



EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

# FÍSICA EXPERIMENTAL PARA O CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

Wagner Corradi  
Sérgio Luiz Araújo Vieira  
Rodrigo Dias Tárzia  
Leonardo Fonseca  
Wanderson Silva de Oliveira

( EDITORAufmg )

**FÍSICA EXPERIMENTAL  
PARA O CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS**



## **UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Reitor: Clélio Campolina Diniz

Vice-Reitora: Rocksane de Carvalho Norton

### **Pró-Reitoria de Graduação**

Pró-Reitora: Antônia Vitória Soares Aranha

Pró-Reitor Adjunto: André Luiz dos Santos Cabral

### **Centro de Apoio à Educação a Distância**

Diretor de Educação a Distância: Fernando Selmar Rocha Fidalgo

Coordenador da UAB/UFMG: Wagner José Corradi Barbosa

Coordenador Adjunto da UAB/UFMG: Hormindo Pereira de Souza Júnior

### **EDITORA UFMG**

Diretor: Wander Melo Miranda

Vice-Diretor: Roberto Alexandre do Carmo Said

### **Conselho Editorial**

Wander Melo Miranda (presidente)

Antônio Luiz Pinho Ribeiro

Flavio de Lemos Carsalade

Heloisa Maria Murgel Starling

Márcio Gomes Soares

Maria das Graças Santa Bárbara

Maria Helena Damasceno e Silva Megale

Roberto Alexandre do Carmo Said

WAGNER CORRADI  
SÉRGIO LUIZ ARAÚJO VIEIRA  
RODRIGO DIAS TÁRSIA  
LEONARDO FONSECA  
WANDERSON SILVA DE OLIVEIRA

# FÍSICA EXPERIMENTAL PARA O CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

Belo Horizonte  
Editora UFMG  
2012

© 2012, Wagner Corradi, Sérgio Luiz Araújo Vieira, Rodrigo Dias Tárzia, Leonardo Fonseca,  
Wanderson Silva de Oliveira

© 2012, Editora UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem a autorização escrita do Editor.

F537 Física experimental para o curso de Ciências Biológicas /  
Wagner Corradi... [et al.]. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2012.  
143 p. : il. - (Educação a Distância)  
Outros autores: Sérgio Luiz Araújo Vieira, Rodrigo Dias Tárzia, Leonardo Fonseca,  
Wanderson Silva de Oliveira.

ISBN: 978-85-7041-840-1

1. Física experimental. I. Corradi, Wagner. II. Vieira, Sérgio Luiz Araújo. III. Tárzia,  
Rodrigo Dias. IV. Fonseca, Leonardo. V. Oliveira, Wanderson Silva de. VI. Série.

CDD: 530

CDU: 53

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação  
Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO EDITORIAL: Danívia Wolff

ASSISTÊNCIA EDITORIAL: Eliane Sousa e Euclídia Macedo

EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro

REVISÃO DE PROVAS: Alexandre Vasconcelos de Melo e Arquiolinda Machado

PRODUÇÃO GRÁFICA: Diêgo Oliveira

PROJETO GRÁFICO e CAPA: Eduardo Ferreira

FORMATAÇÃO: Robson Miranda

EDITORA UFMG

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: +55 31 3409-4650 - Fax: +55 31 3409-4768

www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria – 6º andar

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: +55 31 3409-4654 - Fax: +55 31 3409-4060

www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

A Educação a Distância (EAD) é uma modalidade de ensino que busca promover inserção social pela disseminação de meios e processos de democratização do conhecimento. A meta é elevar os índices de escolaridade e oferecer uma educação de qualidade, disponibilizando uma formação inicial e/ou continuada, em particular, a professores que não tiveram acesso a esse ensino.

Não se pode ignorar que é fundamental haver, sempre, plena conexão entre educação e aprendizagem. A modalidade a distância é um tipo de aprendizagem que, em especial na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), já está concretizada como um ensino de qualidade. Hoje, a aprendizagem tornou-se, para todos os profissionais dessa universidade envolvidos no programa de Educação a Distância, sinônimo de esforço e dedicação de cada um.

Este livro visa desenvolver no curso a distância os mesmos conhecimentos proporcionados num curso presencial. Os alunos estudarão o material nele contido e muitos outros que lhes serão sugeridos em bibliografia complementar. É importante terem em vista que essas leituras são de extrema importância para, com muita dedicação, avançarem em seus estudos.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas e cada uma delas trata de determinado tema, que é explorado de diferentes formas – textos, apresentações, reflexões e indagações teóricas, experimentações ou orientações para atividades a serem realizadas pelos alunos. Os objetivos propostos nas aulas indicam as competências e habilidades que os alunos, ao final da disciplina, devem ter adquirido.

Os exercícios indicados ao final das aulas possibilitam aos alunos avaliarem sua aprendizagem e seu progresso em cada passo do curso. Espera-se que, assim, eles se tornem autônomos, responsáveis, críticos e decisivos, capazes, sobretudo, de desenvolver a própria capacidade intelectual. Os alunos não podem se esquecer de que toda a equipe de professores e tutores responsáveis pelo curso estará, a distância ou presente nos polos, pronta a ajudá-los. Além disso, o estudo em grupo, a discussão e a troca de conhecimentos com os colegas serão, nessa modalidade de ensino, de grande importância ao longo do curso.

Agradeço aos autores e à equipe de produção pela competência e pelo empenho e tempo dedicados à preparação deste e dos demais livros dos cursos de EAD. Espero que cada um deles possa ser valioso para os alunos, pois tenho certeza de que vão contribuir muito para o sucesso profissional de todos eles, em seus respectivos cursos, na educação em geral do país.

*Ione Maria Ferreira de Oliveira*  
*Coordenadora do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB/UFMG)*



Apresentação . . . . .	11
Informações Gerais. . . . .	13
UNIDADE 1 - OBTENÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS. . . . .	19
AULA 1 - Medidas e resultados em experimentos. . . . .	21
1. 1 Atitude e comportamento. . . . .	21
1. 2 Medidas e resultados em experimentos . . . . .	22
1. 2. 1 O significado de uma medida e sua incerteza . . . . .	22
1. 2. 2 Medidas diretas e indiretas. . . . .	23
1. 2. 3 Valor mais provável . . . . .	24
1. 3. Incerteza, precisão e exatidão. . . . .	24
1. 3.1. Erro de leitura e desvio médio em medidas diretas. . . . .	24
1. 3. 2 Erro absoluto e erro relativo . . . . .	27
1. 3. 3 Precisão e exatidão . . . . .	27
1.4 Atividade prática: uso de aparelhos de medida . . . . .	28
AULA 2 - Propagação de erros . . . . .	31
2. 1 Propagação de erros. . . . .	31
2. 1. 1 Método dos valores limite . . . . .	32
2. 1. 2 Método baseado no cálculo diferencial . . . . .	33
2. 2 Atividade prática: atrito estático . . . . .	35
AULA 3 - Análise de gráficos e tabelas . . . . .	39
3. 1 Confecção de gráficos e tabelas . . . . .	39
3. 2 Utilizando um multímetro . . . . .	41
3. 3 Atividade prática: elemento resistivo linear. . . . .	43
AULA 4 - Uso de recursos computacionais. . . . .	45
4. 1 Elaboração de gráficos usando recursos computacionais . . . . .	45
4. 2 Aprendendo a fazer um gráfico com o programa <i>Origin</i> . . . . .	46
4. 3 Aprendendo a fazer um gráfico com o programa <i>Excel</i> . . . . .	47
4. 4 Aprendendo a fazer um gráfico com o programa <i>SciDAVis</i> . . . . .	50
4. 5 Atividade prática: densidade de um líquido . . . . .	59

UNIDADE 2 - AJUSTES DE CURVAS . . . . .	63
AULA 5 - Ajuste de curvas por regressão linear. . . . .	65
5. 1 O método da regressão linear em linhas gerais. . . . .	65
5. 1. 1 Considerações finais. . . . .	67
5. 2 Regressão linear com o programa <i>Excel</i> . . . . .	67
5. 3 Regressão linear com o programa <i>SciDAVis</i> . . . . .	70
5. 4 Atividade prática: constante elástica de molas . . . . .	75
AULA 6 - Ajuste de curvas pelo processo de linearização. . . . .	79
6. 1 Linearização. . . . .	79
6. 1. 1 Procedimento de linearização . . . . .	79
6. 1. 2 Uso da função logaritmo . . . . .	82
6. 2 Atividade prática: módulo de flexão de uma haste . . . . .	83
AULA 7 - Ajuste de curvas por regressão não linear . . . . .	87
7.1 Dependência não linear . . . . .	87
7.2 Regressão não linear com o <i>Excel</i> . . . . .	87
7.3 Regressão não linear com o <i>SciDAVis</i> . . . . .	88
7.4 Atividade prática: Lei de Newton para o resfriamento . . . . .	97
AULA 8 - Atividade prática de avaliação. . . . .	99
8.1 Atividade prática: pêndulo simples . . . . .	99
UNIDADE 3 - EXPERIMENTOS DE MAIOR INTERESSE PARA AS CIÊNCIAS BIOLÓGICAS. . . . .	103
AULA 9 - Atividade prática: colisões inelásticas . . . . .	105
AULA 10 - Atividade prática: umidade do ar . . . . .	109
AULA 11- Atividade prática: medindo árvores . . . . .	115
AULA 12 - Atividade prática: lentes e defeitos da visão . . . . .	117
12.1 Limites de validade da óptica geométrica . . . . .	117
12.2 Lentes e a formação de imagens . . . . .	117
12.3 O olho humano. . . . .	118
12.4 Determinação da distância focal de lentes . . . . .	121
12.5 Atividade prática: distância focal de lentes e defeitos da visão . . . . .	123

AULA 13 - Atividade prática: interferência e difração da luz. . . . .	125
AULA 14 - Atividade prática: deformação inelástica e processo irreversível . . . . .	133
ANEXOS . . . . .	139
A - Valores de grandezas e constantes físicas . . . . .	140
B - Código de cores para valores de resistências. . . . .	141
C - Constante elástica em associação de molas . . . . .	142



# Apresentação

A elaboração deste livro nasceu da vontade de se produzir um material didático adequado ao Ensino a Distância (EAD) de Física Experimental na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Mesmo na modalidade EAD, por sua própria concepção, as disciplinas de laboratório de Física ocorrem de maneira presencial. Contudo, algumas adaptações ainda se fazem necessárias nos textos usualmente empregados nos laboratórios de Física.

O material utilizado como ponto de partida foi o livro *Física experimental básica na universidade*, publicado pela Editora UFMG, e elaborado pelos professores do Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais: Dr. Agostinho Aurélio Campos, Dr. Elmo Salomão Alves e Dr. Nivaldo Lúcio Speziali, a partir de um conjunto de roteiros que vêm sendo elaborados, aprimorados e utilizados durante vários anos nas disciplinas de laboratório por grande parte dos professores desse departamento.

O trabalho de elaboração, adequação e preparação dos manuscritos e das figuras que deram origem a este livro é de responsabilidade dos autores da presente obra. Grande parte desse esforço contou com a colaboração imprescindível do estudante Marcelo Ângelo Diniz Aléssio e dos tutores Gustavo Henrique Reis de Araújo Lima, Alexandre Ferreira de Freitas Lages, Júlio César Siqueira Rocha e Bárbara Hissa Couto.

*Os autores*



# Informações Gerais

## 1. FÍSICA EXPERIMENTAL NA MODALIDADE DE ENSINO A DISTÂNCIA

Esta disciplina tem a intenção de introduzir, ilustrar e reforçar definições e conceitos físicos através de atividades experimentais abrangendo os conteúdos de Mecânica, Termodinâmica, Hidrostática, Eletricidade e Óptica. Para que isso seja possível, primeiro VOCÊ deverá ser capaz de realizar corretamente as medidas propostas nas atividades práticas, calcular as incertezas e as propagações envolvidas, fazer o tratamento dos dados obtidos e redigir um relatório com qualidade e rigor científico.

Nesta disciplina as atividades são divididas em aulas, propostas em três unidades: “Obtenção e tratamento de dados”, “Ajuste de curvas” e “Experimentos de maior interesse para as Ciências Biológicas”. Em todos os experimentos, respeitando-se o nível introdutório, pressupõe-se que você tenha domínio dos conceitos de Física no âmbito do Ensino Médio. As aulas começam por uma unidade que contém uma pequena discussão sobre a atitude e o comportamento que se espera em um laboratório de Física, bem como sobre a apresentação de resultados dos experimentos. Também são discutidas as medições, a determinação das incertezas associadas, a construção e análise de gráficos e tabelas e a utilização de recursos computacionais. Na unidade seguinte é discutido o ajuste de curvas por regressão linear e não linear, muito útil à análise de dados em Ciências Biológicas.

Essas informações são necessárias e suficientes para que você realize as experiências propostas na última unidade, quando todas essas habilidades são necessárias ao mesmo tempo. Em cada roteiro, a introdução contém o embasamento necessário para o bom aproveitamento da atividade prática. Se um formalismo mais detalhado ou mais aprofundado for interessante para você, será indicada uma referência bibliográfica extra.

Você pode até acreditar que uma exposição teórica prévia o deixaria preparado para uma melhor compreensão do conteúdo abordado em um experimento, porém a vivência nos laboratórios tem mostrado que, embora aulas expositivas e aulas de laboratório sejam complementares no processo de aprendizagem de um assunto, a sua ordem não tem, necessariamente, que priorizar a exposição teórica antes da atividade prática. A realização do experimento antes da abordagem teórica do conteúdo ressalta os aspectos fenomenológicos, ao envolvê-lo com a aplicação das leis físicas relacionadas, iniciando você no estudo formal do referido conteúdo.

## 2. PROGRAMA DA DISCIPLINA

**Unidade 1: Obtenção e tratamento de dados.** Nessa unidade são enfatizados a atitude e o comportamento em um laboratório de Física, o processo de medição, a expressão de resultados experimentais com avaliação das incertezas envolvidas, análise de gráficos e tabelas, bem como a confecção de um relatório técnico-científico. Para tanto são realizados experimentos envolvendo conteúdos de Mecânica, Eletricidade e Hidrostática.

**Unidade 2: Ajuste de curvas.** Nessa unidade é dado destaque ao cálculo da equação da melhor reta, que se ajusta aos dados experimentais, pelo processo de regressão linear e pelo processo de linearização de curvas. Também é discutido o ajuste de curvas por regressão não linear para os casos de dependências do tipo lei de potência, polinomial, exponencial e logarítmica. Os experimentos envolvem conteúdos de Mecânica e Termodinâmica.

**Unidade 3: Experimentos de maior interesse para as Ciências Biológicas.** Nessa unidade as habilidades adquiridas são utilizadas em atividades experimentais, que abrangem conteúdos de física geral, visando ilustrar e reforçar algumas definições e conceitos físicos de maior interesse para as Ciências Biológicas.

Tabela 1  
Atividades práticas propostas

UNIDADE 1	UNIDADE 2	UNIDADE 3
1. Uso de aparelhos de medida	5. Constante elástica de molas	9. Colisões inelásticas
2. Atrito estático	6. Módulo de flexão de uma haste	10. Umidade do ar
3. Elemento resistivo linear	7. Lei de Newton para o resfriamento	11. Medindo árvores
4. Densidade de um líquido	8. Pêndulo simples	12. Lentes e defeitos da visão
		13. Interferência e difração da luz
		14. Deformação inelástica e processo irreversível

## 3. FUNCIONAMENTO DO LABORATÓRIO

Sugere-se que os alunos trabalhem em duplas, ou, no máximo, em grupos de três estudantes. No entanto, você deverá entregar o seu próprio relatório, pois consideramos que cada um tem de trabalhar sua própria habilidade de confeccionar um relatório técnico-científico. A avaliação será baseada nos relatórios semanais e nas provas, em cada uma das quais você deverá realizar um determinado experimento.

As discussões em grupo são muito instrutivas e produtivas. Evite recorrer ao tutor logo na primeira dúvida. Tente chegar à resposta, e somente depois, se necessário, chame o seu tutor.

A última unidade exigirá que cada grupo de estudantes realize os experimentos numa sequência própria. Os grupos serão nomeados pelo tutor no início do semestre e, nessa unidade, a ordem de execução dos experimentos, para cada grupo, obedecerá à sequência indicada na Tabela 2.

**Tabela 2**  
Sequência dos experimentos nas unidades a ser seguida por cada grupo de alunos

Grupo	1	2	3	4	5	6
Sequência dos experimentos	9, 10, 11 12, 13, 14	10, 11, 9, 13, 14, 12	11, 9, 10, 14, 12, 13	12, 13, 14, 9, 10, 11	13, 14, 12, 10, 11, 9	14, 12, 13, 11, 9, 10

Os detalhes do funcionamento da disciplina e o cronograma serão distribuídos no início do período letivo. Quaisquer dúvidas relacionadas à disciplina poderão ser endereçadas aos tutores locais, numa primeira instância, e, posteriormente, aos coordenadores do curso.

#### 4. RECOMENDAÇÕES GERAIS AOS ALUNOS

1. O uso do material didático desta disciplina é imprescindível a partir da primeira aula.
2. O aluno deverá se inteirar, a partir da primeira aula, das instalações do laboratório, bem como de suas normas de funcionamento.
3. O material do laboratório deve ser usado sempre de maneira adequada.
4. Não é permitido fumar, comer ou beber no laboratório.
5. A bancada deve ser deixada limpa e organizada ao final de cada atividade.
6. Devem ser evitadas conversas em voz alta e assuntos alheios à aula.

#### 5. INSTRUÇÕES PARA ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO TÉCNICO-CIENTÍFICO

A finalidade do relatório é fazer com que o aluno aprenda e/ou aperfeiçoe uma maneira de apresentar corretamente resultados obtidos em um experimento, dentro de uma estrutura adequada, em que estejam presentes as informações relevantes e necessárias ao entendimento do procedimento que foi desenvolvido. O relatório é o “primeiro artigo científico que se escreve”. A redação deve ser feita de forma a permitir que uma pessoa (colega) que não tenha feito o experimento e não conheça o roteiro entenda o que foi feito.

A seguir é sugerida uma sequência razoável para a confecção de um relatório.

a) Título do trabalho

b) Autor(es), turma, local e data

c) Objetivos da experiência

Deve conter uma descrição sucinta do que se pretende verificar e/ou aprender com o experimento.

d) Introdução

Deve ser feita uma breve apresentação do experimento: que fenômeno será estudado, que medidas serão feitas, que relações matemáticas são relevantes. Para tanto, deve-se consultar com antecedência a bibliografia referente ao tema.

e) Parte experimental e discussão

Esse é um dos itens mais relevantes, sendo o corpo do relatório propriamente dito. É aqui que deverão ser descritos o material e os instrumentos utilizados, os procedimentos experimentais, os métodos de medida e os cálculos envolvidos (cálculos intermediários não devem ser apresentados). Deve-se apresentar uma discussão dos resultados obtidos, relacionando-os com os modelos e métodos empregados para sua obtenção. A apresentação dos resultados das medidas realizadas e das grandezas relevantes encontradas deve ser feita de maneira clara (em tabelas e/ou gráficos, quando for o caso), salientando-se os valores obtidos para as grandezas mais relevantes. Sempre que se trabalha com medidas, é de fundamental importância a utilização do número correto de algarismos significativos para expressá-las, assim como a indicação do erro (ou desvio) experimental e das unidades associadas a essas grandezas. É conveniente usar o Sistema Internacional de Unidades. No Anexo A são encontradas informações úteis sobre algumas constantes físicas.

f) Conclusões

É importante que no relatório sejam apresentadas conclusões contendo um sumário do que foi feito e dos resultados finais obtidos, tendo em vista os objetivos iniciais. Uma pergunta que se pode colocar ao redigir a conclusão é: “o que eu aprendi com esse experimento?” Não cabem elucubrações do tipo: “como este experimento vai ser importante para a minha vida”, ou pérolas do gênero.

## 6. CONSIDERAÇÕES PARA A CORREÇÃO DE UM RELATÓRIO

Podemos dividir os erros usualmente cometidos na confecção de um relatório em três níveis: **Erros leves ( $\Delta$ )**, **Erros médios (\*)** e **Erros graves ( $\Theta$ )**. A seguir indicamos como tais erros são considerados na correção, ou seja:

### A) APRESENTAÇÃO DO RELATÓRIO

- ( $\Delta$ ) O relatório apresenta alguma parte ilegível e/ou apresenta erros de linguagem.
- ( $\Delta$ ) Os resultados não foram apresentados em tabelas.
- (\*) O relatório está incompleto (título, objetivos, introdução, procedimentos, discussão, conclusão).
- (\*) Os gráficos não foram apresentados corretamente (escalas adequadas, títulos nos eixos e unidades).
- ( $\Theta$ ) Os procedimentos não foram descritos de forma clara, não revelando o que foi feito (ou foi feita uma cópia do roteiro).
- ( $\Theta$ ) Há erros recorrentes em relação a relatórios anteriores.

### B) PARTE EXPERIMENTAL

- (\*) As medidas não foram apresentadas com seus respectivos erros (estimados ou calculados).
- (\*) As medidas não estão corretas quanto ao número de algarismos significativos e/ou unidades.
- (\*) A quantidade de observações (medidas) foi insuficiente.
- ( $\Theta$ ) Não foram apresentadas todas as medidas e/ou valores de grandezas necessárias.
- ( $\Theta$ ) As medidas estão incorretas (pouco cuidado nas medições ou não se entendeu o que deveria ser feito).
- ( $\Theta$ ) Não foram realizados todos os itens da experiência.

### C) DISCUSSÃO

- (\*) A discussão/interpretação dos resultados está confusa, incompleta ou contraditória.
- (\*) Não foram respondidas todas as questões contidas no roteiro.
- ( $\Theta$ ) Há erros conceituais na discussão/interpretação dos resultados.
- ( $\Theta$ ) Há resultados que não foram explicados e/ou discutidos.
- ( $\Theta$ ) Há algum resultado MUITO diferente do esperado ou muito fora do bom senso, sem uma discussão cuidadosa dos motivos que tenham levado a esse resultado.



# UNIDADE 1

## Obtenção e tratamento de dados

### Objetivos

- Discutir a atitude e o comportamento esperados do estudante no laboratório de Física.
- Expressar resultados experimentais com avaliação das incertezas envolvidas e com a notação adequada.
- Analisar gráficos e tabelas.
- Elaborar relatórios técnico-científicos.



## Medidas e resultados em experimentos

### Objetivos

- Aprender a se comportar diante de um experimento envolvendo coleta e análise de dados em Física.
- Aprender a realizar medidas e expressar corretamente seus valores e respectivas incertezas.

### 1.1 ATITUDE E COMPORTAMENTO

---

A primeira parte da disciplina Física Experimental tem o objetivo de introduzir você nas técnicas de obtenção, tratamento e análise de dados em experimentos de Física, bem como discutir a apresentação de resultados na forma de um relatório técnico-científico. Pretende-se que você adquira e desenvolva um conjunto de atitudes consideradas adequadas frente a problemas experimentais, dando-se ênfase à utilização de instrumentos de medida, ao cuidado na aquisição de dados, à atenção com as incertezas nas medidas diretas e indiretas, aos métodos de tratamento numérico de dados e à apresentação final dos resultados. Os recursos computacionais devem ser considerados parte integrante do laboratório e devem ser utilizados sempre que possível – em particular, na construção e análise de gráficos.

Para tanto é imprescindível que se elabore uma sequência de trabalho. De início, deve-se ter clareza sobre o problema que se pretende estudar, sendo fundamental que se consiga elaborar os objetivos pretendidos. Antes de se realizar propriamente o experimento, você deve preparar o material necessário à sua montagem – equipamentos e instrumentos, ferramentas de cálculo e tratamento de medidas. Após a determinação das etapas a serem desenvolvidas e da maneira de desenvolvê-las, ou seja, após se estabelecer o procedimento a ser seguido, passe à sua execução. Geralmente, a obtenção de informações é feita através da realização de um conjunto de medidas de grandezas relacionadas direta ou indiretamente com o fenômeno em questão.

O conjunto de dados coletados passa por uma análise, devendo, então, ser preparado para apresentação – tabelas, gráficos, tratamento matemático. Após essa parte inicial de experimentação, é fundamental que se faça uma interpretação dos resultados e uma análise crítica de tudo o que foi feito para se chegar às conclusões apresentadas. O registro desse conjunto de atividades é feito na forma de um relatório, que tem de ser suficientemente claro e completo para permitir que uma pessoa que o leia compreenda o que foi feito, como, por que, e qual a relevância dos resultados encontrados.

## 1. 2 MEDIDAS E RESULTADOS EM EXPERIMENTOS

---

Na sequência deste texto será apresentado um resumo da terminologia e das regras relativas à avaliação e à expressão dos resultados de medidas. No que segue serão discutidas as incertezas de medição. Também serão apresentados processos de análise de resultados, com tratamento gráfico e métodos numéricos de ajustes de curvas. Pretende-se, aqui, fornecer informações básicas para a abordagem de problemas experimentais simples, nos níveis dos experimentos contidos neste livro, em que as incertezas nos resultados são originadas apenas dos procedimentos de medidas e dos dados obtidos. Optou-se pela apresentação de métodos simplificados, mas que, ainda assim, satisfazem os propósitos gerais do livro.

### 1.2.1- O significado de uma medida e sua incerteza

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra, de mesma natureza, escolhida como unidade. O resultado dessa comparação, denominado medida da grandeza, contém as seguintes informações: *o valor da grandeza, a precisão da medição* - expressa pelo número de algarismos significativos e pela incerteza – e *a unidade*. No Brasil, o sistema legal de unidades é o SI – Sistema Internacional –, em que são definidos padrões para comprimento, massa, tempo e outras unidades básicas (ver Anexo A).

Toda medida está sujeita a incertezas que podem ser devidas ao processo de medição, às características dos equipamentos utilizados e às habilidades e limitações do operador. É importante expressar o resultado de uma medida de uma forma que outras pessoas o entendam e saibam com que confiança ele foi obtido. Ao se expressar um resultado experimental, a incerteza dá o indicativo quantitativo de sua precisão.

A menor graduação de um instrumento representa o menor valor que ele é capaz de medir com confiança. Por exemplo, não faz sentido querer medir o diâmetro de um fio de cabelo usando uma régua graduada em milímetros; a maior precisão que se pode ter de uma medida realizada com essa régua é uma precisão de milímetro, podendo-se ainda estimar o valor entre duas divisões da escala.

Ao se medir o diâmetro  $d$  de uma moeda de 1 Real com uma régua graduada em milímetros, uma pessoa pode escrever  $d = 27,2$  mm. Aqui o valor numérico da grandeza é 27,2, e a unidade é o milímetro; esse resultado tem 3 algarismos significativos, sendo que o último é incerto ou duvidoso – em geral, escreve-se um resultado com apenas um algarismo duvidoso. Essa pessoa poderia querer escrever seu resultado usando outra unidade de comprimento, como por exemplo, o metro; nesse caso ela deveria escrever  $d = 0,0272$  m =  $2,72 \times 10^{-2}$  m. Em ambos os casos, o resultado tem 3 algarismos significativos, com um duvidoso, e com a precisão na casa dos décimos de milímetro. Ou seja, o simples fato de mudar a unidade escolhida para descrever um resultado não pode alterar a sua precisão. Os algarismos “zero” que aparecem antes do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos; depois, sim. Sendo assim, não é correto escrever  $d = 27,20$  mm, pois, nesse caso, teríamos 4 algarismos significativos com o algarismo duvidoso sendo o zero; nessa situação o resultado expressaria uma precisão – centésimo de milímetro – que a régua não tem! Poder-se-ia dizer que numericamente é “a mesma coisa”, mas do ponto de vista científico não é: não se pode alterar a precisão de um resultado acrescentando algarismos significativos a ele.

**ATIVIDADE 1.1)** Meça o diâmetro de uma moeda de 10 centavos com uma régua milimetrada e expresse o resultado com o número correto de significativos. Indique o algarismo duvidoso.

-----  
 -----

### 1.2.2- Medidas diretas e indiretas

No exemplo acima o diâmetro da moeda foi obtido com uma medida direta usando uma régua milimetrada. O perímetro  $p$  da moeda de 1 Real pode ser calculado a partir da medida do seu diâmetro usando a relação  $p = 2\pi r$ , sendo  $r$  o raio da moeda, e obtendo-se  $p = 85,5$  mm. Pode-se dizer que foi feita uma medida indireta do perímetro da moeda. Seria possível medir diretamente o perímetro da moeda utilizando-se uma fita métrica flexível, mas não foi esse o caso. Outra grandeza que poderia ser encontrada a partir da medida do diâmetro da moeda é a área da sua face,  $S = \pi r^2$ . Assim, teríamos  $S = 581$  mm<sup>2</sup>, que é a área da face da moeda, obtida indiretamente.

**ATIVIDADE 1.2)** Para reforçar essas ideias utilize uma régua milimetrada ao medir a espessura de várias folhas de seu caderno. Obtenha **indiretamente** o valor da espessura de uma folha. Utilizando um micrômetro faça uma **medida direta** da espessura de uma folha. Compare os valores encontrados. **Pergunte a seu tutor como utilizar corretamente um micrômetro!**

-----  
 -----  
 -----

### 1.2.3- Valor mais provável

O valor do diâmetro da moeda apresentado é o resultado de uma única medida feita por uma única pessoa. É possível, e provável que outras pessoas encontrem valores ligeiramente diferentes. Você mesmo, ao realizar a medida várias vezes, pode encontrar um conjunto de valores diferindo entre si, distribuídos em torno de um determinado valor. Em situações desse tipo, o que se faz comumente é encontrar o valor médio e utilizá-lo como o *valor mais provável* para a grandeza. Suponha que quatro medidas do diâmetro  $d$  da moeda tenham fornecido os valores 27,2 mm; 27,0 mm; 27,2 mm e 27,1 mm; nesse caso o valor numérico mais provável seria  $d = 27,125$  mm. (**Atenção:** por enquanto, foi apresentado apenas o valor numérico; a maneira de se apresentar o resultado correto, considerando-se o número de algarismos significativos e a incerteza, que será apresentada nas próximas seções.) Observe que nesse caso foi feita uma média aritmética simples para se encontrar o valor mais provável. Há situações em que são utilizados métodos estatísticos mais complexos; alguns casos serão apresentados nas próximas aulas.

**ATIVIDADE 1.3)** Consiga duas folhas de papel A4. Corte uma delas ao meio e descarte uma das metades. Faça uma bolinha com a folha inteira e outra bolinha com a metade restante. Utilizando um paquímetro meça o diâmetro de cada uma delas em cinco posições diferentes. Anote os resultados e expresse o valor mais provável do diâmetro de cada bolinha. **Pergunte a seu tutor como utilizar corretamente um paquímetro!**

## 1.3 INCERTEZA, PRECISÃO E EXATIDÃO

### 1.3.1- Erro de leitura e desvio médio em medidas diretas

Repetindo-se a medida de uma grandeza várias vezes, pode acontecer que sejam encontrados valores diferentes. As flutuações podem ser devidas tanto à habilidade do operador quanto ao instrumento utilizado, ao método empregado, às dificuldades intrínsecas ao processo etc. Elas podem ocorrer de maneira sistemática ou aleatória. As primeiras, chamadas também de *erros sistemáticos*, são devidas a problemas de calibração ou fabricação de um aparelho ou a um erro de procedimento; quando acontece esse tipo de erro

os valores encontrados nas medidas são afetados sistematicamente “para mais” ou sistematicamente “para menos”. As flutuações aleatórias, ou *erros aleatórios*, também chamados erros estatísticos, afetam desordenadamente a medida, às vezes para mais, às vezes para menos. A flutuação aleatória é intrínseca a qualquer processo de medida.

Quando se realiza uma única medida de uma grandeza, a incerteza pode ser encontrada usando-se diferentes procedimentos, mas é sempre importante usar o bom senso. Uma regra amplamente difundida é a de que a incerteza de uma medida isolada (erro de leitura) deve ser a metade da menor divisão da escala do instrumento de medida. Por exemplo, para se medir a largura  $l$  de uma folha de papel A4, com uma régua de 300 mm, alguém poderia considerar como incerteza a metade de uma unidade correspondente à menor divisão, ou seja, 0,5 milímetro. Assim, a medida da largura da folha seria escrita como  $l = (211,5 \pm 0,5)$  mm. O resultado escrito dessa maneira indica que há uma incerteza de 0,5 mm na determinação da largura da folha. Entretanto, se essa régua for usada para medir altura da porta da sala de aula, é claro que a incerteza não mais poderá ser de 0,5 mm. O procedimento de posicionar a régua várias vezes para completar a medida eleva muito a incerteza, que poderá ser da ordem de centímetro. **Portanto, essa regra, tão difundida, de que a incerteza é a metade da menor divisão da escala deve ser usada com muito cuidado, sendo poucas as vezes em que ela pode ser aplicada corretamente.**

Quando se usa, por exemplo, um voltímetro analógico ou qualquer instrumento com ponteiro, tem-se que prestar atenção se a leitura é estável ou se o ponteiro oscila em torno de um valor. Se o aparelho indicar um valor fixo, pode-se considerar como incerteza a própria precisão do instrumento ou, no caso de não se ter essa informação, usar uma unidade da menor divisão da escala utilizada. Se houver oscilação, é mais razoável calcular a incerteza a partir dos limites dessa oscilação: o resultado de uma medida poderá ser qualquer valor dentro da faixa de oscilação. No caso de aparelhos digitais, pode acontecer de o resultado se apresentar sem flutuações ou se apresentar oscilando. A avaliação do desvio deverá, então, ser feita como no caso anterior.

Frequentemente é possível e aconselhável realizar várias medidas da mesma grandeza para se encontrar um resultado mais preciso. Quando se realizam  $N$  medidas de uma mesma grandeza, deve-se encontrar o seu valor médio – o qual será *o valor mais provável* – e tomar como incerteza a média dos valores absolutos das diferenças entre o valor mais provável e cada valor individual das  $N$  medidas. O exemplo a seguir ilustra uma situação desse tipo.

**EXEMPLO DE CÁLCULO DO VALOR MAIS PROVÁVEL**

Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda  $t$ , pode-se calcular a altura  $h$  a partir da relação cinemática  $h = \frac{1}{2} g t^2$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo, e os valores  $t_i$  obtidos em oito medidas estão mostrados na Tabela 1.1.

A dispersão dos valores, entre 1,03 s e 1,31 s, se deve à dificuldade intrínseca do processo particular de medida e ao fato de que a precisão do cronômetro (centésimo de segundo) é bem maior do que a capacidade das pessoas de medir tempo com tal instrumento.

**Tabela 1.1**  
Valores obtidos para o tempo de queda de uma pedra do alto de uma cachoeira

$I$	$t_i$ (s)
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

Para encontrar o valor mais confiável para a altura  $h$  deve-se, então, usar o valor mais provável de tempo  $\langle t \rangle$  e o respectivo desvio padrão da média<sup>1</sup>  $\Delta t$ ; numericamente teremos:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i = \frac{1}{8} (1,30 + 1,09 + 1,13 + 1,27 + 1,18 + 1,31 + 1,24 + 1,15) \text{ s} = 1,2088 \text{ s}$$

$$\Delta t = \left[ \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[ \frac{1}{8(8-1)} (0,091^2 + (-0,119)^2 + (-0,179)^2 + 0,061^2 + (-0,029)^2 + (0,101)^2 + 0,031^2 + (-0,059)^2) \right]^{1/2} = 0,036.$$

Usando o critério de se escrever a incerteza com um algarismo significativo, a resposta correta para o resultado encontrado para o tempo de queda é:

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t = (1,21 \pm 0,04) \text{ s}.$$

Utilizando-se esse resultado e considerando  $g = (9,784 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$  chega-se ao valor  $h = (7,0 \pm 0,8) \text{ m}$ . A incerteza de 0,8 m foi encontrada empregando processos descritos mais adiante.

Deve-se observar que a repetição da medição de uma grandeza pode melhorar a precisão na sua determinação, mas esta não deve ir além da precisão do instrumento utilizado para medi-la.

1. VUOLO, José Henrique. *Fundamentos da teoria dos erros*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 99.

### 1.3.2- Erro absoluto e erro relativo

Nos resultados encontrados anteriormente, estão expressos os valores das grandezas e as respectivas incertezas absolutas. No valor médio do tempo obteve-se uma incerteza de 0,04 s em 1,21 s e na determinação da altura a incerteza foi de 0,8 m em 7,0 m. É muito comum e muito útil expressar resultados da incerteza em valores relativos,  $\Delta t / \langle t \rangle = 0,058$ , no caso do tempo, e  $\Delta h / \langle h \rangle = 0,117$ , no caso da altura. Uma maneira de indicar mais claramente a precisão de um resultado é expressar a incerteza relativa em termos percentuais. Para a altura da cachoeira ela é aproximadamente 6% para o tempo e aproximadamente 12% para a altura. Comparando as incertezas relativas, pode-se ver qual grandeza foi determinada com maior precisão.

Ao escrever o valor de uma grandeza com a sua respectiva incerteza, indica-se um intervalo de valores aceitáveis para ela. O valor mais provável de tempo  $\langle t \rangle$  e o respectivo desvio  $\Delta t$  definem um intervalo  $[\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]$ , tal que a probabilidade de uma observação estar nesse intervalo é de 68%. Isso quer dizer que, se o número de medidas for muito grande, 68% das medidas estarão compreendidas naquele intervalo. Desse modo, o valor de  $\Delta t$  é uma estimativa da precisão das medidas.

### 1.3.3- Precisão e exatidão

A distinção entre precisão e exatidão é facilmente exemplificada pela Figura 1.1, que representa dois conjuntos de medidas da posição do centro de um círculo. Note que no desenho da esquerda, a precisão é ruim, pois os resultados das medidas encontram-se espalhados em torno do valor médio (determinado por meios mais precisos e mais exatos), mas a exatidão é boa, porque a média encontra-se perto do centro (quadrado preto). No desenho da direita os dados agora apresentam boa precisão, pois encontram-se bem agrupados, mas a exatidão é ruim, visto que na média eles se encontram afastados do valor mais provável.

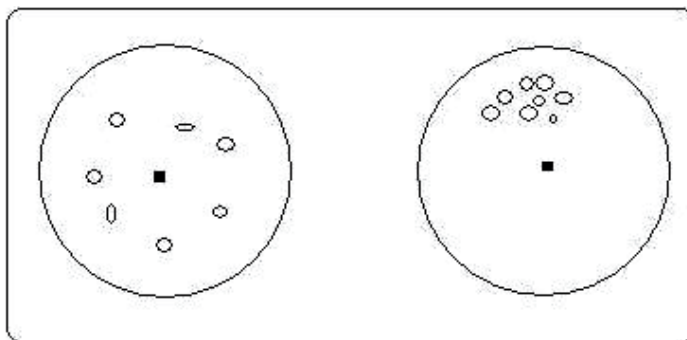


Figura 1.1 - Comparação entre exatidão e precisão. À esquerda um conjunto de medidas com boa exatidão, mas precisão ruim. À direita um conjunto de medidas com pouca exatidão, mas boa precisão.

## 1.4 ATIVIDADE PRÁTICA: USO DE APARELHOS DE MEDIDA

### Introdução

A operação correta de instrumentos de medidas é de vital importância na vida de um cientista. A operação do aparelho pode afetar o resultado obtido. Além disso, mesmo que operado com eficiência, é preciso saber o grau de confiabilidade do aparelho utilizado e como ele se adapta ao experimento a ser executado.

Uma maneira de se obter resultados mais confiáveis é repetir as medidas várias vezes, trabalhar com valores médios e ver como as medidas obtidas se desviam desses valores, obtendo, assim, os erros médios.

### Objetivo

- Operar vários aparelhos de medida, verificando sua precisão e calcular valores médios com o respectivo erro médio.

### MATERIAL UTILIZADO

- Cronômetro; termômetros; fita métrica; bolas de tênis; balança de comparação de massa; balança digital; pesos padrão; aquecedor de água e gelo.

### PROCEDIMENTOS

#### Parte 1-Tempo de queda

Algumas medidas, como por exemplo, as medidas de intervalos de tempo, não se reproduzem, pois dependem de reflexos na partida e na parada de cronômetros. Nesse caso o valor verdadeiro da grandeza

não pode ser conhecido, devendo o resultado ser representado pelo valor mais provável.

- Determine o tempo de queda de uma bola de tênis de uma altura de 1,5 m.
- Faça 10 medidas e calcule o tempo médio e o desvio médio.
- Expresse o resultado da maneira correta ( $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$ ).

### Parte 2 - Determinação de massas

- Utilizando os pesos padrão, verifique a aferição das balanças de comparação de massa e digital.
- Existe algum erro nas duas? Em caso afirmativo, expresse o mesmo utilizando valores percentuais.
- Meça a massa dos dois pesos desconhecidos utilizando as duas balanças.
- Expresse os resultados de maneira correta utilizando o valor da medida e a precisão.

### Parte 3 - Medindo temperaturas

- Utilize os termômetros encontrados sobre a bancada para medir as seguintes temperaturas:

Água + gelo

Água quente

Água à temperatura ambiente

- Faça as medidas com os dois termômetros.
- Expresse os resultados de maneira correta, utilizando o valor da medida e a precisão.



## Propagação de erros

### Objetivos

- Calcular a incerteza de grandezas medidas indiretamente.
- Elaborar seu primeiro relatório técnico-científico.

### 2.1 PROPAGAÇÃO DE ERROS

Uma medida é indireta quando é obtida a partir de expressões matemáticas que a relacionam com outras grandezas medidas diretamente. De maneira geral, uma grandeza  $f$  será função de outras grandezas  $x, y, z, t$  etc., cada uma com seu respectivo erro  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  etc., ou seja,

$$f = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, t \pm \Delta t, \dots)$$

Ao se expressar o resultado de  $f$ , obtido indiretamente a partir de cálculos, é importante apresentar qual é a incerteza associada a esse resultado, ou seja, qual é a consequência da propagação das incertezas. A seguir é apresentado um exemplo que ilustra uma situação desse tipo.

Um corpo se desloca em linha reta com aceleração constante, de tal forma que a distância percorrida  $x$  (em metros) varia com o tempo  $t$  (em segundos) de acordo com a equação

$$x = 5m/s^2 t^2$$

Coloca-se a seguinte questão: após um tempo medido  $t = (7,5 \pm 0,4)$  s, qual a distância percorrida pelo corpo? A resposta trivial para a questão é  $x = 281,25$  m. Entretanto, essa resposta está incompleta e incorreta. Considerando que a medida de tempo tem uma incerteza de  $\pm 0,4$  s, o valor calculado da distância deverá levar a incerteza em conta, então, qual incerteza  $\Delta x$  deve ser atribuída à distância calculada  $x$ ? Para responder a essa questão, será dada aqui uma apresentação simples de propagação de incertezas. Existem várias maneiras de acompanhar a propagação dos erros em medidas indiretas; ilustraremos aqui dois métodos.

### 2.1.1- Método dos valores limite

Uma maneira de se estimar a incerteza de uma grandeza  $f$  obtida indiretamente é calculando os valores limites que  $f$  pode assumir a partir dos valores máximos  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$ , ... e mínimos  $x - \Delta x$ ,  $y - \Delta y$ , ... das grandezas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ...

#### EXEMPLO DO MÉTODO DOS VALORES LIMITE

Em um experimento de movimento retilíneo com aceleração  $a$  constante, uma partícula percorre uma distância  $d$ , em um tempo  $t$  tal que

$$a = \frac{2d}{t^2}$$

Foram medidos dois valores para a distância e o tempo com incertezas  $\Delta d$  e  $\Delta t$ , respectivamente, ou seja,  $(d \pm \Delta d)$  e  $(t \pm \Delta t)$ , encontrando-se  $(12,0 \pm 0,4) \text{ m}$ , e  $(4,0 \pm 0,2) \text{ s}$ . Então, os valores limite para a aceleração serão

$$a_{\text{máx}} = \frac{2(d + \Delta d)}{(t - \Delta t)^2} = 2 \times (12,4 \text{ m}) / (3,8 \text{ s})^2 = 1,7175 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{mín}} = \frac{2(d - \Delta d)}{(t + \Delta t)^2} = 2 \times (11,6 \text{ m}) / (4,2 \text{ s})^2 = 1,3152 \text{ m/s}^2$$

O valor médio da aceleração (ainda sem considerar o número correto de algarismos significativos) será

$$a = \frac{a_{\text{máx}} + a_{\text{mín}}}{2} = (1,7175 + 1,3152) / 2 = 1,5163 \text{ m/s}^2$$

e a incerteza em  $a$  sendo dada por

$$\Delta a = \frac{a_{\text{máx}} - a_{\text{mín}}}{2} = (1,7175 - 1,3152) / 2 = 0,2 \text{ m/s}^2$$

O valor para a aceleração deverá ser expresso como

$$a = (1,5 \pm 0,2) \text{ m/s}^2 \quad \text{ou} \quad 1,5 \text{ m/s}^2 \text{ com } 13\% \text{ de incerteza.}$$

Fazendo o cálculo da incerteza propagada, tem-se uma ideia de quão sensível à incerteza de cada uma das variáveis é o resultado. Nesse exemplo, a incerteza no valor da aceleração é mais sensível à incerteza na medida de tempo – dependência com o quadrado – do que o é à incerteza na medida de distância – dependência linear.

### 2.1.2 - Método baseado no cálculo diferencial

A maneira formal de calcular a propagação de incertezas em medidas indiretas é baseada no cálculo diferencial. Aqui você até poderia dizer que um biólogo não tem disciplinas de cálculo diferencial e, portanto, seria impossível aprender a calcular a incerteza desta forma. Vamos tentar convencê-lo de que, apesar de o cálculo diferencial estar fora do escopo desta disciplina, é possível que você tenha uma ideia do método e possa usá-lo adequadamente. Utilizaremos um processo mais ou menos intuitivo para ilustrar esse método.

A Figura 2.1 mostra o gráfico da distância percorrida  $x$  em função do tempo  $t$ . Considere que as medidas individuais de tempo foram todas tomadas com a mesma incerteza  $\Delta t = \pm 0,4$  s.

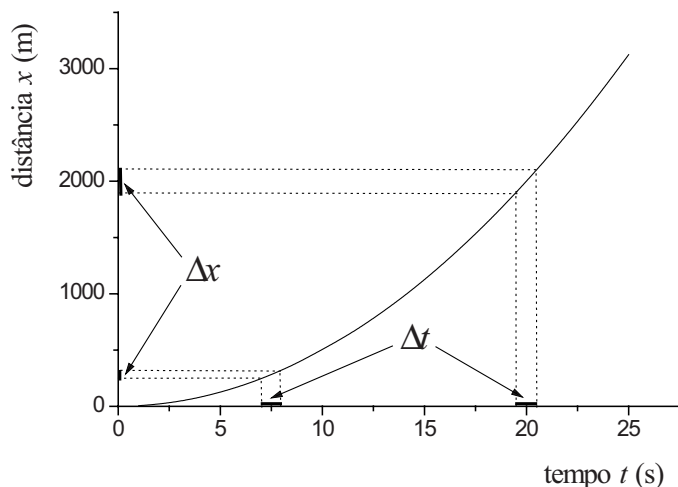


Figura 2.1 - Gráfico da distância  $x$  em função do tempo  $t$  para  $x = 5t^2$ .

Então, em tempos diferentes, por exemplo,  $t_1 = 7,5$  s e  $t_2 = 20,0$  s, a mesma incerteza  $\Delta t$  resulta em incertezas bastante diferentes nos valores correspondentes de distâncias, conforme se vê na Figura 2.1. Quanto maior a inclinação da curva, mais significativa é a consequência da incerteza da variável tempo para a função distância.

Essa ideia pode ser estendida aos casos em que a grandeza a ser determinada depende de diversas variáveis, ou seja, depende da medida de várias outras grandezas com suas respectivas incertezas. Imagine uma função  $f$  que é dependente de  $x, y, z, t$  etc. Essas variáveis são grandezas medidas, logo, cada uma delas tem uma incerteza experimental  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$  etc e

$$f = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, t \pm \Delta t, \dots)$$

$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + \dots}$  Para encontrar a incerteza  $\Delta f$  no valor da função  $f$ , podemos utilizar as regras descritas no Quadro 2.1.

### Quadro 2.1

#### Regras para propagação das incertezas

- 1) Se  $f$  é **soma** ou **subtração** de grandezas  $x, y, z, \dots$  então  
 $\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + \dots}$  (a incerteza absoluta em  $f$  é a soma das incertezas absolutas das grandezas  $x, y, z, \dots$ ).
- 2) Se  $f$  é a **multiplicação** de uma grandeza  $x$  por uma constante  $k$ , então  
 $\Delta f = k\Delta x$  (a incerteza absoluta em  $f$  é  $k$  vezes a incerteza absoluta da grandeza  $x$ ).
- 3) Se  $f$  é a **divisão** de uma grandeza  $x$  por uma constante  $k$ , então  
 $\Delta f = \Delta x / k$  (a incerteza absoluta em  $f$  é a incerteza absoluta da grandeza  $x$  dividida por  $k$ ).
- 4) Se  $f$  é a **multiplicação** ou **divisão** de grandezas  $x, y, z, \dots$ , então  
 $\Delta f/f = \Delta x/x + \Delta y/y + \Delta z/z + \dots$  (a incerteza relativa em  $f$  é a soma das incertezas relativas das grandezas  $x, y, z, \dots$ ).
- 5) Se  $f$  é proporcional à **potência**  $n$  de uma grandeza  $x$ , então  
 $\Delta f/f = n \Delta x/x$  (a incerteza relativa em  $f$  é  $n$  vezes a incerteza relativa da grandeza  $x$ ).

Use o módulo das incertezas para garantir sempre um valor positivo para o erro  $\Delta f$ , que determinará a faixa de valores possíveis de  $f$ .

Veja então como as regras acima podem ser aplicadas no cálculo da propagação do erro para o exemplo da seção anterior (equação 2.1). Ou seja, como se pode encontrar o erro  $\Delta x$  a partir do erro  $\Delta t = 0,4$  s.

Como  $x = 5 \text{ m/s}^2 t^2$  você pode ver facilmente que  $x$  é proporcional à potência 2 da grandeza  $t$ . Logo, pela Regra 5, tem-se que

$$\Delta x/x = (2 \Delta t/t)$$

$$\Delta x = (2 \Delta t/t) x (5 \text{ m/s}^2 t^2)$$

$$\Delta x = 10 \text{ m/s}^2 t \Delta t$$

e, conseqüentemente,

$$\text{para } t_1 \Delta x = (10 \times 7,5 \times 0,4) \text{ m} = 30 \text{ m} = (3 \times 10) \text{ m}$$

$$\text{para } t_2 \Delta x = (10 \times 20,0 \times 0,4) \text{ m} = 80 \text{ m} = (8 \times 10) \text{ m}.$$

Logo, os valores para as distâncias serão

$$x_1 = 5 \text{ m/s}^2 t_1^2 = 5 \text{ m/s}^2 \times 56,25 \text{ s}^2 = 281,25 \text{ m}$$

$$x_2 = 5 \text{ m/s}^2 t_2^2 = 5 \text{ m/s}^2 \times 400 \text{ s}^2 = 2000 \text{ m}$$

e os resultados corretos, usando-se apenas um algarismo significativo para a incerteza, deverão ser escritos como

$$x_1 = (2,8 \pm 0,3) \times 10^2 \text{ m}$$

$$x_2 = (2,00 \pm 0,08) \times 10^3 \text{ m}$$

Foi necessário usar potência de dez para expressar o resultado corretamente, pois os números 30 e 80 têm dois algarismos significativos. Na forma de incertezas relativas, os resultados acima seriam  $x_1 = 2,8 \times 10^2 \text{ m}$  com uma incerteza de 11%, e  $x_2 = 2,00 \times 10^3 \text{ m}$  com uma incerteza de 4%.

**Deve-se observar que o número de algarismos significativos do valor da grandeza tem que respeitar a precisão dada pela incerteza absoluta calculada a partir da incerteza percentual; por exemplo, NÃO É CORRETO escrever  $x_1 = (2,81 \times 10^2 \text{ m} \pm 11\%)$ .**

### EXEMPLO DE CÁLCULO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Como um exemplo de aplicação de propagação de incertezas em uma grandeza calculada através de outras duas ou mais grandezas, considere-se a situação em que foram medidas a massa  $m$  e a velocidade  $v$  de um carro e deseja-se calcular qual é sua energia cinética  $E$ . Sejam  $m = (1,2 \pm 0,1) \times 10^3 \text{ kg}$ , e  $v = (20,0 \pm 0,5) \text{ m/s}$ .

A energia cinética  $E$  é dada pela fórmula  $E = \frac{1}{2} m v^2$ . Pelas regras 4 e 5 a incerteza em  $E$  será:

$$\Delta E / E = \Delta m / m + 2\Delta v / v$$

Efetuando-se os cálculos com os valores de  $m$  e  $v$  tem-se  $2 \times 10^4 \text{ J}$  para a incerteza e  $24 \times 10^4 \text{ J}$  para o valor da energia cinética e, então, o resultado escrito corretamente é

$$E = (24 \pm 2) \times 10^4 \text{ J} = (2,4 \pm 0,2) \times 10^5 \text{ J}$$

## 2.2 ATIVIDADE PRÁTICA: ATRITO ESTÁTICO

### Introdução

Quando duas superfícies deslizam ou tendem a deslizar uma sobre a outra, atua uma força de atrito. Quando se aplica uma força a um objeto, geralmente uma força de atrito reduz a força resultante e

a consequente aceleração. O atrito é causado pelas irregularidades nas superfícies em contato mútuo e depende dos tipos de materiais e da força que os mantêm em contato. Mesmo as superfícies que aparentam ser muito lisas têm irregularidades microscópicas que se opõem ao movimento.

O sentido da força de atrito é sempre oposto ao do movimento relativo. Um objeto escorregando para baixo numa rampa experimenta um atrito que aponta rampa acima; um objeto que escorrega para a direita experimenta um atrito direcionado para a esquerda. Assim, se um objeto deve ser movimentado com velocidade constante, então deve-se aplicar sobre ele uma força igual e oposta ao atrito para que as duas se anulem mutuamente. Uma força resultante nula não proporciona aceleração alguma.

Não existe atrito sobre um caixote que está em repouso sobre um piso. Mas se ele for empurrado horizontalmente, aparecerá o atrito. Se o caixote ainda estiver em repouso o atrito que se opõe ao movimento é o suficiente para cancelar a força aplicada. Se, por exemplo, a força horizontal for  $70\text{ N}$ , o atrito será igual a  $70\text{ N}$ . Se a força for maior, digamos,  $100\text{ N}$ , e o caixote estiver na iminência de deslizar, a força de atrito entre ele e o piso será de  $100\text{ N}$ . Se  $100\text{ N}$  for o máximo que as superfícies podem manter e a força aumentar só mais um pouco, a aderência cederá e o caixote começará a deslizar.

O atrito de deslizamento, denominado atrito cinético, é ligeiramente menor que o atrito estático. A força de atrito é calculada pela expressão

$$F = \mu N \quad (2.1)$$

$N$  é a reação normal, que tem o valor da força de contato entre as duas superfícies;  $\mu$  é o coeficiente de atrito e depende dos dois tipos de superfícies que estão em contato. É importante ressaltar que a força de atrito não depende da área de contato. Se você mudar a área de deslizamento por uma menor, a diferença é que o peso estará concentrado em uma área menor, mas a força de atrito será a mesma. Assim, os pneus extralargos que se veem em alguns carros não fornecem mais atrito; o propósito da maior área de contato é diminuir o aquecimento e o desgaste.

Para um corpo em equilíbrio sobre um plano inclinado, as forças que atuam são o peso e a força de atrito. Devido à inclinação, o peso é decomposto em duas componentes: uma na direção da rampa e outra perpendicular à rampa (Figura 2.2). Deixamos como atividade para você indicar essas componentes na figura.

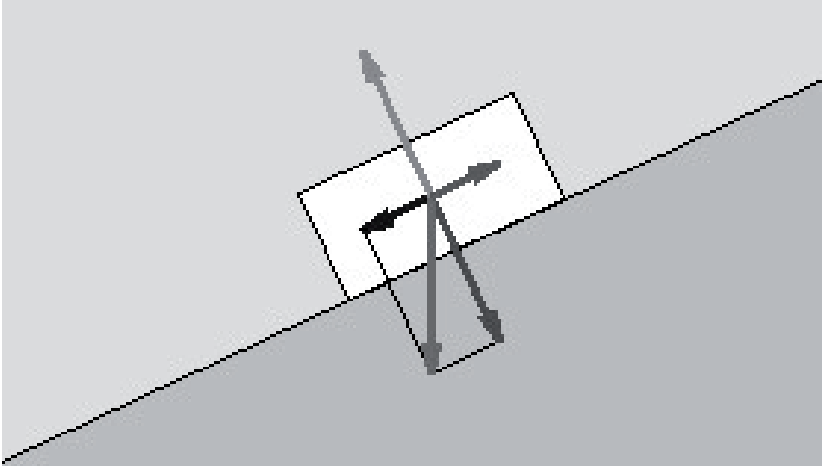


Figura 2.2 - A componente na direção da rampa é denominada  $P_x$ , e a componente perpendicular à rampa,  $P_y$ . Como  $P_y$  mantém o corpo em contato com rampa, a reação normal é igual a  $P_y$ .

Para o corpo em equilíbrio,  $P_x$  deve ser igual à força de atrito. Nessa situação teremos

$$N = P_y = P \cos \theta$$

$$F_{at} = P_x$$

$$\mu N = P \sin \theta$$

$$\mu P \cos \theta = P \sin \theta$$

$$\mu = \operatorname{tg} \theta$$

Na dedução ao lado,  $\theta$  é o ângulo de inclinação do plano e  $\mu$  é o coeficiente de atrito estático.

### Objetivos

- Determinar o coeficiente de atrito estático entre diferentes superfícies.
- Estudar a dependência do coeficiente de atrito estático com a rugosidade, com a área de contato entre as superfícies, e com a força normal.

### MATERIAL UTILIZADO

- Base; transferidor; bloco de metal polido em forma de paralelepípedo; três lâminas de diferentes materiais; quatro objetos com suporte para fixar-se um no outro; e flanela.

### PROCEDIMENTOS

- Fixe uma das lâminas na base e coloque o bloco sobre ela, como mostrado na Figura 2.3.

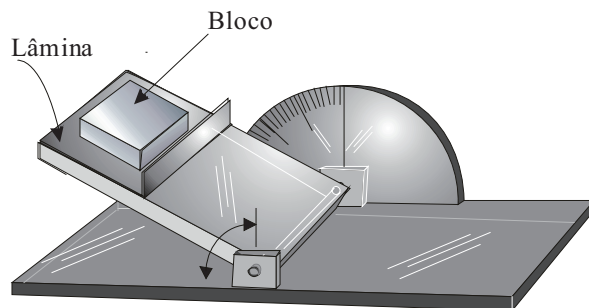


Figura 2.3 - Um bloco é colocado sobre uma superfície plana, que é inclinada até que ele comece a deslizar.

- Incline a base, lentamente, até que o bloco esteja prestes a se mover e meça o valor do ângulo de inclinação.
- Repita esse procedimento algumas vezes e obtenha um valor médio do ângulo de inclinação.
- Determine o coeficiente de atrito estático  $\mu_e$  entre as superfícies do bloco e da lâmina.
- Utilize o método dos valores limite para determinar a incerteza no valor de  $\mu_e$ .
- Repita o procedimento utilizando a mesma face do bloco e as lâminas de diferentes materiais que foram fornecidas.
- Determine os coeficientes de atrito entre a superfície de cada uma delas e a do bloco, com suas respectivas incertezas.
- Verifique se os valores obtidos, comparativamente, correspondem à sua expectativa.
- Em seguida, analise a influência da área de contato entre as superfícies sobre a força de atrito. Para isso, determine o coeficiente de atrito estático entre uma das lâminas e cada uma das três faces de diferentes áreas do bloco. Verifique se o resultado encontrado está de acordo com a equação 2.1.
- Agora, analise a dependência do coeficiente de atrito estático com a força normal à superfície. Para variar essa força, coloque, gradativamente, os objetos de massa conhecida fornecidos sobre a superfície e determine o coeficiente de atrito estático para cada valor da força normal. Verifique se o resultado encontrado está de acordo com a equação 2.1.

Utilizando as instruções contidas na seção 5 das “Informações gerais” elabore seu primeiro relatório.

## Análise de gráficos e tabelas

### Objetivo

- Apresentar o resultado de uma série de medidas na forma de gráficos e tabelas.

### 3.1 CONFEÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS

No primeiro estágio de apresentação de uma série de medidas resultantes de um experimento faz-se uso de tabelas, que, em geral, já são montadas durante o processo de obtenção de dados. O exemplo a seguir ilustra bem um tipo de tabela adequado à maioria dos experimentos feitos nas disciplinas experimentais de Física.

Em um experimento, para se determinar a resistência de um resistor elétrico, aplicam-se nele tensões elétricas,  $V$ , entre 10 V e 50 V, e medem-se as correntes,  $I$ , geradas. A Tabela 3.1 mostra uma forma conveniente de apresentar os valores obtidos:

**Tabela 3.1**  
Valores da tensão  $V$  aplicada no resistor e a corrente  $I$  correspondente

$V (V) \pm 1\%$	$I (10^{-3} A)$
11,3	$22,5 \pm 0,2$
15,8	$31,8 \pm 0,3$
19,5	$40,0 \pm 0,4$
22,7	$44,4 \pm 0,4$
29,1	$59,2 \pm 0,6$
38,4	$76,1 \pm 0,8$
42,3	$83,8 \pm 0,8$
50,0	$99,3 \pm 0,9$

#### Deve-se observar que:

- toda tabela deve ter uma legenda;
- no cabeçalho da tabela, é importante ver a especificação das grandezas que foram medidas, com suas unidades e incertezas, absolutas ou relativas; se cada medida apresentar uma incerteza diferente, deve-se especificá-la após cada uma;
- o número de algarismos significativos das medidas deve ser compatível com as incertezas especificadas.

A construção de gráficos que associem as grandezas medidas em um experimento é bastante importante, pois permite uma visualização rápida do tipo de dependência existente entre essas grandezas. O tipo de gráfico mais comum em trabalhos de Física é aquele que relaciona duas grandezas em escalas lineares. O gráfico a seguir ilustra a relação entre as grandezas tensão e corrente elétrica representadas na Tabela 3.1.

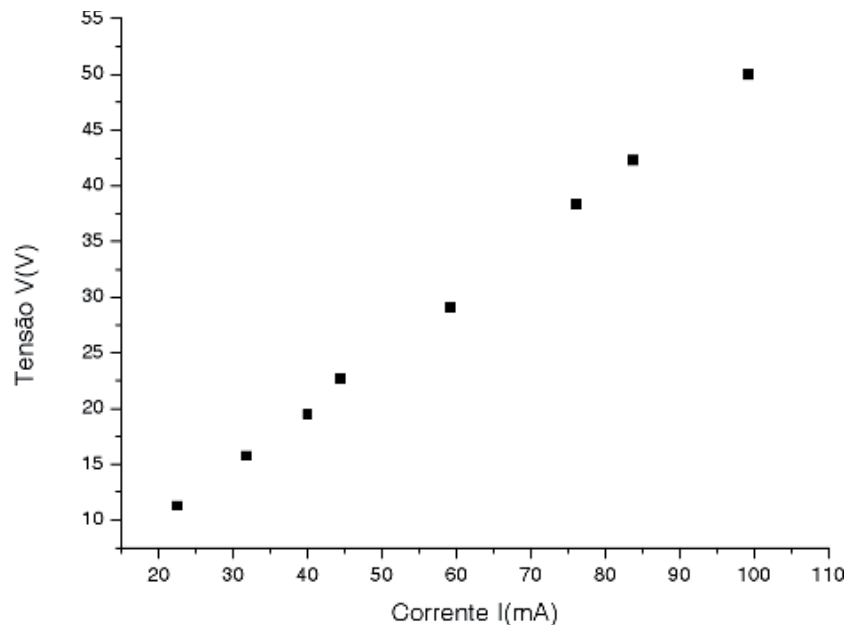


Figura 3.1 - Exemplo de um gráfico: tensão elétrica  $V$  versus corrente  $I$  em um circuito.

Uma observação rápida da Figura 3.1 permite identificar uma relação linear entre as duas grandezas analisadas,  $V$  e  $I$ .

**Deve-se ter atenção para que os gráficos tenham:**

- título e/ou legenda;
- boa utilização do espaço disponível para o traçado do gráfico;
- nome da grandeza em cada eixo com sua respectiva unidade;
- dimensionamento correto da escala (cada divisão das escalas deve ser múltiplo de 1, 2,5, 10...)

Uma comparação entre um gráfico (muito) mal elaborado e outro bem elaborado é dado na Figura 3.2.

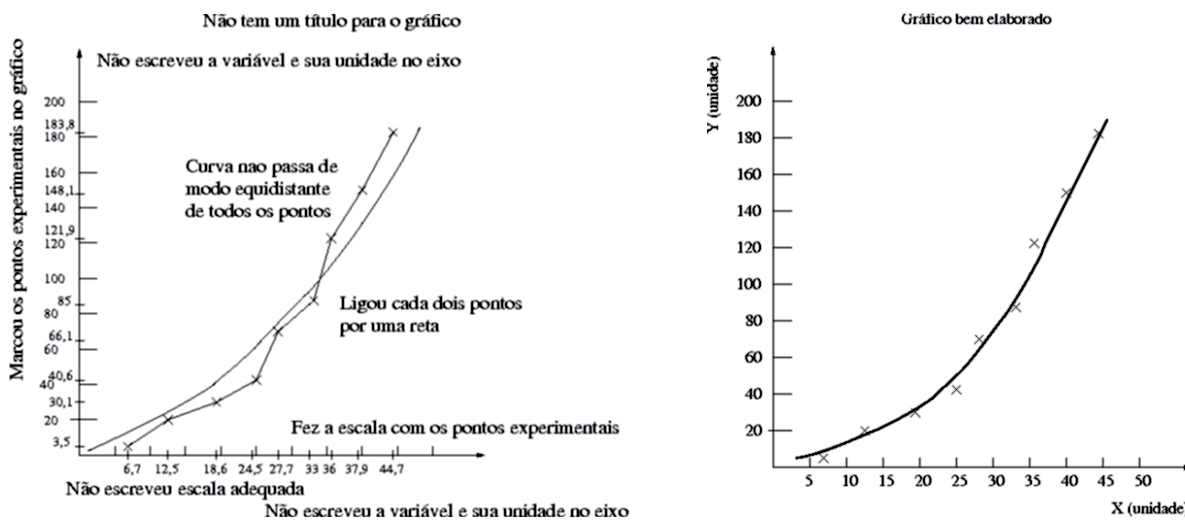


Figura 3.2 - Exemplo de um gráfico mal elaborado (à esquerda). Exemplo de um gráfico bem elaborado (à direita).

Fonte dos dados: MACEDO, Z. S.; VALÉRIO, M. E. G. Apostilas do laboratório de Física. Disponível em: <<http://www.fisica.ufs.br>>.

### 3.2 UTILIZANDO UM MULTÍMETRO

O físico alemão Georg Simon Ohm realizou várias medidas para analisar o comportamento da corrente elétrica  $I$  que passava por um condutor quando submetido a uma diferença de potencial elétrico,  $V$ . Ele observou que para certos valores de  $V$  a corrente elétrica que passava pelo condutor era proporcional à diferença de potencial aplicada. Ou seja,  $V \propto I$ .

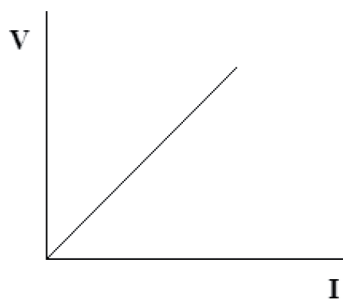


Figura 3.3 - Comportamento de um condutor ôhmico. A corrente  $I$  que passa pelo condutor é diretamente proporcional à diferença de potencial elétrico  $V$  aplicada.

A inclinação do gráfico  $V \times I$  é uma constante que, para diversos materiais, não depende nem da diferença de potencial aplicada nem da corrente que passa pelo condutor. Materiais que apresentam esse comportamento linear são ditos **ôhmicos**, tal que

$$R = \frac{V}{I} = \text{constante}$$

onde  $R$  (a inclinação do gráfico  $V \times I$ ) é a **resistência elétrica** do material. Ou seja, quando se aplica uma diferença de potencial  $V$  em um fio, aparece nele uma corrente elétrica  $I$ , sendo a resistência elétrica  $R$  entre quaisquer dois pontos do condutor dada pelo quociente  $V/I$ .

## UTILIZAÇÃO DE UM MULTÍMETRO

Medidas de tensão, corrente e resistências elétricas são, comumente, feitas com multímetros em que se pode selecionar a função voltímetro, amperímetro e ohmímetro. Os multímetros digitais atuais são instrumentos de boa precisão e de fácil manuseio. Para usá-los com segurança devem ser observadas as seguintes regras básicas:

- escolha, na chave seletora do aparelho, o tipo de medida a ser feita;
- escolha a escala de medida apropriada, caso o aparelho não tenha seleção automática de escala;
- conecte os cabos no multímetro – o conector COM será comum para todos os tipos de medida;
- conecte apropriadamente o aparelho no circuito – em geral, é dado um esquema para ser seguido.

Para se utilizar um multímetro como voltímetro, deve-se ligá-lo em paralelo com o elemento elétrico (Figura 3.4a). Para utilizá-lo como amperímetro, deve-se ligá-lo em série com o elemento elétrico (Figura 3.4b).

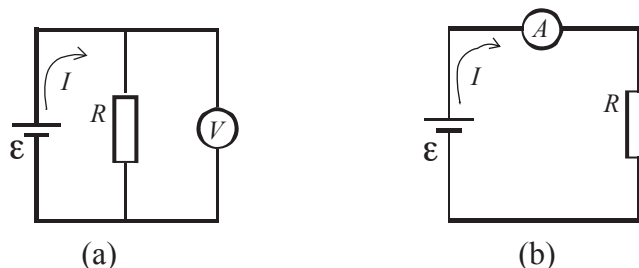


Figura 3.4 - Circuito constituído de uma fonte de tensão elétrica  $\epsilon$ , um resistor  $R$  e um multímetro; em (a), o multímetro, na função voltímetro, está conectado em paralelo com o resistor; em (b), o multímetro, na função amperímetro, está conectado em série com o resistor.

### ATIVIDADE 3.1) Medida da resistência da pele seca e molhada

- Coloque o multímetro na função ohmímetro. Coloque uma das pontas de medição, por exemplo, a preta, na base de um de seus dedos. Coloque agora a outra ponta na junção das duas primeiras falanges e meça a resistência. Mantendo a ponta preta no mesmo lugar, repita a medição da resistência de sua pele até que chegue à ponta de seu dedo. O que aconteceu com o valor da resistência à medida que você foi aumentando a distância entre as pontas de medição do multímetro?
- Experimente agora lambar o seu dedo. Isso mesmo, dê uma boa lambida em seu dedo e repita o procedimento acima. O que aconteceu?

---

### 3.3 ATIVIDADE PRÁTICA: ELEMENTO RESISTIVO LINEAR

---

#### Introdução

É muito comum se encontrarem, em um dado circuito, resistores associados em série e em paralelo. Sabe-se que

- a resistência equivalente  $R_s$ , na associação de dois resistores  $R_1$  e  $R_2$  em série, é dada por  $R_1 + R_2$ ; e
- a resistência equivalente  $R_p$ , capaz de substituir a associação de dois resistores  $R_1$  e  $R_2$  em paralelo, é dada por

$$(1/R_p) = (1/R_1) + (1/R_2).$$

#### Objetivos

- Encontrar o valor da resistência de resistores em circuitos puramente resistivos.
- Praticar a utilização de um multímetro digital.

---

#### MATERIAL UTILIZADO

- Fonte de tensão contínua; multímetro digital; miliamperímetro analógico; resistor  $R_1$  com código de cores; resistor  $R_2$  “desconhecido”; painel para ligações; cabos para conexões; tabela com código de cores e papel milimetrado.

---

#### PROCEDIMENTOS

Determinação da resistência elétrica de resistores.

##### a) Resistência de um resistor

Nesta etapa do experimento, você deverá determinar a resistência de um resistor,  $R_1$ , e sua respectiva incerteza de três maneiras:

- i. identificando o valor da resistência fornecido pelo fabricante, por meio de consulta ao código de cores fornecido no Anexo B;
- ii. fazendo a medida diretamente com o multímetro na função ohmímetro;
- iii. medindo valores de corrente para diferentes tensões aplicadas.

Faça as etapas **i** e **ii** e, em seguida, monte o circuito mostrado na Figura 3.4 para realizar a etapa **iii**.

**Atenção:** Antes de iniciar as medidas, chame o professor para conferir o circuito.

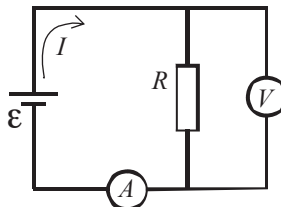


Figura 3.5 - Circuito constituído de uma fonte de tensão  $\varepsilon$ , um resistor  $R$ , um multímetro utilizado como voltímetro  $V$  e um miliamperímetro analógico  $A$ .

- Obtenha pares de valores  $V, I$  variando a tensão no resistor. **Não ultrapasse o limite de corrente estabelecido!** Trace o gráfico  $V \times I$  com os dados obtidos em uma folha de papel milimetrado. Só vale no papel milimetrado!! Se você acha que é fácil...
- Determine a equação da reta que melhor se ajusta a esses pontos. Utilizando o método dos valores limite, especifique o valor da resistência do resistor com sua respectiva incerteza.
- Compare e comente, do ponto de vista de confiabilidade e precisão, os valores da resistência desse primeiro resistor encontrados nos três processos. Indique o melhor resultado para o valor da resistência.

#### b) Associação de resistores em série e em paralelo

- Conecte os dois resistores  $R_1$  e  $R_2$  em série no painel de ligações. Com o multímetro na posição ohmímetro, meça o valor da resistência  $R_s$  do conjunto. Conecte, agora, os resistores em paralelo e meça o valor da resistência  $R_p$  do conjunto.
- Use as equações de associação de resistores para determinar a resistência do resistor “desconhecido”  $R_2$ , com sua respectiva incerteza. Em seguida, meça essa resistência com o ohmímetro. Indique o melhor resultado.

**Utilizando as instruções contidas na seção 5 das “Informações gerais” elabore seu segundo relatório técnico-científico. Discuta com o seu tutor os erros cometidos no primeiro relatório. A partir de agora você deverá sempre entregar um relatório ao final de cada aula.**

## Uso de recursos computacionais

### Objetivo

- Construir e analisar gráficos utilizando recursos computacionais.

### 4.1 ELABORAÇÃO DE GRÁFICOS USANDO RECURSOS COMPUTACIONAIS

Sempre que fazemos um experimento científico obtemos um resultado numérico que representamos em uma tabela, sendo esse resultado “função” da variação de um parâmetro. O parâmetro que variamos é chamado variável **independente** e aquele que medimos, variável **dependente**.

Se os resultados obtidos com as medidas forem representados em um gráfico, a visualização do experimento será muito mais clara e poderemos obter informações importantes do mesmo. Observe o exemplo que é discutido a seguir.

Para averiguar a dependência do tempo de escoamento em relação ao tamanho do orifício, foi escoada, através de orifícios circulares de diferentes diâmetros, relativamente pequenos, a água contida em quatro grandes recipientes cilíndricos de igual tamanho. Para verificar-se a dependência do tempo de escoamento em relação à quantidade de água, verteu-se esse líquido para os mesmos recipientes de três alturas diferentes. Observe a Tabela 4.1.

Tabela 4.1

Exemplo do tempo de escoamento em relação ao tamanho do orifício

Diâmetro do orifício d (cm)	Tempo de Escoamento		
	h = 30 cm	h = 10 cm	h = 4 cm
	t (s)	t (s)	t (s)
1,5	73,0	43,5	26,7
2	41,2	23,7	15,0
3	18,4	10,5	6,9
5	6,8	3,9	2,2

As colunas de tempo de escoamento são para as seguintes alturas de líquido: 30 cm, 10 cm e 4 cm. Observe que em um gráfico é muito mais fácil visualizar o comportamento do fenômeno observado.

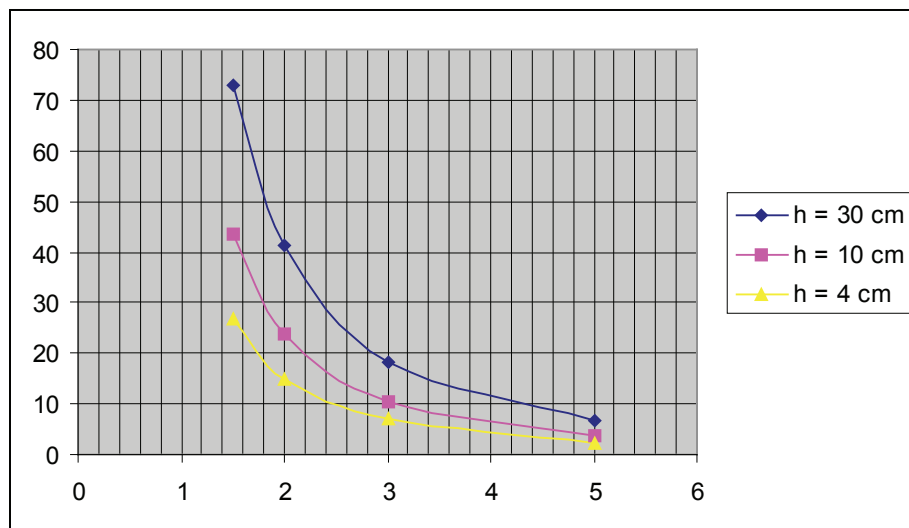


Figura 4.1 - Gráfico do tempo de escoamento em relação ao tamanho do orifício.

O gráfico da Figura 4.1 foi construído utilizando o programa *Excel*, que é prático para fazer traçados simples de gráficos. Dois outros programas muito utilizados são o *Origin* e o *SciDAVis*, esse último gratuito e rodado também em ambiente Linux (plataforma de software livre).

#### 4.2 APRENDENDO A FAZER UM GRÁFICO COM O PROGRAMA *ORIGIN*

No exemplo abaixo iremos utilizar o programa *Origin*, que, além de desenhar os gráficos, nos permite obter informações do mesmo através da determinação da função matemática que descreve o experimento.

1. Abra o *ORIGIN*;
2. Na janela *DATA1* acrescente uma coluna e preencha com os dados:

Tabela 4.2

Exemplo de tempo gasto (coluna A) para percorrer uma determinada distância (coluna B) e a suposta distância ideal (coluna C)

A	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
B	1,40	2,10	2,65	2,86	3,45	4,06	4,40
C	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50

3. Faça o gráfico “distância x tempo” com os dados *DATA1* da seguinte forma:
  - a) escolha *plot* e depois *scatter*;
  - b) transfira tempo para x e altitude para y;
  - c) mude os nomes (dos eixos), *X* para *t(s)* e *Y* para *h(m)*.
4. Explore as opções dos eixos e símbolos.
5. Imprima o gráfico. Um bom gráfico deve apresentar um layout claro e informativo, além de conter as seguintes informações (necessárias para sua interpretação):
 

**Título:** com nome da experiência (e dos alunos, no nosso caso).

**Legenda:** com o nome do gráfico e os parâmetros de ajuste.

**Eixos:** com unidades e algarismos significativos adequados.
6. Faça um novo gráfico utilizando a coluna C em vez da B. Essa coluna representa a distância ideal. Você nota alguma diferença entre os gráficos?
7. Refaça o gráfico da Figura 4.1, apresentando-o de maneira correta, conforme descrito no item 5.

#### 4.3 APRENDENDO A FAZER UM GRÁFICO COM O PROGRAMA *EXCEL*

Observe o exemplo a seguir, que mostra a concentração de etanol no sangue em função do tempo. Vamos construir o gráfico da Tabela 4.3, que mostra os valores da concentração *C* de etanol no sangue, em função do tempo *t*, após a ingestão de etanol:

**Tabela 4.3**

**Exemplo da concentração *C* de etanol no sangue, em função do tempo *t*, após a ingestão de etanol**

<i>C</i> (mg/dl)	134	120	106	93	79	65	50
<i>t</i> (min)	90	120	150	180	210	240	270

Fonte: DURAN, J.E R. *Biofísica: fundamentos e aplicações*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

Siga o seguinte procedimento para criar o gráfico:

1. Abra o programa *Excel* e digite a tabela;
2. Marque as duas colunas e clique no ícone para construção de gráficos (assistente de gráfico).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	90	134								
2	120	120								
3	150	106								
4	180	93								
5	210	79								
6	240	65								
7	270	50								

Figura 4.2 - Exemplo da janela do Excel para entrada dos dados.

- Após esse passo será aberta uma janela para que você escolha o tipo de gráfico. Como não sabemos qual é o tipo de comportamento observado, devemos escolher um gráfico de dispersão com pontos ligados por linhas suaves.



Figura 4.3 - Exemplo da janela do Excel para escolha do tipo de gráfico.

- Escolhido o tipo de gráfico, clique em Avançar. Em seguida, clique em Avançar novamente para que se inicie o processo de edição do gráfico.
- No menu que irá aparecer você pode escolher:
  - No submenu *Linhas de Grade* você pode traçar linhas de grade que lhe darão a referência de onde se encontram os pontos (é mais elegante não fazê-lo, pois os dados já se encontram na tabela, para que a visualização do gráfico não fique poluída!).

- No submenu *Título*, você dará título aos eixos e ao gráfico.
- No submenu *Eixos*, distribuir automaticamente os valores dos eixos *X* e *Y* (não é necessário alterá-lo).
- No submenu *Legenda*, você deve retirar o nome da legenda (que geralmente para uma única sequência de dados é igual ao título do gráfico).
- Não é necessário alterar parâmetros no submenu *Rótulo de Dados*.

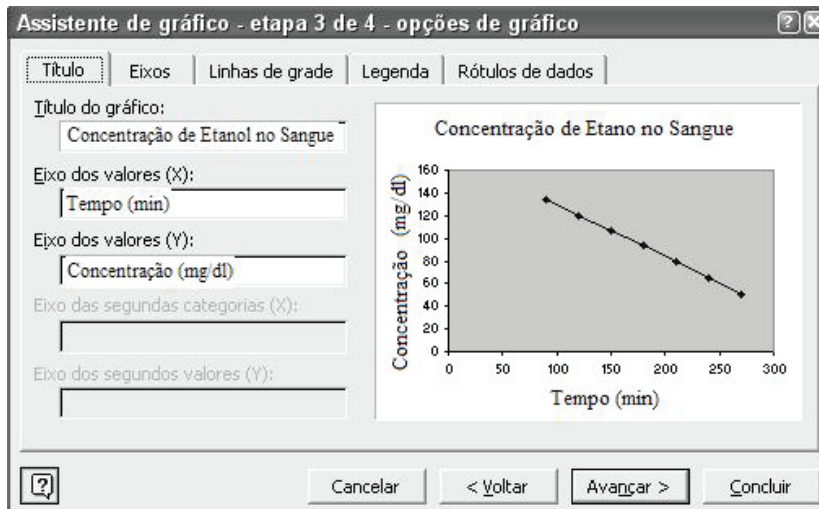


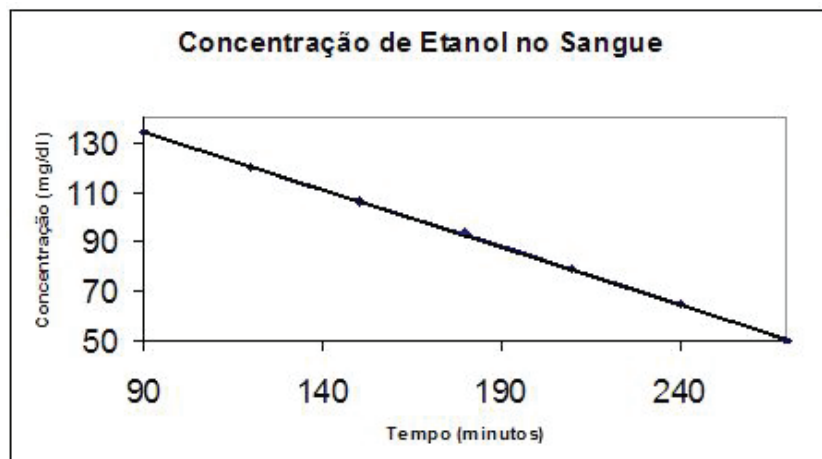
Figura 4.4 - Exemplo da janela do *Excel* para detalhamento do gráfico.

6. Clique em *Avançar* e depois salve o gráfico como um objeto na planilha (opção padrão) para que possa continuar a ser editado e depois copiado para dentro de um documento.

O processo de edição dos eixos se dá através de um duplo clique sobre o eixo *X* ou *Y*. Fazendo isso, abrirá um menu de edição onde você pode mudar a escala (faixa de valores) dos eixos. Por exemplo, coloque os eixos *X* e *Y* começando e terminando nos valores limites da tabela.

Em um gráfico, os eixos *X* e *Y* não precisam se cruzar na origem. Podemos alterar a escala e o ponto de cruzamento para melhorarmos a visualização do fenômeno estudado.

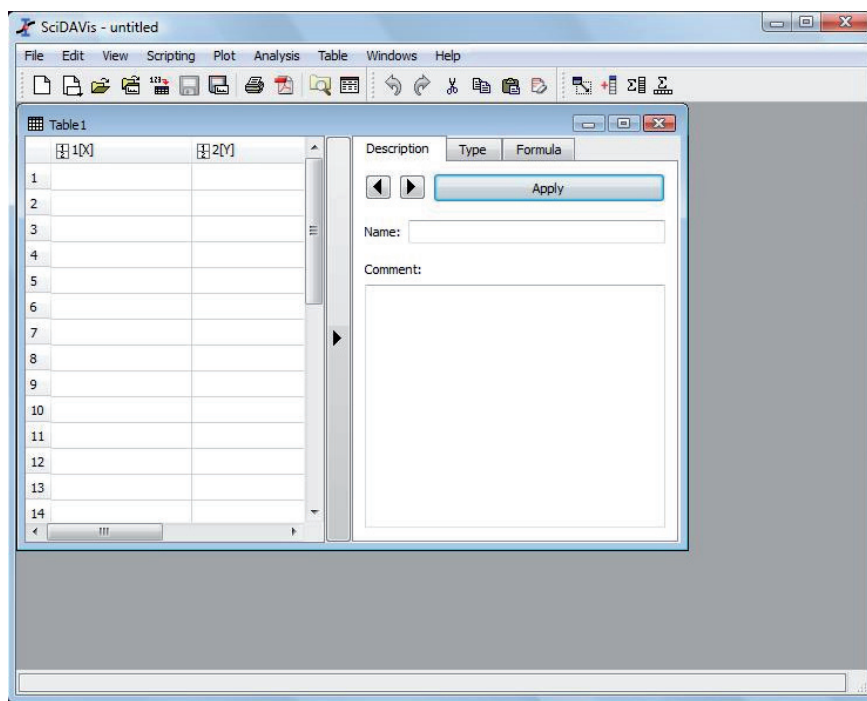
Após essa etapa, seu gráfico deve ter uma aparência semelhante à mostrada abaixo (para economizar toner, você pode mudar a cor de fundo do gráfico para branco. Para tanto basta dar um duplo clique na superfície cinza e escolher “cor nenhuma”!):

Figura 4.5 - Exemplo de gráfico produzido com o *Excel*.

#### 4.4 APRENDENDO A FAZER UM GRÁFICO COM O PROGRAMA *SciDAVis*

O programa *SciDAVis* (<<http://www.scidavis.org>>) é distribuído gratuitamente e funciona tanto no Linux quanto no Windows. A sua vantagem em relação ao *Excel* está na parte de ajuste de curvas e cálculos de incertezas. Na Aula 5 você verá o quanto esse programa é mais versátil do que o *Excel*. Utilizaremos agora os dados da Aula 3 para ensiná-lo a confeccionar um gráfico.

1. Identifique as várias partes das janelas do *SciDAVis*, que segue o esquema padrão de janelas de aplicação/documento representado no esquema seguinte.

Figura 4.6 - Exemplo de janela inicial do *SciDAVis*.

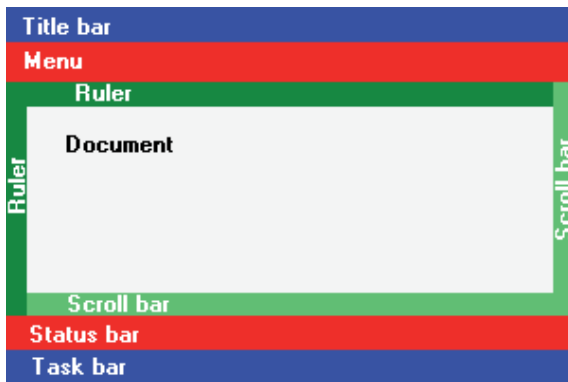


Figura 4.7 - Esquema padrão das janelas de aplicativos.

**Title bar** - é a **Barra de Título**, que, além de informar o nome do programa, fornece acesso às propriedades da janela, como minimização, maximização, redimensionamento, moção etc.



Figura 4.8 - Exemplo de Barra de Título.

Note que ao clicar no símbolo do programa, circulado na imagem abaixo, uma lista em cascata aparecerá com comandos para as propriedades citadas.

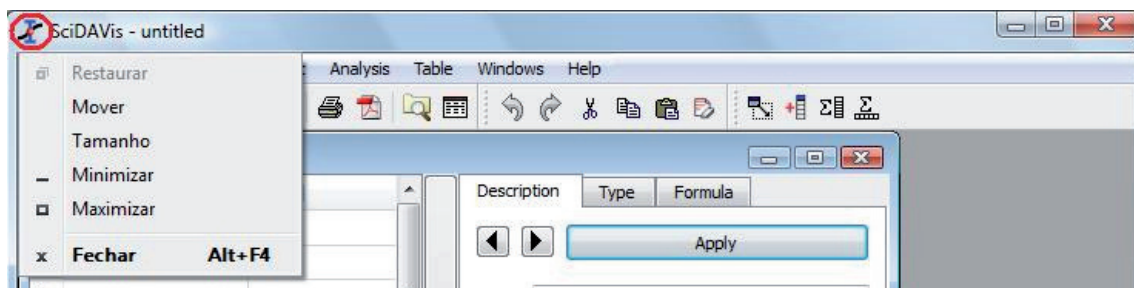


Figura 4.9 - Barra de Título com comandos de propriedades em cascata.

**Menu** - é a **Barra de Menu**, em que cada menu é uma lista em cascata de ações da aplicação.

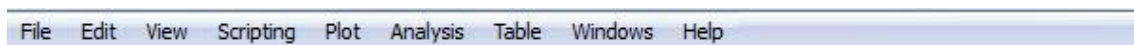


Figura 4.10 - Barra de Menu

Por exemplo, ao selecionar o menu *Plot* (um clique com o botão esquerdo do mouse) uma lista de comandos aparecerá, em cascata, conforme figura a seguir.

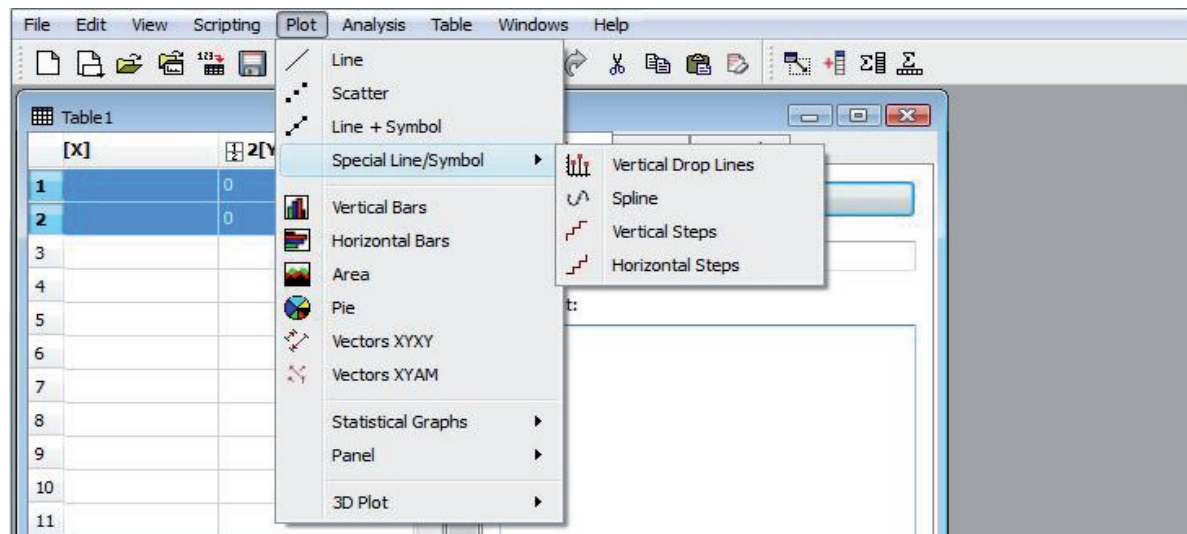


Figura 4.11 - Barra de Menu com comandos de um menu em cascata.

Abaixo da Barra de Menu, no caso do *SciDAVis*, há uma **Barra de Ferramentas**, com botões de acesso rápido às ações da aplicação.



Figura 4.12 - Barra de Ferramentas.

O *SciDAVis* apresenta janelas internas (com estrutura similar a janela principal), que são dos tipos:

- Tabela, aberta ao se inicializar o programa;
- Gráfico;
- Matriz;
- Nota ou script;
- Gráfico de uma função;
- Superfície 3D.

Vale a pena lembrar que para cada tipo de janela interna ativa (à frente de todas as outras) uma Barra de Menu e de Ferramentas se apresentará de forma diferente. Nas figuras acima foram mostradas para o caso em que estava selecionada uma tabela; abaixo são mostrados os menus e ferramentas para o caso de um gráfico estar selecionado.

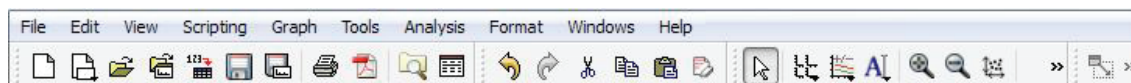


Figura 4.13 - Barra de Menu e de Ferramentas quando outro tipo de janela interna é selecionado.

A língua portuguesa pode ser o idioma padrão do *SciDAVis*. Para configurar o idioma, dê um clique com o botão esquerdo do mouse no menu “Edit”.

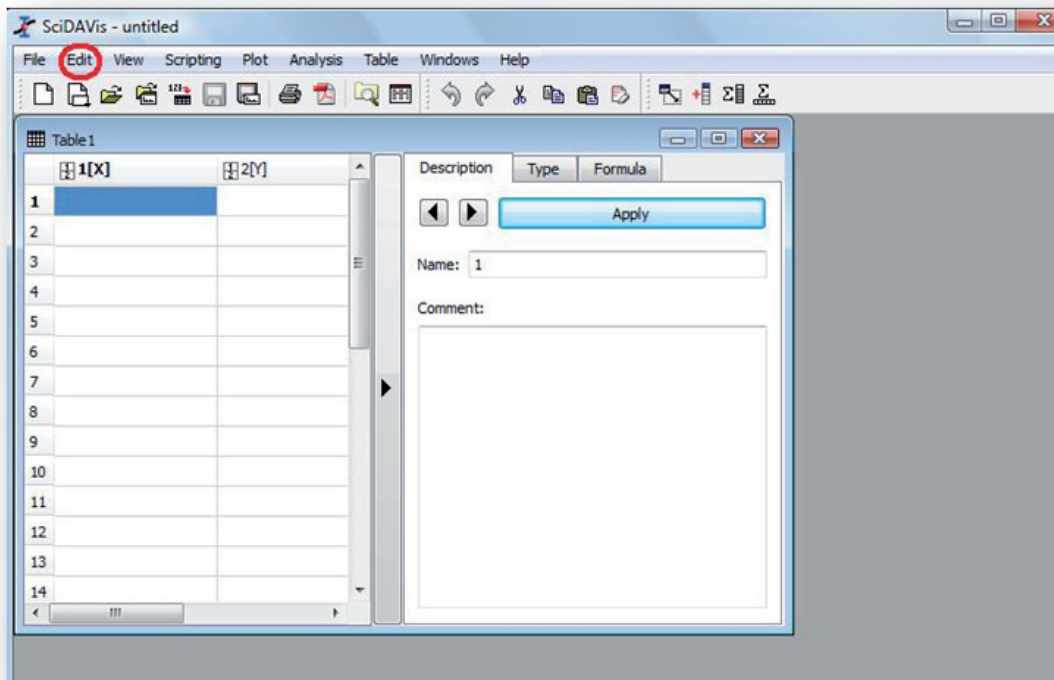


Figura 4.14 - Seleção do menu “Edit” para troca do idioma.

Selecione o comando “Preferences ...”

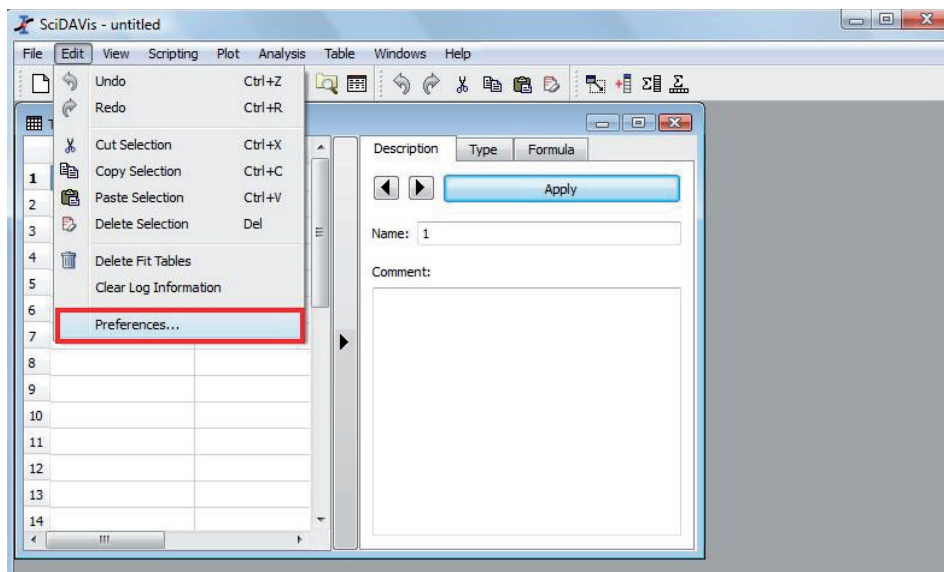


Figura 4.15 - Seleção do menu “Preferences” para troca do idioma.

Na aba “General” escolha “Português Brasileiro” no botão “Language”. Finalmente, clique “Ok”

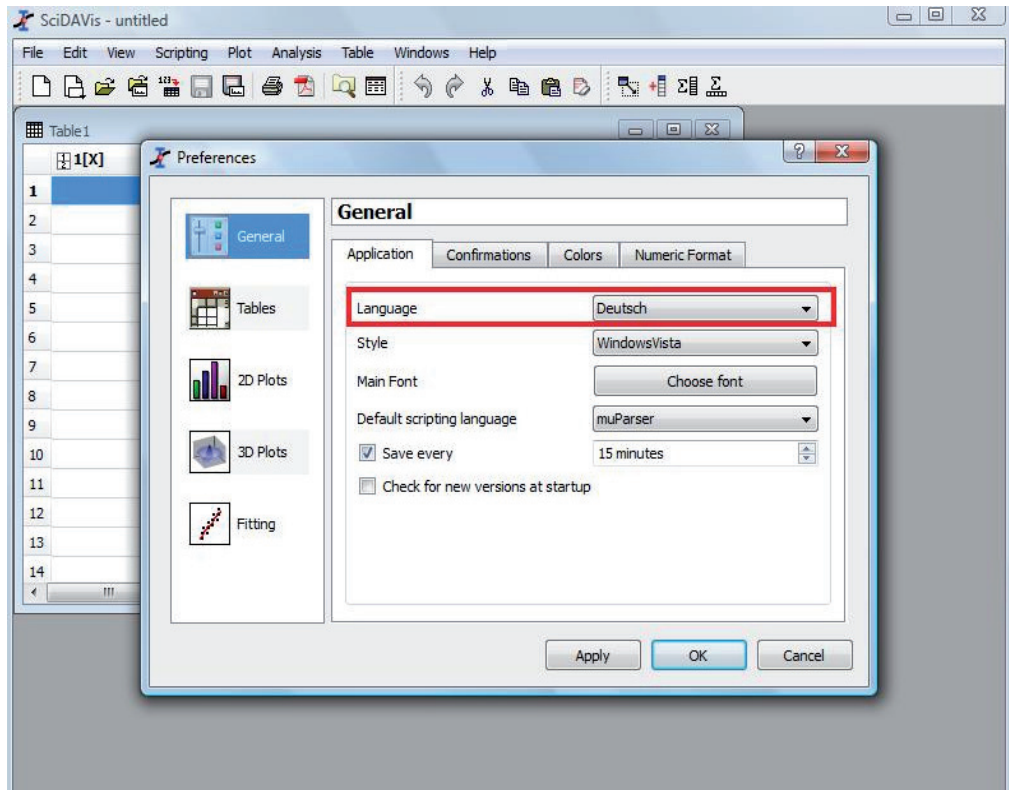


Figura 4.16 - Seleção do idioma na aba “General” no item “Language”.

2. Após toda essa preparação para fazer um gráfico o primeiro passo é digitar os valores na tabela. O conjunto de dados é o da Tabela 3.1, Aula 3, em que foram feitas medidas da tensão em função da corrente elétrica em um circuito puramente resistivo.

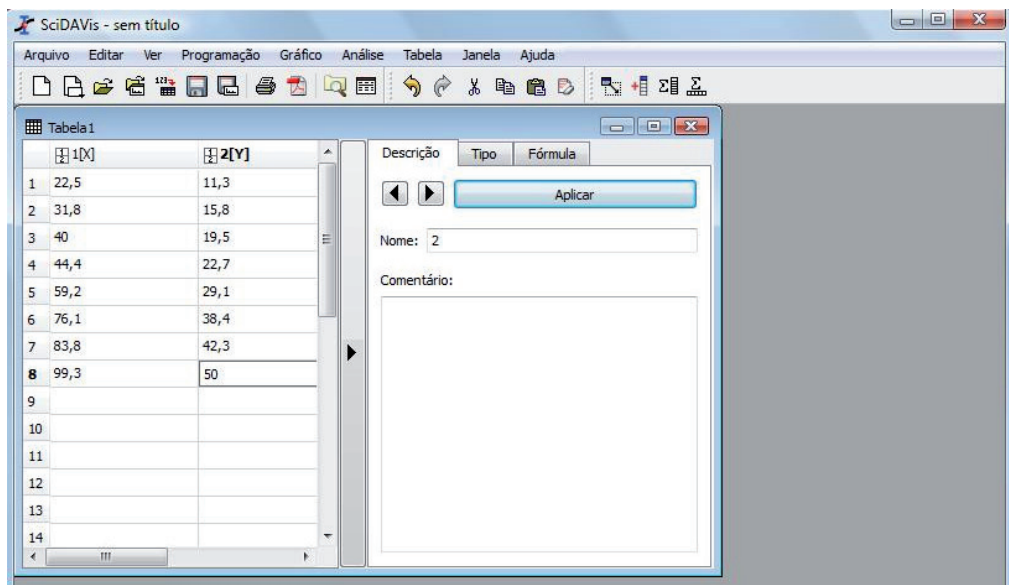


Figura 4.17- Entrada dos dados na tabela.

A seguir selecione os pares de pontos que serão “plotados”, isto é, que serão utilizados na confecção do gráfico.

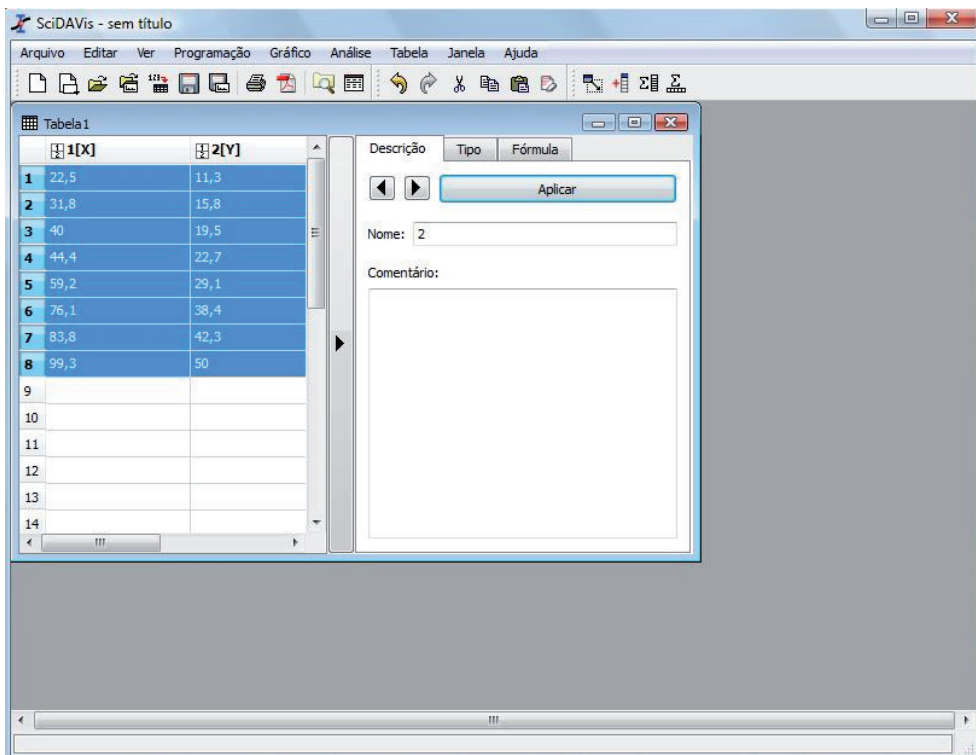


Figura 4.18 - Seleção dos dados que serão utilizados na confecção do gráfico.

No menu “Gráfico” escolha o comando “Dispersão”.

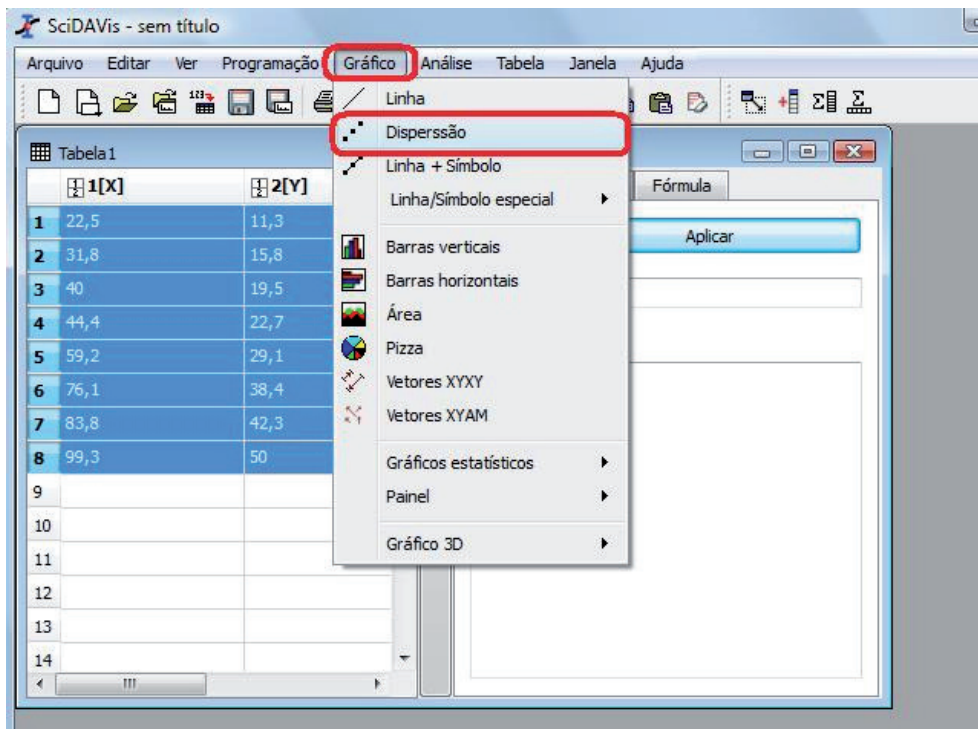


Figura 4.19 - Seleção do tipo de gráfico a ser feito.

O resultado pode ser visto na Figura 4.20.

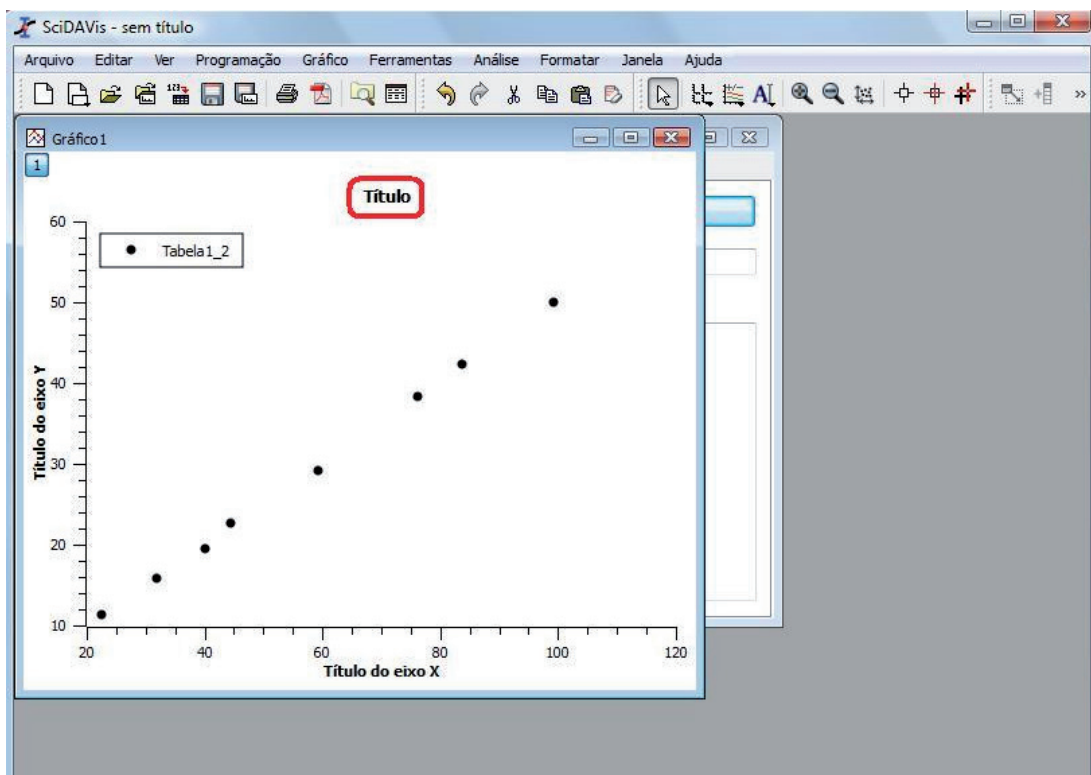


Figura 4.20 - Gráfico elaborado.

Para alterar o título do gráfico dê dois cliques sobre a palavra “título” (circulada na Figura 4.20). Dessa forma uma janela de edição se abrirá e o novo título poderá ser digitado.

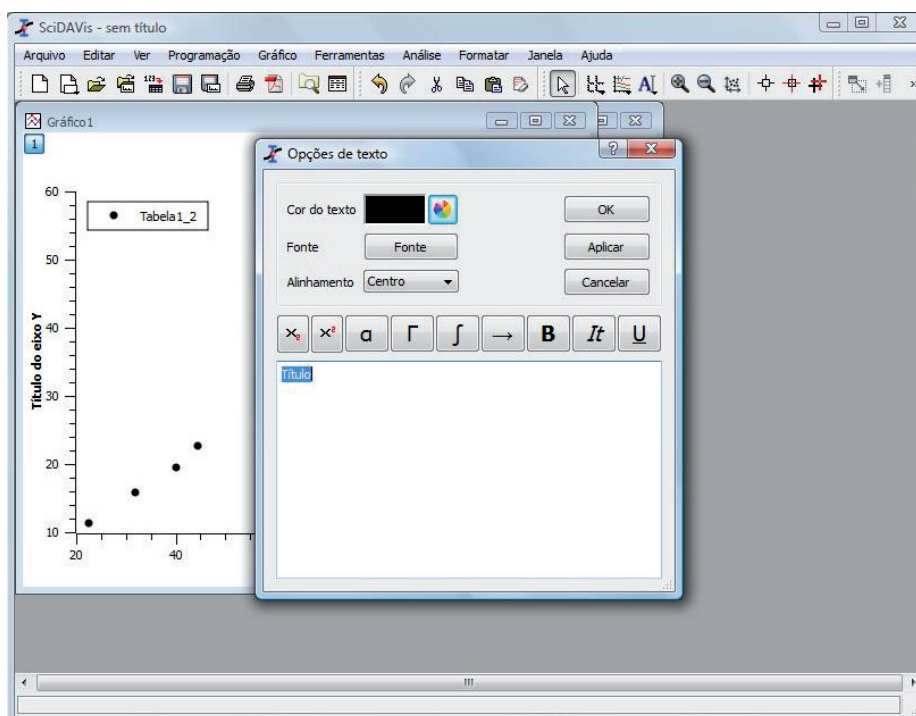


Figura 4.21 - Mudança no título do gráfico.

Clique em OK para aceitar a mudança do título. Esse é o mesmo procedimento para mudar os títulos dos eixos.

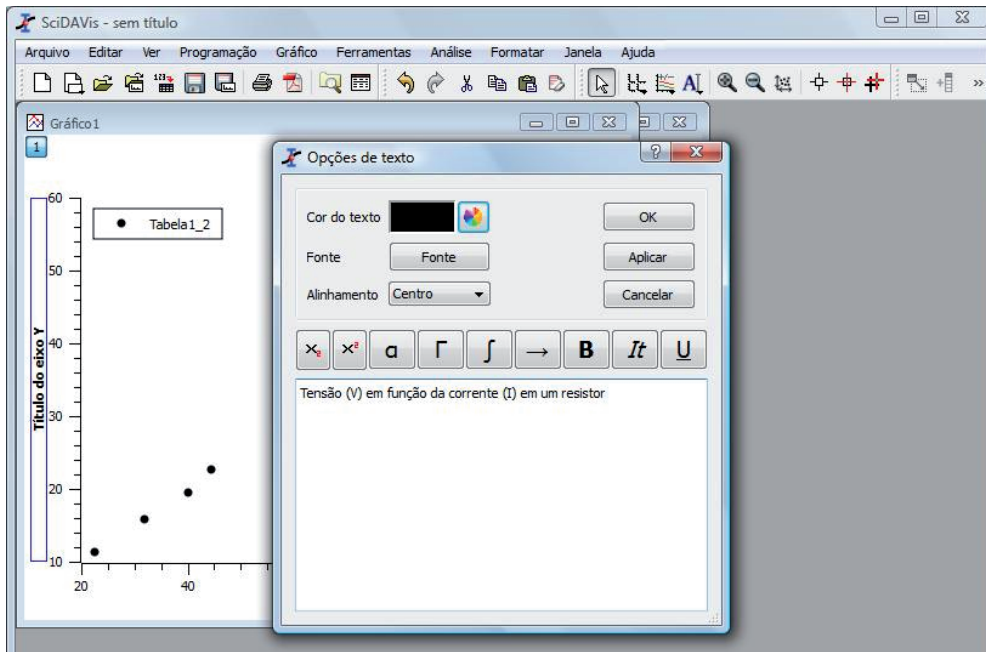


Figura 4.22 - Mudança no título do gráfico e dos eixos.

3. Para exportar o gráfico e anexar ao relatório clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico.

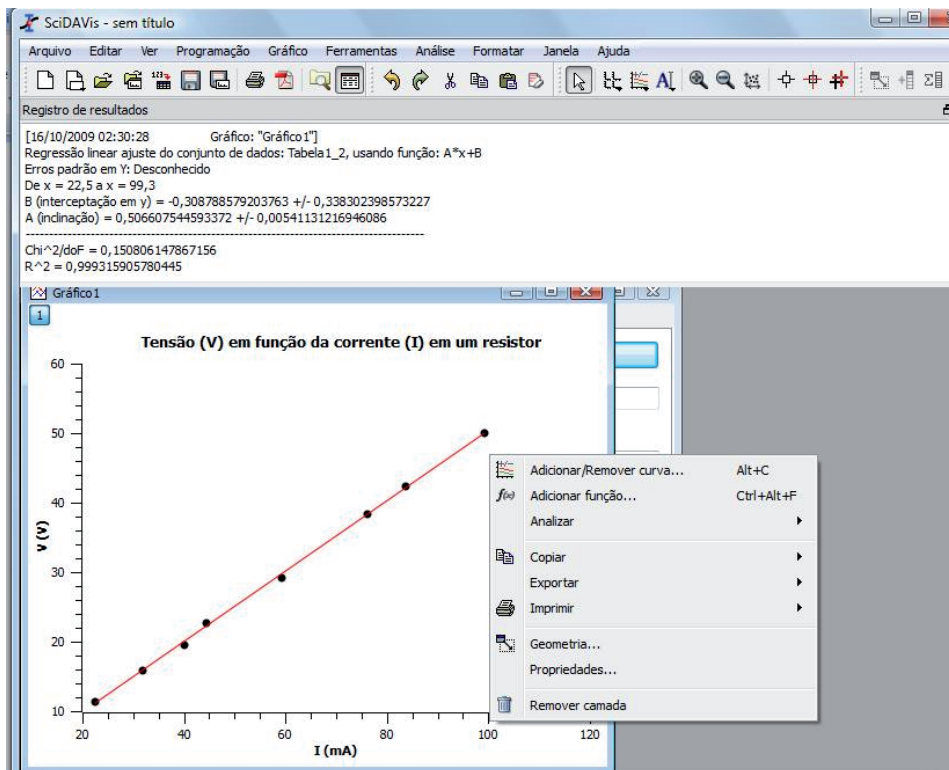


Figura 4.23 - Início do processo de exportação do gráfico para anexar ao relatório.

Selecione “Exportar” e em seguida “Janela”.

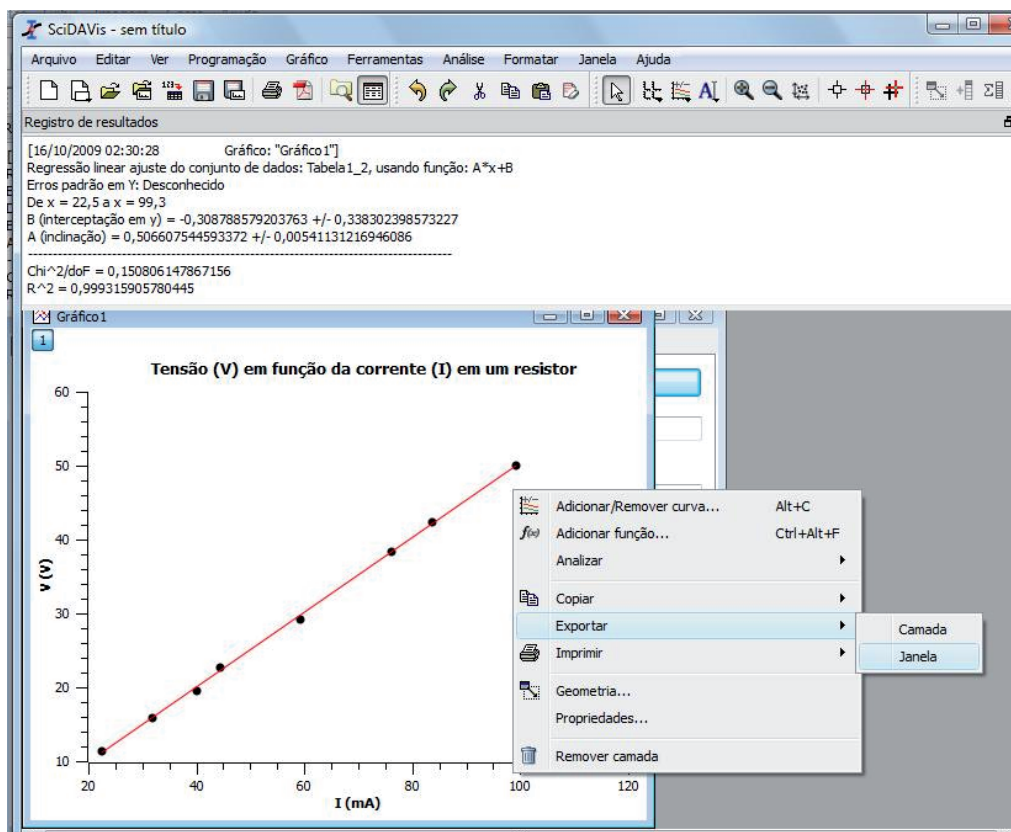


Figura 4.24 - Continuação do processo de exportação do gráfico.

Escolha um formato para a imagem no botão “Files of Type”.

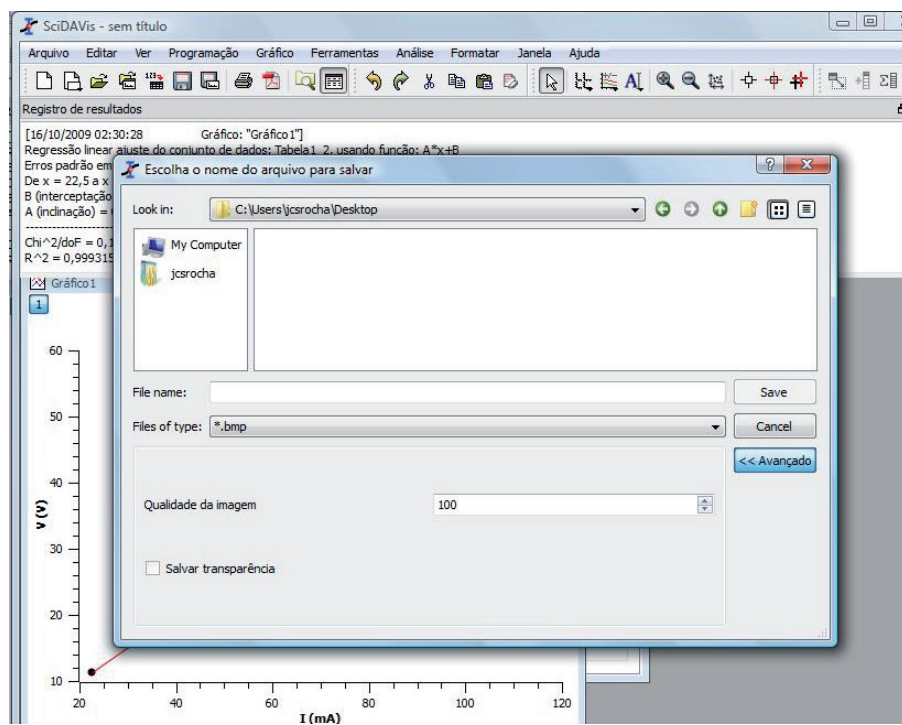


Figura 4.25 - Escolha do tipo de imagem a ser gerada. Use *jpg*, *tiff* ou *bmp*.

Na caixa “File Name” digite um nome para a imagem e clique em “Save”. Dessa forma, um arquivo do tipo escolhido com o nome digitado será criado no diretório especificado no botão “Look in”.

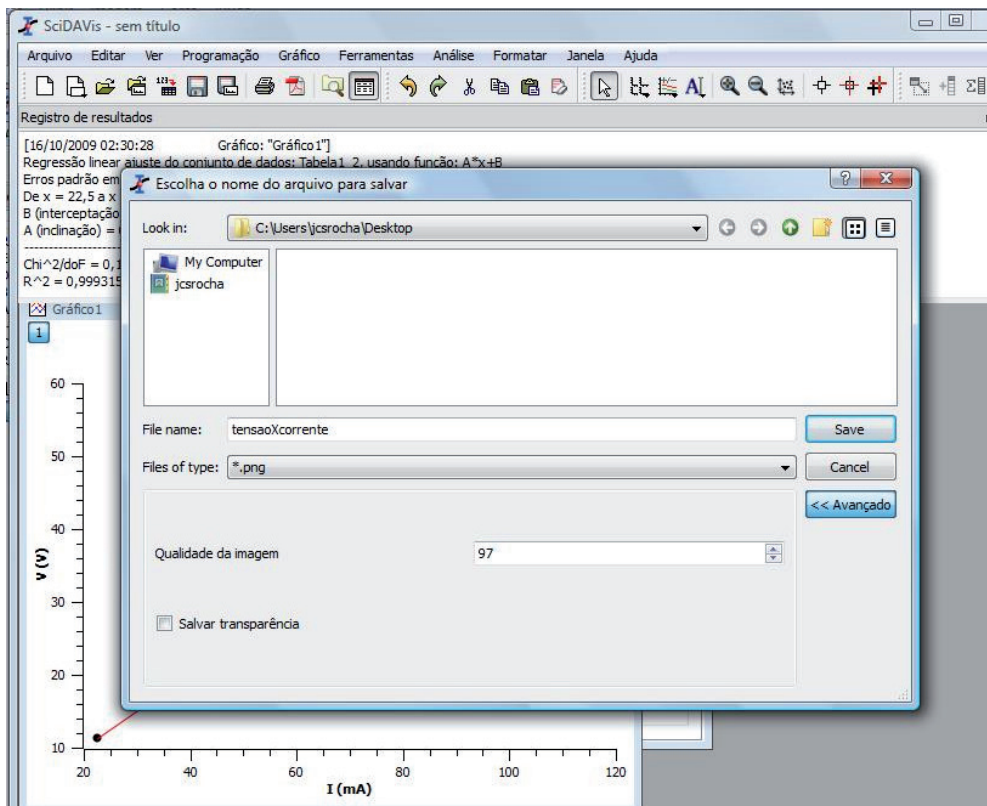


Figura 4.26 - Escolha do nome da imagem e indicação do diretório onde ela será salva.

## 4.5 ATIVIDADE PRÁTICA: DENSIDADE DE UM LÍQUIDO

### Introdução

Um objeto, ao ser mergulhado em um fluido qualquer, fica sujeito a uma força para cima, devido à diferença entre as pressões nas suas partes superior e inferior. O módulo  $E$  dessa força, chamada de empuxo, é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto, ou seja,

$$E = \rho g V,$$

em que  $\rho$  é a densidade do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $V$  é o volume do fluido deslocado pelo objeto. Esse resultado é conhecido como Princípio de Arquimedes.

Considere o objeto pendurado em um dinamômetro, como mostrado na Figura. 4.27a. Nessa situação, a leitura no dinamômetro é  $P$ . Em seguida, esse objeto é imerso em um líquido e, ao atingir o equilíbrio, a leitura no dinamômetro passa a ser  $P'$ , como mostrado na Figura 4.27b.

✓ Mostre que, nessa situação,

$$P' = P - \rho g V .$$

Então, medindo-se o peso aparente  $P'$  e o volume  $V$  submerso do objeto, pode-se determinar a densidade do líquido.

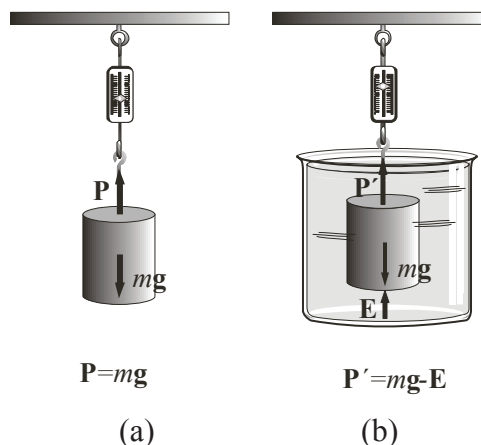


Figura 4.27 - Representação das forças que agem sobre o objeto; Em (a), o dinamômetro indica o peso  $P$ ; em (b), o dinamômetro indica o peso aparente  $P'$ .

### Objetivo

- Determinar a densidade de um líquido.

### Material utilizado

- Cilindro de alumínio graduado; dinamômetro; recipiente transparente contendo líquido de densidade desconhecida; haste com suporte; e régua.

### Procedimentos

- Utilizando o dinamômetro e a régua, determine o peso e o volume do cilindro de alumínio.
- Mergulhe o cilindro, ainda pendurado no dinamômetro, gradualmente no líquido. Para cada graduação do cilindro, registre o valor do peso aparente  $P'$  e o do volume mergulhado  $V$ .
- Faça o gráfico de  $P'$  em função de  $V$  utilizando o programa *SciDAVis*, *Origin* ou o *Excel*. A relação linear entre essas grandezas pode ser representada pela equação de uma reta,

$$P' = a + b V .$$

Especifique as grandezas físicas que correspondem às constantes  $a$  e  $b$ .

- Com os resultados obtidos determine os valores dessas duas constantes. Estime as incertezas através do método dos valores limite.

- Compare os resultados encontrados neste experimento com aqueles mostrados na Tabela 4.4 e veja se é possível identificar o líquido utilizado.

**Tabela 4.4**  
**Densidades de alguns líquidos, em g/cm<sup>3</sup>, à temperatura ambiente (20° C)**

Água	$1,00 \pm 0,01$
Benzeno	$0,90 \pm 0,01$
Etanol	$0,80 \pm 0,02$
Éter	$1,49 \pm 0,01$
Glicerina	$1,26 \pm 0,01$
Mercúrio	$13,6 \pm 0,1$



# UNIDADE 2

## Ajuste de curvas

### Objetivos

- Calcular a equação da melhor reta pelo processo de regressão linear.
- Utilizar o processo de linearização de curvas.
- Usar recursos computacionais para obter os coeficientes da regressão linear.
- Calcular a melhor função de ajuste pelo processo de regressão não linear.
- Usar recursos computacionais para obter diretamente os coeficientes de um ajuste envolvendo regressão não linear para os casos de lei de potência, polinomial, exponencial e logarítmica.
- Elaborar um relatório técnico-científico.



## Ajuste de curvas por regressão linear

### Objetivos

- Utilizar o método da regressão linear para calcular a equação da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais relacionados por uma dependência linear.
- Utilizar recursos computacionais para cálculo dos coeficientes da regressão linear.

### 5.1 O MÉTODO DA REGRESSÃO LINEAR EM LINHAS GERAIS

O gráfico da Aula 3 (Figura 3.1) sugere, visualmente, que existe uma relação linear entre a tensão aplicada no resistor e a corrente que passa por ele. Isso significa que se procurarmos uma relação matemática que associe a corrente  $I$  no resistor sujeito a uma tensão  $V$ , essa relação deve ser a equação de uma reta, ou seja, uma equação do tipo:

$$y = a x + b \quad (5.1)$$

onde a constante  $a$  representa a inclinação da reta e a constante  $b$ , o valor da grandeza  $y$  quando  $x = 0$ . Para o caso de um resistor podemos escrever especificamente

$$V = A + B I$$

É possível traçar no gráfico uma reta que, visualmente, passe melhor pelos pontos medidos e, então, determinar os valores de  $A$  e  $B$ . Entretanto, existem processos matemáticos que estabelecem a equação da reta que se ajusta melhor aos pontos medidos. O processo mais utilizado com esse intuito é chamado **regressão linear**.

Esse processo operacional de ajuste, ou seja, a obtenção das constantes  $A$  e  $B$  que definem a reta, é geralmente feito por uma calculadora ou computador.

Para exemplificar uma aplicação desse processo, considere a série de pontos experimentais genéricos  $(x_i, y_i)$  colocados na Tabela 5.1 e no gráfico da Figura 5.1.

**Tabela 5.1**  
Resultados de medidas de duas grandezas  $x$  e  $y$

$y$	$x$
$y_1$	$x_1$
$y_2$	$x_2$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$y_n$	$x_n$

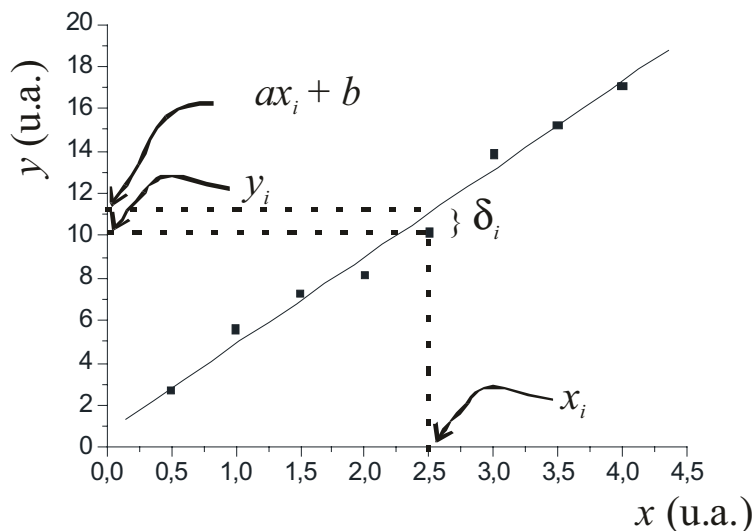


Figura 5.1 - Pontos experimentais definindo uma reta;  $\delta_i$  é a diferença entre a ordenada  $y_i$  medida para  $x_i$  e o correspondente valor calculado pela equação da reta.

Se a melhor curva que passa por esses pontos é a reta desenhada, pode-se escrever sua equação na forma  $y = a x + b$ . Observando-se o gráfico da Figura 5.1, nota-se que, para o ponto  $x_i$ , o valor experimental correspondente é  $y_i$ , mas, pela reta escolhida, a ordenada correspondente a  $x_i$  será:

$$a x_i + b$$

Dessa forma, para cada ponto  $x_i$  existe uma diferença, ou resíduo,

$$\delta_i = y_i - (a x_i + b), \tag{5.2}$$

entre a medida e o valor de  $y$  calculado pela reta. Alguns resíduos são positivos e outros negativos. A melhor reta que se ajusta aos pontos experimentais é aquela que “minimiza” esses resíduos.

Em linguagem matemática diz-se que a melhor reta é aquela na qual a soma dos quadrados dos resíduos de todos os  $N$  pares de valores experimentais  $(x_i, y_i)$  é a menor possível.

**Obs. 1)** Existe um parâmetro estatístico, chamado coeficiente de determinação, que permite avaliar a qualidade do ajuste. Quanto mais próximo de 1 mais próximo de uma reta.

**Obs. 2)** No método da regressão linear, todos os pares ordenados têm a mesma importância. Em alguns casos, condições físicas impõem que alguns pontos tenham mais importância que outros (muitas vezes, por exemplo, a reta deve passar pela origem). Nesse caso, pode-se entrar várias vezes com os correspondentes pares de valores para aumentar sua importância nos cálculos; a reta tenderá a passar mais próxima deste ponto.

### 5.1.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de ajustar uma curva descrita por uma equação a um conjunto de pontos experimentais não se aplica apenas quando a relação entre as grandezas é linear. Sempre que existir algum modelo ou previsão teórica para a relação matemática entre as grandezas, é possível encontrar os parâmetros que ajustem a curva correspondente aos resultados experimentais. O método matemático genérico que permite esse tipo de ajuste é chamado de “Método de mínimos quadrados”, pois, como foi exemplificado no caso particular do ajuste da reta, são procurados os parâmetros que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos  $\delta_i$  (equação 5-2). Muitos programas de tratamento de dados permitem que sejam feitos ajustes, diretamente, com funções matemáticas estabelecidas pelo usuário, como será visto nas próximas aulas.

### 5.2 REGRESSÃO LINEAR COM O PROGRAMA EXCEL

Como acabamos de estudar a regressão linear usa métodos estatísticos para obter a equação da reta para a qual os pontos experimentais encontram-se o mais próximo possível da reta traçada. Podemos usar o *Excel* para determinar os parâmetros A e B de uma função do primeiro grau. Utilizaremos o exemplo da concentração, C, de etanol no sangue, em função do tempo, t, após a ingestão de etanol. Veja como é feita a regressão linear:

1) Refaça os passos descritos na seção 4.2 da Aula 4. Depois clique com o botão da direita sobre os pontos e na caixa que aparecer escolha a opção “adicionar linha de tendência”.

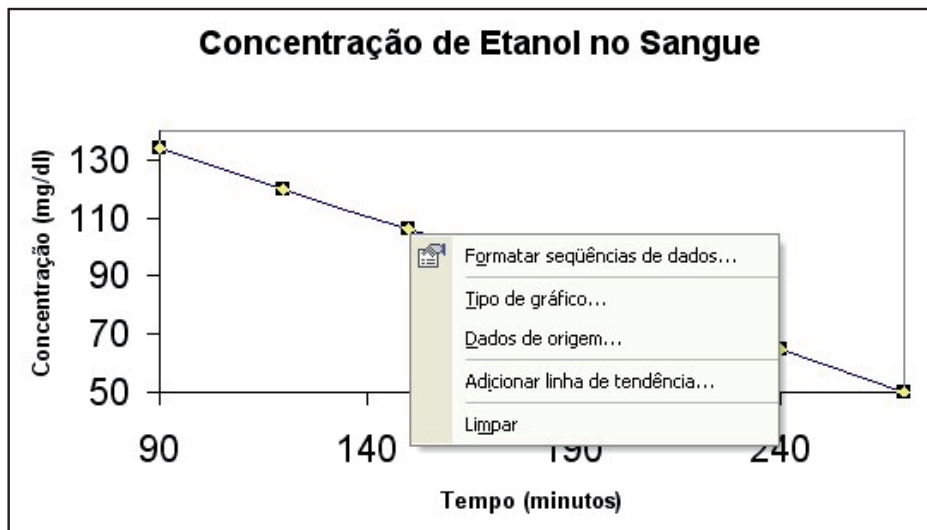


Figura 5.2 - Exemplo de regressão linear com o Excel.

2) Na caixa aberta, escolha o tipo “linear”.

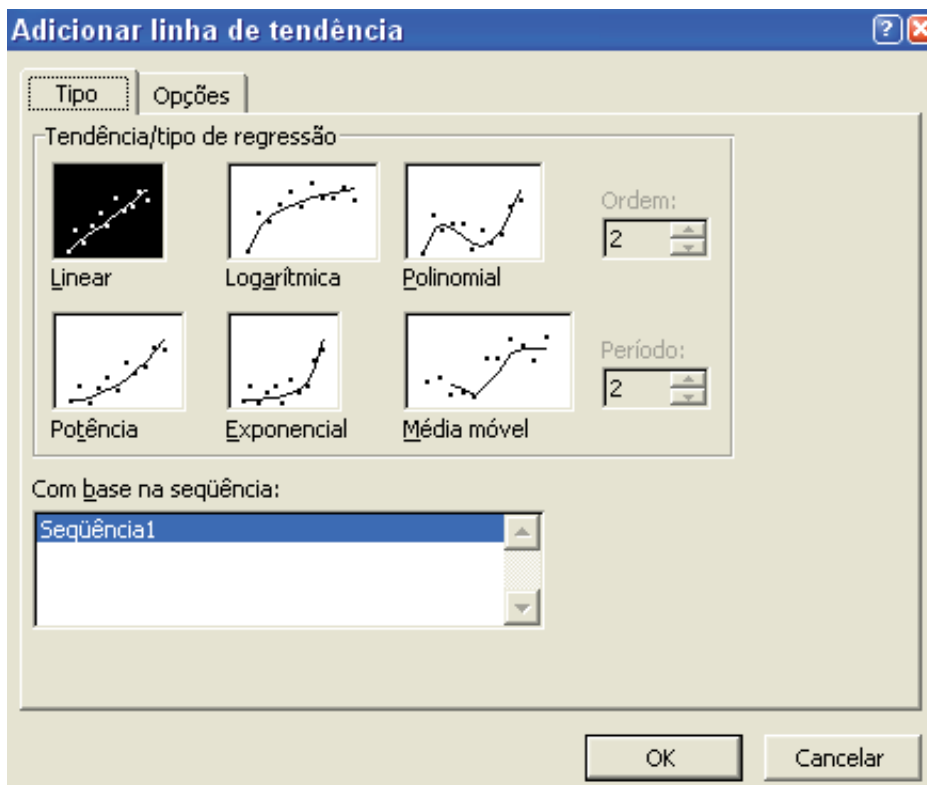


Figura 5.3 - Exemplo da janela do Excel para adição de linha de tendência.

3) Na barra opções escolha: “linha de tendência automática” e “exibir equação no gráfico”.

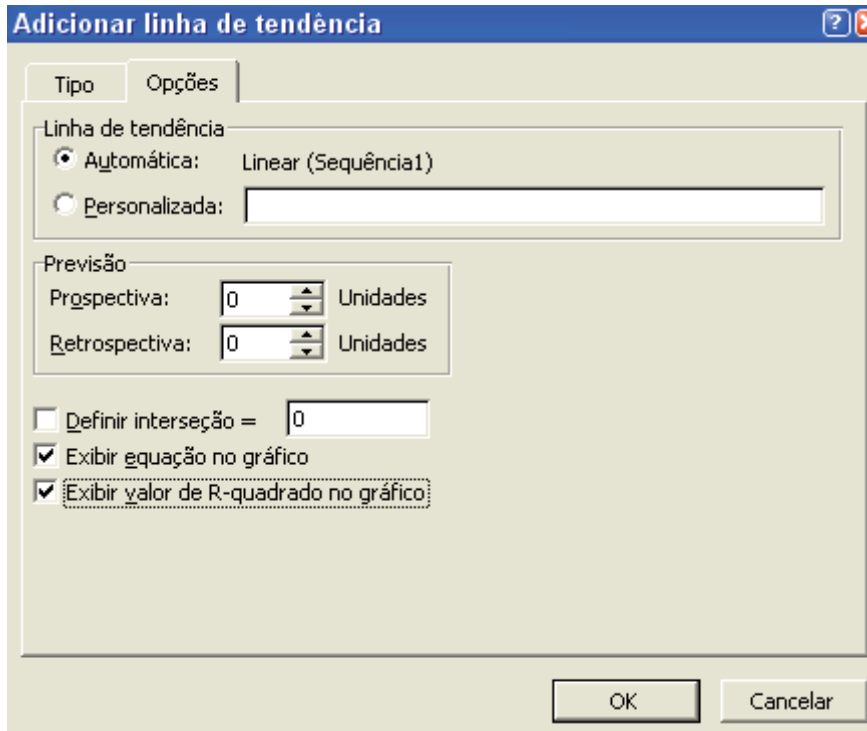


Figura 5.4 - Exemplo da janela do *Excel* para personalização da linha de tendência.

4) Após esses passos, a equação será escrita em seu gráfico.

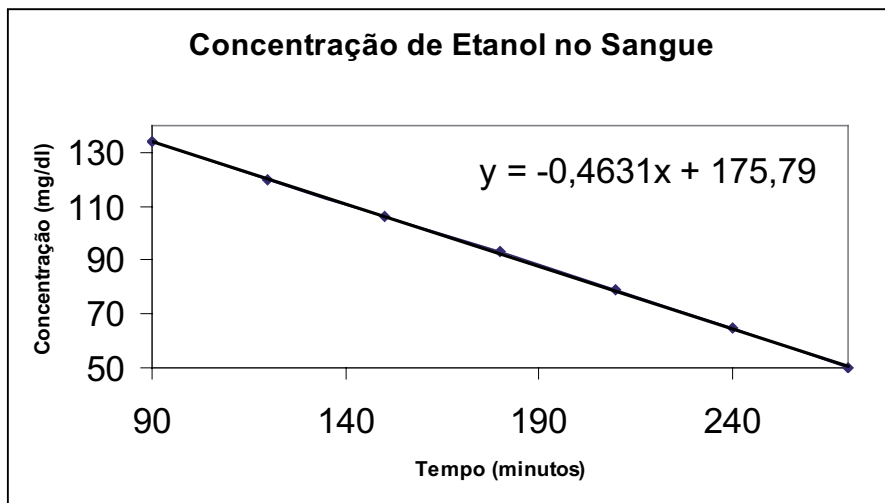


Figura 5.5 - Exemplo de gráfico com regressão linear usando o *Excel*.

**ATIVIDADE 5.1) Exercícios para treinamento da Regressão Linear**

1) Um fazendeiro utilizou quatro lotes de terra para testar a relação entre a produção de trigo, em toneladas por acre, e quantidade de fertilizantes, em centenas de quilogramas por acre. Os resultados obtidos estão na tabela abaixo.

a) Determine a função matemática que relaciona a safra ( $y$ ) com a quantidade de fertilizante ( $x$ ).

b) Qual é a produção para uma aplicação de 160 quilogramas de fertilizante?

Fertilizante (kg/acre)	Safra (tonelada/acre)
1	35
1,5	44
2	50
2,5	56

2) Após a contaminação por um cancerígeno, atribui-se aos habitantes de diferentes regiões geográficas um índice de exposição que representava o grau de contaminação. Use a tabela abaixo e a função que relaciona suas colunas para estimar a mortalidade (mortos por mil habitantes) para uma dada exposição.

Exposição	Mortalidade
1,35	118,5
2,67	135,2
3,93	167,3
5,14	197,6
7,43	204,7

**5.3 REGRESSÃO LINEAR COM O PROGRAMA *SciDAVis***

A vantagem do Programa *SciDAVis* em relação ao *Excel* é que os valores de  $A$  e  $B$  são fornecidos com as respectivas incertezas, o que facilita imensamente a confecção dos gráficos e a expressão final dos resultados. Utilizaremos, como exemplo, os dados da Aula 3 para fazer o gráfico e fazer a regressão linear.

1. A princípio a janela do gráfico deve estar ativa (caso não esteja clique sobre ela com o mouse). A seguir selecione o menu “Análise” (Figura 5.6).

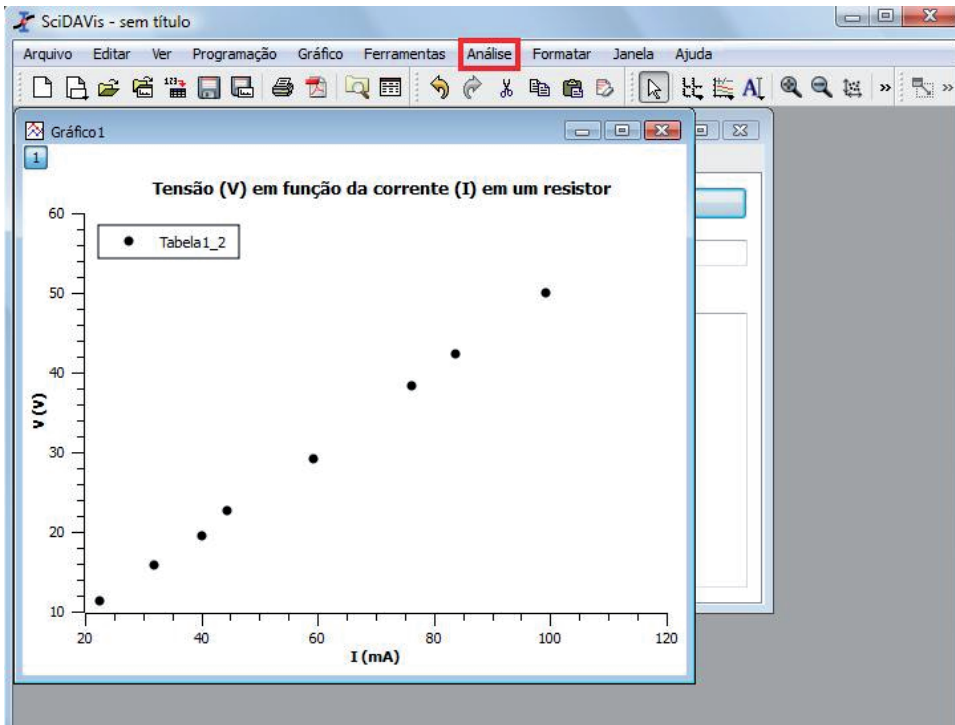


Figura 5.6 - Exemplo de regressão linear com o Excel.

2. Selecione o submenu "Quick Fit" (Figura 5.7).

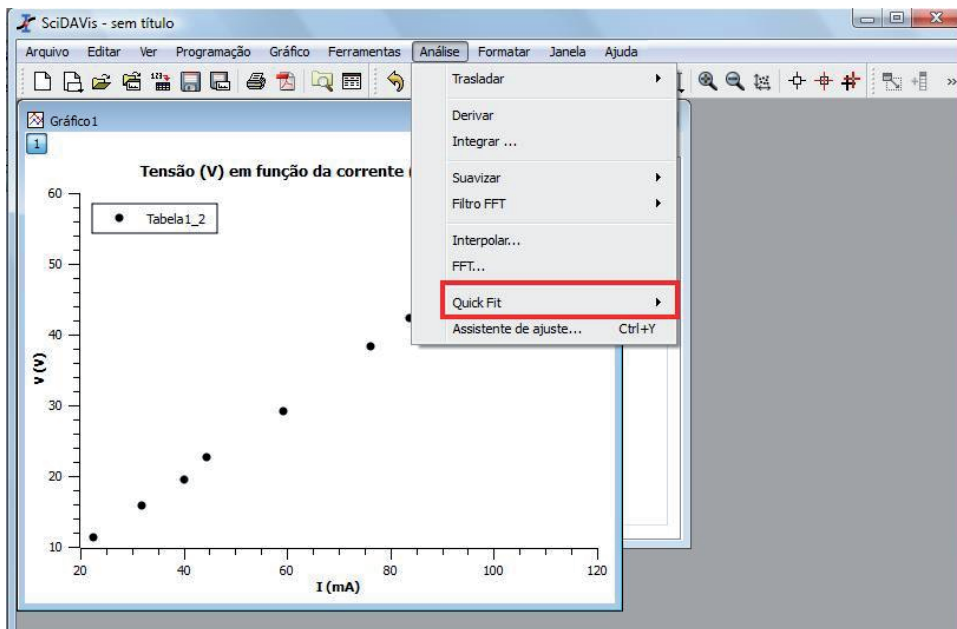


Figura 5.7 - Exemplo da janela do SciDAVis para seleção do menu de ajustes.

3. E por fim, o comando “Regressão linear” (Figura 5.8).

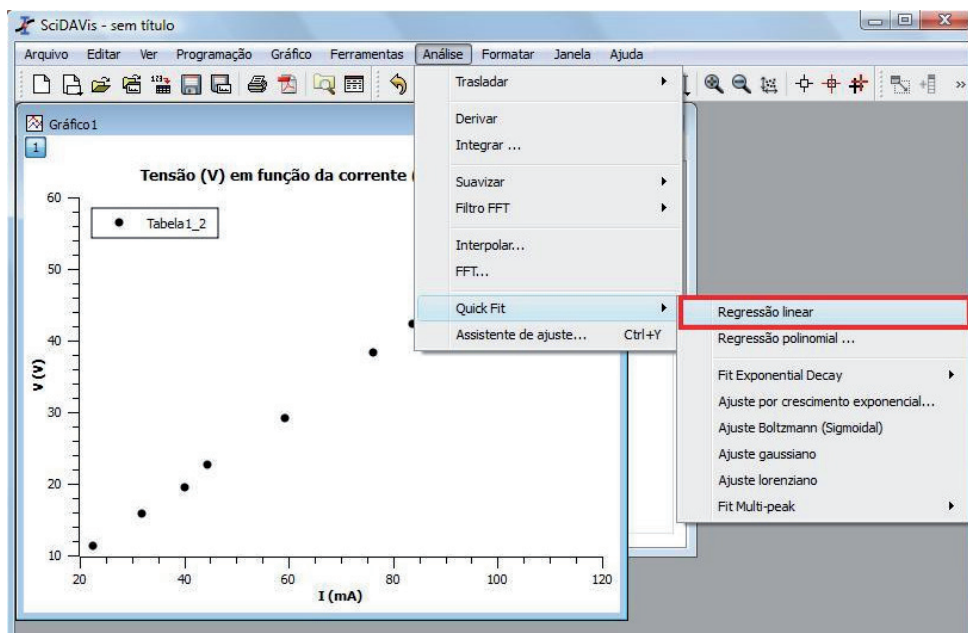


Figura 5.8 - Exemplo da janela da *SciDAVis* para adição de linha de tendência.

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DO AJUSTE

Dessa forma, teremos uma nova janela, chamada “Registro de resultados” (Figura 5.9), mostrando os parâmetros do ajuste.

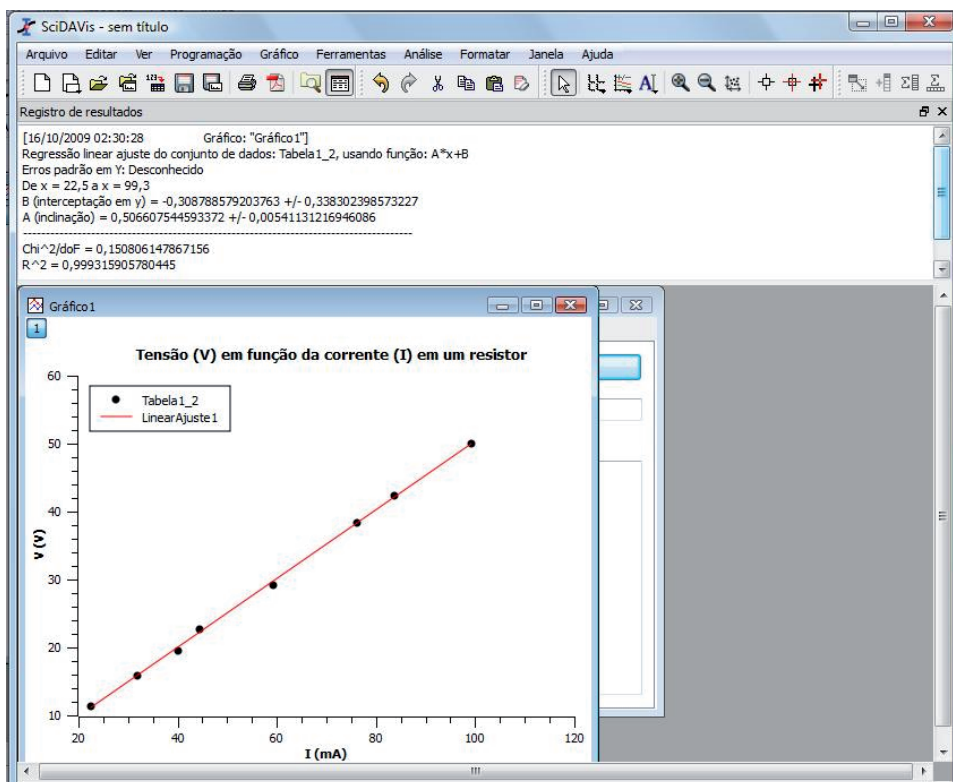


Figura 5.9 - Exemplo da janela “Registro de resultados”.

No caso apresentado temos os seguintes parâmetros:

[DATA e HORA Gráfico: “Gráfico1”]

Regressão linear ajuste do conjunto de dados: Tabela1\_2, usando função:  $A*x+B$

Erros padrão em  $Y$ : Desconhecido

De  $x = 22,5$  a  $x = 99,3$

$B$  (interceptação em  $y$ ) =  $-0,308788579203763 \pm 0,338302398573227$

$A$  (inclinação) =  $0,506607544593372 \pm 0,00541131216946086$

-----  
 $\text{Chi}^2/\text{doF} = 0,150806147867156$

$R^2 = 0,999315905780445$   
 -----

Aqui vemos que os pontos foram ajustados por uma função linear na forma

$$Y(x) = A x + B$$

*Regressão linear, ajuste do conjunto de dados: Tabela1\_2, usando função:  $A*x+B$*

Além disso, esse ajuste foi feito no intervalo de  $x = 22,5$  até  $x = 99,3$ :

*De  $x = 22,5$  a  $x = 99,3$*

Os valores das constantes  $A$  e  $B$ , que definem a reta que melhor se ajusta aos pontos, são:

*$B$  (interceptação em  $y$ ) =  $-0,308788579203763 \pm 0,338302398573227$*

*$A$  (inclinação) =  $0,506607544593372 \pm 0,00541131216946086$*

$\text{Chi}^2/\text{doF}$  e  $R^2$  são informações sobre a qualidade do ajuste. **Grosso modo, quanto mais próximo  $R^2$  está de 1 melhor o ajuste. E quanto menor o valor de  $\text{Chi}^2$  melhor.**

**Como os erros devem ser apresentados com um algarismo significativo**, vemos que o erro do parâmetro “ $B$ ” deve ser arredondado,

*0,338302398573227*

tal que para que  $\Delta B = 0,3$ . O erro do parâmetro “ $A$ ” também deve ser arredondado,

*0,00541131216946086*

tal que  $\Delta A = 0,005$ . Lembre-se que os zeros à esquerda não são significativos.

Sendo assim, os valores dos parâmetros devem ter o mesmo número de casas decimais do erro. Ou seja, o valor de  $B$  deve ser arredondado,

$$-0,308788579203763$$

fazendo com que  $B = -0,3 \pm 0,3$ .

Do mesmo modo, o valor de  $A$  deve ser arredondado,

$$0,506607544593372$$

fazendo com que  $A = 0,507 \pm 0,005$ .

Lembre-se do arredondamento, se o número à direita do algarismo duvidoso for maior ou igual a 5 soma-se 1 a esse algarismo.

Agora vamos encontrar quais unidades esses parâmetros devem ter. Observando a equação da reta, podemos afirmar que “ $B$ ” é o valor de “ $Y$ ” quando “ $x$ ” é zero. Matematicamente,  $Y(x) = A x + B$  para  $x = 0$ . Ou seja,

$$Y(x=0) = A x + B = A * 0 + B.$$

Ou seja,

$$Y(x=0) = B.$$

Portanto, o parâmetro “ $B$ ” deve ter a mesma unidade de “ $Y$ ”. Podemos reescrever a equação da reta como

$$Y(x) - B = A x$$

Do lado esquerdo dessa equação já sabemos que todos os valores estão em unidades de “ $Y$ ”. Da mesma forma que antes, devido à igualdade, “ $A$ ” vezes “ $x$ ” ( $Ax$ ) também deve ter a mesma unidade de  $Y$ . Para que isso seja verdade a unidade de “ $A$ ” deve ser a unidade de “ $Y$ ” dividida pela unidade de “ $x$ ”.

Vamos agora comparar o gráfico gerado pelo *SciDAVis* com o gráfico de uma reta qualquer. Observe a Figura 5.10.

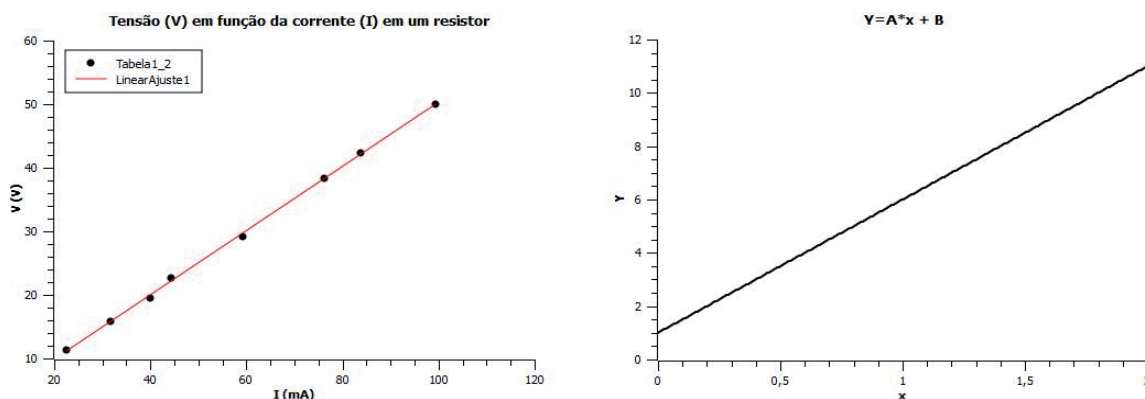


Figura 5.10 - Comparação do gráfico gerado pelo *SciDAVis* com o de uma reta qualquer.

Vemos que podemos associar a tensão com  $Y$ , ou seja,  $Y = V$ . Podemos associar também a corrente com  $x$ , ou seja,  $x = i$ . Assim sendo, quando fazemos um ajuste linear no gráfico da esquerda podemos escrever a equação da reta ( $Y=Ax+B$ ) na forma,

$$V = R i + V_0$$

Dessa forma,  $B$  deve ter a mesma unidade da tensão, que é em Volts (V), e  $A$  deve ter unidade da tensão dividida pela unidade da corrente, ou seja,  $V/mA$ . Dessa forma, podemos escrever que

$$B = (-0,3 \pm 0,3) \text{ V e } A = (0,507 \pm 0,005) \text{ V/mA}.$$

Lembrando que a Lei de Ohm descreve o comportamento da tensão em função da corrente num resistor. Comparando a nossa equação

$$V = Ai + V_0$$

com a Lei de Ohm ( $V= Ri$ ), vemos que “ $A$ ” é o valor da resistência “ $R$ ” e “ $B$ ” tem que ser igual a tensão inicial (no caso estudado aqui, bem próximo de zero). Isto é,  $A = R$  e  $B = V_0$ .

Dos valores obtidos no ajuste linear, temos que o resistor utilizado no experimento tem uma resistência  $R = A$ , ou seja,  $R = (0,507 \pm 0,005) \text{ V/mA}$ . Ou melhor,

$$R = (0,507 \pm 0,005) \text{ V}/(10^{-3} \text{ A})$$

$$R = (0,507 \pm 0,005) \times 10^3 \text{ V/A}$$

$$R = (0,507 \pm 0,005) \times 1000 \text{ V/A}$$

$$R = (507 \pm 5) \text{ V/A}$$

$$\text{Ou seja, } \boxed{R = (507 \pm 5) \Omega \text{ e } V_0 = (-0,3 \pm 0,3) \text{ V.}}$$

## 5. 4 ATIVIDADE PRÁTICA: CONSTANTE ELÁSTICA DE MOLAS

### Introdução

Sob a ação de uma força de tração ou de compressão, todo objeto sofre alterações em sua forma, em seu tamanho, ou em ambos. As alterações dependem de características intrínsecas do objeto (arranjos dos átomos e o tipos de ligações entre eles no material) sobre o qual atua a força.

Uma mola distende-se quando um peso é pendurado nela. Um peso adicional a estica ainda mais. Se o peso for retirado, a mola volta a ter o mesmo comprimento original. Nesse caso, dizemos que a mola é um objeto elástico. A elasticidade é a propriedade pela qual a forma se altera quando uma força deformante é aplicada sobre o

objeto, o qual retorna à forma original quando a força deformante é retirada.

Em geral, existe um limite para o valor da força a partir do qual acontece uma deformação permanente no corpo. Até o limite elástico, há uma relação linear entre a força aplicada e a deformação, linearidade esta que expressa uma relação geral conhecida como Lei de Hooke:

$$F = kx \quad (5.3)$$

$F$  é o valor da força,  $k$  é a constante elástica e  $x$  é a deformação da mola.

A constante elástica mede a “dureza” da mola, que é a resistência da mola a ser deformada (esticada ou comprimida). Ela é medida em N/m (newtons por metro) e nos informa qual a força (quantos newtons) necessária para deformar a mola de um metro. Uma mola de um feixe de molas de caminhão, que é muito mais dura que a de uma caneta esferográfica, possui uma constante  $k$  bem maior.

A força elástica é sempre contrária à força que deformou a mola; dessa forma, a força elástica é também denominada força restauradora, e um sinal negativo pode aparecer na Lei de Hooke. O sistema clássico utilizado para ilustração dessa lei é o sistema massa-mola em situações de equilíbrio estático, que será apresentado a seguir.

A Figura 5.11 mostra uma mola helicoidal, de massa desprezível, pendurada por uma de suas extremidades (a); ao se colocar um objeto de massa  $m$  na outra extremidade, aparecerá um alongamento  $x$  na mola (b).

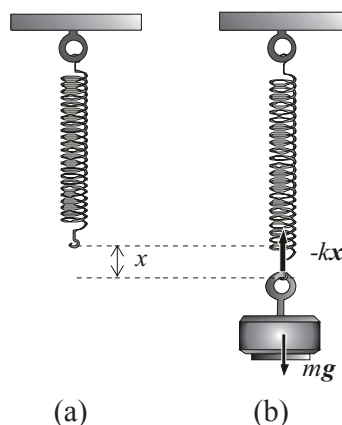


Figura 5.11 - Em (a), a mola não está alongada; em (b), a mola está alongada de  $x$ , em relação à posição inicial, devido ao peso de um objeto de massa  $m$ ; o peso do objeto é equilibrado pela força  $-kx$ , que a mola exerce nele.

A força  $F$  aplicada na mola é igual ao peso do corpo e, dentro do limite elástico, tem-se

$$F = m g = kx \quad (5.4)$$

Associando-se duas molas, a constante elástica do conjunto passa a ter outro valor que depende da maneira como foi feita a associação. A Figura 5.12 mostra um objeto suspenso por duas molas associadas em paralelo (a) e em série (b).

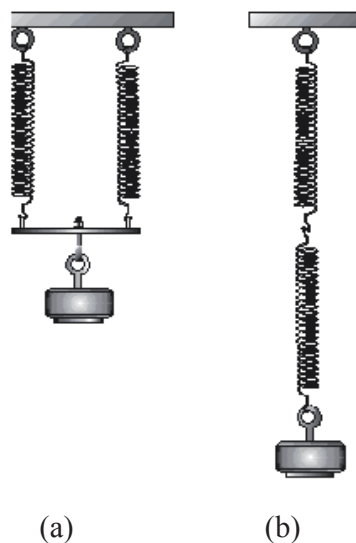


Figura 5.12 - Associação de duas molas. (a) em paralelo e (b) em série.

Alongar as molas associadas em série é “mais fácil” do que alongar as molas associadas em paralelo (veja Anexo C).

### Objetivos

- Determinar a constante elástica de uma mola.
- Determinar a constante elástica de uma combinação de molas.

### Material utilizado

- Suporte e régua milimetrada; duas molas; e objetos de massa  $m_i \pm \Delta m_i$ .

### Procedimentos

Neste experimento serão feitas medidas dos alongamentos  $x$  de uma mola (ou de uma associação de molas) em função da força  $F$  aplicada em sua extremidade.

- Pendure uma mola no suporte colocando em sua extremidade livre o suporte para objeto. Meça com a régua o alongamento inicial da mola  $x_o$  decorrente do peso do suporte.

Essa medida  $x$  pode ser usada como referência, de modo que as medidas seguintes dos alongamentos,  $x$ , são tomadas em relação a essa referência, ou seja

$$x = x_f - x_o \quad (5.5)$$

- Acrescente os objetos medindo para cada situação o alongamento total da mola.
- Faça uma tabela com os valores das forças  $F$  aplicadas e dos alongamentos  $x$  correspondentes.
- Após registrar todos os dados na tabela verifique se a deformação da mola foi elástica retirando todos os objetos que foram colocados.
- Faça o gráfico  $F$  versus  $x$  para a primeira mola. Pode-se observar que existe uma relação linear entre  $F$  e  $x$ :

$$F = Ax + B \quad (5.6)$$

em que  $A$  e  $B$  são coeficientes que definem a reta nessa situação.

- Retire o suporte para os objetos de massa e pendure ao seu lado outra mola, obtendo assim uma associação de molas em paralelo, como está esquematizado na Figura 5.12a.
- Repita todos os procedimentos anteriores de medição para essa associação de molas.
- Faça uma associação de molas em série, como ilustra a Figura 5.12b. Repita os procedimentos anteriores para essa associação de molas.
- Faça os gráficos  $F$  versus  $x$  para cada uma das duas combinações – em série e em paralelo.

#### ATIVIDADE 5.2)

- Utilize agora o programa *SciDAVis* (ou *Origin*) e *Excel* para determinar, por regressão linear, os valores dos parâmetros  $A$  e  $B$ , com suas respectivas incertezas, para as associações em série e em paralelo.

Bem mais rápido e preciso, não?

- Comente sobre o significado físico do parâmetro  $A$  (inclinação da reta), para cada uma das montagens. Compare a equação  $F = kx$  com a equação 5.6.
- Comente agora sobre o valor encontrado para o parâmetro  $B$ . Pelo modelo teórico qual deveria ser o seu valor? Explique.
- Utilizando os parâmetros dos outros dois gráficos, que correspondem às associações de molas em série e em paralelo, determine as constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$  das duas molas com suas respectivas incertezas.
- Tendo em vista os valores de  $k_1$  e  $k_2$  das constantes elásticas obtidas no experimento, qual associação, em série ou em paralelo, tem uma constante elástica maior? Nesse caso o conjunto ficou mais “duro” ou mais “macio”? Explique.

## Ajuste de curvas pelo processo de linearização

### Objetivo

- Usar o processo de linearização quando a dependência entre os dados não for linear.

### 6.1 LINEARIZAÇÃO

Quando duas grandezas  $x$  e  $y$  se relacionam linearmente, ou seja,  $y = ax + b$ , é possível, a partir da regressão linear dos pares de resultados obtidos  $(x, y)$ , encontrar as constantes  $a$  e  $b$  da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, conforme descrito na aula anterior. Usando os valores dessas constantes é possível tirar informações importantes relativas ao experimento.

Há, obviamente, experimentos nos quais a relação entre as grandezas estudadas não é linear, o que significa que essas grandezas não estão relacionadas por uma equação de reta. Em situações como essa, a obtenção de informações relevantes ao experimento pode ser feita de mais de uma maneira. Apresenta-se a seguir o procedimento de linearização, usando a Lei de Coulomb como exemplo.

#### 6.1.1- Procedimento de linearização

Duas pequenas esferas carregadas positivamente com cargas  $q_1$  e  $q_2$  estão separadas de uma distância  $r$ ; existe uma repulsão elétrica mútua entre elas com forças iguais e opostas  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$ , como indicado na figura abaixo.

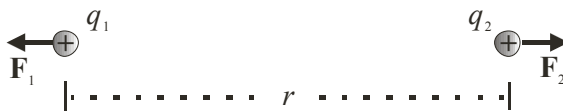


Figura 6.1 - Duas cargas positivas  $q_1$  e  $q_2$ , separadas por uma distância  $r$ , se repelem com forças  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$ .

Foi realizado um experimento, dispondo-se de um equipamento apropriado, em que se variou a distância  $r$  entre as cargas e mediu-se

o valor do módulo  $F$  da força de repulsão. Os resultados encontram-se na Tabela 6.1 e um gráfico de  $F$  versus  $r$  é mostrado na Figura 6.2.

**Tabela 6.1**  
Valores da força  $F$  em função da distância  $r$  entre duas pequenas esferas com cargas  $q_1$  e  $q_2$

$F$ ( $\pm 0,004$ N)	$r$ ( $\pm 0,1 \times 10^{-2}$ m)
2,913	1,0
2,489	1,2
1,412	1,5
0,957	1,8
0,783	2,0
0,513	2,5
0,357	3,0
0,199	4,0
0,128	5,0
0,089	6,0
0,065	7,0
0,050	8,0
0,039	9,0
0,032	10,0

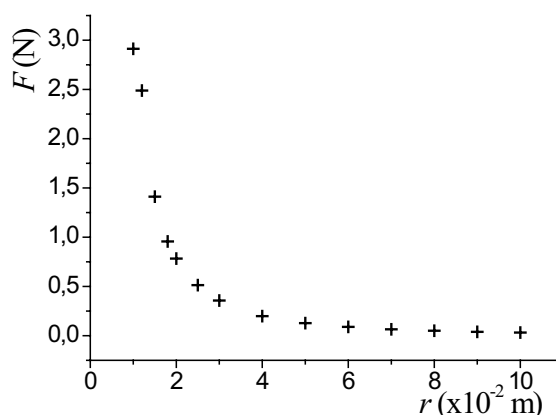


Figura 6.2 - Módulo da força de repulsão elétrica entre duas pequenas esferas com cargas  $q_1$  e  $q_2$  em função da distância  $r$  de separação entre elas.

Uma abordagem formal desse problema de força elétrica entre duas cargas pontuais mostra que a relação matemática entre  $F$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $r$  é:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (6.1)$$

em que  $K$  é uma constante que vale  $9,0 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$ . Essa relação é conhecida como Lei de Coulomb.

Considerando que as cargas  $q_1$  e  $q_2$  nas esferas não variam, deve-se esperar que a força entre elas varie com o inverso do quadrado da distância. Pode-se colocar, então, a seguinte questão: como verificar se os dados experimentais concordam com a previsão teórica?

Essa questão já foi respondida anteriormente em situações em que a relação entre as grandezas estudadas é linear, e o método de regressão linear pôde ser usado para se achar a equação da reta que melhor se ajusta aos dados obtidos. No presente caso, a relação entre  $F$  e  $r$  não é linear e não se pode aplicar esse método diretamente. Existem maneiras de se ajustar qualquer tipo de equação a dados experimentais (veja a Unidade 3); entretanto, aqui será mostrado um método que aproveita os conhecimentos já empregados no uso da regressão linear. Primeiramente tem-se que passar o gráfico obtido por um processo de linearização. Tal procedimento consiste em se encontrarem novas grandezas que sejam funções das grandezas originais, e que tenham entre si uma relação linear.

A Lei de Coulomb afirma que a força elétrica entre duas cargas pontuais varia com o inverso do quadrado da distância entre elas, ou seja, para valores de cargas constantes, pode-se escrever a lei física que deve corresponder ao presente experimento na forma:

$$F = C \frac{1}{r^2}$$

em que  $C = K q_1 q_2 = \text{constante}$ .

Definindo-se outra variável,  $X$ , igual ao inverso do quadrado de  $r$ , tem-se uma relação entre  $F$  e  $X$  que é linear. Ou seja, definindo-se uma nova grandeza  $X = 1/r^2$ , tem-se  $F = AX$ . Assim, construindo-se o gráfico de  $F$  (ordenada) em função de  $X$  (abscissa), encontra-se uma reta e, então, pode-se fazer uma regressão linear entre os valores de  $F$  e  $X$ . Resumindo, tem-se

$$Y = AX + B, \text{ em que } \begin{cases} Y = F \\ X = \frac{1}{r^2} \\ B \approx 0 \\ A = C \end{cases}$$

Os resultados desse processo são apresentados na Figura 6.3.

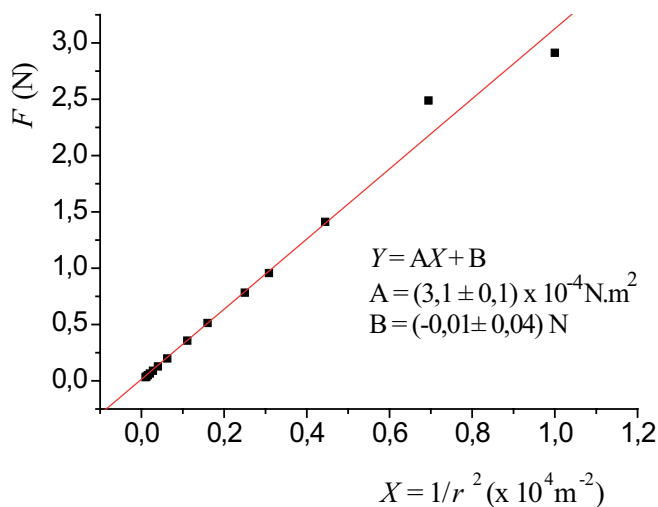


Figura 6.3 - A força  $F$  entre duas cargas elétricas é linear com o inverso do quadrado da distância entre elas  $X = 1/r^2$ . Os parâmetros do ajuste por regressão linear estão incluídos no gráfico. Observe que os erros só têm um algarismo significativo, e como isso influencia os valores dos parâmetros  $A$  e  $B$ .

O procedimento para se linearizar um gráfico depende de cada situação, pois as equações envolvidas na análise do problema é que irão dar a “receita” do que deve ser feito para se encontrarem novas variáveis, ou seja, funções das anteriores que tenham relação linear entre si. No caso aqui apresentado, o procedimento foi simplesmente relacionar a força e o inverso do quadrado da distância.

### 6.1.2- Uso da função logaritmo

Uma maneira muito comum de se procurar relações que linearizem um gráfico é aplicar a função logaritmo. Entretanto, deve-se ter o cuidado em utilizar esse expediente apenas em situações em que pelo menos uma das variáveis envolvidas no experimento esteja no expoente. Por exemplo, vários fenômenos físicos têm uma descrição formal entre as variáveis  $x$  e  $y$  do tipo

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 e^{\alpha_2 x} \quad \text{ou} \quad y = \beta_0 + \beta_1^{\beta_2/x},$$

em que  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  são constantes, as quais necessitam da função logaritmo para sua linearização.

O uso do logaritmo na situação do exemplo anterior, de força entre cargas elétricas, pode levar a um mascaramento do comportamento das grandezas. Por exemplo, tomando-se o logaritmo de ambos os lados da equação 6.1 tem-se uma nova relação matemática correspondente ao experimento:

$$\ln F = -2 \ln r + \ln C \quad \text{com} \quad C = K q_1 q_2 .$$

A equação anterior tem a forma de equação de uma reta

$$Y' = A' + B' X' \quad \text{onde, agora,} \quad \begin{cases} Y' = \ln F \\ X' = \ln r \\ B' \approx -2 \\ A' = \ln C \end{cases}$$

Ao se fazer a regressão linear nos novos dados, o parâmetro  $B'$  será ajustado por métodos de mínimos quadrados, podendo ser encontrado um valor diferente de  $-2$ . Isso é feito, pois, ao buscar o mínimo da soma dos quadrados das diferenças  $\delta_i$ , o método leva as flutuações naturais a qualquer processo de coleta de dados, para os parâmetros ajustáveis  $A'$  e  $B'$ . Entretanto, sabe-se muito bem que o expoente da distância entre as cargas pontuais na Lei de Coulomb é 2 (exatamente!), e não tem sentido se querer ajustar esse valor, ou seja, esta não é uma variável no problema.

É importante chamar a atenção de que o processo de linearização de um gráfico consiste simplesmente em encontrar as ordenadas e abscissas adequadas, de modo que a relação entre elas seja linear. Em várias situações o uso da função logaritmo pode ser o processo mais conveniente, mas não é sempre assim. A escolha da maneira mais conveniente para se fazer a linearização de um gráfico deve ser orientada no sentido de se obter, de maneira mais simples, as constantes procuradas.

## 6.2 ATIVIDADE PRÁTICA: MÓDULO DE FLEXÃO DE UMA HASTE

### Introdução

Para um arqueiro atirar uma flecha, ele flexiona mais o arco, o qual retorna a sua posição original quando a flecha é liberada. Esse fato exemplifica como funciona um objeto elástico. A elasticidade é a propriedade pela qual a forma se altera quando uma força deformante é aplicada sobre o objeto, o qual retorna à forma original quando a força deformante é retirada.

Esse tipo de deformação ocorre, por exemplo, quando vigas são usadas horizontalmente e tendem a vergar-se sob cargas pesadas. Quando uma viga horizontal é sustentada por uma ou por ambas as extremidades, ela se encontra tanto sob tensão (puxada) como sob compressão (empurrada), devido à carga que ela sustenta e ao seu próprio peso.

Considere a viga horizontal sustentada por uma das extremidades na Figura 6.4 (conhecida como “viga em balanço” ou “viga cantiléver”). Ela se verga devido ao próprio peso e ao peso da carga que ela sustenta na extremidade livre. Basta pensar um pouco para

perceber que o lado superior da viga está sendo distendido. Seus átomos foram afastados além do normal. O lado superior é um pouco mais comprido do que o lado inferior, pois está sob tensão. Seguindo o raciocínio, percebe-se que o lado inferior da viga está sob compressão. Seus átomos foram aproximados uns dos outros além do normal. Ela é um pouco mais curta no lado de baixo do que no lado de cima devido à maneira como foi vergada. A parte superior está sob tensão e a parte inferior sob compressão. Você consegue perceber que entre o lado superior e o inferior existe uma região onde não existem esforços no interior do material, nem tensão nem compressão? Essa região é denominada camada neutra.

A viga horizontal mostrada na Figura 6.5, conhecida como “viga simples”, é sustentada por ambas as extremidades e suporta o peso de uma carga situada no meio. Nessa situação, existe compressão no lado superior da viga e tensão no lado inferior da mesma. Novamente, existe uma camada neutra ao longo da parte central da espessura da barra, ao longo de todo seu comprimento.

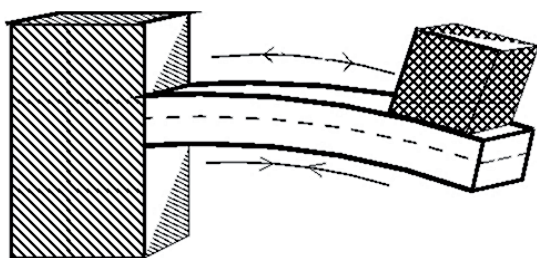


Figura 6. 4 - “viga em balanço” ou “viga cantilever”.

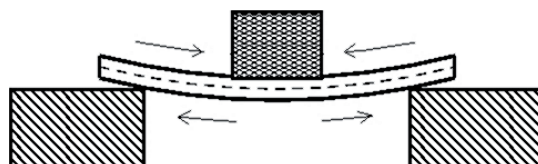
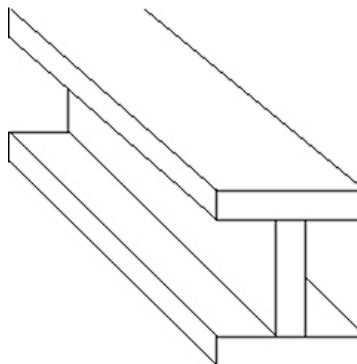


Figura 6. 5 - “viga simples”.

Com a camada neutra em mente, podemos compreender a razão para que a seção transversal de vigas de aço tenha o formato da letra I (Figura 6.6). A maioria do material nessas vigas com seção transversal em “I” está concentrada nas bordas do topo e do fundo da seção transversal; o pedaço de material que une as duas bordas, denominado alma de viga, contendo a camada neutra, pode ser muito menos largo do que as bordas. Assim, quando a viga é usada horizontalmente numa construção, o esforço está concentrado nas bordas superior e inferior da viga e não na parte central cuja função principal é manter unidas as bordas.<sup>1</sup>

Figura 6.6 - Uma viga em “I” é como uma barra sólida em que parte do aço foi escavada na sua região central, onde era menos necessário. A viga obtida é, portanto, mais leve e tem a mesma resistência.



<sup>1</sup> Sobre esse assunto, cf. HEWIT, P. G. *Física conceitual*. 9. ed. Porto Alegre: Bookman 2002.

A grandeza que mede como um determinado material reage a uma força que tende a flexionar o objeto é o Módulo de Young para Flexão  $E$  – ou simplesmente Módulo de Flexão. No caso de uma haste, abaixo de um valor limite para a flexão, define-se uma constante de flexão  $k_f$  que se relaciona com o módulo de flexão  $E$  pela equação

$$k_f = \frac{Ee^3}{x^3} . \quad (6.2)$$

$E$  – módulo de flexão

$l$  – largura da barra

$e$  – espessura da barra

$x$  – comprimento da barra

Até certo limite em sua intensidade, ao ser aplicada uma força  $F$  na extremidade livre de uma haste, esta irá apresentar uma flexão  $y$  que é diretamente proporcional à força aplicada. Essa relação, já observada pelo físico britânico Robert Hooke, em meados do século 17, é denominada Lei de Hooke:

$$F = k_f y . \quad (6.3)$$

Levando a expressão de  $k_f$  na equação 6.3, pode-se escrever

$$F = k_f y = \frac{Ee^3}{x^3} y$$

Assim, em um experimento em que se pretende medir a flexão,  $y$ , de uma haste em função de seu comprimento,  $x$ , se forem mantidas constantes todas as outras grandezas (a força aplicada, a largura, a espessura e o material da haste), os dados experimentais obtidos devem corresponder à equação

$$y = Kx^3 \quad (6.4)$$

em que  $K = \frac{F}{Ee^3}$  é uma constante.

### Objetivo

- Determinar o módulo de flexão  $E$  de um material.

### Material utilizado

- Haste de aço; prendedores; suportes; objeto com massa ( $m \pm \Delta m$ ); régua milimetrada; e paquímetro.

### Procedimentos

- Determine a espessura e a largura da haste utilizada, com suas respectivas incertezas, usando régua e paquímetro.
- Faça uma montagem semelhante à esquematizada pela Figura 6.7.
- Adicione o suporte com os objetos de massa  $m$  na extremidade livre da haste. Não coloque mais que 700 g em sua extremidade.
- Faça medidas da flexão  $y$  para vários comprimentos  $x$  da haste, como ilustra a Figura 6.7, e registre-as numa tabela.

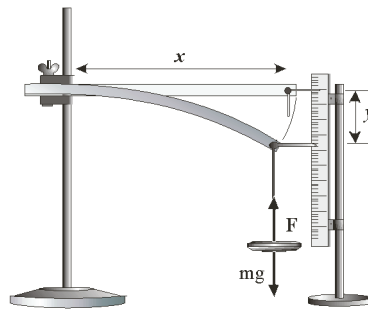


Figura 6.7 - Deformação de flexão  $y$  de uma barra sujeita a uma força  $F$ , aplicada a uma distância  $x$  da extremidade fixa; a flexão  $y$  é dependente da distância de aplicação da força.

- Utilize os dados registrados em sua tabela para fazer o gráfico da flexão  $y$  da haste em função do comprimento  $x$ . Observe que a relação entre  $y$  e  $x$  não é linear.
- Faça uma linearização, ou seja, faça um gráfico de  $y$  versus  $x^3$  e, em seguida, uma regressão linear para determinar o Módulo de Flexão  $E$  da sua haste e sua incerteza  $\Delta E$ .
- Explique por que o valor encontrado para a incerteza  $\Delta E$  do Módulo de Flexão teve um valor alto.
- Compare e comente o resultado encontrado no experimento com o valor médio do Módulo de Flexão para vários tipos de aço, que é de  $(4,5 \pm 0,5) \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

## Ajuste de curvas por regressão não linear

### Objetivo

- Utilização do processo de regressão não linear para os casos de comportamentos descritos por uma relação exponencial, polinomial, logarítmica ou lei de potência.

### 7.1 DEPENDÊNCIA NÃO LINEAR

Por muitas vezes a dependência teórica entre as variáveis  $X$  e  $Y$  é conhecida, sendo descrita por uma das formas abaixo:

$$\text{exponencial } y = ke^{ax} \quad (7.1)$$

$$\text{polinomial } y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + zx^n. \quad (7.2)$$

$$\text{logarítmica } y = k \log(ax) \quad (7.3)$$

$$\text{lei de potência } y = k(b)^{ax} \quad (7.4)$$

Nesse caso, uma opção para a técnica de linearização consiste em se determinar diretamente os parâmetros  $k$  e  $a$  nas relações (7.1), (7.3) e (7.4) ou  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... na relação (7.2). Como antecipamos na seção 5.1.2 da Aula 5, o método matemático genérico que permite esse tipo de ajuste é chamado de “Método de Mínimos Quadrados”. A ideia é procurar parâmetros que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos  $\delta_i$  para a função desejada, como foi feito na equação 5.2 da Aula 5 para o caso particular do ajuste de retas.

### 7.2 REGRESSÃO NÃO LINEAR COM O EXCEL

A seguir vamos mostrar como isso pode ser feito usando-se o *Excel*, mas um procedimento semelhante pode ser realizado tanto com os programas *Origin*, *SciDAVis* e *QTiplot*.

De fato, a execução deve seguir os mesmos passos da seção 5.2 da Aula 5, exceto que no item 2 (veja Figura 5.3 – Aula 5) se escolheria a opção de linha de tendência “exponencial” ou “polinomial” ou “logarítmica” ou “lei de potência”.

**ATIVIDADE 7.1)** A atividade de um material radioativo decai com o tempo. O estudo de uma pastilha de Césio 137 usada em tratamento de radioterapia forneceu a seguinte tabela:

Tempo (horas)	Atividade (Roetngen)
0	1
2	0,79
4	0,63
6	0,5
8	0,4
10	0,32
12	0,25

A lei que descreve esse tipo de comportamento é do tipo  $A=be^{kt}$ ; nessa função  $A$  é a atividade e  $t$  é o tempo;  $b$  e  $k$  são constantes. Essa função é uma função exponencial natural do tipo  $y=be^{kx}$ .

- 1) Construa o gráfico de maneira correta como visto na aula sobre construção de gráficos.
- 2) Determine o valor das constantes  $b$  e  $k$ .
- 3) Qual seria a atividade da pastilha de Césio 3,5 horas após o início do experimento?

**ATIVIDADE 7.2)** Na tabela a seguir temos a massa molecular,  $M$ , e o raio  $r$  de algumas moléculas. Faça um gráfico da massa em função do raio e tente estimar que tipo de lei descreve essa dependência.

Raio $r$ ( $10^{-10}$ m)	$M$ (g/mol)
3.9	180
4.8	390
5.6	580
12.5	5000
18	13500
27	35000
31	68000

### 7.3 REGRESSÃO NÃO LINEAR COM O *SciDAVis*

Quando nos deparamos com um sistema que não tem comportamento linear podemos agir de duas formas: fazer um ajuste não linear ou linearizá-lo. Vamos ver aqui, com um exemplo, como fazer o ajuste não linear.

Suponha que em um país o número registrado de pessoas infectadas pelo vírus da gripe suína *Influenza A* (H1N1) evolua conforme a tabela a seguir.

**Tabela 7.1**  
Número registrado de pessoas infectadas pela *Influenza A (H1N1)* por dia

Tempo (dias)	Número de casos
0	1
1	3
3	5
3	21
4	64
5	139
6	354

Fazendo o gráfico do número de casos em função do tempo (Figura 7.2) podemos perceber que esse é um caso de comportamento não linear.

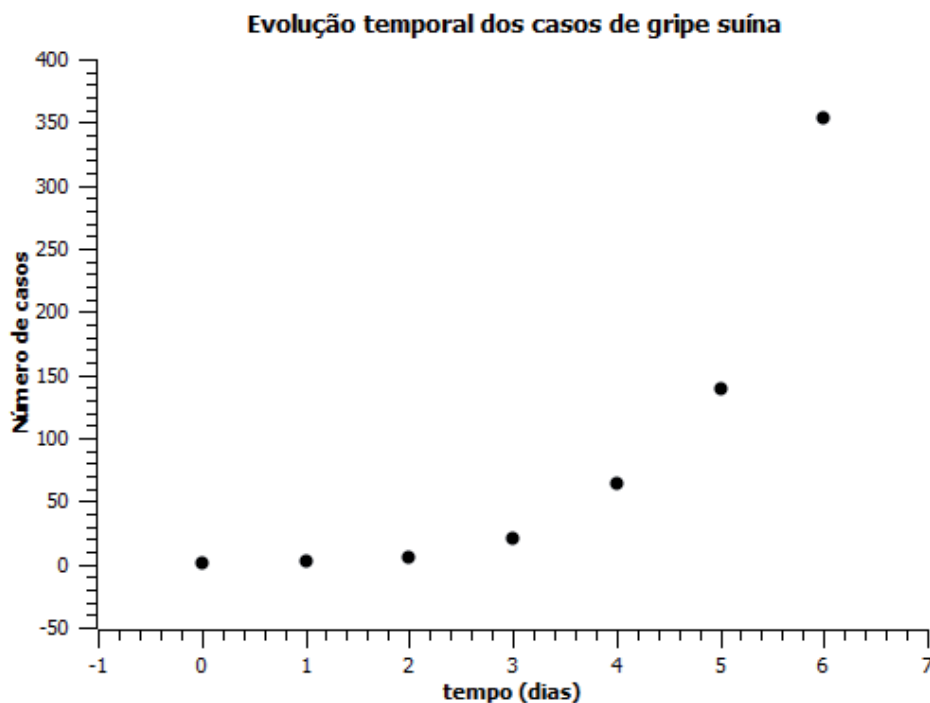


Figura 7.2 - Gráfico da evolução temporal dos casos de gripe suína.

Aparentemente, a taxa que aumenta o número de casos é proporcional ao próprio número de casos, o que faz sentido. Suponha uma situação na qual uma pessoa infectada passe o vírus para outra pessoa a cada dia. Se no primeiro dia havia uma pessoa com o vírus, no segundo haverá duas, a pessoa que já estava infectada mais uma que ela infectou. No terceiro dia haverá quatro pessoas infectadas, pois cada um infectou mais um. Então serão dois que já estavam infectados mais dois que foram infectados. Seguindo o raciocínio no quinto dia serão oito pessoas, no sexto, 16, no sétimo, 32, no oitavo, 64, no nono, 128, no décimo, 256, e assim por diante. Ou seja, quanto mais pessoas estiverem infectadas mais pessoas irão se infectar.

Uma função cuja taxa de variação é proporcional a ela mesma é chamada de função exponencial. Se a taxa é positiva, chamamos de crescimento exponencial, se a taxa é negativa, será um decaimento exponencial. Com intuito de apresentar a notação vamos mostrar o formalismo matemático empregado, mas não é necessário se deter nisso.

Seja  $F(x)$  uma função exponencial, em que a constante de proporcionalidade  $k$  também é chamada de taxa de crescimento. A equação é dada por:

$$F(x) = F_0 e^{kx},$$

onde  $F_0$  é o valor de  $F(x)$  quando  $x$  é igual a zero ( $e^0 = 1$ ); assim sendo  $F_0$  tem a mesma unidade de  $F$ . Além disso,  $e^1 = e = 2,71828\dots$  é o número de Euler.

Muitas vezes a exponencial também é apresentada na forma  $\exp(kx)$ . Como  $k$  vezes  $x$  (ou seja,  $kx$ ) é um expoente, e este deve ser adimensional (sem unidades), a unidade de  $k$  deve ser o inverso da unidade de  $x$ .

Voltando ao exemplo, se em tal país o número de pessoas infectadas pela gripe suína é  $N$  e o tempo é  $t$ , podemos escrever que

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad (7.5)$$

Assim sendo, devemos ajustar essa função aos pontos experimentais. Já existe no *SciDAVis* os ajustes de crescimento exponencial e decaimento exponencial de primeira, segunda e terceira ordem. No entanto, vamos fazer esse ajuste criando a função dada pela equação 7.5.

#### USANDO O ASSISTENTE DE AJUSTE DO *SciDAVis*

A princípio podemos criar qualquer função para ajustar a pontos experimentais. Para isso vamos usar o assistente de ajuste. Há duas formas de iniciar tal assistente, a primeira é apertando as teclas **ctrl+y**. A segunda é através do menu Análise, como mostra a Figura 7.3.

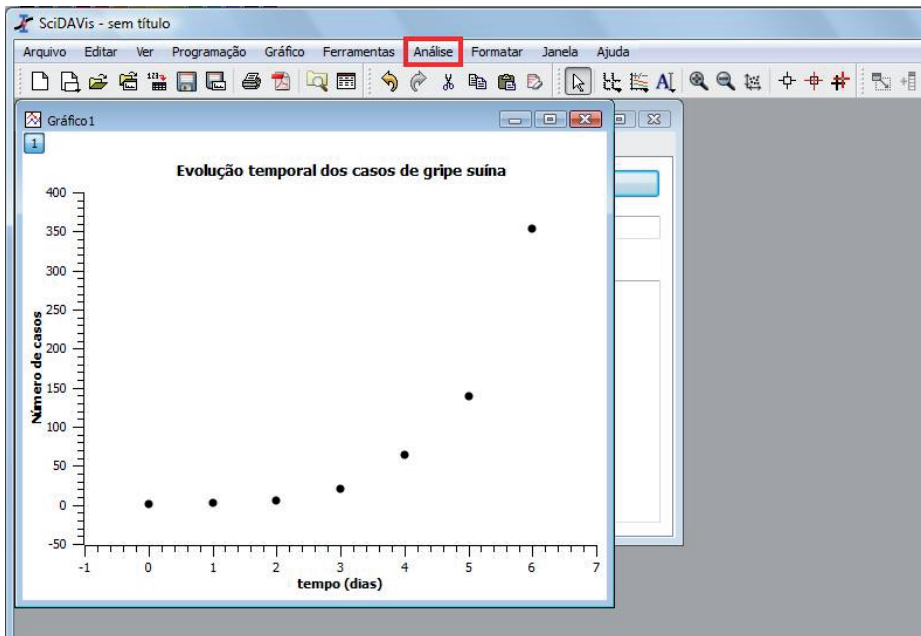


Figura 7.3 - Escolha do menu “Análise”

Depois escolha “assistente de ajuste” (Figura 7.4).

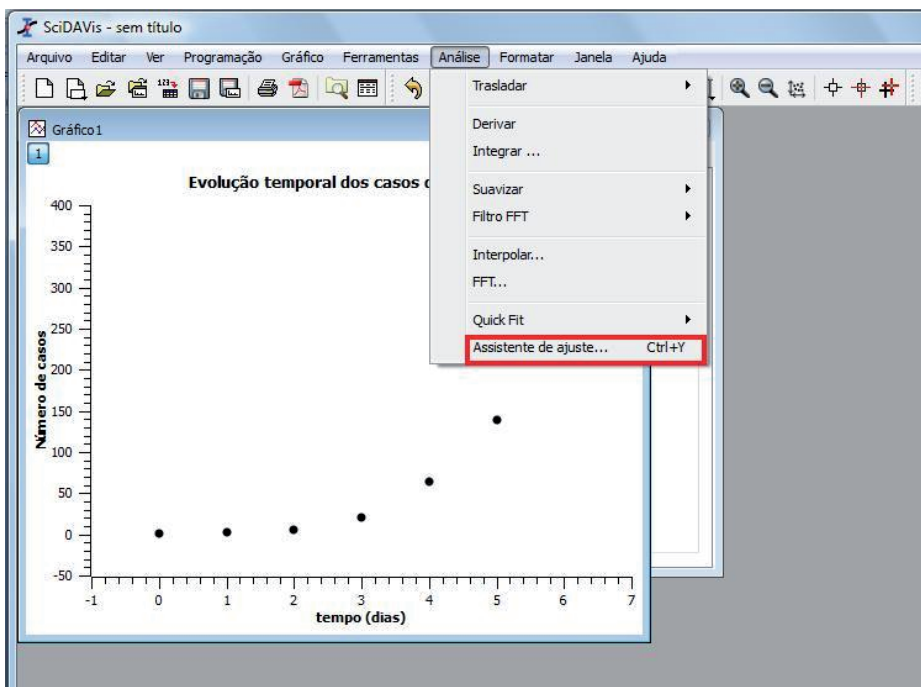


Figura 7.4 - Seleção do “assistente de ajuste”.

A janela do assistente de ajuste irá abrir. No quadro função vemos uma lista de funções que podemos escolher. Veja a Figura 7.5.

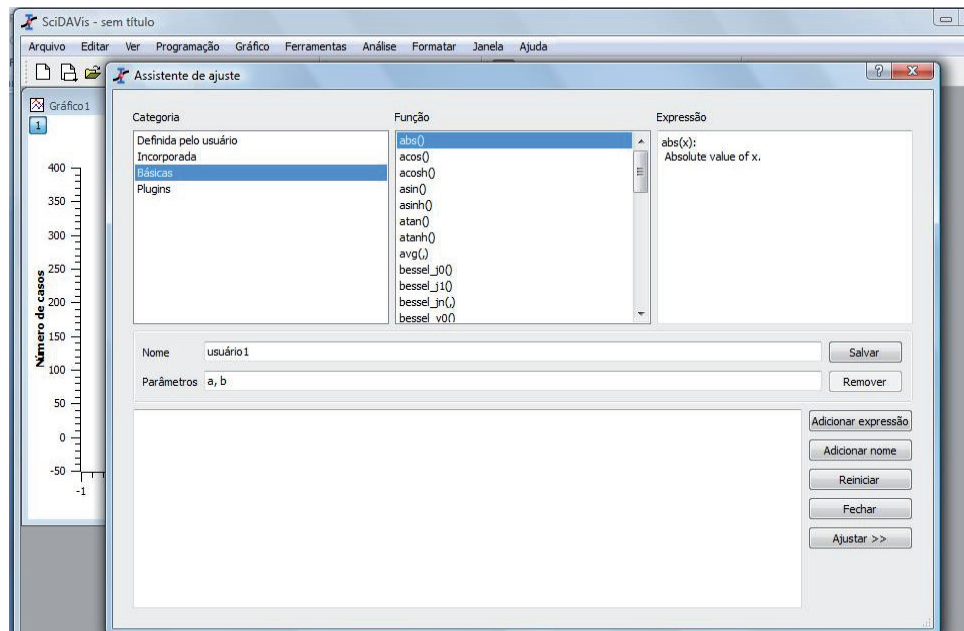


Figura 7.5 - Escolha da função de ajuste dentro da lista disponível.

Desça a barra de rolagem até encontrar a função **exp()**, em seguida clique no botão “Adicionar expressão”, como aparece na Figura 7.6.

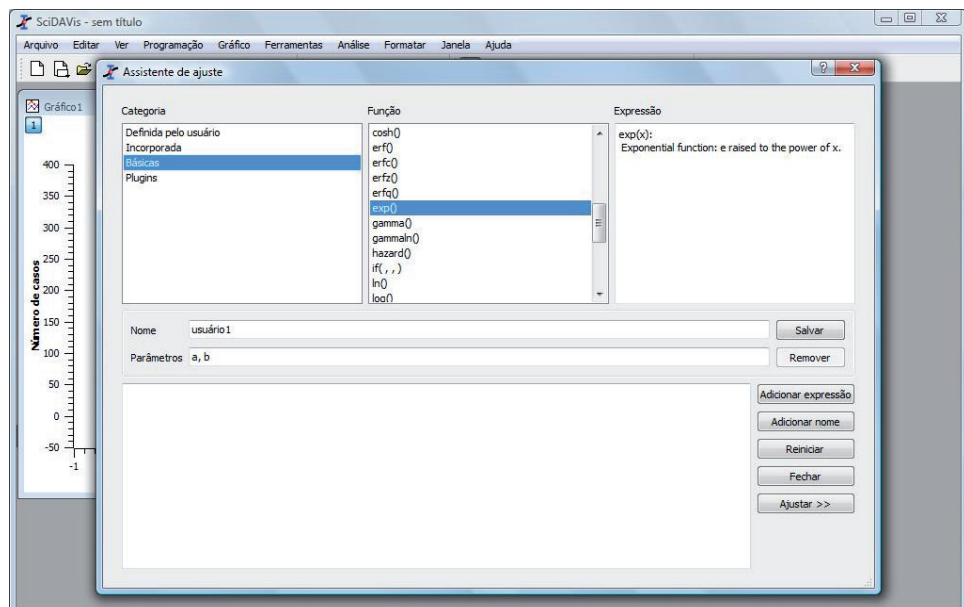


Figura 7.6 - Seleção da função exponencial no “assistente de ajuste”.

Vamos editar a função para que fique no formato que queremos. Como visto, temos dois parâmetros na equação de crescimento exponencial. O valor da função  $N$  quando  $x$  é zero, “ $N_0$ ”, e a taxa de crescimento é “ $k$ ”. Portanto, vamos colocar esses dois itens na caixa de parâmetros no lugar de  $a$  e  $b$  que se encontram previamente escritos na caixa. Se for de seu gosto, pode mudar o nome da função de usuário 1 para crescimento exponencial na caixa “Nome”, por exemplo. Veja os detalhes na Figura 7.7.

Agora temos que escrever a função na forma:  $No * exp(kx)$ . O asterisco (\*) é o símbolo da multiplicação no *SciDAVis*.

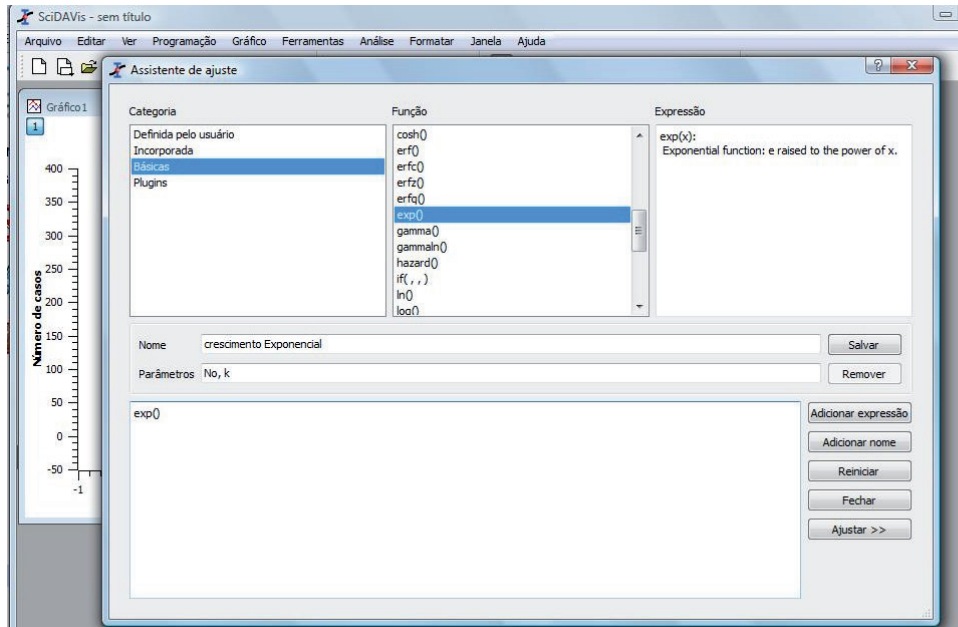


Figura 7.7 - Mudança no nome dos parâmetros genéricos “a” e “b”.

Com a função editada corretamente, podemos salvá-la, clicando no botão “Salvar”. Com isto poderemos usá-la em outro conjunto de dados que se comporte da mesma maneira. A seguir clique no botão “Ajustar” para prosseguir com o ajuste (Figura 7.8).

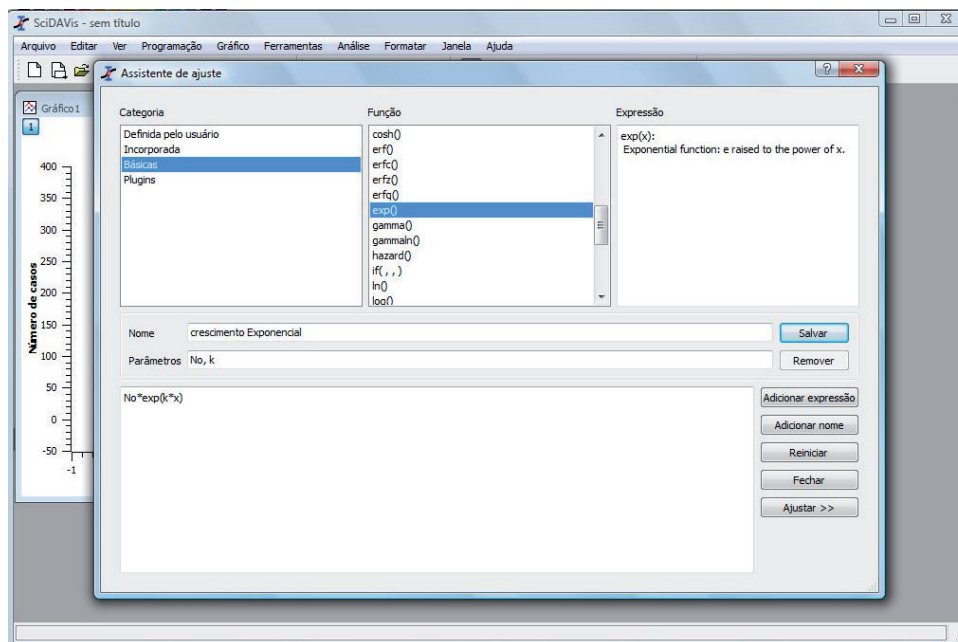


Figura 7.8 - Salvando a função modificada para uso futuro.

A janela de ajuste irá se alterar para o formato onde você poderá escolher mais detalhes, como o algoritmo, quantas iterações esse algoritmo irá fazer, precisão. Além disso, você poderá escolher os detalhes do formato de saída dos parâmetros.

Em geral os parâmetros padrão do programa são bons para as nossas aplicações. Único ponto que devemos tomar mais cuidado é com as estimativas iniciais dos parâmetros do ajuste. Muitas vezes acontece de o algoritmo não convergir, e grande parte das vezes que isso acontece é devido a uma má escolha dessas estimativas.

No exemplo proposto, temos uma boa estimativa para  $N_0$ , já que o valor inicial na Tabela 7.1 é 1. Para a taxa de crescimento sabemos que ela deve ser um valor positivo. Portanto, as estimativas iniciais de 1,0 para  $N_0$  e para  $k$  estão boas. Dessa forma estamos aptos a realizar o ajuste. Para isso, clique no botão “Ajustar”, conforme mostra a Figura 7.9.

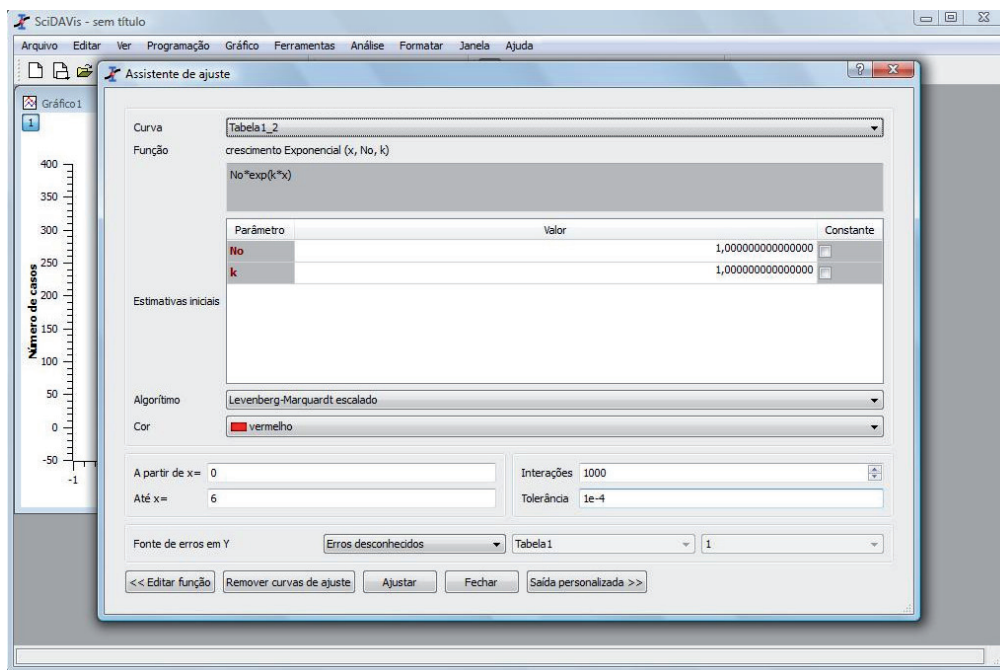


Figura 7.9 - Estimativas iniciais para os itens que serão ajustados.

Os valores dos parâmetros serão mostrados na janela “Registro de resultados” (Figura 7.10).

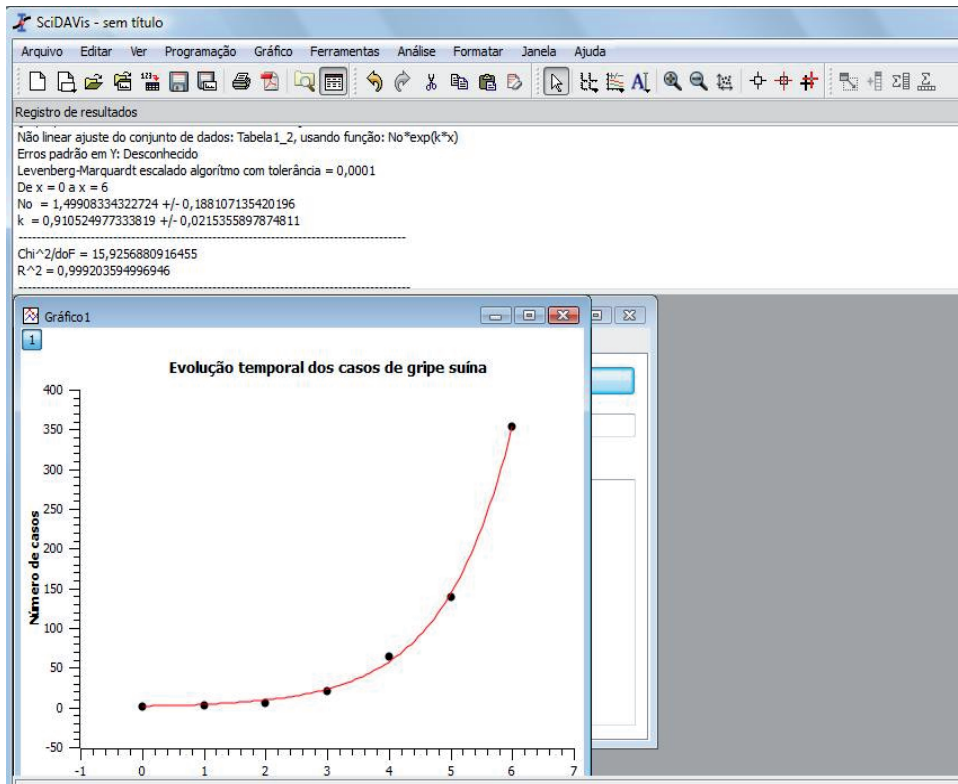


Figura 7.10 - Estimativas iniciais para os itens que serão ajustados.

No exemplo dado, na janela “Registro de resultados”, aparecerão os seguintes parâmetros:

Não linear ajuste do conjunto de dados: Tabela1\_2, usando função:  $No * \exp(k * x)$

Erros padrão em Y: Desconhecido

Levenberg-Marquardt escalado algoritmo com tolerância = 0,0001

De  $x = 0$  a  $x = 6$

$No = 1,49908334322724 \pm 0,188107135420196$

$k = 0,910524977333819 \pm 0,0215355897874811$

-----  
 $\chi^2/df = 15,9256880916455$

$R^2 = 0,999203594996946$

O que nos dá como resultado final:

$$N_0 = 1,5 \pm 0,2$$

$$k = 0,91 \pm 0,02 \frac{1}{\text{dia}}$$

Quando não se sabe bem qual é a dependência entre os pontos, pode-se tentar ajustar várias funções ao conjunto de pares experimentais e buscar qual delas produz o menor resíduo. Contudo, é importante ter atenção especial para não tentar ajustar coeficientes que são conhecidos e exatos, como foi o caso do expoente “2” da Lei de Coulomb, como discutido na aula sobre linearização.

**ATIVIDADE 7.3)** Um biólogo fez medidas da dependência, com relação à temperatura, do tempo necessário para que um pulso de corrente contínua excite o axônio de uma lula. Faça um gráfico da tempo de excitação em função da temperatura e tente estimar que tipo de lei descreve esta dependência.

Temperatura (°C)	Tempo (ms)
5	4,1
10	3,4
15	1,9
20	1,4
25	0,7
30	0,6
35	0,4

**ATIVIDADE 7.4)** O desenvolvimento de um recém-nascido é acompanhado, entre outras coisas, pela circunferência de sua cabeça, sua massa corporal e altura. Esses dados para uma criança estão na tabela abaixo em função da idade em meses. Faça um gráfico desses três parâmetros.

Idade (meses)	Massa (kg)	Altura (cm)	Circunferência da cabeça (cm)
0,5	3,320	50,5	37
1	3,800	54	38
2	5,010	56	40
3	6,150	61	41,5
4	7,100	63,5	42,5
5	8,000	65,5	43
6	8,800	69	42,5

É possível determinar uma lei matemática que descreva o comportamento de algum desses parâmetros em função do tempo?

## 7.4 ATIVIDADE PRÁTICA: LEI DE NEWTON PARA O RESFRIAMENTO

### Introdução

Quando dois objetos, com temperaturas diferentes, são colocados em contato térmico, há transferência de calor do objeto mais quente para o mais frio, até ambos atingirem a mesma temperatura.

Para um sólido em contato térmico com um fluido, em que  $T$  é a temperatura do objeto e  $T_a$  é a temperatura do ambiente em torno dele, a taxa de resfriamento (variação da diferença de temperatura ao longo do tempo) é dada pela expressão

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-kt} \quad \text{ou} \quad T = T_a + \Delta T_0 e^{-kt}, \quad (7.5)$$

onde  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre o objeto (superfície do sólido) e a vizinhança (massa principal do fluido) no instante inicial  $t=0$ , e  $\Delta T$  é a diferença de temperatura após um certo intervalo de tempo  $t$ . A constante  $k$  depende de vários fatores – de a superfície ser plana ou curva, ou ainda, de ser vertical ou horizontal; de o fluido ser um gás ou um líquido; da densidade, da viscosidade, do calor específico e da condutividade térmica do fluido, entre outros. Essa relação é conhecida como Lei de Newton para o resfriamento.

### Objetivo

- Determinar a curva de resfriamento de um termômetro e verificar a validade da Lei de Newton para o resfriamento.

### Material utilizado

- Termômetro comum – ou termômetro digital conectado a um computador, para aquisição automática de dados – sistema para aquecimento da ponta do termômetro ( $\sim 60$  °C) e recipiente com água.

### Procedimentos

- Meça a temperatura ambiente.
- Aqueça a água até que ela entre em ebulição.
- Mergulhe o termômetro na água, aguarde alguns minutos e anote a temperatura.
- Retire o termômetro da água e acione o cronômetro, simultaneamente.
- Leia a temperatura nos instantes indicados no quadro 1 e registre.
- Construa o gráfico de  $\Delta T$  em função do tempo.

- Obtenha a constante  $k$  fazendo um ajuste exponencial, supondo que seja aplicável a Lei de Newton para o resfriamento.
- Repita esses procedimentos, mas colocando o termômetro em um recipiente com água à temperatura ambiente, imediatamente após retirá-lo da água quente.
- Comente a validade da Lei de Newton para o resfriamento para os dois casos.

**Questão:** Observe os valores de  $k$  para o resfriamento na água e no ar. Com base nesses valores, conclua onde uma pessoa sentirá mais frio: dentro ou fora da água, estando, tanto a água quanto o ar, a 20 °C?

Existe uma explicação para a maior urgência para urinar quando se está com frio ou dentro da água? (Lembre-se que crianças sempre urinam em piscinas!)

Quadro 1 (Ar)			Quadro 2 (Água)		
$t$ (s)	$T$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$t$ (s)	$T$ (°C)	$\Delta T$ (°C)
0			0		
5			5		
10			10		
15			15		
20			20		
25			25		
30			30		
40			40		
50			50		
60			60		
80			80		
100			100		
120			120		
150			150		
210			210		
230			230		
250			250		
270			270		
300			300		

## Atividade prática de avaliação

### Objetivo

- Realizar uma atividade prática para avaliação das habilidades desenvolvidas até o momento.

### 8.1 ATIVIDADE PRÁTICA: PÊNDULO SIMPLES

---

#### Introdução

Na natureza, existe um grande número de fenômenos em que se observam eventos periódicos, ou seja, que se repetem em intervalos regulares de tempo. As ondas sonoras, a vibração de uma corda de um instrumento musical, as radiações eletromagnéticas e o movimento dos elétrons em um campo elétrico alternado são alguns exemplos. Embora a natureza dessas oscilações seja bastante diversa, as formulações matemáticas utilizadas para descrevê-las são parecidas, divergindo na sua complexidade.

Um sistema cuja descrição matemática é simples e muito útil para compreender as características gerais dos movimentos oscilatórios e periódicos é o **pêndulo simples**.

Um pêndulo simples é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme suspenso por um fio inextensível de massa desprezível (Figura 8.1). Quando o corpo puntiforme é puxado lateralmente a partir da sua posição de equilíbrio e a seguir libertado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. As seguintes situações familiares podem ser modeladas como pêndulo simples: uma bola de demolição presa no cabo de um guindaste, o peso da extremidade de um fio de prumo e uma criança sentada em um balanço.

A trajetória do corpo puntiforme (algumas vezes chamado de peso) não é uma linha reta, mas um arco de circunferência de raio  $L$  igual ao comprimento do fio. Usaremos como coordenada a distância  $x$  medida ao longo do arco. Para que a oscilação seja um movimento harmônico simples é necessário que a força restauradora seja diretamente proporcional à distância  $x$  ou ao ângulo  $\theta$  (porque  $x = L\theta$ ).

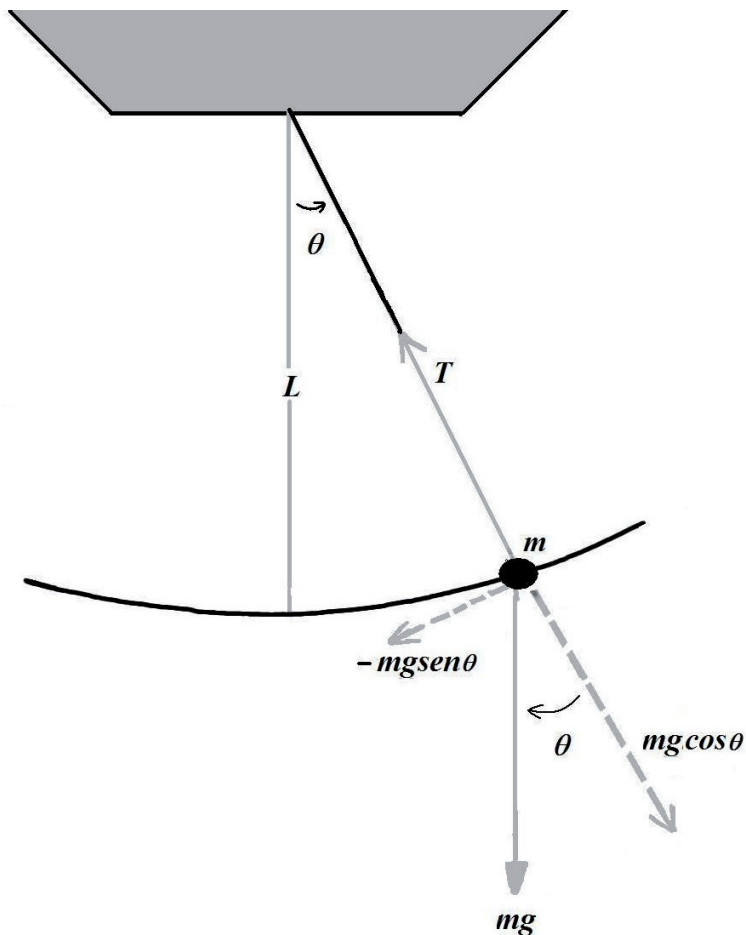


Figura 8.1 - Pêndulo simples.

A força restauradora é fornecida pela gravidade: a tensão  $T$  atua meramente para fazer o peso puntiforme se deslocar ao longo de um arco (Figura 8.1). A força restauradora não é proporcional a  $\theta$ , mas sim a  $\text{sen}\theta$ ; portanto, o movimento não é harmônico simples. Contudo, quando o ângulo  $\theta$  é pequeno,  $\text{sen}\theta$  é aproximadamente igual ao ângulo  $\theta$  em radianos. Por exemplo, quando  $\theta = 0,1$  rad (aproximadamente igual a  $6^\circ$ ),  $\text{sen}\theta = 0,0998$ . Como pode se ver há uma diferença de apenas 0,2%.

Dessa forma a força restauradora é dada pela expressão  $F = mg \frac{x}{L}$ .

Observe que a força é proporcional ao deslocamento  $x$ . Essa é a condição básica para que o movimento seja um movimento harmônico simples, cujo período será dado pela expressão

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Nesse caso a constante  $k$  será igual a  $\frac{mg}{L}$ . Substituindo  $k$  na expressão do período temos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8.1)$$

É importante ressaltar que o movimento de um pêndulo simples é aproximadamente harmônico simples. Quando a amplitude é grande, o período é determinado em uma série infinita dada pela equação 8.2.

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{2^2} \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3}{4^2} \text{sen}^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \quad (8.2)$$

em que  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Para se verificar a validade dessa aproximação, pode-se calcular o valor do período para  $\theta = 15^\circ$  e verificar que o período real é cerca de 0,5% maior que o período aproximado, calculado pela equação 8.1.

### Objetivo

- Determinar o valor da aceleração da gravidade através de medidas do período de um pêndulo simples.

### Material utilizado

- Barbante fino; esfera de metal; cronômetro; e régua.

### Procedimentos

O experimento consiste em medir o período do pêndulo variando seu comprimento. Para isso, você deve usar uma montagem como a mostrada na Figura 8.2.

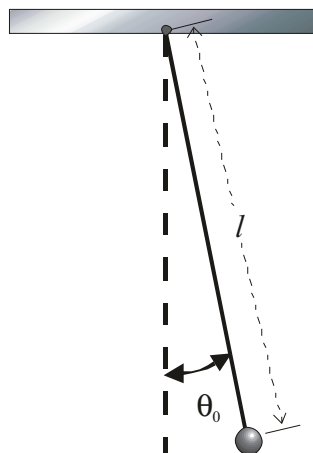


Figura 8.2 - Pêndulo simples em pequenas oscilações ( $\theta_0 \leq 10^\circ$ ).

- Estabeleça um comprimento inicial  $L \cong 2,00$  m e meça o período,  $T$ , do pêndulo. Reflita sobre a melhor maneira de se realizar essa medida a fim de se obter um bom valor para  $T$ .
- Repita o procedimento para vários valores de comprimento do fio e construa uma tabela com os dados obtidos. Tenha o cuidado de obter valores de  $L$  bem distribuídos, incluindo  $L \cong 0,20$  m;  $0,30$  m; ..., a fim de perceber, claramente, o caráter não linear da relação entre  $T$  e  $L$ .
- Construa um gráfico de  $T \times L$ . Observe que os pontos registrados no gráfico não se situam sobre uma reta, como era de se esperar, de acordo com a equação 8.2.
- Utilizando um processo de linearização e fazendo, em seguida, uma regressão linear nos dados, determine o valor da aceleração da gravidade com seu respectivo erro.
- Compare seus resultados em relação ao valor local de  $g$ , conhecido por meio de outros processos.

**Problema experimental (opcional)**

Calcule qual deve ser o comprimento de um pêndulo simples cujo período é de 1,0 s. Construa esse pêndulo, meça o período e comente o resultado. Determine a precisão máxima de um relógio construído com base em um pêndulo desse comprimento.

## **UNIDADE 3**

### **Experimentos de maior interesse para as Ciências Biológicas**



## Atividade prática

### Colisões inelásticas

#### Objetivos

- Relacionar a colisão inelástica dos corpos e a energia gasta na deformação dos mesmos.
- Utilização do processo de regressão não linear para o caso de um comportamento descrito por uma lei de potência.

---

#### INTRODUÇÃO

Colisão é o encontro entre dois ou mais corpos. Nessa prática, estudaremos a colisão entre dois corpos, a saber: uma bola de borracha e o chão.

Colisões são classificadas em dois tipos a partir da análise da energia cinética do sistema antes e depois da colisão. Dizemos que a colisão é **elástica** quando há **conservação da energia cinética** ( $E_c$ ).

Já no outro tipo de colisão, a **inelástica**, **não se verifica a conservação da energia cinética**. Na verdade, parte dessa energia é utilizada na **deformação dos corpos**. Nesse tipo de colisão há uma situação extrema: quando os corpos **permanecem unidos** após a colisão. Nesse caso, dizemos que a **colisão é perfeitamente inelástica**.

---

#### ANÁLISE DE UMA SITUAÇÃO: UMA BOLA EM QUEDA LIVRE

Considere uma bola de borracha que, ao ser solta de uma altura  $h_i$ , chega ao chão com velocidade  $v_p$ , como representado na Figura 9.1a. Durante o contato com o chão, a bola comprime-se e perde parte de sua energia cinética; em seguida, salta, com velocidade  $v_j$ , atingindo uma altura  $h_j$ , como representado na Figura 9.1b.

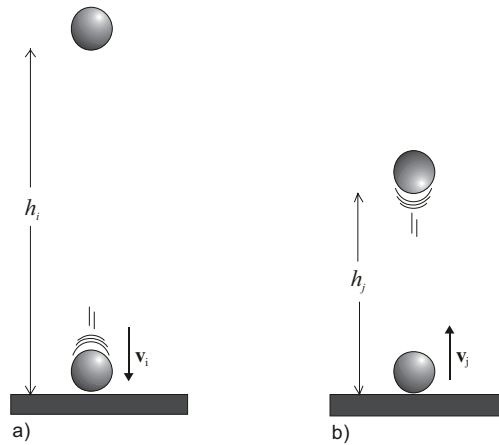


Figura 9.1 - Em (a) uma bola de borracha, solta de uma altura  $h_i$ , chega ao solo com velocidade  $v_i$ . Em (b), após a colisão, ela salta com velocidade  $v_j$ , atingindo uma altura  $h_j$ .

Para essa situação, vamos definir que  $E_i$  seja a energia cinética com que a bola **atinge** o chão e  $E_j$  a energia cinética inicial com que a bola **sobe** após tocar o chão. Por se tratar de uma colisão inelástica, a energia cinética não se conserva. Então, podemos escrever que:  $E_j = E_i - \Delta E$ , em que  $\Delta E$  é a perda de energia cinética durante a colisão. Ou seja,

$$\Delta E = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{1}{2}mV_j^2 = \frac{1}{2}m(V_i^2 - V_j^2)$$

Definindo uma grandeza  $r = \frac{V_j}{V_i}$  e dividindo o segundo termo por  $V_i^2$ , temos:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mV_i^2(1 - r^2)$$

O termo  $r = \frac{V_j}{V_i}$  é chamado de **coeficiente de restituição**.

Da definição de  $r$  e de colisão elástica e inelástica, é fácil verificar que para **colisões elásticas**,  $\Delta E = 0$  e, conseqüentemente,  $r = 1$ . Já nas **colisões inelásticas**, parte da energia cinética é dissipada e, portanto,  $r < 1$ .

Se soltamos uma bola de uma certa altura, e permitimos que ela colida diversas vezes com o chão, em cada colisão, a bola perde parte de sua energia cinética e atinge, sucessivamente, alturas cada vez menores. É possível determinar o coeficiente de restituição medindo-se as alturas  $h_i$  e  $h_j$ . Considerando-se que há conservação de energia mecânica nos intervalos em que a bola se encontra caindo ou subindo, antes e após cada colisão, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}mV_i^2 = mgh_i \text{ e } \frac{1}{2}mV_j^2 = mgh_j$$

Portanto, o coeficiente de restituição é dado por  $r = \frac{v_j}{v_i} = \sqrt{\frac{h_j}{h_i}}$  ou

$$r^2 = \frac{h_j}{h_i}$$

A experiência mostra que o coeficiente de restituição de uma bola de borracha maciça com o chão independe da velocidade, para uma ampla faixa de valores dessa grandeza. Dessa forma, a altura que a bola atinge após colidir com o chão será sempre uma fração fixa da altura inicial da qual ela cai.

### OBJETIVO

- Determinar o coeficiente de restituição de um material; no caso, uma bola de borracha colidindo com o chão.

### MATERIAL UTILIZADO

- Fita métrica fixada na parede e bola de borracha com alto coeficiente de restituição.

### PROCEDIMENTOS

- Solte a bola de uma altura inicial  $h_0 \approx 2$  m e anote a altura  $h_1$  que ela atinge após a primeira colisão com o chão. Repita essa operação, pelo menos cinco vezes, e determine o valor médio de  $h_1$  e o desvio  $\Delta h_1$ . Antes de começar a fazer as medidas, treine algumas vezes a maneira de observar e medir, para possibilitar um melhor resultado, com menor desvio.
- Em seguida, solte a bola da altura  $h_1$  e determine a altura  $h_2$ ; essa altura é a mesma que a bola atingiria após a segunda colisão com o chão, quando solta da altura  $h_0$ .
- Repita o procedimento até, pelo menos, a altura  $h_5$ , e anote os dados em uma tabela.
- Faça o gráfico de  $h_n$  em função de  $n$ , o número de repiques dados pela bola. Observe que, no gráfico que você obteve, os pontos não se situam sobre uma reta.
- Utilizando a relação  $r^2 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = \dots = \frac{h_n}{h_{n-1}}$ ,

demonstre que

$$h_n = h_0 r^{2n} \quad (9.1)$$

- Uma maneira de obter o coeficiente de restituição  $r$  consiste em linearizar o gráfico. Com base na equação 9.1, faça uma linearização do gráfico obtido e, em seguida, faça uma regressão

linear para determinar o coeficiente de restituição e seu respectivo erro. Compare o valor de  $h_0$  encontrado a partir do gráfico com o valor medido.

- Outra maneira de obter o coeficiente de restituição  $r$  consiste em ajustar diretamente uma função ao conjunto de pares experimentais. Com base na equação 9.1, faça uma regressão não linear ajustando uma lei de potência ( $y = ab^x$ ) tal que  $y = h_n$ ,  $a = h_o$ ,  $b = (r^2)$ ,  $x = n$  para determinar o coeficiente de restituição e seu respectivo erro.
- Utilizando o valor do coeficiente de restituição encontrado, determine a fração percentual da energia cinética dissipada em cada colisão da bola com o chão.

#### **LINEARIZAÇÃO *versus* REGRESSÃO NÃO LINEAR**

Compare os valores do coeficiente de restituição  $r$  obtidos pelos métodos de linearização e de regressão não linear e discuta os resultados obtidos.

## Atividade prática

### Umidade do ar

#### Objetivo

- Entender os conceitos de pressão de vapor, umidade e ponto de orvalho.

#### INTRODUÇÃO

---

A atmosfera terrestre contém vapor de água numa concentração que varia de 0 a 6%. Esse vapor é invisível e só se torna visível quando atinge a saturação e se condensa, depositando-se sob a forma de gotículas de água em alguma superfície, formando uma névoa ou formando nuvens. Assim como os oceanos, a água contida na atmosfera tem um papel importante nos padrões climáticos da Terra e, portanto, na existência e modo de vida dos seres vivos. A água ingressa na atmosfera por meio da evaporação nas superfícies dos mares, lagos, plantas (folhas principalmente) e solos.

A evaporação é essencialmente a fuga de moléculas da superfície de um líquido. Para que elas escapem é necessário que adquiram energia suficiente para vencer as forças de coesão que as puxam de volta ao líquido. Caso uma molécula situada na camada superficial de um líquido repentinamente adquira energia suficiente (por exemplo, por uma colisão com outra molécula), poderá vencer a tensão superficial e escapar para a atmosfera. É importante ressaltar que apenas as moléculas com energia muito alta em relação à média das outras moléculas do líquido conseguem escapar. Consequentemente o processo de evaporação causa uma diminuição da energia média das moléculas do líquido, e o resultado é um abaixamento da temperatura.

Algumas vezes são substâncias em contato com o líquido que fornecem a energia para a evaporação e, portanto, resultam em um abaixamento da temperatura. Isso pode ser verificado facilmente colocando-se um pouco de álcool na mão, que para se evaporar retira energia térmica da mão, resultando numa sensação de resfriamento.

A Figura 10.1 nos dá uma ideia do que acontece quando moléculas de um líquido escapam para o ar. O espaço que existe acima da superfície do líquido foi limitado, pois o mesmo foi colocado dentro de um recipiente fechado (volume definido) à temperatura constante.

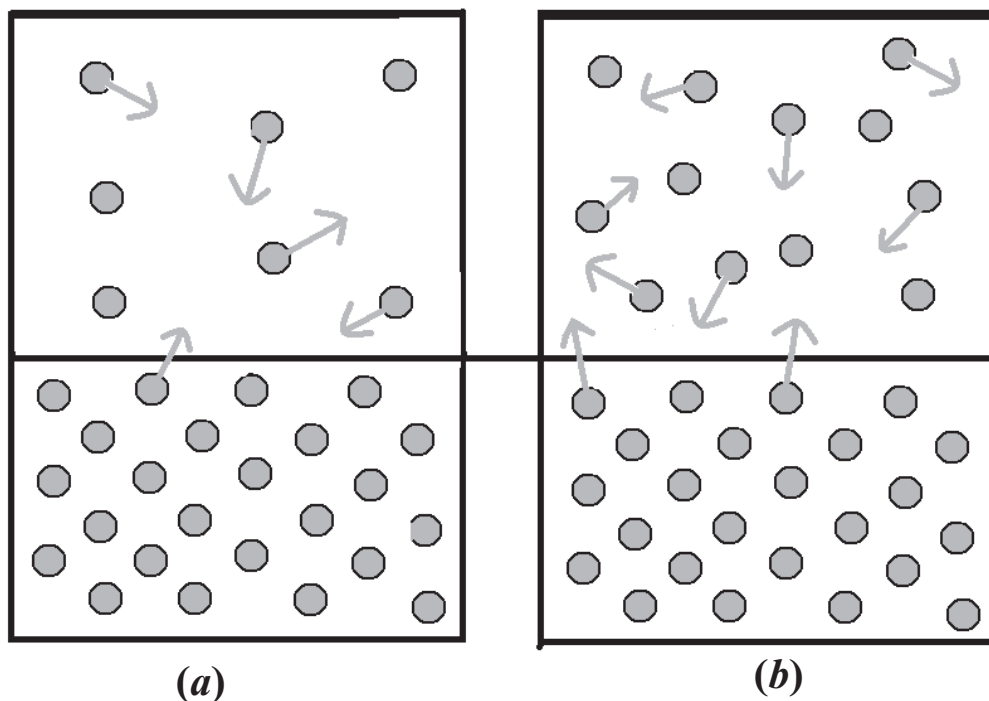


Figura 10.1 - Diagrama de um recipiente fechado contendo água e ar à temperatura constante no qual a massa de vapor de água no ar está aumentando (esquerda) e o ar acima do líquido está saturado de vapor de água (direita).

No lado esquerdo da Figura 10.1 as moléculas escapam para o ar contido no espaço acima da superfície do líquido. Algumas moléculas são atraídas de volta, mas, em média, o número de moléculas que escapam do líquido é maior do que o número das que voltam. Assim, a massa de vapor de água existente no ar vai aumentando.

Já no lado direito da figura as moléculas encontram-se num instante a partir do qual, em média, o número de moléculas que escapam do líquido é igual ao número das que voltam. O ar acima do líquido é dito estar “saturado” de vapor de água. O número de moléculas existentes no ar não pode aumentar mais (mantendo-se a temperatura constante).

O vapor de água existente na atmosfera exerce uma pressão, denominada **pressão parcial de vapor de água**,  $p_v$ , que é proporcional à massa de vapor de água,  $m_v$ , existente (concentração de vapor de água). Quando o espaço acima da superfície se torna saturado, a pressão exercida por esse vapor saturado é chamada de **pressão de vapor saturado, pressão de vapor ou tensão de vapor da água**,  $p_s$ . É importante ressaltar que a pressão de vapor saturado de uma substância depende da temperatura, isto é, só faz sentido falar em  $p_s$  para uma dada temperatura. Assim, no caso do lado esquerdo da

Figura 10.1, o vapor poderia se tornar saturado desde que a temperatura caísse. A **pressão parcial de vapor** de água,  $p_v$ , à temperatura  $T$ , torna-se **pressão de vapor saturado**,  $p_s$  a uma nova temperatura  $T'$  menor que  $T$ .

No caso do lado direito da Figura 10.1, aumentando-se a temperatura o vapor deixaria de ser saturado por algum tempo, pois o recipiente está fechado, e mais água irá evaporar até que o vapor se torne saturado novamente, mas com um valor maior para  $p_s$ , uma vez que a temperatura aumentou. Os valores de  $p_s$  de algumas substâncias em função da temperatura encontram-se na Tabela 10.1.

### UMIDADE ABSOLUTA, UMIDADE RELATIVA E PONTO DE ORVALHO

O número de moléculas de água presentes no ar pode ser descrito pela massa total das moléculas existentes num dado volume de ar. Essa grandeza é denominada **umidade absoluta**,

$$U_a = \frac{m_v}{V} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} U_a - \text{umidade absoluta} \\ m_v - \text{massa de vapor} \\ V - \text{volume} \end{cases} \quad (10.1)$$

Na atmosfera terrestre, à temperatura de 10 °C, a saturação ocorre para 9 g/m<sup>3</sup> de vapor de água. Caso a temperatura aumente para 20 °C, o ponto de saturação ocorre quando o ar contiver 17 g/m<sup>3</sup>. Caso uma massa de ar a 20 °C, saturada de vapor de água, seja resfriada a 10 °C, haverá mais moléculas de água que as necessárias para a saturação. O excesso não pode continuar no estado de vapor. As moléculas perdem energia por causa da diminuição da temperatura e o excesso de vapor 8 g/m<sup>3</sup> se condensa na forma de gotas.

A massa de vapor de água existente no ar, geralmente, é menor que a massa necessária para torná-lo saturado, a uma determinada temperatura. Define-se a **umidade relativa a uma dada temperatura** como:

$$U_r(\%) = \frac{\text{massa de vapor existente no ar}}{\text{massa de vapor necessária para saturação}} \times 100\% \quad (10.2)$$

Já que a pressão parcial exercida pelo vapor é proporcional à massa de vapor existente no ar (veja a Atividade 10.1), a umidade relativa pode ser escrita como:

$$U_r(\%) = \frac{\text{pressão parcial de vapor existente de água}}{\text{pressão de vapor saturado à temperatura ambiente}} \times 100\% \quad (10.3)$$

Ou seja, a umidade relativa é definida como a razão entre a pressão parcial de vapor de água existente na atmosfera e a pressão de vapor saturado de água, à temperatura ambiente.

$$U_r(\%) = \left( \frac{p_v}{p_s} \right) \times 100\% \quad (10.4)$$

**ATIVIDADE 10.1)** A pressão parcial de vapor é proporcional à massa de vapor de água existente numa dada massa de ar. Utilize a equação de estado do gás ideal  $PV=nRT$  para relacionar a pressão parcial de vapor, o volume de ar, a temperatura absoluta do ar (dada em Kelvin) e a massa de vapor de água. Ou seja, mostre que

$$p_v V = \frac{m_v R T}{M_0}$$

onde  $M = 28,8 \text{ g/mol}$  é a massa molecular da água e  $R = 8,31 \text{ J/mol.K}$  é a constante universal dos gases. Lembrando que  $T$  deve ser expresso em Kelvin, a umidade absoluta do ar será dada por

$$U_a = \frac{p_v M_0}{R T}$$

DICA: Lembre-se que  $m = nM$ , onde  $n$  é o número de moles,  $m$  é a massa e  $M$  é a massa molar.

A temperatura para a qual o vapor contido numa dada amostra de ar se torna saturado é chamada de **ponto de orvalho**. Nessa temperatura a pressão parcial de vapor de água se torna igual à pressão de vapor saturado (pode ocorrer condensação).

Como já foi visto no início desta aula, a saturação pode ser obtida diminuindo-se a temperatura ou aumentando-se a quantidade de vapor de água existente na atmosfera. A umidade relativa desempenha papel importante na vida humana. Condições de temperatura da ordem de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  e umidade relativa da ordem de  $60\%$  representam condições quase ideais para a saúde humana.

---

#### OBJETIVOS

- Determinar o ponto de orvalho e a umidade relativa do ar.

---

#### MATERIAL UTILIZADO

- Tubo de ensaio; termômetro; bastão; água; e gelo moído.

---

#### PROCEDIMENTOS

- Anote a temperatura ambiente.
- Coloque um pouco de água em um tubo de ensaio e acrescente pequenas quantidades de gelo moído, agitando ligeiramente com o bastão até que o gelo passe pelo processo de fusão.

- Acrescente mais gelo, repetindo o processo até que a superfície exterior do tubo de ensaio, na região que contém água, fique coberta de gotículas de água (você notará o vidro embaçado).
- Meça a temperatura nesse instante.
- Repita o procedimento pelo menos três vezes.
- O que ocorre com o  $p_v$  na temperatura do ponto de orvalho?
- Qual é o valor de  $p_v$  no caso anterior? Consulte a Tabela 10.1.
- Calcule o valor médio da temperatura do ponto de orvalho com a sua respectiva incerteza.
- Qual é o valor de  $p_s$  à temperatura ambiente?
- Utilizando os valores de temperatura ambiente e do ponto de orvalho determine a umidade relativa do ar.
- Determine a pressão de vapor na sala utilizando o resultado da umidade relativa.
- Calcule o volume de ar na sala.
- Encontre a massa de vapor de água existente na sala (reveja a Atividade 10.1)
- Determine a umidade absoluta do ar,  $U_a$ , na sala.

**Tabela 10.1**  
Pressão de vapor saturado de água em função da temperatura

Temperatura (°C)	Pressão de vapor saturado (mmHg)	Temperatura (°C)	Pressão de vapor saturado (mmHg)
1	4,9	19	16,2
2	5,3	20	17,5
3	5,7	21	18,7
4	6,1	22	19,8
5	6,5	23	21,1
6	7,0	24	22,4
7	7,5	25	23,8
8	8,0	26	25,2
9	8,6	27	26,7
10	9,2	28	28,4
11	9,8	29	30,1
12	10,5	30	31,8
13	11,2	31	33,7
14	12,0	32	35,7
15	12,8	33	37,7
16	13,6	34	39,9
17	14,5	35	42,2
18	15,5	36	44,6

Faça o arredondamento da temperatura medida para o valor inteiro mais próximo.  
Cuidado com as unidades! Lembre-se que  $1\text{mmHg} = 1,33 \times 10^2 \text{ N/m}^2$ .



## Atividade prática Medindo árvores

### Objetivos

- Obter uma relação entre altura e diâmetro de árvores.
- Avaliar o limite de validade das equações obtidas experimentalmente.

### INTRODUÇÃO

Nas Ciências Biológicas o tamanho de um organismo está diretamente relacionado com várias de suas características e funções. Assim, diversos problemas das Ciências Biológicas podem ser analisados de maneira simples, relacionando a forma e/ou tamanho e/ou peso dos organismos com algumas de suas funções biológicas.

Tendo em vista um comprimento característico para um organismo complexo, interessa às Ciências Biológicas saber como suas diversas partes dependem desse comprimento. Por exemplo, ao considerarmos 1,80 m como altura característica para um ser humano, suas diversas partes ou constituintes terão tamanho, volume ou massa associados ao valor desse comprimento característico.

Quanto maior um ser vivo, mais resistente deve ser a sua estrutura de sustentação. Um ser vivo tem uma estrutura que sustenta um peso máximo, logo, seu tamanho não pode aumentar indefinidamente sem que as características físicas e químicas do seu esqueleto, por exemplo, sejam alteradas.

Uma árvore de uma determinada altura deve ter uma largura de tronco que suporte todo o peso de seus galhos e do próprio tronco. O senso comum nos diz que quanto mais alta for uma árvore, mais grosso deve ser seu tronco. Existe uma relação entre a altura do tronco principal de uma árvore e o diâmetro do mesmo em sua base. A lei que descreve esse tipo de comportamento é do tipo  $h = aD^b$ ; nessa função  $D$  é o diâmetro do tronco,  $h$  é a altura e  $a$  e  $b$  são constantes que você determinará pelo processo de ajuste de curvas. Essa função é uma lei de potência (do tipo  $y = ax^b$ ).

## OBJETIVO

---

- Determinar empiricamente a relação matemática entre a altura de uma árvore e o diâmetro de seu tronco na base verificando se a lei de potência é obedecida; e em caso afirmativo, determinar o valor das constantes  $a$  e  $b$ .

## MATERIAL UTILIZADO

---

- Trena; fita métrica; metro ou trena de pedreiro.

## PROCEDIMENTOS

---

- Vá ao parque ou horto florestal de sua cidade.
- Meça a altura e o diâmetro da base do tronco de, no mínimo, cinco árvores cujas alturas estejam em um intervalo de 20 cm até quatro metros de altura (para medir algumas árvores você poderá precisar emendar dois metros de pedreiro).
- Não confunda diâmetro com circunferência!! Meça árvores de vários tamanhos (de 20 cm até 4 m), senão terá dificuldade para fazer o ajuste.
- O diâmetro do tronco da árvore varia; logo, é necessário que se utilize um diâmetro médio. Meça o diâmetro em pelo menos cinco regiões diferentes, mantendo-se próximo da base.
- Calcule o valor médio dos diâmetros com a sua respectiva incerteza.
- Anote esses valores em uma tabela.
- Construa um gráfico das alturas (no eixo  $y$ ) em função dos diâmetros (no eixo  $x$ ).
- Determine o valor das constantes  $a$  e  $b$  da lei de potência que melhor se ajusta aos seus dados e expresse seus resultados na forma de uma equação  $h = aD^b$ .
- Obtenha agora o diâmetro do tronco de uma árvore de 50 metros de altura?
- Comente sobre a validade de sua equação e discuta o valor obtido para a árvore do item anterior.

## Atividade prática

### Lentes e defeitos da visão

#### Objetivos

- Entender em que situações a óptica geométrica se aplica.
- Medir distâncias focais de lentes utilizando diferentes métodos.
- Propor lentes corretivas para os defeitos da visão humana.

#### 12.1 LIMITES DE VALIDADE DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

---

A luz é uma onda eletromagnética que interage com a matéria por meio de seus campos elétrico e magnético. Nessa interação, podem ocorrer alterações na velocidade, na direção de propagação, na intensidade e na polarização da luz. Esses fenômenos são descritos pelas equações de Maxwell, mas, em muitas situações, uma análise baseada nesse formalismo pode ser bastante complexa, além de fornecer mais informações do que se deseja. Alguns fenômenos associados à propagação da luz podem ser descritos, de forma mais simples, pela óptica geométrica.

Nessa teoria, fenômenos tais como a refração e a reflexão são descritos usando-se o conceito de raios de luz – linhas que indicam a direção de propagação da luz. A óptica geométrica é válida somente em situações em que as dimensões dos objetos com que a luz interage – por exemplo, lentes, espelhos ou anteparos – são muito maiores que o comprimento de onda da luz.

#### 12.2 LENTES E A FORMAÇÃO DE IMAGENS

---

Uma lente é um elemento óptico que desvia a trajetória dos raios de luz. Dependendo da maneira como esse desvio ocorre, as lentes se classificam em convergentes ou divergentes (Figura 12.1).

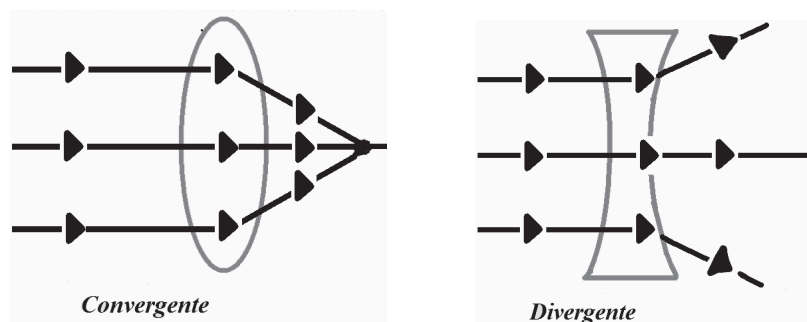


Figura 12.1 - Exemplo de uma lente convergente (esquerda) e divergente (direita).

Numa lente convergente as extremidades são mais finas que a parte central, enquanto numa lente divergente as bordas são mais grossas que a parte central. Lembre que o foco  $F$  é o ponto para o qual convergem os raios (lente convergente) ou de onde eles parecem se originar (lente divergente). Você é capaz de identificar a localização do foco nas lentes mostradas na Figura 12.1?

Na lente convergente um raio que incide paralelo prossegue passando pelo foco, ao passo que um raio que passa pelo centro vai e volta sobre si mesmo. A imagem é formada pelo encontro desses dois raios. Na lente divergente, porém, um raio que incide paralelo prossegue divergindo do foco, de modo tal que seu prolongamento passe pelo foco. Assim, a imagem é formada de modo semelhante ao caso anterior, conforme pode ser visto na Figura 12.2.

A formação da imagem por lentes pode ser esquematizada da maneira a seguir:

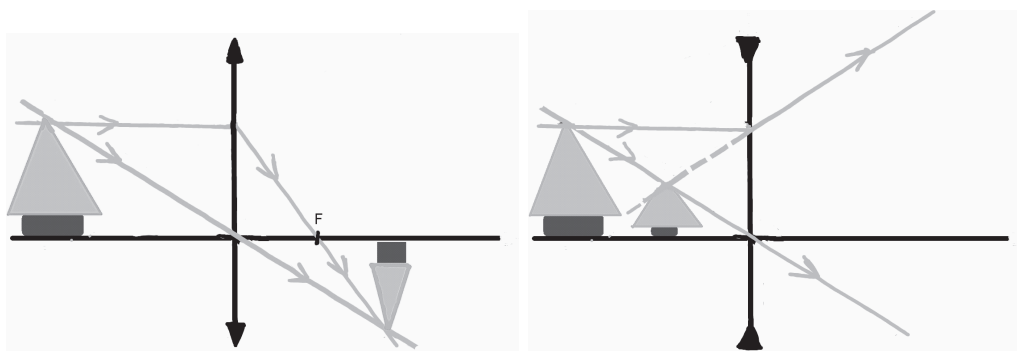


Figura 12.2 - Formação de imagens em lentes convergentes (esquerda) e divergentes (direita).

### 12.3 O OLHO HUMANO

O olho humano, juntamente com o cérebro, constitui um dos sistemas bio-ópticos mais impressionantes. Capaz de formar imagens de objetos situados a distâncias que vão de 25 centímetros até vários quilômetros, também pode abranger grandes cenários ou pequenos objetos como um alfinete; mais ainda, pode se adaptar a uma gama enorme de intensidades luminosas, indo desde a da luz do Sol até

a de uma vela situada a quilômetros de distância; pode também discernir mínimas diferenças de cor. Finalmente, devido à constituição dos olhos em nossa face, permitindo uma visão binocular, podemos ter a noção de espaço tridimensional e a localização de objetos nesse espaço.

Opticamente ele pode ser considerado como uma lente convergente que refrata a luz nele incidente e forma imagem na sua superfície interna posterior. A Figura 12.3 mostra as partes básicas do olho humano.

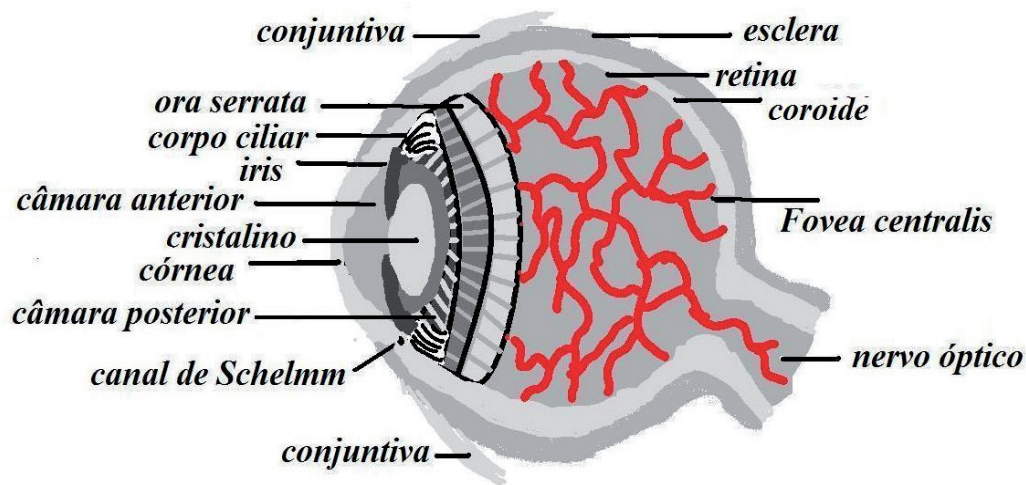


Figura 12.3 - Partes básicas do olho humano.

Primeiramente, a luz entra no olho através da **córnea**, tecido transparente que não contém vasos sanguíneos, mas é repleto de células nervosas. A córnea tem aproximadamente 12 mm de diâmetro, com uma espessura de 0,6 mm no seu centro e que vai aumentando na direção das bordas. O seu índice de refração é 1,376. Ao entrarem na córnea, vindos do ar ( $n = 1,003$ ), os raios luminosos sofrem, portanto, uma grande refração.

Imediatamente depois da córnea fica a **câmara anterior**, pequeno espaço cheio de um líquido, o **humor aquoso**, que contém os nutrientes para a córnea. Ele possui um índice de refração de 1,336, quase igual ao da água (1,333). Situada no *humor aquoso* está a **íris**, que é um diafragma que controla a quantidade de luz que entra no olho; ela também é responsável pela cor do olho, que depende da quantidade e da localização de pigmentos nela existentes.

O orifício ajustável através do qual a luz passa é chamado de **pupila**. A íris contém dois conjuntos de músculos delicados, que mudam o diâmetro da pupila em resposta ao estímulo da luz, ajustando-o entre um mínimo de cerca de 2 mm em um dia brilhante, para cerca de 8 mm, na escuridão total. Para examinar o olho, os médicos usam drogas como a atropina para inibir temporariamente a ação desses músculos e manter a pupila dilatada.

Depois de passar pela pupila, a luz incide sobre o **crystalino**, estrutura transparente que é uma lente convergente. Através da mudança de sua forma, o cristalino executa a focalização final da imagem sobre a **retina**. A forma dessa lente é controlada pelos **músculos ciliares**, que são ligados à periferia do cristalino por meio de fibras. Quando os músculos estão relaxados, a lente adquire sua forma mais plana, dando a menor refração para os raios luminosos. Nesse estado, o olho está focalizado em objetos distantes. A lente fica mais curva e os músculos ficam mais tensos à medida que o olho focaliza objetos mais próximos.

Depois da refração final produzida pelo cristalino, a luz atinge a **câmara posterior** ou **humor vítreo**, que é uma substância transparente e gelatinosa, cujo índice de refração (1,336) é novamente próximo ao da água. O *humor vítreo* não possui estrutura, mas contém pequenas partículas de restos de células, conhecidos como flutuadores porque podem ser vistos flutuando no campo de visão (por exemplo, quando olhamos para uma parede ou teto iluminados com os músculos do olho relaxados). Depois de atravessar o humor vítreo, a luz chega à retina, onde a imagem é formada. A retina é composta por dois tipos de **células fotorreceptoras**: os **cones** e os **bastonetes**.

Os *bastonetes* são células longas e finas em número de mais de 100 milhões, localizadas principalmente na periferia da retina. Eles são extremamente sensíveis à luz fraca, mas incapazes de discernir cores. Já os *cones*, em número menor que 10 milhões, aglomeram-se preferencialmente perto do centro da retina, numa região de cerca de 3 mm de diâmetro, denominada **mácula**. Ao contrário dos *bastonetes*, os *cones* são sensíveis à luz brilhante e à cor, mas não funcionam com luz fraca. Esta, aliás, é a razão pela qual não vemos cor em fontes de luz muito débeis.

Ligados às células fotorreceptoras, há **células nervosas** que transmitem o impulso visual para o **nervo óptico**, ligação principal entre a retina e o cérebro.

Além dos componentes principais descritos acima, o olho possui outros, que merecem ser citados. A cobertura branca do olho (**esclera**) forma a estrutura de suporte do olho, sendo que logo atrás fica a **coroide**, que cobre oitenta por cento do olho em sua parte posterior e que contém os vasos sanguíneos que alimentam o olho. Além disso, ela serve de estrutura de suporte para os cones e bastonetes. No centro da mácula e acima do nervo óptico está situada a **fovea centralis**, que é a região de maior acuidade visual, livre de bastonetes e com cerca de 200 micrômetros de dimensão. Quando necessitamos ver uma imagem nítida e detalhada (por exemplo, o buraco de uma agulha), os olhos se movem continuamente, de modo que a luz seja dirigida para a fôvea. Em contraste, há outra região na retina, localizada no ponto de saída do nervo óptico, que é completamente insensível à luz. Este ponto é denominado **ponto cego**.

Para funcionar como um sistema óptico efetivo, o olho deve formar uma imagem real de um objeto externo ou de um cenário próximo ou afastado, sob luz brilhante ou fraca. Para isso, ele usa algumas funções específicas: para ver objetos tanto próximos quanto afastados, o olho se acomoda; para processar sinais luminosos de diferentes intensidades, ele se adapta; para ter uma orientação espacial de cenas tridimensionais, o olho usa a visão estereoscópica; finalmente, para ter uma imagem detalhada e confiável de um objeto, ele se apoia na sua acuidade visual.

Quando a vergência do olho é insuficiente, a imagem de um objeto é focalizada atrás da retina, dizemos nessa situação que a pessoa possui **hipermetropia**. Ao contrário, quando a imagem de um objeto é focalizada antes da retina, dizemos que a pessoa possui **miopia**. Ao final desta aula você terá de indicar qual deverá ser o tipo de lente corretiva para cada situação. O astigmatismo é resultado da má conformação esférica da córnea.

**ATIVIDADE 12.1)** “À noite todos os gatos são pardos.” Esse é um ditado popular que está relacionado com a dificuldade que temos de distinguir as cores em ambientes escuros. Explique por que isso ocorre.

#### 12.4 DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA FOCAL DE LENTES

O tipo e a posição da imagem de um objeto, formada por um espelho esférico de pequena abertura, é determinada pela equação

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}, \quad (12.1)$$

em que  $f$  é a distância focal do espelho e  $d_o$  e  $d_i$  são, respectivamente, as distâncias dele ao objeto e à imagem. Por essa mesma equação, determinam-se, também, o tipo e a posição da imagem de um objeto formada por uma lente fina. Para a utilização dessa equação, devem-se observar as seguintes convenções de sinais:

$d_i > 0$  – para imagens que se formam depois das lentes

$d_i < 0$  – para imagens que se formam na frente das lentes

$f > 0$  – para lentes convergentes

$f < 0$  – para lentes divergentes.

É comum caracterizar uma lente por seu grau, ou dioptria, que é dado pelo inverso de sua distância focal, quando esta é dada em metros. Assim, uma lente de grau +5, ou de +5 dioptrias, é uma lente cuja distância focal é igual a  $(1/5) \text{ m} = 0,2 \text{ m}$  ou 20 cm.

**ATIVIDADE 12.2)** Entre os elementos ópticos fornecidos, procure identificar, apenas pela observação, as lentes divergente e convergente.

**ATENÇÃO:** *Não toque as superfícies das lentes e espelhos, pois isso pode danificá-las.*

### DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA FOCAL DE UMA LENTE CONVERGENTE PELO MÉTODO DE BESSEL

Na Figura 12.2, estão representados, esquematicamente, um objeto luminoso, a uma distância  $D$  de um anteparo, e uma lente convergente, de distância focal  $f$ . Para uma mesma distância objeto – anteparo –, existem duas posições da lente em que se observa uma imagem real, nítida, no anteparo, como mostrado na Figura 12.4.

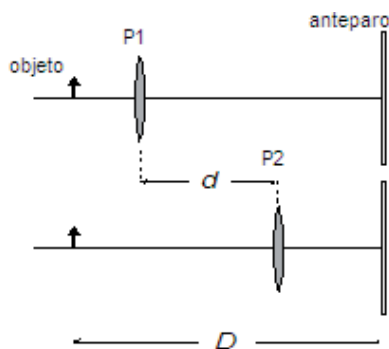


Figura 12.4 - Diagrama esquemático em que se mostra a formação da imagem de um objeto por uma lente convergente em duas posições distintas.

A separação,  $d$ , entre essas posições é dada por

$$d = \sqrt{D(D - 4f)} \quad (12.2)$$

### DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA FOCAL DE UMA LENTE DIVERGENTE

**ATIVIDADE 12.3)** Explique por que os dois métodos, descritos anteriormente, para se medir a distância focal de uma lente convergente, não podem ser usados para uma lente divergente.

O uso de duas lentes finas, de distâncias focais  $f_1$  e  $f_2$ , separadas por uma distância  $d$ , equivale a uma lente de distância focal  $F$  dada por

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (12.3)$$

**ATIVIDADE 12.4)** Considere duas lentes finas – uma convergente ( $f > 0$ ) e outra divergente ( $f < 0$ ) – colocadas muito próximas uma da outra ( $d \sim 0$ ). Determine qual deve ser, nessa situação, a relação entre as distâncias focais das duas lentes para que a lente composta equivalente seja convergente.

## 12.5 ATIVIDADE PRÁTICA: DISTÂNCIA FOCAL DE LENTES E DEFEITOS DA VISÃO

### INTRODUÇÃO

Neste experimento, serão analisadas as imagens de um objeto formadas por alguns elementos ópticos e determinadas as distâncias focais de lentes. O objeto pode ser uma abertura de qualquer forma em um material opaco, ou um desenho em uma folha transparente, iluminado por uma lâmpada. As lentes e anteparo são montados em suportes que podem ser deslocados horizontalmente, ao longo de um trilho.

### OBJETIVOS

- Determinar a distância focal de lentes.
- Determinar o tipo de lente corretiva para um olho hipermetrope e um olho míope.

### MATERIAL UTILIZADO

- Trilho para montagem dos elementos ópticos; fonte de luz com objeto; duas lentes convergentes e uma lente divergente; anteparo; e suportes para lentes.

### PROCEDIMENTOS

Determinação da distância focal de uma lente convergente usando diretamente a equação 12-1

- Represente, em um diagrama, um objeto, uma lente convergente, os raios luminosos e a imagem em uma situação em que ela é real.
- Coloque a lente convergente de maior distância focal fornecida no suporte, sobre o trilho;
- Alinhe-a com o objeto e com o anteparo.
- Inicialmente, posicione o objeto na maior distância possível do anteparo.
- Mova a lente entre os dois, até obter uma imagem nítida no anteparo.

- Registre os valores das distâncias imagem – lente ( $i$ ) e objeto – lente ( $o$ ) obtidos.
- Repita essa operação para diferentes distâncias objeto-anteparo e registre os respectivos valores de  $i$  e  $o$ .
- Mediante a análise de um gráfico de  $1/i$  versus  $1/o$ , determine a distância focal da lente utilizada.
- Compare o valor obtido com o que está indicado na lente.

Determinação da distância focal de uma lente convergente pelo método de Bessel

- Determine a menor distância que deve haver entre o objeto e o anteparo para se obter, neste, uma imagem.
- Utilizando a mesma lente da etapa anterior e mantendo o objeto e o anteparo fixos, mova a lente entre eles e determine as duas posições dela em que se observam imagens nítidas.
- Utilizando a equação 12.2, determine a distância focal dessa lente.

Determinação da distância focal de uma lente divergente

- Escolha uma lente divergente cuja distância focal deseje determinar. Em um mesmo suporte, junte a ela uma lente convergente, de distância focal conhecida, para formar uma lente composta convergente.
- Determine a distância focal dessa lente composta empregando um dos dois métodos descritos anteriormente.
- Utilize, então, a equação 12.3 para determinar a distância focal da lente divergente.

Olho humano: defeitos da visão

- Escolha uma lente convergente de distância focal conhecida e coloque-a no suporte, entre o objeto e o anteparo. Essa lente irá simular a função do cristalino+córnea.
- Ajuste a posição da lente para obter uma imagem nítida e não muito grande no anteparo.
- Para qual lado você deverá mover o anteparo para simular o que acontece em um olho míope?
- Que tipo de lente corretiva você deveria usar para esse olho? Explique!
- Para qual lado você deverá mover o anteparo para simular o que acontece em um olho hipermetrope?
- Que tipo de lente corretiva deverá ser usada nesse olho? Explique!

## Atividade prática

### Interferência e difração da luz

#### Objetivos

- Diferenciar os padrões de interferência e de difração da luz.
- Relacionar diferença de fase com diferença de caminho.
- Utilizar o Princípio de Babinet.
- Determinar pequenas dimensões de objetos usando difração.

#### INTRODUÇÃO

A luz é uma onda eletromagnética; portanto, é constituída por campos elétrico e magnético perpendiculares entre si, que oscilam periodicamente no tempo e no espaço. A natureza ondulatória da luz fica evidente quando seu comprimento de onda é comparável às dimensões de obstáculos ou aberturas existentes em seu caminho. Fenômenos de interferência e difração da luz são exemplos de sua natureza ondulatória.

O efeito de duas ou mais ondas, ao se encontrarem em um ponto do espaço, em certo instante, é determinado pelo Princípio da Superposição. Segundo esse princípio, ao se encontrarem, tais ondas produzem uma onda resultante, cujos campos (elétrico e magnético) são a soma (vetorial) dos campos de cada uma. Se a intensidade resultante é maior que a intensidade de cada uma delas, diz-se que ocorre interferência construtiva, e se a intensidade for menor que a de cada uma delas diz-se que ocorre interferência destrutiva.

Interferência construtiva total ocorre quando as ondas estão todas em fase (os máximos de todas as ondas coincidem), enquanto interferência destrutiva total ocorre quando todas as ondas estão completamente fora de fase (os máximos e mínimos coincidem de forma tal que a soma das amplitudes é zero). Nos casos intermediários diz-se que ocorre interferência parcialmente construtiva ou parcialmente destrutiva.

## EXPERIÊNCIA DE YOUNG: INTERFERÊNCIA EM FENDA DUPLA

O experimento de interferência com a luz, feito pela primeira vez por Thomas Young, em 1801, foi determinante para se estabelecer a natureza ondulatória da luz – somente ondas podem interferir ou difratar. Nesse experimento, uma onda plana incide sobre uma placa opaca, que tem duas fendas estreitas e difrata-se em cada fenda, divergindo radialmente, como é mostrado na Figura 13.1. As ondas provenientes de cada fenda superpõem-se e interferem construtiva ou destrutivamente, em cada ponto do espaço, dependendo da diferença de fase entre elas. Devido a esse efeito, em um anteparo colocado na frente das fendas, observam-se regiões em que a intensidade da luz é máxima, alternadas com outras em que a intensidade é mínima, como mostrado, esquematicamente, na Figura 13.1.

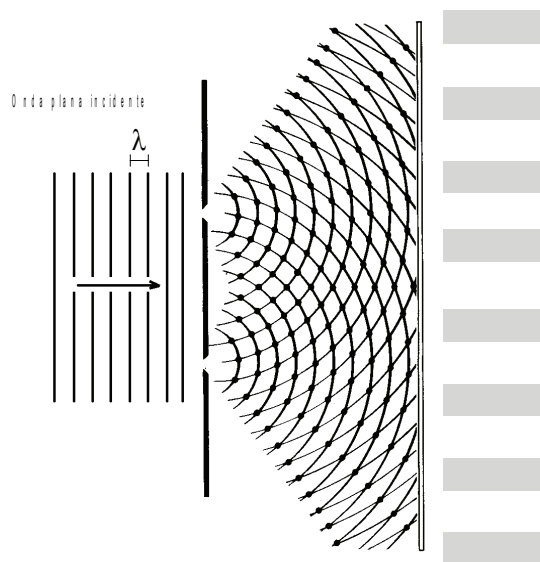


Figura 13.1 - Uma onda plana de luz coerente, de comprimento de onda  $\lambda$ , incide em uma placa, em que há duas fendas estreitas; as ondas difratadas pelas fendas superpõem-se e produzem, no anteparo, o padrão de franjas claras e escuras, alternadas, mostrado esquematicamente à direita; as cristas das ondas estão representadas por linhas cheias.

Para se obter esse padrão de interferência, com franjas claras e escuras, as ondas provenientes de cada fenda devem ser monocromáticas, de mesma frequência e coerentes, ou seja, a diferença de fase entre elas deve permanecer constante no tempo. Iluminando as fendas com um feixe de luz proveniente de um *laser*, a luz que passa pelas fendas tem, aproximadamente, características que a torna adequada para a obtenção dos padrões de interferência.

Na Figura 13.2, está representada uma onda plana que incide em uma placa com duas fendas. Nessa figura estão indicadas a separação,  $d$ , entre as fendas, a distância,  $D$ , da placa ao anteparo e o comprimento de onda,  $\lambda$ , da luz. Considere o ponto P, situado no anteparo, em uma posição determinada pelo ângulo  $\theta$ . Para atingir

esse ponto, as ondas provenientes de cada fenda percorrem distâncias diferentes. Se a diferença entre essas distâncias é igual a um número inteiro de comprimentos de onda, essas ondas chegam em fase em P e a intensidade da luz, nesse ponto, será máxima. Se, por outro lado, a diferença entre essas distâncias é igual a um número ímpar de meios comprimentos de onda, as ondas chegam fora de fase em P, e a intensidade, nesse ponto, será mínima.

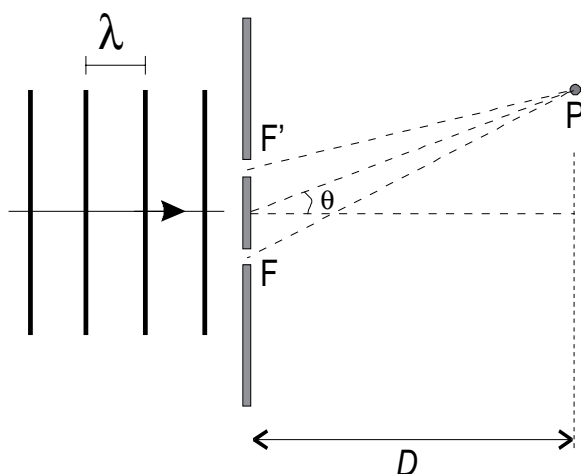


Figura 13.2 - A separação entre as fendas F e F' é  $d$  e a placa está a uma distância  $D$  do anteparo; o resultado da interferência no ponto P depende da diferença entre as distâncias FP e F'P.

Se  $D \gg d$ , as retas FP e F'P são praticamente paralelas e a diferença entre esses dois percursos é, aproximadamente,  $d \sin\theta$ . Nessa situação as condições para haver um máximo ou um mínimo de interferência em P são:

$$\text{máximos} \quad d \sin\theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13.1)$$

$$\text{mínimos} \quad d \sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Observe que nessas condições o valor de  $\theta = \sin\theta = \tan\theta = y/D$ . Desse modo temos que

$$\text{máximos} \quad y = m\lambda D / d, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13.2)$$

$$\text{mínimos} \quad y = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda D / d, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

	<p><b>ATIVIDADE 13.1)</b> As expressões 13.1 mostram que a interferência aparece devido a uma diferença de caminho. Teste isso em casa utilizando duas caixas de som separadas por uma distancia de 3 metros e alinhadas. Tente perceber mudanças no som que você percebe se estiver no ponto médio da linha que une as caixas (P1) e quando você se desloca lateralmente (P2).</p>
--	---

### DIFRAÇÃO EM FENDA SIMPLES

Na Figura 13.3, está representada uma onda plana que incide sobre uma fenda vertical em uma placa opaca. Se a largura dessa fenda é da ordem do comprimento de onda da luz, observam-se, no anteparo, regiões claras alternadas com regiões escuras. Esse efeito pode se analisado de acordo com o modelo de Huygens – cada porção da fenda atua como uma fonte de luz. As ondas provenientes de cada ponto da fenda podem chegar ao anteparo em fase ou fora de fase, produzindo regiões respectivamente claras ou escuras.

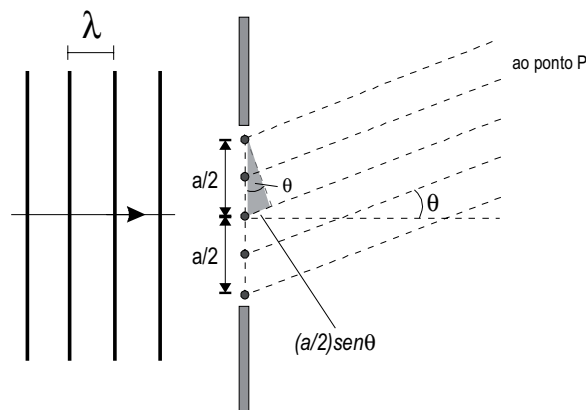


Figura 13.3 - Uma onda plana incide sobre uma fenda de uma placa opaca; as ondas provenientes de cada ponto da fenda atingem o ponto P em um anteparo distante.

Considere o ponto P, situado no anteparo, em uma posição indicada pelo ângulo  $\theta$ . A condição para haver um **mínimo de difração** nesse ponto é dada por

$$a \text{sen} \theta = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13.3)$$

e que a intensidade  $I$  da luz no anteparo em função de  $\theta$  é dada por

$$I(\theta) = I_m \frac{\left( \frac{\sin\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)} \right)^2}{\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}, \quad (13.4)$$

em que  $a$  é a largura da fenda e  $I_m$  é a intensidade máxima observada no padrão de difração.

Nessas condições o valor de  $\theta = \sin\theta = \text{tg}\theta = y/D$ . Mas atenção com a inversão da condição para máximos e mínimos em relação à interferência. Ou seja:

$$\text{mínimos} \quad y = m\lambda D / a, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13.5)$$

$$\text{máximos} \quad y = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda D / a, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**ATIVIDADE 13.2)** Verifique, com base na equação 13.4, que o centro do padrão de difração,  $\theta = 0^\circ$ , é um ponto de intensidade máxima. Com o modelo de Huygens, tente explicar, fisicamente, por que isso ocorre.

**Solução:** para valores pequenos do ângulo o seno é igual ao ângulo e, portanto,  $\sin(\alpha) / \alpha \rightarrow 1$ . Assim, observando a equação 13.4 vemos facilmente que  $I(\theta = 0^\circ) = I_m$ . Pelo modelo de Huygens a distância horizontal de cada ponto da fenda até o anteparo é sempre a mesma, tal que a interferência da luz será sempre construtiva.

### PRINCÍPIO DE BABINET

“O padrão de difração observado quando a luz incide sobre uma abertura de qualquer forma é o mesmo obtido quando a luz incide sobre um objeto que é o complemento da abertura.” Essa é uma das formas de se enunciar o chamado Princípio de Babinet. Isso quer dizer, por exemplo, que, se for recortada uma parte de uma placa opaca, deixando uma abertura de qualquer forma, tanto a placa quanto a parte removida, individualmente, produzirão o mesmo padrão de difração. Essa situação está representada esquematicamente na Figura 13.4. Esse resultado não se aplica a pontos situados na região central do anteparo – sombra geométrica do objeto.

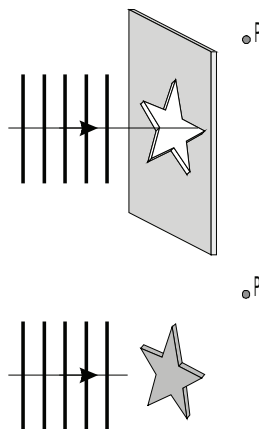


Figura 13.4 - Princípio de Babinet: a figura de difração produzida por uma abertura é a mesma que a produzida por seu complemento em qualquer ponto P, situado fora da região central.

### OBJETIVOS

- Analisar padrões de difração e de interferência da luz.
- Determinar a largura e a distância entre fendas a partir dos padrões de interferência e de difração produzidos por elas.
- Determinar a espessura de um fio de cabelo analisando o padrão de difração que ele produz.

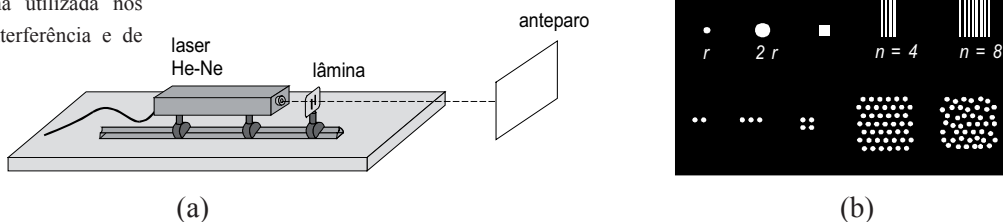
### MATERIAL UTILIZADO

- *Laser*; lâmina com fendas e orifícios de várias dimensões; suporte para lâmina; anteparo; e trena.

### PROCEDIMENTO

O esquema utilizado neste experimento para obtenção dos padrões de interferência e de difração está mostrado na Figura 13.5a. A luz emitida por um *laser* passa por aberturas em uma lâmina e produz um padrão de interferência ou de difração sobre um anteparo. A lâmina consiste em um diapositivo fotográfico, que contém fendas e orifícios de diversas dimensões, como representado na Figura 13.5b.

Figura 13.5 - (a) Equipamento utilizado nos experimentos de interferência e de difração. (b) Reprodução ampliada da lâmina utilizada nos experimentos de interferência e de difração.



---

## PADRÃO DE DIFRAÇÃO DE FENDA RETANGULAR

---

- Faça a montagem ilustrada na Figura 13.5a, colocando o suporte das fendas próximo ao *laser*, em um dos lados da mesa e o anteparo no lado oposto.
- Meça a distância da fenda ao anteparo.
- Direcione o feixe do *laser* para a fenda identificada com um “*a*” na lâmina mostrada na Figura 13.5b.
- Prenda uma folha de papel ao anteparo e, cuidadosamente, copie nela a figura de difração observada. Todas as análises posteriores serão feitas com base nas anotações contidas nessa folha; portanto, faça-as com cuidado e atenção.
- Desloque verticalmente a folha de papel, no anteparo, de cerca de 2 cm.
- Posicione a fenda identificada como “*2a*” na frente do feixe do *laser* e copie a figura de difração correspondente.
- Determine qual das fendas produz uma figura de difração com o máximo central mais largo. Explique por que isso ocorre.
- Considerando a tendência observada nas figuras registradas, como deverá ser a figura de difração se a fenda for muito estreita? E, também, se ela for muito larga.
- Verifique se suas conclusões estão de acordo com a equação 13.3.
- Na figura de difração que você desenhou para a fenda “*a*”, meça as distâncias dos quatro primeiros mínimos de intensidade ao centro do padrão de difração ( $\theta = 0^\circ$ ). Sugestão: para minimizar erros, meça a distância entre dois mínimos simétricos em relação a  $\theta = 0^\circ$  e tome a metade desse valor.
- Anote essas medidas e os índices *m* correspondentes a cada mínimo (veja a equação 13.3).
- Com base nesses resultados, determine o melhor valor para largura “*a*” da fenda.

---

## INTERFERÊNCIA EM FENDA DUPLA

---

- Direcione o feixe do *laser* para a fenda dupla identificada na lâmina com “ $d = 2a$ ” (veja a Figura 13.5b).
- Prenda novamente a folha ao anteparo e, cuidadosamente, copie nela, abaixo das figuras de difração, a figura de interferência observada.
- Desloque verticalmente a folha de papel, no anteparo, de cerca de 2 cm.

- Posicione a fenda dupla identificada como “ $d = 3a$ ” na frente do feixe do *laser* e copie a figura de interferência correspondente.
- Com base na equação 13.1, determine qual das duas fendas duplas deve produzir uma figura de interferência com os máximos de intensidade mais próximos um do outro.
- Verifique se sua previsão está de acordo com as figuras copiadas.
- Como as fendas têm certa largura, a figura observada no anteparo consiste em um padrão de difração – determinado pela largura das fendas – superposto a um padrão de interferência – determinado pela separação entre as fendas. Para verificar isso, compare as duas figuras de interferência com a figura de difração que foi obtida com a fenda simples “ $a$ ”.
- Procure identificar, nas figuras de interferência, os mínimos que são devidos à difração. Justifique por que esses mínimos estão na mesma posição que na situação da fenda simples.
- Para o padrão de interferência de fenda dupla “ $d = 2a$ ”, meça as distâncias dos três primeiros mínimos de intensidade ao centro do padrão de interferência ( $\theta = 0^\circ$ ).
- Em uma tabela, anote essas medidas e os índices  $m$  correspondentes (veja a equação 13.1).
- Com base nesses resultados, determine o melhor valor para a separação entre as fendas.
- Compare-o com o valor “ $d = 2a$ ” especificado.

#### **MEDIDA DA ESPESSURA DE UM FIO DE CABELO ATRAVÉS DO PADRÃO DE DIFRAÇÃO PRODUZIDO POR ELE**

---

- Substitua o suporte para as fendas por outro a que possa prender um fio de cabelo.
- Prenda um fio de cabelo ao suporte; alinhe-o adequadamente com o *laser* até observar um padrão de difração no anteparo.
- Na folha em que foram traçados os padrões anteriores, registre o padrão de difração produzido pelo fio de cabelo.
- Determine o diâmetro do fio de cabelo.

## Atividade prática

### Deformação inelástica e processo irreversível

#### Objetivos

- Relacionar os processos de distensão muscular e de deformação inelástica em gominhas.
- Calcular o trabalho realizado em processos irreversíveis.

#### INTRODUÇÃO

Duas características observadas no comportamento elástico de um sólido são a linearidade e a reversibilidade. A linearidade relaciona-se à proporcionalidade entre a força aplicada ao sólido e à consequente deformação deste. A reversibilidade significa que, aplicando uma força crescente e, em seguida, decrescente em um sólido, este se alonga e, depois, volta à situação inicial pelo mesmo caminho, isto é, por uma mesma curva em um gráfico de força *versus* alongamento. Do ponto de vista das energias envolvidas, em um processo reversível, o sólido, ao retornar ao seu estado inicial, realiza sobre o agente aplicador da força o mesmo trabalho que este realizou sobre ele para alongá-lo.

Existem sistemas que não apresentam essas características; em alguns casos, a dependência entre força e alongamento pode, até mesmo, não ter uma expressão analítica, podendo ser conhecida apenas experimentalmente. O trabalho realizado nesses sistemas, além de produzir deformações mecânicas, é utilizado para promover reações químicas, modificações estruturais, transformações moleculares e aquecimento, entre outros. Assim, não é possível ao sistema devolver toda a energia cedida ao agente aplicador da força, e o processo de deformação é irreversível.

Lembremos que o trabalho realizado por uma força constante  $F$  que provoca um deslocamento  $x$  é dado pela expressão:

$$W = F \cdot x \cdot \cos\theta,$$

Sendo a força na mesma direção no deslocamento,  $\theta = 0$  e a relação se reduz a:

$$W = F \cdot x,$$

Para uma força  $F$  qualquer, aplicada a um corpo que, sob a ação desta força  $F$ , se desloca de  $x$ , a área do gráfico  $F$  versus  $x$  representa o trabalho realizado pelo agente que aplicou a força. Veja a Figura 14.1.

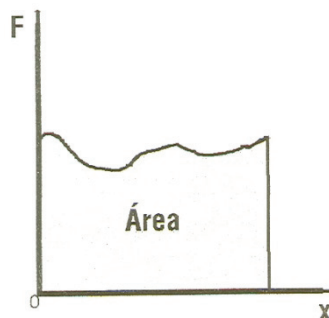


Figura 14.1 - Trabalho como área sob o gráfico de Força por deslocamento.

Troquemos agora a mola por um fio e analisemos a nova situação. Quando submetido à tração, um fio deforma-se, de início elasticamente. Porém, avançando além do limite da elasticidade, a proporcionalidade entre a força e a deformação não mais se verifica. Se formos reduzindo agora a tração, o material não retorna às suas dimensões originais, permanecendo uma deformação residual. Tal fato denomina-se “Histerese mecânica”. O comportamento do material pode ser representado, qualitativamente, pelo gráfico da Figura 14.2:

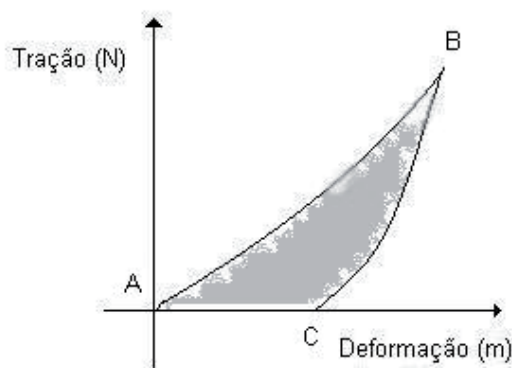


Figura 14.2 - Tração versus deformação.

Na Figura 14.2, o aumento de tração corresponde ao trecho AB, e a redução de tração ao trecho BC e a deformação residual é AC.

Se, a partir do ponto C, for aumentada novamente a tração, o fato se repetirá e assim por diante. Isso fará com que a energia perdida em cada vez, sob forma de calor para o ambiente, faça o corpo se romper com maior facilidade. Assim, a histerese mecânica representa uma energia perdida durante o processo, a qual pode ser calculada pela área ABC do gráfico.

Um exemplo simples de uma situação desse tipo ocorre com uma gominha de borracha ao ser esticada. Nesse caso, observa-se uma não linearidade entre a força aplicada e o alongamento produzido e, também, uma irreversibilidade do processo.

A gominha de borracha é constituída por um conjunto de cadeias poliméricas com uma estrutura fibrilar central e ramificações laterais. O fato de o trabalho total realizado no ciclo ser diferente de zero, deve-se à ruptura de ligações químicas entre as cadeias de moléculas da gominha no processo de carga; ao se reverter esse processo, fazendo-se a descarga, as ligações não se refazem.

---

### OBJETIVO

- Estudar a deformação produzida em gominhas de borracha.

---

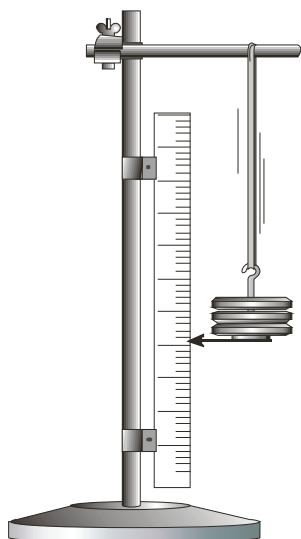
### MATERIAL UTILIZADO

- Cronômetro; suporte e objetos de massa de aproximadamente 50 g; haste de sustentação, régua milimetrada; base; e duas gominhas de borracha.

---

### PROCEDIMENTO

Este experimento possui duas etapas. Na primeira parte são feitas medidas do alongamento de uma gominha em função do tempo, mantendo uma força constante aplicada em sua extremidade. Na segunda parte são feitas medidas do alongamento em função da força aplicada em sua extremidade nos processos de carga e descarga.



---

Figura 14.3 - Objetos de massas conhecidas são pendurados na extremidade de uma gominha.

### PARTE 1- ALONGAMENTO DA GOMINHA EM FUNÇÃO DO TEMPO

---

- Coloque a gominha na haste de sustentação e pendure em sua extremidade livre o suporte com os objetos com uma massa de aproximadamente 500 g, conforme ilustra a Figura 14.3.
- ATENÇÃO: ao colocar o suporte com os objetos de massa na extremidade da gominha, segure-a para evitar que ela oscile.
- Quando o suporte se equilibrar sozinho, meça imediatamente o comprimento  $z_0$  da gominha.
- A cada 20 s meça o comprimento  $z$  da gominha até aproximadamente 2 minutos.
- Utilize uma folha de papel ofício e uma régua para esboçar o gráfico do alongamento  $\Delta z$  da gominha em função do tempo.
- Lembre-se  $\Delta z = z - z_0$

### PARTE 2 - ALONGAMENTO DA GOMINHA EM FUNÇÃO DA FORÇA APLICADA NOS PROCESSOS DE CARGA E DESCARGA

---

- Troque a gominha utilizada anteriormente por outra nova. Em sua extremidade livre, coloque o suporte para os pesos e determine sua posição.
- Adicione os pesos ao suporte determinando, para cada um, sua nova posição e o alongamento,  $\Delta z$ , correspondente. Não ultrapasse a carga máxima de 700 g. Novamente segure o suporte enquanto adiciona os objetos para evitar que a gominha oscile.
- ATENÇÃO: observe o gráfico esboçado na 1ª parte e estime o tempo necessário para se fazer as leituras dos alongamentos da gominha em função do peso dos objetos colocados em sua extremidade.
- Comece a fazer agora o processo de descarga. Retire, um por um, os objetos, medindo o alongamento,  $\Delta z$ , correspondente.
- Registre os valores da força aplicada e do alongamento correspondente em uma tabela nos processos de carga e descarga.
- Com os dados registrados em sua tabela faça o gráfico da força,  $F$ , aplicada em função do alongamento,  $\Delta z$ , da gominha para os dois processos.
- Observe o gráfico e comente sobre a linearidade do gráfico e sobre a reversibilidade do processo.
- Estime o trabalho líquido realizado durante um ciclo de carga e descarga. Comente sobre esse valor encontrado tendo em mente a irreversibilidade do processo.
- Se o processo fosse reversível qual deveria ser o valor do trabalho líquido realizado?

- Compare o valor encontrado para o trabalho com a energia necessária para ferver meio litro de água à temperatura ambiente.

**ATIVIDADE 14.1)** Quando realizamos um exercício físico submetemos nossos músculos a forças de tração e compressão. Se for feito um esforço muito grande, a película que recobre o músculo pode se romper provocando uma distensão muscular leve. Como esse fenômeno pode ser explicado utilizando as observações feitas nesta prática?



# ANEXOS

## ANEXO A - VALORES DE GRANDEZAS E CONSTANTES FÍSICAS

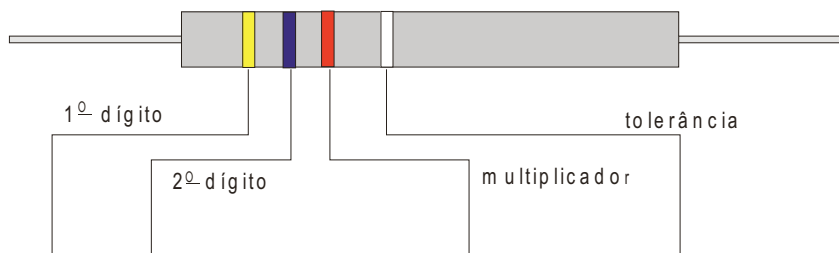
### Valores de grandezas e constantes físicas

Símbolo	Descrição	Valor
$g$	Aceleração da gravidade no laboratório	9,8 m/s <sup>2</sup>
$R$	Constante universal dos gases ideais	8,31 J/mol K
$e$	Carga do elétron	$1,602 \times 10^{-19}$ C
$M_e$	Massa de repouso do elétron	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
$N_A$	Constante de Avogadro	$6,023 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
$k$	Constante de Boltzmann	$1,381 \times 10^{-23}$ J/K
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo	$4\pi \times 10^{-7}$ T m/A
$h$	Constante de Planck	$6,626 \times 10^{-34}$ J s
$c$	Velocidade da luz no vácuo	$3,00 \times 10^8$ m/s

### Prefixos

Símbolo	Nome	Valor
m	Mili	$10^{-3}$
$\mu$	Micro	$10^{-6}$
n	Nano	$10^{-9}$
p	Pico	$10^{-12}$
k	Quilo	$10^3$
M	Mega	$10^6$
G	Giga	$10^9$
T	Tera	$10^{12}$

## ANEXO B - CÓDIGO DE CORES PARA VALORES DE RESISTÊNCIAS



0	0	Preto	⇒	$x 10^0 \Omega = x 1 \Omega$	Ouro: 5%
1	1	Marron	⇒	$x 10^1 \Omega$	Prata: 10%
2	2	Vermelho	⇒	$x 10^2 \Omega$	Sem banda: 20%
3	3	Laranja	⇒	$x 10^3 \Omega$	
4	4	Amarelo	⇒	$x 10^4 \Omega$	
5	5	Verde	⇒	$x 10^5 \Omega$	
6	6	Azul	⇒	$x 10^6 \Omega$	
7	7	Lilás	⇒	$x 10^7 \Omega$	
		Ouro	⇒	$x 10^{-1} \Omega$	

## ANEXO C - CONSTANTE ELÁSTICA EM ASSOCIAÇÃO DE MOLAS

Considerem-se duas molas de massas desprezíveis e de constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$  associadas em série, como mostrado na Figura C.1. Uma força  $F$ , de módulo  $F$ , aplicada na extremidade do conjunto, atua igualmente em cada uma das molas, e cada qual sofrerá um alongamento dado por:

$$x_1 = \frac{F}{k_1} \text{ e } x_2 = \frac{F}{k_2}$$

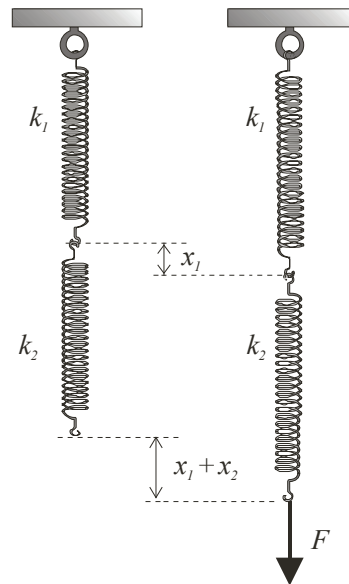


Figura C.1 - Na associação de duas molas em série, a força  $F$  atua nas duas, e o alongamento de uma é independente do da outra.

O alongamento total do conjunto será dado por

$$x_{\text{série}} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_{\text{série}}}$$

e, então,

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{\text{série}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_{\text{série}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Com um raciocínio análogo, é fácil se chegar a uma relação geral para associação de  $n$  molas em série:

$$\frac{1}{k_{\text{série}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \dots + \frac{1}{k_n} .$$

Na associação em paralelo (Figura C.2), a força  $F$  aplicada ao conjunto é dividida entre as duas molas, com valores  $F_1$  e  $F_2$ , e elas se alongam de uma mesma quantidade  $x$

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = k_{\text{paral.}} x = \\ &= k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x \end{aligned}$$

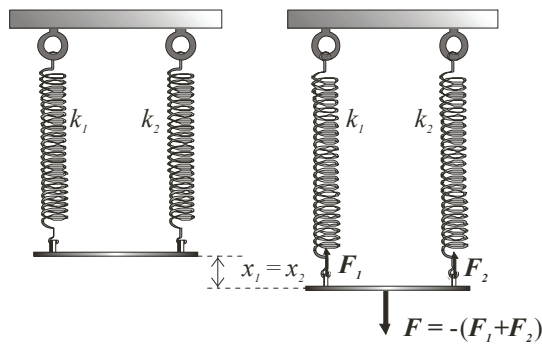


Figura C.2 - Na associação de duas molas em paralelo, a força aplicada é distribuída nas duas e o alongamento de uma é igual ao da outra.

Então,  $k_{\text{paral.}} = k_1 + k_2$

Analogamente, chega-se a uma relação geral para associação de  $n$  molas em paralelo:

$$k_{\text{paral.}} = k_1 + k_2 + \dots + k_n .$$



Para obter mais  
informações sobre  
outros títulos da  
EDITORA UFMG,  
visite o site

[www.editora.ufmg.br](http://www.editora.ufmg.br)

A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária, em sistema offset, papel offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em janeiro de 2012.

# ANEXOS

## ANEXO A - VALORES DE GRANDEZAS E CONSTANTES FÍSICAS

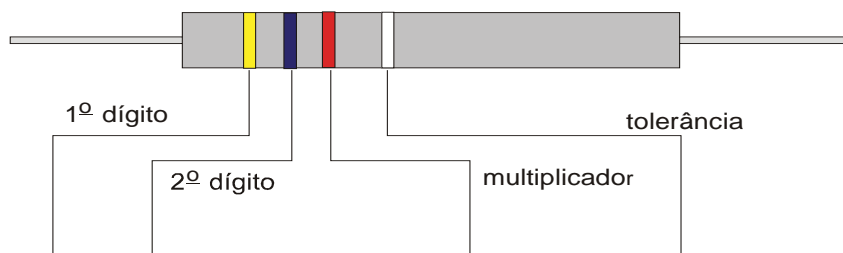
### Valores de grandezas e constantes físicas

Símbolo	Descrição	Valor
$g$	Aceleração da gravidade no laboratório	9,8 m/s <sup>2</sup>
$R$	Constante universal dos gases ideais	8,31 J/mol K
$e$	Carga do elétron	$1,602 \times 10^{-19}$ C
$M_e$	Massa de repouso do elétron	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
$N_A$	Constante de Avogadro	$6,023 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
$k$	Constante de Boltzmann	$1,381 \times 10^{-23}$ J/K
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo	$8,854 \times 10^{-12}$ F/m
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo	$4\pi \times 10^{-7}$ T m/A
$h$	Constante de Planck	$6,626 \times 10^{-34}$ J s
$c$	Velocidade da luz no vácuo	$3,00 \times 10^8$ m/s

### Prefixos

Símbolo	Nome	Valor
m	Mili	$10^{-3}$
$\mu$	Micro	$10^{-6}$
n	Nano	$10^{-9}$
p	Pico	$10^{-12}$
k	Quilo	$10^3$
M	Mega	$10^6$
G	Giga	$10^9$
T	Tera	$10^{12}$

## ANEXO B - CÓDIGO DE CORES PARA VALORES DE RESISTÊNCIAS



0	0	Preto	⇒	$x 10^0 \Omega = x 1 \Omega$	Ouro: 5%
1	1	Marrom	⇒	$x 10^1 \Omega$	Prata: 10%
2	2	Vermelho	⇒	$x 10^2 \Omega$	Sem banda: 20%
3	3	Laranja	⇒	$x 10^3 \Omega$	
4	4	Amarelo	⇒	$x 10^4 \Omega$	
5	5	Verde	⇒	$x 10^5 \Omega$	
6	6	Azul	⇒	$x 10^6 \Omega$	
7	7	Lilás	⇒	$x 10^7 \Omega$	
		Ouro	⇒	$x 10^{-1} \Omega$	

## ANEXO C - CONSTANTE ELÁSTICA EM ASSOCIAÇÃO DE MOLAS

Considerem-se duas molas de massas desprezíveis e de constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$  associadas em série, como mostrado na Figura C.1. Uma força  $F$ , de módulo  $F$ , aplicada na extremidade do conjunto, atua igualmente em cada uma das molas, e cada qual sofrerá um alongamento dado por:

$$x_1 = \frac{F}{k_1} \text{ e } x_2 = \frac{F}{k_2}$$

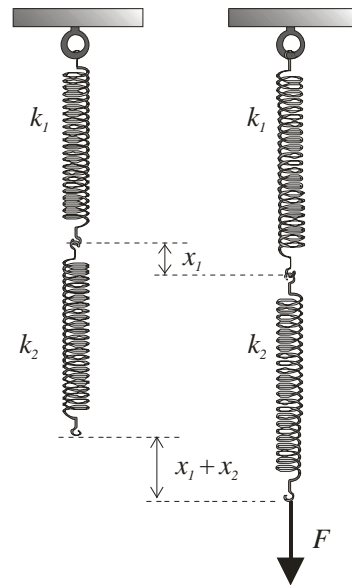


Figura C.1 - Na associação de duas molas em série, a força  $F$  atua nas duas, e o alongamento de uma é independente do da outra.

O alongamento total do conjunto será dado por

$$x_{\text{série}} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_{\text{série}}}$$

e, então,

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{\text{série}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_{\text{série}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Com um raciocínio análogo, é fácil se chegar a uma relação geral para associação de  $n$  molas em série:

$$\frac{1}{k_{\text{total}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Na associação em paralelo (Figura C.2), a força  $F$  aplicada ao conjunto é dividida entre as duas molas, com valores  $F_1$  e  $F_2$ , e elas se alongam de uma mesma quantidade  $x$

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = k_{\text{paral.}} \cdot x = \\ &= k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x \end{aligned}$$

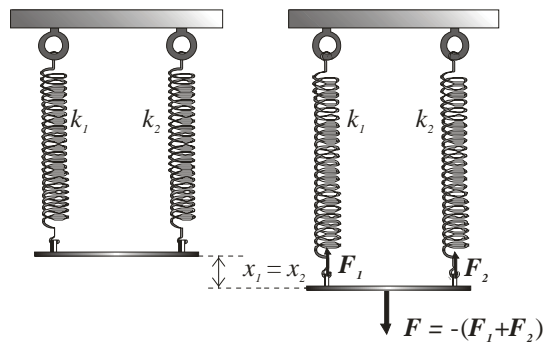


Figura C.2 - Na associação de duas molas em paralelo, a força aplicada é distribuída nas duas e o alongamento de uma é igual ao da outra.

Então,  $k_{\text{paral.}} = k_1 + k_2$

Analogamente, chega-se a uma relação geral para associação de  $n$  molas em paralelo:

$$k_{\text{paral.}} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



Para obter mais  
informações sobre  
outros títulos da  
EDITORA UFMG,  
visite o site

[www.editora.ufmg.br](http://www.editora.ufmg.br)

A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária, em sistema offset, papel offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em 2011.



CENTRO DE APOIO  
À EDUCAÇÃO A  
DISTÂNCIA UFMG

**PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Secretaria de Educação a Distância  
Ministério da Educação

