

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

André Eurico de Moraes

**Controle Realimentado de Admissões nas Diferentes
Etapas de Um Ciclo de Vacinação Via Álgebra Tropical**

Belo Horizonte
2022

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**CONTROLE REALIMENTADO DE ADMISSÕES NAS
DIFERENTES ETAPAS DE UM CICLO DE VACINAÇÃO VIA
ÁLGEBRA TROPICAL**

André Eurico de Moraes

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Carlos Andrey Maia

Belo Horizonte - MG

Julho de 2022

M827c

Morais, André Eurico de.

Controle realimentado de admissões nas diferentes etapas de um ciclo de vacinação via álgebra tropical [recurso eletrônico] / André Eurico de Moraes. - 2022.

1 recurso online (72 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Carlos Andrey Maia.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 72-74.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Modelagem - Teses. 3. Redes de petri - Teses. 4. Álgebra tropical - Teses. I. Maia, Carlos Andrey. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"CONTROLE REALIMENTADO DE ADMISSÕES NAS DIFERENTES ETAPAS DE UM CICLO DE VACINAÇÃO VIA ÁLGEBRA TROPICAL"

ANDRÉ EURICO DE MORAIS

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica. Aprovada em 29 de julho de 2022. Por:

Prof. Dr. Carlos Andrey Maia
DEE (UFMG)

Prof. Dr. Vinícius Mariano Gonçalves
DEE (UFMG)

Prof. Dr. Adriano Chaves Lisboa
(Gaia)

Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha
DEE (UFMG)



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Andrey Maia, Professor do Magistério Superior**, em 29/07/2022, às 17:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1636337** e o código CRC **25ADDA02**.

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu pai, ambos em memória. Estão comigo, estão em mim, e estarão até o último momento.

Agradecimentos

Carrego a convicção de que nenhum trabalho, por mais primitivo que possa parecer, poderá ser levado a cabo sem a ajuda direta ou indireta de alguém. Por isso, faço questão de utilizar esse espaço para manifestar minha gratidão a tantas pessoas que me ajudaram nessa pequena (e acidentada) jornada.

Primeiramente, agradeço de maneira muito especial ao Dr. Carlos Andrey Maia, um professor e pesquisador absolutamente dedicado e competente, que muito generosamente aceitou a tarefa de me orientar. Além de seu conhecimento, seu amor pelas ciências e pela humanidade naquilo que ela tem de melhor me inspiraram e entusiasmaram em cada uma das nossas conversas. Um grande privilégio poder contar com a sua parceria.

Agradeço às minhas irmãs, ao meu irmão e demais familiares, meus esteios emocionais.

Agradeço ao meu amigo/irmão Adriano, que abriu sua casa para mim quando, na pandemia, meu quarto se tornou um “lugarzinho” insuportável.

À Cíntia, pelo afago carinhoso e gentil quando precisei.

À Shirléa, minha primeira psicoterapeuta, por ter me trazido de volta à Terra quando eu estava no espaço.

Aos servidores da UFMG, especialmente os técnicos do PPGEE, que me atenderam com solicitude e competência quando precisei.

Aos professores das disciplinas que cursei. Enriqueceram grandemente a minha experiência no PPGEE.

A todos e todas, incluindo os que porventura eu tenha esquecido, minha sincera gratidão.

Resumo

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento de um modelo gráfico/matemático para um centro de vacinação genérico. Um dos objetivos é criar uma ferramenta capaz de capturar as principais características desse tipo de sistema, permitindo analisar e entender melhor seu comportamento sob condições críticas. Um segundo objetivo é possibilitar o projeto de um controlador capaz de restringir o comportamento do centro de vacinação com vistas ao atendimento dos protocolos de saúde pertinentes, ao mesmo tempo em que garante o melhor desempenho possível em termos de taxa de vacinação. O modelo é desenvolvido por meio de redes de Petri. Especificamente, o centro é modelado como um grafo de eventos temporizados. O seu comportamento é matematicamente descrito com o auxílio das ferramentas disponibilizadas pela álgebra tropical. A partir do modelo, é feito um projeto de um sistema de controle. É mostrado que uma etapa importante deste processo consiste na causalização da matriz de controle inicialmente obtida. Dois métodos de causalização são analisados e uma pequena contribuição teórica a um dos métodos é oferecida. Os resultados obtidos por meio de simulação corroboram as conclusões tiradas durante a análise e atestam o potencial benefício da utilização do modelo discutido aqui no aprimoramento do funcionamento dos centros de vacinação.

Palavras-chave: Modelo, Centro de vacinação, Redes de Petri, Álgebra Tropical.

Abstract

This Master's dissertation presents the development of a model for a vaccination center. The first goal is to provide a model that captures the main characteristics of the center dynamics, allowing a better understanding of its behavior under critical conditions. A second goal is to use the model for designing a controller capable of restricting users admissions to the different stages of the center's operation in order to meet the requirements of social distancing protocols issued by sanitary authorities due to Covid pandemic. At the same time, the controller is expected to minimize users' waiting time while keeping the center's vaccination rate as high as possible. The vaccination center is modelled as a Petri's net. Specifically, it is modelled as a timed event graph. The tropical algebra toolbox is used to describe its behavior mathematically. Once the model is developed, it is used to design the controller. It is shown that the causalization of the control matrix is a critical step for the controller design. Two methods for causalization are discussed and a small theoretical contribution is given to one of them. The system is then simulated and it is shown that the results confirm the theoretical predictions, attesting the potential benefit of utilizing the model developed here to improve vaccination center's operation.

Keywords: Discrete event modeling and simulation, Petri's nets, Tropical algebra, Event-based control, Queuing systems and performance model.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Trecho de uma linha de montagem	21
Figura 2.2 – Representação de uma fila	23
Figura 2.3 – 1º exemplo de uma rede de Petri	24
Figura 2.4 – Exemplo de disparos em uma rede de Petri	24
Figura 2.5 – 2º exemplo de uma rede de Petri	25
Figura 2.6 – 3º exemplo de uma rede de Petri	26
Figura 2.7 – Rede de Petri T-temporizada	26
Figura 2.8 – Rede de Petri P-temporizada	27
Figura 2.9 – Representação de concorrência e sincronização	28
Figura 2.10–1º exemplo de grafos	36
Figura 2.11–2º exemplo de grafos	38
Figura 2.12–3º exemplo de grafos	39
Figura 3.1 – Rede de Petri do centro de vacinação	44
Figura 3.2 – Sequência crítica de disparos de x_3 e x_4	52
Figura 4.1 – Instância do modelo simulada	61
Figura 4.2 – N_E em função de t para o sistema em malha aberta	63
Figura 4.3 – t_E em função de k para o sistema em malha aberta	64
Figura 4.4 – Sistema em malha fechada com F_{nc} causalizada por paralelismo	65
Figura 4.5 – Sistema em malha fechada com F_{op}	67
Figura 4.6 – N_E em função de t para o sistema em malha fechada cm F_{opt}	68
Figura 4.7 – t_E em função de k para o sistema em malha fechada cm F_{opt}	69

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Disparos das transições do sistema em malha aberta	63
Tabela 4.2 – Disparos das transições do sistema em malha fecha com F_c	66
Tabela 4.3 – Disparos das transições do sistema em malha fecha com F_{opt}	68

Lista de abreviaturas e siglas

SDVC	Sistema dinâmico a variável contínua
SDED	Sistema dinâmico a eventos discretos
SED	Sistema a eventos discretos
GET	Grafo de eventos temporizados
SISO	<i>Single Input, Single Output</i>
MIMO	<i>Multiple Inputs, Multiple Outputs</i>

Lista de símbolos

\exists	Existe
\in	Pertence
\forall	Para todo
λ	Autovalor
\oplus	Soma tropical
\otimes	Multiplicação tropical
$\bar{0}$	Elemento neutro da soma tropical
$\bar{1}$	Elemento neutro da multiplicação tropical
\bigoplus	Somatório tropical
\oslash	Residuação à esquerda
\oslash	Residuação à direita
\ominus	Residuação dual
*	Estrela de Kleene
\Rightarrow	Implica em
\circ	Composição de funções
\wedge	Maior limite inferior da matriz
Im	Imagem
A^T	Transposta da matriz A
$b^{\otimes n}$	Exponenciação tropical do número b
$x(p_i)$	Número de fichas no lugar p_i
$x_i(k)$	Data do k -ésimo disparo da transição x
\leftarrow	Recebe

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Apresentação	15
1.2	Natureza do modelo buscado	17
1.3	Revisão da Literatura	18
1.4	Objetivos	19
1.4.1	Objetivo Geral	19
1.4.2	Objetivos específicos	19
1.5	Organização da dissertação	20
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	21
2.1	Sistemas a Eventos Discretos	21
2.2	Redes de Petri	23
2.2.1	Redes de Petri Temporizadas	25
2.2.1.1	Redes de Petri T-temporizadas	26
2.2.1.2	Redes de Petri P-temporizadas	27
2.2.2	Grafos de Eventos Temporizados	27
2.3	Álgebra Tropical	28
2.3.1	Propriedades	28
2.3.2	Matrizes na álgebra tropical	30
2.3.3	Residuação	32
2.4	Grafos	36
2.4.1	Grafos e matrizes	38
2.5	Descrição matemática de um sistema modelado via redes de Petri	41
2.5.1	Modelagem de redes de Petri P-temporizadas	41
3	MODELAGEM E CONTROLE DE UM CENTRO DE VACINAÇÃO	44
3.1	Descrição do centro de vacinação	44
3.1.1	Restrições impostas ao funcionamento do centro de vacinação	46
3.2	Modelo do centro de vacinação em álgebra tropical	46
3.3	Controle em malha fechada do centro de vacinação	51
3.3.1	Restrições de ocupação e tempo de espera	51
3.3.2	Projeto do controlador	54
3.3.2.1	Determinação da matriz de controle	54
3.3.2.2	Causalização da matriz de controle por meio de paralelismo	56

3.3.2.3	Causalização da matriz de controle mantendo o mesmo autovalor gerado por F_{nc}	56
4	RESULTADOS SIMULADOS	61
4.1	Simulação do sistema em malha aberta	62
4.2	Simulação do sistema em malha fechada com a matriz de controle determinada por meio de paralelismo	64
4.3	Simulação do sistema em malha fechada com a matriz de controle causalizada pelo método da seção 3.3.2.3	66
5	CONCLUSÕES	70
5.1	Trabalhos futuros	70
	REFERÊNCIAS	72

1 Introdução

1.1 Apresentação

O advento da pandemia de COVID-19, declarada no início do ano de 2020, trouxe à tona as enormes dificuldades que os sistemas de saúde ao redor do mundo podem ter que enfrentar durante uma crise sanitária de grandes proporções. No caso específico da COVID-19, uma doença altamente contagiosa, em um primeiro momento, hospitais e centros de atendimento se viram frente ao desafio de cuidarem de um número de pacientes muito acima de suas capacidades máximas estipuladas. Poucos meses após o descobrimento do vírus SARS-Cov2, lotação de unidades de tratamento intensivo com consequente falta de leitos, falta de insumos, como oxigênio e equipamentos de proteção individual para os trabalhadores da saúde, foram reportados no Brasil [Alves 2021] e em outros países do mundo [Sen-Crowe et al. 2021] [Ranney, Griffeth e Jha 2020]. Serviços de atendimento de emergência experimentaram picos de ligações e problemas para determinar o nível de gravidade de cada caso, o que gerou dificuldade no direcionamento de veículos de resgate.

Após o surgimento de vacinas eficazes, os mesmos sistemas tiveram que lidar com um outro desafio de mesma proporção: o de vacinar de maneira ágil populações contadas aos milhões. A corrida de verdadeiras multidões aos centros de vacinação em busca das primeiras doses disponibilizadas colocou muitas daquelas estruturas sob pressão, o que em muitos casos levou a descoordenação interna, longas filas de espera, aglomeração e outros eventos indesejáveis.

Com o objetivo de colaborar com trabalhadores e gestores dos sistemas de saúde no enfrentamento da pandemia, especialistas em ciência, tecnologia, matemática e engenharia vêm trabalhando na pesquisa e desenvolvimento de modelos e sistemas capazes de introduzir melhoras significativas na dinâmica de funcionamento das unidades responsáveis pelo tratamento de pessoas afetadas pelo vírus, bem como na gestão do sistema como um todo. Desde as primeiras semanas, matemáticos apresentaram modelos capazes de caracterizar diferentes fases do processo de transmissão do vírus entre populações [Padmanabhan et al. 2021], o que orientou a adoção de algumas medidas importantes como fechamento de fronteiras, *lockdowns*, ampliação de estruturas de hospitais, dentre outras. Gaubert et al. 2020, por exemplo, apresentou um modelo desenvolvido e testado já em março de 2020 e que se mostrou capaz de antecipar a evolução dos casos de contaminação da população parisiense com base no número de ligações para o serviço de emergência da região e correspondente despacho de veículos de atendimento. Garaix et al. 2022 reporta quatro outras iniciativas em que especialistas da *École Polytechnique* atuaram em parceria com trabalhadores da linha de frente do sistema de saúde francês no desenvolvimento de

sistemas dedicados a aprimorar o funcionamento das estruturas de atendimento daquela região. Em um deles, um modelo baseado em redes de Petri foi desenvolvido para antecipar o tamanho da equipe médica necessária para atender à demanda do centro de chamadas de emergência de Paris [Allamigeon, Boyet e Gaubert 2021]. Em outro, um sistema de monitoramento de leitos disponíveis em unidades de tratamento intensivo, alimentado com informações introduzidas em tempo real pelos trabalhadores da saúde por meio de um aplicativo, foi desenvolvido [ICUBAM et al. 2020]. Ainda em 2020, Schaar et al. 2021 indicou como a inteligência artificial e aprendizagem de máquina poderiam ajudar no gerenciamento dos limitados recursos das instituições de saúde, no desenvolvimento de um tratamento personalizado para cada paciente, na melhoria do trabalho em equipe desenvolvido pelos trabalhadores da saúde e no aumento da efetividade e eficiência de testes clínicos.

No que diz respeito aos problemas observados no processo de vacinação da população, é seguro afirmar que muitos deles poderiam ser evitados, ou ao menos mitigados, através de um melhor entendimento da dinâmica dos centros de aplicação de vacinas. Uma agenda de vacinação mais eficaz, por exemplo, poderia ser criada levando-se em conta o período mínimo necessário para um determinado usuário passar por todas as fases do ciclo de vacinação. É possível pensar em um sistema baseado em aplicativo para *smartphones* capaz de direcionar e coordenar a chegada de usuários aos diferentes postos de vacinação, que funcione com base em informações coletadas em cadastro prévio feito pelos usuários interessados na vacina, de forma que cada usuário espere o mínimo necessário, evitando-se ao mesmo tempo aglomerações nos espaços físicos dos postos de vacinação. Curiosamente, dada a evidente pertinência e importância de um estudo sobre essas estruturas, uma busca por trabalhos relacionados ao tema realizada nas principais bases de artigos de engenharia (Elsevier Science Direct e IEEE Xplore bases) não retornou nenhum resultado. Também não foi encontrado nada sobre o tema em nenhum livro.

O trabalho relatado nesta dissertação consiste, em parte, no desenvolvimento de um modelo para um centro de vacinação elementar. O modelo deve ser capaz de capturar a dinâmica do processo de vacinação em função de parâmetros ligados à estrutura do centro, como número de terminais de vacinação, terminais de triagem, etc, e fornecer figuras de desempenho, como o mínimo período de vacinação.

Uma vez desenvolvido o modelo, é possível projetar um controlador que imponha restrições ao funcionamento do centro, a fim de atender a especificações previamente estabelecidas. A segunda parte do trabalho relatado aqui consiste no projeto de um sistema de controle realimentado que limite o tempo de espera dos usuários e o número de pessoas nas dependências do centro.

1.2 Natureza do modelo buscado

A primeira questão que surge na busca por um modelo de um sistema qualquer diz respeito ao tipo de representação que melhor descreve os fenômenos de interesse relacionados ao seu comportamento. Segundo o *IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms* [Stiglitz e Blanchard 1992], um sistema é "uma combinação de componentes que atuam em conjunto para a realização de uma função que não seria realizável por nenhuma das partes individuais". Essa é uma definição genérica, que abarca sistemas com características muito diferentes entre si. A principal diferença que interessa ao trabalho aqui proposto é aquela que diz respeito à forma como o sistema evolui de um estado para outro. Especificamente, o que determina a transição de estados no sistema. Os sistemas dinâmicos que obedecem às leis da natureza, tipicamente descritos por equações diferenciais, têm, em geral, estados que evoluem continuamente com o tempo à medida que algum processo de transferência de energia ocorre. Por isso, são exemplos do que se classifica como Sistemas Dinâmicos a Variável Contínua (SDVC) [Cassandras e Lafortune 2008].

Os chamados Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos (SDED) comportam-se de maneira diferente [Cassandras e Lafortune 2008]. Embora sejam também dinâmicos, possuem estados cuja evolução acontece de maneira discreta, determinadas por eventos específicos. Intuitivamente é fácil perceber que uma linha de produção de um sistema de manufatura, por exemplo, é melhor descrita como um SDED. Em tal linha de produção, o que marca as mudanças importantes em seu estado de funcionamento são eventos como a admissão de uma peça à máquina X, ou o término de processamento pela máquina Y, não a passagem do tempo. Fazer a descrição de tal linha como um SDVC seria uma escolha muito mais trabalhosa e ineficaz. Um sistema de filas de atendimento bancário por meio de caixas é outro exemplo. O que faz mudar o estado do sistema são eventos que não são determinados pelo tempo, como a admissão de um cliente a um determinado caixa, ou a chegada de um cliente à fila. Da mesma forma, é evidente que o centro de vacinação também pode ser convenientemente modelado como um SDED. A chegada de um usuário ao centro, sua admissão às diferentes etapas do ciclo de vacinação até sua saída das instalações são eventos que marcam mudanças no estado do sistema.

O formalismo gráfico/matemático comumente utilizado para descrever SDED's inclui autômatos, redes de Petri, grafos, cadeias de Markov, álgebra tropical, dentre outros [Cassandras e Lafortune 2008]. No presente trabalho, busca-se modelar o centro de vacinação como um SDED e descrevê-lo utilizando Grafos de Eventos Temporizados (GET), uma subclasse das redes de Petri P-temporizadas, cujos lugares apresentam somente uma transição de entrada e uma de saída [Baccelli et al. 1992]. GET são particularmente úteis na descrição do comportamento dinâmico de sistemas cuja movimentação de elementos está condicionada à sincronização de eventos, como o caso do centro de vacinação con-

siderado aqui. Uma característica peculiar dos GET é o fato de seu modelo dinâmico, que nos permite computar iterativamente os instantes das mudanças dos estados, ser descrito completamente utilizando somente os operadores de maximização e de soma. Conseqüentemente, podemos utilizar uma formulação em álgebra tropical para descrever esse comportamento matematicamente.

1.3 Revisão da Literatura

Embora não tenha sido encontrado na literatura nenhum modelo de centros de vacinação, há exemplos de outros sistemas modelados como GET que se valem da álgebra tropical para uma descrição matemática formal.

Há que se observar, entretanto, que mesmo esses exemplos são recentes. A própria álgebra tropical, que recebe esse nome em homenagem ao matemático húngaro-brasileiro Imre Simon, é relativamente nova. Foi de 1972 a 2002 que Simon dedicou-se a pesquisar o tema e logrou provar teoremas e resultados considerados seminais pela comunidade científica [Pin 2019]. As redes de Petri foram introduzidas em 1962 por Carl Adam Petri em sua dissertação submetida ao Departamento de Matemática e Física da Universidade Técnica de Darmstadt, na antiga Alemanha Ocidental. Em um artigo de 1989, Murata 1989 classifica as redes de Petri como “uma ferramenta promissora” para descrever e estudar sistemas como o que é considerado aqui.

Dentre os trabalhos relevantes que conjugam os temas GET e álgebra tropical, Maia et al. 2003 trata dos problemas de identificação paramétrica e controle de sistemas a eventos discretos modelados como grafos de eventos temporizados. Neste trabalho, o autor propõe um algoritmo para identificação dos parâmetros de um GET SISO - *Single Input, Single Output* - e um método de controle baseado em retroalimentação.

Katz 2007 produziu um trabalho influente ao estender o conceito de espaço (A,B) -invariante, aplicável a sistemas dinâmicos lineares no contexto da álgebra convencional, para os sistemas lineares no contexto da álgebra tropical.

Maia, Andrade e Hardouin 2011, aprimora o trabalho de Katz 2007 ao apresentar um método mais simples de cálculo da matriz de controle em um sistema realimentado. Este, por sinal, é extensivamente usado no trabalho apresentado aqui.

Dias 2014 e propõe dois métodos de controle para sistemas MIMO - *Multiple Inputs, Multiple Outputs* - modelados como GET, descritos matematicamente por equações recursivas em álgebra tropical. O primeiro trata do cálculo de um controlador de realimentação para controlar o fluxo de entrada. O segundo trata do problema de sincronização dos disparos entre as transições internas do sistema.

Gonçalves, Maia e Hardouin 2015 investiga uma generalização do problema de con-

trole de um GET submetido a restrições no contexto da álgebra tropical. Especificamente, dada uma representação do GET em espaço de estados, busca-se projetar um controlador capaz de forçar restrições do tipo $Ex = Dx$, onde x representa o estado do sistema. No trabalho em questão, os autores introduzem dois algoritmos para o projeto do controlador, denominados *Sincronizador Periódico* e *Realimentação Otimizada de Chebyshev*, ambos com custo computacional baixo (complexidade polinomial e pseudo-polinomial, respectivamente) e bom desempenho em geral. É demonstrado que o primeiro algoritmo apresenta estabilidade assintótica, isto é, o sistema controlado converge para conjunto de estados desejado em um número finito de passos, enquanto para o segundo é garantida estabilidade de Lyapunov.

Posteriormente, em [Gonçalves, Maia e Hardouin 2017](#), os autores voltam à formulação geral do problema de controle considerado no trabalho anterior para tratar do problema da regulação. São estabelecidas as condições necessárias e suficientes para a convergência de uma ampla classe de problemas de regulação de GET no contexto da álgebra tropical. Os resultados deste trabalho são particularmente interessantes, pois determinam também parâmetros de robustez para sistemas max-plus controlados.

[\[Guimarães et al. 2020\]](#) propões dois outros métodos de síntese de controladores para sistemas lineares realimentados modelados como GET. Um sistema logístico responsável pelo transporte de matéria prima e mercadoria é considerado no trabalho. No primeiro método, o controlador é projetado de maneira a não gerar acúmulo de peças no sistema ao mesmo tempo em que restrições operacionais são atendidas. O segundo método apresenta uma metodologia de projeto de controladores que levam o sistema a implementar a política “just-in-time”.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo do trabalho descrito nesta dissertação é desenvolver um modelo básico de um centro de vacinação, investigar sua dinâmica de funcionamento e projetar um sistema de controle realimentado capaz de garantir o um desempenho tão bom quanto possível. Embora o trabalho seja motivado pelo interesse em um tipo particular de sistema, sua estrutura pode ser generalizada e os resultados a aplicados outros sistemas de estrutura similar.

1.4.2 Objetivos específicos

- Desenvolver um modelo em álgebra tropical de um centro de vacinação;

- Analisar as figuras de desempenho do centro, especificamente sua taxa de vacinação, funcionando em malha aberta;
- Projetar um sistema de controle em malha fechada capaz de impor restrições ao funcionamento do centro, especificamente, de limitar o tempo de espera de cada usuário e o número de pessoas em cada sala, ao mesmo tempo em que garante uma taxa de vacinação tão alta quanto possível.

1.5 Organização da dissertação

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira: no **capítulo 1** é apresentada a motivação do trabalho e algumas características básicas do sistema considerado são discutidas. Uma revisão da literatura também é feita. No **capítulo 2** são apresentadas as bases formais para a elaboração do modelo do centro de vacinação, bem como para o projeto do sistema de controle realimentado. Em particular, são discutidos princípios básicos da álgebra tropical e alguns resultados sobre redes de Petri são fornecidos. No **capítulo 3** é feito o desenvolvimento do modelo do centro de vacinação e o projeto do sistema de controle. O **capítulo 4** apresenta alguns resultados numéricos produzidos por meio de simulação. O **capítulo 5** apresenta as conclusões do trabalho, assim como indicações para investigações futuras.

2 Conceitos fundamentais

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais utilizados na construção do modelo do centro de vacinação, bem como no projeto do seu sistema de controle em malha fechada.

2.1 Sistemas a Eventos Discretos

Segundo [Cassandras e Lafortune 2008](#), um sistema é dito ser a eventos discretos se seu espaço de estados pode ser descrito por um conjunto discreto de elementos e mudanças de estado são observadas apenas em instantes discretos de tempo. Além disso, essas mudanças de estados devem estar condicionadas à ocorrência de eventos. Na literatura, usualmente considera-se “evento” um conceito primitivo, cujo entendimento deve ser deixado a cargo da intuição [[Cassandras e Lafortune 2008](#)] [[Banks et al. 2015](#)] [[Heidergott, Olsder e Woude 2014](#)]. Entretanto, ressalta-se que na modelagem desse tipo de sistema, os eventos que dirigem as mudanças de estado são considerados instantâneos e identificados por ações específicas, como, por exemplo, o apertar de um botão, o término do processamento de uma peça por uma máquina, a chegada de uma pessoa a uma fila de espera, etc.

A figura 2.1 mostra um exemplo de um sistema que pode ser convenientemente modelado como um SED. Trata-se de um trecho de um sistema de manufatura que conta com quatro máquinas diferentes (M_1 , M_2 , M_3 e M_4), responsáveis por diferentes ações dentro do processo de produção de um determinado produto. A máquina M_1 , por exemplo, executa uma etapa de processamento intermediário em que parte do produto é transformada antes da montagem final. A variável t_1 representa o seu tempo médio de processamento. A parte processada é então levada por uma esteira até a máquina M_3 . O

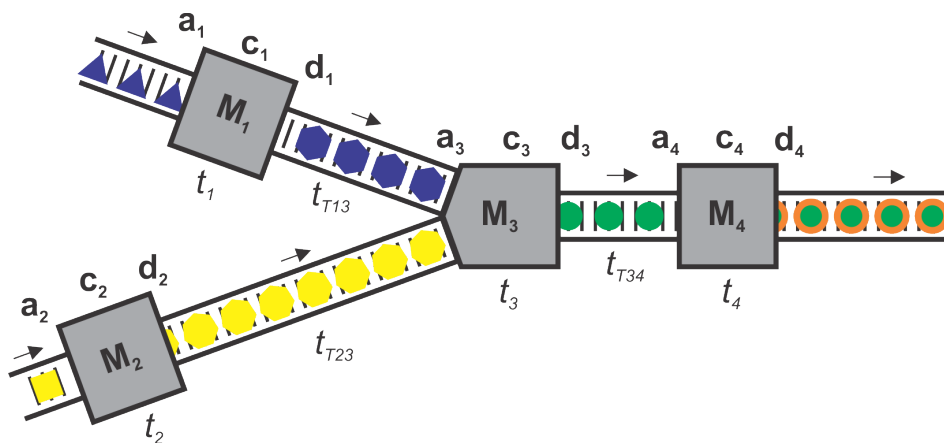


Figura 2.1 – Representação de um trecho de um linha de montagem

tempo de transporte entre essas máquinas é representado por t_{T13} . Um processo semelhante acontece na máquina M_2 . A máquina M_3 executa a montagem do produto final a partir das partes derivadas das máquinas M_1 e M_2 , o que acontece em t_3 unidades de tempo. O produto final é então encaminhado à máquina M_4 , responsável pelo seu embalamento. Considera-se aqui que cada máquina tenha capacidade de processamento unitário.

Na modelagem dessa linha de produção como um SED, admissões, conclusões de processamentos e despacho de peças executados pelas diferentes máquinas são escolhas naturais de eventos que podem ser utilizados na descrição do seu comportamento. Na figura 2.1, esses eventos estão representados, respectivamente, por a_i , c_i e d_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Como sugere a figura, em regime permanente o sistema trabalha com suas esteiras no limite de suas capacidades. Como os tempos de processamentos das máquinas são, via de regra, diferentes, é possível que uma máquina conclua o processamento de seu item enquanto a máquina que a sucede ainda esteja ocupada. Nesse caso, embora a máquina tenha concluído sua operação, o despacho do item processado não pode acontecer, ou seja, a máquina e a esteira devem permanecer bloqueadas até que a máquina sucessora esteja apta a admitir um item.

Uma possível descrição do estado do sistema consiste em registrar o estado de cada máquina em um determinado momento. Para o exemplo considerado, assumindo que o estado de cada máquina possa ser descrito como inativo (I), trabalhando (T) ou bloqueada (B), o estado do sistema pode ser descrito pelo conjunto discreto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, em que $x_1, x_2, x_3 \in \{I, T, B\}$ e $x_4 \in \{I, T\}$.

A figura 2.1 mostra um outro sistema que pode muito naturalmente ser modelado como um SED. Aqui tem-se uma fila de atendimento a pessoas, que pode, por exemplo, ser formada em um banco ou qualquer outro tipo de estabelecimento comercial. No caso representado na figura, clientes que chegam ao estabelecimento são atendidos por um dos servidores, caso estejam inativos, ou aguardam na fila de espera, que tem capacidade para acomodar um número 'n' de clientes.

Uma escolha pertinente de variável de estado para modelagem desse sistema é o número de clientes aguardando na fila. Dessa forma, seu espaço de estados poderia ser representado como o conjunto discreto $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. É evidente que os eventos capazes de alterar o estado do sistema são a chegada de clientes ao estabelecimento (a) e a admissão deles a um dos servidores (b). Se em um dado instante os dois servidores estão ocupados, a admissão de um novo cliente fica condicionada à ocorrência prévia da saída de um cliente (d), o que ocorre imediatamente após a conclusão do atendimento.

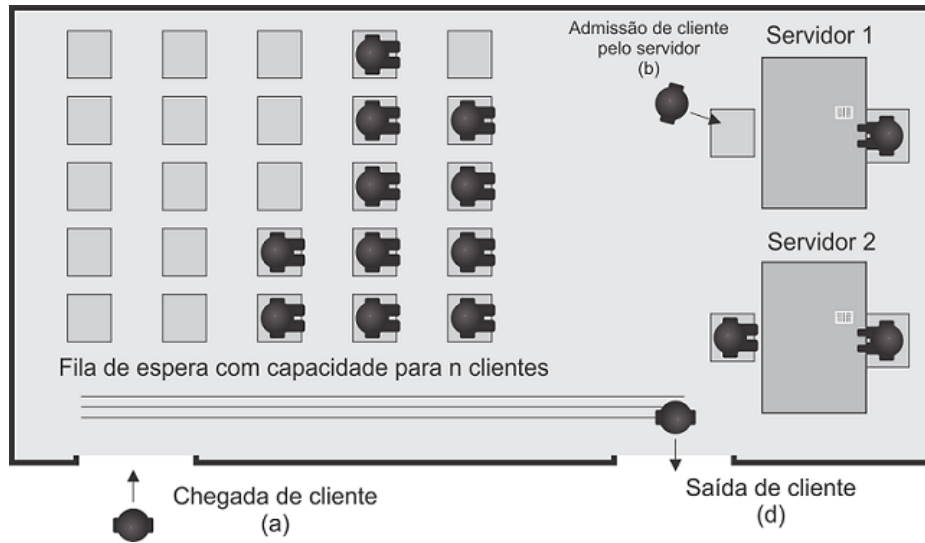


Figura 2.2 – Representação de uma fila de atendimento a pessoas.

2.2 Redes de Petri

Como mencionado no capítulo 1, existem diferentes ferramentas que podem ser utilizadas na modelagem e descrição formal de SEDs. No trabalho apresentado aqui, modelos são desenvolvidos utilizando redes de Petri em conjunção com a álgebra tropical.

As redes de Petri configuram uma ferramenta gráfico/matemática que tem por característica importante a geração de uma representação matricial concisa de SEDs [Maia 2021] (em fase de elaboração). Isso facilita a codificação da rede em linguagem computacional e posterior execução de simulações. Formalmente, podem ser definidas como indicado abaixo.

Definição 2.1 (Redes de Petri). *Uma rede de Petri é um par (\mathcal{G}, μ) em que $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ é um grafo orientado bipartido com um número finito de nós (o conjunto \mathcal{V}), o qual é particionado em dois conjuntos disjuntos \mathcal{P} e \mathcal{Q} . O conjunto \mathcal{E} consiste de pares do tipo (p_i, q_j) e (q_j, p_i) com $p_i \in \mathcal{P}$ e $q_j \in \mathcal{Q}$. A marcação inicial da rede μ é um vetor contendo $|\mathcal{P}|$ inteiros não negativos. [Bacelli et al. 1992]*

Em uma rede de Petri tal como a definida acima, os nós em \mathcal{P} são denominados “lugares” enquanto aqueles em \mathcal{Q} , “transições”. Os elementos de \mathcal{E} são os arcos do grafo. Por se tratar de um grafo bipartido, não há conexão direta entre transições ou entre lugares. Graficamente, uma rede pode ser representada como no exemplo mostrado na figura 2.2. Os círculos maiores representam os lugares (p_1 , p_2 e p_3) enquanto os traços verticais espessos representam as transições (q_1 , q_2 e q_3). Os arcos, representados pelos segmentos de retas orientados, ligam uma determinada transição ao seu lugar de saída ou um lugar de entrada à sua respectiva transição. Por exemplo, na figura 2.2, p_1 é lugar de saída da transição q_1 e lugar de entrada da transição q_2 . Da mesma forma, p_3 também é

lugar de entrada da transição q_2 e lugar de saída da transição q_3 . Na rede da figura todos os arcos têm peso unitário, mas em geral podem ter pesos de qualquer valor inteiro positivo. Por isso, em complemento à definição 2.1, é conveniente definir uma função $w : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$, que atribui um peso a cada arco.

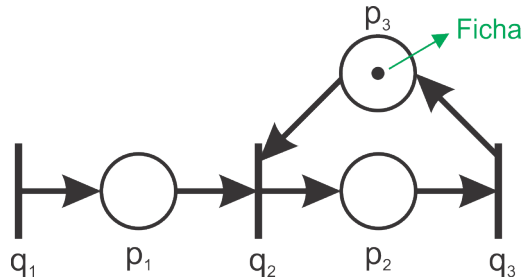


Figura 2.3 – Exemplo de uma rede de Petri.

Nas redes de Petri, as transições são os elementos associados aos eventos que dirigem a evolução de estado do SED representado. O estado da rede em um determinado instante é indicado pelo número de fichas (pequenos círculos pretos) existentes em cada lugar. Esse número/arranjo de fichas é alterado toda vez que uma transição da rede é disparada. O disparo de uma transição qualquer retira de seus lugares de entrada e insere nos seus lugares de saída números de fichas iguais aos pesos dos respectivos arcos. Como a rede da figura 2.2 contém apenas arcos de pesos unitários, fichas são inseridas e retiradas dos lugares uma a uma à medida em que as transições são disparadas. A título de exemplo, a figura 2.2 mostra a mesma rede da figura 2.2 após a ocorrência de três disparos da transição q_1 (a), seguidos de um disparo da transição q_2 (b). A marcação inicial apresentada na definição 2.1 corresponde a um vetor com o número de fichas contido em cada lugar da rede antes da primeira transição ocorrer. Se considerarmos que a rede mostrada na figura 2.2 está em seu estado inicial, então $\mu = [x(p_1) \ x(p_2) \ x(p_3)]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$. Aqui, $x(p_i)$ representa o número de fichas no lugar p_i .

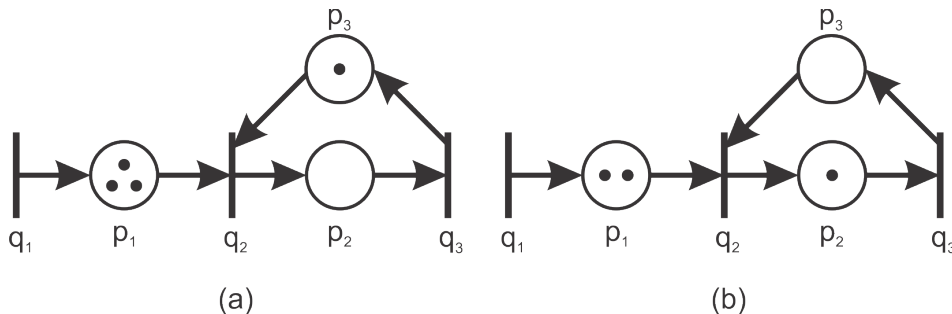


Figura 2.4 – Rede de Petri da figura 2.2 após (a) três disparos da transição q_1 seguidos de (b) um disparo da transição q_2 .

Implícita na descrição feita acima está a condição de disparo de uma determinada transição. Uma transição está habilitada, isto é, pode disparar, se, e somente se, há em

todos os seus lugares de entrada números de fichas iguais ou superiores aos pesos dos arcos que os conectam à transição. Assim, a transição q_2 está habilitada na figura 2.2(a), mas desabilitada na figura 2.2(b), já que nesta última o estado da rede é tal que um dos seus lugares de entrada (p_3) não possui nenhuma ficha. Essa característica das redes de Petri torna-as adequadas à representação de sistemas sujeitos a bloqueios, como aqueles vistos nos exemplos dados na seção anterior.

A figura 2.2 mostra uma representação em rede de Petri do sistema de manufatura da figura 2.1. Aqui vale observar que as estruturas em laço constituídas por dois lugares e duas transições representam as máquinas da linha de manufatura modelada. Por exemplo, as transições q_1 e q_2 , os lugares p_1 e p_2 juntamente com os arcos que os conectam e a ficha de marcação inicial em p_2 representam a máquina 1 do sistema. O fato de haver apenas uma ficha em p_2 indica que máquina tem capacidade de processar apenas um item por vez. Após a admissão de uma peça por M_1 , o que corresponde a um disparo da transição q_1 , a mesma fica inabilitada, ou seja, nenhuma outra peça pode ser admitida à máquina. O disparo da transição q_2 , que indica a saída da peça de M_1 , coloca novamente a ficha em p_2 e habilita outra vez a transição q_1 , indicando que a máquina está inativa.

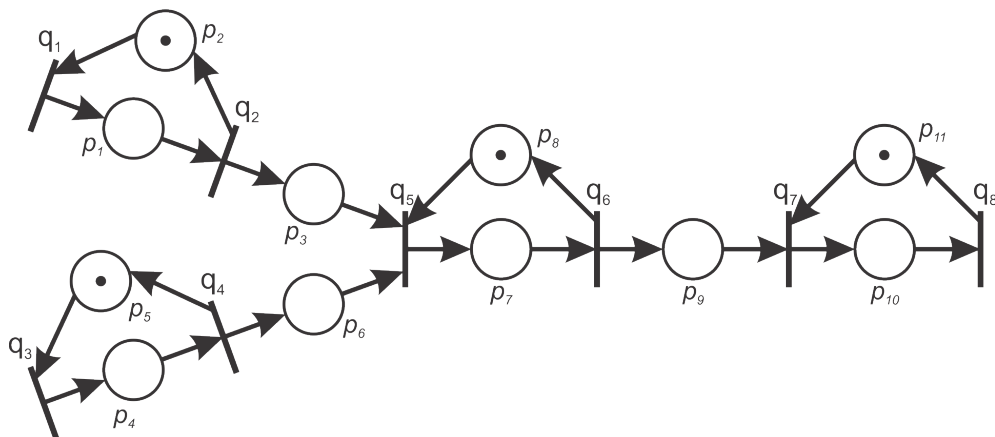


Figura 2.5 – Rede de Petri correspondente ao sistema da figura 2.1

A figura 2.2 mostra uma rede de Petri correspondente ao sistema de filas mostrado na figura 2.1. Aqui o disparo da transição q_1 corresponde à entrada de um cliente no estabelecimento, o disparo de de q_2 , à admissão de um cliente por um dos servidores e de q_3 , ao término de atendimento e consequente saída clientes. A marcação inicial da rede mostra que a fila tem lugar para até vinte e cinco clientes e dois servidores atendendo.

2.2.1 Redes de Petri Temporizadas

As redes de Petri discutidas até aqui descrevem a ordem em que ocorrem os sucessivos estados dos SEDs modelados, mas sem qualquer alusão aos instantes de tempo em que as mudanças ocorrem. Em termos de representação, nelas as transições podem ser

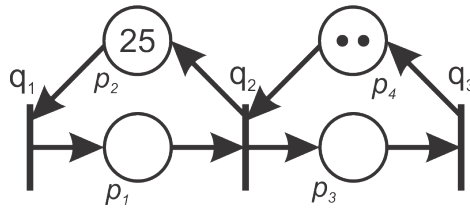


Figura 2.6 – Rede de Petri correspondente ao sistema da figura 2.1

disparadas tão logo sejam habilitadas. Conseqüentemente, fichas podem ser colocadas e tiradas de lugares instantaneamente.

Há, entretanto, situações em que existe interesse em incluir o tempo na análise do sistema. É o caso, por exemplo, quando se deseja determinar uma figura de desempenho feito a taxa de produção de uma determinada linha de manufatura, como a da figura 2.1. Com o objetivo de tratar esses casos, são definidas as redes de Petri temporizadas, nas quais vincula-se uma estrutura de relógio às transições ou aos lugares [Murata 1989].

2.2.1.1 Redes de Petri T-temporizadas

Nas redes de Petri T-temporizadas, a estrutura de relógio é vinculada às transições e associa a cada uma delas uma certa duração.

Definição 2.2 (Redes de Petri T-temporizadas). *Uma rede de Petri T-temporizada é uma dupla $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$, em que \mathcal{R} é a rede de Petri apresentada na definição 2.1 e \mathcal{T} uma função que associa a cada transição $q_i \in \mathcal{Q}$ um número real não negativo, sendo $\mathcal{T}(q_i) = \tau_i$ o intervalo de tempo associado à transição. [Wang e Wu 1998]*

A figura 2.2.1.1 mostra uma versão T-temporizada da rede de Petri mostrada na figura 2.2. Graficamente, as transições temporizadas são representadas por uma caixa mais espessa, como indicado na figura 2.2.1.1. Aqui, τ_1 , τ_2 e τ_3 são as durações de cada uma das transições.

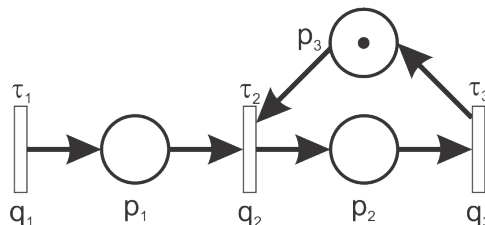


Figura 2.7 – Versão T-temporizada da rede de Petri mostrada na figura 2.2

2.2.1.2 Redes de Petri P-temporizadas

De maneira análoga, nas redes de Petri P-temporizadas a estrutura de relógio é vinculada aos lugares e associa a cada ficha um intervalo de tempo que ela deve cumprir antes de habilitar a transição subsequente.

Definição 2.3 (Redes de Petri P-temporizadas). *Uma rede de Petri P-temporizada é uma dupla $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$, em que \mathcal{R} é a rede de Petri definida na definição 2.1 e \mathcal{T} uma função que associa a cada lugar $p_i \in \mathcal{P}$ um número real não negativo, sendo $\mathcal{T}(q_i) = \tau_i$ o intervalo de tempo associado ao lugar. [Wang e Wu 1998]*

A figura 2.2.1.2 mostra uma versão P-temporizada da rede de Petri mostrada na figura 2.2. Graficamente, a temporização dos lugares é representada simplesmente indicando-se os valores dos seus intervalos de tempo.

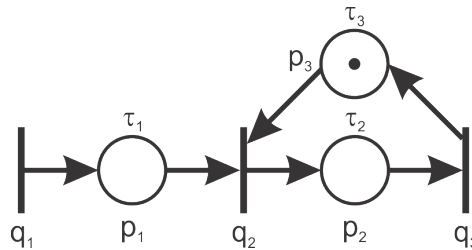


Figura 2.8 – Versão P-temporizada da rede de Petri mostrada na figura 2.2

2.2.2 Grafos de Eventos Temporizados

As redes de Petri são adequadas à representação de SEDs em geral. Inclusive aqueles em que ocorrem os fenômenos de concorrência por recursos e/ou sincronização de tarefas [Dias 2014]. As figuras 2.2.2(a) e 2.2.2(b) mostram representações do fenômeno de concorrência enquanto as figuras 2.2.2(c) e 2.2.2(d) ilustram o fenômeno de sincronização. A representação da figura 2.2.2(a) é adequada para se modelar, por exemplo, a concorrência de dois servidores por matéria-prima, enquanto a da figura 2.2.2(b) pode ilustrar a concorrência pelo fornecimento de produtos a um depósito. Já a figura 2.2.2(c) pode representar a sincronização no fornecimento de diferentes partes a uma determinada máquina, como aquela que acontece na máquina M_3 da figura 2.1.

Grafos de eventos temporizados (GET) são uma subclasse das Redes de Petri em que o fenômeno de concorrência não ocorre [Dias 2014]. Em um GET, cada lugar possui apenas um arco de entrada e outro de saída. Apesar dessa limitação, eles se mostram extremamente úteis na modelagem de sistemas sujeitos a fenômenos de sincronização e atraso de tempo, como os que são considerados neste trabalho.

Uma vantagem da modelagem via GET é que estes podem ser descritos por meio de equações não lineares baseadas apenas nas operações convencionais de maximização

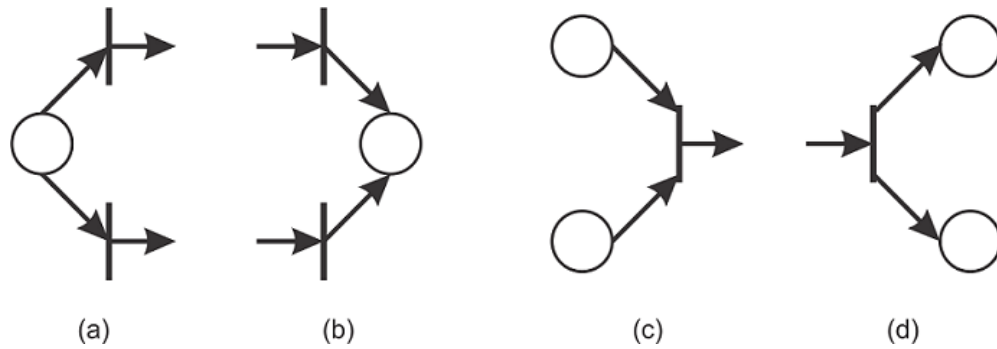


Figura 2.9 – Representação dos fenômenos de concorrência (a e b) e sincronização (c e d) nas redes de Petri. [Dias 2014]

(ou minimização) e soma. Por isso, se a modelagem for feita com base em álgebra tropical, o modelo resultante acaba por se constituir de um sistema de equações lineares recursivas descrevendo a evolução do sistema em seu espaço de estados.

2.3 Álgebra Tropical

A chamada “álgebra tropical”, também conhecida como “álgebra Max-Plus”, é uma estrutura matemática definida pelo conjunto $\mathbb{R}_{max} \equiv (\mathbb{R} \cup -\infty, \oplus, \otimes)$, em que os símbolos \oplus e \otimes denotam as operações básicas de *soma tropical* e *multiplicação tropical*, respectivamente, definidas¹ tal como mostrado abaixo [Heidergott, Olsder e Woude 2014]:

$$\begin{aligned} x \oplus y &\equiv \max(x, y) \\ x \otimes y &\equiv x + y \end{aligned} \tag{2.1}$$

A título de exemplo, vê-se que $3 \oplus 4 = 4$ e $3 \otimes 4 = 7$.

Um fato notável a respeito da álgebra tropical é que nela não há definição da operação inversa à soma tropical, isto é, não há uma “subtração tropical”. Na seção 2.3.3 serão apresentados elementos básicos da teoria da residuação, que em alguns casos funciona como inversa das operações definidas na equação 2.1.

2.3.1 Propriedades

Com base nas definições apresentadas em 2.1, é possível verificar que as seguintes propriedades se aplicam às operações de soma e multiplicação tropicais [Heidergott, Olsder e Woude 2014]:

¹ Uma definição alternativa em que $x \oplus y \equiv \min(x, y)$ (motivo pelo qual recebe o nome de “álgebra Min-Plus”) é utilizada algumas vezes. “Álgebra tropical” é o termo mais geral, que abarca as duas definições

- **Comutatividade**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{max} : \quad x \oplus y = y \oplus x \quad \text{e} \quad x \otimes y = y \otimes x$$

- **Associatividade**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : \quad x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

- **Distributividade da multiplicação sobre a adição**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max} : \quad x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

- **Existência de elemento neutro em relação à adição**

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : \quad \exists \bar{0} \in \mathbb{R}_{max} / x \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus x = x$$

- **Existência de elemento neutro em relação à multiplicação**

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : \quad \exists \bar{1} \in \mathbb{R}_{max} / x \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes x = x$$

Aqui, percebe-se que $\bar{0} = -\infty$ e $\bar{1} = 0$. Além disso, verifica-se que o elemento neutro em relação à adição é absorvente em relação à multiplicação, isto é, $x \otimes \bar{0} = \bar{0} \otimes x = \bar{0} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{max}$

- **Idempotência da adição**

$$\forall x \in \mathbb{R}_{max} : \quad x \oplus x = x$$

A operação de exponenciação é introduzida muito naturalmente por meio da associatividade da multiplicação.

$$\begin{aligned} x^{\otimes n} &\equiv \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n \text{ vezes}} = n \times x \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \\ x^{\otimes 0} &\equiv \bar{1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1.

$$7^{\otimes 3} = 3 \times 7 = 21$$

$$4^{\otimes -8} = -8 \times 4 = -32$$

$$8^{\otimes 1/2} = 1/2 \times 8 = 4$$

$$12^{\otimes -1/3} = -1/3 \times 12 = -4$$

Tal como definida acima, a álgebra tropical, ou Max-Plus, é exemplo de um tipo de estrutura algébrica conhecida como “semi-anel”.

Definição 2.4 (Semi-anel). *Um semi-anel é um conjunto não vazio A dotado de duas operações binárias denotadas por \oplus_A e \otimes_A tal que*

- \oplus_A é associativa e comutativa com elemento neutro $\bar{0}_A$;
- \otimes_A é associativa, distributiva sobre \oplus_A e tem elemento neutro $\bar{1}_A$;
- $\bar{0}_A$ é absorvente em relação a \otimes_A

Tal semi-anel é denotado por $\mathcal{A} = (R, \oplus_A, \otimes_A, \bar{0}_A, \bar{1}_A)$

Na literatura, semi-anéis idempotentes, como o que define a álgebra tropical, são também conhecidos como *dióides*. Uma introdução sucinta aos semi-anéis tropicais e suas propriedades é dada em [Pin 1998](#).

2.3.2 Matrizes na álgebra tropical

No contexto da álgebra tropical também são definidas estruturas equivalentes aos espaços multidimensionais definidos na álgebra convencional, cujos entes elementares são matrizes e vetores. $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ representa o conjunto de matrizes de dimensão $n \times n$, com coeficientes em \mathbb{R}_{max} para o qual são definidas duas operações: a soma (\oplus) e a multiplicação (\otimes) tropicais. Essas duas operações são definidas de maneira análoga às operações de soma (+) e multiplicação (.) matricial existentes no contexto da álgebra convencional.

Definição 2.5 (Soma tropical matricial). *Sejam A e B duas matrizes $\in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. A soma tropical dessas duas matrizes é dada por*

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \quad (2.3)$$

Definição 2.6 (Multiplicação tropical matricial). *Sejam $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{R}_{max}^{p \times n}$. A multiplicação tropical dessas duas matrizes é dada por*

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} \quad (2.4)$$

A multiplicação tropical de uma matriz por um escalar também é feita de maneira análoga à álgebra convencional.

Definição 2.7 (Multiplicação tropical de uma matriz por um escalar). *Seja $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ e $\beta \in \mathbb{R}_{max}$.*

$$[\beta \otimes A]_{ij} = \beta \otimes a_{ij} \quad (2.5)$$

A definição anterior mostra que multiplicar uma matriz A por um escalar β no contexto da álgebra tropical equivale a acrescentar β unidades a cada entrada da matriz.

Exemplo 2.2. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{Z}_{max}^{2 \times 2}$. A soma dessas duas matrizes é dada por

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} (3 \oplus 9) & (11 \oplus 5) \\ (7 \oplus 15) & (2 \oplus 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$$

A multiplicação da matriz A por um escalar $\beta = 5$ resulta em

$$5 \oplus A = \begin{bmatrix} (5 \otimes 3) & (5 \otimes 11) \\ (5 \otimes 7) & (5 \otimes 2)t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Já a multiplicação entre elas é dada por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (3 \otimes 9) \oplus (11 \otimes 15) & (3 \otimes 5) \oplus (11 \otimes 1) \\ (7 \otimes 9) \oplus (2 \otimes 15) & (7 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 17 & 12 \end{bmatrix}$$

A exemplo do que acontece na álgebra convencional, define-se também contexto da álgebra tropical uma matriz identidade I , de dimensões $n \times n$, cujas entradas são dadas por

$$[I]_{ij} = \begin{cases} \bar{0}, & \text{se } i \neq j \\ \bar{1}, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.6)$$

Outra ideia que a álgebra tropical herda naturalmente da álgebra clássica são os conceitos de autovalor e autovetor. Para uma dada matriz $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, se $A \otimes v = \lambda \otimes v$, onde λ é um escalar e v um vetor em \mathbb{R}_{max}^n com pelo menos uma entrada diferente de $\bar{0}$, então λ é dito ser um autovalor de A e v o autovetor correspondente [Heidergott, Olsder e Woude 2014].

Existe ainda um operador que é definido para dióides em geral e que, no contexto da álgebra tropical, desempenha papel importante na resolução de sistemas de equações lineares. Trata-se do operador conhecido como *estrela de Kleene*, cuja definição é apresentada abaixo.

Definição 2.8 (Estrela de Kleene). *Seja $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. A estrela de Kleene de A é dada por*

$$A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k} = I \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots \quad (2.7)$$

sendo $A^{\otimes 0} = I$.

De fato, a definição anterior ajuda na resolução de equações da forma $x = A \otimes x \oplus b$, em que x aparece como uma função dele próprio. Esse tipo de equação é conhecida como *equação implícita*.

2.3.3 Residuação

Como mencionado anteriormente, na álgebra Max-Plus não há definição natural da operação inversa à soma tropical. Isso se deve ao fato de que $x \oplus y = x \oplus z$ não implica em $y = z$. Por exemplo, se $x = 5$, $y = 4$ e $z = 3$, então $x \oplus y = 5 \oplus 4 = 5 = 5 \oplus 3$, enquanto $3 \neq 4$. Essa inexistência de uma “subtração tropical” dificulta a resolução de equações no contexto da álgebra tropical. Mesmo equações tão simples quanto, por exemplo, $x \oplus a = b$, não têm soluções únicas.

A teoria da residuação oferece uma maneira de se superar essa dificuldade e obter resultados significativos para algumas classes de problemas, notadamente aqueles que são modelados por expressões matemáticas da forma $f(x) = b$. Aqui, f corresponde a um mapeamento isotônico de um dióide \mathcal{M} em um dióide \mathcal{N}

Definição 2.9 (Mapeamento isotônico). *Um mapeamento f de um conjunto ordenado \mathcal{M} em outro conjunto ordenado \mathcal{N} é isotônico se $\forall a, b \in \mathcal{M}, a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. [Baccelli et al. 1992]*

Se o mapeamento f não for sobrejetor, haverá valores de b para os quais $f(x) = b$ não terá solução. Além disso, se f não for injetor, $f(x) = b$ não terá solução única. Uma alternativa para lidar com esses casos é considerar não somente os valores de x para os quais $f(x) = b$, mas também aqueles para os quais $f(x) \leq b$, conhecidos como subsoluções de $f(x) = b$. De maneira análoga, os valores de x para os quais $f(x) \geq b$ são definidos como supersoluções de $f(x) = b$. A teoria da residuação permite a inversão de mapeamentos isotônicos de forma a se encontrar a máxima sub-solução para desigualdades da forma $f(x) \leq b$.

Os próximos resultados (definições e teoremas) foram retirados de [Maia et al. 2003](#)

Definição 2.10 (Resíduo e mapeamento residuável). *Um mapeamento isotônico $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, no qual \mathcal{M} e \mathcal{N} são conjuntos ordenados, é residuável se para todo $y \in \mathcal{N}$ existe a maior subsolução para a equação $f(x) = y$. Essa maior subsolução é denotada por $f^\sharp(y)$ e o mapeamento f^\sharp é chamado resíduo de f .*

Teorema 2.1 (Residuação). *Seja $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mapeamento isotônico no qual \mathcal{M} e \mathcal{N} são conjuntos ordenados. Então f é residuável se, e somente se, f^\sharp é o único mapeamento isotônico tal que*

$$f \circ f^\sharp(y) \leq y \quad e \quad f^\sharp \circ f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathcal{M} \text{ e } \forall y \in \mathcal{N} \quad (2.8)$$

Definição 2.11 (Dióide completo). *Um dióide é classificado como “completo” se ele é fechado em relação a somas infinitas e se a operação \otimes se distribui sobre somas infinitas, ou seja, se para todo $m \in \mathcal{M}$ e todo sub-conjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$,*

$$m \otimes \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{L}} x \right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{L}} m \otimes x \quad (2.9)$$

Teorema 2.2 (Residuação para dióides completos). *Sejam \mathcal{J} e \mathcal{K} dióides completos. Um mapeamento $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ é residuável se, e somente se, para todo subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{J}$*

$$f\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{X}} x\right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad e \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \quad (2.10)$$

Um caso de interesse para o trabalho apresentado aqui é aquele que trata dos resíduos de mapeamentos lineares do tipo $L_a : a \otimes x$ e $R_a : x \otimes a$ em um dióide completo \mathcal{D} . Esses resíduos são representados por $L_a^\sharp = a \wp x$ e $R_a^\sharp = x \phi a$, respectivamente, onde \wp representa a residuação à esquerda e ϕ , à direita. Para estes casos específicos de mapeamentos lineares, a residuação corresponde a uma operação de subtração na álgebra convencional, isto é, $L_a^\sharp = R_a^\sharp = x - a$.

O caso de mapeamentos lineares feitos sobre dióides matriciais completos é tratado da maneira discutida a seguir. Sejam $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$ e $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$ matrizes com elementos no dióide completo \mathcal{D} . As residuações à esquerda e direita para essas duas matrizes são definidas como mostrado nas equações 2.11 e 2.12 [Maia et al. 2003].

$$(L_A^\sharp(B))_{ij} = (A \wp B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \wp B_{lj} \quad (2.11)$$

$$(R_A^\sharp(B))_{ij} = (B \phi A)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n B_{li} \phi A_{lj} \quad (2.12)$$

Aqui, \bigwedge é o operador de limite inferior.

Exemplo 2.3. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 15 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

em que $A \in \mathbb{Z}_{max}^{2 \times 2}$ e $B \in \mathbb{Z}_{max}^{2 \times 3}$. Fazendo referência à discussão do último parágrafo, aqui $n = 2$, $p = 2$, e $q = 3$. Pela teoria da residuação, a maior solução para inequação $A \otimes X \leq B$ é $X = A \wp B$ e pode ser determinada da maneira indicada pela equação (2.11)

$$\begin{aligned}
A\phi B &= \begin{bmatrix} (a_{11} - b_{11}) \wedge (a_{21} - b_{21}) & (a_{11} - b_{12}) \wedge (a_{21} - b_{22}) & (a_{11} - b_{13}) \wedge (a_{21} - b_{23}) \\ (a_{12} - b_{11}) \wedge (a_{22} - b_{21}) & (a_{12} - b_{12}) \wedge (a_{22} - b_{22}) & (a_{12} - b_{13}) \wedge (a_{22} - b_{23}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (3 - 9) \wedge (7 - 15) & (3 - 5) \wedge (7 - 1) & (3 - 8) \wedge (7 - 6) \\ (11 - 9) \wedge (2 - 15) & (11 - 5) \wedge (2 - 1) & (11 - 8) \wedge (2 - 6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-6) \wedge (-8) & (-2) \wedge (6) & (-5) \wedge (1) \\ (2) \wedge (-13) & (6) \wedge (1) & (3) \wedge (-4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -13 & 1 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Já a maior solução para inequação $X \otimes A \leq B$ é $X = B\phi A$ e pode ser determinada da maneira indicada pela equação (2.12)

$$\begin{aligned}
B\phi A &= \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) \wedge (b_{21} - a_{21}) & (b_{11} - a_{12}) \wedge (b_{21} - a_{22}) \\ (b_{12} - a_{11}) \wedge (b_{22} - a_{21}) & (b_{12} - a_{12}) \wedge (b_{22} - a_{22}) \\ (b_{13} - a_{11}) \wedge (b_{23} - a_{21}) & (b_{13} - a_{12}) \wedge (b_{23} - a_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (9 - 3) \wedge (15 - 7) & (9 - 11) \wedge (15 - 2) \\ (5 - 3) \wedge (1 - 7) & (5 - 11) \wedge (1 - 2) \\ (8 - 3) \wedge (6 - 7) & (8 - 11) \wedge (6 - 2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (6) \wedge (8) & (-2) \wedge (3) \\ (2) \wedge (-6) & (-6) \wedge (-1) \\ (5) \wedge (-1) & (-3) \wedge (4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -6 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Outro caso de interesse para este trabalho é o que trata da inversão de mapeamentos lineares afins, do tipo $L_a : a \oplus x$ e $R_a : x \oplus a$ em um dióide completo \mathcal{D} . Essa questão está relacionada ao conceito de residuação dual, que é apresentado a seguir. A próxima definição, teoremas e respectivas demonstrações podem ser encontrados em [Maia et al. 2003](#).

Definição 2.12 (Resíduo dual e mapeamento dualmente residuável). *Um mapeamento isotônico $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, no qual \mathcal{M} e \mathcal{N} são conjuntos ordenados, é um mapeamento dualmente residuável se para todo $y \in \mathcal{N}$ existe a menor supersolução para a equação $f(x) = y$. Essa menor supersolução é denotada por $f^b(y)$ e o mapeamento f^b é chamado resíduo dual de f .*

Teorema 2.3 (Residuação dual). *Seja $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mapeamento isotônico no qual \mathcal{M} e \mathcal{N} são conjuntos ordenados. Então f é dualmente residuável se, e somente se, f^b é o*

único mapeamento isotônico tal que

$$f \circ f^b(y) \geq y \quad e \quad f^b \circ f(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad e \quad \forall y \in \mathcal{N} \quad (2.13)$$

Teorema 2.4 (Residuação dual para dióides completos). *Sejam \mathcal{J} e \mathcal{K} dióides completos. Um mapeamento $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ é dualmente residuável se, e somente se, para todo subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{J}$*

$$f\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right) = \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad e \quad f(T) = T \quad (2.14)$$

Neste último teorema, T é o limite superior (∞ na álgebra convencional).

Para o mapeamento afim $T_a(x) = x \oplus a$, feito sobre um dióide completo, o resíduo dual é denotado por $T_a^b = x \ominus a$, no qual \ominus é o símbolo que representa a residuação dual, e dado por

$$T_a^b = x \ominus a = \begin{cases} x, & \text{se } x > a, \\ \bar{0}, & \text{se } x \leq a. \end{cases} \quad (2.15)$$

Para dióides matriciais completos, o mapeamento $T_A(B) = B \oplus A$ possui como resíduo [Guimarães et al. 2020]

$$(T_a^b)_{ij} = (B \ominus A)_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{se } b_{ij} > a_{ij}, \\ \bar{0}, & \text{se } b_{ij} \leq a_{ij}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Vale observar aqui que é necessário que as matrizes A e B indicadas na equação (2.16) tenham as mesmas dimensões.

Exemplo 2.4. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -4 & 6 \\ 15 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 5 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

em que A e $B \in \mathbb{Z}_{max}^{3 \times 2}$. Pela residuação dual, a menor solução para X dado que $X \oplus A \geq B$ é igual a

$$X = B \ominus A = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & \bar{0} \\ \bar{0} & 9 \end{bmatrix}$$

já que $13 > 8$, $7 > 2$, $2 > -4$, $5 \leq 6$, $11 \leq 15$ e $9 > 7$,

2.4 Grafos

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar um modelo em redes de Petri de um centro de vacinação. Da definição 2.1, sabe-se que uma rede de Petri é um tipo particular de grafo. Por isso, nessa seção são apresentados alguns resultados da teoria de grafos importantes para a discussão subsequente.

Definição 2.13 (Grafos orientados). *Um grafo orientado é definido como um par $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde \mathcal{V} é um conjunto de elementos denominados nós e \mathcal{E} um conjunto de pares ordenados (mas não necessariamente diferentes) de nós, denominados arcos. Grafos orientados também são denominados “dígrafos”. [Bacelli et al. 1992]*

Se dois nós conectados de um grafo qualquer forem representados por i e j , ambos em \mathcal{V} , o par ordenado $(i, j) \in \mathcal{E}$ representa o arco que os conecta, tendo origem no nó i e término no nó j . É possível atribuir pesos a cada um dos arcos de um grafo, caso em que o mesmo passa a ser classificado como um *grafo ponderado*. A figura 2.4 mostra um grafo com três nós (q_1 , q_2 e q_3), conectados por três arcos $[(q_1, q_2), (q_2, q_3) \text{ e } (q_3, q_2)]$, de pesos τ_1 , τ_2 e τ_3 , respectivamente. Esse grafo é uma representação equivalente da rede de Petri P-temporizada mostrada na figura 2.2.1.2. Os nós do grafo da figura 2.4 representam as transições da rede de Petri da figura 2.2.1.2. Os pesos dos arcos correspondem aos intervalos de tempo associados aos lugares da rede, os quais foram omitidos no grafo da figura 2.4.

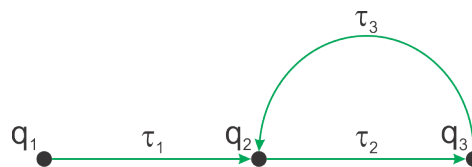


Figura 2.10 – Grafo equivalente à rede de Petri P-temporizada da figura 2.2.1.2

No grafo mostrado há apenas um arco saindo de um nó q_i e chegando em outro nó q_j . Existem ainda os chamados *multigrafos*, que admitem a possibilidade de vários arcos conectarem um nó i a outro nó j . Neste trabalho, entretanto, multigrafos não serão considerados.

A partir do grafo da figura 2.4 é possível introduzir e ilustrar algumas definições importantes ao estudo aqui desenvolvido. Essas definições foram retiradas de Bacelli et al. 1992.

Definição 2.14 (Predecessor e sucessor). *Se em um grafo $(i, j) \in \mathcal{E}$, então o nó i é chamado de predecessor de j e j é chamado de sucessor de i . O conjunto de todos os nós predecessores de j é representado por $\pi(j)$ e o conjunto de todos os sucessores de i é*

representado por $\sigma(i)$. Um predecessor é também chamado de nó a montante e um sucessor, de nó a jusante.

Definição 2.15 (Fonte e sorvedouro). Se $\pi(i) = \emptyset$, isto é, se o nó i não tem predecessores, ele é chamado de nó fonte. Se $\sigma(i) = \emptyset$, isto é, se o nó i não tem sucessores, ele é chamado de nó sorvedouro. A depender da aplicação, os nós fonte e sorvedouro podem também ser denominados nó de entrada e de saída, respectivamente.

Definição 2.16 (Caminho). Um caminho ρ é uma sequência de nós (i_1, i_2, \dots, i_p) , $p > 1$, tal que $i_j \in \pi(i_{j+1})$, $j = 1, \dots, p - 1$. O nó i_1 é o nó inicial do caminho e i_p o nó final. De modo equivalente, pode-se dizer que um caminho é uma sequência de arcos que conecta uma sequência de nós. Um caminho em que nenhum nó aparece mais do que uma vez é chamado de caminho elementar.

Definição 2.17 (Circuito). Um circuito é um caminho em que os nós inicial e final coincidem. Um circuito $(i_1, i_2, \dots, i_p = i_1)$ é chamado de elementar se o caminho $(i_1, i_2, \dots, i_{p-1})$ é elementar. Um dígrafo é classificado como acíclico se não contém circuitos.

Definição 2.18 (Laço). Um laço é um circuito (i, i) , isto é, um circuito composto de um único nó, que é o seu nó inicial e também final. Esta definição assume que $i \in \pi(i)$, isto é, que exista um arco do nó i para ele mesmo.

Definição 2.19 (Comprimento). O comprimento de um caminho ou circuito é igual à soma dos comprimentos de seus arcos, os quais têm comprimento igual a 1, a menos que outro valor seja especificado. O comprimento do caminho ρ é denotado por $|\rho|_l$, onde o subscrito “ l ” faz referência à palavra “caminho” (“length”, do inglês).

Definição 2.20 (Grafo fortemente conexo). Um grafo é fortemente conexo se para quaisquer dois nós diferentes i e j existe um caminho de i para j . De acordo com essa definição, um nó isolado, com ou sem laço, configura um grafo fortemente conexo.

Definição 2.21 (Grafo bipartido). Se o conjunto de nós \mathcal{V} de um grafo \mathcal{G} pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 , tal que todo arco de \mathcal{G} conecta um elemento de \mathcal{V}_1 a um elemento de \mathcal{V}_2 , então \mathcal{G} é dito ser bipartido.

Definição 2.22 (Ciclo médio). O peso médio de um caminho é definido como a soma dos pesos individuais dos arcos que compõem o caminho, dividido pelo comprimento do caminho. Se o comprimento do caminho é denotado por ρ , seu peso por ρ_w e seu comprimento ρ_l , então o peso médio do caminho é igual a ρ_w/ρ_l . Se o caminho for um circuito, então fala-se do peso médio do circuito, ou simplesmente do ciclo médio.

De volta ao grafo orientado da figura 2.4, vê-se que q_1 é um nó predecessor de q_2 . Devido à existência do circuito (q_2, q_3, q_2) , o nó q_2 é tanto predecessor quanto sucessor

de q_3 e vice-versa. O nó q_1 é também um nó fonte do grafo, que não contém nenhum nó sorvedouro. (q_1, q_2, q_3) é um caminho entre os nós q_1 e q_3 , cujo peso é igual a $\tau_1 + \tau_2$. O ciclo médio do circuito (q_2, q_3, q_2) é igual a $(\tau_2 + \tau_3)/2$. O grafo não é fortemente conexo, já que não existe, por exemplo, um caminho partindo do nó q_3 e chegando no nó q_1 , nem é bipartido. Se for acrescentado um arco entre os nós q_3 e q_1 , como mostrado na figura 2.4, o grafo torna-se fortemente conexo, uma vez que agora é possível sair de qualquer um dos três nós e chegar a qualquer um dos outros dois. Esse fato é relevante para a discussão sobre estratégias de controle que será feita nos capítulos seguintes.

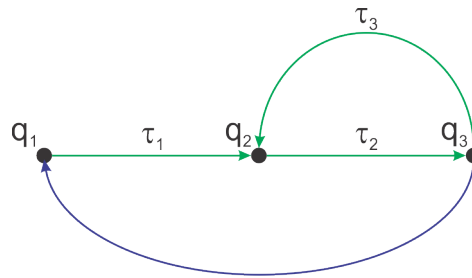


Figura 2.11 – Grafo da figura 2.4 acrescido de um arco entre os nós q_3 e q_1

2.4.1 Grafos e matrizes

O grafo da figura 2.4 é conhecido como *grafo de precedência*. Este tipo de grafo pode ser associado a uma matriz A com dimensões $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$, em que $|\mathcal{V}|$ é a cardinalidade do grafo, ou seja, seu número de nós. Nessa representação, cada entrada a_{ij} da matriz corresponde ao peso do arco que conecta o nó j ao nó i , quando ele existe. A inexistência desse arco é indicada por $\bar{0}$. A equação (2.17) mostra a matriz associada ao grafo da figura 2.4.

$$A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \tau_4 \\ \tau_1 & \bar{0} & \tau_3 \\ \bar{0} & \tau_2 & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Definição 2.23 (Irreducibilidade). *Uma matriz quadrada é dita ser irreduzível se não existe uma matriz de permutação P tal que a matriz \tilde{A} , definida por*

$$\tilde{A} = P'AP$$

tenha uma estrutura triangular superior. [Baccelli et al. 1992]

Teorema 2.5. *A condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada A seja irreduzível é que seu grafo de precedência seja fortemente conexo.*

Teorema 2.6. *Se A é irreduzível ou, de maneira equivalente, se o grafo de precedência associado a A é fortemente conexo, então A possui um, e somente um autovalor (mas possivelmente vários autovetores). Este autovalor é igual ao máximo ciclo médio do grafo.*

$$\lambda = \max_{\zeta} |\rho|_w / |\rho|_l$$

sendo ζ o conjunto de circuitos de $\mathcal{G}(A)$

As provas dos teoremas 2.5 e 2.6 podem ser encontradas em Baccelli et al. 1992.

Exemplo 2.5. A figura 2.5 mostra o mesmo grafo da figura 2.4 assumindo que $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 1$ e $\tau_4 = 4$.

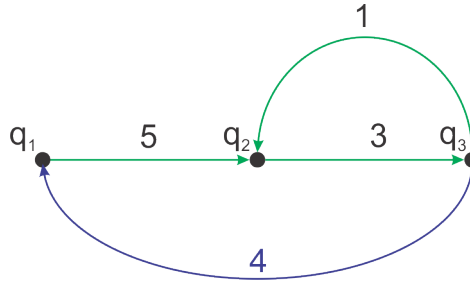


Figura 2.12 – Figura do exemplo 2.5

A matriz correspondente é então

$$A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & 4 \\ 5 & \bar{0} & 1 \\ \bar{0} & 3 & \bar{0} \end{bmatrix}$$

Percebe-se que esse grafo contém dois circuitos, um composto por (q_1, q_2, q_3, q_1) e outro por (q_2, q_3, q_2) . Os ciclos médios desses dois caminhos são iguais a

$$\zeta_1 = \frac{|\rho|_{w_1}}{|\rho|_{l_1}} = \frac{5 + 3 + 4}{3} = 12/3 = 4$$

$$\zeta_2 = \frac{|\rho|_{w_2}}{|\rho|_{l_2}} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Claramente, o máximo ciclo médio do grafo é $\lambda = \max(\zeta_1, \zeta_2) = 4$. Como o grafo da figura 2.5 é fortemente conexo, o teorema 2.6 garante que a matriz A possui apenas um autovalor e que este é precisamente $\lambda = 4$. De fato, se $v = [0 \ 1 \ 0]^T$, então

$$A \otimes v = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & 4 \\ 5 & \bar{0} & 1 \\ \bar{0} & 3 & \bar{0} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \otimes v$$

Como visto no exemplo anterior, o teorema 2.6 provê uma maneira de se determinar o autovalor de uma matriz irredutível feito a da equação (2.17). Alternativamente, métodos

numéricos desenvolvidos no contexto da álgebra tropical podem ser utilizados para isso. Em geral, os métodos variam a depender de a matriz ser irredutível ou não. A seguir, a título de exemplo, será mostrado como um desses métodos, conhecido como *algoritmo de Karp*, pode ser usado para se determinar o autovalor da matriz considerada no exemplo 2.5. Este e outros métodos podem ser encontrados em [Heidergott, Olsder e Woude 2014](#).

O algoritmo de Karp é baseado no seguinte teorema:

Teorema 2.7. *Seja $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ uma matriz irredutível com autovalor λ . Então*

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \min_{k=0, \dots, n-1} \frac{[A^{\otimes n}]_{ij} - [A^{\otimes k}]_{ij}}{n - k} \quad (2.18)$$

onde $j \in [1, \dots, n]$ pode ser escolhido arbitrariamente e a divisão deve ser entendida segundo a álgebra convencional. [[Heidergott, Olsder e Woude 2014](#)]

Algoritmo 1 Algoritmo de Karp para cálculo do autovalor de uma matriz irredutível $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$

1: Escolha arbitrariamente um valor para $j \in [1, \dots, n]$ e faça $x(0) = e_j$, onde e_j é um vetor em \mathbb{R}_{max}^n com a j -ésima entrada é igual a $\bar{1}$ e as demais iguais a $\bar{0}$.

2: Sendo $x(k) = A \otimes x(k - 1)$, determine $x(k)$ para $k = 1, \dots, n$

3: Compute o autovalor por meio de

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \min_{k=0, \dots, n-1} \frac{x_i(n) - x_i(k)}{n - k}$$

A fim de ilustrar a aplicação do algoritmo de Karp, considere novamente a matriz A do exemplo 2.5. Seja $j = 1$ e $e_1 = [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}]^T$. Utilizando a expressão iterativa para cálculo de $x(k)$ dada no passo 2 do algoritmo, determina-se $x(1)$, $x(2)$ e $x(3)$.

$$x(0) = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 5 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad x(2) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ 8 \end{bmatrix} \quad x(3) = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ \bar{0} \end{bmatrix}$$

Aplica-se então o passo 3 do algoritmo.

$$\min \left\{ \frac{12}{3}, \infty, \infty \right\}, \quad \min \left\{ \infty, \frac{4}{2}, \infty \right\}, \quad \min \{ \bar{0}, \bar{0}, \bar{0} \}$$

$$\lambda = \max \{ 4, 2, \bar{0} \} = 4$$

Os autovetores podem então ser encontrados por meio da resolução da equação $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

$$\begin{aligned}
4 \otimes v_3 &= 4 \otimes v_1 \\
A \otimes v = \lambda \otimes v &\Rightarrow 5 \otimes v_1 \oplus 1 \otimes v_3 = 4 \otimes v_2 \\
3 \otimes v_2 &= 4 \otimes v_3
\end{aligned}$$

Da primeira equação, conclui-se que $v_1 = v_3$. Da segunda, conclui-se que $5 \otimes v_1 \oplus 1 \otimes v_1 = 4 \otimes v_2 \rightarrow 5 \otimes v_1 = 4 \otimes v_2$, o que indica que $v_2 = v_1 + 1$ na álgebra convencional. Dessa forma, $v = [v_1 \quad 1 \otimes v_1 \quad v_1]^T$. Tomando $v_1 = 0$, tem-se o autovetor considerado no exemplo 2.5.

2.5 Descrição matemática de um sistema modelado via redes de Petri

Nesta seção é mostrado como uma rede de Petri pode ter seu comportamento descrito matematicamente. Basicamente, busca-se representar o estado de uma determinada rede através do número de fichas existentes em cada um de seus lugares e a maneira como essa configuração muda à medida em que as transições são disparadas.

2.5.1 Modelagem de redes de Petri P-temporizadas

Como discutido na seção 2.2.1.2, nas redes de Petri P-temporizadas a estrutura de relógio associa um tempo mínimo de permanência que cada ficha deve cumprir após ser colocada em um determinado lugar da rede, antes que ela possa habilitar qualquer transição. Além disso, como já sabido, é necessário que haja fichas suficientes em todos os lugares de entrada antes que uma transição possa ser disparada. Essas observações ensejam uma descrição matemática conveniente desse tipo de rede, baseada apenas nas operações \oplus e \otimes , tais como definidas em (2.1).

Para isso, define-se $q_i(k)$ como sendo a data (instante de tempo) em que ocorre o k -ésimo disparo da transição q_i . Fazendo referência novamente à figura 2.2.1.2, vê-se que, com a marcação inicial da figura, $q_1(k)$ pode assumir qualquer valor, uma vez que a transição q_1 está sempre habilitada. Se for assumido que cada transição será disparada tão logo ela esteja habilitada, pode-se expressar matematicamente o fato de que não há restrições ao disparo de q_1 escrevendo-se $q_1(k) = q_1(k-1)$. Já o k -ésimo disparo da transição q_2 não pode acontecer antes de $q_1(k) + \tau_1$, já que, por definição, a ficha que entra em p_1 no instante $q_1(k)$ não habilita q_2 antes que decorram τ_1 unidades de tempo. Pelo mesmo motivo, também não pode ocorrer antes do $(k-1)$ -ésimo disparo de q_3 , que devolve a ficha ao lugar p_3 , acrescido de τ_3 unidades de tempo. Assim, $q_2(k) = \max[q_1(k) + \tau_1, q_3(k-1) + \tau_3]$. Por fim, vê-se facilmente que o k -ésimo disparo da transição q_3 ocorre τ_2 unidades de tempo após o k -ésimo disparo da transição q_2 , isto é, $q_3(k) = q_2(k) + \tau_2$. Utilizando as operações

fundamentais da álgebra tropical, essas equações podem ser escritas como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} q_1(k) &= q_1(k-1) \\ q_2(k) &= \tau_1 \otimes q_1(k) \oplus \tau_3 \otimes q_3(k-1) \\ q_3(k) &= \tau_2 \otimes q_2(k) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Fazendo-se substituições apropriadas, a equação (2.19) pode ser reescrita como mostrado em (2.20), na qual o símbolo “+” denota a soma convencional.

$$\begin{aligned} q_1(k) &= q_1(k-1) \\ q_2(k) &= \tau_1 \otimes q_1(k-1) \oplus \tau_3 \otimes q_3(k-1) \\ q_3(k) &= (\tau_1 + \tau_2) \otimes q_1(k-1) \oplus (\tau_2 + \tau_3) \otimes q_3(k-1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esse conjunto de equações pode ser anotado matricialmente da forma mostrada em (2.21)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \tau_1 & \bar{0} & \tau_3 \\ (\tau_1 + \tau_2) & \bar{0} & (\tau_2 + \tau_3) \end{bmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(k-1) \\ q_2(k-1) \\ q_3(k-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k-1)} \quad (2.21)$$

A expressão dada em (2.21) corresponde à forma canônica da equação de estado de um sistema dinâmico linear. Em geral, a descrição em espaço de estados de tal tipo de sistema é feita da maneira indicada em (2.22), onde \mathbf{x} , \mathbf{y} , e \mathbf{u} são vetores e A , B , C e D são matrizes características do sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= A \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus B \otimes \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus D \otimes \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.22)$$

A equação (2.21) tem a forma da primeira equação mostrada em (2.22), com $B = [\bar{0}]$. Se a transição q_3 puder ser considerada como a saída da rede, isto é, se $y(k) = q_3(k)$, então $C = [0 \ 0 \ \bar{1}]^T$.

Uma outra formulação em espaço de estados bastante comum é mostrada na equação implícita (2.23), na qual A_0 , A_1 , B_0 , C e D são também matrizes características do sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= A_0 \otimes \mathbf{x}(k) \oplus A_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus B_0 \otimes \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C \otimes \mathbf{x}(k-1) + D \otimes \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

O próximo teorema fornece um resultado que permite transformar uma equação implícita como a de (2.23) para a forma canônica mostrada em (2.22).

Teorema 2.8. *Se existem apenas circuitos com pesos não positivos no grafo de precedência de A , então há uma solução para $x = A \otimes x \oplus b$ que é dada por $x = A^* \otimes b$. Além disso, se os pesos dos circuitos são negativos, a solução é única. [Baccelli et al. 1992]*

De fato, se $A^* \otimes b$ existe, então $A \otimes (A^* \otimes b) \oplus b = (\bar{1} \oplus A \otimes A^*) \otimes b = A^* \otimes b$.

A equação de estado em (2.23) pode então ser reescrita como $x(k) = A_0 \otimes x(k) \oplus W$, em que $W = A_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus B_0 \otimes \mathbf{u}(k)$. Assumindo-se que $x(k)$ é a solução, segue que

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \otimes x(k) \oplus W \\ x(k) &= A_0 \otimes (A_0 \otimes x(k) \oplus W) \oplus W = A_0^{\otimes 2} \otimes x(k) \oplus A_0 \otimes W \oplus W \\ &\vdots \\ x(k) &= A_0^{\otimes m} \otimes x(k) \oplus A_0^{\otimes(m-1)} \otimes W \oplus A_0^{\otimes(m-2)} \otimes W \oplus \dots \oplus W \end{aligned}$$

Se o grafo de precedência de A não possui circuito de peso positivo, o resultado do teorema 2.8 é aplicável, o que leva a

$$\mathbf{x}(k) = A_0^* \otimes W = A_0^* \otimes A_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus A_0^* \otimes B_0 \otimes \mathbf{u}(k) \quad (2.24)$$

A equação (2.24) é equivalente à primeira equação de (2.22), com $A = A_0^* \otimes A_1$ e $B = A_0^* \otimes B_0$.

Com esse resultado, encerra-se este capítulo. escrito com o intuito de fornecer os fundamentos das ferramentas formais utilizadas na modelagem e controle do centro de vacinação. No próximo capítulo será desenvolvido o modelo do centro e o projeto do sistema de controle serão apresentados.

3 Modelagem e Controle de um Centro de Vacinação

Neste capítulo é desenvolvida a parte central do trabalho apresentado nessa dissertação: a modelagem de um centro de vacinação como um SED e o projeto de um sistema capaz de controlar as admissões nas diferentes etapas do processo de aplicação de vacinas. O modelo é desenvolvido com base em grafos de eventos temporizados (GET), uma subclasse das redes de Petri apresentada na seção 2.2.2. Desenvolvido o modelo, é feito então o projeto de um sistema de controle capaz de impor restrições ao funcionamento do centro de vacinação, com vistas ao atendimento de protocolos sanitários, enquanto garante uma taxa ótima de aplicação de vacinas. Nesse processo, vantagens e desvantagens de diferentes abordagens de projeto serão discutidas.

3.1 Descrição do centro de vacinação

O modelo desenvolvido neste capítulo busca representar uma estrutura básica, que contém apenas os elementos essenciais de um centro de vacinação. É um modelo que remete aos postos de vacinação mais simples encontrados nas unidades de saúde brasileiras, tanto da rede pública quanto da rede privada. Apesar da aparente simplicidade, trata-se de um modelo versátil, que pode ser modificado sem grande dificuldade para representar sistemas mais complexos.

A figura 3.1 mostra uma representação do centro de vacinação como uma rede de Petri P-temporizada, cujos lugares possuem apenas um arco de entrada e um de saída, ou seja, um GET. O centro representado executa um processo de quatro etapas a cada dose

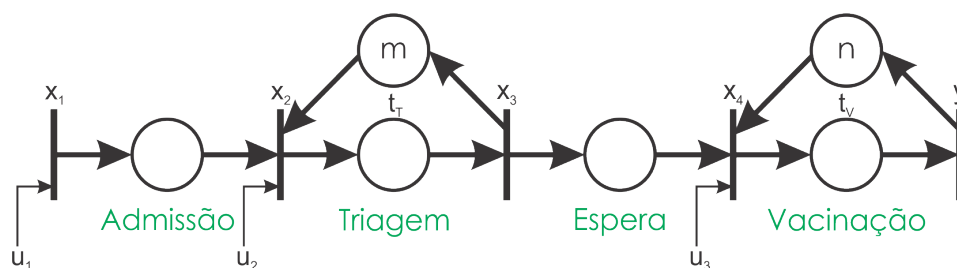


Figura 3.1 – Representação em rede de Petri do centro de vacinação modelado.

de vacina aplicada: admissão, triagem, espera e vacinação. A admissão de um usuário às dependências do centro é indicada pelo disparo da transição x_1 , seguido da colocação de uma ficha no lugar correspondente. O disparo de x_1 é controlado pela entrada u_1 . Supõe-se

que, uma vez admitido, o usuário encaminhe-se para a sala de triagem, onde acontece a segunda etapa do processo. Aqui são feitas algumas hipóteses simplificadoras que poderão ser revistas no futuro, a fim de aprofundar o estudo proposto. Primeiro, não está sendo atribuído nenhum tempo ao lugar correspondente à admissão. O tempo de deslocamento do usuário até a sala de triagem, por exemplo, pode ser incorporado ao tempo do próprio processo de triagem. Também será admitido que não se formará aglomeração de pessoas no espaço entre a entrada do centro e a porta da sala de triagem, o que é uma hipótese razoável se esse espaço for muito maior que as dimensões das salas das etapas subsequentes.

A segunda etapa do processo, triagem, tem início indicado pelo disparo da transição x_2 , o qual é controlado pela entrada u_2 . Na rede de Petri, esse disparo retira uma ficha de cada lugar de entrada (um correspondente à admissão e outro à realimentação da triagem) e acrescenta uma ficha ao lugar de saída, no caminho direto da etapa de triagem. Nesta etapa, todos dados do usuário são conferidos e atualizados, um procedimento protocolar que visa à segurança e orientação dos usuários. O intervalo t_T corresponde ao tempo médio de conclusão dessa etapa. Aqui é assumido que a sala de triagem dispõe de um número limitado m de quiosques e que nenhum usuário é admitido à sala sem que algum quiosque esteja liberado para atendimento. Assim, como cada quiosque atende a uma única pessoa por vez, esse é também o número máximo de usuários que podem entrar na sala de triagem.

O disparo da transição x_3 , que é seguido da retirada de uma ficha do seu lugar de entrada e colocação de uma ficha em cada um de seus dois lugares de saída, marca o fim da segunda etapa, quando o cliente deixa então a sala de triagem e se dirige à sala de espera, onde aguarda até ser admitido à sala de vacinação para receber a injeção com a dose da vacina propriamente dita. Embora o número de pessoas que podem ser acomodadas na sala de espera seja fisicamente limitado, esse limite não está representado na figura 3.1. Isto porque o limite físico da sala é muito maior que o que deve ser imposto ao sistema devido aos protocolos sanitários. Assim, para simplificar a modelagem, ele é considerado infinito.

Terminada a espera, acontece então o disparo da transição x_4 , que retira uma ficha de seus lugares de entrada e deposita uma ficha no seu lugar de saída, marcando a admissão do usuário à sala de vacinação. A exemplo do que foi feito com a sala de triagem, assume-se aqui que há um número limitado n de quiosques de vacinação disponíveis e que nenhum usuário é admitido à sala sem que algum quiosque esteja liberado para aplicação da vacina. Dessa forma, n é também o número máximo de clientes que podem estar simultaneamente dentro da sala. Em média, esse processo de vacinação acontece em t_V unidades de tempo, após o que a transição y é disparada, retirando uma ficha do seu lugar de entrada e depositando-a novamente no seu lugar de saída, o que indica o fim do ciclo de vacinação e saída do usuário das dependências do centro.

Evidentemente, o modelo descrito acima poderia ser desenvolvido de maneira

equivalente como uma rede de Petri T-temporizada. Entretanto, essa abordagem não traria nenhum benefício do ponto de vista analítico ao passo que os atrasos de tempo não teriam uma interpretação física tão natural quanto a que é descrita nos parágrafos anteriores.

3.1.1 Restrições impostas ao funcionamento do centro de vacinação

A exemplo do que acontece com a COVID-19, o tipo de doença que coloca a estrutura de um centro de vacinação sob estresse é aquela altamente contagiosa, cujos protocolos de combate incluem a necessidade de se manter distanciamento social. Assim, a fim de se garantir esse distanciamento, é preciso restringir o número de pessoas nos lugares do centro de vacinação onde aglomerações possam ser formadas.

Na descrição anterior, viu-se que as salas dedicadas aos processos de triagem e vacinação impõem naturalmente um limite relativamente estrito ao número de pessoas em seus interiores. Isto decorre do pequeno número de quiosques que podem ser acomodados em cada sala. Neste trabalho, será assumido que os limites naturalmente impostos a essas salas pelas próprias estruturas sejam suficientes para atender aos requisitos dos protocolos sanitários. Além disso, já foi assumido que não há formação de aglomeração entre a porta de entrada do centro e a sala de triagem. Assim, o lugar onde esses protocolos podem ser violados é a sala de espera. O número de pessoas nesse recinto é indicado pelo número de fichas no lugar “Espera” mostrado na figura 3.1. Para esse lugar, é necessário haver um sistema de controle que limite o número de usuários a um máximo, de tal forma que não viole os protocolos. Aqui, esse número máximo de pessoas que podem ser admitidas à sala de espera será indicado por N_E . No presente trabalho, **será assumido que $N_E \geq n$** , ou seja, que o número máximo de pessoas permitidas na sala de espera é maior ou igual ao número de terminais de vacinação disponíveis. Do ponto de vista prático, essa é uma suposição razoável e será utilizada na modelagem do sistema.

Uma outra restrição que deseja-se impor ao funcionamento do centro diz respeito ao tempo de espera de cada usuário antes de entrar para a sala de vacinação a fim de receber sua dose. Deseja-se limitar esse tempo a um valor máximo, que aqui será representado por t_E .

Obviamente, também deseja-se vacinar o maior número de pessoas possível por unidade de tempo. Esses objetivos são conflitantes e a busca por um compromisso entre as restrições operacionais mencionadas e a taxa de vacinação do sistema é o ponto central do problema de controle tratado neste trabalho.

3.2 Modelo do centro de vacinação em álgebra tropical

A modelagem apresentada a seguir segue a mesma abordagem discutida na seção 2.5.1.

No sistema em malha aberta apresentado na figura 3.1, a transição x_1 é controlada diretamente pela entrada u_1 e as duas são disparadas simultaneamente, ou seja, $x_1(k) = u_1(k)$. O k -ésimo disparo da transição x_2 só poderá ocorrer após o $(k - m)$ -ésimo disparo da transição x_3 . Além disso, a entrada u_2 também controla os disparos de x_2 e precisa estar ativa antes que x_2 possa ser disparada. A transição x_3 é disparada t_T unidades de tempo após o disparo de x_2 . Como o lugar associado à espera não é temporizado, a princípio, a transição x_4 pode ser disparada tão logo a transição x_3 seja disparada. Isso faz sentido, uma vez que se um usuário, ao sair da sala de triagem, encontra a sala de vacinação com um quiosque disponível, ele pode ser imediatamente admitido para receber a injeção. De qualquer maneira, o k -ésimo disparo de x_4 não pode acontecer antes do $(k - n)$ -ésimo disparo de y , uma vez que, nesse caso, a sala de vacinação estaria com todos os quiosques ocupados. A entrada u_3 também precisa estar ativa para que a transição x_3 possa disparar e é mais um dos sinais que podem ser utilizados para controlar o sistema. Por fim, o k -ésimo disparo da transição de saída, $y(k)$, ocorre t_V unidades de tempo após $x_4(k)$. Utilizando o formalismo da álgebra tropical, tal como apresentado na seção 2.3, o comportamento do sistema pode ser descrito tal como indicado a seguir.

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= u_1(k) \\
x_2(k) &= u_2(k) \oplus x_1(k) \oplus x_3(k - m) \\
x_3(k) &= t_T \otimes x_2(k) \\
x_4(k) &= u_3(k) \oplus x_3(k) \oplus y(k - n) \\
y(k) &= t_V \otimes x_4(k)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

A fim de se obter uma representação do sistema em espaço de estados na forma implícita mostrada na expressão (2.23), em que $x(k)$ aparece como função de $x(k)$ e $x(k - 1)$, necessário substituir os termos $x_3(k - m)$ e $y(k - n)$ na expressão anterior. Para isso, introduz-se $(N_E + m - 1)$ variáveis auxiliares, as quais são definidas da forma mostrada no conjunto de equações abaixo.

$$\begin{aligned}
w_1(k) &= x_3(k - 1) \\
w_2(k) &= w_1(k - 1) \\
&\vdots \\
w_{m-1}(k) &= x_3(k - m + 1) \\
z_1(k) &= x_4(k - 1) \\
z_2(k) &= z_1(k - 1) \\
&\vdots \\
z_{n-1}(k) &= x_4(k - n + 1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ z_{N_E}(k) &= x_4(k - N_E) \end{aligned}$$

Uma vez definidas as variáveis auxiliares, após as substituições pertinentes o conjunto de equações (3.1) pode ser reescrito da maneira mostrada em (3.3). A fim de deixar a escrita mais clara, o símbolo \otimes , que denota a multiplicação tropical, foi omitido (o que será feito daqui por diante) tal como usualmente acontece com o símbolo \times da multiplicação convencional.

$$\begin{aligned} x_1(k) &= u_1(k) \\ x_2(k) &= x_1(k) \oplus w_{m-1}(k-1) \oplus u_2(k) \\ x_3(k) &= t_T x_2(k) \\ x_4(k) &= x_3(k) \oplus t_V z_{n-1}(k-1) \oplus u_3(k) \\ w_1(k) &= x_3(k-1) \\ w_2(k) &= w_1(k-1) \\ w_3(k) &= w_2(k-1) \\ & \vdots \\ w_{m-1}(k) &= w_{m-2}(k-1) \\ z_1(k) &= x_4(k-1) \\ z_2(k) &= z_1(k-1) \\ z_3(k) &= z_2(k-1) \\ & \vdots \\ z_{n-1}(k) &= z_{n-2}(k-1) \\ & \vdots \\ z_{N_E}(k) &= z_{N_E-1}(k-1) \\ \\ y(k) &= t_V x_4(k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

O conjunto de equações (3.3) pode agora ser escrito matricialmente na forma mostrada

em (3.4)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ z(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{0xx} & A_{0xw} & A_{0xz} \\ A_{0wx} & A_{0ww} & A_{0wz} \\ A_{0zx} & A_{0zw} & A_{0zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} A_{1xx} & A_{1xw} & A_{1xz} \\ A_{1wx} & A_{1ww} & A_{1wz} \\ A_{1zx} & A_{1zw} & A_{1zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ w(k-1) \\ z(k-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} B_x \\ B_w \\ B_z \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} C_x & C_w & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ z(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por meio de uma comparação entre os dois últimos conjuntos de equações é simples

mostrar que as submatrizes de (3.4) são dadas por

$$\begin{aligned}
 A_{0xx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & t_T & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1xw} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1xz} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & t_V \end{bmatrix} \\
 A_{1wx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1ww} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1zw} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \\
 A_{1zz} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{0xw} &= [\bar{0}]_{4 \times (m-1)} & A_{0xz} &= [\bar{0}]_{4 \times N_E} \\
 A_{0wx} &= [\bar{0}]_{(m-1) \times 4} & A_{0ww} &= [\bar{0}]_{(m-1) \times (m-1)} & A_{0wz} &= [\bar{0}]_{(m-1) \times N_E} \\
 A_{0zx} &= [\bar{0}]_{N_E \times 4} & A_{0zw} &= [\bar{0}]_{N_E \times (m-1)} & A_{0zz} &= [\bar{0}]_{N_E \times N_E} \\
 A_{1xx} &= [\bar{I}]_{4 \times 4} & A_{1wz} &= [\bar{0}]_{(m-1) \times N_E} & A_{1zw} &= [\bar{0}]_{N_E \times (m-1)} \\
 B_x &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} & B_w &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & B_z &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \\
 C_x &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0} \ t_V] & C_w &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \dots \ \bar{0}] & C_z &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \dots \ \bar{0}]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aqui, o termo $[\bar{0}]_{n \times m}$ simboliza uma matriz de “n” linhas e “m” colunas cujos elementos são todos iguais a $\bar{0}$. Já o termo $[\bar{I}]_{n \times n}$ representa uma matriz com “n” linhas e “n” colunas, cujos elementos da diagonal principal são iguais a $\bar{1}$ e os demais iguais a $\bar{0}$, ou seja, uma matriz identidade no contexto da álgebra tropical.

3.3 Controle em malha fechada do centro de vacinação

A ideia fundamental por trás do controle de um sistema a eventos discretos é que existe um SED cujo comportamento precisa ser modificado, de modo que o sistema controlado atenda a um determinado conjunto de especificações [Cassandras e Lafortune 2008]. A premissa é a de que o comportamento do sistema em malha aberta não é satisfatório e precisa ser modificado segundo uma regra de controle a ser estabelecida. Essa modificação no comportamento do sistema é atingida, basicamente, restringindo-se seu funcionamento a um subconjunto do espaço de estados. O sistema composto pelo conjunto de elementos que operam essa mudança no comportamento do SED é denominado *controlador* ou *supervisor* [Cassandras e Lafortune 2008].

Em se tratando de SEDs modelados por GET, o controlador é representado basicamente por um conjunto de lugares extras, introduzidos em uma malha de realimentação que estabelece uma relação entre os sinais de entrada e o estado atual do sistema. Essa abstração da relação entre o sistema de controle e o sistema controlado é, essencialmente, a mesma que é comumente formulada no contexto do controle de sistemas dinâmicos a variável contínua. Uma investigação aprofundada das condições e características do controle de sistemas modelados por GET vem sendo feita por Gonçalves *et al.* Em Gonçalves, Maia e Hardouin 2017, por exemplo, são investigadas as condições que as matrizes associadas ao problema de regulação devem atender antes que o problema possa ser resolvido. Gonçalves, Maia e Hardouin 2014 e Gonçalves 2015 discutem a aplicação de métodos específicos para a resolução de equações do tipo $E\mathbf{x} = D\mathbf{x}$.

Uma mudança interessante introduzida pelos lugares de controle, e que poderá ser vista mais claramente nas próximas seções, é que eles tornam a rede de Petri equivalente ao sistema em malha fechada fortemente conexa. Dessa forma, segundo o teorema 2.6, o sistema em malha fechada passa a ter apenas um autovalor, o qual é numericamente igual ao máximo ciclo médio da rede. Esse máximo ciclo médio tem uma interpretação física importante. Com o sistema operando em estado estacionário, ele representa o intervalo de tempo mínimo necessário para a execução completa das quatro etapas do processo de aplicação de vacinas. Dessa forma, quanto maior o máximo ciclo médio do sistema (ou, de maneira equivalente, o autovalor da matriz de estados associada) menor é a taxa de vacinação do centro. Por essa razão, um dos objetivos do trabalho é projetar um controlador que resulte no menor autovalor de malha fechada possível, o que conduz à uma taxa de vacinação ótima.

3.3.1 Restrições de ocupação e tempo de espera

A primeira etapa no projeto do sistema controlador consiste em codificar matematicamente as restrições que o sistema controlado deve atender. O modelo apresentado

na seção 3.2 captura as características mais importantes do comportamento do sistema em malha aberta. Naquele modelo, percebe-se, por exemplo, que apenas as restrições físicas, relacionadas às limitações das salas de triagem e vacinação, foram levadas em conta. Conseqüentemente, o sistema violará as restrições não físicas caso as entradas u_1 , u_2 e u_3 mostradas na figura 3.1 não sejam controladas de maneira apropriada. Tal como discutido na seção 3.1.1, as duas restrições não físicas levadas em conta neste trabalho são aquelas relacionadas ao máximo número de pessoas admissíveis na sala de espera (N_E) e ao máximo tempo de espera (t_E).

O número de pessoas na sala de espera em um determinado instante depende dos disparos das transições x_3 e x_4 , os quais são controlados pelas entradas u_2 e u_3 , respectivamente. A figura 3.3.1 mostra a seqüência crítica de disparos das transições x_3 e x_4 que garante a não violação da restrição relacionada a N_E . Evidentemente, a cada

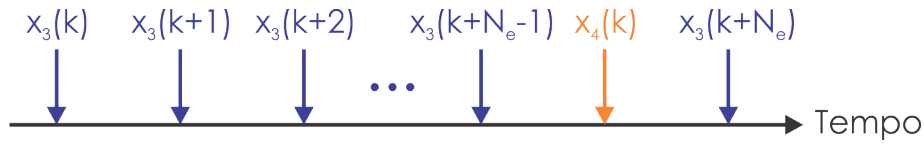


Figura 3.2 – Sequência crítica de disparos das transições x_3 e x_4 que ainda não viola a restrição de número máximo de pessoas na sala de espera.

disparo de x_3 uma pessoa é admitida à sala de espera e a cada disparo de x_4 , uma pessoa deixa a mesma sala. Pela ilustração, pode ser visto que, a fim de limitar o número de pessoas na sala de espera a N_E , a data do k -ésimo disparo de x_4 precisa ser menor ou igual à data do $(k + N_E)$ -ésimo disparo de x_3 . Matematicamente, essa restrição pode ser expressa da maneira mostrada em (3.6), onde z_{N_E} é uma das variáveis auxiliares definidas no conjunto de equações (3.2).

$$\begin{aligned} x_4(k) &\leq x_3(k + N_E) \\ x_4(k - N_E) &\leq x_3(k) \Rightarrow z_{N_E}(k) \leq x_3(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

A restrição relacionada ao tempo máximo de espera pode ser facilmente tratada se for assumido que o centro de vacinação funciona segundo uma política de *primeiro a chegar, primeiro a sair*. Neste caso, o tempo que o k -ésimo usuário fica na sala de espera é dado por $x_4(k) - x_3(k)$. A restrição correspondente pode então ser expressa da maneira mostrada em (3.7).

$$\begin{aligned} x_4(k) &\leq t_E x_3(k) \\ x_4(k) &\leq (t_E + t_T) x_2(k) \\ -(t_E + t_T) x_4(k) &\leq x_2(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

As expressões mostradas em (3.6) e (3.7) podem ser anotadas na forma matricial

$$Ex \leq x \quad (3.8)$$

na qual E é denominada *matriz de restrições* do sistema. Para o centro de vacinação considerado neste trabalho, a matriz de restrições é dada por

$$E = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xw} & E_{xz} \\ E_{wx} & E_{ww} & E_{wz} \\ E_{zx} & E_{zw} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

para a qual

$$E_{xx} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & -(t_E + t_T) \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$E_{xz} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{bmatrix}$$

Todas as demais sub-matrizes representadas em (3.9) são matrizes tropicais com dimensões apropriadas cujas entradas são todas iguais a $\bar{0}$.

Um resultado importante para discussão que se segue é dado no teorema 3.1, retirado de [Baccelli et al. 1992](#).

Teorema 3.1. *Seja $E \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ uma matriz cujos pesos dos circuitos do grafo de precedência sejam não positivos. Então*

$$\begin{aligned} Ex(k) \leq x(k) &\iff E^*x = x \\ E^*x = x &\iff x \in ImE^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Demonstração. De fato, se $Ex(k) \leq x(k)$, então

$$\begin{aligned} E.Ex(k) &\leq Ex(k) \leq x(k) \\ E.E.Ex(k) &\leq E.Ex(k) \leq Ex(k) \leq x(k) \\ &\vdots \\ x(k) \oplus Ex(k) \oplus E^2x(k) \oplus \dots \oplus E^nx(k) \oplus \dots &\leq x(k) \oplus x(k) \oplus \dots \\ (I \oplus E \oplus E^2 \oplus \dots)x(k) &\leq x(k) \\ E^*x(k) &\leq x(k) \end{aligned}$$

Mas, pela própria definição de E^* , tem-se que $I \leq E^*$. Assim, $Ix(k) \leq E^*x(k) \Rightarrow x(k) \leq E^*x(k)$. Conclui-se, portanto, que $E^*x(k) = x(k)$ \square

3.3.2 Projeto do controlador

Como mencionado anteriormente, da perspectiva dos grafos de eventos temporizados, o controle em malha fechada do sistema é implementado por meio da adição de lugares temporizados, de forma a permitir que as transições de entrada sejam conectadas às demais transições do sistema, de tal maneira a limitar a evolução do sistema pelo seu espaço de estados, impedindo que ele venha a atingir estados em que alguma das restrições é violada. Assim, as datas dos disparos das transições de entrada passam a depender das datas dos disparos das outras transições. Matematicamente essa relação pode ser expressa tal como mostrado na equação (3.12).

$$u(k) = Fx(k-1) \quad (3.12)$$

onde F é denominada *matriz de controle* do sistema. Da definição 2.1, sabe-se que em uma rede Petri não há conexão direta entre duas transições, isto é, entre duas transições tem de haver pelo menos um lugar. No caso aqui tratado, em que o sistema é modelado como uma rede de Petri P-temporizada, cada entrada f_{ij} de F determina o intervalo de tempo associado ao lugar existente entre a transição j e a entrada i , caso exista essa conexão.

Uma vez que a matriz de controle tenha sido determinada, a expressão (3.12) pode ser substituída na expressão (2.22), levando à descrição em espaço de estados do sistema em malha fechada mostrada em (3.13).

$$\begin{cases} x(k) = (A \oplus BF)x(k-1) \\ E^*x(k) = x(k) \end{cases} \quad (3.13)$$

3.3.2.1 Determinação da matriz de controle

O método utilizado nesse trabalho para a obtenção da matriz de controle é devido ao trabalho de [Maia, Andrade e Hardouin 2011](#). A ideia básica parte da observação de que a equivalência expressa pelas equações de (3.11) implica em

$$(A \oplus BF)x(k-1) = E^*x(k), \quad \forall k \geq 1 \quad (3.14)$$

Uma solução pode ser encontrada se o estado do sistema realimentado puder ser mantido na imagem de uma matriz Q com dimensões apropriadas, desde que $Im Q \subseteq Im E^*$. Isso pode ser garantido se existem matrizes F e G tal que

$$(A \oplus BF)Q = QG \quad (3.15)$$

Tomando $Q = E^*$, pode ser mostrado que a equação (3.14) é equivalente a

$$E^*(A \oplus BF)E^* = (A \oplus BF)E^* \quad (3.16)$$

que, por sua vez, é equivalente ao sistema de equações mostrado abaixo [[Maia, Andrade e Hardouin 2011](#)].

$$\begin{cases} (E^*A \oplus AE^*) \leq BFE^* \\ F \leq (E^*B) \wp (AE^* \oplus BFE^*) \end{cases} \quad (3.17)$$

Vê-se que nas expressões anteriores existe uma única variável desconhecida, a matriz F .

Proposição 3.1. *Se a matriz B tem pelo menos uma entrada não nula em cada linha e se existe uma matriz $Z \in \mathbb{Z}_{max}^{p \times n}$ com entradas não nulas tal que $Im BZ \subset Im E^*$, então existe uma solução para o problema de controle da equação (3.16). Uma solução é dada pela menor matriz causal do conjunto $\{Z' | (Z' \sim Z) \& (A \leq BZ')\}$. [Maia, Andrade e Hardouin 2011].*

Na proposição 3.1, $Z' \sim Z$ representa a existência de uma relação de *paralelismo* entre Z' e Z , isto é, significa que $Z' = \alpha.Z$ para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$ [Katz 2007]. Além disso, uma matriz F é denominada causal se todas as suas entradas f_{ij} são tais que $f_{ij} = \bar{0}$ ou $f_{ij} \geq \bar{1}$

No mesmo trabalho, Maia, Andrade e Hardouin 2011 mostram que o problema de encontrar uma matriz Z tal que $Im BZ \subset Im E^*$ é equivalente a resolver a seguinte equação

$$BZ = E^*Y \quad (3.18)$$

Esse problema pode ser resolvido através de um algoritmo apresentado por Cuninghame-Green e Butkovic 2003, conhecido como *algoritmo alternante*, o qual é apresentado abaixo em pseudocódigo.

Algoritmo 2 Algoritmo Alternante [Cuninghame-Green e Butkovic 2003]

Requer: Matrizes B e E^*

Gere uma matriz aleatória Z com as mesmas dimensões de F

$Y \leftarrow E^* \diamond BZ$

Enquanto $BZ \neq E^*Y$ **faça**

$Z \leftarrow B \diamond E^*Y$

$Y \leftarrow E^* \diamond BZ$

Fim Enquanto

$F \leftarrow Z$

Retorne F

É possível que a solução inicial F retornada pelo algoritmo 2 seja não causal. Matrizes de controle não causais não podem ser implementadas por um sistema tal como o considerado neste trabalho, uma vez que pressupõem o conhecimento de disparos futuros das transições. A título de exemplo, podemos imaginar uma matriz de controle com entrada não causal $[F]_{11} = -c$, tal que $u_1(k) = -c \otimes x_1(k-1) = -c + x_1(k-1)$. A expressão anterior pode ser lida como “efetue o k -ésimo disparo de u_1 c unidades de tempo antes do $(k-1)$ -ésimo disparo da transição x_1 ”, o que envolve uma predição impossível de ser feita para o caso do posto de vacinação considerado. Neste caso, é necessário *causalizar* a matriz F , isto é, encontrar uma matriz equivalente a F , porém causal.

Esse processo de encontrar uma matriz de controle causal equivalente é crucial para o trabalho considerado nesta dissertação. Não só porque é impossível implementar

uma matriz não causal, mas também porque a escolha dentre as possíveis matrizes causais equivalentes impacta no desempenho do sistema. Especificamente, será visto que a taxa de vacinação do centro, uma das figuras de desempenho consideradas, é afetada pelo método de causalização de F .

Na sequência serão discutidas duas maneiras de se causalizar uma matriz não causal. Uma baseada na relação de paralelismo apresentada alguns parágrafos atrás, e outra baseada em uma técnica desenvolvida e apresentada por [Maia, Hardouin e Cury 2013](#).

3.3.2.2 Causalização da matriz de controle por meio de paralelismo

Seja F_{nc} uma matriz de controle não causal obtida por meio do processo descrito na seção anterior. Deseja-se encontrar uma matriz causal F_c que seja capaz de garantir que o sistema em malha fechada resultante atenda a todas as restrições não físicas que se deseja impor. A maneira mais simples de se encontrar tal matriz é por meio do conceito de paralelismo, já utilizado e explicado em conexão com a proposição 3.1. Essencialmente o método consiste em somar (convencionalmente) às entradas da matriz um valor adequado para eliminar todas as entradas negativas existentes. Matematicamente, o método pode ser representado tal como mostrado na equação (3.19).

$$F_c = -\min \{[F_{nc}]_{ij}\} \otimes F_{nc} \quad (3.19)$$

na qual $\min \{[F_{nc}]_{ij}\}$ corresponde à menor entrada da matriz não causal F_{nc} , que seguramente é um número negativo.

Claramente, a matriz causal obtida em (3.19) atende ao requisito $Im F_c \subseteq Im F_{nc}$, o que garante que o sistema em malha fechada correspondente atende às restrições de máxima ocupação e máximo tempo de espera discutidos anteriormente. Entretanto, existe uma grande desvantagem nessa abordagem para o problema considerado aqui: o sistema em malha fechada obtido com a matriz F_c possui autovalor maior que aquele que seria obtido com a matriz não causal F_{nc} . Como o autovalor é numericamente igual ao máximo ciclo médio da rede, isso significa que a taxa de vacinação do sistema controlado segundo F_c é menor que a máxima possível.

Com o objetivo de evitar essa mudança indesejável no autovalor do sistema em malha fechada, uma abordagem alternativa para causalização de F_{nc} , introduzida por [Maia, Hardouin e Cury 2013](#), será explorada e desenvolvida na próxima seção.

3.3.2.3 Causalização da matriz de controle mantendo o mesmo autovalor gerado por F_{nc}

Mais uma vez, seja F_{nc} a matriz de controle não causal determinada da maneira mostrada na seção 3.3.2.1, que leva a um sistema em malha fechada descrito pelas equações

características mostradas em (3.20).

$$\begin{cases} u(k) = F_{nc}x(k-1) \\ x(k) = (A \oplus BF_{nc})x(k-1) \\ E^*x(k) = x(k) \end{cases} \quad (3.20)$$

As equações de estado e de entrada mostradas em (3.20) podem ser recursivamente aplicadas da maneira mostrada abaixo

$$\begin{cases} x(k-1) = (A \oplus BF_{nc})x(k-2) \\ u(k) = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})x(k-2) \\ x(k-2) = (A \oplus BF_{nc})x(k-3) \\ u(k) = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^2x(k-3) \\ \vdots \\ u(k) = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^Lx(k-L-1) \end{cases} \quad (3.21)$$

Contanto que $(A \oplus BF_{nc})$ seja irredutível, é possível mostrar que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} [F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^L]_{ij} = \infty, \forall i, j \quad (3.22)$$

Para o sistema considerado aqui, após a inserção dos lugares de controle na malha de realimentação, a rede de Petri resultante torna-se fortemente conexa. Logo, de acordo com o teorema 2.5, $(A \oplus BF_{nc})$ é irredutível. Isso significa que existe um valor mínimo de L a partir do qual a $F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^L$ torna-se causal. Define-se então a matriz $F_{opt} = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^{L_{min}}$, onde L_{min} é o referido valor mínimo de L . Para os propósitos deste trabalho, a rotina recursiva mostrada no algoritmo 3 pode ser usada para se determinar tanto o valor de L_{min} quanto F_{opt} .

Algoritmo 3 Rotina para encontrar o menor valor de L que torna F_{opt} causal

Requer: A, B, F_{nc}

$L_{min} \leftarrow 1$

$F_{opt} \leftarrow F_{nc}(A \oplus BF_{nc})$

Enquanto $[F_{opt}]_{ij} < 0$, para qualquer (i, j) **faça**

$L_{min} \leftarrow L_{min} + 1$

$F_{opt} \leftarrow F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^{L_{min}}$

Fim Enquanto

Retorne F_{opt}, L_{min}

Uma vez determinada a matriz de controle F_{opt} , a equação de estados do sistema em malha fechada é dada por

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus BF_{opt}x(k-L-1) \quad (3.23)$$

Deve ser observado que o vetor $x(k)$ na equação (3.20) ou $x(k - L - 1)$ na equação (3.23) representam, na verdade, todo o conjunto de variáveis de estado definidas anteriormente, incluindo as variáveis auxiliares definidas em (3.2).

A fim de se converter a equação de estados do sistema em malha fechada dada em (3.23) para a forma canônica mostrada em (2.22), são introduzidos L_{min} conjuntos de variáveis auxiliares da maneira indicada a seguir.

$$\begin{aligned}
r_1(k) &= x(k - 1) \\
r_2(k) &= r_1(k - 1) = x(k - 2) \\
r_3(k) &= r_2(k - 1) = r_1(k - 2) = x(k - 3) \\
&\vdots \\
r_{L_{min}}(k) &= r_{L_{min}-1}(k - 1) = x(k - L_{min})
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo esses conjuntos de variáveis auxiliares na equação (3.23) resulta na equação (3.25). Vê-se que esta é uma equação de estados da forma canônica

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ r_1(k) \\ r_2(k) \\ \vdots \\ r_{L_{min}}(k) \end{bmatrix}}_{x_{ext}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & [\bar{0}] & [\bar{0}] & \dots & BF_{opt} \\ [\bar{I}] & [\bar{0}] & [\bar{0}] & \dots & [\bar{0}] \\ [\bar{0}] & [\bar{I}] & [\bar{0}] & \dots & [\bar{0}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\bar{0}] & [\bar{0}] & [\bar{0}] & \dots & [\bar{0}] \end{bmatrix}}_{A_{ext}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k - 1) \\ r_1(k - 1) \\ r_2(k - 1) \\ \vdots \\ r_{L_{min}}(k - 1) \end{bmatrix}}_{x_{ext}(k-1)} \tag{3.25}$$

Nessa expressão, $x_{ext} \in \mathbb{R}^{L_{min}(N_E+m+3)}$ e $A_{ext} \in \mathbb{R}^{L_{min}(N_E+m+3) \times L_{min}(N_E+m+3)}$ são versões estendidas do vetor de variáveis de estado e da matriz de estados do sistema em malha fechada, respectivamente, após a inserção dos conjuntos de variáveis de estado mostrados em (3.24). O termo $[\bar{I}]$ representa uma matriz identidade tropical e $[\bar{0}]$ uma matriz cujas entradas são iguais a $\bar{0}$, ambas com dimensões $(N_E + m - 1) \times (N_E + m - 1)$.

A proposição 3.2 acrescenta uma pequena contribuição ao trabalho de [Maia, Hardouin e Cury 2013](#) e traz um resultado importante para o trabalho considerado aqui. Ela garante que a matriz causal F_{opt} gera um sistema controlado que, além de atender às restrições não físicas impostas ao seu funcionamento, opera com uma taxa de vacinação tão alta quanto a obtida por meio da matriz não causal, o que corresponde à maior taxa possível.

Proposição 3.2. *A matriz A_{ext} tem o mesmo autovalor de $(A \oplus BF_{nc})$.*

Demonstração. Seja λ o autovalor de $(A \oplus BF_{nc})$ e v um autovetor correspondente. Então, por definição,

$$\lambda v = (A \oplus BF_{nc})v \tag{3.26}$$

Essa definição pode ser aplicada recursivamente para mostrar que

$$\lambda v = (A \oplus BF_{nc})v \Rightarrow \lambda^p v = (A \oplus BF_{nc})^p v \quad (3.27)$$

Agora, seja λ_{ext} o autovalor de A_{ext} e v_{ext} um autovetor correspondente. Então,

$$\lambda_{ext} v_{ext} = A_{ext} v_{ext} \quad (3.28)$$

Mas $v_{ext} = [v_x^T \ v_{r_1}^T \ v_{r_2}^T \ \dots \ v_{r_{L_{min}}}^T]^T$. Assim, de (3.25) e (3.28), segue que

$$\begin{aligned} \lambda_{ext} v_x &= Av_x \oplus BF_{opt} v_{r_{L_{min}}} \\ \lambda_{ext} v_{r_1} &= v_x \\ \lambda_{ext} v_{r_2} &= v_{r_1} \\ \lambda_{ext} v_{r_3} &= v_{r_2} \\ &\vdots \\ \lambda_{ext} v_{r_{(L_{min}-1)}} &= v_{r_{(L_{min}-2)}} \\ \lambda_{ext} v_{r_{L_{min}}} &= v_{r_{(L_{min}-1)}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Fazendo substituições retroativas no conjunto de equações (3.29), é possível concluir que

$$\begin{aligned} \lambda_{ext}^2 v_{r_{L_{min}}} &= v_{r_{(L_{min}-2)}} \\ \lambda_{ext}^3 v_{r_{L_{min}}} &= v_{r_{(L_{min}-3)}} \\ &\vdots \\ \lambda_{ext}^{L_{min}} v_{r_{L_{min}}} &= v_x \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo a última igualdade em (3.30) na primeira igualdade de (3.29) resulta em

$$\lambda_{ext}^{L_{min}+1} v_{r_{L_{min}}} = (\lambda_{ext}^{L_{min}} A \oplus BF_{opt}) v_{r_{L_{min}}} \quad (3.31)$$

Agora, assumamos que a proposição 3.2 é verdadeira e que $\lambda_{ext} = \lambda$ e $v_{ext} = v$. Então, de (3.27) segue que $(A \oplus BF_{nc})^{L_{min}} v_{r_{L_{min}}} = \lambda_{ext}^{L_{min}} v_{r_{L_{min}}}$. Então, $F_{opt} = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^{L_{min}} = F_{nc} \lambda_{ext}^{L_{min}}$ e (3.31) pode ser reescrita como mostramos abaixo.

$$\lambda_{ext}^{L_{min}+1} v_{r_{L_{min}}} = \lambda_{ext}^{L_{min}} (A \oplus BF_{nc}) v_{r_{L_{min}}} \quad (3.32)$$

De (3.26), segue que $(A \oplus BF_{nc}) v_{r_{L_{min}}} = \lambda_{ext} v_{r_{L_{min}}}$. Finalmente, substituindo esse resultado em (3.32), segue que $\lambda_{ext}^{L_{min}+1} v_{r_{L_{min}}} = \lambda_{ext}^{L_{min}+1} v_{r_{L_{min}}}$, o que demonstra que a proposição 3.2 é verdadeira. \square

Com essa demonstração, conclui-se o capítulo 3.

Neste capítulo foi apresentado o centro de vacinação objeto de estudo deste trabalho, seu modelo como uma rede de Petri P-temporizada e a correspondente formulação matemática em espaço de estados utilizando as definições da álgebra tropical discutidas no capítulo

2. Nas últimas seções foi discutido o projeto do sistema de controle por realimentação de estados. Foi mostrado como determinar uma matriz de controle F , potencialmente não causal, e como encontrar uma matriz causal F_c equivalente. Foi mostrado que o método mais intuitivo de causalização, baseado em paralelismo, conduz a uma solução não satisfatória e, a seguir, foi apresentado um método que resulta em uma solução ótima do ponto de vista de desempenho do sistema.

No próximo capítulo serão mostrados resultados de simulações feitas sobre uma instância do sistema, realizadas com o objetivo de verificar os resultados obtidos neste capítulo.

4 Resultados simulados

Com o objetivo de verificar as conclusões obtidas durante a análise desenvolvida no capítulo 3, simulações do modelo foram realizadas e os resultados são apresentados neste capítulo. Todas as simulações foram executadas utilizando o software Scicoslab[®], desenvolvido e disponibilizado gratuitamente pelos pesquisadores da *École Polytechnique* francesa. O Scicoslab[®] é acompanhado de um módulo de álgebra max-plus, o que simplifica a simulação de sistemas a eventos discretos como o que é considerado nesta dissertação.

A figura 4 mostra uma instância do modelo generalizado apresentado no capítulo anterior e representado na figura 3.1. Vê-se que no modelo desse centro de vacinação particular é assumido que existem três quiosques na sala de triagem ($m = 3$) e duas estações de vacinação ($n = 2$). O processo de triagem leva em média 1,5 minutos enquanto a aplicação da vacina leva 2,5. É assumido que um máximo de 4 pessoas ($N_E = 4$) podem estar sala de espera em qualquer instante sem violação dos protocolos de distanciamento social estabelecidos. Além disso, é assumido também que o máximo tempo de espera tolerável é de cinco minutos ($t_E = 5 \text{ min}$). Com base nessas especificações, as matrizes que representam o modelo em espaço de estados são mostradas em (4.1).

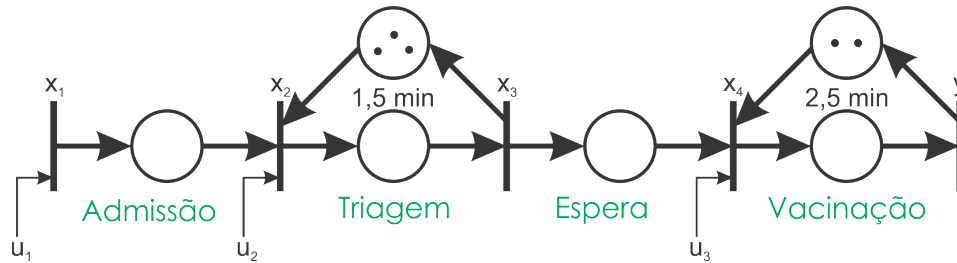


Figura 4.1 – Instância do modelo do centro de vacinação representado na figura 3.1 para a qual $t_T = 1,5 \text{ min}$, $t_V = 2,5 \text{ min}$, $m = 3$ and $n = 2$. É assumido também que $N_E = 4$ and $t_E = 5 \text{ min}$.

$$\begin{aligned}
 A_{0xx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & 1.5 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1xw} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1xz} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & 2.5 \end{bmatrix} \\
 A_{1wx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1ww} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{1zx} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
A_{1zz} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} & A_{0xw} &= [\bar{0}]_{4 \times 2} & A_{0xz} &= [\bar{0}]_{4 \times 4} \\
A_{0wx} &= [\bar{0}]_{2 \times 4} & A_{0ww} &= [\bar{0}]_{2 \times 2} & A_{0wz} &= [\bar{0}]_{2 \times 4} \\
A_{0zx} &= [\bar{0}]_{4 \times 4} & A_{0zw} &= [\bar{0}]_{4 \times 2} & A_{0zz} &= [\bar{0}]_{4 \times 4} \\
A_{1xx} &= [\bar{I}]_{4 \times 4} & A_{1wz} &= [\bar{0}]_{2 \times 4} & A_{1zw} &= [\bar{0}]_{4 \times 2} \\
B_x &= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} & B_w &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & B_z &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \\
C_x &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0} \ 2.5] & C_w &= [\bar{0} \ \bar{0}] & C_z &= [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]
\end{aligned}$$

As simulações cujos resultados são mostrados na sequência foram executadas levando-se em conta três configurações distintas do sistema. Na primeira, considerou-se o comportamento do mesmo operando em malha aberta. Apesar de ser uma configuração sem interesse prático, ela fornece informações importantes sobre as figuras de desempenho levadas em consideração. Na sequência, simulou-se o funcionamento do sistema em malha fechada, com um controlador causalizado por meio de paralelismo. Por fim, simulou-se o sistema em malha fechada com um controlador causalizado segundo o método apresentado na seção 3.3.2.3.

4.1 Simulação do sistema em malha aberta

A tabela 4.1 mostra as datas dos sete primeiros disparos das transições da rede de Petri mostrada na figura 4 operando sem controlador. Como apenas restrições físicas são atendidas pelo modelo, não existe nenhuma limitação à admissão de usuários às dependências do centro de vacinação. Conseqüentemente, um número infinito de admissões ocorre em $t = 0$. Obviamente, isto não é fisicamente possível e evidencia um ponto de desvio do modelo em relação ao centro de vacinação real. Entretanto, esse resultado fornece um *insight* valioso acerca da dinâmica do centro. O comportamento do sistema modelado sob essas circunstâncias corresponde à sua resposta ao impulso e revela modos característicos de seu funcionamento. Em particular, observando as datas de disparo da transição $y(k)$, é possível verificar que dois usuários deixam a sala de vacinação a cada 2,5 minutos, o que

corresponde a um tempo médio de 1,25 minuto por dose aplicada. Não por coincidência, esse valor é igual ao máximo ciclo médio da rede mostrada na figura 4.

Essa análise deixa mais claro o significado e importância do máximo ciclo médio. Com o sistema operando em malha aberta, sem nenhuma restrição ao seu funcionamento, todas as transições são disparadas tão logo sejam habilitadas. Dentre os dois processos temporizados, triagem e vacinação, o segundo é o mais demorado e representa, portanto, um “gargalo” do processo. Isso mostra que 1,25 minuto é o menor tempo médio por vacina possível de ser implementado pela instância considerada.

Se por um lado o sistema em malha aberta funciona com a maior taxa de vacinação possível, por outro ele viola as restrições não físicas previamente estabelecidas. As figuras 4.2 e 4.3 mostram o número de pessoas na sala de espera (N_E) e o tempo de espera de cada usuário (t_E). Fica claro que ambos atingem valores bem acima dos limites estabelecidos. De fato, no modelo considerado, os valores dessas duas grandezas tendem a crescer indefinidamente a medida em que as transições vão sendo disparadas, como sugerem as figuras.

Tabela 4.1 – Dados dos sete primeiros disparos das transições do sistema em malha aberta.

k	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(k)$	0	0	0	0	0	0	0
$x_2(k)$	0	0	0	1.5	1.5	1.5	3
$x_3(k)$	1.5	1.5	1.5	3	3	3	4.5
$x_4(k)$	1.5	1.5	4	4	6.5	6.5	9
$y(k)$	4	4	6.5	6.5	9	9	11.5

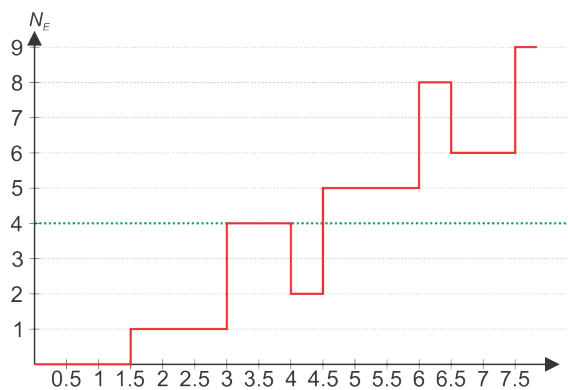


Figura 4.2 – Número de pessoas na sala de espera com o sistema operando em malha aberta após o k -ésimo disparo de cada transição. A restrição relacionada a N_E é violada.

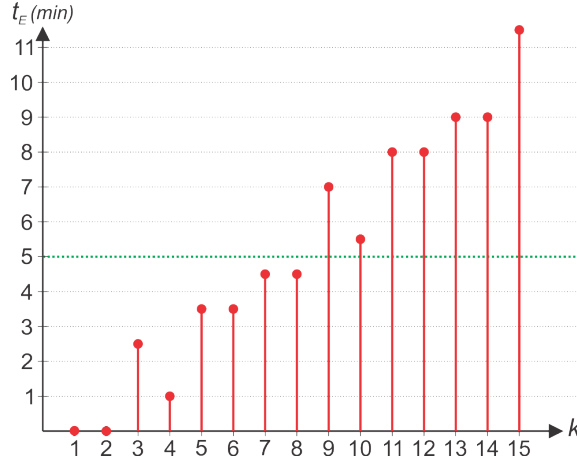


Figura 4.3 – Tempo de espera do k -ésimo usuário a entrar no sistema funcionando em malha aberta. A restrição relacionada a t_E é violada.

4.2 Simulação do sistema em malha fechada com a matriz de controle determinada por meio de paralelismo

Como foi explicado na seção 3.3.2.1, o primeiro passo para se projetar um controlador que garanta o atendimento às restrições não físicas por parte do sistema em malha fechada é encontrar a matriz de controle F . Nas simulações discutidas aqui, isso foi feito utilizando o método introduzido por [Maia, Andrade e Hardouin 2011](#), já explicado na mesma seção. O resultado é a matriz não causal mostrada em (4.2).

$$F_{nc} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 & -10 & -4 & -4 & -2 & -8 & -4 & -2 \\ -5 & -4 & -4 & -10 & -8 & -8 & -10 & -7 & -7 & -2 \\ -7 & -8 & -7 & -7 & -4 & -6 & -4 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Uma propriedade notável da matriz de controle F_{nc} é que, se fosse possível implementá-la, a matriz de estados do sistema em malha fechada correspondente, $(A \oplus BF_{nc})$, teria apenas um autovalor, o qual seria igual ao máximo ciclo médio da rede, isto é, $\lambda_{nc} = 1,25$. Isto significa que o sistema em malha fechada gerado pela matriz de controle não causal atenderia a todas as restrições não físicas e, ao mesmo tempo, funcionaria com a máxima taxa de vacinação possível. Entretanto, como já mencionado na seção 3.3.2.1, estratégias de controle baseadas em matrizes não causais não podem ser implementadas por sistemas como o centro de vacinação considerado aqui.

A ideia de causalização por paralelismo, explicada na seção 3.3.2.2, foi então aplicada à matriz F_{nc} , resultando na matriz F_c mostrada abaixo

$$F_c = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 & 0 & 6 & 6 & 8 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 4 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Remetendo à equação (3.19) e observando as entradas das duas matrizes, percebe-se que $F_c = 10 \otimes F_{nc}$

A matriz F_c mostrada em (4.3) contém informações redundantes que podem ser eliminadas a fim de se simplificar o controlador. Para ver isso, observe que a expressão de $u_1(k)$ dada implicitamente em (4.3) é

$$u_1(k) = 7x_1(k-1) \oplus 5x_2(k-1) \oplus 6x_3(k-1) \oplus x_4(k-1) \oplus 6w_1(k-1) \oplus 6w_2(k-1) \oplus 8z_1(k-1) \oplus 2z_2(k-1) \oplus 6z_3(k-1) \oplus 8z_4(k-1)$$

Se as variáveis auxiliares forem agora eliminadas usando as definições dadas no conjunto de equações (3.2), a expressão para $u_1(k)$ torna-se

$$u_1(k) = 7x_1(k-1) \oplus 5x_2(k-1) \oplus 6x_3(k-1) \oplus x_4(k-1) \oplus 6x_3(k-2) \oplus 6x_3(k-3) \oplus 8x_4(k-2) \oplus 2x_4(k-3) \oplus 6x_4(k-4) \oplus 8x_4(k-5)$$

Claramente, $6x_3(k-3) < 6x_3(k-2) < 6x_3(k-1)$. Logo, as entradas $[F_c]_{1,5} = 6x_3(k-2)$ e $[F_c]_{1,6} = 6x_3(k-3)$ são desnecessárias. Uma observação cuidadosa revela que isso acontece com outras entradas da mesma matriz. A equação (4.4) mostra a expressão de F_c após a eliminação de todas as entradas redundantes. O sistema em malha fechada correspondente é mostrado na figura 4.2. É oportuno observar pela figura que os lugares de controle tornam a rede do sistema realimentado fortemente conexa.

$$F_c = \begin{bmatrix} 7 & \bar{0} & 6 & 0 & \bar{0} & \bar{0} & 8 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 6 & 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 3 & \bar{0} & 8 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 3 & 6 & \bar{0} & 6 & 7 & 9 & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

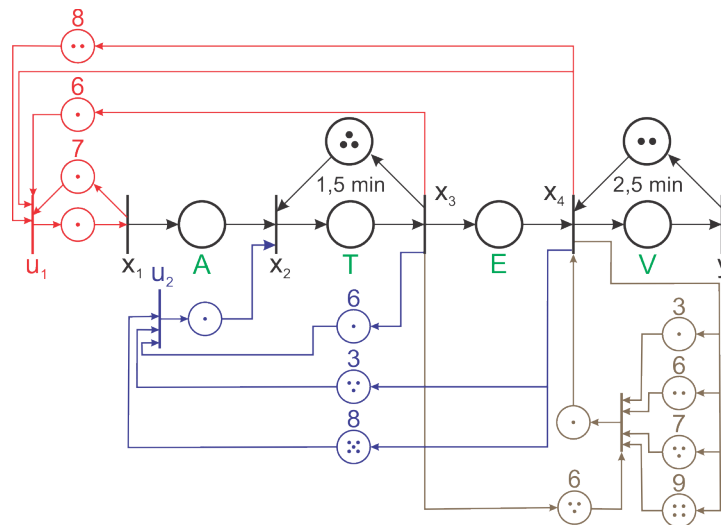


Figura 4.4 – Sistema em malha fechada com a matriz de controle causalizada por paralelismo.

Tabela 4.2 – Datas dos sete primeiros disparos das transições do sistema em malha fechada com F_c determinada por meio de paralelismo.

k	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(k)$	0	8	15.5	23	30.5	38	45.5
$x_2(k)$	0	8	15.5	23	30.5	38	45.5
$x_3(k)$	1.5	9.5	17	24.5	32	39.5	47
$x_4(k)$	1.5	9.5	17	24.5	32	39.5	47
$y(k)$	4	12	19.5	27	34.5	42	49.5

O comportamento do sistema em malha fechada é então determinado pelas equações em (4.5).

$$\begin{cases} x(k) = (A \oplus BF_c)x(k-1) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (4.5)$$

A tabela 4.2 mostra as datas dos sete primeiros disparos das transições do sistema operando em malha fechada. Observando os disparos de x_3 e x_4 , pode ser visto que eles sempre acontecem ao mesmo tempo. Isso significa que cada usuário é admitido à sala de vacinação ao mesmo tempo em que é admitido à sala de espera. Dessa forma, seu tempo de espera é igual a zero e nenhum usuário fica de fato esperando na sala. Logo, o sistema controlado atende com folga às restrições não físicas impostas ao seu comportamento. Por outro lado, observando as datas de disparo da transição y , percebe-se que o sistema em malha fechada, após atingir o estado estacionário, leva 7,5 minutos para aplicar cada dose de vacina, um valor seis vezes maior que o valor mínimo possível. Isso indica que a taxa de vacinação desse sistema controlado é seis vezes menor que a taxa ótima, já investigada na seção 4.1. Pode ser verificado que a matriz $(A \oplus BF_c)$ possui apenas um autovalor, o qual, como esperado, é igual a 7,5.

4.3 Simulação do sistema em malha fechada com a matriz de controle causalizada pelo método da seção 3.3.2.3

Aqui, o método apresentado na seção 3.3.2.3 é aplicado à matriz (4.2) a fim de gerar uma matriz de controle causal F_{opt} que resulte em um sistema controlado com o mesmo autovalor que seria produzido pela matriz F_{nc} , ao mesmo tempo em que garanta o cumprimento das restrições não físicas impostas ao comportamento do sistema. O resultado desse processo é a matriz mostrada em (4.6).

$$F_{opt} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 5.5 & 8 & 7 & 7 & 8 & 4.5 & 5 & 5 \\ 4.5 & 4.5 & 3 & 3 & 2 & 4.5 & 5.5 & 0 & 2 & 2.5 \\ 6 & 6 & 4.5 & 6.5 & 5.5 & 6 & 7 & 3 & 3.5 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Assim como aconteceu com a matriz F_c apresentada na última seção, F_{opt} tem informações redundantes que podem ser eliminadas em favor da simplificação do sistema de controle. A versão de F_{opt} com as entradas redundantes já eliminadas é mostrada em (4.7).

$$F_{opt} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 8 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & 4.5 & \bar{0} & 3 & \bar{0} & 4.5 & 5.5 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 6.5 & \bar{0} & \bar{0} & 7 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

O sistema em malha fechada correspondente é mostrado na figura 4.3.

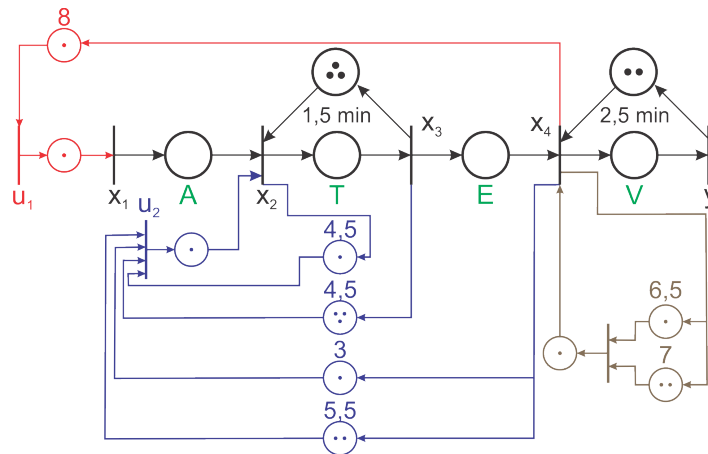


Figura 4.5 – Sistema em malha fechada com a matriz de controle causalizada pelo método da seção 3.3.2.3

Uma vez mais, o comportamento do sistema em malha fechada é governado pelo conjunto de equações (4.5), sendo apenas necessário substituir F_c por F_{opt} na primeira equação. As datas dos primeiros vinte disparos das transições do sistema são mostradas na tabela 4.3.

Observando os dados dos disparos da transição y , é possível perceber imediatamente que, uma vez que o sistema atinge seu estado estacionário, ele opera com taxa ótima de vacinação: uma dose é aplicada a cada 1,25 minuto. Pode ser verificado também que o sistema em malha fechada possui uma matriz de estados $(A \oplus BF_{opt})$ com autovalor único, cujo valor é igual a 1,25. Isso corrobora a análise que feita na seção 3.3.2.3 e, em particular, o que é afirmado na proposição 3.2.

A figura 4.3 mostra que o número de pessoas na sala de espera não é mais zero, como aconteceu quando o sistema foi fechado com a matriz de controle F_c , mas é mantido abaixo do limite estipulado. A mesma coisa acontece com o tempo de espera, cujos valores estão representados na figura 4.3. O controlador mantém o tempo de espera constante e igual a quatro minutos, um valor um pouco abaixo do máximo aceitável.

Com essa análise conclui-se este capítulo, no qual foram apresentados resultados que ilustram e comprovam as predições resultantes das análises feitas no capítulo 3.

Tabela 4.3 – Datas dos vinte primeiros disparos das transições do sistema em malha fechada com a matriz de controle causalizada pelo método apresentado na seção 3.3.2.3.

k	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$y(k)$
1	2.25	2.25	3.75	6.75	8
2	3.5	3.5	5	8	10.5
3	4.75	4.75	6.25	9.25	11.75
4	6	6	7.5	10.5	13
5	7.25	7.25	8.75	11.75	14.25
6	8.5	8.5	10	13	15.5
7	9.75	9.75	11.25	14.25	16.75
8	11	11	12.5	15.5	18
9	12.25	12.25	13.75	16.75	19.25
10	13.5	13.5	15	18	20.5
11	14.75	14.75	16.25	19.25	21.75
12	16	16	17.5	20.5	23
13	17.25	17.25	18.75	21.75	24.25
14	18.5	18.5	20	23	25.5
15	19.75	19.75	21.25	24.25	26.75
16	21	21	22.5	25.5	28
17	22.25	22.25	23.75	26.75	29.25
18	23.5	23.5	25	28	30.5
19	24.75	24.75	26.25	29.25	31.75
20	26	26	27.5	30.5	33

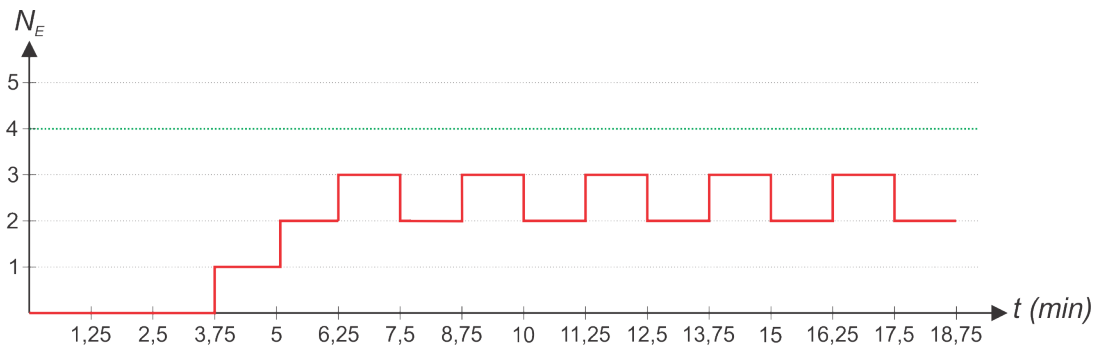


Figura 4.6 – Número de pessoas na sala de espera com o sistema operando em malha fechada com a matriz de controle F_{opt} após o k -ésimo disparo de cada transição. A restrição relacionada a N_E é respeitada.

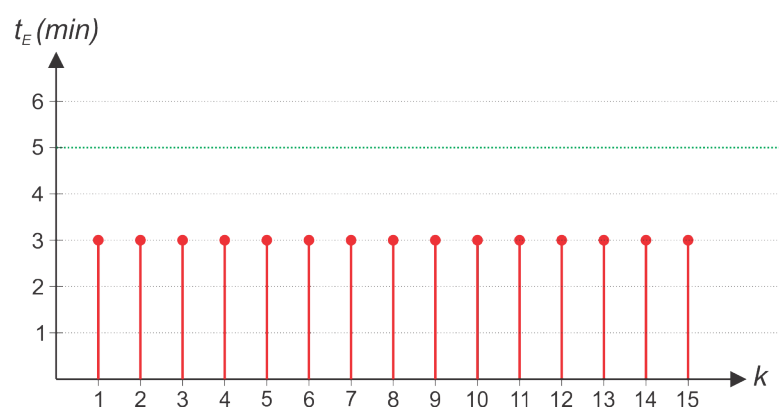


Figura 4.7 – Tempo de espera do k -ésimo usuário a entrar no sistema funcionando em malha fechada com a matriz de controle F_{opt} . A restrição relacionada a t_E é respeitada.

5 Conclusões

O estudo da modelagem e controle de sistemas a eventos discretos é uma área do conhecimento em franco desenvolvimento e que atrai o interesse de um número crescente de pesquisadores. Muito disso se deve à eficácia das ferramentas teóricas já desenvolvidas para análise e síntese de sistemas virtualmente impossíveis de serem modelados com as técnicas tradicionais.

A tecnologia contemporânea tem permitido a criação de sistemas que, fazendo uso das ferramentas e técnicas de comunicação, tendem a se hibridizar, a associar elementos reais a virtuais, discretos a contínuos e o que mais for possível. Nesse contexto, as técnicas de tratamento de sistemas a eventos discretos tendem a ganhar status de pedra angular da modelagem de sistemas complexos.

O interesse pelos SEDs cresce também devido ao fato empolgante de que há muito ainda o que se investigar nessa área antes de se estabelecer em geral e definitivo um paradigma de modelagem e análise.

O trabalho relatado aqui buscou utilizar alguns elementos estabelecidos da teoria, como GET e a própria álgebra tropical, para analisar uma aplicação potencialmente de grande interesse geral. Primeiro foi desenvolvido um modelo em redes de Petri P-temporizadas. Tal como apresentado, o modelo já se mostra bastante flexível. Ele permite representar centros com qualquer número de quiosques de triagem ou terminais de vacinação sem nenhuma mudança em sua estrutura. É certo que o modelo presume um ciclo de vacinação geral com as quatro etapas discutidas ao longo dessa dissertação. Entretanto, caso alguma outra etapa não prevista venha a ser inserida, as mudanças requeridas no modelo são mínimas e as matrizes características podem facilmente ser adaptadas. O projeto do sistema de controle permanece inalterado.

A discussão levada a cabo no capítulo 3, juntamente com os resultados simulados no capítulo 4, serviram para estabelecer a pertinência da técnica de causalização proposta na seção 3.3.2.3. Em particular, a proposição 3.2 e sua demonstração constituem uma pequena contribuição ao estudo de SEDs.

5.1 Trabalhos futuros

O modelo apresentado nessa dissertação deve ser entendido como uma primeira tentativa de se aplicar a teoria de SEDs na modelagem desse tipo específico de sistema. Muitas coisas precisam ser melhor compreendidas e estudadas em trabalhos futuros. Em particular, é notório que os valores atribuídos como parâmetros do sistema foram

considerados determinísticos. O tempo atribuído ao processo de triagem, por exemplo, foi considerado constante e igual a t_T . Pode-se assumir que esse valor corresponde a um valor médio e, para muitos propósitos, isso é suficiente do ponto de vista prático. Entretanto, do ponto de vista teórico, levando-se em conta a possibilidade de se desenvolver resultados mais gerais, aplicáveis a muitos outros sistemas, é interessante fazer um estudo de um modelo estocástico do centro de vacinação, modelando a chegada de usuários ao centro e os próprios parâmetros do centro como variáveis aleatórias.

Além disso, alguns resultados matemáticos obtidos já neste trabalho carecem de investigação mais profunda. A própria equação (3.22), por exemplo, precisa ser melhor investigada a fim de se provar as condições necessárias e suficientes para sua validade. Espero ser capaz realizar tudo isso na sequência do meu trabalho com SEDs.

Referências

- [Allamigeon, Boyet e Gaubert 2021]ALLAMIGEON, X.; BOYET, M.; GAUBERT, S. Piecewise Affine Dynamical Models of Timed Petri Nets – Application to Emergency Call Centers. *Fundamenta Informaticae*, Volume 183, Issues 3-4: Petri Nets 2020, dez. 2021. Disponível em: <<https://fi.episciences.org/8822>>. Citado na página 16.
- [Alves 2021]ALVES, L. Brazilian icus short of drugs and beds amid covid-19 surge. *The Lancet*, Elsevier, v. 397, n. 10283, p. 1431–1432, 2021. Citado na página 15.
- [Bacelli et al. 1992]BACCELLI, F. et al. Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems. John Wiley & Sons Ltd, 1992. Citado 8 vezes nas páginas 17, 23, 32, 36, 38, 39, 42 e 53.
- [Banks et al. 2015]BANKS, J. et al. Discrete event system simulation. Prentice Hall, 2015. Citado na página 21.
- [Cassandras e Lafortune 2008]CASSANDRAS, C. G.; LAFORTUNE, S. *Introduction to discrete event systems*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 51.
- [Cuninghame-Green e Butkovic 2003]CUNINGHAME-GREEN, R. A.; BUTKOVIC, P. The equation $a \otimes x = b \otimes y$ over $(\max, +)$. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 293, n. 1, p. 3–12, 2003. Citado na página 55.
- [Dias 2014]DIAS, J. R. da S. Métodos de controle de fluxo de entrada para sistemas modelados por grafos de eventos temporizados. Universidade Federal de Minas Gerais, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 18, 27 e 28.
- [Garaix et al. 2022]GARAIX, T. et al. Decision-making tools for healthcare structures in times of pandemic. *Anaesthesia Critical Care & Pain Medicine*, p. 101052, 2022. Citado na página 15.
- [Gaubert et al. 2020]GAUBERT, S. et al. Understanding and monitoring the evolution of the Covid-19 epidemic from medical emergency calls: the example of the Paris area. *Comptes Rendus. Mathématique*, Académie des sciences, Paris, v. 358, n. 7, p. 843–875, 2020. Citado na página 15.
- [Gonçalves 2015]GONÇALVES, V. M. *Tropical algorithms for linear algebra and linear event-invariant dynamical systems*. Tese (Doutorado) — Université d’Angers, France, 2015. Nenhuma citação no texto.

- [Goncalves, Maia e Hardouin 2014]GONCALVES, V. M.; MAIA, C. A.; HARDOUIN, L. On tropical fractional linear programming. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 459, p. 384–396, 2014. Citado na página 51.
- [Gonçalves, Maia e Hardouin 2015]GONÇALVES, V. M.; MAIA, C. A.; HARDOUIN, L. On the steady-state control of timed event graphs with firing date constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 61, n. 8, p. 2187–2202, 2015. Citado na página 18.
- [Gonçalves, Maia e Hardouin 2017]GONÇALVES, V. M.; MAIA, C. A.; HARDOUIN, L. On max-plus linear dynamical system theory: The regulation problem. *Automatica*, Elsevier, v. 75, p. 202–209, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 51.
- [Guimarães et al. 2020]GUIMARÃES, L. S. et al. Balanceamento just-in-time de sistemas max-plus lineares com restrições: aplicação à linha de montagem. Universidade Federal de Minas Gerais, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 35.
- [Heidergott, Olsder e Woude 2014]HEIDERGOTT, B.; OLSDER, G. J.; WOUDE, J. V. D. Max plus at work. In: *Max Plus at Work*. [S.l.]: Princeton University Press, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 21, 28, 31 e 40.
- [ICUBAM et al. 2020]ICUBAM, C. et al. Icubam: Icu bed availability monitoring and analysis in the grand est région of france during the covid-19 epidemic. *medRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2020. Disponível em: <<https://www.medrxiv.org/content/early/2020/05/21/2020.05.18.20091264>>. Citado na página 16.
- [Katz 2007]KATZ, R. D. Max-plus (a, b) -invariant spaces and control of timed discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 52, n. 2, p. 229–241, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 55.
- [Maia 2021]MAIA, C. A. Sistemas a eventos discretos - modelos básicos. Não publicado, 2021. Citado na página 23.
- [Maia, Andrade e Hardouin 2011]MAIA, C. A.; ANDRADE, C.; HARDOUIN, L. On the control of max-plus linear system subject to state restriction. *Automatica*, Elsevier, v. 47, n. 5, p. 988–992, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 18, 54, 55 e 64.
- [Maia, Hardouin e Cury 2013]MAIA, C. A.; HARDOUIN, L.; CURY, J. E. Some results on the feedback control of max-plus linear systems under state constrains. In: *IEEE. 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2013. p. 6992–6997. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 58.

- [Maia et al. 2003]MAIA, C. A. et al. *Identificação e controle de sistemas a eventos discretos na álgebra (max,+)*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 18, 32, 33 e 34.
- [Murata 1989]MURATA, T. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 77, n. 4, p. 541–580, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 26.
- [Padmanabhan et al. 2021]PADMANABHAN, R. et al. A review of mathematical model-based scenario analysis and interventions for covid-19. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v. 209, p. 106301, 2021. ISSN 0169-2607. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260721003758>>. Citado na página 15.
- [Pin 1998]PIN, J.-E. *Tropical semirings*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. Citado na página 30.
- [Pin 2019]PIN, J.-É. The influence of imre simon’s work in the theory of automata, languages and semigroups. In: SPRINGER. *Semigroup Forum*. [S.l.], 2019. v. 98, n. 1, p. 1–8. Citado na página 18.
- [Ranney, Griffeth e Jha 2020]RANNEY, M. L.; GRIFFETH, V.; JHA, A. K. Critical supply shortages—the need for ventilators and personal protective equipment during the covid-19 pandemic. *New England Journal of Medicine*, Mass Medical Soc, v. 382, n. 18, p. e41, 2020. Citado na página 15.
- [Schaar et al. 2021]SCHAAR, M. van der et al. How artificial intelligence and machine learning can help healthcare systems respond to covid-19. *Machine Learning*, Springer, v. 110, n. 1, p. 1–14, 2021. Citado na página 16.
- [Sen-Crowe et al. 2021]SEN-CROWE, B. et al. A closer look into global hospital beds capacity and resource shortages during the covid-19 pandemic. *Journal of Surgical Research*, v. 260, p. 56–63, 2021. ISSN 0022-4804. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002248042030812X>>. Citado na página 15.
- [Stiglitz e Blanchard 1992]STIGLITZ, M. R.; BLANCHARD, C. Ieee standard dictionary of electrical and electronic terms. *Microwave Journal*, Horizon House Publications, Inc., v. 35, n. 4, p. 150–151, 1992. Citado na página 17.
- [Wang e Wu 1998]WANG, L.-C.; WU, S.-Y. Modeling with colored timed object-oriented petri nets for automated manufacturing systems. *Computers & industrial engineering*, Elsevier, v. 34, n. 2, p. 463–480, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.