

Julio César Torres Rodríguez

**Estudo de Problemas Elastodinâmicos Bidimensionais
no Domínio do Tempo com Elementos de Contorno**

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação Engenharia das
Estruturas da Universidade Federal de
Minas Gerais, como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Civil.

Belo Horizonte

19 de Novembro de 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ESTUDO DE PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS
BIDIMENSIONAIS NO DOMÍNIO DO TEMPO COM ELEMENTOS
DE CONTORNO"**

Julio César Torres Rodriguez

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
DEES - UFMG - (Orientador) - (Orientador)

Prof. Dr. Ney Amorim Silva
DEES - UFMG - (Co-orientador)

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro
DEES - UFMG

Prof. Dr. José Antônio Marques Carrer
COPPE - UFRJ

Belo Horizonte, 29 de novembro de 2002

RESUMO

Este trabalho apresenta uma ferramenta computacional, baseada no Método dos Elementos de Contorno (MEC), com solução fundamental dependente do tempo, para a análise e simulação bidimensional de problemas elastodinâmicos. Esta ferramenta chamada ANELC (Análise Elastodinâmica com Elementos de Contorno) estuda o comportamento da propagação da onda em domínios infinitos e semi-infinitos.

O algoritmo implementado utiliza elementos lineares isoparamétricos, que facilitam a modelagem da geometria do problema. As equações integrais do contorno são resolvidas usando um esquema de integração passo a passo no tempo, onde variações temporais constantes e lineares são, respectivamente, admitidas para a força de superfície e para os deslocamentos. O ANELC é um programa interativo em todas as etapas da análise.

O ANELC é uma ferramenta genérica, capaz de tratar problemas envolvendo vários tipos de geometria (modelos bidimensionais) e carregamentos. O programa tem uma interface de tal forma amigável e intuitiva, que torna o processo de aprendizagem mais fácil. Ela é prática, pois o usuário controla suas funcionalidades, através de uma interface gráfica interativa bastante flexível, que permite em todos os instantes a visualização do modelo e dos resultados, diminuindo os erros na entrada de dados (pré-processamento) e, conseqüentemente, melhorando a visualização das informações numérica e gráfica dos resultados (pós-processamento).

Palavras-chave: *método dos elementos de contorno, elastodinâmica, propagação da onda, barreiras, trincheiras abertas.*

ABSTRACT

This work presents a computational tool based on the Boundary Element Method (BEM) with time dependent fundamental solution, for analysis and two-dimensional simulation of elastodynamic problems. This tool called ANELC (Elastodynamics Analysis with Boundary Elements) study the behaviour of the wave propagation in infinite and semi-infinite domains.

The implemented algorithm uses isoparametric linear elements facilitating the problem geometry modeling. The boundary integral equations are solved using a time stepping technique, where constant and linear temporal variations are assumed for tractions and displacements respectively. The ANELC is an interactive program in all the stages of the analysis.

ANELC is a generic tool to treat problems with different geometry contours (two-dimensional models) and loadings. The program has an interface of such form friendly and intuitive that becomes the learning more easy. It is practical because is controlled by the user along a sufficiently flexible interactive graphic interface, allowing in all the instants the visualization of the model and the results, decreasing the errors in the data entry (pre-processing) and improving the visualization of the numerical and graphic information of the results (post-processing).

Keywords: *boundary element method, elastodynamics, wave propagation, barriers, open trenches.*

Dedico este trabalho a todos os que acreditaram em mim
e sempre me apoiaram.

Aos meus pais Julio e Elsa.
Aos meus irmãos: Patty, Yanina,
Johnny e Michael.
À minha namorada Rosilane.

AGRADECIMENTOS

Algumas pessoas marcam nossas vidas de diferentes maneiras, umas nos vão ajudando na construção dos nossos sonhos, outras nos apresentam projetos de sonhos e outras ainda nos desafiam a construí-los. Meus agradecimentos a todos eles e em especial:

Ao meu orientador Prof. Fernando Amorim de Paula, pelo incentivo e apoio na execução deste trabalho.

Ao meu “co-orientador” Prof. Ney Amorim Silva, pelo entusiasmo contagiante com relação a este trabalho e pela confiança depositada em mim.

Aos professores Webe João Mansur e José Antonio Marques Carrer, pelo programa em FORTRAN, pela ajuda e pela troca de idéias, sem os quais este trabalho não seria possível.

À Rosilane, a pessoa que está me fazendo ver a vida com alegria, por tudo o que ela já fez por mim. Só resta dizer te amo e obrigado.

À Juan Carlos e Ciro, amigos que me ajudaram com palavras e ações, muito obrigado.

SUMÁRIO

Sumário	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Símbolos	xii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Método dos Elementos de Contorno (MEC)	3
1.3 Estudos Sobre a Propagação da Onda	7
1.4 Isolamento da Onda Elástica por meio de Trincheiras	12
1.5 Objetivo	14
1.6 Organização da Dissertação.....	15
2 Conceitos Gerais	17
2.1 Elasticidade	17
2.1.1 Tensão	17
2.1.2 Deformações	21
2.1.3 Equações de Equilíbrio	21
2.1.4 Relações Constitutivas	22
2.2 Sistema de Coordenadas Naturais	23
2.3 Funções de Interpolação Polinomiais	24
2.3.1 Função de Interpolação Constante	26
2.3.2 Função de Interpolação Linear	26
2.4 Cálculo do Jacobiano	27
2.4.1 Cálculo do Jacobiano para Elemento de Contorno Linear	28
2.5 Funções Delta de Dirac e Heaviside	29
2.5.1 Função Delta de Dirac	29
2.5.2 Função Heaviside.....	30
2.6 Tipos de Elementos de Contorno	31
2.6.1 Classificação dos Elementos.....	32
2.6.2 Elemento de Contorno Linear.....	33
2.7 Integração Numérica.....	34

3	Formulação Matemática	36
3.1	Formulação Matemática	37
3.1.1	Equação Básica Fundamental da Onda Escalar	37
3.1.2	Representação da Equação Integral.....	38
3.1.3	Soluções Fundamentais	41
3.1.4	Parte Finita de uma Integral.....	42
3.2	Equação Básica da Elastodinâmica	45
3.2.1	Soluções Fundamentais	46
3.2.2	Formulação Integral Dependente do Tempo	49
3.2.3	Equação Integral Elástica das Tensões para os Pontos Internos.....	51
3.3	Implementação Numérica	55
3.3.1	Integração Passo a Passo no Tempo	57
3.3.2	Discretização Temporal.....	58
3.3.3	Discretização Espacial.....	62
3.3.4	Discretização da Equação Integral.....	63
3.3.5	Esquema Computacional	68
4	ANELC	74
4.1	Requisitos da Ferramenta	74
4.2	Sistema ANELC	76
4.3	Características do Pré-processamento	77
4.3.1	Entrada de Dados	78
4.4	Características do Pós-processamento	88
4.4.1	Visualização da Estrutura	88
4.4.2	Visualização dos Resultados.....	89
4.4.3	Geração de Arquivos de Dados	93
4.4.4	Outras Configurações	93
4.5	Considerações Sobre a Implementação	96
5	Aplicações Numéricas	97
5.1	Exemplos Numéricos	97
5.1.1	Barra Sujeita a um Carregamento do Tipo Heaviside	98
5.1.2	Barra Sob Carregamento Constante Aplicado em um Curto Intervalo de Tempo.....	104
5.1.3	Viga Bi-Apoiada	108
5.1.4	Análise de Barreiras Acústicas Bidimensionais (Trincheira Aberta)110	
6	Conclusões	126
6.1	Conclusões e Contribuições do Trabalho	126
6.2	Trabalhos Futuros	128
	Referências Bibliográficas	131
	Anexo A Expressões das soluções fundamentais integradas no tempo	138

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Domínio bidimensional discretizado em elementos finitos.....	2
FIGURA 1.2 – Domínio bidimensional discretizado em elementos de contorno	3
FIGURA 1.3 – Representação do modo de propagação das ondas P e S	13
FIGURA 1.4 – Representação do modo de propagação das ondas Rayleigh e Love.....	14
FIGURA 2.1 – Forças de volume e de superfície.....	18
FIGURA 2.2 – Tensão em um ponto Q.....	18
FIGURA 2.3 – Componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy.....	19
FIGURA 2.4 – Tetraedro de Cauchy.....	20
FIGURA 2.5 – Representação do Sistema de Coordenadas Naturais	24
FIGURA 2.6 – Função de interpolação constante	26
FIGURA 2.7 – Funções de interpolação linear.....	26
FIGURA 2.8 – Representação bidimensional de $d\Gamma$	27
FIGURA 2.9 – Função Delta de Dirac	30
FIGURA 2.10 – Função Heaviside.....	31
FIGURA 2.11 – Discretização com elementos de contorno lineares	33
FIGURA 3.1 – Ângulo interno usado para calcular $C(x)$	40
FIGURA 3.2 – Eliminação do ponto singular ξ	50
FIGURA 3.3 – Função de interpolação temporal linear	59
FIGURA 3.4 – Posições típicas da frente de onda	61
FIGURA 3.5 – Discretização espacial linear do contorno	63
FIGURA 3.6 – Representação do nó duplo	67
FIGURA 3.7 – Integração passo a passo para o primeiro intervalo de tempo	69
FIGURA 3.8 – Integração passo a passo para o segundo intervalo de tempo	71

FIGURA 3.9 – Integração passo a passo para o terceiro intervalo de tempo	72
FIGURA 4.1 – Etapas do processo da simulação numérica	77
FIGURA 4.2 – Tipos de entrada de dados.....	79
FIGURA 4.3 – Tela dos dados de entrada	79
FIGURA 4.4 – Cadastro de nós e elementos.....	82
FIGURA 4.5 – Cadastro dos pontos internos	83
FIGURA 4.6 – Cadastro das células	84
FIGURA 4.7 – Cadastro das constantes físicas do material.....	84
FIGURA 4.8 – Intervalos de tempo seqüenciais	86
FIGURA 4.9 – Exemplo de variação temporal da força prescrita.....	87
FIGURA 4.10 – Cadastro da força prescrita.....	87
FIGURA 4.11 – Cadastro do deslocamento prescrito	87
FIGURA 4.12 – ANELC: Visualização da estrutura.....	88
FIGURA 4.13 – Controle da visualização da estrutura	89
FIGURA 4.14 – Visualização do deslocamento	90
FIGURA 4.15 – Visualização do relatório geral	91
FIGURA 4.16 – Seleção dos gráficos.....	92
FIGURA 4.17 – Seleção dos relatórios	92
FIGURA 4.18 – Geração de gráficos das condições de contorno	93
FIGURA 4.19 – Controle da visualização força-restrição.....	94
FIGURA 4.20 – Controle da visualização: margens	94
FIGURA 4.21 – Manipulação de arquivos	95
FIGURA 4.22 – Opção de visualização 3D do gráfico	95
FIGURA 5.1 – Barra sujeita a uma força de impacto.....	99
FIGURA 5.2 – Discretização da malha 01: 28 nós e 24 elementos.....	99
FIGURA 5.3 – Discretização da malha 02: 52 nós e 48 elementos.....	100
FIGURA 5.4 – Deslocamento horizontal dos pontos do contorno 5, 7 e 12 (malha 01: 28 nós, 24 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 110)	101
FIGURA 5.5 – Deslocamento horizontal dos pontos do contorno 9, 13 e 22 (malha 02: 52 nós, 48 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,45$, NIT = 220)	102

FIGURA 5.6 – Deslocamento horizontal dos pontos internos 1, 2 e 3 (malha 01: 28 nós, 24 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 110).....	103
FIGURA 5.7 – Deslocamento horizontal dos pontos internos 1, 2 e 3 (malha 02: 52 nós, 48 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,45$, NIT = 220).....	103
FIGURA 5.8 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 0,40$, $\Delta t = 0,60$, NIT = 165)	105
FIGURA 5.9 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 0,50$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 132)	105
FIGURA 5.10 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,60$, NIT = 110)	106
FIGURA 5.11 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 0,66$, $\Delta t = 0,99$, NIT = 100)	106
FIGURA 5.12 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 0,75$, $\Delta t = 1,125$, NIT = 88)	107
FIGURA 5.13 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2 malha 01 $\beta = 1,0$, $\Delta t = 1,125$, NIT = 66)	107
FIGURA 5.14 – Viga bi-apoiada	108
FIGURA 5.15 – Discretização do contorno 28 nós e 24 elementos.....	109
FIGURA 5.16 – Deslocamento vertical do ponto A (0, b/2) NIT = 600	110
FIGURA 5.17 – Variação do carregamento ao longo do tempo	111
FIGURA 5.18 – Discretização do domínio com contorno fechado (1ª Simulação: 64 nós e 54 elementos)	113
FIGURA 5.19 – Discretização do domínio com contorno fictício (2ª Simulação: 35 nós, 18 nós fictícios, 32 elementos e 15 elementos fictícios)	114
FIGURA 5.20 – Discretização do domínio com contorno aberto (3ª Simulação: 35 nós e 32 elementos)	115
FIGURA 5.21 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno A ($\Delta t = 0,002$)	116
FIGURA 5.22 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno B ($\Delta t = 0,002$)	117
FIGURA 5.23 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno A ($\Delta t = 0,002$)	117
FIGURA 5.24 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno B ($\Delta t = 0,002$)	118

FIGURA 5.25 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno A ($\Delta t = 0,002$)	118
FIGURA 5.26 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno B ($\Delta t = 0,002$)	119
FIGURA 5.27 – Deslocamento vertical do ponto interno C ($\Delta t = 0,002$).....	120
FIGURA 5.28 – Deslocamento vertical do ponto interno C ($\Delta t = 0,002$).....	120
FIGURA 5.29 – Deslocamento vertical para o ponto interno C ($\Delta t = 0,002$)	121
FIGURA 5.30 – Deslocamento vertical do ponto interno D ($\Delta t = 0,002$).....	121
FIGURA 5.31 – Deslocamento vertical para o ponto interno D ($\Delta t = 0,002$)	122
FIGURA 5.32 – Deslocamento vertical para o ponto interno D ($\Delta t = 0,002$)	122
FIGURA 5.33 – Influência do contorno na resposta ($\Delta t = 0,002$).....	123
FIGURA 5.34 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno A ($\Delta t = 0,001$)	124
FIGURA 5.35 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno B ($\Delta t = 0,001$)	124

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 – Tempo de processamento FORTRAN x ANELC	129
---	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Romanos

A	Matriz do sistema de equações do MEC, cujas colunas correspondem a valores incógnitos
B	Matriz do sistema de equações do MEC, cujas colunas correspondem a valores conhecidos
D, E	Matrizes que contêm as variações temporais constantes e lineares das forças de superfície e dos deslocamentos
$A(x), B(x)$	Funções diferenciáveis
A_{ik}, B_{ik}, D_{ik}	Tensores utilizados para o cálculo do tensor de deslocamentos
E_{ik}, F_{ik}, J_{ik}	Tensores utilizados para o cálculo do tensor de forças de superfície
$A_{ijk}, B_{ijk}, D_{ijk}$	Tensores relacionados às integrais do deslocamento
$A_{ijk}^0, B_{ijk}^0, D_{ijk}^0$	Tensores relacionados às integrais do deslocamento
$E_{ijk}, F_{ijk}, J_{ijk}$	Tensores relacionados às integrais de forças de superfície
$E_{ijk}^0, F_{ijk}^0, J_{ijk}^0$	Tensores relacionados às integrais de forças de superfície
C_{ij}	Termo livre
C_{ijrs}	Tensor de módulos elásticos
E	Módulo de Young ou módulo de elasticidade longitudinal
G	Matriz do MEC que multiplica o vetor de forças de superfície
G	Módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal
H	Função de Heaviside
H	Matriz do MEC que multiplica o vetor de deslocamentos

I_{Ω}	Integrais no domínio
J	Jacobiano de transformação
K	Constante de Lipschitz
L_w, N_w	Funções que representam as contribuições das ondas em função da posição das frentes de onda
N	Número de elementos
NNC	Número de pontos nodais funcionais
$\mathbf{P}$	Vetor que representa a contribuição dos tempos anteriores
Q	Ponto da superfície de um corpo
S_w^b	Contribuição das ondas primária ou secundária nas integrais relacionadas ao deslocamento ou às forças de superfície
a_j	Escalar
b_j, b_k	Componentes do vetor de forças volumétricas ou de forças de corpo
c	Velocidade de propagação da onda escalar
c_d, c_s	Velocidades de propagação longitudinal e transversal, respectivamente
e_p, e_q	Elementos consecutivos no contorno
$\mathbf{f}^n$	Vetor que possui apenas valores conhecidos
$f(q)$	Função definida no domínio
l_j	Comprimento do elemento de contorno presente na discretização
$\mathbf{n}$	Normal externa ao contorno
n	Números de pontos de integração de Gauss
nit	Número de intervalos de tempo
p_k	Força de superfície na direção k
p	Polinômio de grau p
$\mathbf{p}$	Vetor de forças de superfície nodais
$\overline{p}_i$	Componentes de força de superfície local ou prescrita
p_{ik}^*	Solução fundamental para força de superfície

r	Distância entre o ponto de observação e o ponto fonte
$r_{,i}$	Diferenciação de r na direção i
s, q	Pontos pertencentes ao domínio
t	Tempo
t'	Tempo retardado
t_{rw}	Condição de retardação
u_k	Deslocamento na direção k
u_{ik}^*	Solução fundamental para deslocamentos
$\bar{u}_i$	Componentes de deslocamento local ou prescrito
$\ddot{u}$	Componente da aceleração
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais
$\mathbf{x}$	Ponto campo onde será avaliada a reação das forças unitárias (onda escalar)
X	Ponto campo onde será avaliada a reação das forças unitárias (onda elástica)
x_i, y_i	Valores das coordenadas cartesianas
$\mathbf{x}^n$	Vetor que contém as incógnitas do sistema de equações do MEC
$\mathbf{y}^n$	Vetor que contém os valores das condições de contorno prescritas

Símbolos Gregos

a	Ângulo interno para calcular $C(x)$
a_p	Coeficiente de ponderação na integração numérica
b	Parâmetro de controle do passo de tempo
d_{ik}	Delta de Kronecker
$d(x)$	Função delta de Dirac
e_{ij}	Componentes do tensor de deformações
g	Função densidade
h	Coordenadas naturais
l, m	Constantes de Lamé para um meio elástico, isotrópico e homogêneo

n	Coeficiente de Poisson
r	Densidade da massa do corpo
s_{ij}	Componentes do tensor de tensões
t	Tempo de aplicação do impulso unitário
u	Velocidade
x	Ponto fonte onde a força unitária é aplicada
x_p	Ponto de integração
y	Coeficiente adimensional que relaciona as velocidades de propagação da onda
Φ_I, Φ_F	Funções de interpolação temporais (deslocamento)
N_a, M_a	Funções de interpolação espaciais lineares
N_j	Função de interpolação
N_0	Função de interpolação constante
N_1, N_2	Funções de interpolação lineares
Γ	Contorno do domínio para a formulação do MEC
Γ_1	Contorno do tipo Dirichlet (valor da função é prescrito)
Γ_2	Contorno do tipo Neuman (derivada da função na direção normal é conhecida)
Θ	Função de interpolação temporal (força de superfície)
T	Função escalar
Ω	Domínio físico para a formulação do MEC
∂	Derivada parcial
∇	Operador de Laplace

Siglas e Abreviaturas

ANELC	Análise Elastodinâmica com Elementos de Contorno
AutoCAD	Programa de CAD da Autodesk
BEAMflow	<i>Boundary Element-Method for flow-simulations in plastics processing</i>
BEASTS	<i>Boundary Element Analysis of Soil and Three-dimensional Structures</i>

BEASY	<i>Boundary Element Analysis System</i>
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
COMET/BEAT	<i>Boundary Element Analysis Technology</i>
DBEM	Método dos Elementos de Contorno Dual
DELPHI	Linguagem de programação
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
FORTTRAN	<i>Formula Translations</i>
GPBEAST	<i>General Purpose Boundary Element Software</i>
LINUX	Sistema operacional para microcomputadores
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
PHI3D®	<i>A 3D boundary element software for the analysis of electric and magnetic problems</i>
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional

1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O estudo e a análise da propagação da onda elástica através de meios contínuos têm uma grande importância no contexto da engenharia estrutural e nos trabalhos de geólogos e sismólogos. Os seus modelos matemáticos possuem aplicações práticas em diversas áreas da engenharia, principalmente na mecânica sísmica, onde auxilia na análise e detecção de reservatórios de petróleo, no cálculo e projeto de estruturas anti-sísmicas, no cálculo das fundações, além de outras aplicações na Acústica e Mecânica dos Fluidos, onde ajuda no estudo e análise do controle das vibrações por meio do uso de barreiras (isolamento acústico) e na análise numérica do escoamento e dos esforços hidrodinâmicos em comportas hidráulicas.

Na maioria dos casos, torna-se inviável a utilização de qualquer tratamento analítico para a solução da equação diferencial que governa o problema, devido à configuração geométrica complexa do meio contínuo, às condições de contorno e às condições iniciais impostas. Este fato obriga a que se recorra a diversas técnicas numéricas de resolução de equações diferenciais parciais, tais como o Método das Diferenças Finitas

(MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método das diferenças Finitas aproxima os operadores diferenciais nas equações do problema, utilizando expansões locais para as variáveis, geralmente séries de Taylor truncadas.

O Método dos Elementos Finitos é o método numérico mais utilizado na engenharia de estruturas. É uma técnica numérica fundamentada em princípios variacionais, ou mais genericamente, em expressões de resíduos ponderados. Consiste na divisão do volume ou domínio do sólido em um número finito de regiões chamadas elementos finitos, interconectados através de um número finito de pontos nodais chamados nós (FIG. 1.1). Na maioria das vezes, o MEF é eficiente na análise de problemas com geometrias complexas e com diferentes características dos materiais, apesar das dificuldades na modelagem de problemas envolvendo domínios semi-infinitos ou infinitos.

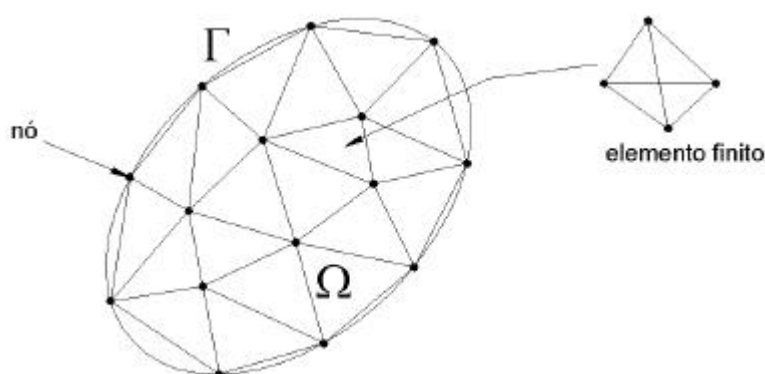


FIGURA 1.1 – Domínio bidimensional discretizado em elementos finitos

O Método dos Elementos de Contorno, ao contrário, com sua capacidade para satisfazer as condições de radiação e não precisar da modelagem do campo distante, é extremamente adequado para esta classe de problemas. Além destas, outras vantagens do método são a redução da dimensionalidade do problema a ser analisado, uma melhor captação dos efeitos de concentração de tensões, simplicidade na elaboração de problemas com fronteira variável e uma alta precisão numérica dos resultados.

A maioria dos trabalhos relacionados com o fenômeno da propagação de ondas foi analisada numericamente, utilizando a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC), que tem demonstrado ser eficaz e eficiente, quanto ao custo computacional, em comparação ao Método dos Elementos Finitos (MEF), que é utilizado constantemente em outras áreas da engenharia. O MEC se mostra apropriado para o estudo de problemas com domínios abertos, que é o interesse deste trabalho.

1.2 Método dos Elementos de Contorno (MEC)

O Método dos Elementos de Contorno é uma técnica de análise numérica alternativa bastante interessante em Ciências e Engenharia. O método baseia-se na transformação das equações diferenciais parciais, que descrevem o comportamento mecânico no interior e na superfície ou contorno de um sólido em equações integrais definidas apenas em termos de valores no contorno.

Em seguida, as equações integrais são resolvidas numericamente, a partir da discretização do contorno do sólido em segmentos chamados elementos de contorno, conectados (como no caso dos elementos finitos) por pontos discretos denominados nós. Um elemento de contorno é um trecho de superfície do contorno definido geometricamente por uma seqüência ordenada de nós, nos quais o elemento incide (FIG. 1.2).

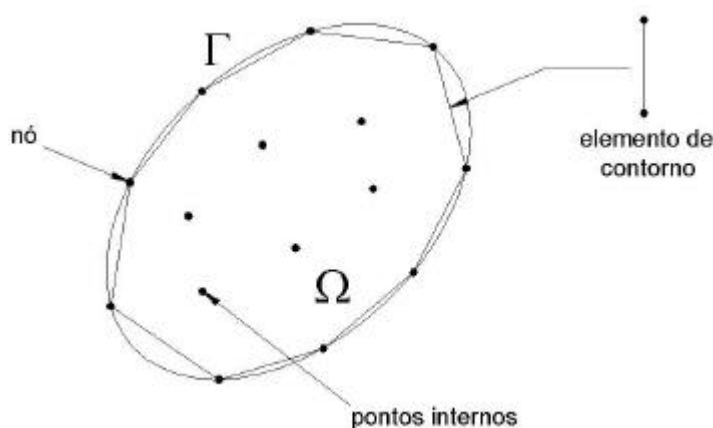


FIGURA 1.2 – Domínio bidimensional discretizado em elementos de contorno

O Método dos Elementos de Contorno pode ser formulado utilizando a formulação direta ou a formulação indireta. A formulação indireta possui a característica de não fornecer diretamente como solução o deslocamento e a força normal ao contorno, ao contrário da formulação direta, onde tem-se diretamente como incógnitas o deslocamento e a força de superfície ao contorno. Neste trabalho foi adotada a formulação direta.

No Método dos Elementos de Contorno a discretização é feita somente no contorno do domínio físico do problema; conseqüentemente, a dimensão do problema se reduz em uma unidade.

A abordagem de problemas envolvendo domínios físicos infinitos e semi-infinitos é feita de forma muito simples, sem a necessidade de adoção de artifícios especiais para reduzir o domínio físico a uma distância finita, utilizando-se, por exemplo, elementos especiais ou condições de contorno não refletivas (condição de radiação de Sommerfeld).

Os efeitos concentrados e localizados são bem captados pelo Método dos Elementos de Contorno, devido à característica singular da solução fundamental utilizada na sua formulação. Deste modo, consegue-se obter resultados satisfatórios sem a exigência de um elevado refinamento na região de concentração.

O cálculo das variáveis internas ao contorno (pontos internos) é feito a partir dos valores das variáveis no contorno, reaplicando-as na expressão integral do método. Este procedimento produz uma melhoria na qualidade dos resultados para as variáveis internas ao contorno, pois promove uma nova minimização dos resíduos na solução. Desta forma, os resultados tendem a ser mais precisos.

O Método dos Elementos de Contorno também apresenta desvantagens, dificuldades ou limitações no tratamento de certos tipos de problemas, embora tais restrições tenham amplitude relativamente reduzida em relação ao seu enorme campo de abrangência.

A primeira desvantagem do Método dos Elementos de Contorno encontra-se no fato de suas matrizes, geralmente, serem assimétricas e cheias, o que impede o uso de alguns algoritmos especialmente otimizados para solução de sistemas lineares de equações algébricas e a obtenção de auto-valores e auto-vetores. Tal desvantagem é contornada

com o uso de algoritmos numéricos mais genéricos que, embora mais complexos, podem ser aplicados às matrizes características do método.

O Método dos Elementos de Contorno, por ser uma técnica de contorno, não é muito versátil para a aplicação em problemas setorialmente não homogêneos, embora seja possível resolvê-los com o recurso de sub-regiões (CHANG (1979)), no qual cada setor homogêneo do domínio físico do problema é discretizado.

Outra dificuldade do Método dos Elementos de Contorno refere-se ao tratamento do que se pode denominar de “ações de domínio”, compreendendo qualquer tipo de força de corpo, fontes ou sorvedouros. Nesse caso, incluem-se os efeitos de inércia e outros que tipificam os casos dinâmicos e transientes.

Em tais problemas, onde existam ações de domínio presentes no modelo matemático, com a formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno não é possível transformar, somente utilizando os procedimentos tradicionais, as integrais de domínio das condições iniciais em integrais envolvendo variáveis apenas no contorno.

Muitos métodos têm sido desenvolvidos para expressar as integrais de domínio em integrais equivalentes de contorno, sendo as mais destacadas descritas a seguir de forma resumida:

Integrações por Células - nesta formulação precisa-se discretizar o domínio físico através de uma série de regiões, denominadas células, e utilizar um procedimento numérico para a integração do domínio. Isso implica na perda de um dos atrativos do método, devido ao fato de aumentar o volume de dados de entrada, além de ocasionar uma série de integrações extras (HUNTER & PULLAN (1997)).

Integrações Analíticas - esta aproximação só pode ser aplicada em situações onde a expressão analítica para uma solução particular pode ser encontrada. Infelizmente, as soluções particulares são geralmente conhecidas para operadores simples e para formas simples das ações de domínio (HUNTER & PULLAN (1997)).

Expansão por Série de Fourier - esta não é uma técnica muito conveniente para ser aplicada na maioria dos casos, pois apesar da generalidade do procedimento, o cálculo

dos coeficientes da expansão em série pode ser computacionalmente dispendioso. Esta técnica foi aplicada com sucesso para alguns casos relativamente simples (DOMINGUEZ (1992)).

Técnica do Vetor de Galerkin - esta técnica de aproximação numérica fornece um método simples de expressar as integrais de domínio em integrais equivalentes de contorno, utilizando uma solução fundamental de alta ordem e a identidade de Green (Teorema da Divergência). A principal dificuldade resulta na aplicação a problemas específicos de ações de domínio (PAULA & TELLES 1989).

Método de Múltipla Reciprocidade - foi proposto inicialmente por Nowak (1987) para a solução de problemas de condução de calor. O Método de Múltipla Reciprocidade pode ser visto como uma generalização da técnica do vetor de Galerkin; utilizando várias soluções fundamentais de alta ordem, ao invés de apenas uma solução fundamental, convertem-se as integrais restantes do domínio em integrais equivalentes do contorno (NOWAK (1995)).

Dupla Reciprocidade - o método de dupla reciprocidade foi desenvolvido por NARDINI & BREBBIA (1983), para evitar a necessidade de integrar no domínio nos casos onde a solução fundamental da equação diferencial é desconhecida. A técnica consiste na substituição da ação de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, capazes de serem operacionalizadas e na transformação das integrais em integrais de contorno através da aplicação do Teorema da Divergência. Da semelhança entre esse procedimento e o método tradicional de obtenção da forma integral inversa, resulta a denominação de Dupla Reciprocidade, pois, basicamente aplica-se o mesmo procedimento a ambos os lados da equação (PARTRIDGE *et al.* (1992)).

Finalmente, para problemas envolvendo termos inerciais, como é o caso da equação da onda, tem-se a denominada Formulação com Solução Fundamental Dependente do Tempo onde, como o próprio nome sugere, utiliza-se uma solução fundamental que engloba a variação temporal presente na equação de governo.

1.3 Estudos Sobre a Propagação da Onda

O conceito das ondas é fundamental na elastodinâmica, por que fornece uma maneira conveniente de descrever matematicamente e fisicamente a transmissão da energia, e inclusive a absorção da mesma. A propagação das ondas foi estudada principalmente por Poisson (1829), Rayleigh (1885), Lamb (1904) e Love (1911). Os trabalhos de Navier (1827), Cauchy (1829) e Lamé (1852) também contribuíram de maneira importante na compreensão do assunto.

A primeira aplicação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo foi feita por FRIEDMAN & SHAW (1962), que utilizaram a solução direta das equações diferenciais hiperbólicas. As pesquisas iniciais realizadas por estes autores se concentraram na representação da equação integral de Kirchoff (considerada a representação matemática do “princípio de Huygens¹”).

A primeira formulação direta dos métodos de contorno foi desenvolvida por RIZZO (1967), para resolver problemas elásticos, e que apresentava o método das integrais de contorno como um método numérico. A mesma técnica foi estendida para resolver problemas elastodinâmicos por CRUSE & RIZZO (1968), onde usaram a transformada de Laplace para obter a resposta transiente. Posteriormente NIWA *et al.* (1975), utilizando a mesma técnica resolveram o problema da dispersão da onda causado pela passagem das frentes de onda. COLE *et al.* (1978), aplicaram a formulação direta do MEC em problemas transientes e foram os primeiros a observar os problemas de instabilidades presentes na formulação. Mais tarde MANSUR (1983), mostrou que a adoção de passos de tempo pequenos poderia causar instabilidade, enquanto que passos de tempo muito grandes poderiam introduzir erros pela violação da condição de causalidade.

Foi BREBBIA (1978) quem apresentou uma formulação do método das equações integrais de contorno a partir da técnica de resíduos ponderados, e a partir daí o método

¹ O princípio de Huygens explica : “Cada ponto de uma frente de onda primária pode ser considerado como fonte de uma onda esférica secundária, e qualquer frente de onda secundária pode ser considerada como a envolvente das ondas esféricas geradas pelas fontes pontuais contidas na frente de onda primária”.

passou a ser denominado “Método dos Elementos de Contorno” (MEC). MANSUR & BREBBIA (1982) aplicaram o MEC na análise de problemas de propagação de ondas no domínio do tempo; a formulação do problema foi feita através de considerações de resíduos ponderados para obter a mesma equação integral de MORSE & FESHBACH (1953). A técnica foi estendida pelo próprio MANSUR (1983) para a equação da onda escalar, cuja formulação utiliza soluções fundamentais originadas das funções delta de Dirac de tempo e espaço em domínios infinitos. Nesse mesmo período NARDINI & BREBBIA (1983) criam uma técnica importante para resolver os problemas de ação de domínio, chamada “Dupla Reciprocidade” (Dual Reciprocity Technique), como alternativa à formulação com soluções fundamentais apresentada por MANSUR (1983).

Outros pesquisadores desenvolveram novas formulações do MEC no domínio do tempo, para a implementação computacional dos algoritmos na solução de problemas de propagação de onda. ISRAIL & BANERJEE (1990a, 1990b, 1990c, 1991), analisaram problemas elastodinâmicos bi e tridimensionais, usando funções variacionais temporais de alta ordem e soluções fundamentais derivadas da propriedade de causalidade das ondas. WANG & TAKEMIYA (1992) resolveram problemas bidimensionais de propagação de onda escalar, sendo que na formulação empregada as integrações espaciais e temporais são obtidas analiticamente, utilizando o método de Cagniard-De Hoop. MANOLIS & BESKOS (1998), ampliaram o trabalho de CRUSE & RIZZO (1968) utilizando um algoritmo modificado para a inversão da transformada de Laplace para analisar concentração de tensões em problemas estacionários. DOMINGUEZ (1994) utilizou uma formulação no domínio da frequência para analisar fundações em um semi-espaço. WANG *et al.* (1997), apresentaram uma nova formulação do MEC no domínio do tempo para a análise elastodinâmica transiente bidimensional chamado QC (*Quadratic and Constant Temporal Variations*). O Método utiliza variações temporais quadráticas para o deslocamento e variações temporais constantes para as forças de superfície.

Com o objetivo de obter respostas menos instáveis no domínio do tempo alguns pesquisadores empregaram um esquema de marcha no tempo que não incrementa erros de integração. Tal esquema é o denominado θ -linear, procedimento que utiliza o princípio do método de Wilson na formulação de elementos de contorno no domínio do

tempo. YU *et al.* (1998a) utilizou a técnica para resolver problemas bidimensionais de propagação escalar da onda com o MEC e com o acoplamento MEC-MEF. CODA & VENTURINI (1996) lograram melhoras na estabilidade pelo uso de uma solução fundamental tridimensional modificada. Outros trabalhos desenvolvidos por YU *et al.* (1998b, 2000) utilizam a formulação de Galerkin aplicada à equação da onda escalar bidimensional e apresentaram bons resultados quando comparados à formulação direta do MEC.

Nos últimos anos, o desenvolvimento acentuado da tecnologia de análise numérica em engenharia tem motivado a criação de programas de computador para serem utilizados na resolução de estruturas cada vez mais complexas, envolvendo diversos tipos de elementos estruturais e também elementos mais sofisticados. A “eficiência” em tais programas é usualmente definida em termos da capacidade de armazenamento de grandes sistemas de equações na memória do computador e da precisão e rapidez do processamento numérico. Os sistemas de análise em engenharia têm sido codificados em FORTRAN (*Formula Translation*), por ser uma linguagem mais “eficiente” para problemas numéricos.

A entrada dos dados em um programa para análise estrutural feito em FORTRAN é geralmente organizada em arquivos em formato texto. Em outras palavras, consiste de uma quantidade considerável de informações relativas à definição da geometria, carregamentos, materiais e condições de contorno preenchidas em arquivos grandes e de difícil manutenção. A montagem manual desse arquivo pode se tornar uma tarefa muito complicada, dependendo da complexidade do problema, induzindo à ocorrência de erros difíceis de serem detectados e corrigidos. Além disso, uma discretização adequada da estrutura é fundamental para a qualidade da solução numérica e é praticamente impossível de ser obtida sem o auxílio de algum processo automático. Por isso, a utilização de componentes *pré-processadores* em sistemas de análise estrutural, responsáveis pela discretização automática do domínio e verificação dos dados de entrada, não é somente conveniente, mas também essencial. Por outro lado, os resultados de saída tendem a produzir extensas listagens numéricas, que não permitem ou até mesmo impossibilitam uma interpretação mais imediata dos valores obtidos na análise. Nesse caso, é vantajoso que as distribuições de grandezas, tais como

deslocamentos, tensões, forças e momentos possam ser representadas graficamente. Componentes de *pós-processamento*, responsáveis pela organização dos arquivos de saída e visualização dos resultados do processamento são igualmente essenciais em programas de engenharia.

Nesse contexto, o desempenho e a aplicação do sistema não são definidos apenas pela eficiência da análise, mas também pela interface com o usuário. Programas que são complicados ou confusos de serem utilizados, ou que oferecem poucas possibilidades de entrada de dados e de visualização de resultados são, sob o ponto de vista do usuário, muito pouco úteis e interessantes. Ao contrário, os sistemas que dispõem de recursos de interação são mais atrativos, mesmo quando possuem um campo mais restrito de aplicações.

Um exemplo de desenvolvimento de sistemas interativos baseados na formulação do Método dos Elementos de Contorno é o BEASY (Boundary Element Analysis System), cuja função principal é simular o comportamento de produtos ou de sistemas industriais. Ele pode ser utilizado na análise das tensões, da transferência de calor, da corrosão, na detecção de problemas de fadiga, problemas de interação entre estruturas, na análise acústica ou na análise de qualquer tipo de problemas de campos, tais como eletrostáticos e magnetostáticos.

O COMET/BEAT é uma ferramenta de simulação computacional, que permite resolver problemas vibro-acústicos em componentes estruturais. O COMET/BEAT utiliza a formulação direta e indireta do MEC, assim como o Método dos Elementos Finitos para descrever o comportamento da propagação, radiação e dispersão das ondas acústicas em fluidos, materiais elasto-porosos tipo fibras (*foam*), em estruturas ou sólidos e suas interações com os componentes.

O GPBEST 6.0 (*General Purpose Boundary Element Software*) é um sistema completo para análise de problemas de engenharia. O GPBEST é capaz de realizar análise elástica de tensões, análise dinâmica, análise de transferência de calor, análise acústica, análise de fenômenos não-lineares, análise geotécnica e análise da mecânica da fratura.

O BEASTS (*Boundary Element Analysis of Soil and Three-dimensional Structures*) é um programa computacional desenvolvido pela Universidade de Southampton (*Institute of Sound and Vibration Research Dynamics Group*) para ser utilizado na análise de problemas de vibração tridimensionais gerados pela propagação da onda no domínio da frequência.

O BEMflow é um software desenvolvido para a simulação tridimensional de problemas de fluxo no processo de polímeros pela Universidade de Wisconsin-Madison (The Madison Group: Polymer processing Research Corp.). O PHI3D® é uma ferramenta para análise tridimensional de problemas eletrostáticos e magnetostáticos, desenvolvido no Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon (Ecole Centrale de Lyon, CNRS) em parceria com a CEDRAT TECHNOLOGIES.

Quando se trabalha com estruturas infinitas (semi-infinitas) ou solos, uma solução analítica pode ser derivada para representar a resposta da excitação na superfície ou no interior do solo. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma poderosa ferramenta, devido a sua capacidade de reduzir a dimensão do problema (isto representa uma economia considerável da quantidade de dados necessária para definir a malha a ser utilizada na discretização do problema e do esforço computacional, uma vez que o sistema de equações resultante é formado por matrizes com dimensões menores do que as matrizes que seriam produzidas por outros métodos numéricos) e à habilidade inerente de satisfazer às condições de radiação.

Uma variedade de problemas que envolvem domínios abertos pode ser analisada utilizando modelos bidimensionais. Para a análise da redução da vibração utilizando trincheiras abertas foi desenvolvido o ANELC (Análise Elastodinâmica com Elementos de Contorno), ferramenta que combina o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com um pré/pós-processamento, necessários para a manipulação de uma grande quantidade de dados e visualização de um grande volume de informação com suas respectivas representações gráficas.

1.4 Isolamento da Onda Elástica por meio de Trincheiras

A vibração do solo pode ser causada pelo funcionamento constante de máquinas ou por meio de tráfego intenso, gerando desconforto para os seres humanos e até mesmo podendo causar danos estruturais. Por tudo isto, torna-se necessária e valiosa a capacidade de poder controlar as fontes de vibração e seus níveis. Uma das formas de isolamento de estruturas e fundações de máquinas das vibrações transmitidas pelo solo é feita por meio da instalação de barreiras de onda. O isolamento da vibração por meio de barreiras atua na reflexão, dispersão e difração da energia da onda. Estas barreiras podem estar constituídas por sólidos, líquidos ou simplesmente por espaços vazios.

As ondas superficiais podem ser reduzidas, colocando-se uma barreira entre a fonte de vibração e a área a ser protegida. Entretanto, este método não é eficaz para ondas internas ou de corpo, onde o sentido da transmissão das ondas é vertical. Os termos proteção ativa e passiva são usados para descrever a colocação das barreiras. Se a barreira está perto da fonte, ela é chamada de proteção ativa. Se estiver perto da área a ser protegida, esta é chamada de proteção passiva.

As trincheiras abertas ou cheias foram utilizadas por anos como barreiras para isolar a vibração do solo, sob o efeito de carregamentos transientes. Muitos pesquisadores têm realizado estudos e trabalhos sobre esta área tão importante. WOODS (1968) foi o primeiro a realizar um trabalho baseado em uma aproximação experimental para estudar o efeito da reflexão das trincheiras abertas. LYSMER & WAAS (1972), utilizando o método da massa discreta, estudaram a eficácia de uma trincheira reduzindo o movimento horizontal da onda de cisalhamento induzido por um carregamento harmônico que atua em uma fundação rígida, que se encontra na camada horizontal. SEGOL *et al.* (1978) utilizaram os elementos finitos, ao longo de um contorno especial sem reflexão, para pesquisar a eficiência da isolação das trincheiras abertas e das trincheiras cheias com uma mistura fraca de bentonita em solos compostos por diferentes camadas. YANG & HUNG (1997) usaram elementos finitos/infinitos para analisar parametricamente o efeito do isolamento das trincheiras abertas, das trincheiras cheias e das fundações elásticas.

Outros trabalhos relacionados que merecem ser mencionados aqui são os de BESKOS *et al.* (1986), que apresentaram uma formulação bidimensional utilizando o Método dos Elementos de Contorno para a análise de uma barreira em um semi-espaço visco-elástico. AHMAD & AL-HUSSAINI (1991) desenvolveram um método simplificado para a predição da efetividade das barreiras de onda retangulares em solos homogêneos, utilizando um modelo numérico com o Método dos Elementos de Contorno. AL-HUSSAINI & AHMAD (1991) pesquisaram a eficiência das barreiras de onda retangulares para reduzir a vibração horizontal do solo. A pesquisa foi feita utilizando um algoritmo que implementa o Método dos Elementos de Contorno.

HUNG & YANG (2001) apresentaram trabalhos de pesquisa centralizados nos problemas de vibrações que nascem do solo e que são induzidas pelas cargas do tráfego, especialmente aquelas produzidas pelos trens. Observações foram feitas a respeito do desenvolvimento de técnicas de isolamento da onda.

Se um carregamento oscilante é aplicado em um espaço elástico, homogêneo e infinito, dois tipos de ondas denominadas de ondas internas ou de corpo são originadas pelo carregamento. As ondas longitudinais são denominadas ondas de compressão, primárias ou simplesmente ondas-P. Durante a passagem de uma onda longitudinal, as partículas do corpo vibram na mesma direção da propagação da onda (FIG. 1.3-a). As ondas transversais são denominadas ondas de cisalhamento, secundárias ou simplesmente ondas-S. Durante a passagem das ondas transversais, as partículas do corpo vibram perpendicularmente em relação à direção de propagação destas ondas (FIG. 1.3-b).

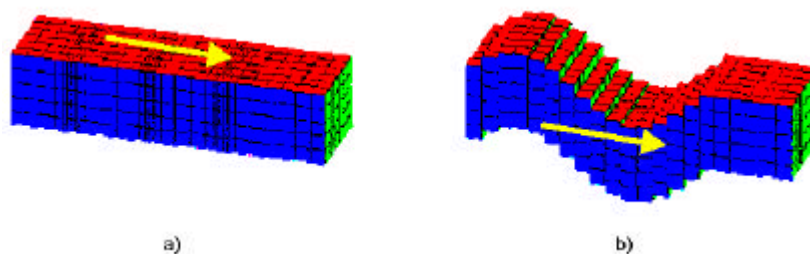


FIGURA 1.3 – Representação do modo de propagação das ondas P e S

Entretanto, em um meio semi-infinito é possível encontrar um terceiro tipo de ondas, chamadas de ondas superficiais, devido ao fato de se propagarem pela superfície do

solo, diminuindo sua amplitude com a profundidade. Exemplos de ondas superficiais são as ondas Rayleigh e as ondas Love.

As ondas Rayleigh (ondas-R) são formadas na superfície livre da terra. Elas fazem com que as partículas se desloquem verticalmente de forma elíptica e retrógrada (FIG.1.4-a). As ondas Love se originam na interface de dois meios com propriedades mecânicas diferentes. Neste caso, o movimento das partículas é horizontal e perpendicular ao sentido da propagação da vibração, similar à onda de distorção ou secundária, exceto por ocorrer no plano da superfície terrestre. Em relação à onda Rayleigh, a onda Love se desloca mais rapidamente (FIG. 1.4-b).

As ondas Rayleigh são os parâmetros mais significativos a serem considerados em problemas de vibração do solo, porque quando geradas em condições ideais, sofrem menos dispersão, decaindo com a distância em relação às ondas de corpo ou internas (ondas-P e ondas-S).

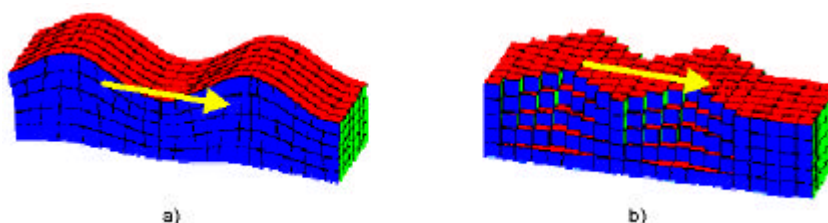


FIGURA 1.4 – Representação do modo de propagação das ondas Rayleigh e Love

1.5 Objetivo

O objetivo principal do presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma ferramenta computacional chamada ANELC (Análise Elastodinâmica com Elementos de Contorno), baseada no Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo, para o estudo e análise dos fenômenos da propagação da onda elástica. O programa foi desenvolvido na linguagem DELPHI (linguagem de programação visual e orientada a eventos), a partir de um programa computacional feito em FORTRAN por CARRER & MANSUR (1999).

O sistema foi implementado de tal forma que respeita quatro propriedades, que segundo o ponto de vista do autor, são importantes em um programa com modelagem estrutural: o programa tem que ser funcional, extensível, eficiente e fácil de usar. O ANELC é um sistema gráfico interativo, cujo objetivo principal é fornecer ao usuário uma ferramenta para aprender e entender o comportamento da propagação da onda elástica em um meio finito ou semi-infinito.

O sistema consiste de uma interface gráfica com o usuário baseada na manipulação direta, utilizando um sistema múltiplo de “janelas”, barras de ícones, caixas de diálogo, menus em cascata e botões, facilitando o controle sobre o modelo estrutural sendo analisado. A manipulação no modelo é feita através da entrada de dados via arquivo ou componentes visuais.

O programa integra todas as fases do processo de análise estrutural: criação e manipulação do modelo (pré-processamento), análise numérica e visualização dos resultados (pós-processamento). Esta integração é o aspecto fundamental no processo de aprendizagem, permitindo ao usuário experimentar com rapidez diferentes concepções da propagação da onda em uma estrutura e, assim, entender melhor o seu comportamento.

Esse trabalho avaliou também como se comporta a aplicação do Método dos Elementos de Contorno no estudo da redução da vibração (isolamento), utilizando barreiras bidimensionais (trincheiras abertas). Foram analisados três modelos numéricos, que representam um meio semi-infinito, sob o efeito da aplicação de um carregamento, com a presença de uma trincheira aberta.

1.6 Organização da Dissertação

O presente trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, dos quais a presente introdução é o primeiro. O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos importantes para a formulação do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo, que serão utilizados na implementação computacional do ANELC. O Capítulo 3 faz uma breve descrição da formulação matemática utilizada na

implementação numérica do programa computacional desenvolvido, ou seja, a teoria da propagação da onda elástica é descrita.

No Capítulo 4, descreve-se o sistema gráfico interativo desenvolvido, mostrando os processos da implementação computacional realizada, as estruturas de dados implementadas, as interfaces gráficas utilizadas nos componentes de pré-processamento e pós-processamento.

No Capítulo 5, apresenta-se uma série de exemplos numéricos que foram analisados a fim de obter a simulação da propagação da onda elástica, além de avaliar a funcionalidade e a eficiência do programa implementado (ANELC).

Por fim, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões e as contribuições obtidas na realização desse trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros, que poderão ser desenvolvidos utilizando como base o presente trabalho.

2

CONCEITOS GERAIS

Neste Capítulo são vistos alguns conceitos importantes para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo para problemas bidimensionais.

2.1 Elasticidade

A formulação matemática será fundamentada na suposição de que a matéria que compõe os corpos sólidos seja destituída de espaços vazios. Será admitido, também, que todas as funções matemáticas utilizadas na teoria sejam contínuas, exceto, possivelmente, em um número finito de pontos ou em superfícies internas que separam regiões de continuidade. Denomina-se este material hipotético de meio contínuo.

2.1.1 Tensão

Forças externas atuando sobre um corpo em equilíbrio provocam o surgimento de forças internas que se distribuem por todo seu volume. A tensão é definida pela razão entre a força resultante e a área sobre a qual atua a força. As forças externas que atuam sobre o

corpo podem ser classificadas em duas categorias: forças de volume e forças de superfície.

Forças de volume - são forças que atuam sobre elementos de volume ou de massa do interior de um corpo; como exemplos, têm-se as forças gravitacionais, magnéticas ou de inércia (no caso do corpo estar em movimento), FIG. 2.1 (força de volume $\mathbf{b}$).

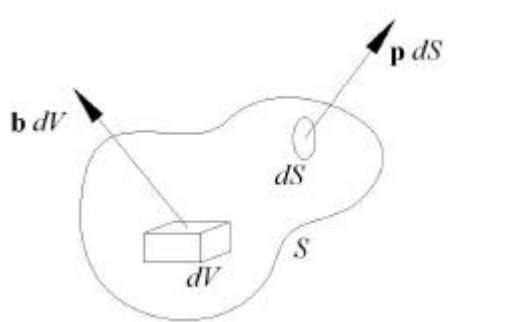


FIGURA 2.1 – Forças de volume e de superfície

Forças de superfície - são forças de contato que atuam sobre elementos do contorno de um corpo e, como exemplo, têm-se a pressão hidrostática ou a pressão que um corpo exerce sobre o outro, FIG. 2.1 (força de superfície $\mathbf{p}$).

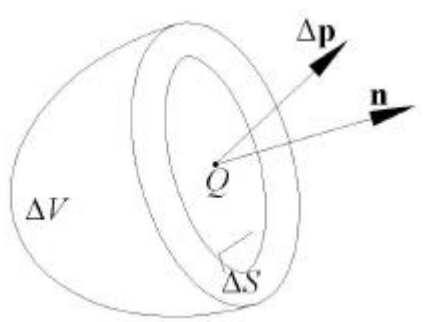


FIGURA 2.2 – Tensão em um ponto Q

A expressão para o vetor de tensão em um ponto Q da superfície de um corpo (FIG. 2.2), segundo uma direção qualquer definida por uma normal $\mathbf{n}$, pode ser obtida a partir dos vetores de tensão no ponto Q , sobre planos perpendiculares aos eixos coordenados. Este tensor de tensão no ponto Q , tem a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

A notação para distinguir os nove componentes de $\mathbf{s}$ é mostrada na FIG. 2.3. O primeiro índice indica o plano de atuação e o segundo índice indica a direção de atuação, considerada positiva no sentido positivo do eixo coordenado correspondente. Os componentes s_{ii} representam as componentes *normais* de tensão; os componentes s_{ij} , $i \neq j$, representam os componentes de *cisalhamento* de tensão. O tensor de tensões de Cauchy, quando não há momentos de volume, é simétrico, ou seja,

$$s_{ij} = s_{ji}. \quad (2.2)$$

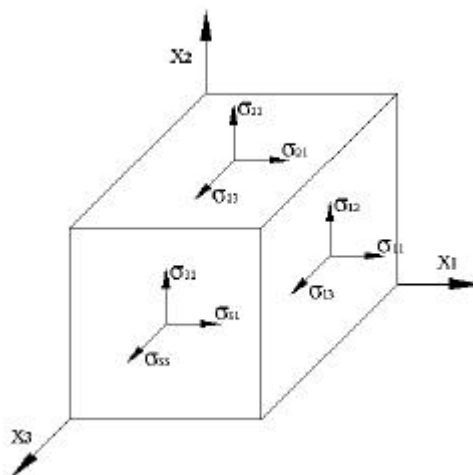


FIGURA 2.3 – Componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy

A expressão 2.2 pode ser obtida a partir da consideração de equilíbrio de um paralelepípedo elementar definido em torno de um ponto Q , onde as forças de volume são desprezadas, porque representam um infinitésimo de ordem superior em relação às forças de superfície. Os momentos devidos a não uniformidade de distribuição das tensões normais também são desprezados por representarem infinitésimos de ordem superior em relação aos momentos originados pelas tensões cortantes.

Pode-se obter o vetor de tensão sob um plano arbitrário passando em um ponto Q da superfície de um corpo como segue: se o corpo está em equilíbrio, qualquer porção desse corpo também deve estar em equilíbrio. Considera-se, então, um tetraedro “muito pequeno” extraído do corpo em consideração, ao redor do ponto Q , como mostrado na FIG. 2.4-a. Este tetraedro é denominado tetraedro de Cauchy, sendo composto por três faces perpendiculares aos eixos coordenados, cujas normais apontam no sentido negativo desses eixos, e por uma face inclinada definida por um vetor normal $\mathbf{n}$. O equilíbrio em cada direção pode ser expresso a partir das forças que atuam no tetraedro, Eq. 2.3 e mostrado na FIG. 2.4-b, sendo que $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ representa as componentes das forças de volume FIG. 2.4-a e FIG. 2.4-b.

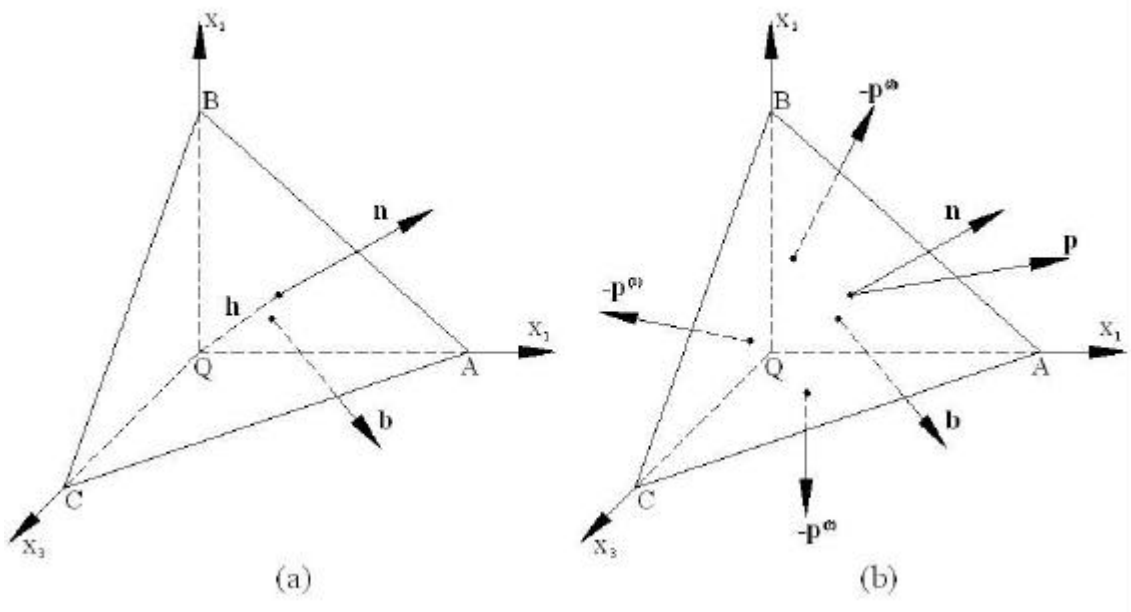


FIGURA 2.4 – Tetraedro de Cauchy

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(1)}n_1 + \mathbf{p}^{(2)}n_2 + \mathbf{p}^{(3)}n_3 + \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

No limite, quando o tamanho do tetraedro tende a zero, sua altura, h , também tende a zero (FIG. 2.4-a), anulando o efeito da força de volume e obtemos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \mathbf{s},$$

$$p_i = s_{ji}n_j \text{ em notação indicial.} \quad (2.4)$$

A Eq. 2.4 é chamada *transformação de tensão de Cauchy* e relaciona os componentes do vetor de tensão em um ponto de um plano de normal $\mathbf{n}$, com os componentes do tensor de tensões no ponto.

2.1.2 Deformações

Para um corpo deformado em que apenas se considerem pequenos deslocamentos e pequenas deformações, estas podem ser relacionadas com os deslocamentos através da relação:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.5)$$

ou

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.6)$$

2.1.3 Equações de Equilíbrio

O conceito de equilíbrio utilizado para derivar a transformação de tensão de Cauchy, Eq. 2.4, também pode ser aplicado para derivar uma relação fundamental entre as derivadas espaciais dos componentes de tensão. Considerando o equilíbrio estático de um corpo, e aplicando a transformação de tensão de Cauchy, o resultado final é a equação de equilíbrio.

$$\frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0. \quad (2.7)$$

$$s_{ji,j} + b_i = 0. \quad (2.8)$$

A Eq. 2.8 é uma expressão particular, para o caso do equilíbrio estático, do princípio geral de conservação do momento, do qual resultam as equações de movimento de Cauchy.

2.1.4 Relações Constitutivas

As relações entre as tensões e deformações caracterizam o comportamento de um material específico e são denominadas relações constitutivas, ou equações constitutivas. Apenas os materiais elásticos serão abordados aqui. Além disso, será admitido que esses materiais são homogêneos.

As relações constitutivas elásticas, ou lei de Hooke generalizada, são nove equações que expressam as componentes de tensão como funções lineares homogêneas das nove componentes de deformação. Se for admitida a hipótese de pequenos deslocamentos, pequenas deformações e pequenas rotações, nenhuma distinção precisa ser feita entre as coordenadas materiais e espaciais e as relações constitutivas elásticas podem ser escritas em função do tensor de Cauchy σ e do tensor de pequenas deformações e como:

$$s_{ij} = C_{ijrs} e_{rs}, \quad (2.9)$$

onde C_{ijrs} é o tensor de quarta ordem, ou tensor de módulos elásticos. Além das suposições a respeito da continuidade e homogeneidade do contínuo admitidas até agora, as equações constitutivas serão particularizadas para o caso de materiais isótropos.

Com a consideração da hipótese da isotropia, o tensor de módulos elásticos C_{ijrs} é um tensor isotrópico de quarta ordem definido como:

$$C_{ijrs} = l d_{ij} d_{rs} + m (d_{ir} d_{js} + d_{is} d_{jr}), \quad (2.10)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé e δ_{ij} é o delta de Kronecker. A versão isotrópica da lei de Hooke, Eq. 2.9, é mostrada a seguir:

$$s_{ij} = l e_{kk} d_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2.11)$$

A relação inversa da Eq. 2.9, que expressa deformações em função de tensões, é dada por:

$$e_{ij} = -\frac{l d_{ij}}{2m(3l + 2m)} s_{kk} + \frac{1}{2m} s_{ij}. \quad (2.12)$$

As constantes de Lamé são relacionadas com o módulo de cisalhamento G , o módulo de elasticidade E (ou módulo de Young) e o coeficiente de Poisson ν , como segue:

$$G = m = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad l = \frac{nE}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.13)$$

ou

$$E = \frac{m(3l + 2m)}{l + m} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{l}{2(l + m)}. \quad (2.14)$$

Usando as identidades (Eq. 2.13), a Eq. 2.12 é escrita como:

$$e_{ij} = -\frac{n}{E} s_{kk} d_{ij} + \frac{1+\nu}{E} s_{ij}. \quad (2.15)$$

2.2 Sistema de Coordenadas Naturais

Nos elementos de contorno bidimensionais, aplica-se uma transformação de coordenadas do sistema global X para um sistema de coordenadas do elemento, de forma a operacionalizar as integrações nele realizadas. Este sistema de coordenadas é denominado de sistema de coordenadas naturais ou normais. Tal sistema independe da forma do elemento de contorno, sendo a origem do sistema, $\eta = 0$, centrada ao longo do comprimento do elemento. O sistema é escalonado de tal forma que $\eta = -1$ no extremo esquerdo do elemento e $\eta = +1$ no extremo direito do elemento, FIG. 2.5.

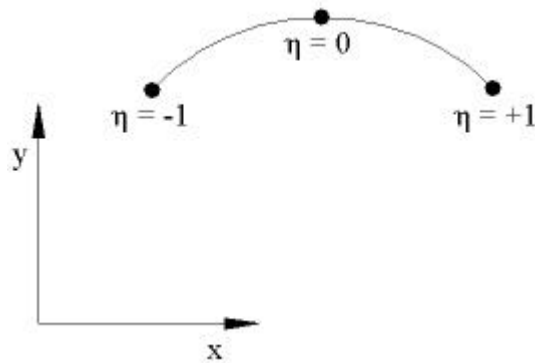


FIGURA 2.5 – Representação do Sistema de Coordenadas Naturais

A transformação de coordenadas efetuadas fornece uma normalização do comprimento do elemento de contorno, que, neste caso, encontra-se sempre limitado ao intervalo $[-1, 1]$.

A utilização do sistema de coordenadas naturais é conveniente principalmente por dois aspectos:

- 1 Sua adoção facilita a padronização e construção das funções de interpolação, responsáveis pela interpolação das grandezas físicas e geométricas ao longo do elemento.
- 2 Para a aplicação dos métodos de integrações numéricas, como no caso da quadratura de Gauss, onde os coeficientes e os pesos da quadratura já se encontram normalizados para o intervalo de integração de -1 a 1 (justamente o intervalo do sistema de coordenadas naturais).

2.3 Funções de Interpolação Polinomiais

As funções de interpolação são utilizadas para aproximar tanto as variáveis básicas do problema, quanto a geometria de um determinado elemento de contorno, através de valores definidos em determinados pontos sobre o elemento, chamados pontos nodais ou nós. Quando as funções de interpolação são utilizadas para aproximar a geometria, tais funções recebem a denominação de funções de forma, pois determinam a forma do elemento.

Neste trabalho, utilizaram-se as funções de interpolação polinomiais como sendo as funções de interpolação e as funções de forma. É necessário destacar que as funções de interpolação e as funções de forma formam dois conjuntos de funções independentes, pois pode-se utilizar polinômios de graus diferentes para as aproximações das variáveis do problema e da geometria.

A idéia central na aplicação das funções de interpolação consiste em expressar uma função escalar qualquer $T(\eta)$ como uma combinação linear, dada pela seguinte expressão:

$$T(h) = \sum_{j=1}^n N_j a_j, \quad (2.16)$$

sendo N_j as funções de interpolação e os valores dos escalares a_j definidos como sendo os valores da grandeza escalar nos pontos nodais, isto é:

$$T(h_j) = T_j = a_j, \quad (2.17)$$

Assim, as aproximações realizadas com tais funções seguem a estrutura geral, dada pela equação:

$$T(h) = \sum_{j=1}^n N_j(h) T_j. \quad (2.18)$$

sendo T a variável que se deseja aproximar, que pode ser o deslocamento u ou a força de superfície p , por exemplo. Neste caso, as funções N são denominadas funções de interpolação, pois interpolam o campo das variáveis. Caso T represente as coordenadas cartesianas do elemento, as funções N são denominadas funções de forma, pois determinam a forma do elemento.

A seguir, apresentam-se dois tipos de funções de interpolação polinomiais utilizadas.

2.3.1 Função de Interpolação Constante

Trata-se do tipo de interpolação mais simples, onde não é admitida nenhuma variação da função que se deseja aproximar ao longo do sistema de coordenadas naturais, FIG. 2.6.

$$N_0(h) = 1 \quad (2.19)$$



FIGURA 2.6 – Função de interpolação constante

2.3.2 Função de Interpolação Linear

Neste caso, a função que se deseja aproximar pode variar linearmente ao longo do sistema de coordenadas naturais, sendo que os valores de T_1 e T_2 são os valores nodais da função nos pontos com coordenadas naturais $\eta = -1$ e $\eta = +1$, respectivamente (FIG. 2.7).

$$N_1(h) = \frac{1}{2}(1-h) \quad N_2(h) = \frac{1}{2}(1+h) \quad (2.20)$$

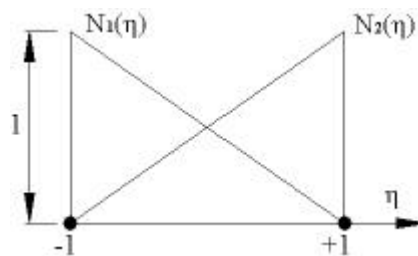


FIGURA 2.7 – Funções de interpolação linear

2.4 Cálculo do Jacobiano

Durante a fase de implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno, torna-se necessário o cálculo do jacobiano da transformação do sistema de coordenadas globais do elemento para o sistema de coordenadas naturais utilizadas ao longo de cada elemento do contorno. Isto ocorre porque as funções de interpolação utilizadas encontram-se expressas em termos do sistema de coordenadas naturais. Além disso, os limites das integrações realizadas ao longo de cada elemento de contorno estão no sistema de coordenadas cartesianas globais e também devem ser transformados.

Expressa-se então a seguinte transformação de coordenadas:

$$d\Gamma = |J|dh, \quad (2.21)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

De acordo com os princípios da geometria diferencial, tem-se que $d\Gamma$ pode ser aproximado pela Eq. 2.22, (FIG. 2.8), a seguir:

$$(d\Gamma)^2 = (d\Gamma_x)^2 + (d\Gamma_y)^2. \quad (2.22)$$

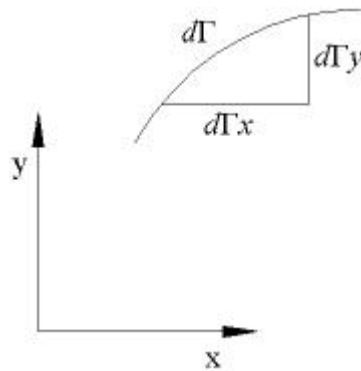


FIGURA 2.8 – Representação bidimensional de $d\Gamma$

Operacionalizando a Eq. 2.22 chega-se à seguinte expressão:

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x}{dh}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y}{dh}\right)^2} dh. \quad (2.23)$$

Substituindo-se a Eq. 2.21 na Eq. 2.23, encontra-se a expressão que representa o Jacobiano, para o caso bidimensional, dada a seguir:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x}{dh}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y}{dh}\right)^2}. \quad (2.24)$$

Na seção seguinte, são apresentadas as expressões analíticas para o cálculo do Jacobiano para o caso dos elementos de contorno, utilizando funções de forma lineares, pois elementos de contorno constantes e lineares utilizam-se de funções de forma lineares, ou seja, os Jacobianos são idênticos.

2.4.1 Cálculo do Jacobiano para Elemento de Contorno Linear

As derivadas indicadas na Eq. 2.24 podem ser obtidas diretamente a partir da Eq. 2.18, que, neste caso, relaciona a variação das coordenadas globais com os seus valores nodais através das funções de forma. Então:

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial h} = \frac{\partial N_1}{\partial h} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial h} x_2 \quad \frac{\partial \Gamma_y}{\partial h} = \frac{\partial N_1}{\partial h} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial h} y_2, \quad (2.25)$$

onde x_i e y_i representam os valores das coordenadas cartesianas dos pontos iniciais e finais do elemento.

Utilizando as expressões para as funções de forma lineares, Eq. 2.20, tem-se:

$$\frac{\partial N_1}{\partial h} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_2}{\partial h} = +\frac{1}{2} \quad (2.26)$$

Desenvolvendo a expressão para o Jacobiano, obtém-se então:

$$|J| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} . \quad (2.27)$$

Tal Equação para o Jacobiano pode ser interpretada como sendo a metade do comprimento do elemento. Observa-se que neste caso o Jacobiano apresenta um valor constante ao longo de todo o elemento, isto é, não varia com a alteração da coordenada adimensional η .

2.5 Funções Delta de Dirac e Heaviside

Antes de aplicar o Método dos Elementos do Contorno para um problema em particular, deve-se primeiramente obter a solução fundamental, procedimento que é similar à idéia de obter uma solução particular para uma equação diferencial ordinária. As soluções fundamentais obtidas podem ser convenientemente representadas utilizando as funções Delta de Dirac² ou Heaviside³, que serão tratadas a seguir.

2.5.1 Função Delta de Dirac

A função delta de Dirac (FIG. 2.9), também conhecida como função pulso retangular unitário, é uma função geral, a qual pode ser definida como o limite de uma função normal, a qual é zero para todos os pontos do domínio, exceto para o ponto em que o argumento da função é zero, neste ponto o limite tende para um valor infinito. Como definido na Eq. (2.28)

$$\begin{cases} d(x-a) = 0 & \text{quando } x \neq a \text{ e} \\ d(x-a) = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{e} & a - \frac{e}{2} \leq x \leq a + \frac{e}{2} \end{cases} \quad (2.28)$$

As derivadas da função delta de Dirac são representadas por:

² Paul A.M. Dirac (1902-1994), ganhou o Premio Nobel (com Erwing Schrodinger) em 1933 por seu trabalho em mecânica quântica. Dirac introduziu a idéia da função delta de Dirac de maneira intuitiva, por volta de 1926-27.

³ Oliver Heaviside (1850-1925), físico britânico precursor do estudo matemático de circuitos elétricos, ajudou a desenvolver a análise vetorial.

$$\begin{cases} d^{(k)}(x-a) = 0 & \text{quando } x \neq a \text{ e} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d^{(k)}(x-a) f(x) dx = (-1)^k f^{(k)}(a), \end{cases} \quad (2.29)$$

onde $d^{(k)}(x-a)$ e $f^{(k)}(a)$ são definidos, respectivamente, como:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} d(x-a) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x) \Big|_{x=a} \quad (2.30)$$

Quando o domínio Ω bidimensional ou tridimensional é considerado, a função delta de Dirac pode ser definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} d(q-s) = 0 & \text{quando } s \neq q \text{ e} \\ \int_{\Omega} d(q-s) f(q) d\Omega(q) = f(s), \end{cases} \quad (2.31)$$

onde s e q representam dois pontos pertencentes ao domínio Ω .

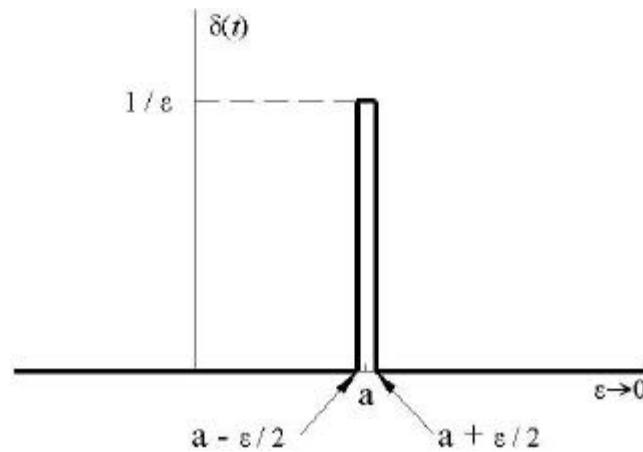


FIGURA 2.9 – Função Delta de Dirac

2.5.2 Função Heaviside

A função Heaviside (FIG. 2.10) ou função de intervalo unitário é útil para modelar uma função que seja gerada sobre um tempo finito t (para funções dependentes do tempo),

ou somente para determinados valores acima (ou abaixo) de x (para funções dependentes da posição).

$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{se } x < a. \end{cases} \quad (2.32)$$

As funções Delta de Dirac e Heaviside podem ser relacionadas uma com a outra, como segue:

$$\frac{d}{dx} H(x-a) = \delta(x-a). \quad (2.33)$$

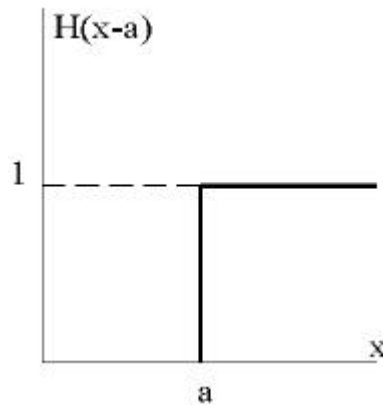


FIGURA 2.10 – Função Heaviside

2.6 Tipos de Elementos de Contorno

Para a discretização das equações integrais envolvidas, conforme Capítulo 3, faz-se necessária a divisão do contorno Γ em elementos distintos, sobre os quais são definidas as variações das grandezas envolvidas no problema, o deslocamento e a força de superfície, em função dos valores calculados em determinados pontos nos elementos. Tais pontos são denominados pontos nodais funcionais ou nós funcionais.

Os nós geométricos ou pontos nodais geométricos são utilizados para definir a geometria do elemento de contorno no sistema de coordenadas globais, através de interpolações polinomiais, usando as denominadas funções de forma, Seção 2.3.

Os nós funcionais ou pontos nodais funcionais são os pontos nodais utilizados para formação do sistema matricial resultante do Método dos Elementos de Contorno. Nestes pontos, os valores das incógnitas do problema são calculados, sendo que ao longo de um determinado elemento tais valores são obtidos por meio de interpolações polinomiais, através das denominadas funções de interpolação.

De acordo com a ordem e o tipo das funções de interpolação e de forma utilizadas para um determinado elemento de contorno, pode-se ter a coincidência ou não dos nós funcionais e geométricos, conforme será exposto na continuação.

Um parâmetro importante na utilização do Método dos Elementos de Contorno como ferramenta numérica, consiste na escolha adequada do tipo de elemento de contorno empregado na modelagem a ser realizada e, por consequência, na resolução do problema. Tal parâmetro influencia, principalmente, no número de elementos de contorno necessários para a obtenção de uma determinada precisão dos resultados, afetando a ordem do sistema linear de equações algébricas resultante.

2.6.1 Classificação dos Elementos

No Método dos Elementos de Contorno, utilizam-se dois conjuntos distintos de funções de interpolação. O primeiro conjunto é utilizado para a aproximação das variáveis físicas do problema, denominado de funções de interpolação; e o segundo conjunto é utilizado para a definição da forma do elemento, denominado funções de forma.

Segundo a ordem dos polinômios utilizados nestes dois conjuntos distintos de funções de interpolação, os elementos de contorno podem ser classificados como:

Elementos Hipoparamétricos ou Subparamétricos - neste caso, é utilizado um polinômio de maior grau para a aproximação da geometria e um polinômio de menor grau para a aproximação das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é maior do que o grau das funções de interpolação.

Elementos Isoparamétricos - são os tipos de elementos mais utilizados. Os elementos pertencentes a esta família apresentam funções de interpolação de mesmo grau para a

aproximação da forma do elemento e das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é igual ao grau das funções de interpolação.

Elementos Hiperparamétricos ou Superparamétricos - neste caso, é utilizado um polinômio de menor grau para a aproximação da geometria e um polinômio de maior grau para a aproximação das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é menor do que o grau das funções de interpolação.

A seguir é apresentado o elemento de contorno utilizado nas modelagens realizadas ao longo deste trabalho.

2.6.2 Elemento de Contorno Linear

Este elemento de contorno é classificado como sendo isoparamétrico, pois tanto a geometria quanto as variáveis do problema utilizam funções de interpolações polinomiais lineares; com isso tem-se uma coincidência entre os nós geométricos e funcionais.

Na FIG. 2.11, podem ser observadas as posições dos nós funcionais e geométricos para um determinado elemento de contorno linear, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento.

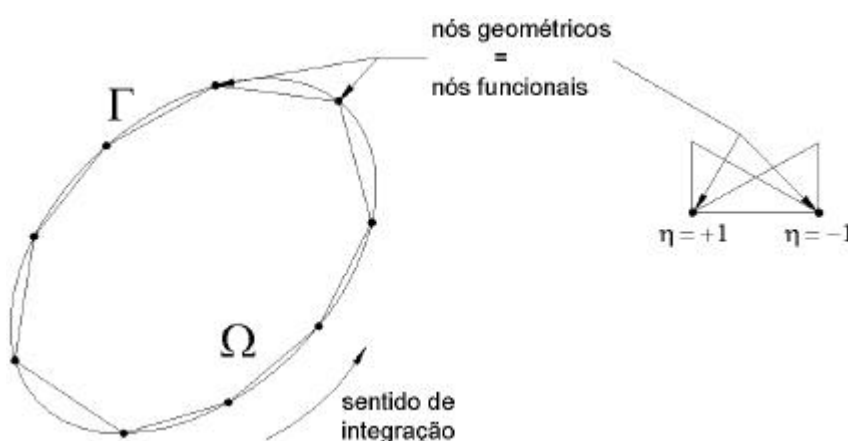


FIGURA 2.11 – Discretização com elementos de contorno lineares

2.7 Integração Numérica

As quadraturas numéricas consistem em obter o valor da integral desejada, através de uma combinação linear de valores da função a ser integrada, definida em certos pontos de integração x_i , multiplicados por determinados coeficientes, os pesos a_i , da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx \cong a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n), \quad (2.34)$$

sendo n o número de pontos de integração.

A determinação dos pontos de integração x_i de avaliação da função $f(x)$ e dos pesos a_i é feita de acordo com diversos procedimentos, que de forma geral podem ser agrupados em duas categorias:

Quadraturas fixas - a escolha dos parâmetros x_i e a_i não depende do comportamento da função $f(x)$, trata-se apenas de uma escolha do tipo de esquema de integração a ser utilizado;

Quadraturas adaptativas - neste caso a definição dos pontos de integração x_i é feita de acordo com o comportamento da função $f(x)$, de tal forma a obter-se uma maior concentração dos pontos x_i na região onde a função apresente uma variação mais acentuada.

Um dos métodos mais amplamente utilizados para o cálculo das integrais são baseados na quadratura gaussiana, devido a sua simplicidade e rapidez. O processo de integração via Quadratura de Gauss pode ser ilustrado de acordo com a expressão que se segue, Eq. 2.35. A quadratura de Gauss integra corretamente funções que podem ser representadas exatamente por polinômios de grau p , de tal forma que : $p \leq 2n - 1$.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{p=1}^n a_p f(x_p), \quad (2.35)$$

onde:

n - número de pontos de integração de Gauss;

a_p - peso do p -ésimo ponto de integração;

x_p - ponto de integração.

Os denominados pontos de integração x_p , são valores discretos, em coordenadas naturais, limitados entre os limites de $[-1, 1]$. Tais pontos não se encontram igualmente espaçados ao longo do intervalo de integração. Pode-se adotar um número qualquer de pontos de integração, sendo que para integrandos não expressos por funções polinomiais, a escolha de um número maior de pontos de integração proporcionará uma melhor avaliação da integral.

3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

No Capítulo 1, viu-se que a formulação matemática do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo é definida em termos de equações diferenciais, onde é utilizada a solução fundamental que engloba a variação temporal presente na equação do problema. No Capítulo 2, foram introduzidos alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade e alguns conceitos importantes do Método dos Elementos de Contorno, necessários para compreender e desenvolver a formulação matemática com solução fundamental dependente do tempo.

Neste capítulo, será apresentada a formulação matemática do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo aplicada a problemas governados pelas equações das ondas escalar e elástica. A formulação empregada neste trabalho trata da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, fornecendo diretamente como solução do problema os deslocamentos e as forças de superfície no contorno, sendo essa a formulação mais tradicional e difundida.

3.1 Formulação Matemática

3.1.1 Equação Básica Fundamental da Onda Escalar

A equação diferencial que governa os problemas de propagação de ondas escalares (ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas) é dada pela seguinte expressão (MORSE & FESHBACH (1953)):

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -g(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

onde $u(\mathbf{x}, t)$ representa o potencial, $\mathbf{x}$ o vetor posição de um ponto com coordenadas retangulares, t o tempo, c a velocidade de propagação da onda, ∇^2 o operador de Laplace, e $g(\mathbf{x}, t)$ é uma função densidade dada.

A Eq. 3.1 é hiperbólica, segundo a classificação das equações diferenciais parciais, que descrevem processos rápidos de transporte de energia. De acordo com o modelo matemático, para que um problema físico encontre-se bem especificado e apresente uma solução única, torna-se necessária a complementação da equação diferencial com certas informações adicionais, denominadas condições de contorno e condições iniciais. Para as condições de contorno são apresentados, a seguir, os dois principais tipos utilizados:

1. Condição de Contorno Essencial - também denominada condição de contorno de Dirichlet ou de primeira espécie. Neste caso, prescreve-se o valor da variável básica ao longo do contorno do domínio físico do problema. Tal condição pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (3.2)$$

2. Condição de Contorno Natural - também denominada condição de contorno de Neumann ou de segunda espécie. Neste caso, descreve-se o valor da primeira derivada da variável básica com relação à direção normal externa ao contorno do domínio físico do problema. Tal condição pode ser expressa matematicamente como:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (3.3)$$

Na Eq. 3.1, o contorno total do problema $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Existem outros tipos de condições de contorno que ocorrem com certa frequência, como, por exemplo, a denominada Condição de Robin ou de Radiação. Na realidade, tais condições de contorno são formas complexas ou combinações entre as condições de contorno essenciais e naturais.

A condição inicial descreve o estado inicial para a análise numérica. Para representar as condições iniciais associadas ao modelo matemático, prescreve-se no instante inicial os valores do deslocamento e da sua derivada temporal:

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.5)$$

onde Ω representa o domínio do problema.

3.1.2 Representação da Equação Integral

A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno aplicado aos problemas governados pela equação escalar da onda, começa pela obtenção de uma equação integral, desenvolvida ao longo do contorno Γ , que relaciona as variáveis básicas do problema e suas derivadas na direção normal ao contorno.

Existem diferentes formas de desenvolver a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo para a equação da onda escalar. Uma consiste na utilização do Método dos Resíduos Ponderados para o estabelecimento da sentença integral. Esta é uma abordagem bastante utilizada em muitos trabalhos (MANSUR (1983)).

Outro procedimento fundamenta-se na denominada Segunda Identidade de Green (Método da Transformada de Laplace), que relaciona as formas integrais Forte e Inversa associadas à equação diferencial do problema. Esse vínculo se processa matematicamente através de integrações por partes e da aplicação do teorema da divergência (CRUSE & RIZZO (1968)). Neste trabalho apresenta-se a formulação obtida a partir do Método dos Resíduos Ponderados.

A representação integral fundamental (para o potencial) correspondente a Eq. (3.1) é obtida através da formulação dos resíduos ponderados, e pode ser escrita como (CARRER & MANSUR (1994)):

$$\begin{aligned}
 4pC(x)u(x,t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x},t;x,t)p(\mathbf{x},t)d\Gamma(\mathbf{x})dt \\
 & + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[b^*(\mathbf{x},t;x,t)u(\mathbf{x},t) + u^*(\mathbf{x},t;x,t)\frac{u(\mathbf{x},t)}{c} \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x})dt \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0^*(\mathbf{x},t;x)u_0(\mathbf{x})d\Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{u_0^*(\mathbf{x},t;x)}{r} - b_0^*(\mathbf{x},t;x) \right] u_0(\mathbf{x}) \right. \\
 & \left. + u_0^*(\mathbf{x},t;x)\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial r} \right\} d\Omega(\mathbf{x}) + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} g(\mathbf{x},t)u^*(\mathbf{x},t;x,t)d\Omega(\mathbf{x})dt, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

onde u^* representa a solução fundamental (utilizada como função de ponderação) e b^* é dada pela equação 3.9. Os termos com a subscrição “0” presentes na Eq. 3.6 referem-se ao estado inicial ($t = 0$):

$$u_0^*(\mathbf{x},t;x) = u^*(\mathbf{x},t;x,0), \quad (3.7)$$

$$b_0^*(\mathbf{x},t;x) = b^*(\mathbf{x},t;x,0), \quad (3.8)$$

$$b^*(\mathbf{x},t;x,t) = \frac{2c[c(t-t)-r]}{\sqrt{[c^2(t-t)^2 - r^2]}^3} H[c(t-t)-r]. \quad (3.9)$$

Na equação 3.6 o limite superior t^+ da integral do tempo, representa o incremento de tempo (impulso) $t + \varepsilon$, sendo ε um valor muito pequeno. Aplicar este procedimento evita terminar a integração exatamente em um valor máximo da função Delta de Dirac, o que poderia causar descontinuidades.

O valor de $C(x)$ na Eq. 3.6 é definido em função da posição do ponto fonte x em relação ao domínio físico do problema Ω . As possibilidades existentes podem ser expressas de acordo com a seguinte sentença:

$$C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x \notin (\Omega + \Gamma)) \\ 1 & \text{se } ((x \in \Omega) \text{ e } (x \notin \Gamma)), \\ \alpha/2\pi & \text{se } (x \in \Gamma) \end{cases} \quad (3.10)$$

onde α é o ângulo interno em radianos (FIG. 3.1), calculado na posição do ponto fonte x , formado pelo contorno na parcela interior ao domínio físico do problema.

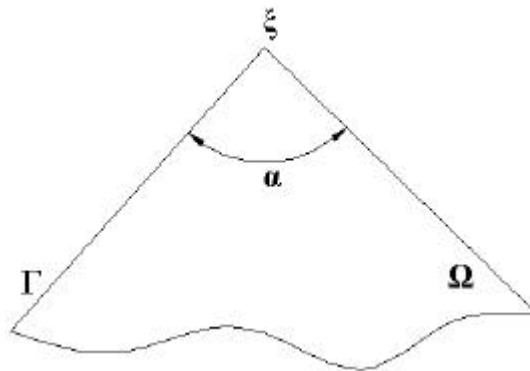


FIGURA 3.1 – Ângulo interno usado para calcular $C(x)$

Além da Eq. 3.10, existe outro procedimento para o cálculo do valor de $C(x)$, que será apresentado na seção 3.3.4. Essa técnica considera a discretização da equação integral do Método dos Elementos de Contorno e a aplicação das condições de contorno em um problema físico, tendo somente condições de contorno naturais prescritas ao longo do contorno Γ .

Para o caso de contornos com geometria suave, isto é, onde não exista a presença de qualquer tipo de descontinuidade geométrica ($\alpha = \pi$), o valor de $C(x) = 1/2$.

Dois tipos distintos de singularidades se apresentam no momento de fazer a integração da Eq. 3.6. O primeiro tipo de singularidade está presente na integral das condições iniciais, quando $r = 0$, e nas integrais de contorno, quando r e $c(t - t)$ são simultaneamente nulos. O segundo tipo de singularidade está presente nos pontos situados na parte frontal da onda representada pela solução fundamental (função de Green), isto é, no contorno e nas integrais da densidade da fonte quando $r = c(t - t)$, e, nas integrais das condições iniciais, quando $r = ct$. Apesar disso, a integração numérica da Eq. 3.6 não apresenta qualquer dificuldade notável.

3.1.3 Soluções Fundamentais

A solução fundamental $u^*(\mathbf{x}, t; \xi, t)$, é interpretada como o efeito de um impulso aplicado em um tempo $t = t$ em $\mathbf{x} = \xi$, sendo ξ e $\mathbf{x}$, os pontos fonte e campo, respectivamente. Para os casos bidimensionais, a solução fundamental u^* é dada pela seguinte expressão (MANSUR (1983)):

$$u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-t)^2 - r^2}} H[c(t-t) - r], \quad (3.11)$$

e a derivada normal da solução fundamental u^* (fluxo) ao longo do contorno Γ é dada pela seguinte expressão:

$$p^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{2cr}{\sqrt{[c^2(t-t)^2 - r^2]^3}} H[c(t-t) - r] \right. \\ \left. + \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-t)^2 - r^2}} \frac{\partial H}{\partial r} [c(t-t) - r] \right\}. \quad (3.12)$$

Na expressão acima, $H[c(t-t) - r]$ representa a função de Heaviside definida na Seção 2.5.2, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}|$ é a distância euclidiana entre o ponto fonte $\mathbf{x}$ e um ponto genérico $\mathbf{x}$ do domínio infinito, denominado de ponto campo, e c é a velocidade de propagação da onda.

Dependendo do tratamento dado à derivada da função de Heaviside presente na Eq. 3.12, podem surgir duas formulações aparentemente diferentes para representar a equação integral do contorno. A primeira é a versão apresentada por MANSUR (1983), que se baseia na regularização da solução fundamental, Eq. 3.6. A mesma pode ser escrita também em sua forma não regularizada, fazendo uso do conceito de “parte finita de uma integral”, proposto por HADAMARD (1952) (conforme discutido em MANSUR & CARRER (1994)), que será explicado a seguir.

3.1.4 Parte Finita de uma Integral

Jacques Hadamard foi o primeiro a se preocupar com o cálculo das integrais singulares envolvendo as soluções fundamentais, que aparecem na equação integral da onda escalar transiente e na equação integral da onda elástica. A preocupação de Hadamard era encontrar uma solução para tais integrais sem introduzir quantidades complexas. Em seus estudos, HADAMARD (1952)⁴ não somente resolveu o problema, como também generalizou os procedimentos requeridos para calcular tais integrais no tempo, introduzindo um novo conceito matemático: a “*parte finita de uma integral*”.

Para compreender melhor o novo conceito matemático proposto por Hadamard, será analisada, a seguir, a seguinte integral (HADAMARD (1952)):

$$\int_a^b \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}} dx \quad (3.13)$$

Se se tentasse diferenciar a integral (Eq. 3.13) em relação a b , seria considerada primeiramente uma forma de adaptá-la, já que uma diferenciação direta pareceria impossível. A diferenciação resultaria em uma expressão absurda do tipo:

$$-\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}} dx + \left[\frac{A(x)}{\sqrt{(b-x)}} \right]_{x=b}, \quad (3.14)$$

⁴ Lectures on Cauchy's Problem foi publicado originalmente pela Universidade de Yale em 1923 e reimpresso pela Dover Publications N. Y. Em 1952.

que corresponde à soma de dois termos, onde o primeiro apresenta singularidade por possuir um denominador fracionário da ordem $3/2$ e o segundo termo não tem significado.

Naturalmente deve ser possível fazer isto sem a necessidade de introduzir quantidades complexas. De fato, Hadamard observou que (depois de substituir b por x no limite superior da integral) não é a integral (Eq. 3.15), mas a soma algébrica (Eq. 3.16) que se aproxima de um limite definido quando x se aproxima de b .

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}} dx, \quad (3.15)$$

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}} dx - 2 \frac{A(x)}{\sqrt{(b-x)}}. \quad (3.16)$$

Além disso, se a soma é transformada em outra do tipo:

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}} dx + \frac{B(x)}{\sqrt{(b-x)}}, \quad (3.17)$$

onde B é uma função qualquer de x , fornecida e diferenciável (ou no mínimo satisfaz a *condição de Lipschitz*⁵) de tal forma que $B(b) = -2A(b)$, o resultado obtido é independente da escolha da função B . Isto se explica pelo fato do denominador ser de ordem fracionário, enquanto uma mudança da função B a alteraria pelos termos contendo no mínimo $(b-x)$ na primeira potência como fator, de modo que os termos correspondentes na fração desaparecem para $x = b$. Conseqüentemente para calcular o limite de (3.18), não é necessário indicar que função B foi escolhida. Hadamard denominou esse limite pela “parte finita” da integral (Eq. 3.15), escrita como:

⁵ Matematicamente, a condição da unicidade é expressa pela *Condição de Lipschitz*: Se diz que uma função $B(x)$, definida em um domínio D cumpre a condição de Lipschitz em relação às variáveis $\{x_i\}$ se podemos encontrar uma constante K tal que $\forall x_i \in D$ e $\forall \Delta x_i$, $|B(x_2) - B(x_1)| < K |x_2 - x_1|$. A constante K é denominada constante de Lipschitz.

$$\oint_a^b \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}} dx. \quad (3.18)$$

Na integral (Eq. 3.18), o símbolo $\oint$ significa “parte finita de”, e a expressão deve ser considerada como sendo o limite da soma indicada em (3.17), quando “x” tende a “b”.

Utilizando o novo conceito, a Eq. 3.6 pode ser expressa também em sua forma não regularizada. Deste modo tem-se:

$$\begin{aligned} 4pC(x)u(x,t) = & \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u^*(\mathbf{x},t;x,t) p(\mathbf{x},t) dt d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \oint_0^{t^+} u_r^*(\mathbf{x},t;x,t) u(\mathbf{x},t) dt d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} u_0^*(\mathbf{x},t;x) u_0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + I_{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $u(\mathbf{x},t)$ é a função potencial, t é o tempo, c é a velocidade de propagação da onda, Γ e Ω são o contorno e o domínio, respectivamente. Para simplificar, as integrais no domínio mostradas na Eq. 3.6 estão representadas por I_{Ω} .

Na Eq. 3.19, $u^*(\mathbf{x},t;x,t)$ é a solução fundamental e a função $u_r^*(\mathbf{x},t;x,t)$ é obtida pela seguinte expressão:

$$u_r^*(\mathbf{x},t;x,t) = \frac{2cr}{[c^2(t-t)^2 - r^2]^{3/2}} H[c(t-t) - r]. \quad (3.20)$$

O símbolo $\oint$ do segundo termo do lado direito na Eq. 3.19 representa a parte finita de uma integral e é definido como:

$$\oint_0^{t^+} u_r^*(\mathbf{x},t;x,t) u(\mathbf{x},t) dt = \oint_0^{t^+} \frac{2cr}{[c^2(t-t)^2 - r^2]^{3/2}} u(\mathbf{x},t) H[c(t-t) - r] dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow t - \frac{r}{c}} \left\{ \int_0^t \frac{2cr}{[c^2(t-t)^2 - r^2]^{3/2}} u(\mathbf{x}, t) dt - \frac{1}{c} \frac{2c}{\sqrt{c^2(t-t)^2 - r^2}} u(\mathbf{x}, t) \right\}. \quad (3.21)$$

CARRER & MANSUR (1994) e MANSUR & CARRER (1994) mostraram que as duas formulações, Eq. 3.6 e Eq. 3.19, são inteiramente equivalentes; quando a integração no tempo é feita analiticamente, qualquer uma das duas pode ser utilizada para solução do problema.

3.2 Equação Básica da Elastodinâmica

Considerando que a tensão e a deformação são dependentes do tempo e que estão atuando sobre um corpo elástico, isótropico e homogêneo, gerando uma perturbação em um determinado instante de tempo, pode-se escrever a equação elastodinâmica do movimento do corpo como (BREBBIA *et al.* (1983)):

$$(c_d^2 - c_s^2) u_{i,ij} + c_s^2 u_{j,ii} + b_j / r = \ddot{u}_j. \quad (3.22)$$

A Eq. 3.22 é conhecida como equação de Navier-Cauchy da elasticidade e expressa o equilíbrio dinâmico do sólido em função do campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ e da força de volume $\mathbf{b}$ aplicados ao sólido; b_j representa as forças de corpo; $\ddot{u}_j = \partial^2 u_j / \partial t^2$, as componentes da aceleração; a subscrição repetida implica uma soma; quando uma subscrição é precedida por vírgula denota uma derivação em relação a essa coordenada; r é a densidade média; c_d e c_s são as contribuições das velocidades de propagação da onda primária e secundária. As velocidades são dadas por:

$$c_d = \sqrt{\frac{l + 2m}{r}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{m}{r}}, \quad (3.23)$$

sendo l e m as constantes de Lamé, (Eq. 2.13), que são relacionadas com o módulo de cisalhamento G , o módulo de elasticidade E (ou módulo de Young) e o coeficiente de Poisson ν , visto na Seção 2.1.4.

Da mesma forma, as deformações (relações cinematicas) são obtidas a partir da Eq. 2.6 (repetida a seguir):

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.24)$$

sendo que o material obedece as leis de Hooke (lei constitutiva). A equação para o cálculo das tensões pode ser escrita segundo a Eq. 2.10 (repetida a seguir):

$$s_{ij} = 2me_{ij} + le_{kk}d_{ij}. \quad (3.25)$$

Para garantir a unicidade da solução da Eq. 3.22 têm de ser atendidas as condições iniciais de movimento e as condições de contorno do problema.

(a) Condições iniciais

$$u_i(X, t) = u_i^0(X) \quad \text{e} \quad \dot{u}_i(X, t) = \dot{u}_i^0(X), \quad \text{para } t = t_0 \text{ em } \Omega + \Gamma, \quad (3.26)$$

onde $u_i^0(X)$ e $\dot{u}_i^0(X)$ são funções prescritas.

(b) Condições de contorno essenciais

$$u_i(X, t) = \bar{u}_i(X, t), \quad \text{para } t > t_0 \text{ em } \Gamma_1. \quad (3.27)$$

(c) Condições de contorno naturais

$$p_i(X, t) = s_{ij}n_j = \bar{p}_i(X, t), \quad \text{para } t > t_0 \text{ em } \Gamma_2, \quad (3.28)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

3.2.1 Soluções Fundamentais

A solução fundamental dependente do tempo para o deslocamento, $u_{ik}^*(X, t; \xi, t)$, representa a solução do problema (Eq. (3.22)) para um carregamento específico e pode ser interpretada como a resposta no tempo em um ponto “X” de um meio infinito, na direção “k”, devido a uma carga unitária aplicada sobre o ponto “ ξ ” na direção “i”,

atuando em um período infinitesimal de tempo, $t = t$. Este carregamento é representado como uma força de corpo (Eq. (3.29)) aplicada em um contínuo infinito.

$$b_k = d_{ik}(X - x) \delta(t - t) \quad (3.29)$$

onde δ representa a função delta de Dirac. A solução fundamental u_{ik}^* é representada pela seguinte expressão, (CARRER & MANSUR (1999))

$$u_{ik}^*(X, t; x, t) = \frac{1}{2pr} \left\{ \frac{H(c_d t' - r)}{c_d r^2} \left[\frac{2c_d^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_d^2 t'^2 - r^2}} r_{,i} r_{,k} - d_{ik} \sqrt{c_d^2 t'^2 - r^2} \right] - \frac{H(c_s t' - r)}{c_s r^2} \left[\frac{2c_s^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2}} r_{,i} r_{,k} - \left(\frac{r^2}{\sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2}} + \sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2} \right) d_{ik} \right] \right\}, \quad (3.30)$$

onde H é a função de Heaviside definida previamente na Seção 2.5.2; $t' = t - r/c$ é o tempo retardado; $r = |X - x|$ indica a distância euclidiana entre o ponto fonte x e o ponto campo X ; c_d e c_s são as velocidades de propagação da onda elástica, Eq. 3.23.

A força de superfície correspondente à solução fundamental, pode ser obtida utilizando as relações deformação-deslocamento e as equações constitutivas, e é expressa da seguinte forma, (CARRER & MANSUR (1999))

$$p_{ik}^*(X, t; x, t) = \frac{1}{2pr} \left\{ \frac{A_{ik}}{c_s} \left(\frac{r}{\sqrt{(c_s^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_s t' - r) + \frac{1}{\sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial(c_s t)} H(c_s t' - r) \right) + \frac{B_{ik}}{c_s} \frac{2c_s^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{2c_s^2 t'^2 - r^2}} H(c_s t' - r) + \frac{D_{ik}}{c_s r^2} \left(\frac{r^3}{\sqrt{(c_s^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_s t' - r) + \frac{2c_s^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial(c_s t)} H(c_s t' - r) \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{c_d} \left[B_{ik} \frac{2c_d^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_d^2 t'^2 - r^2}} H(c_d t' - r) \right. \\
& \left. + \frac{D_{ik}}{r^2} \left(\frac{r^3}{\sqrt{(c_d^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_d t' - r) + \frac{2c_d^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_d^2 t'^2 - r^2}} \frac{\partial}{\partial(c_d t)} H(c_d t' - r) \right) \right] \Bigg\}, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

com:

$$A_{ik} = G \left(2y \, r_{,i} n_k + d_{ik} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_i \right), \quad (3.32)$$

$$B_{ik} = -\frac{2G}{r^3} \left(d_{ik} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k + r_{,k} n_i - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,k} \right), \quad (3.33)$$

$$D_{ik} = -2G \left(y r_{,i} n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,k} \right), \quad (3.34)$$

onde :

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(X)} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}; \quad y = \frac{c_d^2 - 2c_s^2}{2c_s^2}. \quad (3.35)$$

Nas Eqs. 3.32 até 3.34, G representa o módulo de elasticidade transversal.

A solução fundamental u_{ik}^* representada pela Eq. 3.30, é também conhecida como a solução de Stokes para o campo do deslocamento, e possui as seguintes propriedades:

1. Causalidade

$$u_{ik}^*(X, t; x, t) = 0; \quad \text{para } c_d(t - t) < |X - x|; \quad (3.36)$$

A expressão mostra que a contribuição é nula, se a onda mais rápida ou mais lenta não alcançou o ponto X .

2. Reciprocidade

$$u_{ik}^*(X, t; x, t) = u_{ik}^*(x, -t; X, -t); \quad (3.37)$$

Reciprocidade em um problema da propagação da onda pode ser definida como uma propriedade da simetria do campo da onda, devido à simetria da solução fundamental (função de Green). Esta propriedade é utilizada principalmente nos algoritmos de processamento de dados sísmicos (KARRENBACH (2001)).

3. Translação no tempo

$$u_{ik}^*(X, t; x, t) = u_{ik}^*(X, t + t_1; x, t + t_1) = u_{ik}^*(X, t - t; x, 0). \quad (3.38)$$

4. Simetria

$$u_{ik}^*(X, t; x, t) = u_{ik}^*(x, t; X, t). \quad (3.39)$$

3.2.2 Formulação Integral Dependente do Tempo

A Eq. (3.22) pode ser transformada em uma equação integral do contorno usando o Método dos Resíduos Ponderados. Observa-se na expressão (3.40) a presença de uma integral relativa à variável tempo.

Seguindo o procedimento padrão do método, obtém-se a seguinte equação integral, (condições iniciais nulas):

$$C_{ik}(x)u_k(x, t) = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ik}^*(X, t; x, t) p_k(X, t) dt d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ik}^*(X, t; x, t) u_k(X, t) dt d\Gamma(X), \quad (3.40)$$

onde Γ representa o contorno e Ω representa o domínio. $C_{ik}(x)$ é uma constante que depende somente da geometria local no ponto de observação x . Para um ponto $x \in \Omega$, interno ao domínio, $C_{ik}(x) = \delta_{ik}$. Para um ponto $x \in \Gamma$, com geometria suave, $C_{ik}(x) = 1/2\delta_{ik}$. Se o contorno não possui geometria suave, os valores para $C_{ik}(x)$

dependem da descontinuidade geométrica (ARAÚJO (1994)) e podem ser obtidos aplicando a Eq. (3.41).

$$C_{ik}(x) = d_{ik} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}}^{esta} p_{ik}^*(X; x) d\Gamma, \quad (3.41)$$

onde $^{esta} p_{ik}^*(X; \xi) d\Gamma$ são as forças de superfície fundamentais da estática em Γ e $\bar{\Gamma}_\epsilon$ é a superfície esférica com centro em ξ , introduzida para eliminar o ponto singular da superfície de integração Γ (FIG. 3.2).

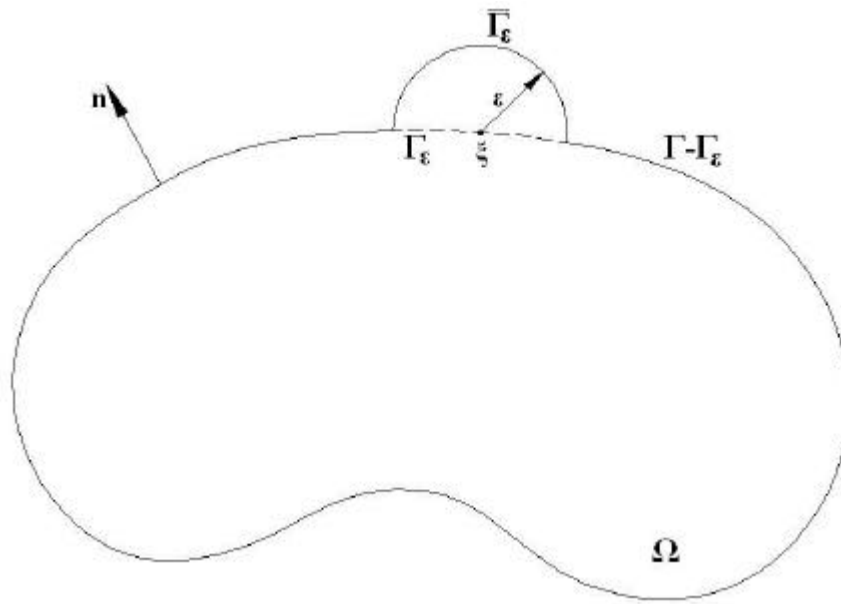


FIGURA 3.2 – Eliminação do ponto singular ξ

Na Eq. 3.40, u_k é o deslocamento e p_k é a força de superfície; u_{ik}^* e p_{ik}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais elastodinâmicas transientes dependentes do tempo para o deslocamento e para a força de superfície.

O limite superior t^+ da integral do tempo (Eq. 3.40) indica que os impulsos até valores próximos de t , sem incluir o tempo t , são considerados. Um impulso naquele tempo t causaria descontinuidades no campo das velocidades, mas não no campo dos deslocamentos.

Da mesma forma como foi descrito para a equação da onda escalar, utilizando-se o conceito da parte finita da integral, proposto por HADAMARD (1952), pode-se representar a Eq. 3.40 na sua forma não regularizada; para isto, a segunda integral do lado direito da mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ik}^* u_k dt d\Gamma &= \frac{1}{2prc_s} \left[\int_{\Gamma} (A_{ik} + D_{ik}) \left(\oint_0^{t^+} \frac{r}{\sqrt{(c_s^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_s t' - r) u_k dt \right) d\Gamma \right. \\
 &\quad + \int_{\Gamma} B_{ik} \int_0^{t^+} \frac{2c_s^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_s^2 t'^2 - r^2}} H(c_s t' - r) u_k dt d\Gamma \\
 &\quad - \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} B_{ik} \int_0^{t^+} \frac{2c_d^2 t'^2 - r^2}{\sqrt{c_d^2 t'^2 - r^2}} H(c_d t' - r) u_k dt d\Gamma \\
 &\quad \left. - \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} D_{ik} \left(\oint_0^{t^+} \frac{r}{\sqrt{(c_d^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_d t' - r) u_k dt \right) d\Gamma \right], \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

onde o símbolo $\oint$ representa a parte finita de uma integral, que pode ser interpretada como:

$$\oint_0^{t^+} \frac{r}{\sqrt{(c_w^2 t'^2 - r^2)^3}} H(c_w t' - r) u_k dt = \lim_{t \rightarrow t^+} \left\{ \int_0^t \frac{r}{\sqrt{(c_w^2 t'^2 - r^2)^3}} u_k dt - \frac{1}{c_w} \frac{1}{\sqrt{c_w^2 t'^2 - r^2}} u_k \right\}. \quad (3.43)$$

Na Eq. 3.43, a subscrição w é convenientemente substituída por s ou d , quando representa a velocidade da onda secundária (equivoluminal) ou da onda primária (dilatacional). Os tensores A_{ik} , B_{ik} e D_{ik} na Eq. 3.42 são definidos pelas Eqs. 3.32, 3.33 e 3.34.

3.2.3 Equação Integral Elástica das Tensões para os Pontos Internos

As componentes das tensões para os pontos internos podem ser obtidas a partir da Eq. 3.40, calculando-se as derivadas em relação às coordenadas nas direções i e j do

ponto fonte $x \in \Omega$, combinando-as de forma adequada a fim de obter-se as componentes das deformações, e interligando-se as equações constitutivas (lembrando que $C_{ij}(x) = \delta_{ij}$).

Depois de aplicar a lei de Hooke, a equação integral das tensões pode ser escrita como se segue (condições iniciais nulas):

$$s_{ij}(x;t) = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ijk}^*(X,t;x,t) p_k(X,t) dt d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ijk}^*(X,t;x,t) u_k(X,t) dt d\Gamma(X). \quad (3.44)$$

Conforme proposto por CARRER & MANSUR (1999), a Eq. 3.44 pode ser escrita da seguinte forma:

$$s_{ij}(x;t) = \frac{1}{2p_r c_s} [S_s^p - S_d^p - (S_s^u - S_d^u)], \quad (3.45)$$

onde S_w^b representa a contribuição das ondas secundária e primária ($w = s$ ou d) nas integrais relacionadas aos deslocamentos e às forças de superfície ($b = u$ ou p). Os termos do lado direito da Eq. 3.45 são dados por:

$$\begin{aligned} S_s^p = & \int_{\Gamma} E_{ijk} \int_0^{t^+} L_s p_k H_s dt d\Gamma + \int_{\Gamma} E_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial L_s}{\partial r} p_k H_s dt \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} F_{ijk} \int_0^{t^+} L_s^{-1} p_k H_s dt d\Gamma + \int_{\Gamma} F_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial (L_s^{-1})}{\partial r} p_k H_s dt \right) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} J_{ijk} \int_0^{t^+} L_s N_s p_k H_s dt d\Gamma + \int_{\Gamma} J_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial (L_s N_s)}{\partial r} p_k H_s dt \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$S_d^p = \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} F_{ijk} \int_0^{t^+} L_d^{-1} p_k H_d dt d\Gamma + \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} F_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial (L_d^{-1})}{\partial r} p_k H_d dt \right) d\Gamma$$

$$+ \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} J_{ijk} \int_0^{t^+} L_d N_d p_k H_d dt d\Gamma + \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} J_{ijk}^0 \oint_0^{t^+} \frac{\partial(L_d N_d)}{\partial r} p_k H_d dt d\Gamma \quad (3.47)$$

$$S_s^u = \int_{\Gamma} (A_{ijk} + D_{ijk}) \oint_0^{t^+} r L_s^3 u_k H_s dt d\Gamma + \int_{\Gamma} (A_{ijk}^0 + D_{ijk}^0) \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_0^{t^+} r L_s^3 u_k H_s dt \right) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} B_{ijk} \int_0^{t^+} L_s N_s u_k H_s dt d\Gamma + \int_{\Gamma} B_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial(L_s N_s)}{\partial r} u_k H_s dt \right) d\Gamma \quad (3.48)$$

$$S_d^u = \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} B_{ijk} \int_0^{t^+} L_d N_d u_k H_d dt d\Gamma + \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} B_{ijk}^0 \left(\oint_0^{t^+} \frac{\partial(L_d N_d)}{\partial r} u_k H_d dt \right) d\Gamma \\ + \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} D_{ijk} \int_0^{t^+} r L_d^3 u_k H_d dt d\Gamma + \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} D_{ijk}^0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_0^{t^+} r L_d^3 u_k H_d dt \right) d\Gamma. \quad (3.49)$$

Os tensores que aparecem nas equações 3.46 a 3.49 nas integrais relacionadas às forças de superfície (E_{ijk} , F_{ijk} , J_{ijk} , E_{ijk}^0 , F_{ijk}^0 e J_{ijk}^0) e nas integrais relacionadas aos deslocamentos (A_{ijk} , B_{ijk} , D_{ijk} , A_{ijk}^0 , B_{ijk}^0 e D_{ijk}^0), podem ser expressas como:

$$E_{ijk} = 0 \quad (3.50)$$

$$F_{ijk} = \frac{2G}{r^3} (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i} + 2y d_{ij} r_{,k}) \quad (3.51)$$

$$J_{ijk} = \frac{G}{r^3} (2d_{ij} r_{,k} + d_{jk} r_{,i} + d_{ik} r_{,j} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2y d_{ij} r_{,k}) \quad (3.52)$$

$$E_{ijk}^0 = -G (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i} + 2y d_{ij} r_{,k}) \quad (3.53)$$

$$F_{ijk}^0 = -\frac{G}{r^2} (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i} + 2y d_{ij} r_{,k}) \quad (3.54)$$

$$J_{ijk}^0 = \frac{2G}{r^2} (r_{,i} r_{,j} r_{,k} + y d_{ij} r_{,k}) \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{G^2} A_{ijk} = & -4y n_k (d_{ij} - r_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial r}{\partial n} (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i}) - 2(d_{ik} n_j + d_{jk} n_i) \\ & + r_{,i} r_{,k} n_j + r_{,j} r_{,k} n_i - 4y d_{ij} \left(y n_k + n_k - \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{r^4}{4G^2} B_{ijk} = & 4 \frac{\partial r}{\partial n} (6r_{,i} r_{,j} r_{,k} - d_{ij} r_{,k} - d_{jk} r_{,i} - d_{ik} r_{,j}) + d_{ij} n_k + d_{jk} n_i + d_{ik} n_j \\ & - 4(r_{,i} r_{,j} n_k + r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,i} r_{,k} n_j) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{2G^2} D_{ijk} = & 2y n_k (d_{ij} - r_{,i} r_{,j}) + r_{,i} r_{,k} n_j + r_{,j} r_{,k} n_i \\ & + \frac{\partial r}{\partial n} (-6r_{,i} r_{,j} r_{,k} + 2d_{ij} r_{,k} + d_{jk} r_{,i} + d_{ik} r_{,j}) + 2y d_{ij} \left(y n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{G^2} A_{ijk}^0 = -4y r_{,i} r_{,j} n_k - \frac{\partial r}{\partial n} (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i}) - r_{,i} r_{,k} n_j - r_{,j} r_{,k} n_i - 4y d_{ij} \left(y n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right) \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{r^3}{2G^2} B_{ijk}^0 = & \frac{\partial r}{\partial n} (d_{ik} r_{,j} + d_{jk} r_{,i}) + 2r_{,i} r_{,j} n_k + r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,i} r_{,k} n_j - 8 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \\ & + 2y d_{ij} \left(n_k - 2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{4G^2} D_{ijk}^0 = y r_{,i} r_{,j} n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,j} r_{,k} + y d_{ij} \left(y n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right). \quad (3.61)$$

Da mesma forma, as funções H_w (função de Heaviside), L_w e N_w presentes nas equações 3.46, 3.47, 3.48 e 3.49 são representadas da seguinte forma:

$$H_w = H[c_w(t-t) - r], \quad (3.62)$$

$$L_w = L_w(X, t; x, t) = [c_w^2(t-t)^2 - r^2]^{-1/2}, \quad (3.63)$$

$$N_w = N_w(X, t; x, t) = 2c_w^2(t - t)^2 - r^2. \quad (3.64)$$

A fim de obter a equação integral das tensões, a derivada da integral de Riemann presente na Eq. 3.42, e relacionadas ao tensor B_{ijk} , transforma-se em uma integral com parte finita. Substituindo t^+ por $(t - r/c_w)$, este limite de integração torna-se uma função de r , o que torna possível a aplicação do teorema de Leibnitz para calcular as derivadas nas integrais. As expressões finais podem ser interpretadas da mesma forma como na Eq. 3.43.

As derivadas da parte finita da integral, Eqs. 3.48 e 3.49, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^{t^+} L_w^3 u_k H_w dt \right) = \lim_{t \rightarrow t - \frac{r}{c_w}} \left\{ \int_0^t \frac{\partial(r L_w^3)}{\partial r} u_k dt - \frac{2}{c_w} r L_w^3 u_k + \frac{1}{c_w^2} \left(L_w \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial L_w}{\partial t} \right) \right\}. \quad (3.65)$$

A avaliação numérica da Eq. 3.45 não apresenta nenhuma dificuldade, desde que r seja sempre diferente de zero para os pontos internos, ou seja, não existe singularidade.

3.3 Implementação Numérica

A base teórica do programa computacional utiliza a resposta dinâmica no domínio do tempo. Os procedimentos numéricos utilizados foram desenvolvidos a partir do algoritmo de um programa elaborado na linguagem FORTRAN por CARRER & MANSUR (1999). O algoritmo usado no programa computacional segue o esquema de integração passo a passo no tempo, onde variações lineares e constantes são admitidas para os deslocamentos e para as forças de superfície, respectivamente. Como é usual nas formulações dos elementos de contorno, as integrações que envolvem as soluções fundamentais devem ser consideradas com muito cuidado.

Na formulação elastodinâmica no domínio do tempo, a primeira característica importante a ser observada é que as expressões das integrais que envolvem as soluções fundamentais dependem da posição da frente de onda da solução fundamental, associada com as ondas primárias e secundárias.

Outra questão importante envolve a discretização do contorno e a divisão do tempo, que dependem diretamente do tipo do problema em análise. Por esta razão, em muitos problemas mais de uma análise numérica deve ser realizada, onde a discretização do contorno e a divisão do tempo deverão ser refinadas sucessivamente. Um dos parâmetros que influencia significativamente na precisão dos resultados numéricos obtidos é o intervalo de tempo (Δt). O emprego de um valor muito pequeno para Δt gera instabilidade e, por outro lado, um valor muito grande não consegue captar a variação temporal das variáveis envolvidas.

Um procedimento utilizado para selecionar adequadamente este parâmetro é dado pela seguinte relação (MANSUR (1983)):

$$\Delta t = b \frac{l_j}{c_d}, \quad (3.66)$$

onde l_j é o menor comprimento do elemento de contorno presente na discretização; c_d é a contribuição da velocidade de propagação da onda primária (dilatacional); b é um escalar utilizado para o controle do passo de tempo. Para a formulação com solução fundamental dependente do tempo apresentada neste trabalho, é recomendado o emprego de $b = 0,6$. A experiência é fundamental no momento de escolher o melhor intervalo de tempo e, em alguns casos, a experimentação (numerosos estudos⁶ foram realizados para determinar o intervalo de tempo apropriado) seria justificada para determinar um bom intervalo de tempo.

Outro parâmetro de vital importância na qualidade dos resultados numéricos é o tipo de elemento de contorno a ser empregado na modelagem geométrica, e, por consequência, na resolução do problema.

⁶ MANSUR (1983) depois de estudar uma barra sujeita a uma força de impacto sobre seu extremo livre (carregamento do tipo Heaviside), indicou que intervalos de tempo menores que $0,6l/c$ não são recomendados. BANERJEE (1994) sugeriu que β deve estar entre 0,50 e 0,75, a fim de se obter uma melhor solução.

Neste trabalho são empregados unicamente os elementos de contorno isoparamétricos lineares, que utilizam funções de interpolação lineares para aproximar tanto a sua geometria quanto as incógnitas do problema ao longo de seu comprimento.

3.3.1 Integração Passo a Passo no Tempo

MANSUR & BREBBIA (1985) apresentaram dois procedimentos para resolver a equação integral no tempo. No primeiro, a integração no tempo inicializa-se a partir do intervalo de tempo anterior. Este procedimento requer a integração no domínio e, conseqüentemente, a discretização do mesmo. Na segunda opção, a integração no domínio é evitada, inicializando a integração para cada intervalo de tempo a partir de um tempo t_0 .

Discretiza-se o espaço de tempo em m intervalos, de tal forma que o tempo final seja representado por t_m . Para resolver a integração no tempo no primeiro procedimento, utiliza-se do intervalo de tempo local, $(t_m - t_{m-1})$. A integral de domínio é calculada, baseada nas condições iniciais a partir do intervalo de tempo anterior, sendo as condições iniciais do domínio avaliadas numericamente utilizando valores calculados para um certo número de pontos internos. Ao final de cada intervalo de tempo, os valores das variáveis dos pontos internos previamente selecionados são recalculados para poderem ser utilizados como valores iniciais para o próximo intervalo de tempo.

No segundo procedimento, a integração no domínio é evitada efetuando-se a integração a partir de um tempo inicial t_0 até o tempo final t_m . Para o tempo inicial ($t_0 = 0$), supondo que o sistema se encontra em repouso, as condições iniciais são nulas, e, conseqüentemente a integral no domínio é zero.

Após a discretização temporal e a discretização geométrica, conforme será apresentado nos itens seguintes, a equação integral do problema passa a ser escrita com coeficientes de influência, que dependem do tipo da discretização adotado e envolvem valores calculados das variáveis dependentes do tempo para todos os instantes anteriores. Estes coeficientes de influência deverão ser calculados para a combinação de todos os intervalos de tempo anteriores a t_m .

Entretanto, utilizando a propriedade de translação da solução fundamental no tempo, Eq. 3.38, para cada tempo t_m somente o efeito da história dinâmica do primeiro intervalo de tempo precisa ser avaliado. As contribuições dos intervalos de tempo restantes já foram calculadas nos tempos anteriores ao tempo de análise. Com isso, o espaço gasto com o armazenamento de dados se reduz, mas a quantidade de cálculos efetuados ainda é alta.

O algoritmo transiente presente neste trabalho utiliza o segundo esquema de integração.

3.3.2 Discretização Temporal

A fim de resolver a equação (3.40) a discretização no tempo e no espaço é necessário, para a integração temporal o tempo foi dividido em N intervalos de tempo iguais. As componentes dos deslocamentos $u(X, \tau)$ e das forças de superfície $p(X, \tau)$ foram admitidas com uma variação linear e constante no tempo, respectivamente. Para um intervalo de tempo dado $[t_l, t_{l+1}]$, pode-se escrever:

$$u(X, t) = u^{l+1}(X)\Phi_F(t) + u^l(X)\Phi_I(t), \quad (3.67)$$

$$p(X, t) = p^{l+1}(X)\Theta_F(t), \quad (3.68)$$

onde as funções de interpolação temporais Φ e Θ para os deslocamentos e para as forças de superfície são definidas da seguinte forma :

$$\Phi_I = \frac{(t_{l+1} - t)}{\Delta t}; \quad \Phi_F = \frac{(t - t_l)}{\Delta t} \quad (3.69)$$

$$\Theta_F = 1. \quad (3.70)$$

As subscrições I e F em 3.67 até 3.70 se referem à posição temporal do nó (inicial ou final). As funções de interpolação temporal lineares são mostradas graficamente na FIGURA 3.3.

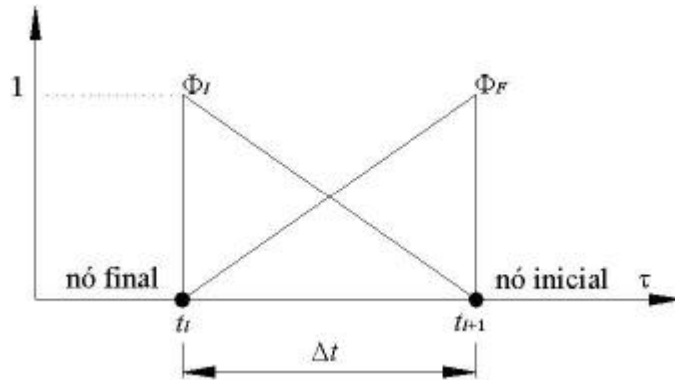


FIGURA 3.3 – Função de interpolação temporal linear

Depois de substituir as Eqs. 3.67 e 3.68 nas Eqs. 3.40, 3.44, 3.46 a 3.49, a integração analítica do tempo pode ser realizada. Deve-se considerar no cálculo das integrais a posição da frente de onda da solução fundamental, que é caracterizada pelo tempo retardado ($t_{rw} = t_n - r/c_w$), onde t_n é um valor discreto no tempo. As expressões finais das soluções fundamentais integradas no tempo dependem da posição da frente de onda da solução fundamental.

Nas equações 3.30 e 3.31, os argumentos da função Heaviside são utilizados para indicar que, nas parcelas correspondentes a cada tipo de onda, nada acontece antes da chegada das ondas primária ou secundária (não se têm contribuições para a resposta). Para um caso em particular, quando um carregamento pontual é aplicado na posição x , em um tempo $t = 0$, os tempos de chegada das ondas primária e secundária para o ponto X , são representados por $t_d = r / c_d$ ou $t_s = r / c_s$, respectivamente, ou seja não há necessidade de se efetuar nenhuma integração antes deste tempo, somente após ele.

Para um tempo qualquer t diferente de zero, o cálculo dos tempos t_d e t_s , para um ponto X , não podem ser feitos diretamente. Então, para poder determinar os tempos de chegada, uma substituição de variável é introduzida na forma $t_{rw} = t_n - r/c_w$, onde r é a distância entre o ponto campo e o ponto fonte e c_w é a velocidade de propagação da onda primária ou secundária. A variável t_{rw} representa o denominado tempo retardado ou condição de retardação, indispensável na determinação da posição da frente de onda da solução fundamental. Duas situações podem ocorrer se $t_n > r / c_w$, integra-se de 0 até $t_n - r / c_w$, pois o tempo em que se quer a resposta está além da frente de onda; caso

contrário, ou seja, quando $t_n < r / c_w$ não faz sentido efetuar qualquer integração visto que a frente de onda ainda não chegou no ponto X .

Duas situações possíveis da posição da frente de onda, caracterizadas pelo tempo retardado ou condição de retardação⁷, foram consideradas; a primeira ocorre no momento em que a onda chega ao ponto X até que ela termine de passar (Casos 1 e 2); quando a onda já passou pelo ponto X , tem-se a segunda situação (Caso 3), mostradas na FIG. 3.4.

(a) Caso 1 : $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$ e $t_{l+1} = t_n$

(b) Caso 2 : $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$ e $t_{l+1} < t_n$

(c) Caso 3 : $t_{l+1} < t_{rw}$

As expressões das soluções fundamentais integradas no tempo correspondentes às posições típicas da frente de onda (relativas às ondas primárias e secundárias) são apresentadas no Anexo A (CARRER & MANSUR 1999).

⁷ A condição de retardação $t_{rw} = t_n - r/c_w$ relaciona o tempo t do ponto de observação (ponto campo) ao tempo t do ponto fonte.

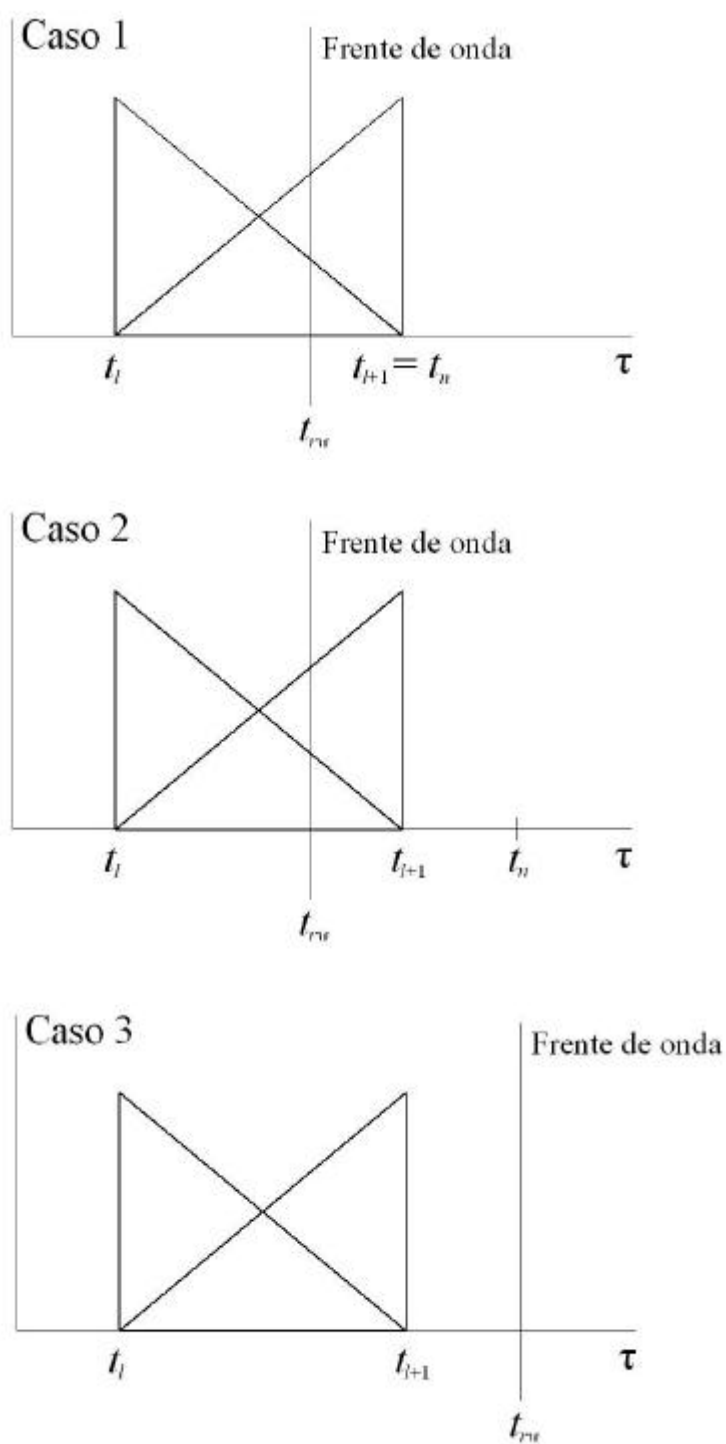


FIGURA 3.4 – Posições típicas da frente de onda

3.3.3 Discretização Espacial

A idéia básica do Método dos Elementos de Contorno é resolver numericamente as Eqs. 3.40 e 3.44, por meio da discretização do contorno (aproximação da geometria para o elemento), utilizando funções de interpolação. Os deslocamentos e as forças de superfície são aproximados em cada elemento por funções polinomiais, que definem o número de nós ou pontos nodais do elemento. Os valores das variáveis associadas aos nós são chamados de valores nodais.

Utilizando elementos isoparamétricos, as componentes dos deslocamentos e das forças de superfície $u_k^m(X, t)$ e $p_k^m(X, t)$ ($k = 1, 2$) são expressas em termos das mesmas funções de forma usadas para a geometria. No caso de elementos lineares, tem-se:

$$u_k^m(X, t) = N_a(X) u_{ka}^m, \quad (3.71)$$

$$p_k^m(X, t) = M_a(X) p_{ka}^m. \quad (3.72)$$

A variável X representa um ponto campo qualquer pertencente ao contorno Γ discretizado; τ é o tempo; u_{ka}^m e p_{ka}^m são os valores nodais dos deslocamentos e das forças de superfície para um intervalo de tempo t_m , correspondentes ao elemento que contém o ponto campo; N_a e M_a são as funções de interpolação espaciais lineares.

Quando dois elementos consecutivos, e_p e e_q , com um nó j em comum são considerados (FIG. 3.5), as funções de interpolação $N_a(Q)$ e $M_a(Q)$ em coordenadas homogêneas h , são dadas por:

$$N_a(h) = M_a(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h_p + 1) & Q \in e_p, \quad (a = 2) \\ -\frac{1}{2}(h_q - 1) & Q \in e_q, \quad (a = 1) \end{cases} \quad (3.73)$$

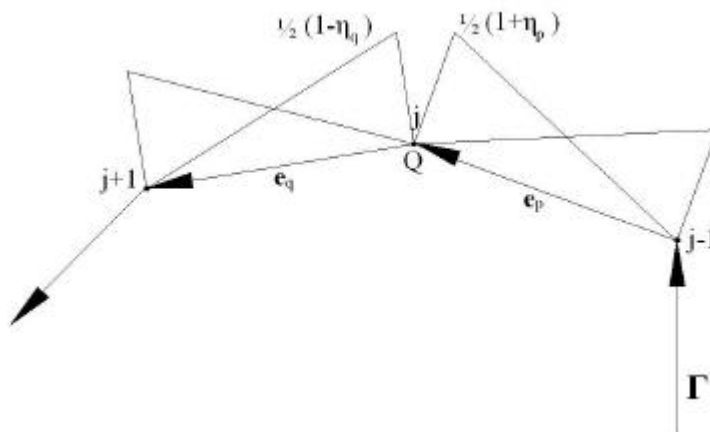


FIGURA 3.5 – Discretização espacial linear do contorno

3.3.4 Discretização da Equação Integral

Após a discretização do contorno Γ em diversos elementos de contorno, passa-se a expressar a Eq. 3.40, repetida a seguir, na forma de somatórios que representam a contribuição de cada elemento descrito no respectivo intervalo de tempo, Eq. 3.75. Nestas equações, encontram-se implícitos os argumentos de cada uma das variáveis envolvidas.

$$C_{ik}(x)u_k(x,t) = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ik}^* p_k dt d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ik}^* u_k dt d\Gamma, \quad (3.74)$$

$$C_{ik}(x)u_k(x,t) + \sum_{k=1}^N H_{ik}^{nn} u_k^n = \sum_{k=1}^N G_{ik}^{nn} p_k^n + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N (G_{ik}^{nm} p_k^m - H_{ik}^{nm} u_k^m), \quad (3.75)$$

Em 3.75, “ N ” é o número de elementos nos quais o contorno Γ é discretizado.

A equação 3.75 representa a integração (espacial e temporal) sobre os elementos do contorno. Se o ponto fonte for aplicado a todos os pontos do contorno “ NNC ”, obtém-se um sistema de equações lineares com $2(NNC)$ equações, relacionando deslocamentos e esforços nos pontos nodais do contorno.

O sistema linear de equações algébricas resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo pode ser representado na forma matricial:

$$\mathbf{H}^{nn} \mathbf{u}^n = \mathbf{G}^{nn} \mathbf{p}^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m), \quad (3.76)$$

onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$ são os vetores globais que contêm os valores nodais dos deslocamentos e das forças de superfície, respectivamente, para todos os nós do contorno.

$\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são as matrizes de influência que dependem da geometria do problema, das soluções fundamentais e das funções de interpolação adotadas.

O índice superior n se refere ao tempo t_n , no qual são calculadas as incógnitas, e o índice superior m se refere aos tempos anteriores t_m , nos quais os deslocamentos e as forças já foram obtidos.

Os coeficientes das matrizes $\mathbf{H}^{nn}$ e $\mathbf{G}^{nn}$ são gerados no primeiro intervalo de tempo, armazenados na memória e utilizados posteriormente na resolução do sistema linear. As matrizes $\mathbf{H}^{nm}$ e $\mathbf{G}^{nm}$ representam as contribuições dos intervalos de tempo anteriores (história dinâmica transcorrida). O índice superior nm enfatiza que a matriz depende da diferença entre os tempos n e m . Em cada intervalo de tempo, somente as matrizes correspondentes à máxima diferença ($n - m$) são calculadas.

Por exemplo, suponha que a solução para o tempo t_1 tenha sido calculada. Para determinar a solução para o tempo t_2 , os coeficientes das matrizes a serem calculados seriam os correspondentes aos intervalos de tempo $(t_2 - t_0)$ e $(t_2 - t_1)$.

$$\sum_{m=1}^2 \mathbf{H}^{(t_2-t_{m-1})} \mathbf{u}^{t_m} = \mathbf{H}^{(t_2-t_0)} \mathbf{u}^{t_0} + \mathbf{H}^{(t_2-t_1)} \mathbf{u}^{t_1}. \quad (3.77)$$

Para o tempo seguinte t_3 , os coeficientes das matrizes a serem calculados seriam os correspondentes aos intervalos de tempo $(t_3 - t_0)$, $(t_3 - t_1)$ e $(t_3 - t_2)$.

$$\sum_{m=1}^3 \mathbf{H}^{(t_3-t_{m-1})} \mathbf{u}^{t_m} = \mathbf{H}^{(t_3-t_0)} \mathbf{u}^{t_0} + \mathbf{H}^{(t_3-t_1)} \mathbf{u}^{t_1} + \mathbf{H}^{(t_3-t_2)} \mathbf{u}^{t_2}. \quad (3.78)$$

Nas equações 3.77 e 3.78, os coeficientes das matrizes $\mathbf{H}$ correspondentes aos intervalos de tempo $(t_2 - t_0)$ e $(t_3 - t_0)$ necessitam ser calculados, pois correspondem à máxima diferença $(n - m)$. As outras matrizes são conhecidas a partir dos intervalos de tempo anteriores ao tempo da análise (propriedade de translação no tempo), conforme comentado a seguir.

Assim, para a solução no tempo t_2 , $\mathbf{H}^{(t_2-t_1)} = \mathbf{H}^{(t_1-t_0)}$, e os coeficientes da matriz correspondentes ao intervalo de tempo $(t_1 - t_0)$ foram calculados anteriormente para o tempo t_1 . Para a solução do tempo t_3 tem-se $\mathbf{H}^{(t_3-t_1)} = \mathbf{H}^{(t_2-t_0)}$ e $\mathbf{H}^{(t_3-t_2)} = \mathbf{H}^{(t_2-t_1)}$, e os coeficientes das matrizes correspondentes aos intervalos de tempo $(t_2 - t_0)$ e $(t_2 - t_1)$ foram calculados anteriormente para os tempos t_2 e t_1 , respectivamente.

As colunas das matrizes $\mathbf{H}^{nn}$ e $\mathbf{G}^{nn}$ são reordenadas em função das condições de contorno, originando novas matrizes $\mathbf{A}^{nn}$ e $\mathbf{B}^{nn}$. Estas matrizes são modificadas somente durante o primeiro intervalo de tempo. A matriz $\mathbf{A}^{nn}$ é multiplicada pelo vetor $\mathbf{x}^n$ dos deslocamentos e das forças de superfície desconhecidos (incógnitas do sistema), e a matriz $\mathbf{B}^{nn}$ pelo vetor $\mathbf{y}^n$ das variáveis conhecidas (condições de contorno prescritas), segundo a expressão:

$$\mathbf{A}^{nn} \mathbf{x}^n = \mathbf{B}^{nn} \mathbf{y}^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m). \quad (3.79)$$

Com a aplicação das condições de contorno que resultam no sistema linear (Eq. 3.79), se os deslocamentos são conhecidos, pode-se encontrar as forças de superfície e vice-versa. O sistema assim ordenado ($\mathbf{A}^{nn} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^{nn} = \mathbf{B}$) pode ser reescrito na forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^n = \mathbf{f}^n, \quad (3.80)$$

onde $\mathbf{f}^n$ é dado pela Eq. 3.81:

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{B}\mathbf{y}^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{nm}\mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm}\mathbf{u}^m), \quad (3.81)$$

e é um vetor conhecido, pois o termo $\mathbf{y}^n$ é o vetor que contém os valores prescritos impostos pelas condições de contorno associadas ao problema físico e as variáveis dentro do somatório $\sum_{m=1}^{n-1}$ representam a contribuição dos instantes de tempo anteriores (história dinâmica transcorrida).

A solução do sistema (Eq. 3.80) fornece os valores dos deslocamentos e das forças de superfície incógnitos sobre o contorno do sólido, para cada intervalo de tempo (a matriz $\mathbf{A}$ precisa ser invertida somente durante o primeiro intervalo de tempo).

A formulação do sistema de equações é simples, mas o vetor $\mathbf{f}^n$ precisa da integração em cada intervalo de tempo e depende da história do processo. O cálculo do vetor $\mathbf{f}^n$ mediante o Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo torna-se mais lento, principalmente se a solução para muitos intervalos do tempo é necessária, porque depende das matrizes $\mathbf{H}^{nm}$ e $\mathbf{G}^{nm}$ para todos os instantes de tempo anteriores. De fato, o método do domínio do tempo é rápido durante as etapas iniciais, porque as soluções fundamentais são integradas somente ao longo do contorno.

A fim de evitar-se o cálculo do valor principal de Cauchy, observa-se que a integral envolvendo a solução fundamental transiente p_{ik}^* possui o mesmo grau de singularidade que a correspondente solução fundamental da estática (Kelvin) durante o primeiro intervalo de tempo. A integral singular é avaliada da seguinte maneira:

$$C_{ik} + \int_S^{trans} p_{ik}^* \mathbf{N}_a dS = \left(C_{ik} + \int_S^{esta} p_{ik}^* \mathbf{N}_a dS \right) + \int_S (p_{ik}^{*trans} - p_{ik}^{*esta}) \mathbf{N}_a dS. \quad (3.82)$$

A primeira integral do lado direito da Eq. 3.82 é singular, sendo calculada indiretamente junto com a quase-diagonal da matriz C_{ik} , utilizando-se a técnica de *movimento de corpo rígido*. Deste modo, o valor de C_{ik} não precisa ser calculado explicitamente. É importante notar que a avaliação da primeira integral requer que o corpo possua um

contorno fechado. Então, para problemas envolvendo domínios abertos, a região de interesse deverá ser fechada utilizando-se um contorno fictício.

A segunda integral é não singular e sua avaliação numérica não apresenta dificuldade nenhuma, porque a singularidade foi removida quando a solução fundamental da estática foi subtraída da solução fundamental dependente do tempo. Com isto, garante-se a continuidade da equação e a integral que envolve a expressão regular resultante da subtração pode ser calculada como uma integral de Riemann.

Por outro lado, a singularidade da solução fundamental transiente u_{ik}^* é fraca e sua avaliação numérica não apresenta dificuldades.

Quando existem problemas de descontinuidade dos esforços, torna-se necessária a utilização de alguns tipos especiais de elementos de contorno ou outras formas alternativas de superar estas situações. Uma delas consistiria em aumentar o refinamento da discretização nestas regiões. Contudo, este procedimento além de aumentar o tamanho do sistema linear de equações algébricas resultante pela adição de mais pontos nodais, nem sempre proporciona bons resultados.

Outra forma simples de resolver tal problema consiste na adoção do denominado “nó duplo”, isto é, a duplicação do nó extremo dos elementos de contorno (FIG. 3.6). Neste caso, tem-se dois nós funcionais pertencentes a diferentes elementos de contorno adjacentes, possuindo as mesmas coordenadas geométricas no sistema global. Por exemplo, os nós funcionais 2 e 3 na FIG. 3.6.

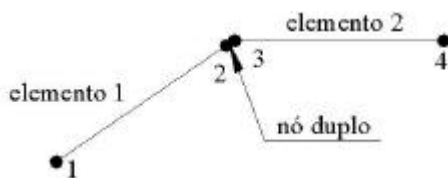


FIGURA 3.6 – Representação do nó duplo

A inclusão do nó duplo proporciona um aumento na ordem do sistema de equações algébricas. No entanto, devido ao fato das descontinuidades encontrarem-se em número

reduzido se comparado ao número total de equações, esta característica não inviabiliza este procedimento de solução.

Entre os elementos especiais que podem ser utilizados, tem-se os elementos descontínuos, nos quais o ponto funcional deixa de estar localizado no extremo do elemento, podendo-se gerar duas equações distintas para o nó onde acontece a descontinuidade. Outros tipos de elementos podem ser encontrados na literatura técnica.

Uma vez obtidos todos os valores do contorno, pode-se calcular os valores transientes para os deslocamentos e as forças de superfície em qualquer ponto interno. De maneira geral, o cálculo das incógnitas para os pontos internos é feito em um “pós-processamento”, utilizando-se os valores obtidos para as variáveis no contorno. Deve-se notar que a avaliação numérica das integrais não apresenta nenhuma dificuldade, já que não existe singularidade.

A seguir, serão resumidos os passos computacionais do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo.

3.3.5 Esquema Computacional

O processo computacional tem início com um pré-processamento, onde são definidos a geometria da estrutura mediante elementos lineares (cada elemento é definido por dois nós consecutivos), as características do material (propriedades mecânicas), o tempo final da análise, o número de intervalos de tempo (nit) e as condições prescritas do contorno para cada intervalo de tempo (deslocamentos e forças de superfície).

Fornecidos os dados para a definição do modelo (geométricos, temporais e iniciais), a etapa seguinte consiste na obtenção das respostas para o tempo t_1 . As expressões integrais da Eq. 3.75 do primeiro intervalo de tempo ($t_1 - t_0$) são avaliadas ao longo dos elementos do contorno (o ponto fonte é aplicado a todos os nós do contorno), obtendo-se as matrizes de influência $(\mathbf{H}^{11})_I$, $(\mathbf{H}^{11})_F$ e $\mathbf{G}^{11}$, correspondentes à posição temporal inicial (I) e à posição temporal final (F) do nó, no caso da matriz $\mathbf{H}$.

Estas matrizes são montadas somente durante esta etapa da análise, os valores das matrizes $(\mathbf{H}^{11})_F$ e $\mathbf{G}^{11}$ são armazenados na memória e utilizados posteriormente para a solução do sistema de equações lineares.

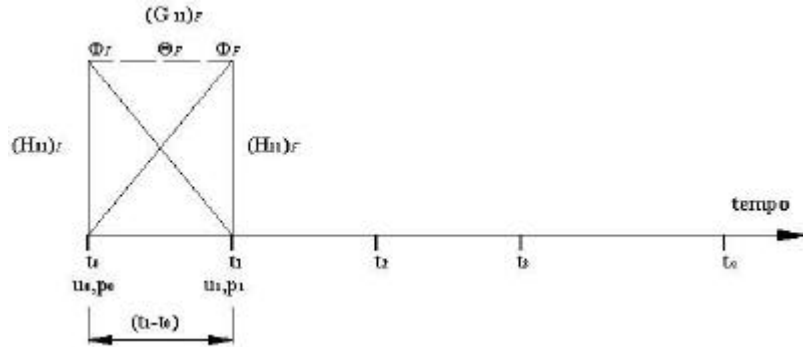


FIGURA 3.7 – Integração passo a passo para o primeiro intervalo de tempo

A seguir, a história dinâmica transcorrida começa a ser gerada. Matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ que representam as variações temporais constantes e lineares das forças de superfície e dos deslocamentos (Eq. 3.83) são preenchidas para o intervalo de tempo $(t_1 - t_0)$. Nesta primeira etapa da análise somente é preenchida a contribuição inicial para o deslocamento, ver FIG. 3.7.

Para facilitar o endereçamento das contribuições temporais anteriores (Eq. 3.79), armazenam-se estas matrizes com índices, na forma indicada abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{nit} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}^{nit} &= (\mathbf{H}^{11})_I, \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde o subíndice I corresponde à posição temporal inicial do nó e o índice superior nit corresponde ao número de intervalos de tempo.

Essas novas matrizes geradas para o intervalo de tempo $(t_1 - t_0)$ representam o efeito da história dinâmica do tempo da análise em relação ao primeiro intervalo de tempo, para serem utilizadas nos tempos seguintes.

Após a formação das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ para o intervalo de tempo $(t_1 - t_0)$, é criado um vetor $\mathbf{P}$ que representa toda a contribuição dos tempos anteriores em cada nó do contorno, como descrito abaixo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}^{nit} \times p_k(t_0) + \mathbf{E}^{nit} \times u_k(t_0) \quad (3.84)$$

O sistema de equações formado é modificado de acordo com as condições de contorno através da troca das colunas das matrizes $(\mathbf{H}^{11})_F$ e $\mathbf{G}^{11}$ (eq.(3.76)) e, em seguida, é feita a triangularização da matriz resultante $(\mathbf{H}^{11})_F$, que será armazenada e utilizada na solução dos sistemas de equações lineares para cada passo de tempo. O vetor $\mathbf{f}^n$ é obtido somando-se o resultado da multiplicação da matriz resultante $\mathbf{G}^{11}$ pelos valores prescritos no contorno no tempo t_1 com o vetor $\mathbf{P}$.

A solução do sistema fornece os valores dos deslocamentos e das forças de superfície incógnitos para o tempo t_1 .

Para obter a resposta no tempo t_2 , são geradas as contribuições para o intervalo de tempo $(t_2 - t_0)$, necessárias para a consideração da história dinâmica transcorrida. As matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são modificadas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{nit} &= \mathbf{D}^{nit} + (\mathbf{G}^{21})_F, \\ \mathbf{D}^{nit-1} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}^{nit-1} &= (\mathbf{H}^{21})_I, \\ \mathbf{E}^{nit} &= \mathbf{E}^{nit} + (\mathbf{H}^{21})_F, \end{aligned} \quad (3.85)$$

Uma vez formadas as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ para o intervalo de tempo $(t_2 - t_0)$, a contribuição dos tempos anteriores (vetor $\mathbf{P}$) se dá segundo a expressão:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}^{nit-1} \times p_k(t_0) + \mathbf{E}^{nit-1} \times u_k(t_0) + \mathbf{D}^{nit} \times p_k(t_1) + \mathbf{E}^{nit} \times u_k(t_1) \quad (3.86)$$

É importante notar que os valores dos coeficientes das matrizes $\mathbf{D}^{nit}$ e $\mathbf{E}^{nit}$ não são calculados integralmente nesta etapa. De acordo com a Eq. 3.85, os valores desta etapa são superpostos com os valores calculados anteriormente, utilizando a propriedade de translação no tempo da solução fundamental (ver FIG. 3.8).

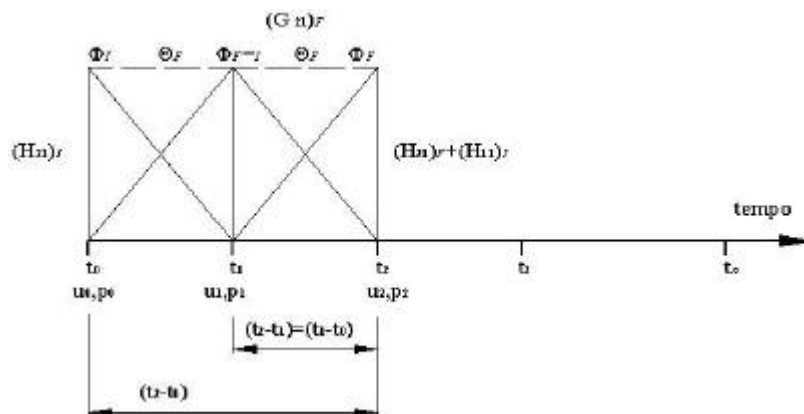


FIGURA 3.8 – Integração passo a passo para o segundo intervalo de tempo

A matriz resultante $(\mathbf{H}^{11})_F$ que foi armazenada na sua forma triangularizada é utilizada para resolver o novo sistema linear de equações. O vetor $\mathbf{f}^n$ é novamente obtido somando-se o resultado da multiplicação da matriz resultante $\mathbf{G}^{11}$ pelos valores prescritos no contorno no tempo t_2 com o vetor $\mathbf{P}$.

Desta forma, são obtidos os valores dos deslocamentos e das forças de superfície incógnitos para o tempo t_2 .

Para obter a resposta para o tempo t_3 , são geradas as contribuições para o intervalo de tempo $(t_3 - t_0)$, indispensável para a consideração da historia dinâmica transcorrida. As matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são novamente modificadas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{nit-1} &= \mathbf{D}^{nit-1} + (\mathbf{G}^{31})_F, \\ \mathbf{D}^{nit-2} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}^{nit-2} &= (\mathbf{H}^{31})_I, \\ \mathbf{E}^{nit-1} &= \mathbf{E}^{nit-1} + (\mathbf{H}^{31})_F, \end{aligned} \quad (3.87)$$

Uma vez formadas as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ para o intervalo de tempo $(t_3 - t_0)$, a contribuição dos tempos anteriores (vetor $\mathbf{P}$) se dá segundo a expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{D}^{nit-2} \times p_k(t_0) + \mathbf{E}^{nit-2} \times u_k(t_0) + \mathbf{D}^{nit-1} \times p_k(t_1) + \mathbf{E}^{nit-1} \times u_k(t_1) \\ &+ \mathbf{D}^{nit} \times p_k(t_2) + \mathbf{E}^{nit} \times u_k(t_2) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Como no caso anterior os valores dos coeficientes das matrizes $\mathbf{D}^{nit-1}$ e $\mathbf{E}^{nit-1}$ são obtidos por superposição com a etapa anterior e as matrizes $\mathbf{D}^{nit}$ e $\mathbf{E}^{nit}$ já foram calculadas anteriormente nos tempos t_2 e t_1 (propriedade de translação no tempo), ver FIG. 3.9.

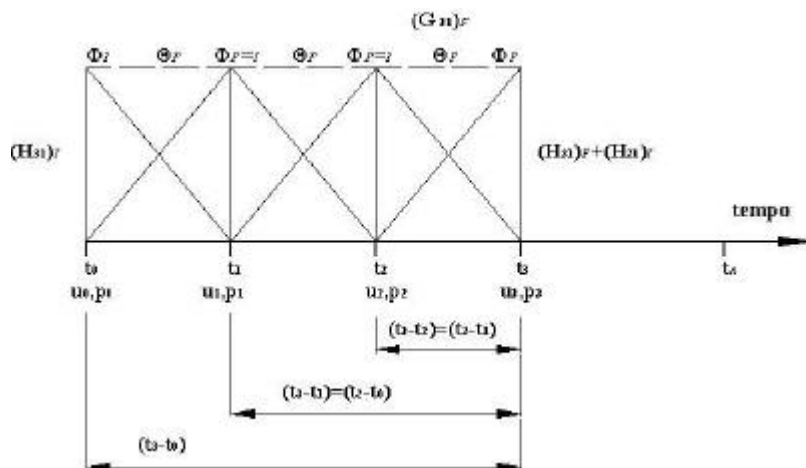


FIGURA 3.9 – Integração passo a passo para o terceiro intervalo de tempo

A matriz resultante $(\mathbf{H}^{11})_F$ triangularizada é novamente utilizada para resolver o sistema linear de equações, o vetor $\mathbf{f}^n$ é obtido pela terceira vez somando-se o resultado da multiplicação da matriz resultante $\mathbf{G}^{11}$ pelos valores prescritos do contorno no tempo t_3 com o vetor $\mathbf{P}$.

Uma vez resolvido o sistema linear de equações, obtêm-se os valores dos deslocamentos e das forças de superfície para o tempo t_3 .

Para obter as respostas nos tempos seguintes, de maneira geral calcula-se somente as contribuições correspondentes à máxima diferença (tempo atual de análise e tempo inicial t_0) para montar as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$. As contribuições para as outras combinações $(t_m - t_i)$ não precisam ser obtidas, já que foram calculadas nos intervalos de tempo anteriores ao tempo de análise, utilizando a propriedade de translação no tempo da solução fundamental.

Depois de formadas as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$, é gerado o vetor $\mathbf{P}$ que representa a contribuição total dos tempos anteriores. As matrizes resultantes $(\mathbf{H}^{11})_F$ e $\mathbf{G}^{11}$ geradas no primeiro intervalo de tempo, com colunas trocadas em função das condições de contorno, são

utilizadas para a solução do sistema linear de equações. A matriz $(\mathbf{H}^{11})_F$ é utilizada em sua forma triangularizada e a matriz $\mathbf{G}^{11}$ é multiplicada pelos valores prescritos no contorno, e a soma do resultado da multiplicação com o vetor $\mathbf{P}$ forma o vetor $\mathbf{f}$. A solução do sistema fornece os deslocamentos e forças de superfície incógnitos sobre o contorno.

Obtidos todos os valores no contorno, inicia-se o cálculo dos valores dos deslocamentos e das tensões para qualquer ponto no interior do domínio, a partir dos resultados calculados no contorno. Os dados resultantes da análise numérica são impressos em arquivos, podendo ser visualizados mediante gráficos e relatórios, na etapa do pós-processamento.

4

ANELC

O presente capítulo descreve a ferramenta ANELC, Análise Elastodinâmica com Elementos de Contorno, destinada ao processamento, análise e visualização do comportamento das ondas elásticas. O capítulo encontra-se organizado da seguinte forma: a Seção 4.1 apresenta os requisitos para a implementação do ANELC. A partir dos requisitos, a Seção 4.2 apresenta a arquitetura do sistema, suas partes e interação entre as mesmas. A Seção 4.3 define as características principais do pré-processamento. E, finalmente, a Seção 4.4 apresenta as características do pós-processamento implementado no ANELC.

4.1 Requisitos da Ferramenta

A implementação do ANELC foi fundamentada em quatro propriedades consideradas muito importantes em um programa de análise estrutural:

Funcionalidade. A funcionalidade de um programa de análise estrutural é caracterizada pelos recursos oferecidos pelo programa de pré-processamento, análise e pós-processamento, definidos em função das necessidades das possíveis aplicações a serem processadas pelo programa. Note-se, porém, que os recursos de modelagem, análise e

visualização de um programa de análise estrutural não definem somente a funcionalidade específica de uma aplicação, como também as operações que são comuns a todos os programas de análise estrutural. Por exemplo, independente do método de análise numérica adotado, as incógnitas de qualquer problema são sempre determinadas a partir da resolução de sistemas de equações lineares.

Extensibilidade. Um programa de análise estrutural sempre pode crescer em todas as direções e sentidos, incorporando novos recursos e técnicas mais eficientes de representação do modelo, assim como novos processos de análise que permitam que o programa possa ser aplicado a um número maior de casos. Esse crescimento deve ser baseado, tanto quanto possível, no reaproveitamento do código já existente. Um programa de análise estrutural é um programa complexo e não se pode começar do zero a cada nova aplicação.

Eficiência. A eficiência é essencial em programas computacionais. No caso analisado, em que o processamento envolve manipulação gráfica e numérica, ele pode ser comprometido por uma sobrecarga oriunda de uma escolha não adequada da estrutura de dados ou mesmo da lógica de resolução. A linguagem utilizada para implementar o ANELC, DELPHI, foi projetada para atender aos requisitos de interação homem-máquina, onde o apelo visual é considerável, otimizando o código gerado, além de considerar os requisitos de desempenho. Com isso, tem-se assegurado que, no mínimo, o código gerado de forma automática pelo ambiente de programação foi projetado com análise dos critérios visando a eficiência dos aplicativos gerados.

Facilidade de uso. O ANELC é uma ferramenta com interfaces gráficas, desenvolvida em DELPHI por ser essa uma linguagem visual, facilitando a criação de interfaces, e cujos aplicativos podem ser utilizados no sistema operacional Windows. Escolheu-se o Windows como principal sistema operacional para utilização do programa simplesmente porque oferece um conjunto de componentes gráficos de uso comum, o que facilita e acelera o aprendizado de como operar o ANELC. As interfaces implementadas facilitam a entrada dos comandos e dados do usuário e a apresentação gráfica dos resultados do processamento. Para a sua utilização em outros sistemas operacionais, como o Linux, somente seria necessária a compilação adequada do código

do programa. Como já existe disponível no mercado o compilador Delphi para Linux, a conversão não solicitaria muito esforço.

4.2 Sistema ANELC

O ANELC é um sistema gráfico interativo, cujo objetivo principal é servir como uma ferramenta computacional simples e eficiente para ser utilizada no estudo e análise do fenômeno da propagação da onda elástica, não existindo a preocupação em ensinar os diversos processos matemáticos e computacionais disponíveis para a análise da propagação da onda. Uma de suas maiores prioridades é facilitar a assimilação do método de análise proposto, MEC, mostrando como o modelo se comporta na prática.

A FIGURA 4.1 mostra as etapas envolvidas no processo de simulação numérica adotadas no desenvolvimento deste trabalho, integrando as funcionalidades de pré-processamento, de análise numérica e de pós-processamento, para ser utilizado na simulação numérica de problemas dinâmicos, onde podem ser distinguidas as seguintes operações:

Modelagem (pré-processamento). O processo de análise estrutural começa com a construção de um modelo que descreve a geometria da estrutura, as propriedades do material, as condições de contorno, as condições iniciais e os casos de carregamento. Os dados do modelo geométrico, juntamente com as especificações dos tipos de elementos e da precisão desejada são utilizados para a geração do modelo matemático.

Análise. Análise em engenharia, segundo SHEPARD & SCHROEDER (1995), é “o processo que, a partir de um conjunto apropriado de manipulações, transforma informações de entrada de um determinado domínio físico em informações de saída que oferecem respostas a algumas questões de interesse no domínio considerado”. As “informações de entrada”, nesse caso, são fornecidas no modelo construído na etapa de modelagem; as “informações de saída” são as respostas do problema: campos de deslocamento, de deformações e de tensões da estrutura. O “conjunto apropriado de transformações” é definido pela metodologia numérica empregada na análise, no caso apresentado, o Método dos Elementos de Contorno.

Visualização (pós-processamento). Visualizar significa transformar dados extraídos de um objeto em imagens que representam informações sobre o objeto. Essas imagens não representam somente informações sobre a estrutura física ou geométrica dos objetos, mas podem também representar informações sobre os dados resultantes do processo de análise.

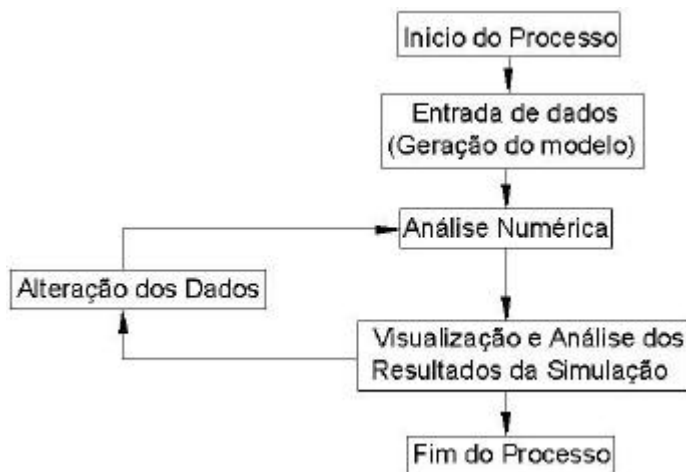


FIGURA 4.1 – Etapas do processo da simulação numérica

4.3 Características do Pré-processamento

Nesta seção, serão apresentados os recursos disponibilizados no pré-processamento, tratados de forma interativa e independente, destacando as possíveis formas de entrada de dados e suas respectivas restrições.

O módulo de pré-processamento se encontra integrado ao ANELC, permitindo ao usuário a entrada de dados através de uma interface gráfica amigável, reduzindo erros, possibilitando alterações rápidas e, por fim, apresentando a visualização gráfica do modelo gerado por esses dados para auxiliar na identificação de possíveis erros de dimensionamento dos dados de entrada.

4.3.1 Entrada de Dados

A etapa inicial de um processo de simulação numérica envolve a definição do modelo a ser analisado. A esta etapa dá-se o nome de entrada de dados ou geração do modelo. A facilidade na construção de um modelo para posterior análise numérica pode ser determinante na utilização ou não de um determinado sistema. O desenvolvimento de um sistema para análise numérica deve então estar vinculado ao desenvolvimento de uma ferramenta integrada ao sistema ou independente, que ofereça facilidades na geração ou preenchimento dos dados de entrada, sob pena de se ter uma excelente ferramenta para análise sendo pouco explorada.

Para facilitar o pré-processamento e a utilização da ferramenta, a solicitação dos dados foi agrupada segundo critérios geométricos, temporais e iniciais. Os seguintes grupos podem ser identificados:

- (a) Dados gerais, como título da análise a ser computada, tipo de análise (EPT ou EPD) e determinação da precisão da integração, através do número de pontos de integração.
- (b) Características do material da estrutura a ser analisada, considerando a contribuição das ondas primária e secundária na análise.
- (c) Dados destinados a subdividir a estrutura em regiões menores (células). O ANELC foi preparado para futuramente processar tais regiões, auxiliares na visualização dos resultados através de mapa de cores. Atualmente, somente a divisão em células e sua visualização encontram-se implementadas.
- (d) Dados correspondentes ao tempo total de simulação e número de intervalos de tempo a serem utilizados no processo de integração numérica.
- (e) Dados relativos à geometria do contorno, determinados a partir das coordenadas dos nós e dos segmentos ou elementos gerados através da associação de um par de nós (incidência dos elementos).
- (f) Dados relacionados à análise da parte interna do domínio, utilizando a determinação de coordenadas referentes aos pontos internos ao contorno.

- (g) Dados referentes às condições de contorno associadas ao problema, como deslocamentos prescritos e/ou forças prescritas para um determinado nó.

Para flexibilizar o uso da ferramenta, o fornecimento desses conjuntos de dados por parte do usuário pode ser feito de duas formas, mediante arquivo texto ou por meio dos componentes gráficos presentes nas interfaces de entrada de dados (FIG. 4.2), sendo que os dados obtidos inicialmente por arquivo poderão ser alterados via interfaces gráficas, caso seja necessário.

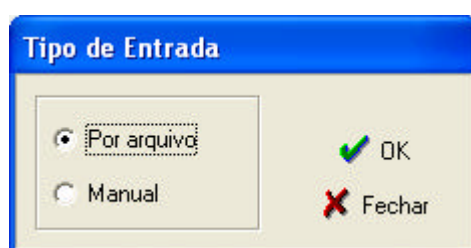


FIGURA 4.2 –Tipos de entrada de dados

A FIG. 4.3 mostra uma visão geral do agrupamento descrito anteriormente para a entrada de dados por meio de componentes gráficos.

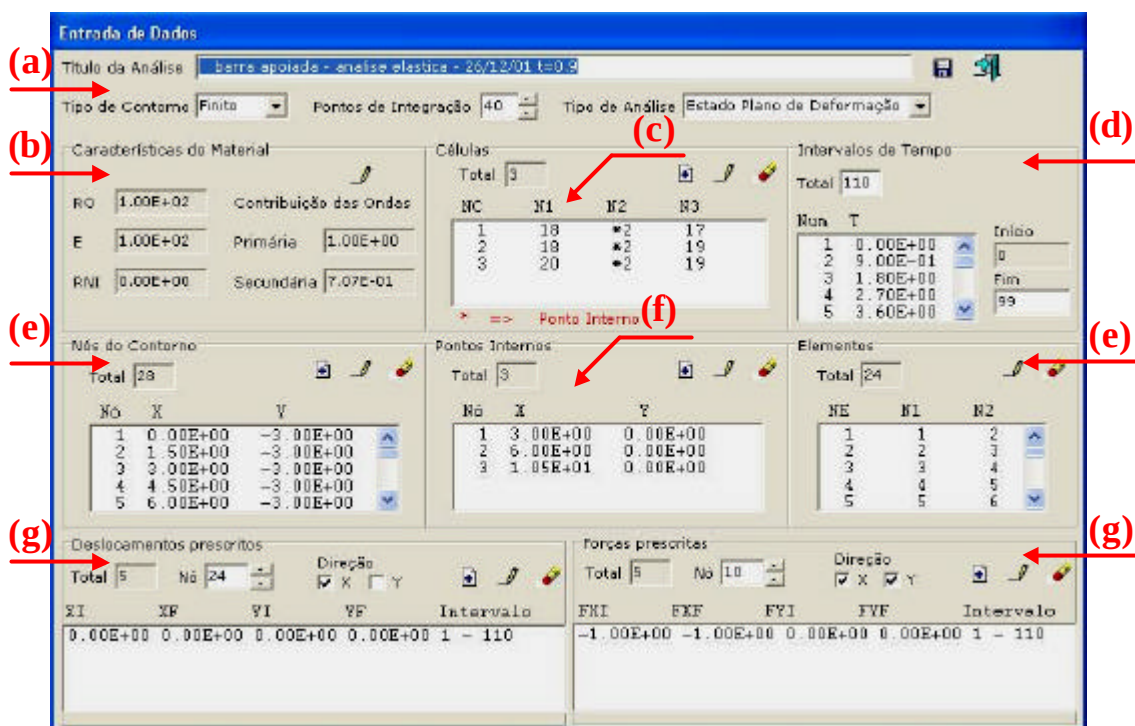


FIGURA 4.3 – Tela dos dados de entrada

i) Arquivo texto

A entrada de dados por meio de arquivo texto é feita no início de cada análise, por ser esta uma operação de alto custo, no que diz respeito ao tempo necessário para executá-la. A ordem dos dados no arquivo foi estabelecida segundo a necessidade de cada um deles de acordo com as etapas da análise.

Primeiramente, os dados iniciais do arquivo se referem à geometria do modelo e alguns dados gerais, tais como, número de elementos, número de nós e pontos internos, número de células, número de pontos de integração, a indicação do tipo de domínio e o título da análise. A partir daí, são fornecidas as coordenadas referentes aos nós do contorno, aos pontos internos, à matriz de incidência e, caso existam, às células.

Concluídas essas informações, as próximas são referentes às constantes iniciais existentes e ao tipo de problema a ser analisado (Estado Plano de Deformação ou Estado Plano de Tensão), que serão utilizados na análise. Utiliza-se o valor da densidade do material como indicador dos próximos dados a serem fornecidos: módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson; ou, os valores das velocidades das ondas primária e secundária. Caso o valor da densidade seja zero, o primeiro dos conjuntos de dados anteriores deve ser fornecido. Caso contrário, deverão ser fornecidos os dados do segundo conjunto. Qualquer conjunto de valores fornecidos pode ser utilizado na obtenção do outro conjunto omitido na entrada de dados, citado anteriormente, ou seja, a partir dos valores das velocidades pode-se calcular o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson e vice-versa, ver Eqs. 2.14 e 3.23.

Para concluir a entrada dos dados iniciais e dar prosseguimento à análise, ainda faltam as informações referentes ao tempo: número de intervalos de tempo, com o tempo inicial e final, ou mesmo as divisões explícitas do tempo a ser analisado. Para cada intervalo de tempo, também são fornecidas informações referentes aos carregamentos da estrutura, como deslocamentos e forças de superfície.

Como pode ser observado, a quantidade e a forma como as informações são fornecidas em um arquivo estão sujeitas a graves erros, principalmente aos erros gerados por uma má digitação e ausência de algum dado, comprometendo toda a validade dos resultados

da análise. Isso não exclui a importância dessa via de entrada de dados no ANELC, pois os mesmos podem ser gerados por outras ferramentas, que podem ter sido desenvolvidas em linguagens de programação distintas da utilizada aqui. Ainda assim, é perfeitamente factível o seu uso para a análise, sendo os resultados visualizados graficamente pelo ANELC, por se tratarem de arquivos texto, cujo formato é conhecido.

Diversas ferramentas são programáveis para gerar arquivos textos, sendo a formatação dos dados uma decisão do programador no momento da gravação do arquivo e, portanto, pode-se configurá-la para o formato aceito pelo ANELC. Caso se decida aceitar dados de uma ferramenta específica, cujo formato do arquivo texto exportado dos dados referentes ao modelo seja incompatível com o ANELC, pode-se investir um intervalo de tempo pequeno na criação dessa funcionalidade e incluí-la no programa, por ter sido esse projetado para facilitar a inclusão de novas funcionalidades (extensibilidade).

ii) Interface gráfica

Para auxiliar na entrada de dados, o usuário tem a opção de utilizar os componentes gráficos no fornecimento de informações. Algumas facilidades são intrínsecas à própria interface; por exemplo, ao invés do usuário ter que indicar o tipo de contorno, fornecendo o valor 1 ou 0, no componente ele fica restrito às duas opções de contorno: finito ou infinito, o que se aproxima muito mais da linguagem cotidiana. O mesmo acontece em relação ao tipo de problema a ser analisado, que pode ser Estado Plano de Deformação ou Estado Plano de Tensão, ao invés de valores como 0 e 1.

Anteriormente, por um arquivo texto, a indicação do número de dados de um determinado conjunto de informações era necessária para delimitação da execução dos comandos associados à obtenção de tais informações. Tal característica pode provocar erros, tais como a incoerência entre o número total de nós previamente fornecido e o número de fato existente de coordenadas, por exemplo. Em uma estrutura modelada com um número alto de nós, seria quase impraticável encontrar um par de coordenadas esquecido em meio a tantos outros. Isso foi resolvido com o fato de cada dado fornecido pelo usuário gerar o incremento automático do contador responsável por contabilizar

aquela quantidade e o desenho da estrutura ser refeito a cada alteração para que o próprio usuário identifique a correção das informações.

As demais facilidades na entrada de dados por meio dos componentes das interfaces gráficas serão descritas nas seções seguintes, segundo o tipo da informação a ser fornecida pelo usuário do ANELC.

iii) Dados geométricos do contorno

As coordenadas nodais são as especificações da posição de cada um dos pontos nodais em relação a um sistema de eixos de referência básico, escolhido de acordo com a preferência e conveniência do usuário (FIG. 4.3-e).

Cada coordenada nodal é fornecida pelo usuário (FIG. 4.4) e acrescentada à lista de nós do contorno, que por sua vez é automaticamente incrementada em relação ao número total de nós da estrutura (FIG. 4.3).

O usuário tem também a possibilidade de alterar ou mesmo remover qualquer uma das coordenadas antes ou depois da análise da estrutura. Porém, ao inserir, alterar ou remover os valores das coordenadas nodais, deve-se rever o impacto em relação à conectividade, condições do contorno e células, caso estejam relacionados. Essa funcionalidade não foi automatizada por requerer um processo de análise da distribuição espacial dos nós, o que não é alvo desse trabalho e a ferramenta se encarrega apenas em alertar o usuário de tal necessidade.

The figure shows two side-by-side software windows. The left window, titled 'Contorno', contains input fields for 'Nó' (set to 29), 'X' (set to 0), 'Y' (set to 0), and 'IDUP' (set to 0). Below these fields are two buttons: 'Inserir' with a plus icon and 'Fechar' with a red X icon. The right window, titled 'Incidência', contains a list of elements. The first element is 'Elem' with a value of 1. Below it are 'N1' with a value of 1 and 'N2' with a value of 2. To the right of this list are three buttons: 'Inserir' with a plus icon, 'Alterar' with a pencil icon, and 'Fechar' with a red X icon.

FIGURA 4.4 – Cadastro de nós e elementos

A especificação da conectividade dos elementos ou incidência dos nós na discretização geométrica do contorno consiste em indicar quais são os nós correspondentes a cada um dos elementos do contorno, sendo que esses nós vinculam o elemento a outros adjacentes. Normalmente, a conectividade dos elementos será definida de forma individual e para cada elemento existe a necessidade de que o usuário informe o número do nó inicial e final, sendo que esses já devem ter sido cadastrados (FIG. 4.3-e e FIG. 4.4).

iv) Dados da parte interna do domínio

As coordenadas dos pontos internos são as especificações das distâncias de cada um dos pontos no interior do corpo (domínio) em relação ao sistema de eixos pré-estabelecidos.

A ordem do preenchimento dos dados é um pouco mais flexível do que era por meio do arquivo texto. O usuário pode primeiramente fornecer as coordenadas nodais e a seguir os pontos internos (FIG. 4.3-f e FIG. 4.5), ou vice-versa. Como no contorno, a inserção, alteração ou remoção de pontos internos pode ser feita a qualquer momento, implicando na revisão da definição das células, caso exista alguma vinculada ao ponto interno em questão.

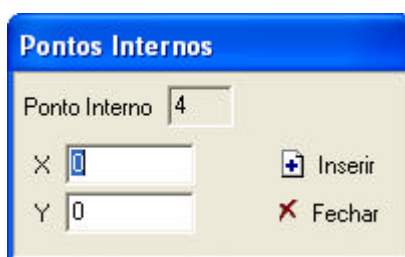


FIGURA 4.5 – Cadastro dos pontos internos

O mesmo ocorre para as células, caso elas existam no modelo. Elas são formadas por nós e pontos internos cadastrados, sendo visível a indicação se é ponto interno ou não (FIG. 4.3-c e FIG. 4.6). A inserção, alteração e remoção de células é possível a qualquer momento, sem implicar na revisão de outros dados.

FIGURA 4.6 – Cadastro das células

v) Características dos materiais

As características dos materiais referem-se às propriedades físicas correspondentes ao tipo de material que compõe a estrutura. As propriedades mecânicas características incluem o módulo de deformação longitudinal, E (módulo de Young); o módulo de deformação transversal, G ; o coeficiente de Poisson, ν ; o peso específico, ρ ; e, se preciso, as velocidades de propagação das ondas primária e secundária c_d e c_s .

FIGURA 4.7 – Cadastro das constantes físicas do material

O fornecimento das informações referentes às características dos materiais é necessário e obrigatório para dar prosseguimento à análise da estrutura (FIG. 4.7). O preenchimento dessas informações não é mais exigido numa ordem pré-estabelecida, a única exigência é que ele seja feito antes de iniciar a análise, podendo ser alterado após a análise para que um outro processamento seja feito com base nas alterações.

No caso dos problemas alvos dessa ferramenta, devem ser fornecidos a densidade e, no mínimo, um dos pares das informações seguintes: módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, ou as velocidades das ondas primária e secundária (FIG. 4.3-b). Caso o

usuário forneça os quatro últimos valores citados, o ANELC faz a validação considerando como referência o primeiro par e a partir dele verificando se os valores das velocidades das ondas estão corretos, informando para o usuário a incorreção, caso ela ocorra.

vi) Dados temporais

Os dados temporais se referem ao tempo total da análise numérica e ao incremento do tempo utilizado no processo da integração. Eles são utilizados para especificar os aspectos dinâmicos da aplicação (variação temporal).

Por arquivo texto, o usuário tem a opção de informar previamente como estarão configuradas as informações referentes aos intervalos de tempo a serem analisados, se serão fornecidos os valores de cada intervalo ou o valor do intervalo inicial e final a ser analisado, sendo que o primeiro intervalo de tempo sempre deve ser zero. Para ambas as configurações, no arquivo texto deve ser informado o número total de intervalos de tempo *a priori*, o que novamente pode gerar erros.

Nos componentes gráficos da interface de entrada de dados (FIG. 4.3-d), acrescentou-se algumas funcionalidades que pelo arquivo texto não eram possíveis. O usuário pode fornecer o número de intervalo de tempos e o tempo final e solicitar o cálculo dos valores dos intervalos de tempo intermediários. O tempo inicial é fixo (zero), devido à forma como é feito o cálculo na análise da estrutura, o que leva a restringir o valor inicial, impedindo a edição desse valor para diminuir mais uma vez as situações que possam gerar erros na entrada dos dados.

vii) Condições de contorno

Em uma estrutura, os deslocamentos nodais podem ser conhecidos ou não. Os nós com deslocamentos conhecidos são denominados apoios e contribuem para a estabilidade global da estrutura. Já as solicitações externas estão representadas pelas forças de superfície.

A introdução das condições de contorno consiste em especificar quais das variáveis nodais têm valores conhecidos para cada intervalo de tempo, não sendo, portanto, dependentes do processo da análise.

O usuário poderá informar uma força e/ou deslocamento prescritos para cada um dos intervalos de tempo para cada um dos nós (preenchimento manual). A partir do momento em que se atribuiu algum valor conhecido em algum dos intervalos de tempo, deve-se informar explicitamente os valores prescritos para todos os intervalos ou a ferramenta assumirá que a prescrição para os não mencionados é nula.

Caso se queira representar variações temporais das prescrições, o usuário poderá fornecer o valor prescrito para o intervalo de tempo inicial e final (FIG. 4.3-g, FIG. 4.10 e FIG. 4.11), em relação aos quais a ferramenta calculará os valores prescritos para os intervalos de tempo intermediários, segundo interpolações lineares (preenchimento automático). Porém, quando a entrada de dados for feita por meio de arquivo texto, existe a restrição ao se trabalhar com conjuntos de intervalos de tempo.

As condições iniciais referentes a cada um dos intervalos de tempo pertencentes ao conjunto devem ser seqüenciais (FIG. 4.8), ou seja, para três intervalos de tempo **ab**, **bc** e **cd** devem ser informados os valores prescritos para **ab** e **bc** antes de informar os valores para o intervalo **cd**, não existindo a possibilidade de somente informar os valores referentes aos intervalos **ab** e **cd**.



FIGURA 4.8 – Intervalos de tempo seqüenciais

Com os componentes gráficos, existe a flexibilidade de informar valores para um intervalo específico, onde o intervalo de tempo final deve ser informado com o mesmo valor do intervalo de tempo inicial e, ao mesmo tempo, se necessário, o usuário pode informar valores para conjuntos de intervalos independentemente da ordem. Por exemplo, se for gerado o gráfico da força prescrita em relação ao tempo, seria observado um comportamento inicial constante, a seguir linear e depois podendo voltar a ser constante (FIG. 4.9).

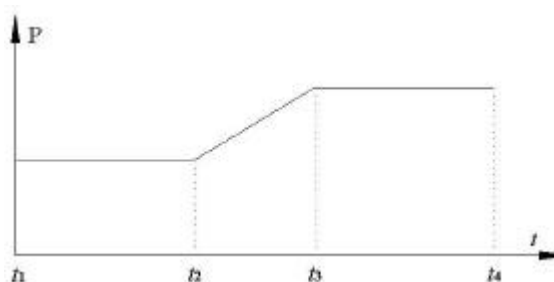


FIGURA 4.9 – Exemplo de variação temporal da força prescrita

Cada uma das condições iniciais pode ser, também, alterada ou removida. Para a inserção ou alteração são fornecidos valores iniciais e finais para o conjunto de intervalos de tempo (FIG. 4.9 e FIG. 4.10), sendo que os intervalos de tempo intermediários recebem automaticamente os valores calculados linearmente a partir dos valores fornecidos. Se houver a necessidade de informar uma condição inicial para um único intervalo de tempo, deve-se indicá-lo como tempo inicial e final do conjunto de intervalos, sendo os valores inicial e final constantes.

FIGURA 4.10 – Cadastro da força prescrita

FIGURA 4.11 – Cadastro do deslocamento prescrito

4.4 Características do Pós-processamento

Com o término da análise numérica, o sistema automaticamente deixa de ser um visualizador da análise e passa a ser um pós-processador de resultados.

4.4.1 Visualização da Estrutura

Caso as informações se encontrassem em uma base de dados textual no momento de analisar os resultados ou mesmo validar a entrada de dados, o tempo utilizado pelo usuário para a extração das informações existentes seria elevado, tornando-se necessário, portanto, uma ferramenta de apoio. A representação gráfica (FIG. 4.12) poderia ser uma opção na identificação mais direta de um erro de modelagem gerador de resultados incoerentes.

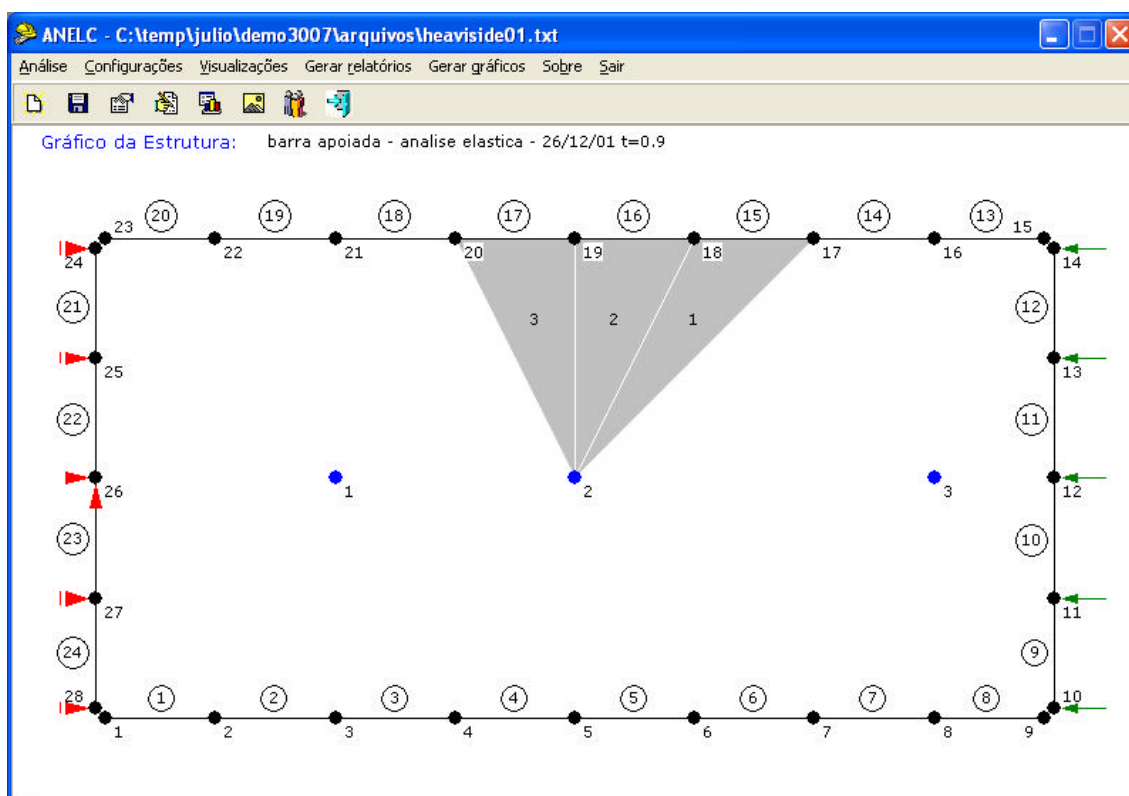


FIGURA 4.12 – ANELC: Visualização da estrutura

O ANELC foi implementado com o objetivo de permitir ao usuário o acompanhamento de cada etapa da análise. Apesar do acréscimo do tempo ocasionado pelo fato de

redesenhar a estrutura a cada alteração da entrada de dados, essa reapresentação atualizada pode otimizar o tempo de modelagem e melhorar a qualidade da mesma. Para flexibilizar esse processo, foram inseridas na ferramenta opções de configuração da estrutura (FIG. 4.13), desde a visibilidade ou não de características da mesma, tais como células, forças e deslocamentos prescritos, até mesmo a possibilidade de alterar as cores de visualização de tipo de componente do modelo.



FIGURA 4.13 – Controle da visualização da estrutura

Pode-se incluir novos dados de entrada, aproveitando os cálculos anteriormente feitos: ao inserir um novo ponto interno, as matrizes de influência **H** e **G** não precisam ser recalculadas. Além disso pode-se recuperar uma análise anteriormente feita: o contexto dos dados (valores das variáveis do sistema) de uma determinada análise é salvo, podendo ser recuperado posteriormente.

4.4.2 Visualização dos Resultados

Nesta seção faz-se uma descrição das funcionalidades visuais do programa. O ANELC possui uma interface que permite ao usuário abrir várias janelas de resultados que podem ser visualizados simultaneamente, favorecendo em muito a análise do modelo.

Os resultados gerados pela análise podem ser visualizados graficamente (FIG. 4.14) ou por meio de relatórios (FIG. 4.15).

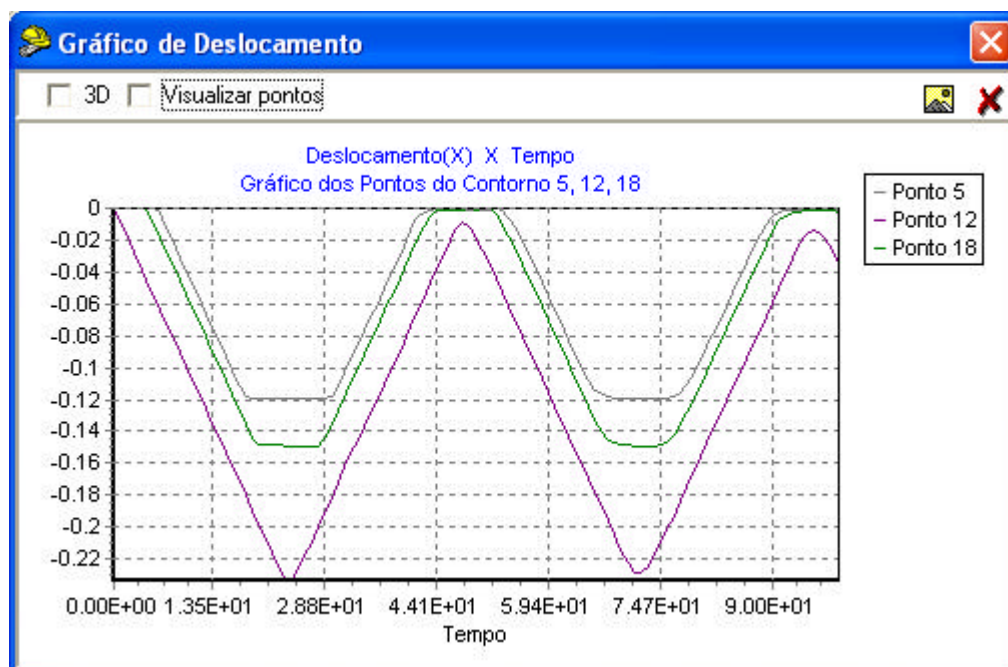


FIGURA 4.14 – Visualização do deslocamento

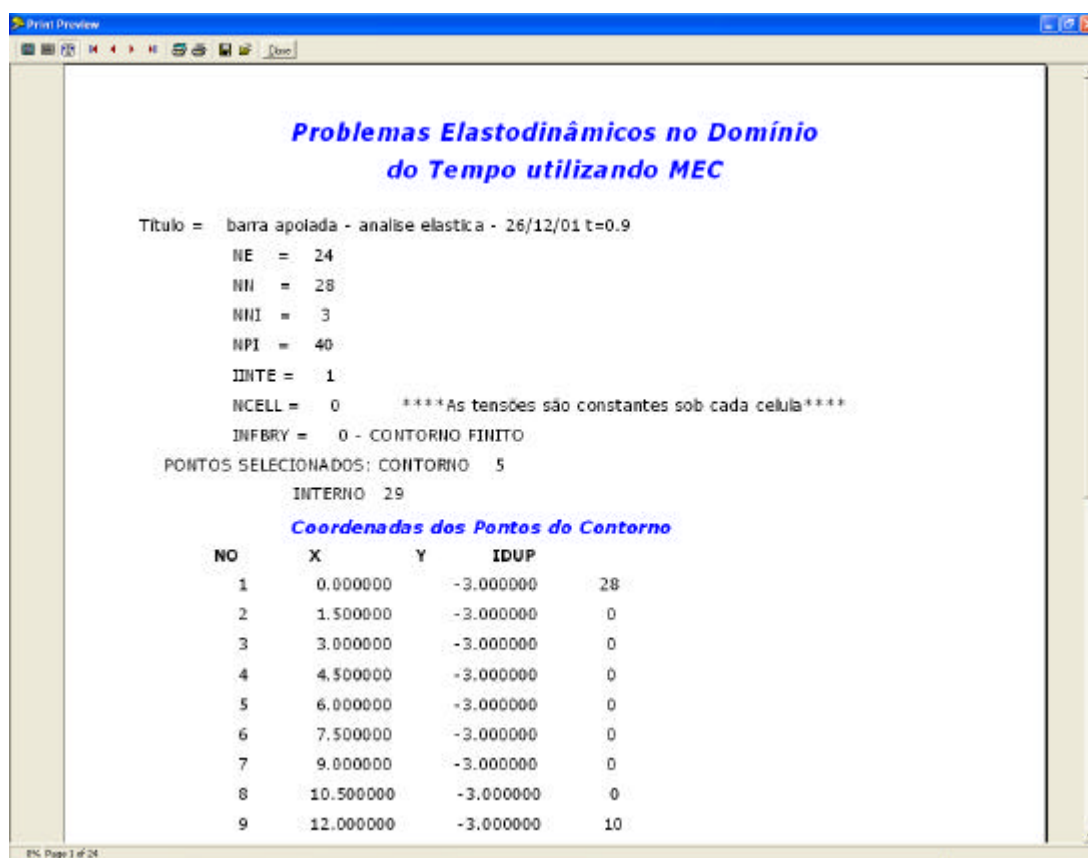
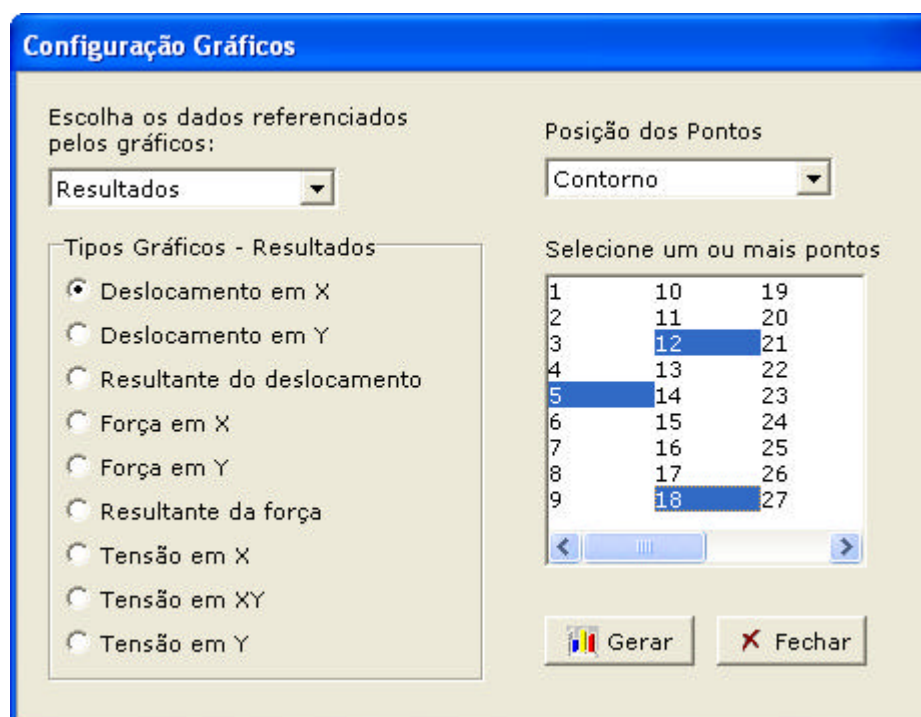


FIGURA 4.15 – Visualização do relatório geral

Após a seleção de alguns tipos de relatórios e gráficos (FIG. 4.16 e FIG. 4.17) existentes na maioria das ferramentas de análise estrutural, foram incluídos na ferramenta os relatórios e os gráficos necessários para o estudo do comportamento das ondas. Como o ANELC foi projetado de tal forma a facilitar a inclusão de novas funcionalidades, o mesmo acontece, e de forma até mais direta, em relação à inclusão de novos tipos de relatórios e/ou gráficos.



Configuração Gráficos

Escolha os dados referenciados pelos gráficos:

Resultados

Posição dos Pontos

Contorno

Tipos Gráficos - Resultados

- ☒ Deslocamento em X
- ☐ Deslocamento em Y
- ☐ Resultante do deslocamento
- ☐ Força em X
- ☐ Força em Y
- ☐ Resultante da força
- ☐ Tensão em X
- ☐ Tensão em XY
- ☐ Tensão em Y

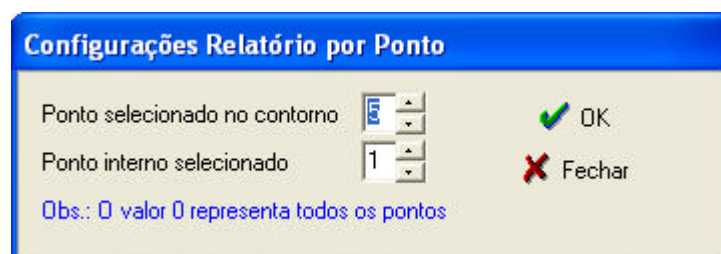
Selecione um ou mais pontos

1	10	19
2	11	20
3	12	21
4	13	22
5	14	23
6	15	24
7	16	25
8	17	26
9	18	27

< ||| >

Gerar Fechar

FIGURA 4.16 – Seleção dos gráficos



Configurações Relatório por Ponto

Ponto selecionado no contorno

Ponto interno selecionado

Obs.: O valor 0 representa todos os pontos

OK Fechar

FIGURA 4.17 – Seleção dos relatórios

Para os dados de entrada foram acrescentados gráficos sobre as condições de contorno (FIG. 4.18), como mais uma opção para evitar o alto custo de uma modelagem errada da estrutura a ser analisada.

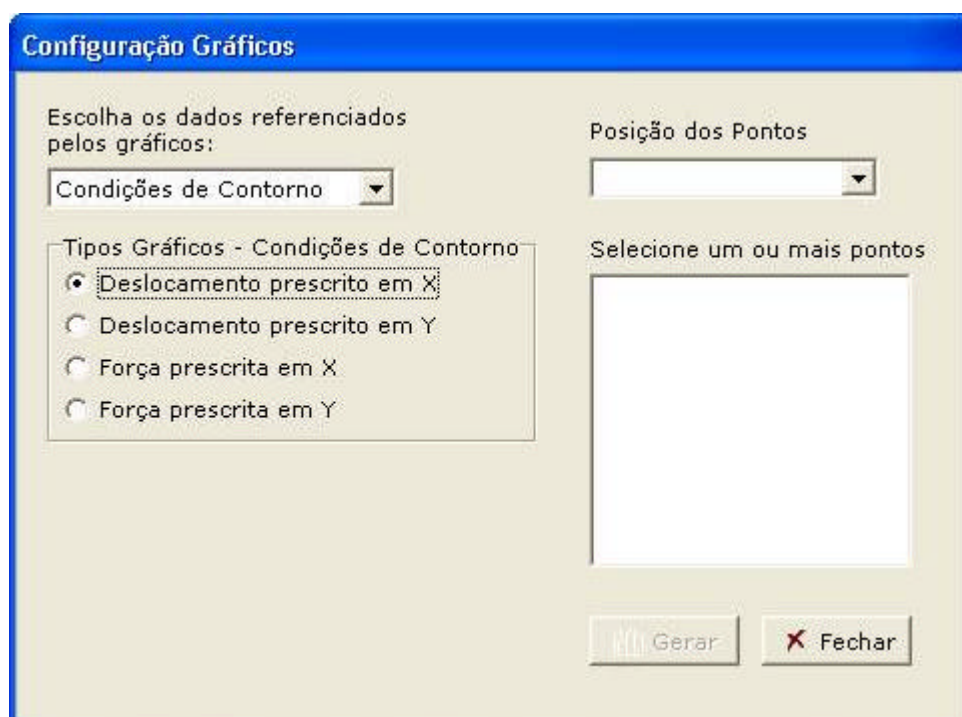


FIGURA 4.18 – Geração de gráficos das condições de contorno

4.4.3 Geração de Arquivos de Dados

O ANELC manipula dois tipos de arquivos de dados: entrada e resultados. No processo de análise, algumas alterações são feitas na modelagem da estrutura com o intuito de analisar através dos resultados o seu comportamento. Para facilitar o uso da ferramenta, foi criada a opção de salvar os dados de entrada, onde o usuário pode fazer alterações, salvando em arquivos textos distintos cada uma delas para uma posterior análise.

Em relação aos resultados, o usuário pode visualizá-los através dos relatórios da ferramenta, salvando ou não em arquivos texto, dependendo da sua preferência.

4.4.4 Outras Configurações

As condições de contorno são representadas através de triângulos e setas, sendo que o tamanho dos mesmos pode ser alterado a qualquer momento (FIG. 4.19). A unidade de medida utilizada foi pixels (*picture element*), podendo ser inseridas na ferramenta opções de configuração dos tipos de unidades.

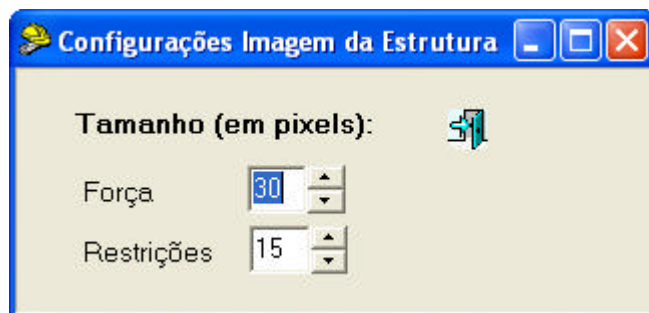


FIGURA 4.19 – Controle da visualização força-restrição

Para efeito de visualização, permitiu-se a alteração das margens da área de visualização da estrutura (FIG. 4.20).

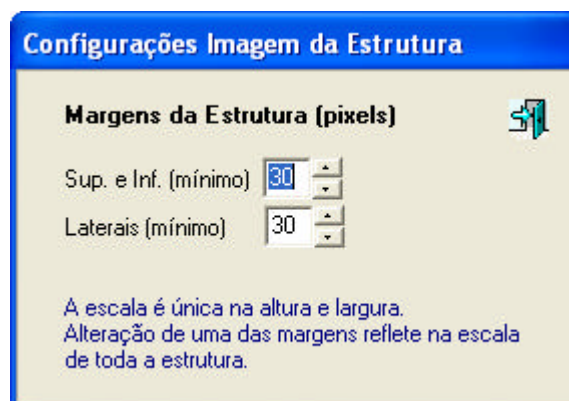


FIGURA 4.20 – Controle da visualização: margens

Para o usuário, a identificação do arquivo para entrada de dados ou mesmo para a gravação foi flexibilizada no que diz respeito à localização do mesmo na estrutura hierárquica de diretórios (FIG. 4.21).

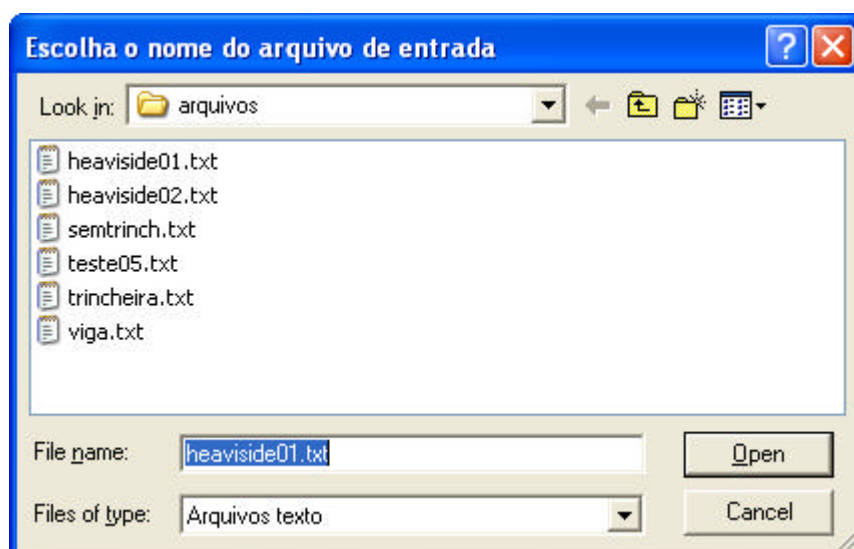


FIGURA 4.21 – Manipulação de arquivos

Para os gráficos, foram acrescentadas características disponíveis pelo próprio componente utilizado na sua implementação, tais como a visualização dos pontos ou mesmo a aparência tridimensional do gráfico (FIG. 4.22). Dentre outras funcionalidades, pode-se futuramente incluir a opção de alteração do tipo de gráfico, tais como gráfico de barras ou de regiões.

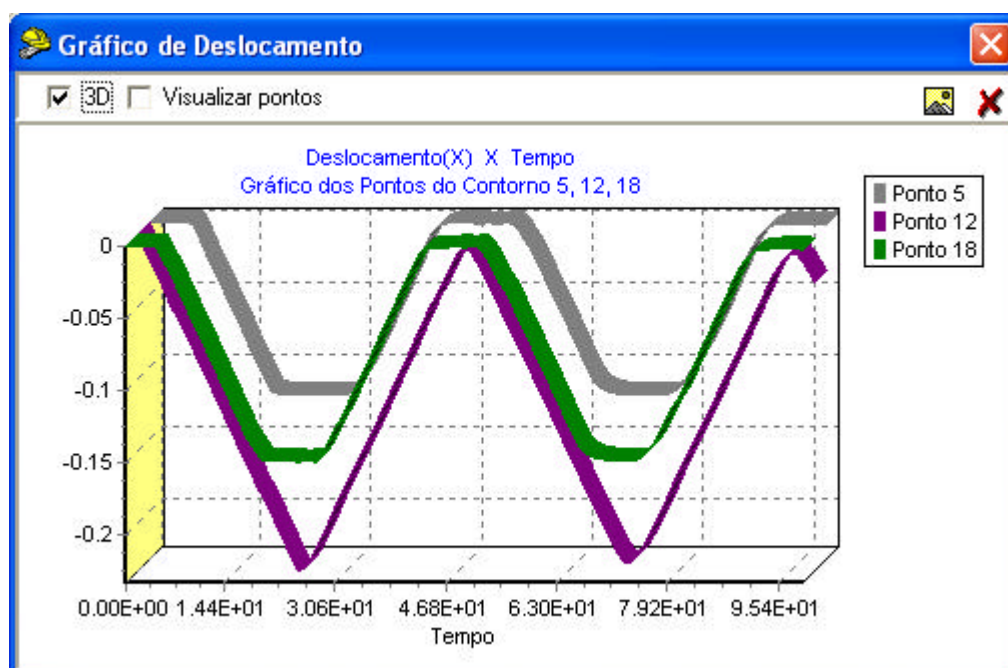


FIGURA 4.22 – Opção de visualização 3D do gráfico

As opções de configuração devem ser ampliadas com a manutenção posterior da ferramenta, sempre visando otimizar e facilitar a obtenção dos dados de entrada, análise e visualização dos resultados.

4.5 Considerações Sobre a Implementação

As facilidades e recursos gráficos adquiridos com a ferramenta implicam na necessidade de alguns requisitos mínimos do equipamento a ser utilizado: Pentium II 166 MHz, 128MB RAM.

Como atualmente, em grande parte das residências, essa configuração mínima do equipamento já é alcançada, então considerou-se razoável tal exigência para empresas que utilizem o ANELC, frisando que trata-se de um protótipo de um produto, que pode e deve ser aprimorado caso venha a ser comercializado.

Apesar de o desempenho da ferramenta em Delphi ficar aquém do mesmo em FORTRAN, o apoio que ela proporciona ao usuário na manipulação dos dados de entrada, análise dos resultados e na melhor qualidade da modelagem justifica tal desvantagem.

Caso ela seja implantada em um local de trabalho, onde seja requerido que vários funcionários possam acessar os mesmos dados, o investimento de tempo e custo para tal melhora foi previsto nessa implementação, sendo portanto perfeitamente factível em tempo hábil.

5

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

No presente capítulo, apresentam-se os resultados obtidos na utilização do ANELC para algumas aplicações numéricas.

Nos três primeiros exemplos serão apresentados resultados de análises da propagação da onda em meios finitos, comprovando o funcionamento satisfatório do ANELC para este tipo de análise. No último exemplo, pretende-se validar a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para a redução da vibração, utilizando barreiras bidimensionais (trincheiras abertas) em meios semi-infinitos, discutindo aspectos como pontos de instabilidade e critérios utilizados nas discretizações dos modelos.

Os resultados obtidos com a formulação do MEC foram comparados com a solução analítica. Em todos os exemplos analisados, variações lineares e constantes foram admitidas para os deslocamentos e as tensões, respectivamente. A Seção 5.1 apresenta os resultados obtidos na análise de alguns exemplos numéricos.

5.1 Exemplos Numéricos

Quatro exemplos são apresentados aqui para avaliar a formulação matemática utilizada e a funcionalidade do ANELC na solução de problemas elastodinâmicos no domínio do

tempo. Os dois primeiros exemplos escolhidos consistem em uma barra unidimensional sujeita a um carregamento do tipo Heaviside, estudada anteriormente por MANSUR & BREBBIA (1985). O terceiro exemplo consiste em uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme; o exemplo foi analisado por TELLES *et al.* (1999) e YU *et al.* (1999). O quarto exemplo apresenta três modelos numéricos bidimensionais, que são usados para estudar e analisar o comportamento da propagação da onda elástica em um meio semi-infinito, sob o efeito da aplicação de um carregamento (uma fonte de vibração vertical é utilizada), com presença de uma trincheira aberta, estudada por ISRAEL & BANERJEE⁸ (1990b, 1990c). Com ele foi possível verificar a eficiência da redução da vibração por meio do uso de barreiras, considerando apenas o isolamento passivo.

Para modelar a geometria dos problemas foram utilizados elementos lineares isoparamétricos, com nós duplos sendo utilizados nos cantos a fim de considerar a descontinuidade do vetor normal e as descontinuidades das condições do contorno. O tempo foi subdividido em intervalos iguais de tal forma que não apresente instabilidades.

5.1.1 Barra Sujeita a um Carregamento do Tipo Heaviside

Neste exemplo, foi analisada uma barra sujeita a uma força de impacto aplicada sobre seu extremo livre (carregamento do tipo Heaviside), $(P/E)H(t - 0)$, em um tempo $t = 0$, permanecendo constante durante o restante do tempo, e para o qual tem-se a solução exata (A solução analítica pode ser encontrada em MILES (1961)). A FIG. 5.1 mostra as condições de contorno prescritas, a geometria utilizada e a história do carregamento prescrito.

⁸ ISRAEL & BANERJEE (1990b,1990c) estudaram o isolamento da vibração por meio da utilização de uma trincheira aberta em um meio semi-infinito sob a aplicação de um carregamento vertical.

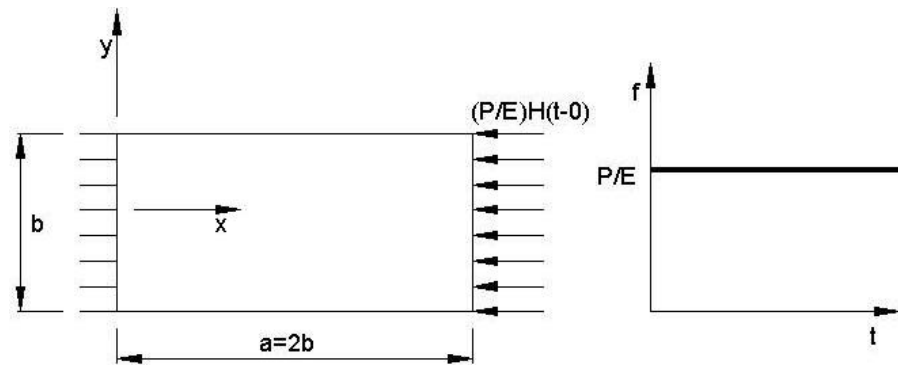


FIGURA 5.1 – Barra sujeita a uma força de impacto

Para simular o problema unidimensional, o coeficiente de Poisson foi considerado nulo ($\nu = 0$). Isto facilita a comparação com as soluções analíticas. As características do material foram: $E = 100$ e $r = 100$. Com o objetivo de observar a convergência do método e a eficiência do ANELC, dois tipos de malha foram analisadas: a malha 01 (FIG. 5.2) foi discretizada com 24 elementos, 28 o número total de nós e o comprimento de cada elemento l igual a 1,50 m. A malha 02, mais refinada (FIG. 5.3) foi discretizada com 48 elementos, 52 o número total de nós e foi considerado o comprimento de cada elemento l igual a 0,75 m.

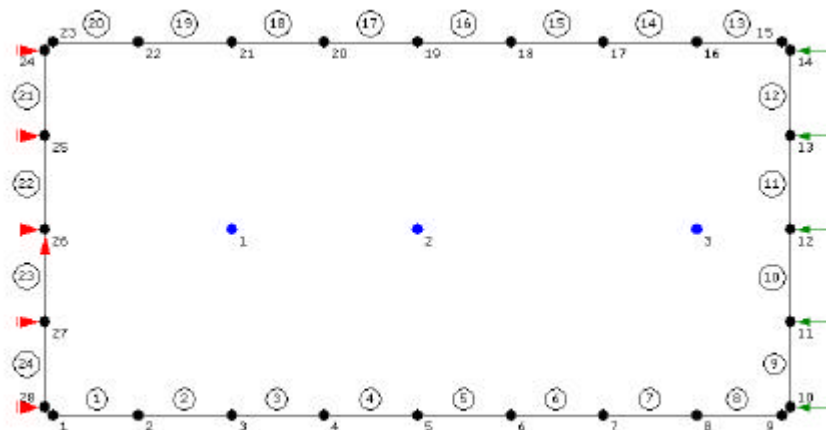


FIGURA 5.2 – Discretização da malha 01: 28 nós e 24 elementos

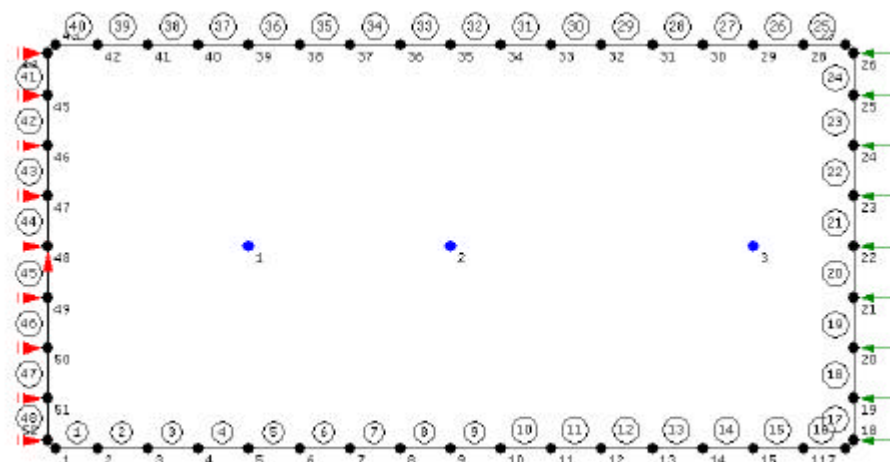


FIGURA 5.3 – Discretização da malha 02: 52 nós e 48 elementos

Os deslocamentos nodais horizontais foram calculados para três pontos do contorno malha 01: 5(6, -3), 7(9, -3) e 12(12, 0) ; malha 02: 9(6, -3), 13(9, -3) e 22(12, 0); e três pontos internos 1(3, 0), 2(6, 0) e 3(10,5, 0) situados ao longo do eixo da barra (FIG. 5.2 e FIG. 5.3).

A resposta no tempo foi estudada utilizando diferentes incrementos do tempo: $\Delta t = 0,90$ para a malha 01 e $\Delta t = 0,45$ para a malha 02. Para os incrementos de tempo considerados adotou-se $b = 0,6$ e o número de intervalos de tempo (NIT) utilizados foram 110 e 220 respectivamente.

Os resultados correspondentes ao deslocamento nodal horizontal dos pontos do contorno 5, 7 e 12 para a malha 01 são apresentados na FIG. 5.4. No gráfico, observa-se que a malha 01 apresenta bons resultados, convergindo na direção das soluções exatas. Algumas perturbações podem ser observadas nos resultados, devido a alguma acumulação de erros numéricos na integração, produto do tipo de interpolação temporal adotado (linear para o deslocamento e constante para as forças de superfície). Este erro pode ser reduzido escolhendo-se um tamanho de intervalo de tempo adequado (aumentando ou diminuindo) que consiga representar a variação temporal. Lembrando-se, que, ao reduzir o tamanho do intervalo de tempo, aumenta-se o número de divisões existentes entre o tempo inicial e o tempo final, como consequência acumula-se erros

numéricos (instabilidade). Por isso, a escolha de um tamanho de intervalo de tempo muito pequeno deverá ser feito com critério, de acordo com o tipo de problema a ser analisado.

Observando os resultados obtidos pelo refinamento da malha (malha 02) para os deslocamentos horizontais dos pontos 9, 13 e 22 (FIG. 5.5), verifica-se uma melhora em relação aos obtidos com o emprego da primeira malha, apesar de pequenas perturbações, que não invalidam os resultados obtidos com o ANELC, continuarem a aparecer.

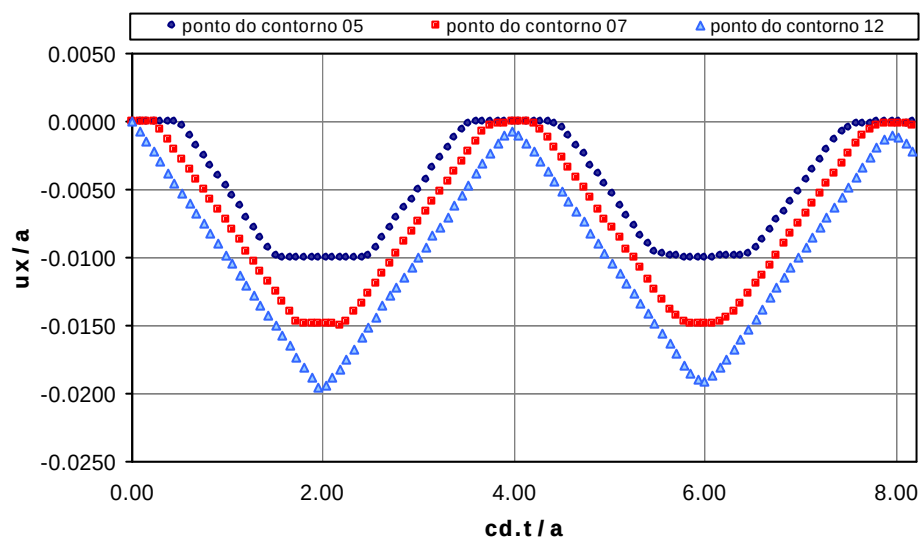


FIGURA 5.4 – Deslocamento horizontal dos pontos do contorno 5, 7 e 12
(malha 01: 28 nós, 24 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 110)

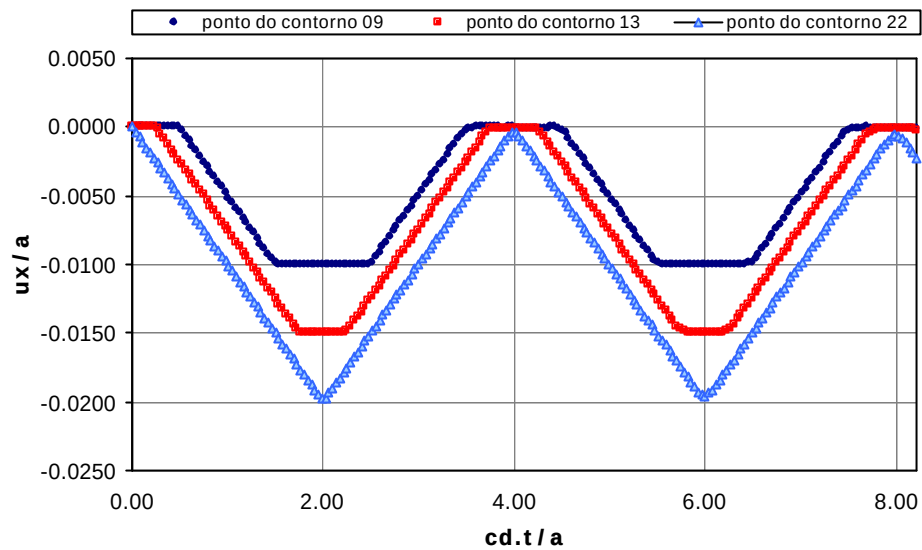


FIGURA 5.5 – Deslocamento horizontal dos pontos do contorno 9, 13 e 22
(malha 02: 52 nós, 48 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,45$, NIT = 220)

Os deslocamentos horizontais para os pontos internos 1, 2 e 3 são mostrados na FIG. 5.6 e FIG. 5.7, para os dois tipos de malhas escolhidos. Eles apresentaram uma boa aproximação, apesar de também possuírem pequenas perturbações nos resultados para os dois incrementos do tempo.

Pode-se destacar o excelente comportamento do Método dos Elementos de Contorno, que representou mais do que satisfatoriamente a variação da solução ao longo do tempo, até atingir-se o estágio em que o problema entra em regime permanente.

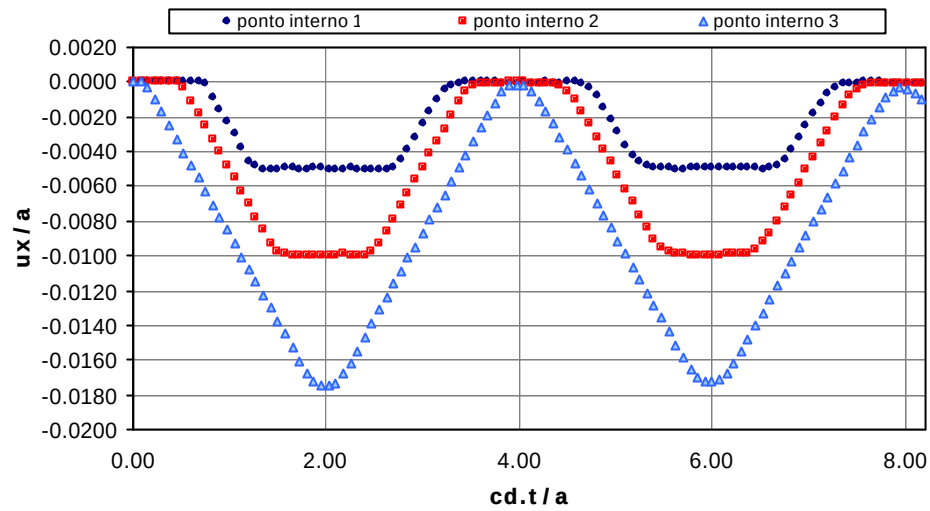


FIGURA 5.6 – Deslocamento horizontal dos pontos internos 1, 2 e 3
(malha 01: 28 nós, 24 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 110)

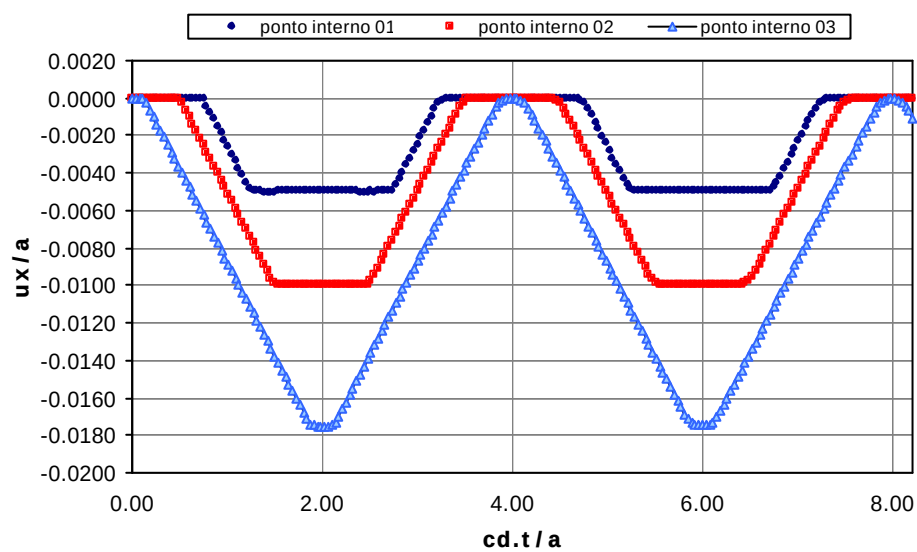


FIGURA 5.7 – Deslocamento horizontal dos pontos internos 1, 2 e 3
(malha 02: 52 nós, 48 elementos, $\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,45$, NIT = 220)

5.1.2 Barra Sob Carregamento Constante Aplicado em um Curto Intervalo de Tempo

A mesma barra retangular do exemplo anterior foi analisada, considerando um carregamento constante aplicado em um curto intervalo de tempo. As condições de contorno e as características do material são as mesmas do exemplo anterior, assim como a discretização do modelo da malha 01 (FIG. 5.2).

Na seção 3.3, viu-se que um cuidado considerável deve existir na escolha do valor de b , a fim de evitar instabilidades, que geralmente não são significativas para os deslocamentos, mas podem ser freqüentemente excessivas para as tensões.

Para estudar o efeito da variação temporal no nível de instabilidades, seis valores de b foram analisados: 0,40, 0,50, 0,60, 0,66, 0,75 e 1,0, para o ponto interno 2(6, 0) da malha 01 (FIG. 5.2).

Como a escolha de b influi diretamente no tempo total de aplicação do carregamento, diferentes incrementos do tempo foram utilizados: $\Delta t = 0,60, 0,75, 0,90, 0,99, 1,125$ e $1,5$, assim como o número de intervalos de tempo: 165, 132, 110, 100, 88 e 66.

Os resultados do deslocamento horizontal para o ponto interno 2(6, 0) para os diferentes valores de b são mostrados nas FIGS. 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13. Os resultados mostraram que as instabilidades excessivas ocorrem para valores de $b < 0,60$, como era esperado. O resultado para o valor de $b = 0,60$ foi considerado satisfatório, porém o valor $b = 0,75$ apresentou melhor aproximação.

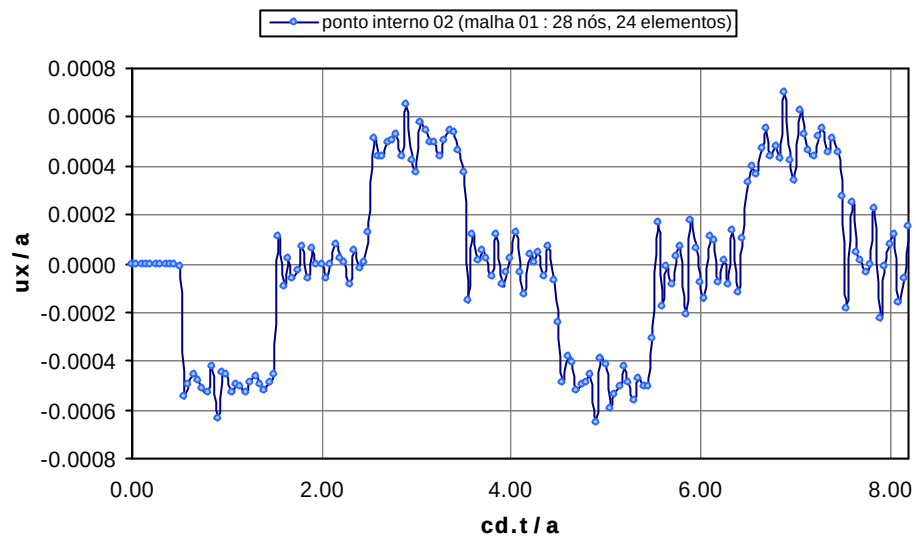


FIGURA 5.8 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 0,40$, $\Delta t = 0,60$, NIT = 165)

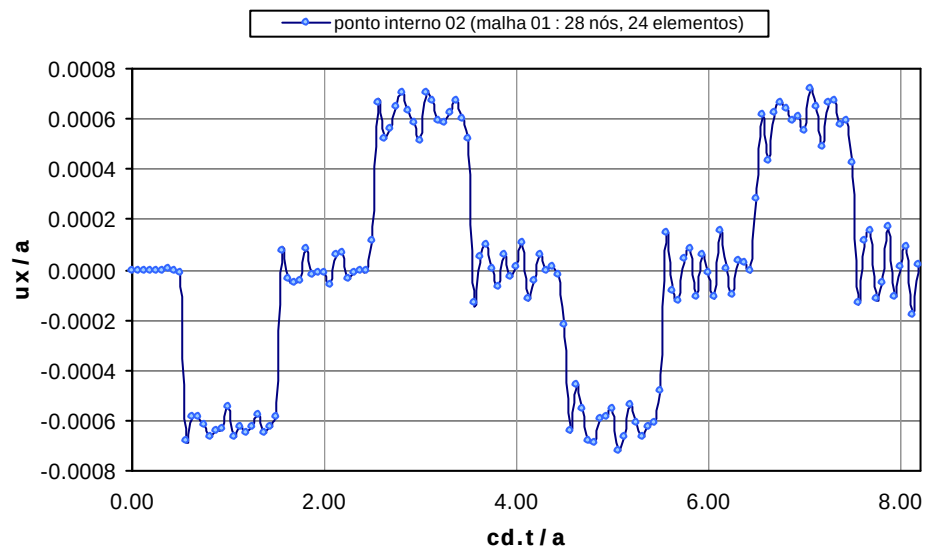


FIGURA 5.9 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 0,50$, $\Delta t = 0,90$, NIT = 132)

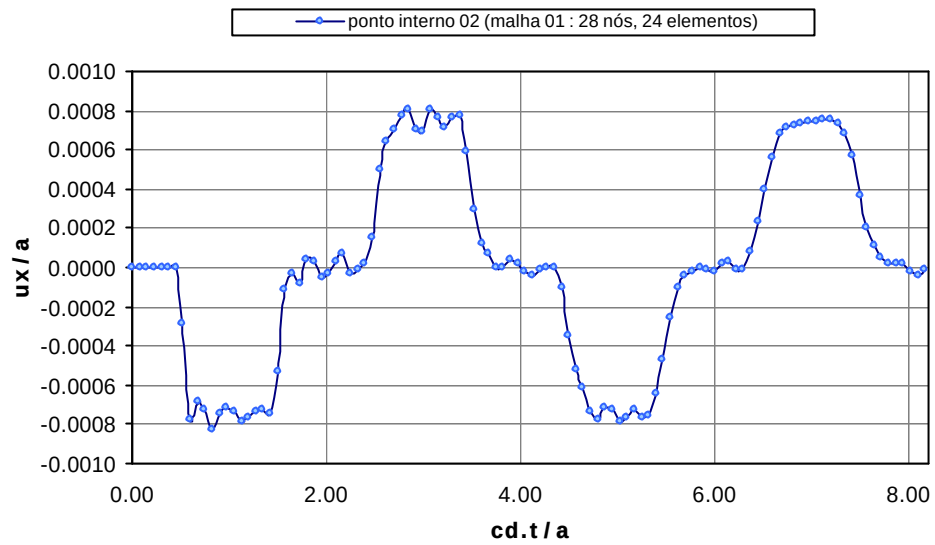


FIGURA 5.10 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 0,60$, $\Delta t = 0,60$, NIT = 110)

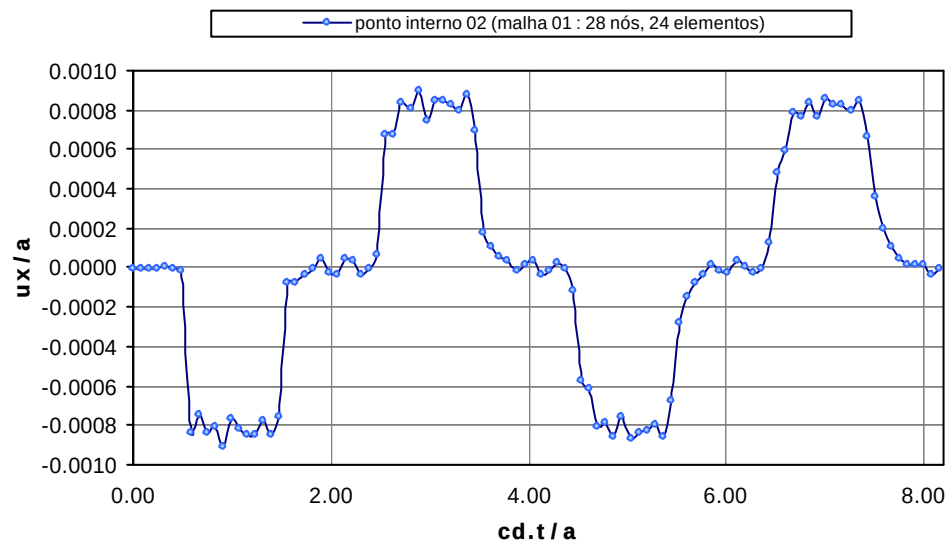


FIGURA 5.11 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 0,66$, $\Delta t = 0,99$, NIT = 100)

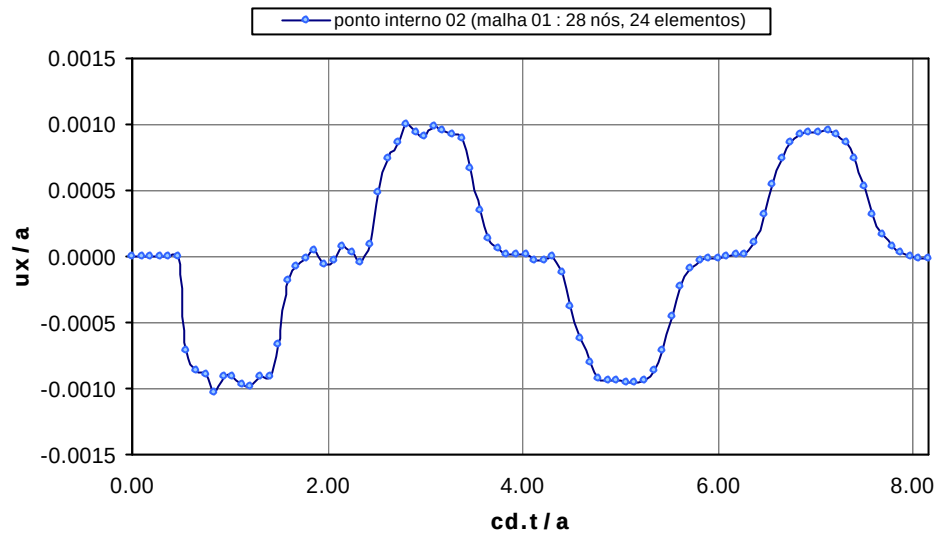


FIGURA 5.12 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 0,75$, $\Delta t = 1,125$, NIT = 88)

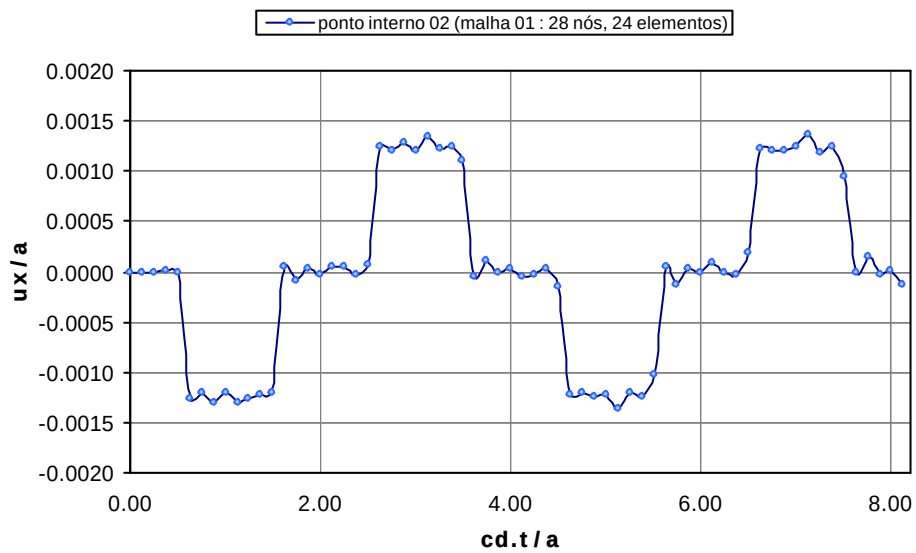


FIGURA 5.13 – Deslocamento horizontal do ponto interno 2
malha 01 ($\beta = 1,0$, $\Delta t = 1,125$, NIT = 66)

5.1.3 Viga Bi-Apoiada

Uma viga bi-apoiada foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído, como mostrado na FIG. 5.14. Esse exemplo foi analisado para o Estado Plano de Tensão, utilizando os seguintes parâmetros para o material: $E = 100$, $\nu = 1/3$, e $\rho = 1,5$ (densidade da massa). O carregamento é obtido pela expressão:

$$p_y = \frac{1}{E} H(t-0) \quad (5.1)$$

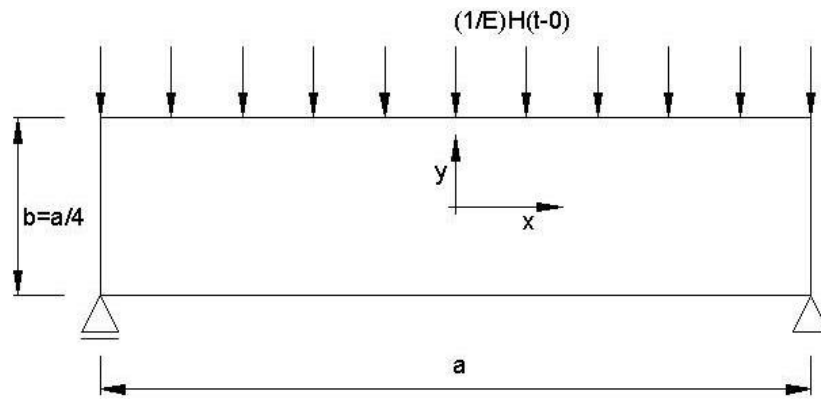


FIGURA 5.14 – Viga bi-apoiada

Neste caso, modelou-se apenas metade da geometria real do problema, aproveitando a simetria existente. Com isso, pôde-se realizar uma análise numérica mais precisa, utilizando-se um grau de refinamento muito maior do que seria obtido ao adotar o mesmo número de nós e elementos na discretização plena da geometria real do problema. Como condições de contorno, os deslocamentos foram restringidos na direção vertical no lado direito, e a simetria foi simulada mediante a restrição dos deslocamentos na direção horizontal no lado esquerdo (FIG. 5.15).

Adotou-se um intervalo de tempo tal que o menor elemento do contorno presente na discretização pudesse captar a passagem do carregamento transiente. Para isso, utilizou-se a seguinte relação:

$$\Delta t \leq b \frac{l}{c_d} \quad (5.2)$$

Na análise em que empregou-se a discretização indicada na FIGURA 5.15, utilizou-se um incremento de tempo $\Delta t = 0,10008$ (NIT = 600) para um valor de $\beta = 13/15$. Deste modo, verificou-se que o valor adotado para o intervalo de tempo atendeu a Eq. 5.2.

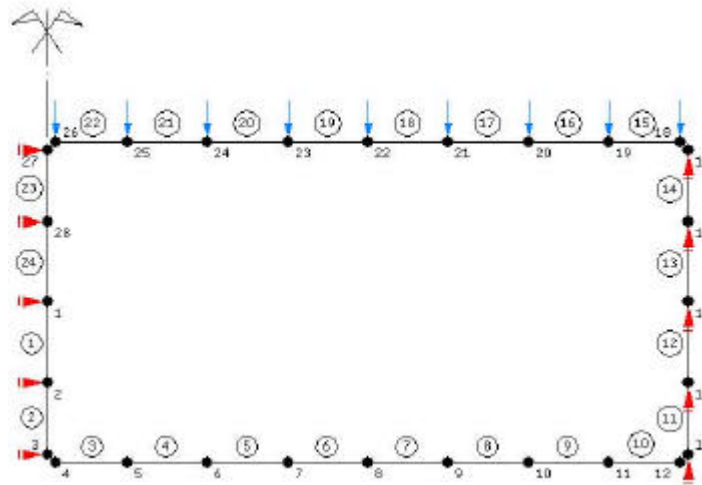


FIGURA 5.15 – Discretização do contorno 28 nós e 24 elementos

Por tratar-se de uma análise para um Estado Plano de Tensão, os valores dos parâmetros elásticos (coeficiente de Poisson e módulo de Young) foram ajustados segundo a Eq. (5.3), para que possam ser utilizados nas mesmas equações do Estado Plano de Deformação (MANSUR (1983)).

$$\bar{n} = \frac{n}{(1+n)} \quad \text{e} \quad \bar{E} = \frac{E(1+2n)}{(1+n)^2} \quad (5.3)$$

As soluções numéricas obtidas foram comparadas com soluções apresentados nos trabalhos desenvolvidos por TELLES *et al.* (1999) e YU *et al.* (1999).

Um ponto do contorno localizado no centróide da seção foi escolhido para verificar a validade da formulação e a funcionalidade do programa desenvolvido (ponto 1 da FIG. 5.15). O resultado correspondente ao deslocamento vertical do ponto 1 do contorno da FIG. 5.15 é mostrado na FIG. 5.16, onde pode-se observar uma boa aproximação entre o resultado obtido pelo ANELC e o alcançado no trabalho de TELLES *et al.* (1999). Destaca-se a presença de um amortecimento não esperado na solução, conforme a onda se desloca e o tempo de análise aumenta, verificando-se que os valores dos

deslocamentos diminuem gradualmente (amortecimento), possivelmente devido aos erros numéricos acumulados no processo de integração para a montagem do sistema linear de equações algébricas.

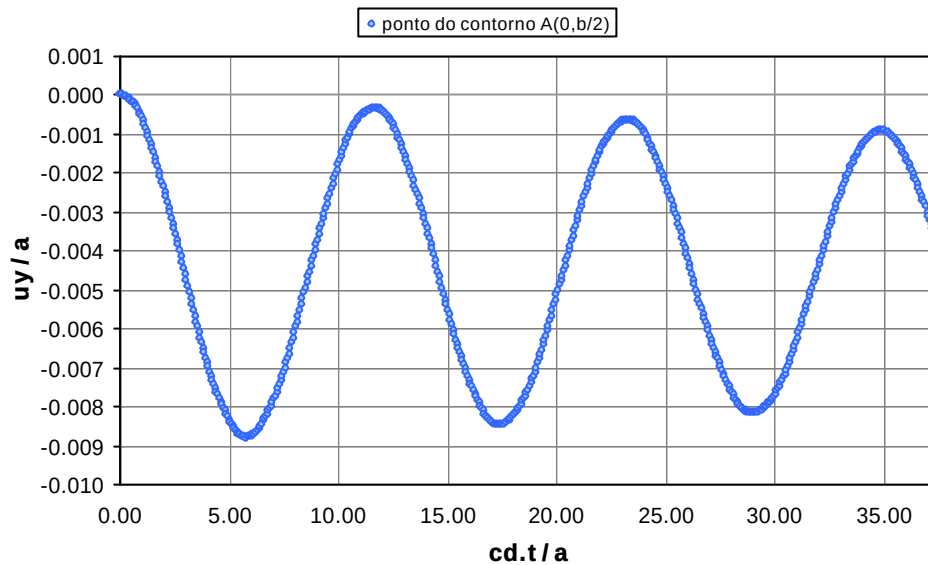


FIGURA 5.16 – Deslocamento vertical do ponto $A(0, b/2)$ NIT = 600

5.1.4 Análise de Barreiras Acústicas Bidimensionais (Trincheira Aberta)

Neste exemplo, avalia-se a aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) na determinação da redução da vibração mediante o uso de barreiras bidimensionais (trincheiras abertas) e considera-se a presença do solo com extensão semi-infinita com características específicas.

Começa-se pela determinação da extensão necessária do solo (domínio), para que os efeitos de borda não sejam significativos, garantindo a inexistência de qualquer tipo de perturbação. Três modelos diferentes foram escolhidos, por possuírem implementações numéricas simples, que não comprometem a precisão dos resultados.

Em todas as simulações apresentadas foi considerada uma geometria 2D, descrita a partir de elementos lineares.

1ª Simulação : considerou-se o solo de extensão finita, truncado nos extremos e na sua profundidade, de tal forma que reproduza de maneira satisfatória a zona de interesse. Admitiu-se que, devido à condição de Sommerfeld da radiação, as perturbações provocadas pelo truncamento são pequenas (domínio com contorno fechado).

2ª Simulação: considerou-se o solo de extensão finita, utilizando um contorno fictício e a extensão do solo foi truncada parcialmente. O contorno fictício foi utilizado exclusivamente para o cálculo indireto dos termos da diagonal principal da matriz **H** através do atendimento de ter-se forças de superfície nulas em um deslocamento de corpo rígido (domínio com contorno fictício).

3ª Simulação: considerou-se o solo de extensão semi-infinita. O solo foi modelado como uma linha de extensão finita em ambos os lados da barreira (trincheira aberta) com uma profundidade semi-infinita (domínio com contorno aberto).

Os três modelos bidimensionais representaram o solo como um semi-espço, homogêneo e isotrópico, com presença de uma trincheira aberta. Parte desse semi-espço foi excitado por um carregamento (P), com variação triangular em um pequeno intervalo de tempo, ou seja, foi considerada a variação linear da força para os primeiros intervalos de tempo até um comprimento de $2T_r$ (ver 5.4) e, para os intervalos restantes, uma força nula. A variação do carregamento (P) ao longo do tempo é mostrada na FIG. 5.17.

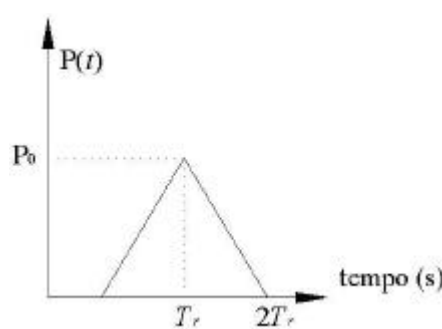


FIGURA 5.17 – Variação do carregamento ao longo do tempo

A trincheira com $W = b$ de largura e com uma profundidade de $H = 3b$ (FIGS. 5.18, 5.19, 5.20) está localizada a uma distância de 10 metros em relação à fonte de emissão das ondas, sendo que os valores das variáveis são definidos por:

$$\begin{aligned} b &= 1 \text{ m}; & H &= 3 \text{ m}; & W &= 1 \text{ m}. \\ p_o &= -1 \text{ MPa}; & T_r &= 0,002 \text{ s}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estes valores foram adotados a partir das conclusões de diversos autores. A distância entre a trincheira e a fonte de emissão das ondas não tem nenhum efeito significativo na eficácia da trincheira para um limite de $3L_r$ até $12L_r$, segundo AHMAD & AL-HUSSAINI (1991), onde L_r é o comprimento da onda Rayleigh. Por sua vez, YANG & HUNG (1997) realizaram suas investigações para o isolamento ativo, concluindo o mesmo resultado, desde que essa distância seja superior ao dobro do comprimento da onda, e asseguraram que o melhor efeito é encontrado quando a distância é igual ao comprimento da mesma onda.

Diversos estudos sobre barreira de ondas mostraram que somente a profundidade da trincheira e não a sua largura é um fator importante para a eficácia da mesma⁹, não importando se está sendo utilizado o isolamento ativo ou passivo (WOODS (1968), BESKOS *et al.* (1986), AL-HUSSAINI & AHMAD (1991), AHMAD & AL-HUSSAINI (1991)). A profundidade da trincheira é baseada na velocidade da onda no solo e na frequência da fonte de vibração.

As propriedades consideradas para o meio semi-infinito são as seguintes: módulo de elasticidade $E = 330 \text{ Mpa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. AHMAD & AL-HUSSAINI (1991) estabeleceram que os valores do coeficiente de Poisson compreendidos no intervalo de 0,3 até 0,48 não são importantes e que o efeito deste parâmetro pode ser ignorado no caso das trincheiras abertas. Segundo YANG & HUNG (1997), a variação do coeficiente de Poisson do solo não é importante, a menos que essa variação seja próxima a 0,5.

⁹BESKOS *et al.* (1986) afirmaram que, para ser eficaz, uma trincheira aberta deverá ter uma profundidade no mínimo de 0,6 vezes o comprimento da onda de Rayleigh. Por sua vez AL-HUSSAINI & AHMAD (1991) encontraram este parâmetro entre 0,6 – 1,5 vezes o comprimento da onda de Rayleigh para vibrações horizontais do solo.

Utilizou-se uma densidade de massa $\rho = 1,7857 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Todos estes valores são importantes para o cálculo da contribuição da velocidade da propagação da onda primária (por meio das constantes de Lamé, Eq. 2.12) e para a escolha dos incrementos de tempo a serem utilizados. Os incrementos de tempo utilizados foram:

$$\Delta T = 1,0617 b/c_d \cong 0,002 \quad \text{e} \quad \Delta T = 0,4709 b/c_d \cong 0,001, \quad (5.5)$$

onde o valor do parâmetro b foi indicado em (5.4) e c_d representa a contribuição da velocidade de propagação da onda primária, definida pela Eq. 3.17.

Para a primeira simulação (domínio com contorno fechado), o meio semi-infinito foi discretizado de tal forma a atenuar a reflexão das ondas no contorno (efeito das bordas). Considerou-se um contorno onde seus extremos estão situados o mais longe possível da fonte de emissão das ondas (18 e 67 metros, respectivamente, para os extremos e profundidade de 50 metros). O contorno foi discretizado em 54 elementos e 64 nós. Nas condições de contorno do modelo foram considerados 18 nós com deslocamentos prescritos e 5 nós com forças de superfície prescritas diferentes de zero, garantindo assim que o modelo seja o mais real possível. A discretização do problema é mostrada na FIG. 5.18.

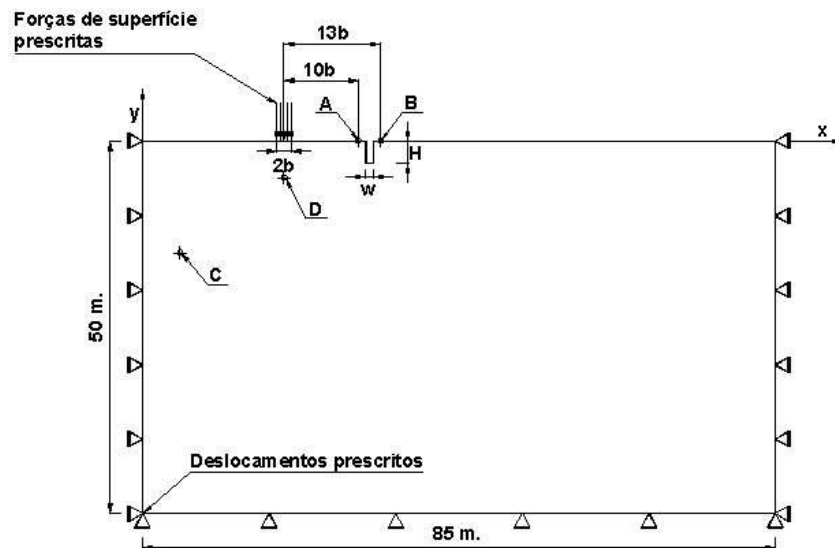


FIGURA 5.18 – Discretização do domínio com contorno fechado
(1ª Simulação: 64 nós e 54 elementos)

Para a segunda simulação o contorno foi discretizado com 32 elementos no contorno e 15 elementos no contorno fictício; 35 nós no contorno e 18 nós para o contorno fictício. Nas condições de contorno do modelo foram considerados unicamente 2 nós com deslocamentos prescritos (restrições nas duas direções para o extremo esquerdo e com o extremo livre na direção y para o extremo direito) e 5 nós com forças de superfície prescritas diferentes de zero. A discretização do problema é mostrada na FIG. 5.19.

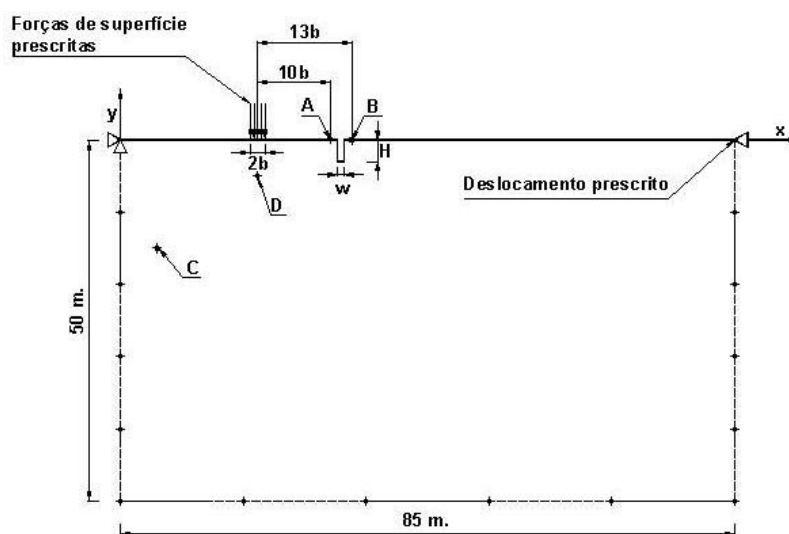


FIGURA 5.19 – Discretização do domínio com contorno fictício

(2ª Simulação: 35 nós, 18 nós fictícios, 32 elementos e 15 elementos fictícios)

Por último, na terceira simulação o contorno foi discretizado com 32 elementos e 35 nós. As condições de contorno do modelo foram consideradas da mesma forma que na simulação anterior, com 2 nós com deslocamentos prescritos (restrições nas duas direções para o extremo esquerdo e o extremo direito livre na direção y) e 5 nós com forças de superfície prescritas diferentes de zero. A discretização do problema é mostrada na FIG. 5.20.

Nas três simulações, pode-se observar que o ponto **A** não apresentou nenhuma redução significativa na amplitude do deslocamento e que a presença da trincheira retardou a ocorrência da amplitude, além de ter mantido por mais tempo deslocamentos próximos deste valor. Já o ponto **B** apresentou uma redução visível no seu deslocamento com presença da trincheira, o que indica a eficácia da mesma; observe-se que o ponto analisado encontra-se na zona de máxima atenuação próxima da trincheira.

Além da avaliação da variação de amplitude com ou sem trincheira, os resultados também mostraram que na ausência da trincheira no meio semi-infinito não houve perturbação oriunda da introdução do contorno fictício nos valores dos deslocamentos.

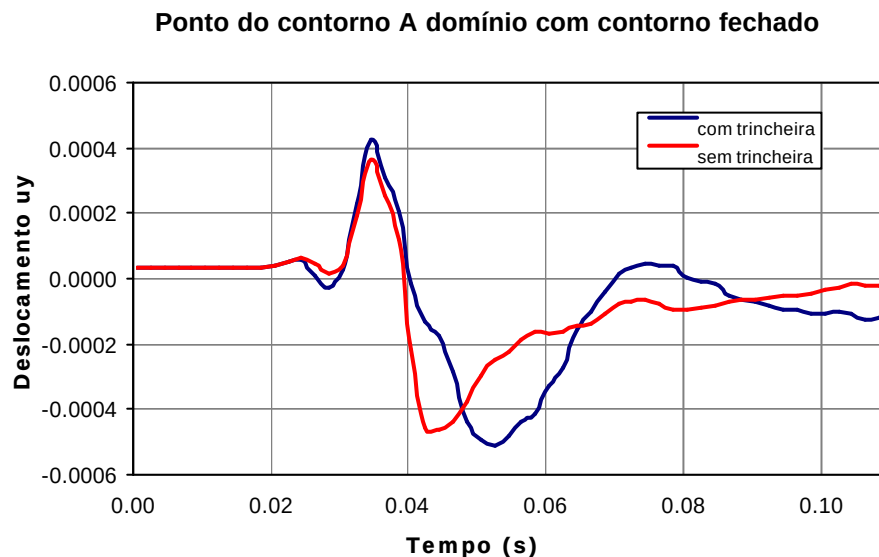


FIGURA 5.21 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **A** ($\Delta t = 0,002$)

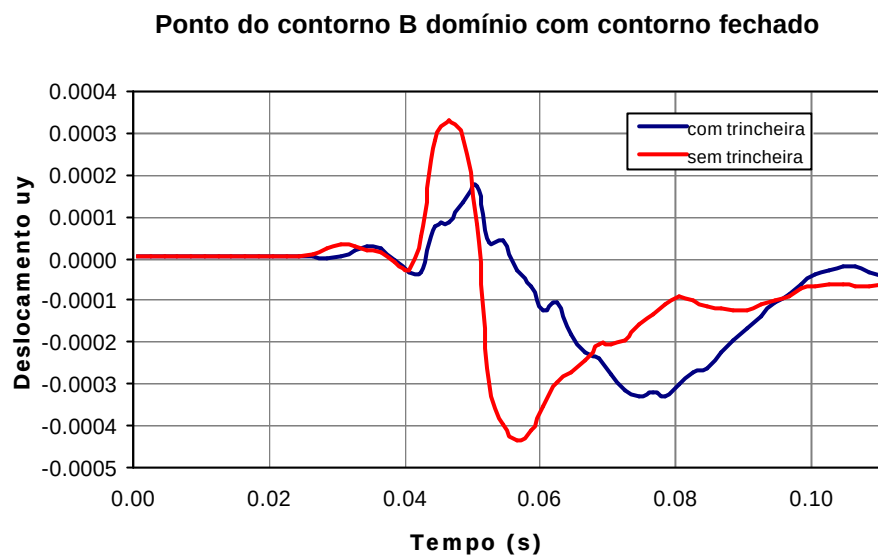


FIGURA 5.22 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **B** ($\Delta t = 0,002$)

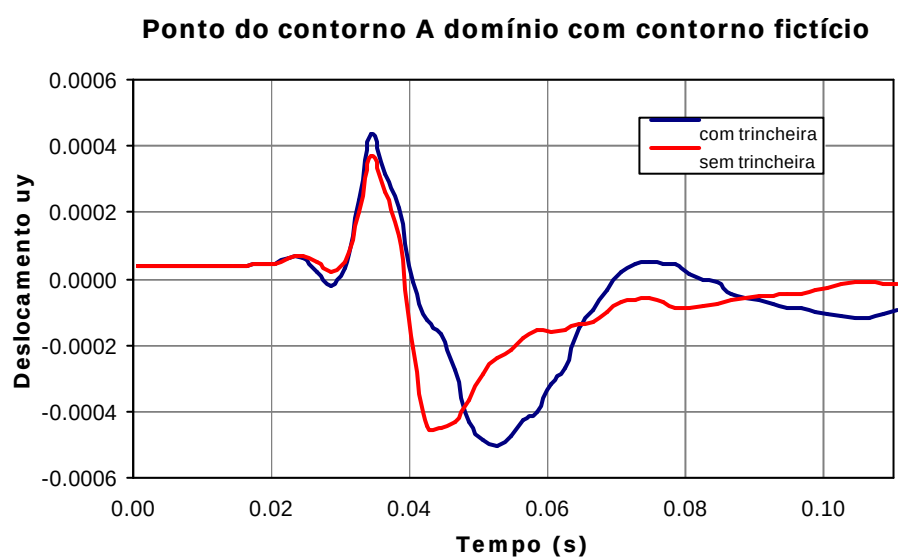


FIGURA 5.23 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **A** ($\Delta t = 0,002$)

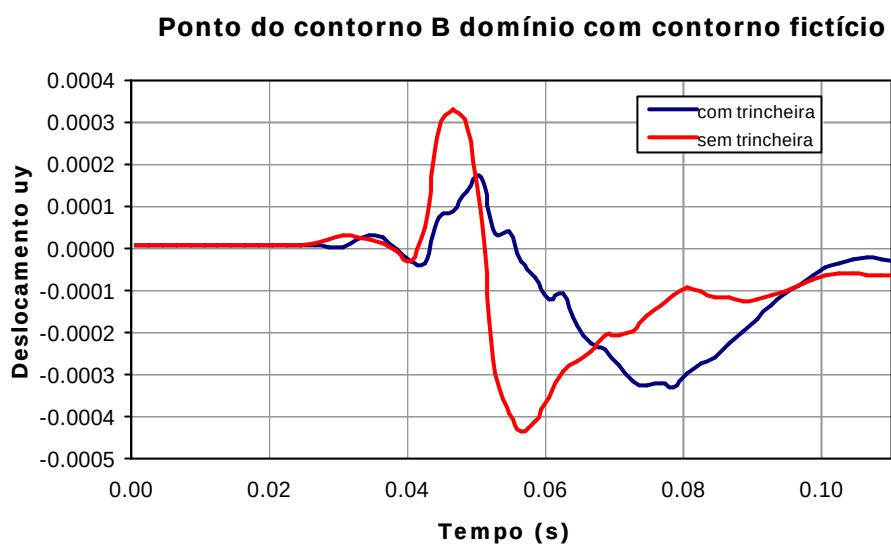


FIGURA 5.24 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **B** ($\Delta t = 0,002$)

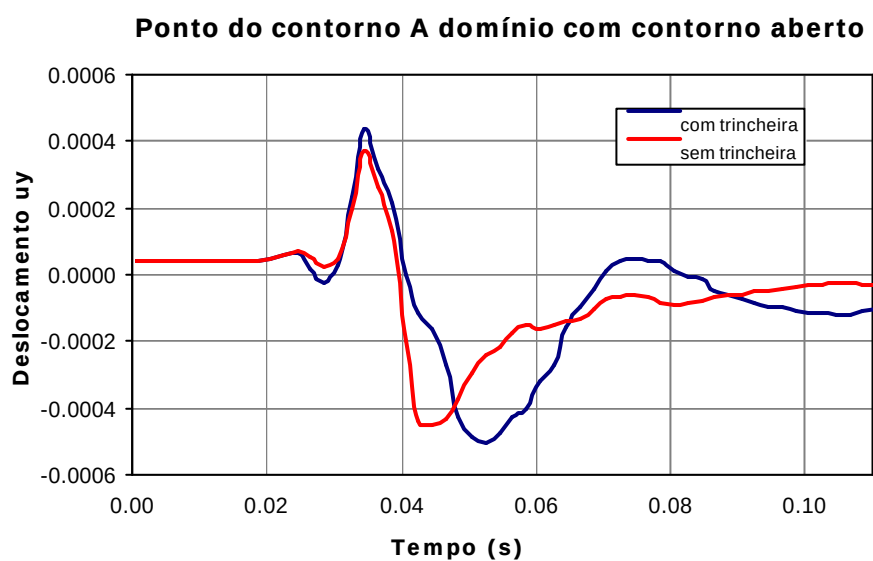


FIGURA 5.25 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **A** ($\Delta t = 0,002$)

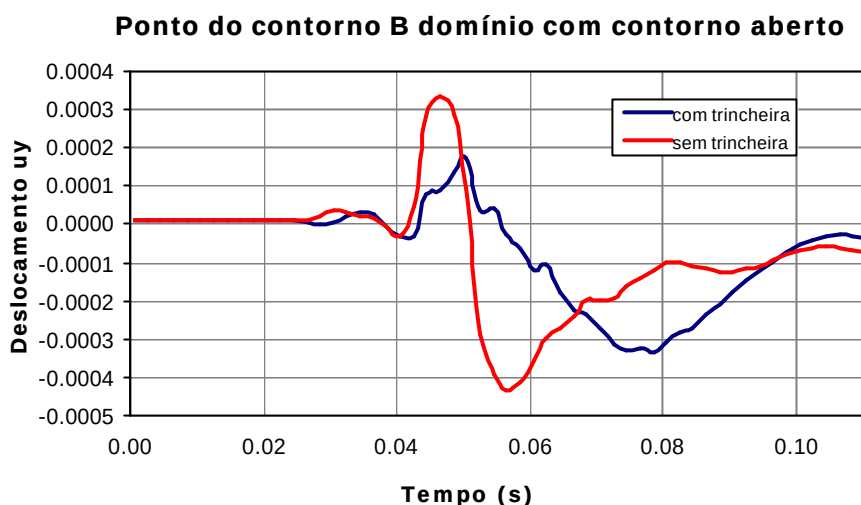


FIGURA 5.26 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **B** ($\Delta t = 0,002$)

As FIGS. 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32 mostram os resultados obtidos ao analisar o deslocamento vertical de dois pontos internos (**C** (5, -15) e **D** (19, -5)), utilizando um incremento de tempo $\Delta t = 0,002$ e 110 intervalos de tempo. O primeiro ponto interno está localizado a uma distância de cinco metros do extremo esquerdo do contorno e em profundidade de quinze metros, já o segundo ponto interno encontra-se localizado a 19 metros do extremo esquerdo do contorno e em profundidade de cinco metros (debaixo da fonte de emissão das ondas). Os resultados obtidos mostram claramente um melhor comportamento da onda elástica para a terceira simulação (domínio com contorno aberto). Em comparação com a primeira simulação (domínio com contorno fechado), a dissipação é muito mais acentuada para o domínio aberto, já que na primeira simulação a reflexão do contorno se reflete na solução.

Os resultados do domínio com contorno fictício e domínio com contorno aberto mostraram uma boa concordância entre si. Isto era esperado já que a função do contorno fictício é exclusivamente determinar os valores dos coeficientes da diagonal principal **H**. A desvantagem do modelo é o aumento do número de variáveis (modificação da entrada de dados) de forma a considerar a influência dos dados do contorno fictício (nós fictícios e elementos fictícios) na análise.

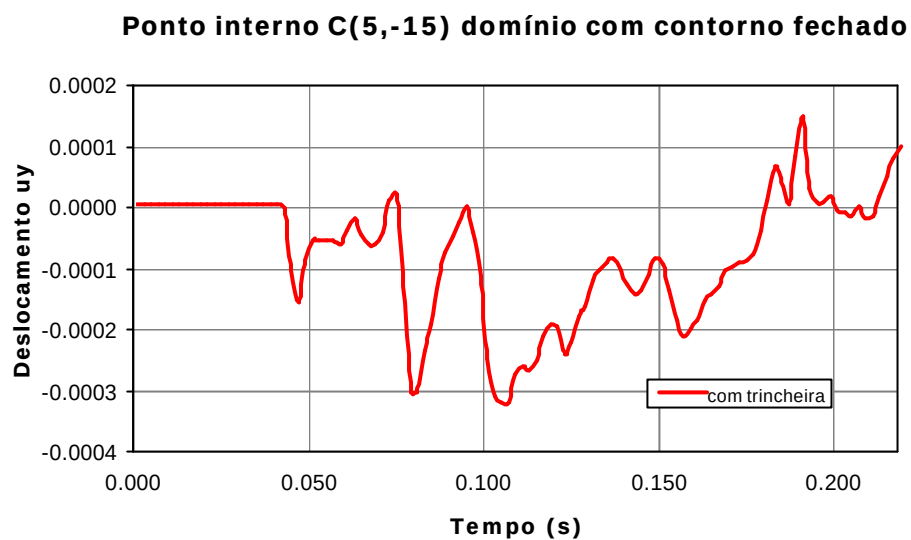


FIGURA 5.27 – Deslocamento vertical do ponto interno C ($\Delta t = 0,002$)

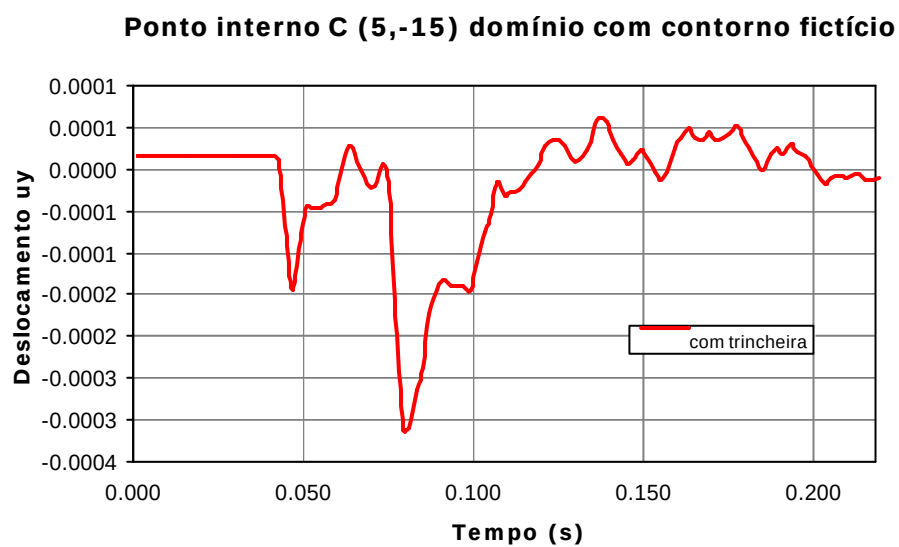


FIGURA 5.28 – Deslocamento vertical do ponto interno C ($\Delta t = 0,002$)

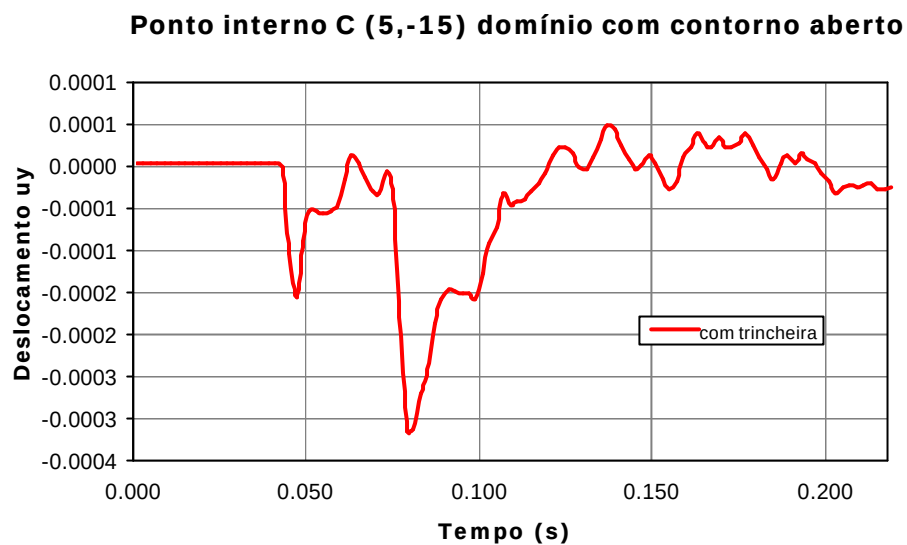


FIGURA 5.29 – Deslocamento vertical para o ponto interno **C** ($\Delta t = 0,002$)

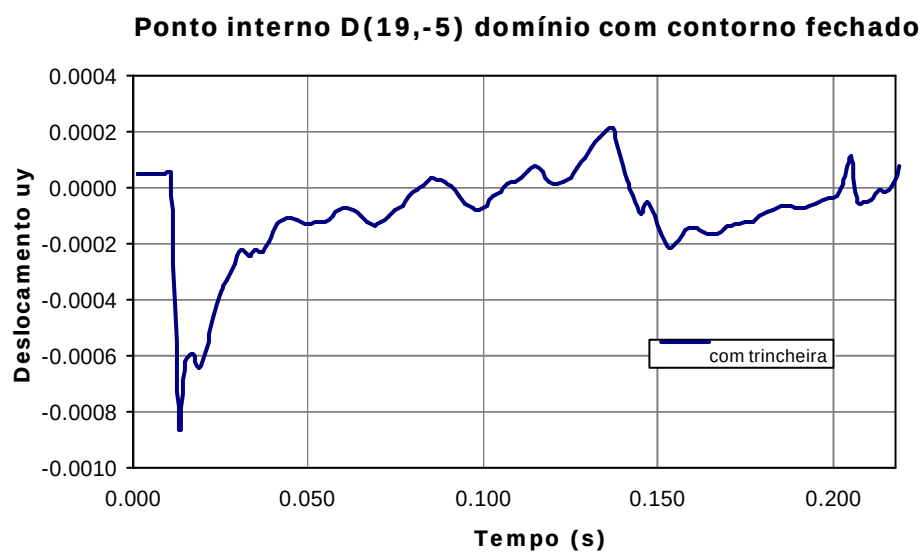


FIGURA 5.30 – Deslocamento vertical do ponto interno **D** ($\Delta t = 0,002$)

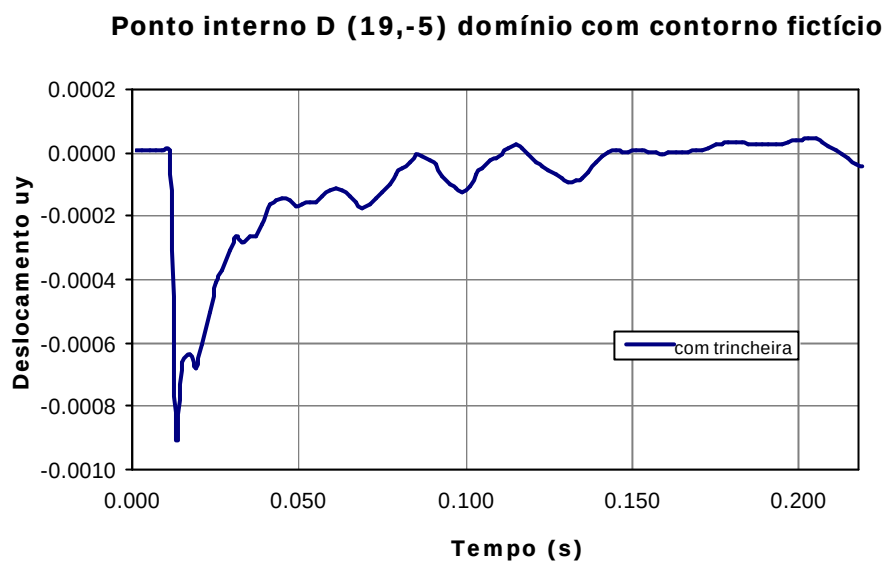


FIGURA 5.31 – Deslocamento vertical para o ponto interno **D** ($\Delta t = 0,002$)

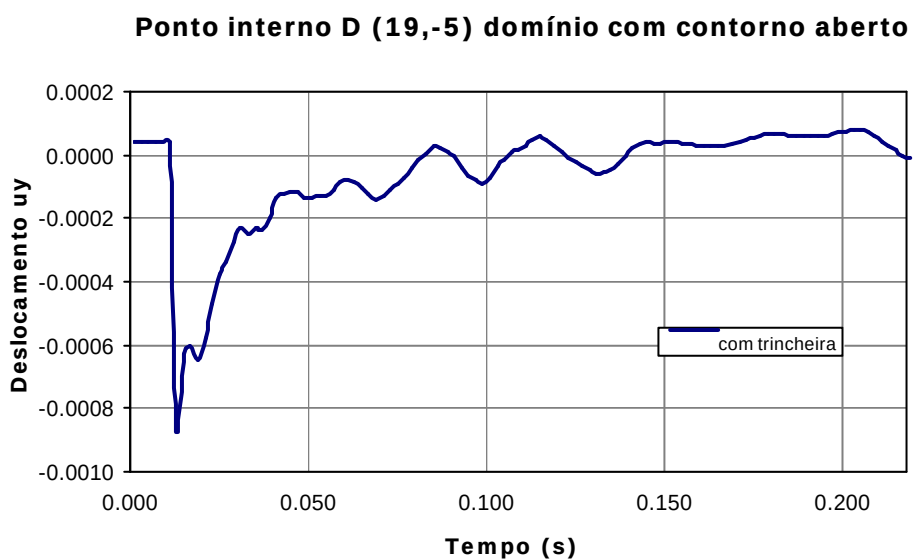


FIGURA 5.32 – Deslocamento vertical para o ponto interno **D** ($\Delta t = 0,002$)

A fim de analisar-se a influência do contorno nas respostas, foi calculado o deslocamento vertical do ponto do contorno **A** localizado antes da trincheira, para a primeira (domínio com contorno fechado) e terceira simulação (domínio com contorno

aberto). Considerou-se um tempo total de simulação de 258 intervalos de tempo, para o incremento de tempo $\Delta t = 0,002$ (FIG. 5.33).

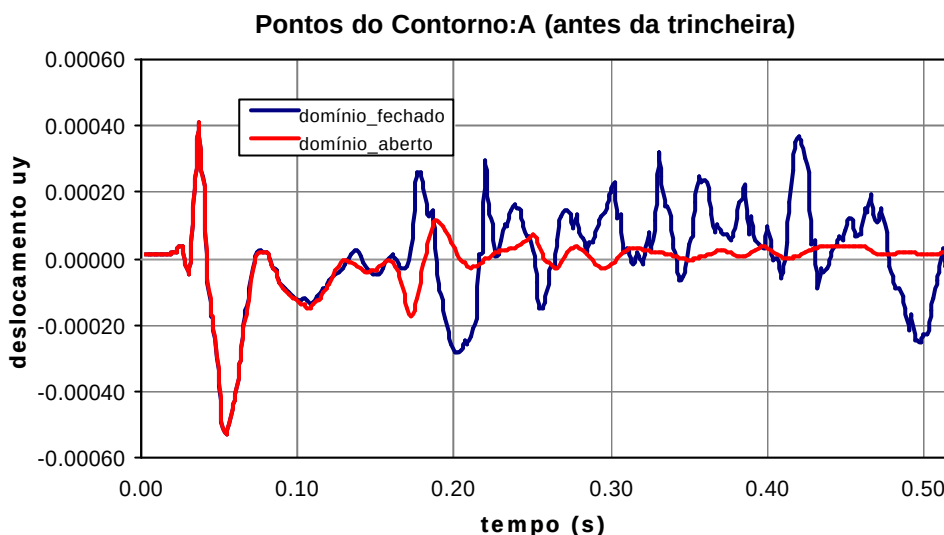


FIGURA 5.33 – Influência do contorno na resposta ($\Delta t = 0,002$)

O gráfico da FIG. 5.33 mostra que a onda atingiu o contorno e a influência da mesma na resposta (reflexão) foi acentuada. Por causa da perturbação gerada pela reflexão (domínio com contorno fechado), a resposta deixou de possuir significado. Já na terceira simulação (domínio com contorno aberto) é possível verificar o amortecimento da propagação da onda conforme se avança no tempo.

Para observar o efeito do tamanho do intervalo de tempo nas perturbações das soluções (instabilidades) foram calculados os deslocamentos verticais dos pontos **A** e **B** (antes e depois da trincheira) para a primeira análise, domínio com contorno fechado, utilizando o incremento de tempo $\Delta t = 0,001$. As FIGS. 5.34 e 5.35 mostram uma perda na precisão da solução se comparadas as obtidas para o incremento de tempo $\Delta t = 0,002$ FIG. 5.21 e FIG. 5.22. MANSUR & BREBBIA (1985) já tinham indicado o relacionamento evidente entre o tamanho do intervalo de tempo e as instabilidades presentes nas soluções transientes para a equação da onda escalar.

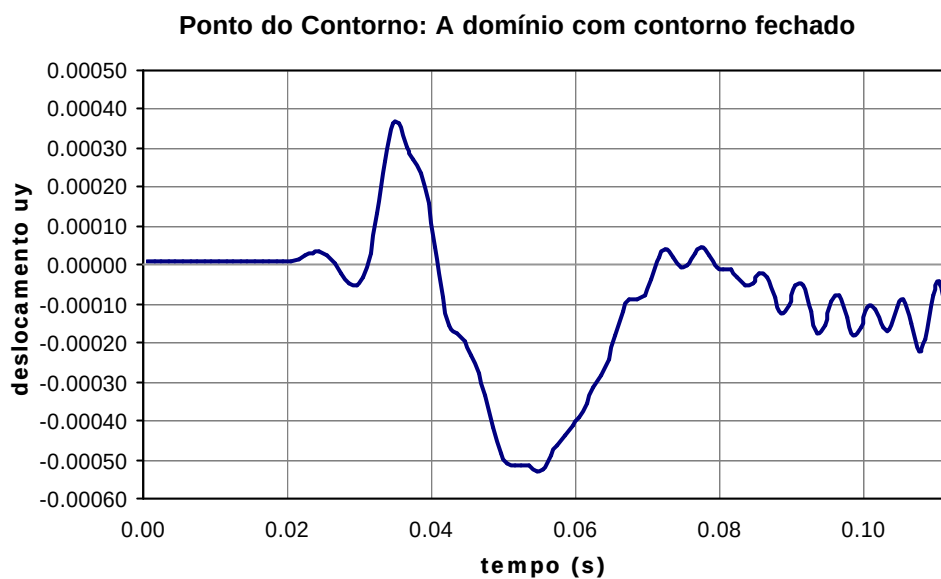


FIGURA 5.34 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **A** ($\Delta t = 0,001$)

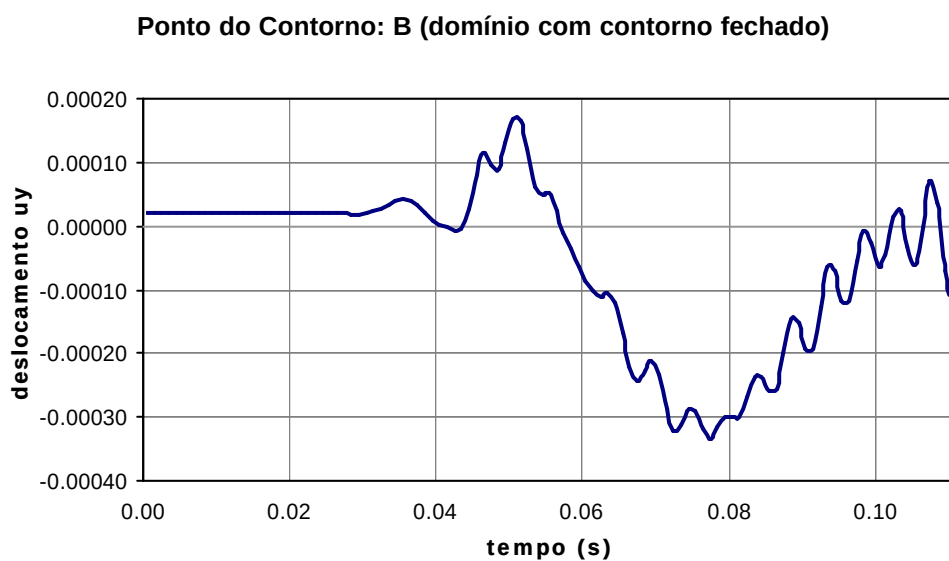


FIGURA 5.35 – Deslocamento vertical para o ponto do contorno **B** ($\Delta t = 0,001$)

Das três simulações apresentadas conclui-se que a terceira simulação (domínio com contorno aberto) é a que apresentou maiores vantagens, não só do ponto de vista da implementação numérica (menor entrada de dados), como também por apresentar o melhor desempenho computacional e menor tempo de processamento para a obtenção

dos resultados, além de representar satisfatoriamente o comportamento da propagação da onda, sem ter que se preocupar com a reflexão oriunda da presença do contorno.

Pode-se, então, dizer que foi comprovada satisfatoriamente a aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise envolvendo a redução de vibrações utilizando barreiras bidimensionais (trincheiras abertas).

As respostas obtidas pelo ANELC, comprovaram a validade das aproximações utilizadas (modelos bidimensionais) ao produzirem resultados coerentes com os esperados, sem o comprometimento da precisão dos resultados.

6

CONCLUSÕES

Este trabalho descreve o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, baseada no Método dos Elementos de Contorno (MEC), com solução fundamental dependente do tempo. A ferramenta apresentada consiste em um ambiente integrado, através do qual são disponibilizados recursos de pré-processamento, análise numérica e de pós-processamento. Ela tem sido utilizada em casos realísticos, servindo como apoio na análise de problemas elastodinâmicos transientes bidimensionais. O ANELC facilitou o processo de modelagem (pré-processamento), a análise numérica e a visualização dos resultados (pós-processamento), viabilizando a análise imediata de situações relativamente complexas.

As principais conclusões e contribuições deste trabalho de pesquisa são apresentadas nas seções seguintes.

6.1 Conclusões e Contribuições do Trabalho

O ponto de partida foi o programa computacional desenvolvido por CARRER & MANSUR (1999) na linguagem FORTRAN, amplamente utilizado em seus trabalhos de estudo da propagação de onda elástica. Esta ferramenta serviu como base na criação

do ANELC, pois foram utilizados os algoritmos de integração temporais desenvolvidos por eles na análise numérica aqui utilizada.

A formulação com solução fundamental dependente do tempo possui a vantagem de não precisar da discretização sobre o interior do domínio. Por outro lado, a solução fundamental considera a variação temporal presente na equação da onda elástica, o que a torna mais complexa. A principal desvantagem desta formulação consiste na necessidade de armazenar as matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ para todos os instantes de tempo anteriores. Embora já existam certos esquemas de compactação de dados, esta característica demanda uma enorme capacidade computacional para problemas de grande porte.

O ANELC foi projetado de acordo com quatro propriedades consideradas importantes em uma aplicação com modelagem estrutural: funcionalidade, extensibilidade, eficiência e facilidade de uso.

As aplicações de modelagem desenvolvidas no trabalho possuem uma boa funcionalidade. Foram desenvolvidos modelos para análise em meios finitos e semi-infinitos, onde os recursos de pré-processamento e de pós-processamento apresentaram um desempenho satisfatório. Além disso, espera-se que esses recursos possam ser utilizados como fonte de inspiração para o desenvolvimento de outras aplicações em engenharia de estruturas (elastodinâmica).

As funcionalidades presentes no ANELC foram moduladas internamente de tal forma que a alteração ou melhora de alguma delas não afeta as demais, devido à independência dos módulos entre si. Conforme foi projetada a arquitetura da ferramenta, a agregação de novas funcionalidades é simples e não requer a reformulação do código ou da sua arquitetura, que implicariam em um alto custo em relação ao esforço empregado em tal tarefa.

O objetivo ao projetar o ANELC foi desenvolver um programa computacional interativo, cujo tempo de aprendizado fosse o mais rápido possível, por isso a escolha do sistema operacional Windows, que é amplamente conhecido. O usuário poderia então facilmente inserir ou manipular informações no ANELC, trabalhar com arquivos e

dados por meio dos componentes das interfaces, tais como menus, ícones, caixas de diálogo, que contribuem para a minimização de erros (pré-processamento). A ferramenta também utiliza recursos gráficos para facilitar a modelação da estrutura em estudo e melhorar a compreensão dos resultados por meio de gráficos e relatórios gerados de forma automática (pós-processamento).

A ferramenta computacional proposta mostrou-se eficiente para a modelagem de problemas elastodinâmicos, captando bem os efeitos decorrentes dos parâmetros físicos e geométricos, desde que seja feita uma modelagem criteriosa da estrutura. A qualidade das respostas depende muito do modelo adotado para a simulação. Para um mesmo problema, as respostas podem variar bastante conforme o tipo de análise, os parâmetros adotados e o grau de refinamento na discretização adotada. É de responsabilidade do usuário avaliar o nível de discretização do modelo, requerendo-se vários testes em relação ao nível ideal antes de proceder à análise final.

6.2 Trabalhos Futuros

Este projeto servirá como base para o desenvolvimento de outros aplicativos e trabalhos, relacionados à análise dinâmica baseada na formulação do Método dos Elementos de Contorno.

O aprimoramento do algoritmo utilizado no processo de análise numérica é necessário, a fim de reduzir o tempo de processamento. Atualmente o sistema ANELC possui um custo computacional alto em relação a outras ferramentas implementadas em linguagens voltadas para o cálculo numérico, ver TAB. (6.1). Estuda-se a possibilidade de acionar subprogramas implementados em FORTRAN de dentro do ANELC, associando assim os recursos gráficos e visuais já disponibilizados pela ferramenta ao melhor desempenho nos cálculos numéricos praticados por programas desenvolvidos em FORTRAN.

TABELA 6.1 – Tempo de processamento FORTRAN x ANELC

	FORTTRAN ¹⁰	ANELC ¹	FORTTRAN ¹¹	ANELC ²
Heaviside: malha01	12 ”	1 ’ 55 ”	08 ”	1 ’ 45 ”
Heaviside: malha02	36 ”	5 ’ 44 ”	22 ”	4 ’ 52 ”
Trincheira (domínio fechado)	10 ”	1 ’ 39 ”	08 ”	1 ’ 25 ”
Sem-trincheira (domínio fechado)	07 ”	1 ’ 07 ”	05 ”	57 ”
Viga bi-apoiada	18 ”	3 ’ 18 ”	14 ”	2 ’ 52 ”

Uma possível continuação deste trabalho seria a modificação das formulações integrais de modo a considerar o efeito do fator de amortecimento (dissipação da energia) do material, estudando a sua influência no comportamento da solução ao longo do tempo em relação aos deslocamentos e tensões. Uma vibração forçada sem amortecimento persiste infinitamente, sendo claro que na natureza isso jamais ocorreria, pois uma vibração forçada amortecida é mantida durante o tempo de aplicação de uma força periódica que produz a vibração. A amplitude da vibração, entretanto, é afetada diretamente pelo módulo das forças de amortecimento.

Um gerador automático de malhas com elementos triangulares (células) complementaria a visualização da estrutura sob análise, gerando mapas de cores do modelo. No ANELC, pode-se criar uma malha composta de células triangulares (manualmente), cada célula da malha é formada pela conexão de 3 pontos, sendo eles internos ou do contorno. Quando a quantidade de pontos internos e do contorno é elevada, torna-se trabalhosa a escolha de cada conjunto de 3 pontos. O gerador automático de malhas reduziria esse trabalho, sendo acessado diretamente do ANELC e utilizaria os conceitos da triangulação de Delaunay (SHEWCHUK (1999)), processo no qual o conjunto de vértices resultante possui a propriedade de que nenhum vértice desse conjunto está no interior da circunferência que passa pelos três vértices de um triângulo na triangulação.

¹⁰ Processador Pentium II 233 MHz, 62 Mb de memória RAM.

¹¹ Processador Pentium III 366 MHz, 127 Mb de memória RAM.

Seria interessante também incorporar ao sistema a possibilidade de trabalhar com sub-regiões para a solução de problemas setorialmente não-homogêneos, onde o domínio físico do problema é dividido em sub-domínios homogêneos. Deste modo, aplica-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental dependente do tempo a cada sub-domínio, denominado sub-região, gerando um sistema linear de equações algébricas para cada uma das sub-regiões. Posteriormente, tais sistemas de equações são agrupados introduzindo-se as condições de continuidade e equilíbrio nas interfaces de cada sub-domínio. Com isso, a interação solo-estrutura seria reproduzida de uma maneira mais realística.

Com a implementação da subdivisão do domínio em sub-regiões, a geração automática de malhas e a inclusão do fator de amortecimento, o ANELC ganhará recursos importantes, abrindo mais possibilidades de exploração na análise dinâmica envolvendo propagação de ondas.

Importar modelos gerados pelo AutoCAD no ANELC, flexibilizaria o uso da ferramenta para uma diversidade de aplicações em engenharia, impulsionando significativamente a produtividade em projetos e permitindo análises mais precisas e rigorosas, com redução de erros e aumento da qualidade da documentação. Os sistemas CAD (*Computer Aided Design*) permitem a utilização de inúmeras ferramentas de visualização e de detalhamentos construtivos, bem como a produção de desenhos de engenharia e outras documentações de projeto, que poderiam ser aproveitados em estudos feitos com as análises implementadas no ANELC.

Como esse trabalho foi baseado na análise dinâmica, seria interessante a utilização de *animação gráfica* para a visualização do comportamento da estrutura ao longo do tempo de análise, de modo que fosse possível utilizar uma interface que nos permitisse manipular interativamente esse recurso.

Um estudo mais detalhado do refinamento no incremento do tempo seria útil e importante para analisar o problema da instabilidade em trabalhos futuros relacionados com a propagação da onda.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMAD, S. & AL-HUSSAINI, T.M.: *'Simplified Design for Vibration Screening by Open and In-Filled Trenches'*. Journal of Geotechnical Engineering, vol. 117(1), pp. 67-88, 1991.

AL-HUSSAINI, T.M. & AHMAD, S.: *"Design of Wave Barriers for Prediction of Horizontal Ground Vibration"*. Journal of Geotechnical Engineering, vol. 117(4), pp. 616-636, 1991.

ARAÚJO, F.C.: *"Zeitberichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode"*. PhD. Thesis, Technische Universität Braunschweig, Germany, 1994.

ANDERSEN, L. & JONES, C.J.C., BEATS (*Boundary Element Analysis of Soil and Three-dimensional Structures*). Disponível na INTERNET via: <http://www.civil.auc.dk/~i5la/PhD/BEM/TM868.pdf>. Acessado em: 19/06/2002.

BEASY, Computacional Mechanics BEASY Ltd., BEASY (Boundary Element Analysis System). Disponível na INTERNET via: <http://www.beasy.com>. Acessado em: 19/06/2002.

BEMflow, The Madison Group: Polymer Processing Research Corp. Group, University of Wisconsin-Madison, BEMflow (Boundary Element-Method for flow-simulations in plastics processing). Disponível na INTERNET via: <http://www.madisongroup.com>. Acessado em: 19/06/2002.

BESKOS D.E., DASGUPTA, B. & VARDOULAKIS, I.G.: “*Vibration Isolation Using Open or Filled Trenches*”. Computational Mechanics, vol. 1, pp. 43-63, 1986.

BREBBIA, C.A.: “*The Boundary Element Method for Engineers*”, Pentech Press, London, 1978.

BREBBIA, C.A., TELLES, J.C. & WROBEL, L.C.: “*Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

CARRER, J.A.M. & MANSUR, W.J.: “*Space derivatives in Time Domain BEM Analysis for the Scalar Wave Equation*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 13, pp. 67-74, 1994.

CARRER, J.A.M. & MANSUR, W.J.: “*Time-domain BEM analysis for the 2D scalar wave equation: initial conditions contributions to space and time derivatives*”, International Journal for Numerical. Methods in Engineering, vol 39, pp. 2169-2188, 1996.

CARRER, J.A.M. & MANSUR, W.J.: “*Stress and velocity in 2D transient elastodynamic analysis by the boundary element method*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 23, pp. 233-245, 1999.

CODA, H.B. & VENTURINI, W.S.: “*A Smooth Fundamental Solution for 3D Time Domain BEM Formulations*”, Eds. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald and H. Power, *Boundary Elements XVIII*, Computational Mechanics Publications, 1996.

COLE, D.M., KOSLOFF, D.D. & MINSTER, J.B.: “*A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics*”, I. Bull. Seis. Soc. America, vol 68(5), pp. 1331-1357, 1978.

COMET/BEAT, Collins & Aikman Corporation, COMET/BEAT (Boundary Element Analysis Technology). Disponível na INTERNET via: <http://www.collinsaikman.com>. Acessado em: 19/06/2002.

CRUSE, T.A. & RIZZO, F.J.: “*A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I*”, J. Math. Anal. Appl., vol 22, pp. 244-259, 1968.

CHANG, O.V.: “*Boundary Elements Applied to Seepage Problems in Zone Anisotropic Soils*”, Master’s Thesis, Southampton University, London, 1979.

DOMINGUEZ, J.: “*Boundary Element Approach for dynamic poroelastic problems*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 35, pp. 307-324, 1992.

DOMINGUEZ, J.: “*Boundary Elements in Dynamics*”, Computational Mechanics Publications, Southampton, England, 1994.

FRIEDMAN, M.B. & SHAW, R.: “*Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section*”, Trans. ASME. J. Appl. Mech. Series E, vol 29, pp. 40-46, 1962.

GPBEST, Boundary Element Software Technology Corporation, GPBEST (General Purpose Boundary Element Software Technology). Disponível na INTERNET via: <http://www.gpbest.com>. Acessado em: 19/06/2002.

HADAMARD, J.: “*Lecture on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations*”, Dover Publications, New York, 1952.

HUNG, H.H. & YANG, Y.B.: “*A Review of Researches on Ground-Borne Vibrations with Emphasis on Those Induced by Trains*”, Proc. Natl. Sci. Counc.ROC(A), Vol 25, No. 1, pp. 1-16, 2001.

HUNTER, P. & PULLAN, A.: "FEM/BEM NOTES", Department of Engineering science, Auckland University, New Zeland, Chapter 7, 1997.

ISRAIL, A.S.M. & BANERJEE, P.K.: "*Advanced Development of Time-Domain BEM for Two-Dimensional Scalar Wave Propagation*", Int. J. Numer. Meth. Engng., vol 29, pp. 1003-1020, 1990-a.

ISRAIL, A.S.M. & BANERJEE, P.K.: "*Advanced Time-Domain Formulation of BEM for Two-Dimensional Transient Elastodynamics*", Int. J. Numer. Meth. Engng., vol 29, pp. 1421-1440, 1990-b.

ISRAIL, A.S.M. & BANERJEE, P.K.: "*Two-Dimensional Transient Wave-Propagation Problems by Time-Domain BEM*", Int. J. solids Structures, vol 26 (8), pp. 851-864, 1990-c.

ISRAIL, A.S.M. & BANERJEE, P.K.: "*Interior Stress Calculations in 2-D Time-Domain Transient BEM Aanalysis*", Int. J. Solids Structures, vol 27 (7), pp. 915-927, 1991.

ISRAIL, A.S.M. & BANERJEE, P.K.: "*Advanced Development of Boundary Element Method for Two-Dimensional Dynamic Elasto-Plasticity*", Int. J. Solids Structures, vol 29 (11), pp. 1433-1451, 1992.

KARRENBACH, M.: "*Reciprocity of tensor wavefields*", Stanford Exploration Project, Report 80, pp. 1-538, 2001.

LYSMER, J. & WAAS, G.: "Shear waves in plane infinite structures", J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol 98(EM1), pp. 85-105, 1972.

MANOLIS, G.D. & BESKOS, D.E.: "*Boundary Element Methods in Elastodynamics*", Unwin Hyman Publishing Co., Boston, 1998.

MANSUR, W.J.: “*A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*”, Ph.D. Thesis, Southampton University, 1983.

MANSUR, W.J. & BREBBIA, C.A.: “*Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems*”, Appl. Math. Modelling, vol 6, pp. 299-306, 1982.

MANSUR, W.J. & BREBBIA, C.A.: “*Further Development on the Solution of the Transient Scalar Wave Equation*”, Topics in Boundary Element Research, (C.A. Brebbia ed.) Springer Verlag vol 2, Chapter 4, 1985.

MANSUR, W.J. & CARRER, J.A.M.: “*Two Dimensional BEM Analysis for the Scalar Wave Equation: Kernels*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 12, pp. 51-63, 1994.

MILES, J.W.: “*Modern Mathematics for the Engineer*”, (Bekenbach, E.F. ed.) McGraw-Hill, London, 1961.

MORSE, P.M. & FESHBACH, H.: “*Methods of Theoretical Physics*”, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1953.

NARDINI, D. & BREBBIA, C.A.: “*A new approach to free vibration analysis using boundary elements*”, Applied Mathematical Modelling 7, pp. 157-162, 1983.

NIWA, Y., KOBAYASHI, S. & AZUMA, N.: “*An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of travelling wave*”, Memo. Fac. Engng. Kyoto Univ., vol 37, pp. 28-46, 1975.

NOWAK, A.J.: “*Application of the multiple reciprocity BEM nonlinear potential problems*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 16, pp. 323-332, 1995.

PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A. & WROBEL, L.W.: *"The Dual Reciprocity Boundary Element Method"*, Computational Mechanics Publications, Southampton, London, 1992.

PAULA, F.A. & TELLES, J.C.F.: *"The Dual Reciprocity Boundary Element Method"*, Computational Mechanics Publications, Southampton, London, 1989.

PHI3D®, Cedrat Technologies, PHI3D® (A 3D boundary element software for the analysis of electric and magnetic problems). Disponível na INTERNET via: <http://cedrat.com>. Acessado em: 19/06/2002.

RIZZOS, F.J.: *"An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics"*; Q. Appl. Math., vol 25, pp. 83-95, 1967.

SEGOL, G., LEE, C.Y. & ABEL, F.: *"Amplitude reduction of surface waves by trenches"*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol 104(EM3), pp. 621-641, 1978.

SHEPARD, M.S. & SCHROEDER, W.: *"Analysis Data for Visualization"*, Computer Graphics Techniques for Scientific and Engineering Analysis CRC Press. Gallagher, R., editor, pp. 61-87, 1995.

SHEWCHUK, R.J.: *"Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation"*, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, 1999.

TELLES, J.C.F., CARRER, J.A.M. & MANSUR, W.J.: *"Transient dynamic elastoplastic analysis by the time-domain BEM formulation"*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 23, pp. 479-486, 1999.

WANG, C. & TAKEMIYA, H.: *"Analytical Elements of Time Domain BEM for Two-Dimensional Scalar Wave Problems"*, Int. J. Numer. Meth. Engng, vol 33, pp. 1737-1754, 1992.

WANG, C.C., WANG, H.C. & LIOU, G.S.: “*Quadratic Time Domain BEM Formulation for 2D Elastodynamic Transient Analysis*”, Int. J. Solids Structures, vol 34 (1), pp. 129-151, 1997.

WOODS, R.D.: “*Screening of Surface Waves in Soils*”. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, vol. 94(SM4), pp. 951-979, 1968.

YANG, Y.B. & HUNG, H.H.: “*A Parametric Study of Wave Barriers for Reduction of Train-Induced Vibrations*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 3729-3747, 1997.

YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M. & GONG, L.: “*A Linear q-method Applied to 2D Time-Domain BEM*”, Commun. Numer. Meth. Engng, vol 14, pp. 1171-1179, 1998-a.

YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M. & GONG, L.: “*Time Weighting in Time Domain BEM*”, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 22, pp. 175-181, 1998.

YU, G., MANSUR, W.J. & CARRER, J.A.M.: “*The linear q method for 2-D elastodynamic BE analysis*”, Computational Mechanics, vol 24, pp. 82-89, 1999.

YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M. & GONG, L.: “*Stability of Galerkin and Collocation Time Domain Boundary Element Methods as Applied to the Scalar Wave Equation*”, Computers and Structures, vol 74, pp. 495-506, 2000.

ANEXO A

EXPRESSÕES DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS INTEGRADAS NO TEMPO

A fim de simplificar as expressões finais, é conveniente definir a seguinte notação:

$$A_1 = \sqrt{c_w(t_n - t_l) - r} \quad A_2 = \sqrt{c_w(t_n - t_l) + r}$$

$$A_3 = \sqrt{c_w(t_n - t_{l+1}) - r} \quad A_4 = \sqrt{c_w(t_n - t_{l+1}) + r}$$

$$A_5 = c_w(t_n - t_l) \quad A_6 = c_w(t_n - t_{l+1})$$

$$H_s = H[c_s(t - t) - r] \quad H_d = H[c_d(t - t) - r]$$

$$L_w = L_w(x, t; x, t) = [c_w^2(t - t)^2 - r^2]^{-1/2}$$

$$N_w = N_w(x, t; x, t) = 2c_w^2(t - t)^2 - r^2$$

O subíndice w têm que ser convenientemente substituído por s e d , para representar as contribuições das ondas secundária (equivoluminal) ou primária (dilatacional) respectivamente.

Caso 1: $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$ e $t_{l+1} = t_n$

$$h_I^A = h_I^D = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_1}{A_2} \quad (\text{A.1})$$

$$h_F^A = h_F^D = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_1 A_2}{r} \quad (\text{A.2})$$

$$h_I^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left[\frac{2}{3} (A_1 A_2)^3 + r^2 A_1 A_2 \right] \quad (\text{A.3})$$

$$h_F^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{(A_1 A_2)^3}{3} \quad (\text{A.4})$$

$$g_F^E = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w H_w \Theta_F(t) dt = -g_w \ln \left(\frac{r}{A_1 A_2 + A_5} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$g_F^F = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w^{-1} H_w \Theta_F(t) dt = \frac{g_w}{2} \left[A_1 A_2 A_5 + r^2 \ln \left(\frac{r}{A_1 A_2 + A_5} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

$$g_F^J = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Theta_F(t) dt = g_w A_1 A_2 A_5 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial h_I^A}{\partial r} = \frac{\partial h_I^D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w \right) = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5}{A_1 A_2^3} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial h_F^A}{\partial r} = \frac{\partial h_F^D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt \right) = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5^2}{r^2 A_1 A_2} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Phi_I(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{r^3}{A_1 A_2} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Phi_F(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} r A_1 A_2 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = -\frac{g_w}{r} \frac{A_5}{A_1 A_2} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = g_w r \ln\left(\frac{A_5 - A_1 A_2}{r}\right) \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = -g_w r \frac{A_5}{A_1 A_2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial h_I^A}{\partial t} = \frac{\partial h_I^D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w \right) = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5^2}{r A_1 A_2^3} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial h_F^A}{\partial t} = \frac{\partial h_F^D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt \right) = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5}{r A_1 A_2} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5^3}{A_1 A_2} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} A_1 A_2 A_5 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = \frac{g_w}{A_1 A_2} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = g_w A_1 A_2 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = g_w \frac{2A_5^2 - r^2}{A_1 A_2} \quad (\text{A.21})$$

Caso 2: $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$ e $t_{l+1} < t_n$

$$h_I^A = h_I^D = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_1}{A_2} \frac{A_4^2}{r} \quad (\text{A.22})$$

$$h_F^A = h_F^D = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_1 A_2}{r} \quad (\text{A.23})$$

$$h_I^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left[\frac{2}{3} (A_1 A_2)^3 + r^2 A_1 A_2 - A_5 A_6 A_1 A_2 \right] \quad (\text{A.24})$$

$$h_F^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{(A_1 A_2)^3}{3} \quad (\text{A.25})$$

$$g_F^E = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w H_w \Theta_F(t) dt = -g_w \ln \left(\frac{r}{A_1 A_2 + A_5} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$g_F^F = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w^{-1} H_w \Theta_F(t) dt = \frac{g_w}{2} \left[A_1 A_2 A_5 + r^2 \ln \left(\frac{r}{A_1 A_2 + A_5} \right) \right] \quad (\text{A.27})$$

$$g_F^J = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w H_w \Theta_F(t) dt = g_w A_1 A_2 A_5 \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial h_I^A}{\partial r} = \frac{\partial h_I^D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w \right) = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5 A_6 A_2^2 + c_w \Delta t r^2}{r^2 A_1 A_2^3} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial h_F^A}{\partial r} = \frac{\partial h_F^D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt \right) = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5^2}{r^2 A_1 A_2} \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Phi_I(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5 A_6 - r^2}{A_1 A_2} \right) r \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Phi_F(t) dt = -\frac{g_w}{\Delta t} r A_1 A_2 \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = -\frac{g_w}{r} \frac{A_5}{A_1 A_2} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = g_w r \ln\left(\frac{A_5 - A_1 A_2}{r}\right) \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial r} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} H_w \Theta_F(t) dt = -g_w \frac{r A_5}{A_1 A_2} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial h_I^A}{\partial t} = \frac{\partial h_I^D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w \right) = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5^2 + A_6 r}{r A_1 A_2^3} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial h_F^A}{\partial t} = \frac{\partial h_F^D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 H_w \Phi_F(t) dt \right) = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_5}{r A_1 A_2} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5^3}{A_1 A_2} - A_6 \frac{2A_5^2 - r^2}{A_1 A_2} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} A_1 A_2 A_5 \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = \frac{g_w}{A_1 A_2} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = g_w A_1 A_2 \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial t} = \oint_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} H_w \Theta_F(t) dt = g_w \frac{2A_5^2 - r^2}{A_1 A_2} \quad (\text{A.42})$$

Caso 3: $t_{l+1} < t_n$

$$h_I^A = h_I^D = \int_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} L_w = \frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_4}{A_2} \frac{2c_w \Delta t}{(A_1 A_4 + A_2 A_3)} \quad (\text{A.43})$$

$$h_F^A = h_F^D = \int_{t_l}^{t_{l+1}} r L_w^3 \Phi_F(t) dt - \frac{1}{c_w} L_w = -\frac{g_w}{\Delta t} \frac{A_2}{A_4} \frac{2c_w \Delta t}{(A_1 A_4 + A_2 A_3)} \quad (\text{A.44})$$

$$h_I^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left[\frac{1}{3} (A_3 A_4)^3 - A_1 A_2 (A_5 A_6 - r^2) + \frac{2}{3} (A_1 A_2)^3 \right] \quad (\text{A.45})$$

$$h_F^B = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left[\frac{2}{3} (A_3 A_4)^3 - A_3 A_4 (A_5 A_6 - r^2) + \frac{1}{3} (A_1 A_2)^3 \right] \quad (\text{A.46})$$

$$g_F^E = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w \Theta_F(t) dt = -g_w \ln \left(\frac{A_3 A_4 + A_6}{A_1 A_2 + A_5} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$g_F^F = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w^{-1} \Theta_F(t) dt = -\frac{g_w}{2} \left[A_3 A_4 A_6 - A_1 A_2 A_5 - r^2 \ln \left(\frac{A_3 A_4 + A_6}{A_1 A_2 + A_5} \right) \right] \quad (\text{A.48})$$

$$g_F^J = \int_{t_l}^{t_{l+1}} L_w N_w \Theta_F(t) dt = -g_w (A_3 A_4 A_6 - A_1 A_2 A_5) \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_I^A}{\partial r} &= \frac{\partial h_I^D}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial (r L_w^3)}{\partial r} \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} \frac{\partial L_w}{\partial r} \\ &= \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_4^2}{A_1 A_2^3} - \frac{A_5 A_6 + r^2}{r^2 A_1 A_2} + \frac{A_6^2}{r^2 A_3 A_4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_F^A}{\partial r} &= \frac{\partial h_F^D}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial (r L_w^3)}{\partial r} \Phi_F(t) dt - \frac{1}{c_w} \frac{\partial L_w}{\partial r} \\ &= \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_2^2}{A_3 A_4^3} - \frac{A_5 A_6 + r^2}{r^2 A_3 A_4} + \frac{A_5^2}{r^2 A_1 A_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5 A_6 - r^2}{A_1 A_2} - A_3 A_4 \right) r \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5 A_6 - r^2}{A_3 A_4} - A_1 A_2 \right) r \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial r} \Theta_F(t) dt = \frac{g_w}{r} \left(\frac{A_6}{A_3 A_4} - \frac{A_5}{A_1 A_2} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial r} \Theta_F(t) dt = -g_w r \ln \left(\frac{A_3 A_4 - A_6}{A_1 A_2 - A_5} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial r} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial r} \Theta_F(t) dt = g_w \left(\frac{A_6}{A_3 A_4} - \frac{A_5}{A_1 A_2} \right) r \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial h_I^A}{\partial t} = \frac{\partial h_I^D}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} r \frac{\partial(L_w^3)}{\partial t} \Phi_I(t) dt + \frac{1}{c_w} \frac{\partial L_w}{\partial t} = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5^2 + A_6 r}{r A_1 A_2^3} - \frac{A_6}{r A_3 A_4} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial h_F^A}{\partial t} = \frac{\partial h_F^D}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} r \frac{\partial(L_w^3)}{\partial t} \Phi_F(t) dt - \frac{1}{c_w} \frac{\partial L_w}{\partial t} = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_6^2 + A_5 r}{r A_3 A_4^3} - \frac{A_5}{r A_1 A_2} \right) \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial h_I^B}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} \Phi_I(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_5^3}{A_1 A_2} - A_6 \frac{2A_5^2 - r^2}{A_1 A_2} + A_3 A_4 A_6 \right) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial h_F^B}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} \Phi_F(t) dt = \frac{g_w}{\Delta t} \left(\frac{A_6^3}{A_3 A_4} - A_5 \frac{2A_6^2 - r^2}{A_3 A_4} + A_1 A_2 A_5 \right) \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial g_F^E}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial L_w}{\partial t} \Theta_F(t) dt = -g_w \left(\frac{1}{A_3 A_4} - \frac{1}{A_1 A_2} \right) \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial g_F^F}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w^{-1})}{\partial t} \Theta_F(t) dt = -g_w (A_3 A_4 - A_1 A_2) \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial g_F^J}{\partial t} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial(L_w N_w)}{\partial t} \Theta_F(t) dt = -g_w \left(\frac{2A_6^2 - r^2}{A_3 A_4} - \frac{2A_5^2 - r^2}{A_1 A_2} \right) \quad (\text{A.63})$$

Os termos genéricos h_N^M e h_F^M , e suas derivadas no espaço e no tempo são relativas ao tensor “ M ” e as funções de interpolação Φ_N e Θ_F respetivamente.

Para as expressões h_N^M e $\partial h_N^M / \partial r$, devemos considerar $g_w = (1/c_s^2)$ que representa a contribuição da onda secundária ou $g_w = -(c_s/c_d^3)$ que representa a contribuição da onda primária. Para as expressões $\partial h_N^M / \partial t$, devemos considerar $g_w = (1/c_s)$ que representa a contribuição da onda secundária ou $g_w = -(c_s/c_d^2)$ que representa a contribuição da onda primária.

Para as expressões g_F^M e $\partial g_F^M / \partial r$, devemos considerar $g_w = (1/c_s)$ que representa a contribuição da onda secundária ou $g_w = -(c_s/c_d^2)$ que representa a contribuição da onda primária. Para as expressões $\partial g_F^M / \partial t$, devemos considerar $g_w = 1$ que representa a contribuição da onda secundária ou $g_w = -(c_s/c_d)$ que representa a contribuição da onda primária.