v. 3, p. 43–58, 2016. DOI: 10.1016/j.orp.2016.09.002.

LORIMER, Douglas Austen; SCHALKWYK, Cornelis Hendrik van; SZCZYGIELSKI, Jan Jakub. Portfolio optimisation using alternative risk measures. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 67, p. 105758, 2024. DOI: 10.1016/j.frl.2024.105758.

MA, Feng et al. Volatility forecasting: long memory, regime switching and heteroscedasticity. **Applied Economics**, Taylor & Francis, v. 51, n. 38, p. 4151–4163, 2019. DOI: 10.1080/00036846.2019.1589645.

MACIEL, Leandro. Análise não-paramétrica para as estimativas de risco nos mercados de ações globais: Value-at-Risk, Expected Shortfall e medidas de risco espectrais. **Revista de Economia e Administraçao**, v. 10, n. 4, 2011.

MACLEAN, Leonard; YU, Lijun; ZHAO, Yonggan. A Generalized Entropy Approach to Portfolio Selection under a Hidden Markov Model. **Journal of Risk and Financial Management**, MDPI, v. 15, n. 8, p. 337, 2022. DOI: 10.3390/jrfm15080337.

MACLEAN, Leonard; ZHAO, Yonggan; ZHANG, Oufan. Mean-variance optimization with inferred regimes. **Annals of Operations Research**, Springer, p. 341–368, 2025. DOI: 10.1007/s10479-024-06267-z.

MAIER-PAAPE, Stanislaus; ZHU, Qiji Jim. A general framework for portfolio theory—Part I: Theory and various models. **Risks**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 2, p. 53, 2018. DOI: 10.3390/risks6020053.

MANGEE, Nicholas. Stock price swings and fundamentals: The role of Knightian uncertainty. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 91, p. 102987, 2024. DOI: 10.1016/j.irfa.2023.102987.

MANSINI, Renata; OGRYCZAK, Wlodzimierz; SPERANZA, M Grazia. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 518–535, 2014. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.08.035.

MANSINI, Renata; OGRYCZAK, Włodzimierz; SPERANZA, M Grazia. Portfolio optimization with transaction costs. *In:* LINEAR and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization. [*S. l.*]: Springer, 2015. p. 47–62. DOI: 10.1007/s10479-006-0145-1.

MARKOWITZ, Harry M. Foundations of portfolio theory. **The journal of finance**, v. 46, n. 2, p. 469–477, 1991. DOI: 10.2307/2328831.

_____. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, p. 77–91, 1952.

_____. **Portfolio selection: Efficient diversification of investments**. [*S. l.*]: John Wiley, 1959.

_____. Portfolio theory: as I still see it. **Annual Review of Financial Economics**, Annual Reviews, v. 2, n. 1, p. 1–23, 2010. DOI: 10.1146/annurev-financial-011110-134602.

MASALA, Giovanni; PETRONI, Filippo. Drawdown risk measures for asset portfolios with high frequency data. **Annals of Finance**, Springer, v. 19, n. 2, p. 265–289, 2023. DOI: 10.1007/s10436-022-00421-y.

MATOS, Getúlio Alves de Souza; IQUIAPAZA, Robert Aldo; FERREIRA, Bruno Pérez. Análise da exposição a perdas dos ETFs brasileiros conforme as técnicas de avaliação de risco

de mercado Value at Risk (VaR) e Expected Shortfall (ES). **BBR-Brazilian Business Review**, FUCAPE Business School, v. 11, n. 4, p. 91–115, 2014.

MAYNE, David Q et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality. **Automatica**, v. 36, n. 6, p. 789–814, 2000. DOI: 10.1016/S0005-1098(99)00214-9.

MEGARITIS, Anastasios; VLASTAKIS, Nikolaos; TRIANTAFYLLOU, Athanasios. Stock market volatility and jumps in times of uncertainty. **Journal of International Money and Finance**, Elsevier, v. 113, p. 102355, 2021. DOI: 10.1016/j.jimonfin.2021.102355.

MEI, Xiaoling; DEMIGUEL, Victor; NOGALES, Francisco J. Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 69, p. 108–120, 2016. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2016.04.002.

MEI, Xiaoling; NOGALES, Francisco J. Portfolio selection with proportional transaction costs and predictability. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 94, p. 131–151, 2018. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2018.07.012.

MEI, Xiaoling; ZHU, Huanjun; CHEN, Chongzhu. Mean-variance portfolio selection with estimation risk and transaction costs. **Applied Economics**, Taylor & Francis, p. 1–18, 2022. DOI: 10.1080/00036846.2022.2097191.

MENDES, Beatriz Vaz de Melo; LAVRADO, Rafael Coelho. Implementing and testing the Maximum Drawdown at Risk. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 22, p. 95–100, 2017. DOI: 10.1016/j.frl.2017.06.001.

MERTON, Robert C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. **The review of Economics and Statistics**, p. 247–257, 1969. DOI: 10.2307/1926560.

MICHAUD, Richard O. The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized'optimal? **Financial analysts journal**, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989. DOI: 10.2469/faj.v45.n1.31.

MÖLLER, Philipp M. Drawdown Measures and Return Moments. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, World Scientific, v. 21, n. 07, p. 1850042, 2018. DOI: 10.1142/S0219024918500425.

MORETTIN, Pedro Alberto; SINGER, Júlio da Motta. **Estatística e ciência de dados**. [*S. l.*]: LTC, 2022.

MOSSIN, Jan. Optimal multiperiod portfolio policies. **The Journal of Business**, v. 41, n. 2, p. 215–229, 1968.

MUSHIR, Nikhat; SURYAVANSHI, Ratan. Impact of COVID-19 on portfolio allocation decisions of individual investors. **Journal of public affairs**, Wiley Online Library, v. 21, n. 4, e2649, 2021. DOI: 10.1002/pa.2649.

NAWROCKI, David N. A brief history of downside risk measures. **The Journal of Investing**, v. 8, n. 3, p. 9–25, 1999.

NEFIN. **Metodologia NEFIN – Núcleo de Estudos em Finanças**. São Paulo, Brasil, 2017. Acessado em janeiro de 2025. Disponível em: https://nefin.com.br/resources/NEFIN_methodology.pdf.

NGUYEN, Nguyet; NGUYEN, Dung. Hidden markov model for stock selection. **Risks**, MDPI, v. 3, n. 4, p. 455–473, 2015. DOI: 10.3390/risks3040455.

NYSTRUP, Peter; MADSEN, Henrik; LINDSTRÖM, Erik. Dynamic portfolio optimization across hidden market regimes. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 83–95, 2018. DOI: 10.1080/14697688.2017.1342857.

NYSTRUP, Peter et al. Detecting change points in VIX and S&P 500: A new approach to dynamic asset allocation. **Journal of Asset Management**, Springer, v. 17, p. 361–374, 2016. DOI: 10.1057/jam.2016.12.

NYSTRUP, Peter et al. Multi-period portfolio selection with drawdown control. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 282, n. 1, p. 245–271, 2019. DOI: 10.1007/s10479-018-2947-3.

NYSTRUP, Peter et al. Regime-based versus static asset allocation: Letting the data speak. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 42, n. 1, p. 103–109, 2015. DOI: 10.3905/jpm.2015.42.1.103.

OLIVEIRA, Alan Delgado de; FILOMENA, Tiago Pascoal; RIGHI, Marcelo Brutti. Performance comparison of scenario-generation methods applied to a stochastic optimization asset-liability management model. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 38, p. 53–72, 2018. DOI: 10.1590/0101-7438.2018.038.01.0053.

OPRISOR, Razvan; KWON, Roy. Multi-period portfolio optimization with investor views under regime switching. **Journal of Risk and Financial Management**, MDPI, v. 14, n. 1, p. 3, 2021. DOI: 10.3390/jrfm14010003.

ORTOBELLI, Sergio et al. The proper use of risk measures in portfolio theory. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 8, n. 08, p. 1107–1133, 2005. DOI: 10.1142/S0219024905003402.

PENG, Cheng; KIM, Young Shin; MITTNIK, Stefan. Portfolio Optimization on Multivariate Regime-Switching GARCH Model with Normal Tempered Stable Innovation. **Journal of Risk and Financial Management**, MDPI, v. 15, n. 5, p. 230, 2022. DOI: 10.3390/jrfm15050230.

PFAFF, Bernhard. **Financial risk modelling and portfolio optimization with R**. [*S. l.*]: John Wiley & Sons, 2016.

PHAM, Huyen; WEI, Xiaoli; ZHOU, Chao. Portfolio diversification and model uncertainty: A robust dynamic mean-variance approach. **Mathematical Finance**, Wiley Online Library, v. 32, n. 1, p. 349–404, 2022. DOI: 10.1111/mafi.12320.

POSPISIL, Libor; VECER, Jan. Portfolio sensitivity to changes in the maximum and the maximum drawdown. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 10, n. 6, p. 617–627, 2010. DOI: 10.1080/14697680903008751.

PRIMBS, James A. Applications of MPC to finance. **Handbook of Model Predictive Control**, Springer, p. 665–685, 2019.

QIAN, Edward. Risk parity and diversification. **The Journal of Investing**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 20, n. 1, p. 119–127, 2011.

_____. **Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification**. [*S. l.*]: Panagora Asset Management, 2005.

RACHEV, Svetlozar et al. Desirable properties of an ideal risk measure in portfolio theory. **International Journal of Theoretical and Applied Finance**, v. 11, n. 01, p. 19–54, 2008. DOI: 10.1142/S0219024908004713.

RASIAH, Devinaga. Post-modern portfolio theory supports diversification in an investment portfolio to measure investment's performance. **Journal of Finance and Investment Analysis**, International Scientific Press, v. 1, n. 1, p. 69–91, 2012.

REVEIZ, Alejandro; LEÓN, Carlos. Efficient portfolio optimization in the wealth creation and maximum drawdown space. *In:* INTEREST Rate Models, Asset Allocation and Quantitative Techniques for Central Banks and Sovereign Wealth Funds. [*S. l.*]: Springer, 2010. p. 134–157. DOI: 10.1057/9780230251298_7.

RIGHI, Marcelo Brutti; BORENSTEIN, Denis. A simulation comparison of risk measures for portfolio optimization. **Finance Research Letters**, Elsevier, v. 24, p. 105–112, 2018. DOI: 10.1016/j.frl.2017.07.013.

RIGHI, Marcelo Brutti; CERETTA, Paulo Sergio. Teoria de medidas de risco: Uma revisão abrangente. **Revista Brasileira de Finanças**, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 12, n. 3, p. 411–464, 2014.

ROCKAFELLAR, R Tyrrell; URYASEV, Stanislav. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of banking & finance**, v. 26, n. 7, p. 1443–1471, 2002. DOI: 10.1016/S0378-4266(02)00271-6.

_____. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of risk**, v. 2, p. 21–42, 2000. DOI: https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038.

ROM, Brian M; FERGUSON, Kathleen W. Post-modern portfolio theory comes of age. **Journal of investing**, v. 3, n. 3, p. 11–17, 1994.

ROMAN, Diana; MITRA, Gautam. Portfolio selection models: a review and new directions. **The International Journal of Innovative Quantitative Finance Research**, Wiley Online Library, v. 1, n. 2, p. 69–85, 2009. DOI: 10.1002/wilj.4.

ROORDA, Berend; SCHUMACHER, Johannes M; ENGWERDA, Jacob. Coherent acceptability measures in multiperiod models. **Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics**, v. 15, n. 4, p. 589–612, 2005. DOI: 10.1111/j.1467-9965.2005.00252.x.

ROY, Andrew Donald. Safety first and the holding of assets. **Econometrica: Journal of the econometric society**, p. 431–449, 1952.

RUBINSTEIN, Mark. Markowitz's"portfolio selection": A fifty-year retrospective. **The Journal of finance**, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002.

S&P DOW JONES INDICES. **Metodologia do Índice S&P/B3 Ibovespa VIX**. Nova York, EUA, jul. 2024. Acessado em janeiro de 2025. Disponível em: https://www.spglobal.com/spdji/pt/methodology/article/sp-b3-ibovespa-vix-methodology-portuguese/.

SAMUELSON, Paul A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. **Stochastic optimization models in finance**, p. 517–524, 1975. DOI: 10.1016/B978-0-12-780850-5.50044-7.

SANTIAGO, Diogo Carneiro; LEAL, Ricardo Pereira Câmara. Carteiras igualmente ponderadas com poucas ações e o pequeno investidor. **Revista de Administração Contemporânea**, SciELO Brasil, v. 19, p. 544–564, 2015. DOI: 10.1590/1982-7849rac20151794.

SAVAEI, Elahe Sadat; ALINEZHAD, Esmaeil; EGHTESADIFARD, Mahmood. Stock portfolio optimization for risk-averse investors: A novel hybrid possibilistic and flexible robust approach. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 250, p. 123754, 2024. DOI: 10.1016/j.eswa.2024.123754.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.

_____. Mutual fund performance. **The Journal of business**, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

SMITH, Simon C; TIMMERMANN, Allan. Have risk premia vanished? **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 553–576, 2022. DOI: 10.1016/j.jfineco.2021.08.019.

SORTINO, Frank A; PRICE, Lee N. Performance measurement in a downside risk framework. **the Journal of Investing**, v. 3, n. 3, p. 59–64, 1994.

STADEN, Pieter M van; DANG, Duy-Minh; FORSYTH, Peter A. The surprising robustness of dynamic mean-variance portfolio optimization to model misspecification errors. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 289, n. 2, p. 774–792, 2021. DOI: 10.1016/j.ejor.2020.07.021.

SZCZYGIELSKI, Jan Jakub et al. The impact and role of COVID-19 uncertainty: A global industry analysis. **International Review of Financial Analysis**, Elsevier, v. 80, p. 101837, 2022. DOI: 10.1016/j.irfa.2021.101837.

SZEGÖ, Giorgio. Measures of risk. **Journal of Banking & finance**, v. 26, n. 7, p. 1253–1272, 2002. DOI: 10.1016/S0378-4266(02)00262-5.

TU, Jun. Is regime switching in stock returns important in portfolio decisions? **Management Science**, INFORMS, v. 56, n. 7, p. 1198–1215, 2010. DOI: 10.1287/mnsc.1100.1181.

TU, Jun; ZHOU, Guofu. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 204–215, 2011. DOI: 10.1016/j.jfineco.2010.08.013.

UYSAL, A Sinem; MULVEY, John M. A machine learning approach in regime-switching risk parity portfolios. **The Journal of Financial Data Science**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 3, n. 2, p. 87–108, 2021. DOI: 10.3905/jfds.2021.1.057.

VALLADÃO, Davi; SILVA, Thuener; POGGI, Marcus. Time-consistent risk-constrained dynamic portfolio optimization with transactional costs and time-dependent returns. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 282, n. 1, p. 379–405, 2019. DOI: 10.1007/s10479-018-2991-z.

VALLE, CA; MEADE, N; BEASLEY, JE. Absolute return portfolios. **Omega**, Elsevier, v. 45, p. 20–41, 2014. DOI: 10.1016/j.omega.2013.12.003.

VAN HEMERT, Otto et al. Drawdowns. **The Journal of Portfolio Management**, Portfolio Management Research, 2020. DOI: 10.3905/jpm.2020.1.170.

VISSER, Ingmar; SPEEKENBRINK, Maarten. depmixS4: An R Package for Hidden Markov Models. **Journal of Statistical Software**, v. 36, n. 7, p. 1–21, 2010. DOI: 10.18637/jss.v036.i07.

WANG, Matthew; LIN, Yi-Hong; MIKHELSON, Ilya. Regime-switching factor investing with hidden Markov models. **Journal of Risk and Financial Management**, MDPI, v. 13, n. 12, p. 311, 2020. DOI: 10.3390/jrfm13120311.

WOBBROCK, Jacob O et al. The aligned rank transform for nonparametric factorial analyses using only anova procedures. *In:* PROCEEDINGS of the SIGCHI conference on human factors in computing systems. [*S. l.: s. n.*], 2011. p. 143–146.

WOODSIDE-ORIAKHI, M; LUCAS, C; BEASLEY, John E. Portfolio rebalancing with an investment horizon and transaction costs. **Omega**, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 406–420, 2013. DOI: 10.1016/j.omega.2012.03.003.

WU, Huiling; LI, Zhongfei. Multi-period mean-variance portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time-horizon. **Journal of Systems Science and Complexity**, Springer, v. 24, n. 1, p. 140–155, 2011. DOI: 10.1007/s11424-011-9184-z.

ZHANG, Yuanyuan; LI, Xiang; GUO, Sini. Portfolio selection problems with Markowitz's mean–variance framework: a review of literature. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, Springer, v. 17, n. 2, p. 125–158, 2018. DOI: 10.1007/s10700-017-9266-z.

ZHOU, Ke et al. Dynamic mean–VaR portfolio selection in continuous time. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 17, n. 10, p. 1631–1643, 2017. DOI: 10.1080/14697688.2017.1298831.

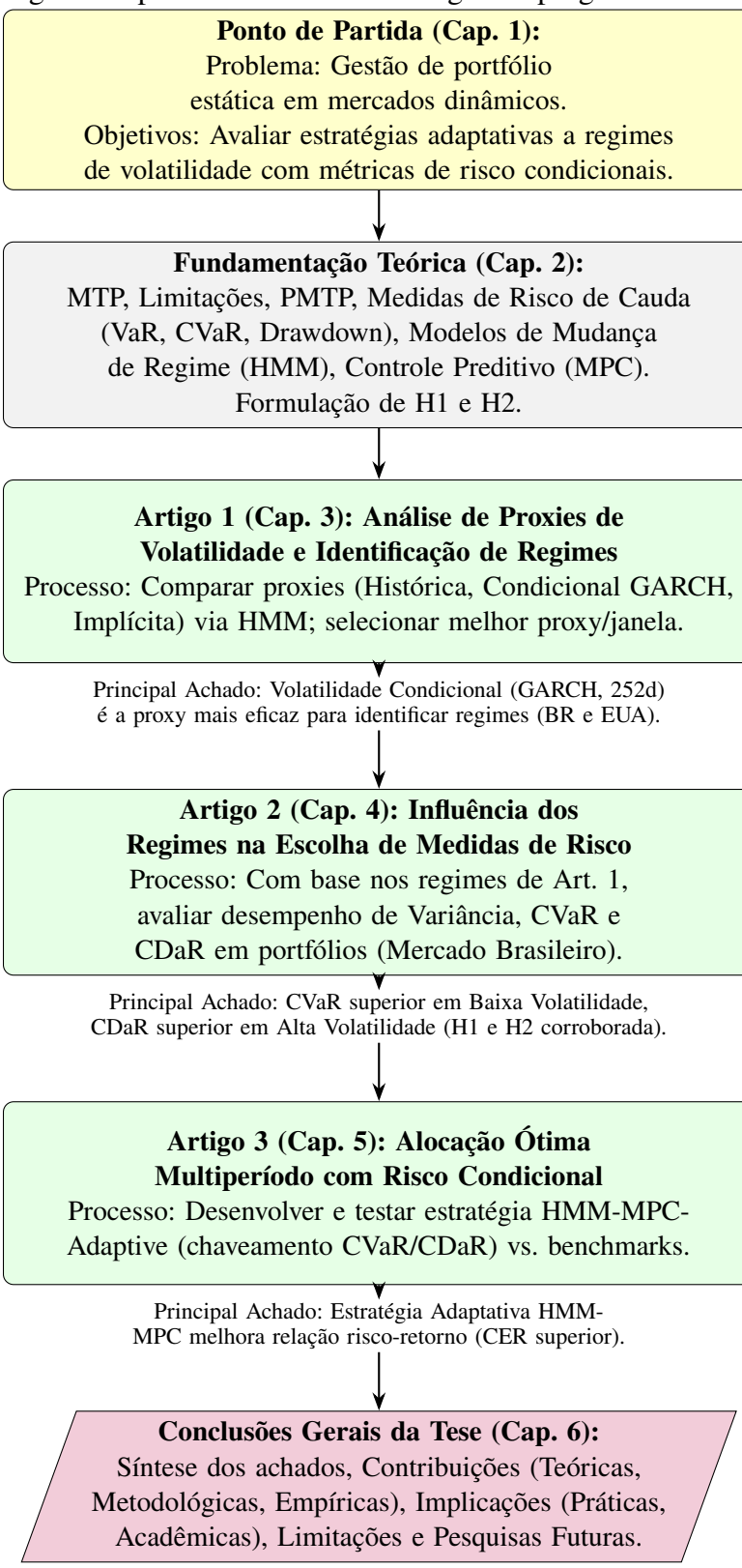
ZHU, Shushang et al. Hedging crash risk in optimal portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 119, p. 105905, 2020. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2020.105905.

ZUCCHINI, Walter; MACDONALD, Iain L. **Hidden Markov models for time series: an introduction using R**. [*S. l.*]: Chapman e Hall/CRC, 2009.

APÊNDICE A — Fluxogramas

Desenvolvimento da Tese

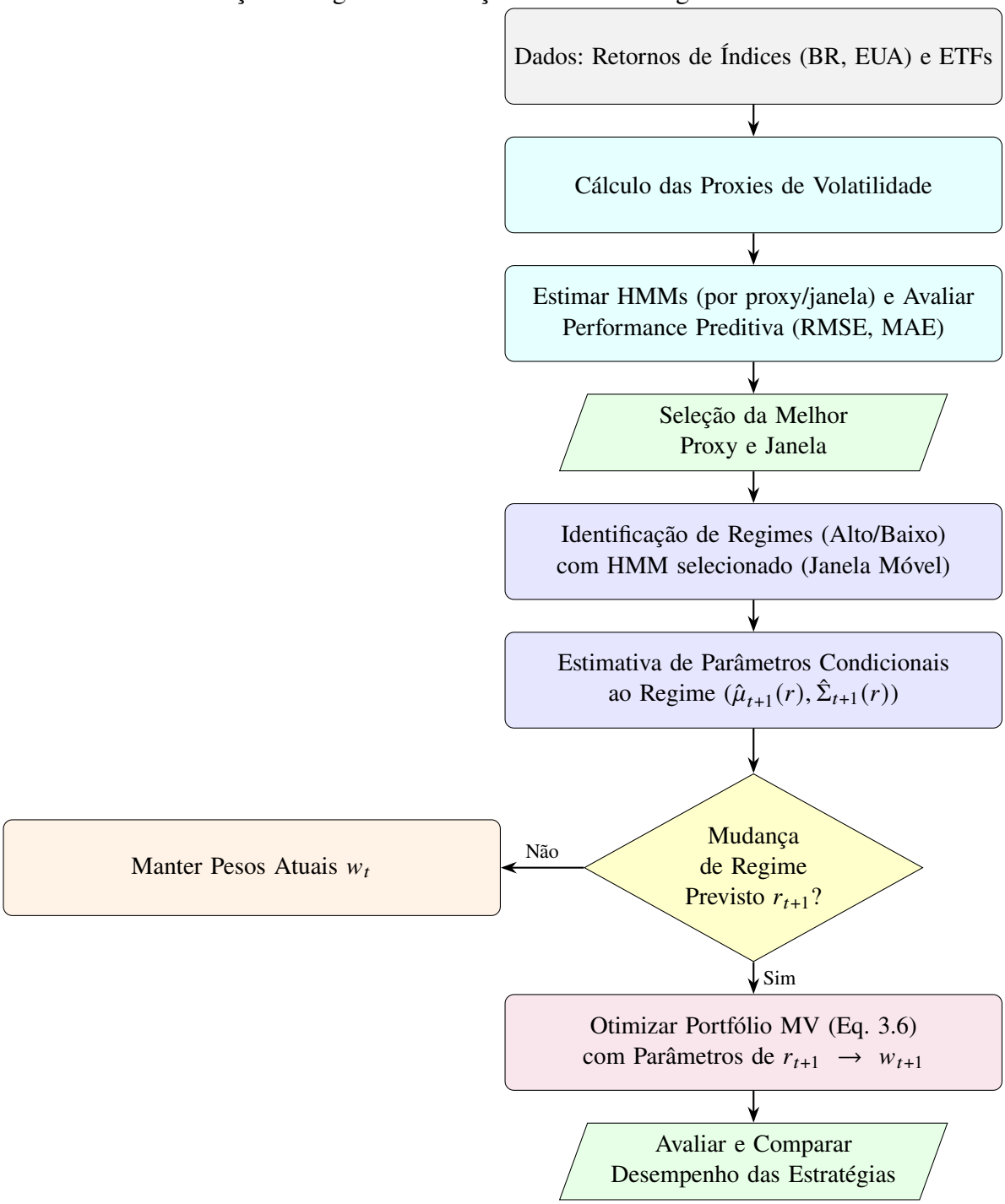
Figura A.1 – Fluxograma representativo da estrutura geral e progressão da tese.



Fonte: Elaboração própria.

Análise Comparativa de Proxies de Volatilidade e Alocação de Ativos Baseada em Regimes

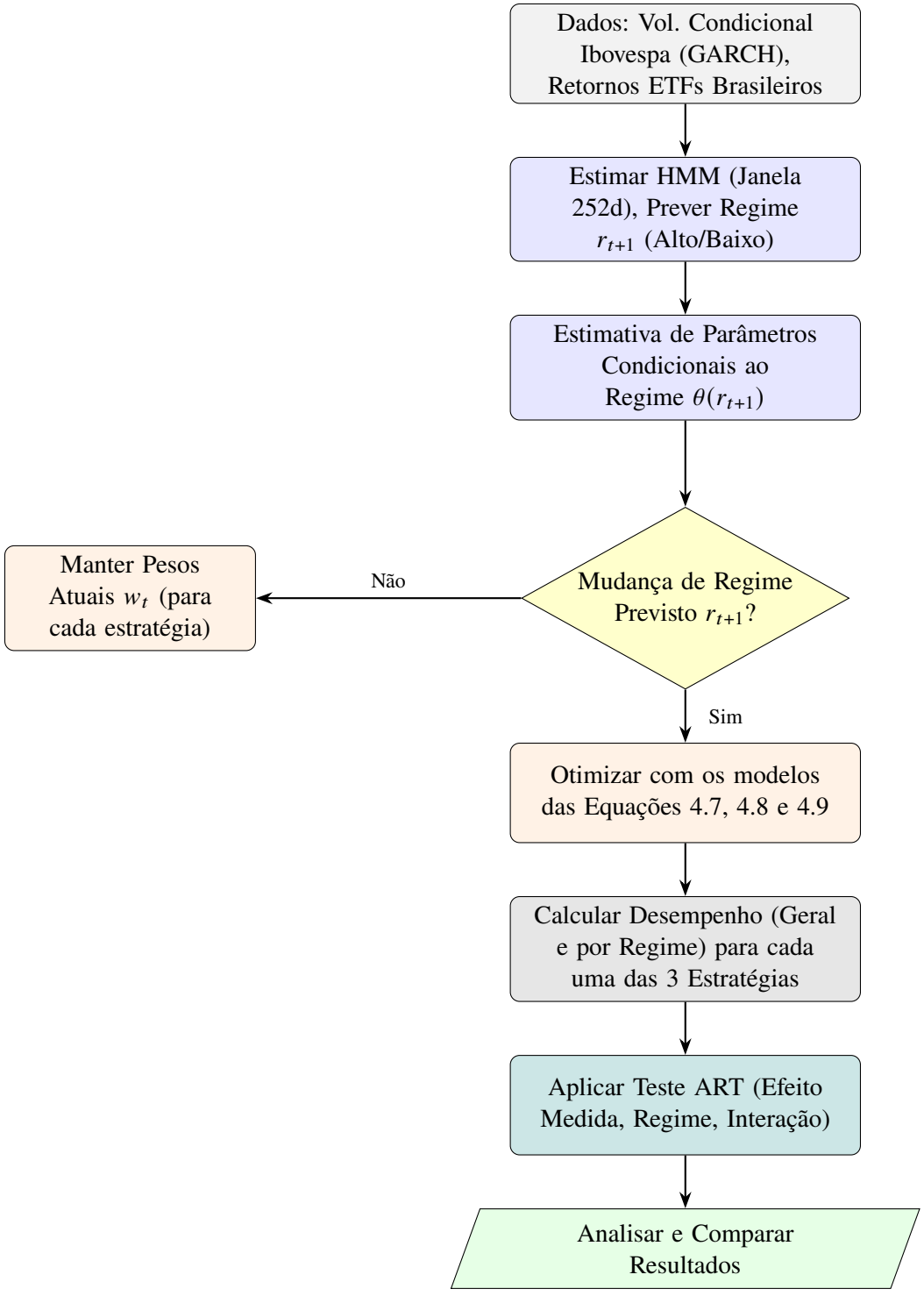
Figura A.2 – Fluxograma metodológico para o Artigo 1: Comparação de proxies de volatilidade, identificação de regimes e alocação baseada em regimes.



Fonte: Elaboração própria.

A Influência de Regimes de Volatilidade na Escolha de Medidas de Risco para Alocação Ótima de Portfólio

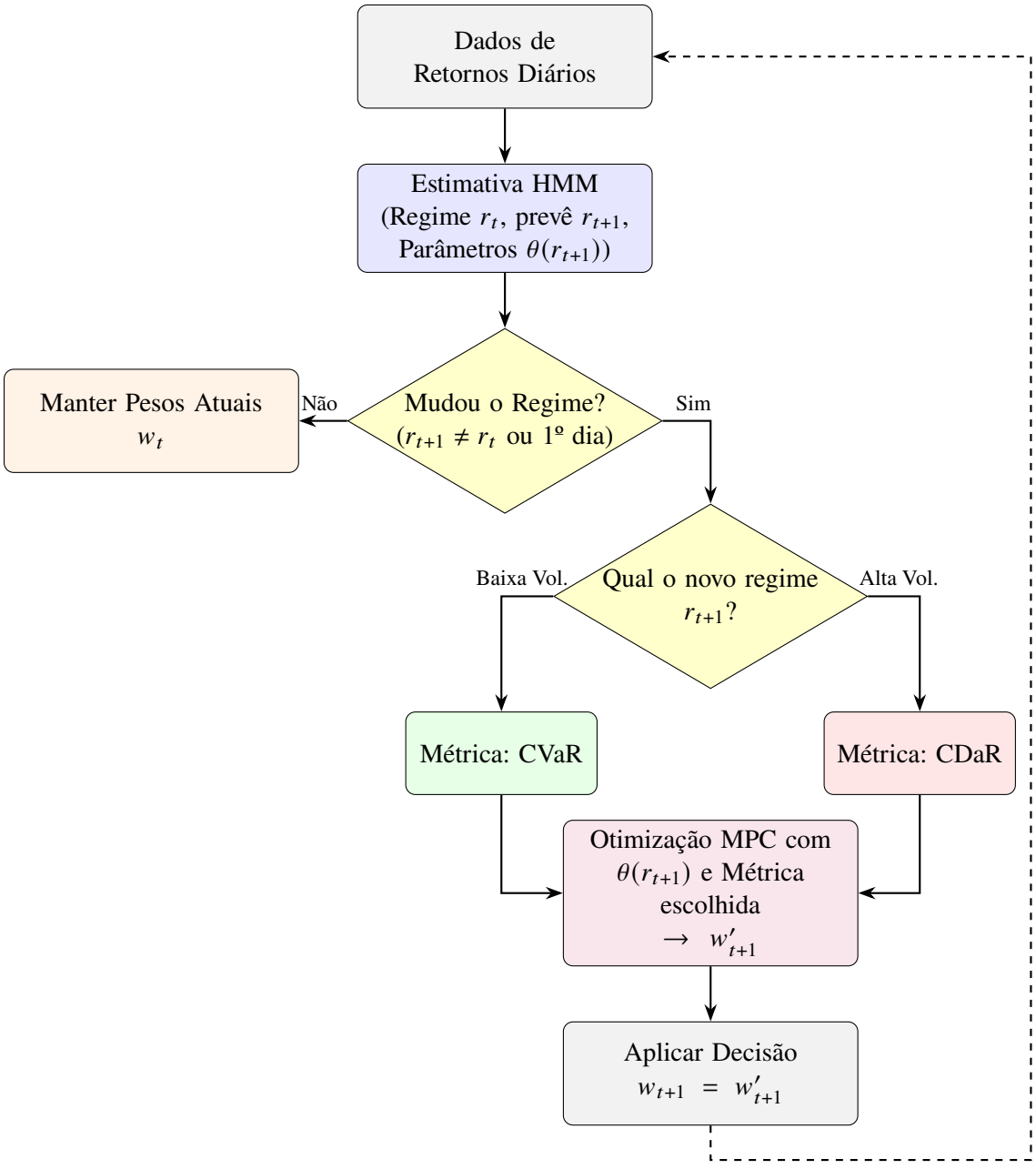
Figura A.3 – Fluxograma metodológico para o Artigo 2: Influência de regimes de volatilidade na escolha de medidas de risco.



Fonte: Elaboração própria.

Alocação ótima multiperíodo com risco condicional aos regimes de volatilidade

Figura A.4 – Fluxograma metodológico para o Artigo 3: Processo adaptativo



Nota: Os dados diários (d_t) alimentam a estimação do HMM, que prevê o regime futuro (r_{t+1}) e os parâmetros associados ($\theta(r_{t+1})$). Se for o primeiro dia de otimização ou se o regime previsto r_{t+1} diferir do regime anterior r_t, uma reotimização é acionada. A métrica de risco (CVaR para Baixa Volatilidade, CDaR para Alta Volatilidade) é selecionada com base em r_{t+1}. O MPC então calcula os novos pesos ótimos (w'_{t+1}), e os pesos para o próximo período são definidos como $w_{t+1} = w'_{t+1}$. Caso contrário (se o regime não mudou), os pesos são mantidos ($w_{t+1} = w_t$). Apenas a primeira decisão de alocação (w_{t+1}) é efetivamente implementada, e o ciclo reinicia com novos dados para o dia seguinte.
Fonte: Elaboração própria.

APÊNDICE B — Formulações Matemáticas

Modelos de Otimização

Seguindo a discussão sobre otimização baseada em informações de múltiplos períodos para a tomada de decisão no período corrente de (Boyd et al. 2017), temos o framework geral:

$$\max_{w_{t+1},\ldots,w_{t+H}} \sum_{\tau=t+1}^{t+H} \left(\hat{r}_{\tau|t}^{T} w_\tau - \lambda \psi_\tau(w_\tau) - \phi^{hold} \tau(w\tau) - \phi^{trade} \tau(w\tau - w_{\tau-1}) \right)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}^T w_\tau = 1 \\ & w_\tau - w_{\tau-1} \in \mathcal{Z}t \\ & w\tau \in \mathcal{W}_\tau \\ & \text{para } \tau = t+1, \ldots, t+H. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Em que as variáveis $w_{t+1}, \ldots, w_{t+H}$ são os vetores de pesos planejados sobre os H próximos períodos. $\hat{\mathbf{r}}_{\tau|t}$ corresponde aos retornos estimados no tempo t para o período futuro τ. Os termos ϕ^{trade} e ϕ^{hold} são os custos de transação e de manutenção, respectivamente. Os conjuntos $\mathcal{Z}_t$ e $\mathcal{W}_\tau$ representam as soluções viáveis para as negociações e para os pesos.

O modelo desenvolvido nos Capítulos 3 e 4 desta tese é uma especialização do modelo MPO de Boyd et al. (2017). Desconsiderando ϕ^{hold} e modelando o custo de transação como uma norma l_1, i.e, $\hat{\phi}_\tau^{trade}(\cdot) = \gamma^{trade} ||w_\tau - w_{\tau-1}||_1$,, tem-se:

$$\max_{w_{t+1},\ldots,w_{t+H}} \quad \sum_{\tau=t+1}^{t+H} \left(\hat{r}_{\tau|t}^{T} w_\tau - \lambda^{risk} \psi(w_\tau) - \gamma^{trade} ||w_\tau - w_{\tau-1}||_1 \right)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}^T w_\tau = 1, \\ & w_\tau \geq 0, \\ & \text{para } \tau = t+1, \ldots, t+H. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Onde λ^{risk} é o parâmetro de aversão ao risco e γ^{trade} é o parâmetro de custo de transação. Definidos com base na literatura para o estudo empírico do capitulo 3 e definidos pelo algoritmo IRACE no estudo epírico do capítulo 4.

O modelo desenvolvido no capítulo 5 estende o anterior, adicionando uma penalidade l_2 para concentração dos pesos na carteira e tornando a medida de risco condicional ao regime de volatilidade:

$$\max_{w_{t+1},\ldots,w_{t+H}} \sum_{\tau=t+1}^{t+H} \Big[\hat{r}_{\tau|t}^{T} w_\tau - \lambda\big(\theta_\tau C\hat{V}aR(w_\tau) + (1-\theta_\tau) C\hat{D}aR(w_\tau)\big) - \gamma||w_\tau - w_{\tau-1}||_1 - \beta||w_\tau||_2^2 \Big] \tag{B.3}$$

sujeito a:

$$\mathbf{1}^T w_\tau = 1,$$

$$w_\tau \geq 0,$$

para $\tau = t+1, \ldots, t+H$.

Onde $\theta_\tau \in \{0,1\}$ é uma variável binária que seleciona a medida de risco (CVaR ou CDaR) para cada período τ. Os parâmetros λ^{risk}, γ^{trade} e β são hiperparâmetros de penalização para o risco, custo de transação e concentração, respectivamente, e são otimizados via IRACE.

A seleção da medida de risco é baseada na previsão de regime de volatilidade. Dada a matriz de transição de estados $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1-a_{11} \\ 1-a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$, e o vetor de probabilidades de estado em t, $\hat{p}_t = [\hat{q}_t, 1-\hat{q}_t]^T$, a probabilidade de estado para um período futuro τ é dada por: $\hat{p}_{\tau|t} = A^{(\tau-t)}\hat{p}_t$

O estado previsto para o período τ, $S_{\tau|t}$, é determinado pela regra da máxima probabilidade:

$$(S_{\tau|t}) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (\hat{p}_{\tau|t})_1 > (\hat{p}_{\tau|t})_2 \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso, a variável de decisão do risco θ_τ é definida:

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{se } S_{\tau|t} = 1 (\text{Regime de baixa volatilidade}) \\ 0, & \text{se } S_{\tau|t} = 2 (\text{Regime de alta volatilidade}) \end{cases}$$

Formulações Linearizadas das Medidas de Risco

Conditional Value-at-Risk (CVaR)

A formulação linear para a minimização do CVaR, proposta por Rockafellar e Uryasev (2000, 2002), é:

$$C\hat{V}aR(\mathbf{w}) = \min_{\nu,\mathbf{u}} \quad \nu + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T} u_t$$

sujeito a

$$u_t \geq -r_t^\top \mathbf{w} - \nu, \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$u_t \geq 0, \quad \forall t$$

Onde:

- $\mathbf{w}$: vetor de pesos do portfólio.
- λ: coeficiente de aversão ao risco.
- r_t: vetor de retornos dos ativos no período t.
- T: número total de períodos na amostra histórica.
- ν: variável auxiliar que representa o *Value-at-Risk* (VaR).
- u_t: variável auxiliar que representa o excesso de perda em relação ao VaR no período t.
- α: nível de confiança.

Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR)

A formulação linear para a minimização do CDaR, proposta por Chekhlov, Uryasev e Zabarankin (2005), é:

$$\begin{aligned} \hat{CDaR}(\mathbf{w}) = \min_{\eta,\mathbf{z},\mathbf{V},\mathbf{M}} \quad & \eta + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T} z_t \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & V_t = V_{t-1} + \sum_{j=1}^{N} r_{tj} w_j, \quad \forall t = 1,\ldots,T \text{ (com } V_0 = 0) \\ & M_t = \max(M_{t-1}, V_t), \quad \forall t = 1,\ldots,T \text{ (com } M_0 = 0) \\ & D_t = M_t - V_t, \quad \forall t = 1,\ldots,T \\ & z_t \geq D_t - \eta, \quad \forall t = 1,\ldots,T \\ & z_t \geq 0, \quad \forall t \end{aligned}$$

Onde:

- $\mathbf{w}$: vetor de pesos do portfólio.
- λ: coeficiente de aversão ao risco.
- r_t: vetor de retornos dos ativos no período t.
- T: número total de períodos na amostra histórica.
- V_t: valor acumulado do portfólio no tempo t.
- M_t: valor máximo do portfólio até o tempo t (*high-water mark*).
- D_t: *drawdown* do portfólio no tempo t.
- η: variável auxiliar que representa o limiar de queda (Similar ao *Value-at-Risk* - VaR).
- z_t: variável auxiliar que representa o excesso de perda em relação limiar η no período t.
- α: nível de confiança.