

Rafael Antunes Ribeiro

**Robustez da fase topológica fracionária
ao ruído e sua
demonstração experimental**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Instituto de Ciências Exatas da
Universidade Federal de Minas Gerais como
requisito parcial para obtenção do título de Doutor
em Ciências

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R484r Ribeiro, Rafael Antunes.

Robustez da fase topológica fracionária ao ruído e sua demonstração experimental / Rafael Antunes Ribeiro. – 2019.

105f., enc. : il.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

Bibliografia: f. 100-105.

1. Óptica quântica. 2. Sistemas quânticos. 3. Mecânica quântica, teses.
I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3409 5637
(xx) (31) 3409 5633
Fax (xx) (31) 3409 5688
(xx) (31) 3409 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 359ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR Rafael Antunes Ribeiro orientado pelo professor Sebastião José Nascimento de Pádua, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 09:00 horas de quatorze de agosto de dois mil e dezenove, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Ana Maria de Paula** (Departamento de Física/UFMG), **Reinaldo Oliveira Vianna** (Departamento de Física/UFMG), **José Geraldo Peixoto de Faria** (Departamento de Matemática/CEFET-MG) e **Pierre-Louis de Assis** (Instituto de Física "Gleb Wataghin"/UNICAMP) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **Rafael Antunes Ribeiro** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de **"Robustez da fase topológica fracionária ao ruído e sua demonstração experimental"**. Às 14:00 horas do mesmo dia, o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 14 de Agosto de 2019.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. José Geraldo Peixoto de Faria
Departamento de Matemática/CEFET-MG

Profa. Ana Maria de Paula
Departamento de Física/UFMG

Prof. Pierre-Louis de Assis
Instituto de Física "Gleb Wataghin"/UNICAMP

Prof. Reinaldo Oliveira Vianna
Departamento de Física/UFMG

Candidato

*Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos,
Nathi, parentes e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus pais e irmãos pelo amor incondicional, suporte e educação que sempre me ofereceram. Agradeço também ao apoio que recebi dos parentes e amigos, especialmente dos queridos Nathi, Zé, Cleidma, Rodrigo, Fê e dos parceiros da república, da Ocupação-ICEx e demais ocupações.

Sou grato também aos amigos do laboratório de Óptica Quântica, em especial ao Tutu e meu orientador Sebastião de Pádua. Agradeço aos professores das disciplinas que cursei, aos alunos que lecionei no chamado “Estágio docente”, aos membros do grupo EnLight, todos os funcionários do Departamento de Física, do ICEx, do LAPREV e da UFMG.

Aproveito para agradecer também aos membros da banca pelo tempo dedicado na leitura deste trabalho e pelas valiosas sugestões apresentadas.

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais e aos órgãos de pesquisa CNPq, CAPES, FAPEMIG, SBF e INCT pelo auxílio financeiro.

Além disso, deixo o meu reconhecimento e agradecimento pelo trabalho singular que o Presidente Lula, a Presidenta Dilma e o PCO prestaram ao país e à minha cidadania. Presidente e Presidenta, a suas indignações também são as minhas...

Por fim, saibam que de todos vocês recebi luzes e inspirações que me transformaram em uma pessoa melhor e me ajudaram a concluir mais esta etapa.

Muito obrigado!

RESUMO

Em 1984, Berry descobriu a chamada fase geométrica que passou a ser um parâmetro de caracterização do sistema quântico de duas ou mais partes. Segundo Berry, a fase geométrica carrega consigo as propriedades geométricas e topológicas do espaço de parâmetros. A fase topológica fracionária (FTF), cujo o valor é $2\pi/d$, onde d é a dimensão do subsistema bipartido de dois qudits, foi descoberta por Khoury e Oxman em 2011. A FTF $2\pi/d$ traz como assinatura a dimensão d de um dos subsistemas do espaço de Hilbert associado ao estado bipartido. Neste trabalho, utilizamos o formalismo de Mapas de Kraus para demonstrar teoricamente que a FTF é robusta aos ruídos de defasagem e de amplitude a partir da proposta teórica de medir a FTF (Phys. Rev. A, 87: 042 113, 2013) *. Demonstramos experimentalmente que a FTF é robusta ao ruído de defasagem.

Para demonstrar teoricamente a robustez da FTF, nos baseamos em duas propostas experimentais: uma fonte interferométrica constituída por interferômetros de Mach-Zehnder com PBSs imersos em um interferômetro composto por um cristal gerador de pares de fótons e PBS * (esta composição pode ser chamada de Mach-Zehnder triplo composto com PBSs); uma fonte de pares de fótons hiperemaranhada (polarização e caminho). Para a fonte interferométrica, apresentamos uma simplificação que possibilita medir a FTF apenas com o interferômetro Cristal-PBS sem os interferômetros de Mach-Zehnder. Já a fonte hiperemaranhada é uma técnica nova para medir a FTF com melhor aproveitamento do sinal e maior estabilidade que os interferômetros. Além disso, embora com alguns prejuízos quanto às possibilidades de evoluções $SU(d)$ do estado, a fonte hiperemaranhada possibilita eliminar totalmente a necessidade de interferômetro na medida da FTF – procedimento ainda não utilizado até a publicação do nosso trabalho experimental.

Experimentalmente, demonstramos que a fonte hiperemaranhada implementa a medida da FTF sem a necessidade de interferometria. Com essa montagem, fomos capazes de demonstrar a robustez da FTF mediante a presença de ruído de defasagem e observar grande consistência entre os resultados experimentais e as previsões do modelo teórico. Este fato nos leva a crer que a FTF é uma candidata realmente confiável à implementação de algoritmos quânticos baseados em fase topológica. Elementos insensíveis a ruídos são centrais para aplicações da informação quântica, pois a manipulação da informação e a sua propagação significa atuar sobre o estado quântico ou colocá-lo em contato com ruído. O estado em geral se mostra extremamente sensível às operações experimentais e interação ruidosas, o que muitas vezes descaracterizam a informação contida no estado.

Palavras-chave: Óptica Quântica (experimental e teoria); Sistemas Quânticos Abertos; Fundamento de Mecânica Quântica; Informação Quântica.

ABSTRACT

In 1984, Berry discovered the Geometric Phase that became a characterization parameter of a quantum system. According to Berry, the geometric phase carries itself the geometric and the topologic properties of the parameter space. The Fractional Topological Phase (FTP), whose value is $2\pi/d$, where d is the dimension of the bipartite subsystem of a two qudits state, was discovered by Khoury and Oxman in 2011. The FTP $2\pi/d$ brings as a signature the dimension d of a subsystem of the Hilbert Space associated with the bipartite state. In this work, we use the Kraus' Maps formalism to theoretically demonstrate that the FTP is robust to the dephasing and amplitude damping noises. Our calculation uses the theoretical proposal for measuring the FTP discussed in Phys. Rev. A, 87: 042 113 (2013) *. We demonstrate experimentally that the FTP is robust to the dephasing noise.

In the theoretical demonstration of the FTP's robustness that guided our calculation, we based on two experimental proposals. The first one was an interferometer in photon paths variables consisting of two Mach-Zehnder interferometers with PBSs immersed in an interferometer composed of a crystal and a PBS * (this composition can be called a triple composite Mach-Zehnder with PBSs). The second one uses a source of hyperentangled photons pairs, in the polarization and photon paths parameters. For the interferometer in paths variables, we present a simplification that is able to measure the FTP only with the interferometer Crystal-PBS without the Mach-Zehnders. The hyperentangled source is a new technique to measure the FTP with better use of the signal and greater stability of the interferometer. In addition, although there are some losses in relation to the possibilities of $SU(d)$ evolutions of the states, the hyperentangled source is able to eliminate completely the use of interferometry in path variables in the FTP measurement – a procedure not yet used until the publication of our experimental work.

We demonstrate experimentally that the hyperentangled source implements the FTP measurement without the need of photon path interferometry. With this setup, we are able to demonstrate the robustness of FTP by the presence of dephasing noise and observe great consistency between the experimental results and the theoretical model predictions. This fact leads us to believe that FTP is a really reliable candidate for the implementation of quantum algorithms based on topological phase. Noise insensitive elements are central to quantum information applications because manipulation of information and its propagation means acting on the quantum state or putting it in contact with environment noise. In general, the state is extremely sensitive to environment noisy operation and interaction, which often destroy the information contained in the state.

Keywords: Quantum Optics (experimental and theory); Open Quantum Systems; Fundamentals of Quantum Mechanics; Quantum Information.

Sumário

I.	INTRODUÇÃO HISTÓRICA, CONCEITUAL	10
II.	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	15
<u>CAPÍTULO 1</u>	INTRODUÇÃO ÀS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS- TOPOLÓGICAS DA FASE GEOMÉTRICA	15
<u>CAPÍTULO 2</u>	FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA	21
<u>CAPÍTULO 3</u>	DETECÇÃO DA FTF VIA INTERFEROMETRIA DE CAMINHOS (DESENVOLVIMENTO TEÓRICO)	25
3.1	A ROBUSTEZ DA FTF AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA COM ATUAÇÕES INDIVIDUAIS E SIMULTÂNEAS	25
3.2	INTERFERÊNCIA DE DOIS FÓTONS COM A POLARIZAÇÃO USADA COMO GRAU DE LIBERDADE AUXILIAR.	26
3.3	MAPAS DE KRAUS PARA O EXPERIMENTO DA FTF COM RUÍDO	29
3.3.1	Mapa para a Fase de Varredura	31
3.3.2	Mapa para a Fase Topológica Fracionária	33
3.3.3	Mapa para o Ruído de Fase de Defasagem	34
3.3.4	Mapa para o Ruído de Amplitude Amortecida	36
3.3.5	Atuação de todos os mapas na sequência do experimento	37
3.3	FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA SOBREVIVE AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA	38
<u>CAPÍTULO 4</u>	RESULTADOS NUMÉRICOS DA ROBUSTEZ DA FTF AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE	43
4.1	EVOLUÇÕES QUE IMPLEMENTAM A FTF	43
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB RUÍDO DE DEFASAGEM	46
4.3	RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB O RUÍDO DE AMPLITUDE	52
4.4	RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB APLICAÇÃO SIMULTÂNEA DOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA	58

<u>CAPÍTULO 5</u>	SIMPLIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS	61
<u>CAPÍTULO 6</u>	EXPERIMENTO DA FTF VIA HIPEREMARANHAMENTO . DESENVOLVIMENTO TEÓRICO-EXPERIMENTAL	65
6.1	EXPERIMENTO PARA MEDIR A FTF COM FONTE DE FÓTONS HIPEREMARANHADOS SOB RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA	66
<u>CAPÍTULO 7</u>	MEDIDAS DA FTF COM FONTE DE FÓTONS HIPEREMARANHADOS SOB RUÍDOS DE DEFASAGEM E AMPLITUDE	71
7.1	PREPARAÇÃO DO ESTADO	71
7.2	MEDIDAS DA FTF	79
III.	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	85
IV.	APÊNDICES.	88
<u>APÊNDICE A</u>	RELAÇÃO ENTRE A FTF E A FASE GEOMÉTRICA DE BERRY	88
<u>APÊNDICE B</u>	CÁLCULOS OMITIDOS NO CAPÍTULO 3.	93
<u>APÊNDICE C</u>	CÁLCULOS OMITIDOS NO CAPÍTULO 4.	95
<u>APÊNDICE D</u>	TABELAS DAS FASES-VOLTAGENS USADAS NAS MÁSCARAS NO SLM.	96
V.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100

I. INTRODUÇÃO HISTÓRICA, CONCEITUAL

O conceito de *Fase Topológica (FT)* e *Fase Topológica Fracionária (FTF)* estão intimamente interligados à *Fase Geométrica (FG)*. A FG foi deduzida por Pancharatnam em 1956 ao estudar a transformação na polarização da luz em ótica clássica por meio da Esfera de Poincaré [1]. Sua versão na Mecânica Quântica foi apresentada em 1984 por Berry ao descobrir que um sistema quântico adquire duas fases distintas ao efetuarmos uma evolução adiabática de trajetória fechada no espaço dos parâmetros do hamiltoniano que evolui o sistema [2, 3]. Uma fase, a já conhecida fase dinâmica, surge da evolução unitária do sistema quântico, enquanto a então fase geométrica está vinculada a curva fechada C_H realizada no espaço de parâmetros do hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$, de parâmetros $\mathbf{R}_i$, que evolui adiabaticamente o estado quântico ¹, o qual permanece sendo auto estado do Hamiltoniano cujo autovalor é $E_n(\mathbf{R})$ em toda a evolução e, ao final da evolução, apresenta a fase geométrica γ_g em relação ao estado inicial. Berry fez uso do Teorema Adiabático para deduzir a Fase Geométrica Quântica, porém esta restrição não é necessária para a manifestação desta fase, como Aharonov e Anandan [4] demonstraram pela dedução da equação [5]

$$\gamma_g = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle - \left(-i \int_0^t dt' \langle \psi(t') | \dot{\psi}(t') \rangle \right). \quad (1)$$

onde o primeiro termo corresponde à fase total e o segundo à fase dinâmica, tal que o primeiro termo é o argumento do produto interno do estado evoluído temporalmente com o outro que permaneceu inalterado. Além disso, ao invés de explicar tal fenômeno no espaço de parâmetros do hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$, Aharonov e Anandan constatarem que, fundamentalmente, a FG corresponde ao caminho fechado C_P no espaço de estados puros sem a redundância de fase ². Ou seja, os distintos hamiltonianos $H(t)$ que são responsáveis pela evolução dos infinitos estados quânticos que traçam distintas trajetórias no espaço de Hilbert que correspondem à

¹ Após a descoberta de Berry, a FG passou a ser uma importante grandeza da Mecânica Quântica, sendo aplicada no estudo de diversas áreas da Física, como, por exemplo, em Fundamentos da Mecânica Quântica, Física do Estado Sólido, Teoria de Campo, Óptica Quântica e outras áreas [5-8].

² O estado puro $|\psi\rangle = e^{i\omega} \sum_{i=1} C_i |i\rangle$ pertencente ao Espaço de Hilbert, onde C_i são números complexos, descreve o mesmo sistema quântico que o estado $|\psi'\rangle = |\psi\rangle / e^{i\omega}$ pertencente ao Espaço Projetivo de Hilbert.

mesma curva C_P do espaço de estados puros sem redundância de fase – tais curvas distintas manifestarão a mesma fase geométrica definida por C_P .

Em seguida, podemos perguntar: Como se mede a fase geométrica? Para isto usamos trechos dos trabalhos de Berry e de Aharonov e Anandan. Traduzimos um trecho do artigo Berry e do artigo de Aharonov e Anandan que sugerem como se mede a FG:

“Este fator de fase é observável por interferência se o sistema evoluído ciclicamente é recombinado com outro que foi separado dele em um momento anterior e cujo Hamiltoniano foi mantido constante ³”.

“Então a diferença de fase entre os dois feixes é apenas a fase geométrica, que é observável em princípio, a partir do padrão de interferência, mesmo quando o campo magnético é variado não-adiabaticamente ⁴.”

Para exemplificar estas citações, na Figura 1 segue uma ilustração pictórica dos padrões de interferências de dois feixes recombinados, um que permanece constante, $|\psi(0)\rangle$, e outro que sofrerá uma evolução, $|\psi(t)\rangle$, como a Eq. (1) nos sugere [9]. Cada um dos três padrões (azul, verde vermelho) correspondem à interferência em instantes distintos da evolução: azul – interferência sem evolução (à esquerda da Figura); verde – interferência com evolução intermediária (mostrada pela primeira vez no centro da Figura); vermelha – interferência após evolução cíclica concluída (o padrão deslocado, à direita na Figura). A FG surge da diferença de fase entre o padrão azul e vermelho, como ilustrado no lado direito da Figura 1. A FT é medida também desta maneira. No entanto, um dos resultados do nosso trabalho troca interferometria pelo hiperemaranhamento no processo de geração dos padrões dos quais extraímos a FT. Esta técnica é totalmente inovadora para a medida da FT [10].

³ “This phase factor is observable by interference if the cycled system is recombined with another that was separated from it at an earlier time and whose Hamiltonian was kept constant.” [2].

⁴ “Then the phase difference between the two beams is just the geometrical phase, which is observable in principle, from the interference pattern, even when the magnetic field is varied nonadiabatically.” [4].

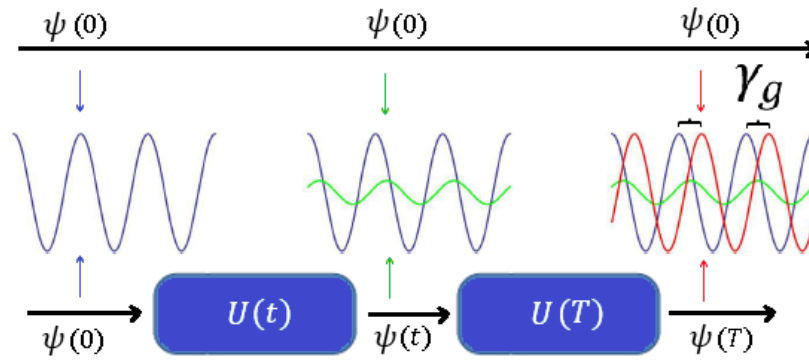


Figura 1: Representação pictórica da interferência entre duas partes de um sistema, uma que permanece constante ($\psi(0)$) e outra ($\psi(t)$) que sofre uma evolução, produzindo padrões de interferências distintos conforme a atuação do operador evolução $U(t)$. A diferença de fase entre o padrão final e o inicial é a fase geométrica γ_g .

Nos anos subsequentes ao trabalho de Berry, surgem trabalhos experimentais sobre a FG [11-13], os quais usavam o termo “fase topológica de Berry” no sentido de a FG depender somente do caminho percorrido pelo estado no espaço projetivo de Hilbert. Alertamos que as características topológicas na Física possuem diferentes significados em contextos distintos. Por exemplo, a FTF que estudaremos nesta tese está conectada ao conceito de conexidade de um espaço, ou conexidades de superfícies na Matemática. Em 1991, Kwiat e Chiao [14] observaram a FG (γ_g) em estados bipartidos utilizando um sistema fotônico e interferometria de dois fótons, garantindo assim que a FG (γ_g) se manifestasse em um sistema óptico em nível quântico. A demonstração teórica de que a **FG (γ_g) é robusta ao ruído**⁵ veio somente em 2003 com o trabalho de Carollo *et al* [15] e, em 2004, Sjöqvist descreve um método cinemático quântico para descrever a fase geométrica para estados mistos sob evoluções não unitárias e discute uma maneira de medir a FG para estados mistos [16]. Um trabalho experimental foi realizado em 2003, onde foi medido a fase geométrica para um estado misto [17] e demonstrado que os resultados experimentais estão de acordo com as previsões teóricas de [18]. Além da robustez de γ_g , pode-se analisar a **perda de coerência** vinculada à visibilidade do padrão de

⁵ Robustez de γ_g ao ruído: é a capacidade de γ_g se manifestar mediante ruídos.

interferência ⁶. Usaremos a robustez e a perda de coerência na descrição da FTF sob ruído. Nos próximos capítulos desenvolveremos o conteúdo abstrato desta tese que não deixa explícito a robustez de γ_g e nem a perda da coerência/visibilidade do padrão de interferência que manifesta a **robustez da coerência**.

Em 2000, dois trabalhos que investigavam a influência do emaranhamento na FG já apontavam para a existência da FTF – um trabalho é de Sjöqvist [19] e o outro de Sjöqvist e Hessmo [20]. Eles demonstram que o estado maximamente emaranhado (MES) de dois qubits só poderia apresentar a FG igual a 0 ou π . Três anos depois Milman e Mosseri [21] demonstraram que estes dois valores correspondem a dois caminhos distintos traçados na chamada bola $SO(3)$ ⁷ e um ano depois Li Ming *et al* [22] demonstram que a fase π se deve ao fato do grupo $SO(3)$ ser não-simplesmente conexo, ou seja, o grupo $SO(3)$ não possui topologia trivial. Este resultado se torna mais claro em 2006 com o trabalho de Milman demonstrando que, em certos casos, a FG pode apresentar natureza topológica [23]. No ano seguinte, Souza e Khoury *et al* [24] e Jiangfeng Du e Suter *et al* [25] observaram experimentalmente a FTF para dois qubits. A generalização para dois-qubits ocorre somente em 2011 com o trabalho de Oxman e Khoury [26] que utilizaram matrizes $SU(d)$ ⁸, as quais surgem se realizamos uma decomposição polar ⁹ da matriz de coeficientes do estado. Ao se impor a condição de que o estado evoluído difira por uma fase do estado inicial, o mesmo ocorre com as matrizes $SU(d)$ presentes na decomposição polar em cada situação. Embora o grupo $SU(d)$ seja simplesmente conexo, a restrição de que o estado evoluído difira por uma fase do estado inicial, limita estes estados a um subgrupo não-simplesmente conexo, tal como ocorre ao se mapear $SU(2)$ em

⁶ Podemos definir a **Robustez da coerência** como sendo a resiliência da visibilidade ν se manifestar sob ruídos. A visibilidade é calculada a partir da intensidade máxima e mínima do padrão de interferência: $\nu = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$.

⁷ $SO(d)$ é o grupo especial ortogonal (*Special Orthogonal Group*) de matrizes $d \times d$ ortogonais e que possuem determinante igual a 1. Em 3 dimensões estas matrizes descrevem todas as rotações de $\mathbb{R}^3$ em torno da origem, e por isso é também chamado grupo de rotação, cuja representação geométrica é a bola $SO(3)$. Este grupo é não-simplesmente conexo.

⁸ $SU(d)$ é o grupo especial unitário (*Special Unitary Group*) de matrizes $d \times d$ unitárias que possuem determinante igual a 1. Este grupo é simplesmente conexo.

⁹ Qualquer matriz admite uma decomposição polar do tipo $\alpha = e^{-i\varphi} QS$, onde Q é hermitiana positiva definida e $S \in SU(d)$.

SO(3). Ainda no trabalho de Oxman e Khoury (e de modo mais claro no trabalho [27] com outros pesquisadores), eles deduzem a FTF a partir da FG de Berry. Nos anos subsequentes surgem diversos trabalhos relacionado à FTF: FTF para multiqubits [28]; propostas experimentais com sistemas fotônicos de qudits [27] e multiqubits [29]; generalização da teoria para dois qudits com dimensões diferentes [30]; observação experimental da relação entre a FG e FT com o emaranhamento de dois qubits [31]; observação experimental da FTF [32] para dois qudits maximamente emaranhados com dimensões $d = 2, 3$ e 4 . Por fim, nossos trabalhos [10, 33] que apresentarei nesta tese consistem em demonstrar teoricamente a robustez da FTF para qudits ($d=2, 3$ e 4) sob ruído de defasagem e também sob ruído de amplitude amortecida para uma montagem experimental proposta, que usa as variáveis de caminho de pares de fótons correlacionados como a dimensão do estado. A FTF foi medida com outra proposta experimental que usa hiperemaranhamento de modo a dispensar a necessidade de interferometria de caminhos dos fótons e utiliza a variável de polarização dos fótons como variável auxiliar. O artigo experimental da robustez da FTF será submetido em breve, sendo já publicado dois outros trabalhos que fazem parte desta tese [10, 33].

Esta tese está dividida em capítulos descritos a seguir. No Capítulo 1 apresentaremos uma *Introdução às características geométricas-topológicas da fase geométrica e a fase topológica fracionária* no Capítulo 2, onde deduziremos a FTF e mostraremos seu vínculo com a FG. No Capítulo 3 faremos o desenvolvimento teórico do *experimento da FTF via interferometria de caminhos* [27] e demonstraremos da *robustez da FTF aos ruídos de defasagem e de amplitude amortecida com atuações individuais e simultâneos*. No Capítulo 4 apresentaremos os *resultados numéricos da robustez da FTF aos ruídos de defasagem e de amplitude com atuações individuais e simultâneos*. No Capítulo 5 demonstraremos algumas *simplificações experimentais* que levam ao mesmo resultado teórico [27] e que apresentam vantagens práticas. Os principais resultados destas partes publicamos em [33]. No Capítulo 6 (parte teórica) e no Capítulo 7 (parte experimental) apresentaremos um novo *experimento para medir a FTF com fonte de fótons hiperemaranhados sob ruídos de defasagem (teórico-experimental) e de amplitude amortecida (teórico)*. Alguns resultados do Capítulo 7 publicamos em [10]. No último capítulo apresentamos as conclusões e perspectivas, além de apêndices com detalhes dos cálculos e medidas experimentais.

II. DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO ÀS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS-TOPOLÓGICAS DA FASE GEOMÉTRICA

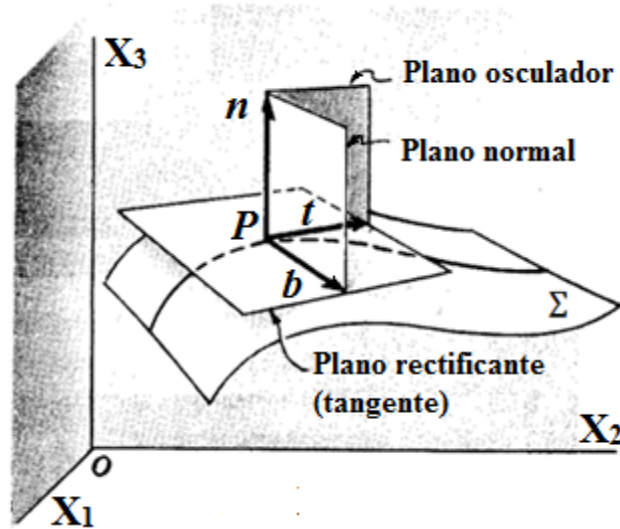


Figura 2: Planos formados pelos pares de vetores do triedro de Frenet de uma curva sobre a superfície: plano osculador; plano normal; plano rectificador ou tangente [34 - 36].

A *fase geométrica* associada a uma trajetória fechada sobre uma superfície Σ pode ser compreendida por meio do *transporte paralelo* de um vetor unitário $T(x)$ pertencente ao plano rectificante, também conhecido como plano tangente a um ponto da trajetória. A descrição desse processo pode ser feita por meio do *triedro de Frenet*: base ortonormal associada a cada ponto s da curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $|\alpha'(s)| = 1$ e descrita em um referencial estático $\{X_1, X_2, X_3\}$, como mostra a Figura 2. Por exemplo, para uma curva tridimensional regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha: I \rightarrow R^3$, construímos um referencial ortogonal, $\{t(s), n(s), b(s)\}$ (*triedro de Frenet*), em um ponto $\alpha(s) = (X(s), Y(s), Z(s))$ sobre a curva, $s \in I$, que obedece as seguintes relações

$$\begin{aligned}
 (a) \quad t(s) &= \alpha'(s): \text{vetor tangente unitário;} & (d) \quad t'(s) &= \kappa(s)n(s); \\
 (b) \quad n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}: \text{vetor normal;} & (e) \quad n'(s) &= -\kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s); \\
 (c) \quad b(s) &= t(s) \times n(s): \text{vetor binormal;} & (f) \quad b'(s) &= \tau(s)n(s).
 \end{aligned} \tag{2}$$

tal que $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ é a curvatura e o produto escalar $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$ é a torção de α em no ponto s ¹⁰. Em outras palavras, o giro em torno do eixo b corresponde à curvatura (κ) e o giro em torno de t corresponde à torção (τ) [34 - 36].

Definimos o *transporte paralelo* como sendo o deslocamento de um vetor unitário $T(x)$ (pertencente ao plano tangente no ponto P que percorre a curva) que se mantém constante em relação ao *vetor normal à curva* (n). Ou seja, em um movimento dividido em partes, como na Figura 3 (b) cuja trajetória são 3 *geodésicas*¹¹, o triedro de Frenet pode “girar” em torno do vetor normal n , mas o vetor do transporte paralelo não pode. Por exemplo, consideremos $T(0) = t(0)$, enquanto T permanece fixo à n ao deslizar sobre a curva, t pode girar em torno de n devido à influência da torção, como ocorre na Figura 3 (b) quando T sai do movimento na latitude (norte-sul) para o movimento na longitude (leste-oeste) e vice e versa, ou seja, nos pontos 2 e 3 da Figura 3 (b) t muda a sua direção enquanto T permanece fixo em n . Ao final dessa trajetória fechada na Figura 3 (b) há um ângulo entre $T(0)$ e $T(\text{final})$ que chamamos de *fase geométrica*, cuja existência mostra que a superfície possui curvatura. Um contraexemplo é a superfície da Figura 3 (a) que não possui torção e nem curvatura, conseqüentemente a fase geométrica associada a trajetória contida na superfície será zero dado que a curvatura da superfície é zero. A trajetória fechada na Figura 3 (c) também apresenta fase geométrica diferente de zero, mas não é simples de visualizar por meio dela. No entanto, podemos traçar três geodésicas semelhantes as apresentadas na Figura 3 (b) e por meio delas constatar a fase geométrica.

¹⁰ Todos os elementos fundamentais para a descrição desse transporte paralelo estão presentes tanto na geometria diferencial quanto na Física elementar. Na geometria diferencial, o comprimento da curva é a própria parametrização da curva, enquanto na Física é o tempo que parametriza as equações da trajetória de um movimento. A substituição da curva $\alpha(s)$ pelo vetor posição $\vec{r}(t)$ nos conduz à todas as equações da Dinâmica na Física ao deslizar sobre a curva fechada para estudar os locais da superfícies Σ . Com isso, muitas nomenclaturas na Física tem a sua origem na matemática, em especial na geometria diferencial, como fase geométrica, fase topológica e ângulo sólido, como veremos.

¹¹ Geodésica: é a trajetória de menor (ou maior) comprimento entre dois pontos em uma superfície. Por exemplo, há duas geodésicas entre dois pontos em uma esfera, a menor e a maior distância entre os pontos de modo que a junção dessas geodésicas formam uma circunferência. A geodésica é a curva que estremiza a distância. No contexto da física, dizemos que ambas trajetórias minimizam a ação. Particularmente sobre um plano sem furos, a geodésica é uma reta entre os dois pontos a serem interligados.

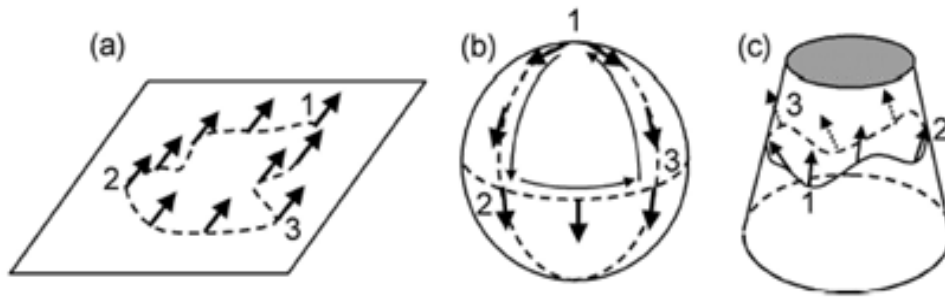


Figura 3: Esboço de transporte paralelo em um plano (a), uma esfera (b) e em um cone (c) [6]. O transporte paralelo no plano mostra fase geométrica zero, enquanto na esfera e no cone as fases geométricas associadas são diferentes de zero.

Note que o transporte paralelo foi totalmente caracterizado pelo vetor normal à superfície, o que nos permite criar uma relação entre a *fase geométrica* do transporte paralelo com o chamado *ângulo sólido* (Figura 4 (a)) descrito pelo vetor normal sobre uma esfera unitária atrelada ao triedro de Frenet, porém fixa (Figura 4 (b)), de tal modo que a descrição da fase geométrica passa a ser feita pelo comportamento do ângulo sólido mapeado nesta esfera fixa de raio unitário. (Este mapeamento é chamado de *Mapa de Gauss* ou *Aplicação Normal de Gauss*. O link na nota de rodapé ¹² contém um vídeo que mostra o seu funcionamento do Mapa de Gauss a partir de um simulador). Definimos *ângulo sólido* associado à uma curva fechada sobre uma esfera como a área interna à curva fechada dividida pelo raio da esfera ao quadrado, ou seja, $d\Omega = dA/R^2$, Figura 4 (a). A trajetória fechada da Figura 4 (c) possui fase geométrica e ângulo sólido idênticos, $\theta = \Omega$. Por exemplo, a área de uma casca esférica é $4\pi R^2$, portanto a área de um octante da casca esférica será $\pi R^2/2$, o que nos remete a um ângulo sólido de $\pi/2$. Se efetuarmos o transporte paralelo em um octante da casca esférica também constataremos que a fase geométrica é $\pi/2$. A Figura 4 (c) nos induz à generalização da igualdade entre a fase geométrica e o ângulo sólido.

¹² Vídeo *Gauss Map and Curvature* : <https://www.youtube.com/watch?v=r6uOfcKBz10>

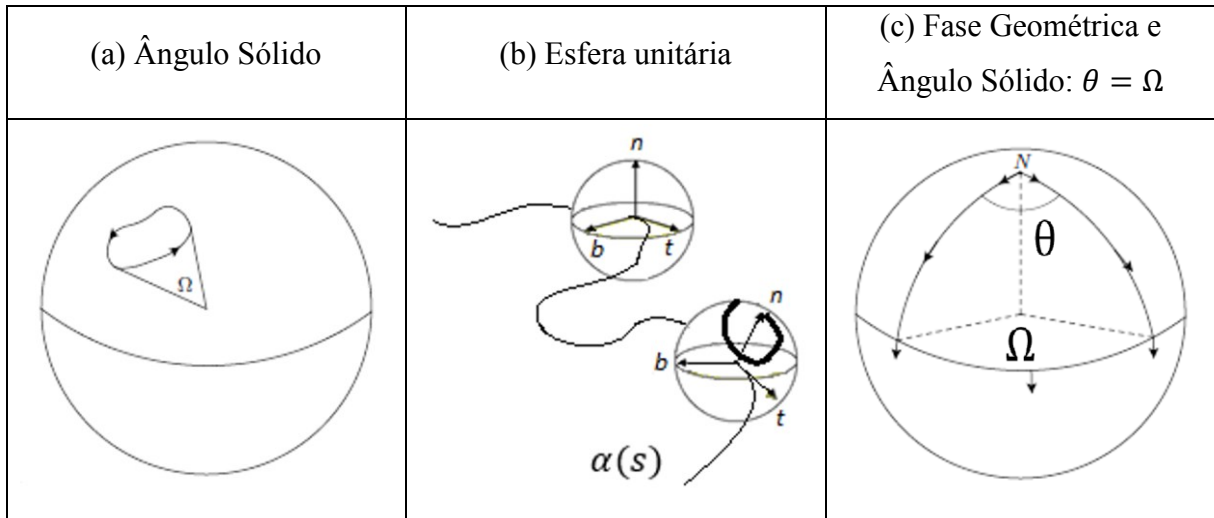


Figura 4: A Figura (a) ilustra o ângulo sólido de uma trajetória fechada. A Figura (b) mostra o mapeamento da curva $\alpha(s)$ por meio do acoplamento do triedro de Frenet a uma casca esférica unitária que exibe o ângulo sólido traçado pela normal. A Figura (c) mostra a equivalência do ângulo sólido com a fase geométrica [35].

A igualdade da fase geométrica com o ângulo sólido é válida se não houver furos na superfície. Para os casos em que há furos, recuperaremos a igualdade ao acrescentar um novo ângulo associado a cada um dos furos sobre a superfície [50]. Cada um desses ângulos chamamos de *fase topológica*. A *classificação topológica* de uma superfície se dá pelo número de furos que ela possui e a equivalência topológica entre duas ou mais superfícies se dá *pelo número de furos e a dimensão das superfícies*. Ou seja, duas superfícies são equivalentes se possuírem a mesma dimensão e a mesma quantidade de furos, independente das suas geometrias (forma). As superfícies que não possuem furos são chamadas de *simplesmente conexas* e as superfícies que possuem furos de *não-simplesmente conexas* ¹³. Este aspecto topológico é expresso pictoricamente na superfície mostrada na Figura 5, chamada de bitoro – uma superfície Σ com uma região C de área S que contém dois furos limitados pelos contornos C_1 e C_2 (áreas sombreadas). Uma fase geométrica (θ) pode ser associada à curva C , um ângulo sólido (Ω) à área S e *fases topológicas* às curvas C_1 e C_2 (γ_1 e γ_2), que são equivalentes aos ângulos sólidos associados às áreas que preencheriam o furo tornando a superfície S em simplesmente conexa. Deste modo, por construção, temos a seguinte igualdade $\theta = \Omega + \gamma_1 + \gamma_2$. Se deformarmos a

¹³ Conexidade de uma superfície é a facilidade (ou não) de interligar dois pontos distintos sobre a superfície. Implicitamente quer dizer que conectar dois pontos sobre a superfície com furos é mais difícil que sem furos.

curva C tal que $S = 0$, temos que a fase geométrica será igual à fase topológica, $\theta = \gamma_1 + \gamma_2$. Se não houvesse furo, a deformação de C nos remeteria à um ponto. A deformação de curvas fechadas é outra maneira de estudarmos a conexidade da superfície.

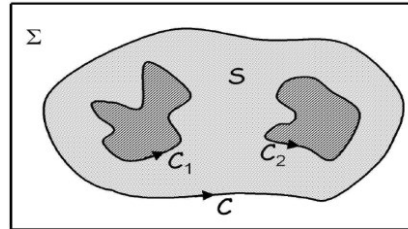


Figura 5: Σ é uma superfície não-simplesmente conexa com 2 furos (áreas sombreadas), limitados pelos contornos C_1 e C_2 [6]. Cada furo chamamos de toro, assim Σ é um bitoro. A cada contorno (C , C_1 e C_2) podemos associar ângulos: à C um ângulo sólido (Ω); C_1 e C_2 ângulos topológicos (γ_1 e γ_2). A associação desses ângulos nos remete à uma fase geométrica $\theta = \Omega + \gamma_1 + \gamma_2$.

A Figura 6 nos mostra um exemplo mais geral do comportamento do vetor normal a uma esfera e a um toro com trajetória fechada. Se deslizarmos uma esfera unitária pelas trajetórias tal como na Figura 4 (b), os vetores normais traçarão um ângulo sólido na esfera unitária que possibilitará associarmos a cada trajetória uma fase, que pode ser de natureza geométrica, topológica ou ambas.

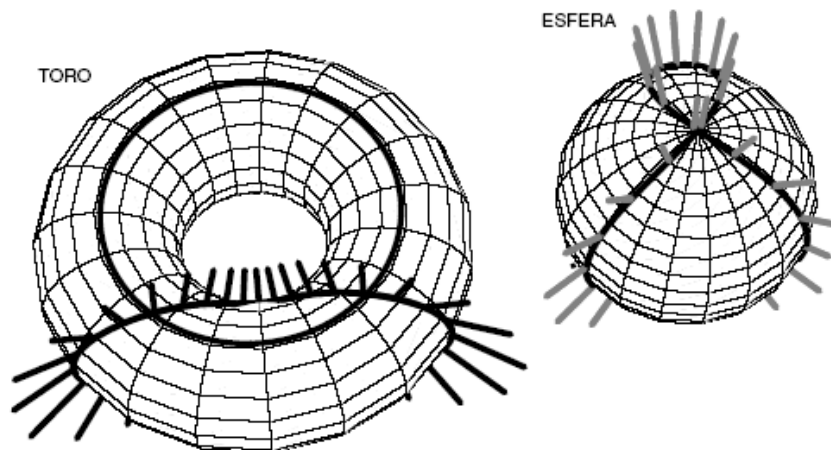


Figura 6: Vetores normais sobre trajetórias em uma superfície toroidal e uma esférica. A cada trajetória podemos associar uma fase que pode ser de natureza geométrica, topológica ou ambas. ¹⁴

¹⁴ http://larouchepub.com/spanish/reir/privado/anteriores/anteriores2006/2006_21/cc_guia.htm

Seja $C(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ uma curva suave e fechada sobre uma superfície Σ , como por exemplo as superfícies na Figura 3: um plano, uma casca esférica e um cone. Ao concluirmos o transporte paralelo sobre a trajetória fechada ¹⁵ nas superfícies, observamos na Figura 3 que: no caso (a), o vetor final é *holônomo* ao vetor inicial (permanecem paralelos entre si e por isso podem receber o “mesmo nome”); nos casos (b) e (c) tais vetores são *não-holônomos*, ou seja, os vetores inicial e final se diferem de um ângulo $\theta(C)$ que pode ser determinado por [2, 6, 7, 35, 36]

$$\theta(C) = \oint_{C=\partial\Sigma} T(s) \cdot dn(s) = \iint_{\Sigma} \nabla \times T \cdot dN \quad (3)$$

onde transformamos a integral de caminho em integral de superfície por meio do teorema de Stokes ¹⁶ na segunda igualdade, considerando N como vetor normal à superfície Σ , que contém a curva em questão. Se substituirmos $dn(s)$ na Eq. (3) pela relação (e) da Eq. (2), veremos que a curvatura aparecerá explicitamente nessa equação.

Entretanto, caso haja furos na superfície, temos que dividir a integral em duas partes, pois o teorema de Stokes considera toda a área interna à trajetória fechada. Isso nos leva a uma nova definição mais geral de fase geométrica,

$$\theta(C) = \oint_{C=\partial\Sigma} T(X) \cdot dX + \sum_i N_i(C_i)\theta(C_i) \quad \therefore \quad \theta(C_i) \equiv \oint_{C_i} T(X) \cdot dX \quad (4)$$

onde N_i é o número de voltas em torno do respectivo furo definido pelo círculo C_i (para $N_i > 0$ sentido anti-horário e $N_i < 0$ sentido horário), conforme exposto na Figura 5. A partir dessa definição geral de fase geométrica somos capazes de classificar topologicamente uma superfície e, portanto, uma trajetória sobre ela. Com esse critério, podemos incluir o ângulo sólido na expressão da fase geométrica (Eq. (4)), que passa a ser

$$\theta(C) = \Omega(C) + \sum_i N_i(C_i)\theta(C_i) \quad \therefore \quad \theta(C_i) \equiv \oint_{C_i} T(X) \cdot dX. \quad (5)$$

¹⁵ Dependendo da curva, o vetor do transporte paralelo pode manifestar a fase geométrica associada antes de concluir a trajetória fechada. Por exemplo, qualquer vetor sobre a geodésica 3->1 na Figura 3 (b) quando projetado sobre o plano tangente ao ponto 1, será paralelo ao vetor $T(\text{final})$. Portanto, esse vetor projetado manifesta a fase geométrica quando comparado ao vetor $T(0)$.

¹⁶ https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Stokes

CAPÍTULO 2

FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA

A *decomposição polar*¹⁷ de um operador linear A que atua num espaço vetorial V nos diz que A pode ser descrito como produto matricial entre uma transformação unitária U e operadores hermitianos semi-definidos positivos J e K segundo

$$A = UJ = KU \quad (6)$$

tal que os operadores positivos satisfaçam $J \equiv \sqrt{A^\dagger A}$ e $K \equiv \sqrt{AA^\dagger}$ e, caso A seja invertível, então U é unívoco [37]. Vamos aplicar a decomposição polar na evolução cíclica de um sistema bipartido como abordado na Referência [27].

Considere duas partículas S e I cujo os vetores das bases de estados são representados por $|m\rangle$ e $|n\rangle$ respectivamente. Utilizando estas bases, um estado puro de dois qudits, na *notação de soma de Einstein*¹⁸, é escrito como

$$|\psi(0)\rangle = \alpha_{mn}|mn\rangle \quad (m, n = 1, 2, \dots, d), \quad (7)$$

onde α_{mn} são os coeficientes do vetor de estado.

Podemos representar este estado numa matriz α de dimensão $d \times d$ e elementos α_{mn} , cuja *evolução unitária local* U_S e U_I transforma o estado e a matriz de coeficientes da seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = (U_S(t) \otimes U_I(t))|\psi(0)\rangle \rightarrow \alpha'(t) = U_S(t)\alpha U_I^T(t). \quad (8)$$

Verificamos tal fato se aplicarmos a evolução individual no estado das partículas S e I,

¹⁷ O nome *decomposição polar* vem da forma polar de números complexos, ou seja, a multiplicação de números complexos do R^2 (z v) representados matricialmente, pode ser descrito pela multiplicação de uma matriz A que contém as coordenadas de z pela matriz coluna que contém as coordenadas de v ($z = Av$). Agora, se z estiver na sua forma polar $z = re^{i\theta}$, a forma polar da matriz A será $A=GR$, onde R é a matriz de rotação usual de vetores e G é a matriz diagonal positiva semi-definida, cujos autovalores degenerado são r . G será positiva definida se sempre conter $z \neq 0$ [38].

¹⁸ Sempre que oportuno usaremos a *Convenção da Soma de Einstein*: índices repetidos em somente um dos lados da igualdade corresponde uma soma sob este índice, também chamado de *índice mudo* por não alterar as propriedades da equação se os trocarmos por outro de mesma natureza. Sempre que precisamos dar nomes a algum termo, assim tornando-o não-mudo, os colocaremos este entre parêntese. Isso significa que a relação destes termos com os demais é limitada de modo a não incluí-lo à uma soma geral. Chamaremos a atenção quando ocorrer essa situação.

$$\begin{aligned}
U_S(t)|m\rangle &= |m'\rangle\langle m'|U_S(t)|m\rangle = (U_S(t))_{m'm}|m'\rangle \\
U_I(t)|n\rangle &= |n'\rangle\langle n'|U_I(t)|n\rangle = (U_I(t))_{n'n}|n'\rangle
\end{aligned} \tag{9}$$

na Eq. (7)

$$|\psi(t)\rangle = (U_S(t))_{m'm}\alpha_{mn}(U_I(t))_{n'n}|m'n'\rangle = (U_S(t))_{m'm}\alpha_{mn}(U_I^T(t))_{nn'}|m'n'\rangle. \tag{10}$$

Com a notação matricial, α , a norma do estado passa a ser $\langle\psi|\psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger\alpha] = 1$ e o produto interno $\langle\phi|\psi\rangle = \text{Tr}[\beta^\dagger\alpha]$, onde β é a matriz $d \times d$ dos coeficientes de $|\phi\rangle$. A matriz dos coeficientes possui inversa. Aplicando a decomposição polar nela, obtemos

$$\alpha = e^{i\phi}QS, \tag{11}$$

onde Q é uma matriz hermitiana positiva definida e $S \in SU(d)$, que é o grupo dos operadores unitários (*Special Unitary Group*) especiais de dimensão $d \times d$ [27]. (Para que não haja confusão de notação, vamos elucidar os usos da letra “S” na notação, por aparecer duas vezes com significados diferentes. *Note que “S” maiúsculo se refere a matriz $SU(d)$ da operação que atuará no estado do sistema composto de duas partes, sendo cada parte representada pelos subíndices “S” e “I” da conversão paramétrica descendente espontânea dos experimentos em óptica quântica.*) Usando as relações $U_S = \sqrt[d]{\det U_S} \bar{U}_S$ e $U_I = \sqrt[d]{\det U_I} \bar{U}_I$, onde $\bar{U}_S$ e $\bar{U}_I$ são operações unitárias locais pertencentes ao $SU(d)$, podemos reescrever a Eq. (8) como

$$\alpha' = e^{i\phi'}Q'S', \tag{12}$$

onde $e^{i\phi'} = e^{i\phi} \sqrt[d]{\det U_S \det U_I}$, $Q' = U_S Q \bar{U}_S^\dagger$ e $S' = \bar{U}_S S \bar{U}_I^T$. Desta forma, identificamos a transformação em três setores distintos: uma transformação em $U(1)$ $\phi \rightarrow \phi'$, outra transformação fechada no espaço das matrizes hermitianas positivas definidas $Q \rightarrow Q'$ e a última transformação fechada em $SU(d)$ $S \rightarrow S'$. Como as raízes de um número complexo possuem múltiplos valores, é preciso ter cuidado ao definir as quantidades acima. Para operações unitárias variando no tempo, podemos supor que qualquer uma das raízes possíveis esteja ocupada no tempo inicial e os valores subsequentes devem formar uma evolução contínua como uma função do tempo tal que $\phi(t)$ seja uma função suave, diferenciável em toda parte.

Vamos definir uma evolução cíclica em que o estado final seja fisicamente equivalente ao estado inicial após o intervalo T , isto é, eles estão relacionados apenas por um fator de fase global

$$\alpha(T) = e^{i\theta}\alpha(0). \tag{13}$$

Aplicando a decomposição polar Eq. (11) em ambos os lados da Eq. (13), vemos que a fase θ possui três componentes, um de cada setor da matriz de coeficientes:

$$e^{i\phi(T)}Q(T)S(T) = e^{i\theta}e^{i\phi(0)}Q(0)S(0) \quad (14)$$

$$\theta = (\Delta\phi + \gamma_q + \gamma_s).$$

Primeiro, identificamos uma evolução da fase trivial $\phi(T) = \phi(0) + \Delta\phi$ no setor $U(1)$. No setor das matrizes hermitianas positivas, se escrevermos $Q(T) = e^{i\gamma_q}Q(0)$, as condições de hermiticidade impõem que $\gamma_q = 0$. Finalmente, no setor $SU(d)$ temos $S(T) = e^{i\gamma_s}S(0)$; contudo, usando as propriedades do determinante $\det S(T) = e^{id\gamma_s}\det S(0)$ e o fato de ambas matrizes $S(T)$ e $S(0)$ pertencerem à $SU(d)$, obtemos a *fase fracionária*

$$\gamma_s = \frac{2n\pi}{d} \quad ; \quad (n = 1, 2, \dots, d-1), \quad (15)$$

onde n é o número de ciclos completos após a evolução concluída, de modo que, depois de d ciclos, as curvas iniciais e finais do padrão de interferência da contagem de coincidência irão se superpor, Figura 1. Note que apenas valores de fase fracionária surgem do setor $SU(d)$ e que a natureza desta fase é puramente topológica ao manifestar a dimensão do espaço de Hilbert correspondente ao estado de um dos subsistemas bipartidos. O vínculo da *fase topológica fracionária* (FTF) da Eq. (15) com a fase geométrica de Berry para estados puros está deduzido no APÊNDICE A. A medida da FTF é realizada pela diferença de fase entre dois padrões de interferência, tal como a medida da FG é mostrada na Figura 1. Lembremos que um dos propósitos desta tese é mostrar a ***Robustez da FTF mediante ruídos de defasagem e de amplitude***, bem como mostrar a perda da coerência nos estados quânticos com a inserção do ruído. Também observamos que esta perda é mais lenta com o aumento da dimensão do estado ou com ruídos específicos, o que poderíamos chamar de uma ***Robustez da Coerência*** para determinadas condições, que se manifesta na visibilidade dos padrões de interferência usados para medir a FTF.

Uma discussão importante nesta tese é a própria existência da fase topológica para estados mistos. Toda a discussão, realizada acima e no apêndice foi realizada para estados puros. Com a introdução do ruído no experimento, o estado puro inicial se converte em misto. O que mostraremos nos próximos capítulos, é que a fase topológica fracionária gerada por transformações unitárias $SU(d)$ aplicadas em estados puros de qudits, se mantém nestes estados mesmo quando certos tipos de ruído são adicionados com a operação $SU(d)$. No entanto, se pode perguntar, esta fase que se mantém, é uma fase topológica? Para responder a esta pergunta, nos referiremos ao trabalho de D. M. Tong e colaboradores [16]. Neste artigo, um tratamento quântico é utilizado para se definir a fase geométrica para estados mistos em evoluções não unitárias. Descreveremos brevemente as conclusões dos autores.

Considere um sistema quântico s com o estado quântico descrito no espaço de Hilbert H_s de dimensão N . Uma evolução do estado quântico pode ser descrita pelo caminho

$$\mathcal{P}: t \in [0, \tau] \rightarrow \rho(t) = \sum_{k=1}^N \omega_k(t) |\phi_k(t)\rangle \langle \phi_k(t)|, \quad (16)$$

onde $\omega_k \geq 0$ são os autovalores (não degeneradas de $t \in [0, \tau]$) e $|\phi_k(t)\rangle$ autovetores, respectivamente, do operador densidade do sistema $\rho(t)$. Para criar o estado misto, faremos do seguinte modo. Considere um sistema combinado $s + a$, que consiste no sistema s e um sistema auxiliar a de cujo estado é representado no espaço de Hilbert de dimensão K igual à N . O estado misto $\rho(t)$ pode ser gerado do estado purificado

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(t)} |\phi_k(t)\rangle \otimes |\phi_k(t)\rangle \quad t \in [0, \tau], \quad (17)$$

onde $|\Psi(t)\rangle \in H_s \otimes H_a$ é a purificação do operador densidade de s no sentido que $\rho(t)$ é o traço parcial de $|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ sobre a *ancilla*. Após algumas passagens, os autores definem a fase geométrica para o caminho $\mathcal{P}$ como

$$\gamma[\mathcal{P}] = \arg \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{\omega_k(0)\omega_k(\tau)} \langle \phi_k(0) | \phi_k(\tau) \rangle e^{-\int_0^\tau \langle \dot{\phi}_k(t) | \phi_k(t) \rangle dt} \right). \quad (18)$$

A fase topológica para estados mistos foi medida na referência [17]. A partir desta expressão, podemos realizar a decomposição polar dos coeficientes do estado purificado e generalizar o tratamento mostrado para estado puro no APÊNDICE A.

CAPÍTULO 3

DETECÇÃO DA FTF VIA INTERFEROMETRIA DE CAMINHOS¹⁹ **(DESENVOLVIMENTO TEÓRICO)**

3.1 A ROBUSTEZ DA FTF AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA COM ATUAÇÕES INDIVIDUAIS E SIMULTÂNEAS

A *Fase Topológica Fracionária (FTF)* ($2\pi/d$) mostrada na Eq. (15), é função da dimensão de cada estado do sistema bipartido descrito pelo estado total no Espaço de Hilbert. Para medir a FTF via interferometria, Khoury e colaboradores em [27] usaram uma fonte de fótons que geram qudits espacialmente codificados [40, 44] em uma fonte interferométrica constituída por dois interferômetros de Mach-Zehnder com PBSs imersos em um interferômetro composto por um cristal gerador de pares de fótons e PBS (divisor polarizador de feixe), com dois fótons produzidos pela conversão paramétrica descendente e cujas polarizações dos fótons são usadas como grau de liberdade auxiliar em operações nas variáveis de caminho dos fótons. Neste capítulo discutimos como o acréscimo dos moduladores espaciais de luz (SLMs²⁰) foi usado para adicionar ruído aos estados estudados. Ao acrescentar os ruídos de defasagem e de amplitude amortecida na evolução do estado, demonstraremos que a *FTF é robusta aos ruídos de defasagem e de amplitude amortecida* aplicados individualmente ou simultaneamente sob o estado quântico. Descreveremos o experimento com mapas de Kraus, ferramenta central em nosso trabalho [41-44].

¹⁹ Notificamos os leitores que os principais resultados desta seção foram publicados na Referência [33].

²⁰ SLM: Spatial Light Modulator

3.2 INTERFERÊNCIA DE DOIS FÓTONS COM A POLARIZAÇÃO USADA COMO GRAU DE LIBERDADE AUXILIAR.

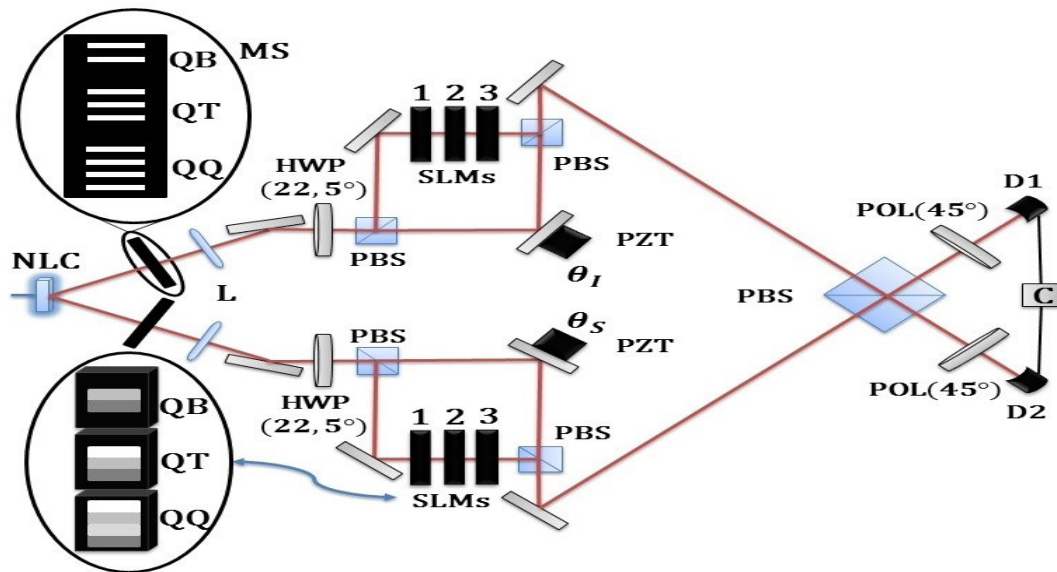


Figura 7: A proposta experimental combina dois interferômetros Mach-Zehnder imersos num grande interferômetro com um PBS cujas saídas contém polarizadores à 45° para medir a FTF via padrão de interferência de contagem de coincidências. Identificamos a interferência de dois fótons com a polarização usada com grau de liberdade auxiliar. Os elementos ópticos usados são ²¹: cristal não-linear (NLC); fendas múltiplas de dimensões 2 (Qubit), 3 (Qutrit) e 4 (Ququart) – “multiple slits” (MS) ; placa de meia onda (HWP); lentes (L) que projetam a imagem da MS nos SLMs, como mostra o diagrama circulado de baixo; divisor de feixe por polarização (PBS); modulador espacial de luz SLM ²² –

²¹ “NLC (nonlinear crystal), PBS (Polarizing Beam Splitter), SLM (Spatial Light Modulator), POL (Polarizer) and PZT (piezoelectric transducer)” ; Noise - ruído.

²² O SLM, modulador espacial de luz, é um dispositivo controlado externamente por um computador que varia a escala de cinza no display de cristal líquido colocado no caminho dos fótons. Essa variação na escala de cinza altera o índice de refração do cristal líquido fazendo com que os fótons tenham maior ou menor velocidade ao atravessá-lo ou ser refletido. Esse efeito é traduzido como uma variação de fases de caminho e, portanto, variação no comprimento do caminho óptico da luz. Como os pixels do cristal líquido são menores que a imagens das fendas múltiplas, é possível aumentar/diminuir o caminho óptico dos fótons que atravessam uma das fendas múltiplas em relação as outras, mesmo que os feixes de fótons transmitidos pela fenda múltipla estejam bem próximos uns dos outros a olho nu (maiores detalhes no CAPÍTULO 7). Por motivo de clareza, é importante notar que os experimentos são feitos em um regime onde um fóton por vez cruza a fenda múltipla. O SLM1 aplicará a operação SU(d), o SLM2 aplicará o ruído de defasagem e o SLM3 gerará o ruído de amplitude amortecida, nos fótons signal e idler. Veja as dissertações de Juliana Gontijo, Mariana Barros, Wanderson Maia Pimenta [45, 46, 47].

implementará as operações $SU(d)$ e os ruídos; fases de caminho adicionadas pelos espelhos acoplados aos PZTs, θ_j ($j = I, S$); polarizador (POL); e detectores de único-fóton, D_I ($I = 1, 2$) [27].

Considere o esquema experimental mostrado na Figura 7. Um feixe de laser incide no cristal não linear (NLC) gerando, através de conversão paramétrica descendente [40], dois feixes não colineares de fótons emaranhados em energia e momento linear, ambos (signal e idler) com polarização horizontal. Os fótons passam por duas fendas múltiplas idênticas, tendo d caminhos disponíveis para cada fóton, representados pelo estado [27]

$$|\psi_0\rangle = \alpha_{mn}|mH, nH\rangle; (m, n = 1, \dots, d), \quad (19)$$

onde α_{mn} é a amplitude de probabilidade de se obter um fóton signal passando pelo caminho m e um fóton idler passando pelo caminho n . Após as fendas, uma placa de meia onda $\lambda/2$ gira de 45° a polarização dos fótons, e o estado fotônico nas variáveis de caminho e polarização passam a ter todas as combinações de polarização vertical (V) e horizontal (H) [27]

$$|\psi_1\rangle = \frac{\alpha_{m\mu n\nu}}{2} [|mH, nH\rangle + |mH, nV\rangle + |mV, nH\rangle + |mV, nV\rangle], \quad (20)$$

que pode ser reescrito compactamente como

$$|\psi_1\rangle = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} |m\mu, n\nu\rangle; \quad (21)$$

$$\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{m\mu n\nu} = \alpha_{mn} \alpha_{\mu\nu}; \alpha_{\mu\nu} = 1; (\mu, \nu = V, H);$$

cujo operador densidade, para os fótons S e I codificados nos graus de liberdade de caminho (alfabeto romano: m, n) e polarização (alfabeto grego: μ, ν), é

$$\rho^{SI} = \frac{\alpha_{m\mu n\nu} \alpha_{m'\mu' n'\nu'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'|, \quad (22)$$

o qual não podemos decompor em $\rho^{SI} = \rho^S \otimes \rho^I$ nos casos de fótons emaranhados em estados de caminho²³. Ao sair da fenda múltipla, cada fóton passa por uma lente, cujo foco coincide com o plano das fendas múltiplas de tal modo que a imagem seja projetada no infinito (segundo a óptica geométrica), fazendo com que os feixes de fótons no estado de fenda (caminhos) fiquem paralelamente bem definidos sem que haja interferência entre estes, sobretudo na tela dos SLMs de transmissão, assim evitando o aparecimento de franjas de interferência como

²³ Utilizamos índices $\mu\nu$ com índice superior apenas por conveniência, sem nenhuma relação com notação covariante e contravariante. A decomposição $\alpha_{mn} \alpha^{\mu\nu} = \alpha_{mn}^{\mu\nu}$ se deve ao fato de termos graus de liberdade não emaranhados entre si.

ocorre no experimento da fenda dupla de Young²⁴. Na sequência da lente, o fóton passa por uma porta unitária controlada por polarização composta por um interferômetro Mach-Zehnder com um divisor de feixes polarizador (PBS) na entrada e saída. Dentro do interferômetro, o estado quântico definido pela Eq. (22) sofrerá diversas transformações distintas entre cada caminho da polarização vertical (V) que definiremos mais à frente e também uma fase relativa θ entre os braços do Mach-Zehnder. Ao sair dos interferômetros, os fótons passam pelo último PBS (à direita da Figura 7), de modo que cada detector recebe o sinal do braço V de um Mach-Zehnder com o sinal do braço H do outro Mach-Zehnder e, devido à essa ortogonalidade da polarização, não é possível medir a interferência na contagem de coincidência, mas com a presença do polarizador (POL) a 45°, que apaga a informação de caminho do fóton, passaremos a ter interferência dos dois braços do Mach-Zehnder de polarizações ortogonais em cada detector. Podemos notar ainda que as polarizações dos fótons foram usadas como grau de liberdade auxiliar (*ancilla*) para inserir condicionalmente ruídos no estado de caminho. É importante destacar que a presença dos ruídos (atuação dos SLM-NOISE) tornará o sistema misto, como demonstraremos mais à frente.

Antes de descrevermos as operações dos elementos ópticos no interferômetro Mach-Zehnder, faremos um breve relato sobre a evolução de um sistema quântico via Operadores de Kraus, método central para o nosso estudo, pois um estado puro sob ruído passa a ser um estado misto.

²⁴ Na prática precisamos somente da garantia da distinção entre os caminhos na tela dos SLMs para operarmos colocando fases distintas entre os diversos caminhos.

3.3 MAPAS DE KRAUS PARA O EXPERIMENTO DA FTF COM RUÍDO

A evolução do sistema quântico aberto²⁵ pode ser realizada por mapas completamente positivos na representação de Kraus que atuam da seguinte forma na matriz densidade [37, 41-48]

$$\varepsilon(\rho) = p_i M_i \rho M_i^\dagger \quad ; \quad p_i M_i^\dagger M_i \leq I \quad ; \quad \sum_{i=0}^{d^2-1} p_i = 1 \quad (23)$$

onde: M_i são os chamados operadores de Kraus que podem ter no máximo d^2 componentes para representarem a dinâmica de um sistema quântico de dimensão d , sendo a identidade, $M_0 = I$, uma dos operadores que usaremos; p_i é um fator que pondera a atuação de cada elemento do mapa, nos dizendo qual deles atua com maior intensidade, podendo inclusive zerar o termo correspondente à identidade numa dada dinâmica do sistema; a desigualdade $p_i M_i^\dagger M_i < I$ se manterá para mapas que não preservam o traço correspondente aos canais irreversíveis, dado que a decoerência é irreversível, como por exemplo o canal de atenuação parcial ou total do número de fótons [48]. Mais à frente ficará claro que p_i é a probabilidade clássica que pondera a mistura de estados puros numa evolução de interação com o meio externo ao sistema (sistema quântico aberto). No caso particular de sistema quântico fechado, a supressão do meio ambiente nessa descrição é feita com $p_0 = 1$ ($p_i = 0, i \neq 0$) e a evolução do sistema passa a ser como a evolução temporal usual de um estado quântico puro $\varepsilon(\rho) = U\rho U^\dagger$, dado que a identidade $M_0 = I$ não transformará o sistema após a atuação.

Para a matriz densidade do sistema quântico em questão, os operadores de Kraus terão a seguinte estrutura

$$O = (O_{\text{Camin}} \otimes O_{\text{Polariz}})^{\text{Signal}} \otimes (O_{\text{Camin}} \otimes O_{\text{Polariz}})^{\text{Idler}}, \quad (24)$$

tal que as condições de atuação (a forma dos operadores) são definidas pelo experimento.

²⁵ Sistema quântico aberto é o sistema que interage com um ambiente cuja interação produz com ruídos (flutuações) no estado quântico do sistema, que podem levar a perda de coerência do estado quântico do sistema em questão. Caso este sistema contenha alguma informação a ser extraída, essa interação pode levar à perda de parte desta informação.

Os ruídos no experimento óptico em questão podem ser inseridos por um SLM-NOISES. A estrutura matemática dessas operações é igual ao *operador de Kraus que aplica ruído condicionado à polarização sob o caminho* de cada fóton²⁶

$$K_{ij}^{SI} = (K_{i\alpha}^S \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|) \otimes (K_{j\beta}^I \otimes |\beta\rangle\langle\beta|), \quad (25)$$

onde o K^S e K^I atuam nos espaços dos caminhos e os projetores nos espaços das polarizações dos fótons S e I, respectivamente como os parênteses indicam²⁷. Ao aplicarmos o mapa abaixo na matriz densidade do estado puro

$$\varepsilon_K(\rho) = p_{ij} K_{ij}^{SI} \rho K_{ij}^{SI\dagger} \quad \therefore \quad p_{ij} K_{ij}^{SI\dagger} K_{ij}^{SI} \leq I, \quad (26)$$

teremos um estado misto ponderado por p_{ij} tal que, após a atuação dos projetores-polarização, efetuamos contrações de alguns índices pelos deltas de Kronecker, como, por exemplo, $|\alpha\rangle\langle\alpha|\mu\rangle\langle\mu| = |\alpha\rangle\langle\mu|\delta_{\alpha\mu} = |\mu\rangle\langle\mu|$, modificando, assim, os índices dos operadores que atuam no caminho²⁸, obtendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(\rho) = & \alpha_{m\mu n\nu} \alpha_{m'\mu'n'\nu'}^* p_{hj} [(K_{h\mu}^S |m\rangle)\langle\mu| \otimes (K_{j\nu}^I |n\rangle)\langle\nu|] \\ & \times \left[\left(\langle m' | K_{h\mu'}^S \right)^\dagger \langle\mu'| \otimes \left(\langle n' | K_{j\nu'}^I \right)^\dagger \langle\nu'| \right], \end{aligned} \quad (27)$$

onde os índices mudos do lado direito da multiplicação do mapa (índices linhas do mapa) são diferentes dos índices do lado esquerdo da multiplicação (índices sem linha). Lembrando que o primeiro operador de Kraus da Eq. (26) correspondente a p_{00} é a identidade, definiremos, por exemplo, que o ruído de 25% é aquele cujo a identidade está presente em 75% ($p_{00} = 0,75$) do tempo de medida e os demais 25% com atuação dos demais operadores de Kraus. Para simular numericamente usaremos *ruídos isoponderados (ruído-iso)*, ou seja, para ruído de $p\%$ teremos

²⁶ Isso é factível, pois no experimento da FTF as polarizações de cada fóton estão separadas pelos braços de cada Mach-Zehnder.

²⁷ Note que existe uma soma nos índices mudos α e β dos produtos tensoriais da Eq. (25) – abriremos mão da elegância na notação sempre que acharmos necessário maior transparência para os leitores menos experientes com a notação compacta. Os casos eventuais em que não houver soma, colocaremos o índice entre parênteses, com (α) .

²⁸ Note que o correto seria modificarmos os índices do estado em vez de modificarmos os índices dos operadores, entretanto, os operadores com que estamos trabalhando não projetam o estado em um subespaço particular, de modo que sua atuação só altera os índices mudos do estado, assim permitindo-nos trocar tais índices pelos índices do estado inicial. Isso é equivalente a trocarmos os índices dos operadores como fizemos. Manter os índices do estado facilitará a comparação das matrizes densidades inicial e final.

$p_{i \neq 0; j \neq 0} = p/d$ e $p_{00} = 1 - p$. Então, quando afirmarmos que o ruído é de 100% ($p=1$) teremos $p_{i \neq 0; j \neq 0} = 1/D$ e $p_{00} = 0$, tal que D é o número de operadores de Kraus que efetivamente representa ruído introduzido no estado, assim ficando compreendido entre $1 \leq D \leq d^2$ nesse caso. Ou seja, não haverá identidade no mapa de Kraus no caso do ruído-iso 100% ($p=1$) [44].

Agora, temos que definir as especificidades de cada operação dentro do Mach-Zehnder, o que faremos a seguir.

3.3.1 Mapa para a Fase de Varredura

No Mach-Zehnder, o estado de caminho dos fótons receberá fases longitudinais θ_S e θ_I que chamaremos de *fases de varredura*, responsáveis por construir padrões de interferência a cada passo da implementação da FTF e desses padrões extrairemos a FTF propriamente dita (isso ficará mais claro nos cálculos numéricos). A fase de varredura é adicionada à componente de polarização horizontal do signal e do idler pelo elemento óptico PZTs (veja Figura 7). Esta operação unitária pode ser realizada em cada braço do Mach-Zehnder pelos operadores

$$S_{HH} = S^S \otimes S^I \therefore S_{HV} = S^S \otimes I^I \therefore S_{VH} = I^S \otimes S^I \therefore S_{VV} = I^S \otimes I^I, \quad (28)$$

sendo I^S, I^I os operadores identidade signal e idler, respectivamente. Podemos expressar compactamente o operador que introduz as fases de varredura S na notação de Dirac como indica a Eq. (24) fazendo uso da função delta de Kronecker. Chamando de i e j as polarizações H e V, temos

$$S = \sum_{i,j} S_{ij} = \left(e^{i\theta_S} \delta_H^\alpha I_{Caminho}^S \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| \right)^S \otimes \left(e^{i\theta_I} \delta_H^\beta I_{Caminho}^I \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \right)^I \therefore S^\dagger S = I, \quad (29)$$

que transforma o operador de varredura S nas variáveis de caminho em identidade caso a polarização seja vertical e acrescenta fases nos caminhos caso a polarização seja horizontal. Aplicando este operador de varredura de fase ²⁹ na matriz densidade inicial ρ^{SI} da Eq.(22) através do mapa Eq. (23), obtemos

$$\varepsilon_S(\rho^{SI}) = \frac{\alpha_{m\mu nv} \alpha_{m'\mu' n'v'}^*}{4} |m\mu, nv\rangle\langle m'\mu', n'v'| \times e^{i(\theta_S \delta_H^\mu + \theta_I \delta_H^\nu)} e^{-i(\theta_S \delta_H^{\mu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'})}. \quad (30)$$

²⁹ Scan operator.

Note que após a atuação deste operador, os índices das amplitudes $\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu'}^*$ (e também da base dessa nova matriz densidade) continuam os mesmos, ou seja, não houve contração de índice em relação a matriz densidade inicial ρ^{SI} . Isso nos dá a liberdade de atuar separadamente com os distintos mapas na matriz ρ^{SI} e depois juntarmos os resultados numa única operação que, a princípio, respeitará a ordem de atuação das operações implementadas pelos elementos ópticos conforme mostramos na Figura 7. Essa propriedade parece ser válida sempre que tivermos uma operação na qual a população de um caminho do estado fotônico não puder migrar para outro caminho.

3.3.2 Mapa para a Fase Topológica Fracionária

As operações unitárias acrescentadas nos caminhos dos fótons implementada pelo primeiro SLM de cada Mach-Zehnder podem ser expressas como matrizes unitárias diagonais

30

$$\begin{aligned} U_S &= e^{i\xi_p(t_S)} |p\rangle\langle p| \quad \therefore \quad U_S^\dagger U_S = I_S, \\ U_I &= e^{i\chi_q(t_I)} |q\rangle\langle q| \quad \therefore \quad U_I^\dagger U_I = I_I, \\ &\quad (q, p = 0, \dots, d-1) \end{aligned} \quad (31)$$

que, durante a evolução “temporal” parametrizada por t , acrescentam fases ξ_p e χ_q no espaço vetorial do grau de liberdade de caminho de S e I, respectivamente, na polarização vertical da seguinte forma:

$$T_{HH} = I^S \otimes I^I \quad \therefore \quad T_{HV} = I^S \otimes U^I \quad \therefore \quad T_{VH} = U^S \otimes I^I \quad \therefore \quad T_{VV} = U^S \otimes U^I, \quad (32)$$

e reescritos como indicado na Eq. (24)

$$T = (e^{i\xi_p \delta_V^\alpha} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle \alpha|)^S \otimes (e^{i\chi_q \delta_V^\beta} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle \beta|)^I \quad \therefore \quad T^\dagger T = I. \quad (33)$$

Fazendo uso do mapa mostrado em Eq. (23) para evoluir o operador densidade Eq. (22) aplicando o *implementador de fase topológica*³¹ Eq. (33), obtemos o seguinte estado puro:

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{m\mu n\nu} \alpha_{m'\mu' n'v'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'v'| \\ &\quad \times e^{i(\xi_m \delta_V^\mu + \chi_n \delta_V^\nu)} e^{-i(\xi_{m'} \delta_V^{\mu'} + \chi_{n'} \delta_V^{\nu'})}. \end{aligned} \quad (34)$$

Note que, novamente, a base desta nova matriz densidade é a mesma base da matriz densidade ρ^{SI} após a evolução, o que nos dá a liberdade de atuar outro mapa separadamente das demais operações e juntarmos este resultado posteriormente. Então, se aplicarmos os mapas $\varepsilon_T(\varepsilon_S(\rho^{SI}))$ na sequência, assim como está na montagem do experimento da Figura 7, encontraremos

³⁰ Isso nos leva a condição de $\sum_n \xi_n = \sum_n \chi_n = 0$ para que $U_S, U_I \in SU(d)$. Esta condição nos garante que nenhuma fase trivial seja adicionada pelas operações [12, 34], ainda que $\sum_n \xi_n = \sum_n \chi_n \neq 0$, podemos reescrever essas funções de modo a $\sum_n \xi'_n = \sum_n \chi'_n = 0$.

³¹ Chamamos de *operador que adiciona a fase topológica* a operação matemática condicionada à polarização que adiciona fase ao caminho dos fótons, tal que esta fase é uma função contínua que controla o “movimento fechado” no espaço de parâmetro do estado.

$$\varepsilon_T(\varepsilon_S(\rho^{SI})) = \frac{\alpha_{m\mu nv} \alpha_{m'\mu' n'v'}^*}{4} |m\mu, nv\rangle \langle m'\mu', n'v'| \times e^{i\left[\left(\xi_m \delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu\right) + \left(\chi_n \delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu\right)\right]} e^{-i\left[\left(\xi_{m'} \delta_V^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}\right) + \left(\chi_{n'} \delta_V^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'}\right)\right]}, \quad (35)$$

que pode ser reescrito como $\rho'^{SI} \equiv \varepsilon_T(\varepsilon_S(\rho^{SI}))$ de modo compacto

$$\begin{aligned} \rho'^{SI}(m\mu, nv; m'\mu', n'v') &= \alpha'_{m\mu nv} \alpha_{m'\mu' n'v'}^* |m\mu, nv\rangle \langle m'\mu', n'v'|, \\ \alpha'_{m\mu nv} &= \frac{\alpha_{m\mu nv}}{2} e^{i\left[\left(\xi_m \delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu\right) + \left(\chi_n \delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu\right)\right]}, \\ \alpha_{m'\mu' n'v'}^* &= \frac{\alpha_{m'\mu' n'v'}^*}{2} e^{-i\left[\left(\xi_{m'} \delta_V^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}\right) + \left(\chi_{n'} \delta_V^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'}\right)\right]}. \end{aligned} \quad (36)$$

Note, ainda, que o estado permanece puro após o acréscimo das fases e pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} e^{i\left[\left(\xi_m \delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu\right) + \left(\chi_n \delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu\right)\right]} |m\mu, nv\rangle \quad (37)$$

cuja expansão da polarização com $\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{mn}$ para todo $\mu, \nu = H$ e V nos leva a

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} \left[e^{i(\theta_s + \theta_I)} |mH, nH\rangle + e^{i(\theta_s + \chi_n)} |mH, nV\rangle + e^{i(\xi_m + \theta_I)} |mV, nH\rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\xi_m + \chi_n)} |mV, nV\rangle \right] \end{aligned} \quad (38)$$

conforme Khoury e colaboradores demonstraram nas referências [27, 9, 49, 50]. Mais à frente, veremos que ao aplicarmos ruídos com os moduladores espaciais (SLMs-NOISES 2 e 3), presentes nos interferômetros Mach-Zehnder, passaremos a ter um estado misto [16].

3.3.3 Mapa para o Ruído de Fase de Defasagem³²

O operador de Kraus de ruído de fase φ no caminho do fóton condicionado à polarização é

$$D_{q\alpha}(\varphi) = e^{i\varphi \delta_p^q \delta_V^\alpha} |p\rangle \langle p|, \quad (39)$$

onde o somatório no índice p tem d termos (que corresponde ao número de caminhos que cada fóton pode percorrer) e V representa a polarização vertical, conforme o lado do braço do Mach-Zehnder que escolhemos para acrescentar o ruído de fase via modulador espacial de fase (SLM-

³² Na literatura esse ruído é chamado de *Damping Phase*, ou simplesmente *Dephasing* quando o ruído de fase desloca aleatoriamente de π . Nós o chamaremos de ruído de defasagem.

2 da Figura 7). Especificamente, nós implementaremos a operação de defasagem na qual $\varphi = \pi$,

$$D_{q\alpha} = e^{i\pi\delta_p^q\delta_V^q}|p\rangle\langle p|, \quad (40)$$

tal que este operador será a identidade quando atuar nas componentes de polarização horizontal ($\delta_V^H = 0$) e nas vertical ($\delta_V^V = 1$) produzindo duas situações, uma em que a fase morre ($\delta_p^{q \neq p} = 0$) e outra em que a componente da base troca de sinal ($\delta_p^p = 1 \Rightarrow e^{i\pi} = -1$) [37]. Assim, substituindo o operador ruído de fase no mapa e realizando as contrações dos índices com os deltas de Kronecker, teremos ³³

$$\begin{aligned} \varepsilon_D(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'v'| \\ &\times p_{gh}^{(D)} e^{i\pi(\delta_m^g\delta_V^\mu + \delta_n^h\delta_V^\nu)} e^{-i\pi(\delta_{m'}^g\delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^h\delta_V^{\nu'})}, \end{aligned} \quad (41)$$

que é um estado misto semelhante a Eq. (26), ou seja, uma mistura de estados puros ponderados por p_{gh} e pelas fases [16]. Note que a base desta nova matriz densidade ainda continua a mesma em relação à ρ^{SI} e também à ρ^{SI} , de modo que a reescreveremos como ³⁴

$$\begin{aligned} \varepsilon_D(\rho^{SI}) &= p_{gh}^{(D)} d_{m\mu\nu}^{gh} d_{m'\mu'n'v'}^{gh*} \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'v'| \\ d_{m\mu\nu}^{gh} &= e^{i\pi(\delta_m^g\delta_V^\mu + \delta_n^h\delta_V^\nu)} = (-1)^{(\delta_m^g\delta_V^\mu + \delta_n^h\delta_V^\nu)}; \\ d_{m'\mu'n'v'}^{gh*} &= e^{-i\pi(\delta_{m'}^g\delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^h\delta_V^{\nu'})} = (-1)^{(\delta_{m'}^g\delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^h\delta_V^{\nu'})}; \end{aligned} \quad (42)$$

³³ O termo (D) em $p_{gh}^{(D)}$ é o rótulo referente ao ruído de defasagem. Rótulos entre parênteses não fazem parte da convenção da Soma de Einstein, assim como índices que não são “mudos”, ou seja, índices que se repetem dos dois lados da igualdade não também não fazem parte da convenção da soma de Einstein. Procederemos da mesma forma para as demais operações.

³⁴ Experimentalmente $e^{i\pi} \neq e^{-i\pi}$, pois o primeiro significa aumentar o comprimento do caminho ótico do fóton e o segundo diminuir o caminho ótico. Na aplicação experimental nos adaptaremos às condições que o SLMs nos possibilita.

3.3.4 Mapa para o Ruído de Amplitude Amortecida

O operador de ruído de amplitude amortecida ³⁵ no caminho do fóton condicionado à polarização que usaremos é

$$C_{i\alpha} = e^{-\Omega_{\alpha}^i(t)\delta_p^i} |p\rangle\langle p|, \quad (43)$$

$(p = 1, \dots, d; i = 0, \dots, d) \text{ sendo } C_{0\alpha} = I$

onde $\Omega_{g\alpha} \geq 0$ é o parâmetro atenuador da amplitude do sinal segundo a polarização α no caminho q do fóton e a dependência do parâmetro t é determinada pelos métodos experimentais de simulação do SLM 3 (Figura 7) ou mesmo das condições do ambiente em interação com sistema físico envolvido no estudo/pesquisa. Reescrevendo como operador de Kraus conforme a Eq. (24), obtemos

$$C_{ij} = \left(e^{-\Omega_{\alpha}^i(t)\delta_p^i} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| \right)^S \otimes \left(e^{-\Omega_{\beta}^j(t)\delta_q^j} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \right)^I, \quad (44)$$

onde os índices i e j correspondem aos fótons sinal (S) e idler (I), respectivamente. Substituindo o operador ruído de amplitude no mapa que atua nos estados de qudits preparados no experimento para medida da FTF com todos Ω s constantes e realizando as contrações dos índices com os deltas de Kronecker ³⁶, teremos

$$\begin{aligned} \varepsilon_C(\rho^{SI}) = & \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'v'| \\ & \times p_{ij}^{(c)} e^{-\left(\Omega_{\mu}^i \delta_m^i + \Omega_{\nu}^j \delta_n^j\right)} e^{-\left(\Omega_{\mu'}^i \delta_{m'}^i + \Omega_{\nu'}^j \delta_{n'}^j\right)}, \end{aligned} \quad (45)$$

que podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \varepsilon_C(\rho^{SI}) = & p_{ij}^{(c)} c_{m\mu\nu}^{ij} c_{m'\mu'n'v'}^{ij*} \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'v'| \\ c_{m\mu\nu}^{ij} = & e^{-\left(\Omega_{\mu}^i \delta_m^i + \Omega_{\nu}^j \delta_n^j\right)} ; \quad c_{m'\mu'n'v'}^{ij*} = e^{-\left(\Omega_{\mu'}^i \delta_{m'}^i + \Omega_{\nu'}^j \delta_{n'}^j\right)}. \end{aligned} \quad (46)$$

³⁵ *Amplitude cushioning* ou *Amplitude damping* significam amortecimento de amplitude. Na literatura existe *dephasing* e *damping*. Deixaremos a letra d para *dephasing* e usaremos C de *Cushion*, que significa amortecer também.

³⁶ Para maior organização das expressões que possuem índices do mapa e do estado, passaremos a usar nas fases índice superior correspondente ao mapa e índice inferior correspondente às componentes do estado.

3.3.5 Atuação de todos os mapas na sequência do experimento

Ao aplicar todos os mapas do Mach-Zehnder na sequência do experimento ($\varepsilon = \varepsilon_C \circ \varepsilon_D \circ \varepsilon_T \circ \varepsilon_S(\rho^{SI})$) a evolução da matriz densidade nos remete a

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\rho^{SI}) &= p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{m\mu\nu}^{ghij} F_{m'\mu'n'v'}^{ghij*} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'v'| \\
 F_{m\mu\nu}^{ghij} &= \frac{\alpha_{m\mu\nu}}{2} c_{m\mu\nu}^{ghij} f_{m\mu\nu} ; F_{m'\mu'n'v'}^{ghij*} = \frac{\alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{2} c_{m'\mu'n'v'}^{ghij*} f_{m'\mu'n'v'}^* \\
 c_{m\mu\nu}^{ghij} &= (-1)^{(\delta_m^g \delta_\nu^\mu + \delta_n^h \delta_\nu^\nu)} e^{-(\Omega_\mu^i \delta_m^i + \Omega_\nu^j \delta_n^j)} \\
 f_{m\mu\nu} &= e^{i[(\xi_m \delta_\nu^\mu + \theta_s \delta_H^\mu) + (\chi_n \delta_\nu^\nu + \theta_I \delta_H^\nu)]} \\
 c_{m'\mu'n'v'}^{ghij*} &= (-1)^{(\delta_{m'}^g \delta_{v'}^{\mu'} + \delta_{n'}^h \delta_{v'}^{\nu'})} e^{-(\Omega_{\mu'}^i \delta_{m'}^i + \Omega_{\nu'}^j \delta_{n'}^j)} \\
 f_{m'\mu'n'v'}^* &= e^{-i[(\xi_{m'} \delta_{v'}^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}) + (\chi_{n'} \delta_{v'}^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'})]}
 \end{aligned} \tag{47}$$

que é uma mistura de estados puros ponderados pela probabilidades clássicas $p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)}$ e pelo termo $F_{m\mu\nu}^{ghij} F_{m'\mu'n'v'}^{ghij*}$, composto: pela amplitude do estado $(\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu'} / 4)$; pelos ruídos de amortecimento e defasagem, $c_{m\mu\nu}^{ij} c_{m'\mu'n'v'}^{ij*}$; e, por fim, as demais fases do experimento FTF, $f_{m\mu\nu} f_{m'\mu'n'v'}^*$. Com estes termos podemos escrever o operador densidade do estado como

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\rho^{SI}) &= p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{m\mu\nu}^{ijgh} c_{m'\mu'n'v'}^{ijgh*} f_{m\mu\nu} f_{m'\mu'n'v'}^* \\
 &\quad \times \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'v'}^*}{2} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'v'|.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Esta equação nos diz que os ruídos tornam o sistema puro em uma mistura ponderada por $p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)}$ e que a fase $f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'\nu'}^*$ é idêntica (a menos de um sinal inserido pelo ruído de defasagem) para todas as componentes das somas em g, h, i e j da mistura, mesmo havendo uma queda na contagem devido ao ruído de amplitude [16]. Com isso, já é possível percebermos aqui a sobrevivência da fase topológica fracionária sob ruído de defasagem quando comparamos Eq. (47) e Eq. (48) com os resultados sem ruído que obtemos ao tirar o ruído do mapa, $p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{m\mu\nu}^{ij} c_{m'\mu'n'v'}^{ij*} = 1$, assim resultando em uma matriz densidade de um estado puro igual à

$$\varepsilon(\rho^{SI}) = f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'\nu'}^* |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'v'|, \tag{49}$$

conforme demonstrado na seção “Mapa para a Fase Topológica Fracionária”, visto nas Eqs. (36), (37) e (38) condizentes com [27, 50].

Experimentalmente, a atuação conjunta dos ruídos dessincronizados realizada acima, a sequência de atuação de cada operador de Kraus M_i no estado tem que ser totalmente desvinculada em relação ao operador de Kraus do ruído anterior, ou seja, são necessários dois SLMs totalmente descorrelacionados que implementam máscaras aleatoriamente e de forma independente. Criar tal aleatoriedade genuína entre os SLMs pode ser uma tarefa difícil e até questionável em muitos casos, mas certamente é possível implementar uma situação razoavelmente aceitável, principalmente porque a geração da conversão paramétrica descendente espontânea é completamente aleatória [44].

Até este ponto, fizemos a evolução do estado até antes do último PBS (a direita dos interferômetros Mach-Zehnders da Figura 7). Agora podemos encaminhar os cálculos para a medição do estado e extração da FTF.

3.3 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA SOBREVIVE AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA

Para extrairmos teoricamente a FTF temos que calcular a contagem de coincidências na saída do último PBS (Figura 7). Com esse intuito, obteremos os operadores campo elétrico signal e idler evoluídos dos detectores até o último PBS, que precede os detectores. Faremos os cálculos utilizando a Eq. (47) e o adaptaremos para as demais equações, já que os cálculos são similares.

Os *operadores campo elétrico* dos fótons signal e idler de frequência positiva podem ser escritos como [27]

$$\begin{aligned} E_S^+ &= E_{SH}^+ \hat{e}_H + E_{SV}^+ \hat{e}_V \\ E_I^+ &= E_{IH}^+ \hat{e}_H + E_{IV}^+ \hat{e}_V, \end{aligned} \quad (50)$$

onde $\hat{e}_\mu$ ($\mu = H, V$) são vetores unitários de polarização vertical (V) e horizontal (H) tal que cada componente é expandida em termos dos modos espaciais dos campo elétricos signal e idler

$$\begin{aligned} E_{S\mu}^+ &= a_{p\mu} \eta_p(\mathbf{r}_S) \\ E_{I\nu}^+ &= b_{q\nu} \eta_q(\mathbf{r}_I) \end{aligned} \quad (51)$$

onde $a_{p\mu}(b_{q\nu})$ é o operador aniquilação de fótons no modo de fenda $\eta_p(\eta_q)$, sendo este último a projeção do estado de fenda sobre a representação de posição para o estado de um fóton $|1x\rangle = \int dq e^{iqx} |1q\rangle$, onde $|1q\rangle$ é o estado de Fock e $\eta_m(\mathbf{r}) = \langle 1x|m\rangle$. O estado de $|m\rangle$

representa o estado de caminho de um fóton que cruzou a fenda m [51]. As funções modos de fenda satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\int d^2\mathbf{r} \eta_m^*(\mathbf{r}) \eta_n(\mathbf{r}) = \delta_{mn} \quad (52)$$

e os operadores $a_{p\mu}$ e b_{qv} atuam de forma análoga aos operadores aniquilação para estados de Fock

$$a_{p\mu} b_{qv} |m\sigma, n\epsilon\rangle = \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{v\epsilon} |vac\rangle, \quad (53)$$

onde $|vac\rangle$ é o estado de vácuo e $|m\sigma, n\epsilon\rangle$ é um estado de fenda de dois fótons correspondente a um fóton signal passando através da fenda m com polarização σ e um fóton idler passando através da fenda n com polarização ϵ . Para maior compreensão, poderíamos escrever na forma

$$a_{p\mu} b_{qv} |1m\sigma, 1n\epsilon\rangle = \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{v\epsilon} |0m\sigma, 0n\epsilon\rangle, \quad (54)$$

onde, agora, os números (0 e 1) significariam os modos de ocupação de Fock. A funcionalidade da contagem em coincidências dos fótons pelos detectores só ocorrerá com os polarizadores à 45° que apagam as informações de polarização dos fótons signal e idler quando estes saem do PBS final (Figura 7). Então, os operadores dos campos elétricos nos detectores em termos dos operadores signal e idler, antes dos polarizadores a 45° são [27]

$$\begin{aligned} E_1^+ &= (E_{SH}^+ + iE_{IV}^+)/\sqrt{2} \\ E_2^+ &= (iE_{SV}^+ + E_{IH}^+)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (55)$$

e a contagem de coincidências por

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \beta \text{Tr}[E_1^+ E_2^+(\rho) E_2^- E_1^-] \quad (56)$$

onde β é a eficiência total de detecção, onde $E_j^- = (E_j^+)^{\dagger}$ e $j = 1, 2$ ³⁷. Multiplicando os operadores da Eq. (55) obtemos

$$E_1^+ E_2^+ = [E_{SH}^+ E_{IH}^+ - E_{SV}^+ E_{IV}^+ + i(E_{SH}^+ E_{SV}^+ + E_{IV}^+ E_{IH}^+)]/2, \quad (57)$$

onde percebemos que os termos imaginários possuem dois operadores aniquilação em sequência atuando no mesmo fóton, o que torna nulos os estados após a atuação destes operadores sobre as componente $|mH, nV\rangle$ e $|mV, nH\rangle$, conforme a Eq. (53). Assim, podemos utilizar somente parte da Eq. (57) que produz resultados não nulos

$$E_1^+ E_2^+ F_{m\mu n\nu}^{ghij} |m\mu, n\nu\rangle = (F_{mHnH}^{ghij} E_{SH}^+ E_{IH}^+ |mH, nH\rangle - F_{mVnV}^{ghij} E_{SV}^+ E_{IV}^+ |mV, nV\rangle)/2. \quad (58)$$

Utilizando a Eq.(51) juntamente com a Eq. (53), percebemos que parte da Eq. (58) será

³⁷ Pela propriedade cíclica do traço temos que $\text{Tr}[(\rho) E_2^- E_1^- E_1^+ E_2^+] = \text{Tr}[E_1^+ E_2^+(\rho) E_2^- E_1^-]$

$$E_1^+ E_2^+ F_{m\mu\nu}^{ghij} |m\mu, n\nu\rangle = |vac\rangle \times (F_{mHnH}^{ghij} \delta_{pm} \delta_{\sigma\mu} \delta_{qn} \delta_{\epsilon\nu} \eta_p^2 \eta_q^1 - F_{mVnV}^{ghij} \delta_{pm} \delta_{\sigma\mu} \delta_{qn} \delta_{\epsilon\nu} \eta_q^2 \eta_p^1)/2, \quad (59)$$

ou, ainda, Eq. (57)

$$E_1^+ E_2^+ F_{m\mu\nu}^{ghij} |m\mu, n\nu\rangle = (F_{mHnH}^{ghij} \eta_m^2 \eta_n^1 - F_{mVnV}^{ghij} \eta_n^2 \eta_m^1) |vac\rangle / 2, \quad (60)$$

com a qual podemos completar o cálculo da contagem de coincidência (Eq. (56)) usando a matriz densidade $\varepsilon(\rho^{SI})$, Eq. (47). Antes, vamos analisar os significados físicos da última expressão consequentes do uso de um interferômetro Mach-Zehnder triplo com PBSs e polarizador (Eq. (55)): o termo $\eta_m^2 \eta_n^1$ da Eq. (60) significa que o feixe Signal que passou pela fenda m é detectado por D2 e que o feixe Idler, transmitido pela fenda n , é detectado por D1, enquanto o termo $\eta_n^2 \eta_m^1$, com uma permutação em relação ao primeiro termo da Eq. (60), significa que o Idler é detectado por D2 e Signal por D1. Isso se deve ao fato de estarmos usando um interferômetro Mach-Zehnder triplo com PBS no processo de medida. O primeiro termo corresponde aos feixes transmitidos através do último PBS enquanto o segundo termo, aos feixes refletidos pelo PBS (Eq. (55)). Feita essa análise, voltemos aos cálculos indicados nas primeiras linhas após Eq. (60). Então, a contagem de coincidência é

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} \times (F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*} \eta_m^2 \eta_n^1 \eta_{m'}^{2*} \eta_{n'}^{1*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} \eta_n^2 \eta_m^1 \eta_{n'}^{2*} \eta_{m'}^{1*} - F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} \eta_m^2 \eta_n^1 \eta_{m'}^{2*} \eta_{n'}^{1*} - F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*} \eta_n^2 \eta_m^1 \eta_{n'}^{2*} \eta_{m'}^{1*}) / 4. \quad (61)$$

Se usarmos a ortogonalidade dos modos de fenda na integração espacial da contagem de coincidências, Eq. (52), obtemos

$$C \equiv \int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*} \delta_{mm'} \delta_{nn'} + F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} \delta_{nn'} \delta_{mm'} - F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} \delta_{mn'} \delta_{nm'} - F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*} \delta_{nm'} \delta_{mn'}) / 4, \quad (62)$$

onde vemos que os deltas de Kronecker permutam os índices dos últimos termos resultando em

$$C = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} - F_{mHnH}^{ghij} F_{nVmV}^{ghij*} - F_{mVnV}^{ghij} F_{nHmH}^{ghij*}) / 4. \quad (63)$$

Lembrando da Eq. (21) que $\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{mn}$ para $\mu, \nu = H$ e V , usando $\Omega_H = 0$ e $\Omega_V \neq 0$ nos termos da Eq. (47) e efetuando os cálculos expostos no APÊNDICE C, a contagem em coincidência, Eq. (63), será

$$\begin{aligned}
C &= \beta \frac{1}{16} \left[1 + \alpha_{mn} \alpha_{mn}^* p_{ij}^{(C)} (s_{mn}^{ij})^2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (r_{mn}^{ghij} + r_{nm}^{ghij*}) \right] \\
s_{mn}^{ij} &= e^{-i(\Omega_V^i \delta_m^i + \Omega_V^j \delta_n^j)} \\
r_{mn}^{ghij} &= (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} s_{mn}^{ij} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_I))]} \\
r_{nm}^{ghij*} &= (-1)^{(\delta_n^g + \delta_m^h)} s_{nm}^{ij} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_I))]}
\end{aligned} \tag{64}$$

Esta é a contagem de coincidências do experimento FTF sob ruídos de defasagem e de amplitude atuando simultaneamente sobre o estado inicialmente puro na montagem experimental da Figura 7. Note que esta contagem de coincidência é limitada em 1/4 para um detector ideal ($\beta=1$). Isso ocorre por causa da filtragem do polarizador antes do detector e por causa da perda de sinal no último PBS quando o sinal e o idler vão em direção ao mesmo detector de modo a não contabilizar a coincidência – vide Figura 7. Para facilitar as discussões numéricas deste resultado, fazendo com que os padrões de interferências oscilem entre 0 e 1, evidenciando a máxima visibilidade, nós vamos normalizar esta contagem de coincidência multiplicando-a por $4/\beta$.

Note que a permutação dos índices m e n induzida pelos deltas de Kronecker durante a integração da contagem de coincidência Eq. (62) fez com que

$$r_{mn}^{ghij*} \neq r_{nm}^{ghij*} \tag{65}$$

o que nos impossibilita de reescrever $(r_{mn}^{ghij} + r_{nm}^{ghij*})$ em termos da função senos e cossenos através da Fórmula de Euler ($e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$) nos casos mais gerais. Independente disso, a soma $(r_{mn}^{ghij} + r_{nm}^{ghij*})$ produzirá uma oscilação senoidal quando variarmos $\{\theta_s; \theta_I\}$, de modo a possibilitar-nos construir padrões de interferência ao atribuímos valores específicos para $\{\xi_n, \chi_m\}$, que permanecerão constantes durante a construção do padrão de interferência. Embora haja diversas evoluções distintas possíveis para as funções ξ_n e χ_n , todas elas devem obedecer a condição de $\sum_n \xi_n = \sum_n \chi_n = 0$ para que $U_S, U_I \in SU(d)$, o que nos garante que nenhuma fase trivial seja adicionada pelas operações [27, 50]. Ao final de todas as possíveis evoluções, todas as funções correlacionadas pelos fótons gêmeos imprimirão múltiplos da mesma FTF entre eles, de modo que em todos os casos teremos o mesmo deslocamento entre o padrão de interferência final e o padrão de interferência inicial. Assim nos limitaremos ao estudo de somente alguns casos que apresentaremos junto aos resultados numéricos. Dentre os casos particulares do nosso interesse está o caso mais simples em que $m=n$. Um caso específico ocorre se retiramos os ruídos ($p_{gh}^{(D)} = 1; p_{ij}^{(C)} = 1$) e consideramos válidos permutações de m e n , o que implica em

$$r_{nm}^{ghij*} = r_{mn}^{ghij*} \Rightarrow (\xi_m + \chi_n) = (\xi_n + \chi_m) \quad (66)$$

Isso nos conduzirá ao resultado descrito por Khoury em [27].

Vejamos alguns casos numéricos da Eq. (64) que elucidarão este capítulo.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS DA ROBUSTEZ DA FTF AOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE

4.1 EVOLUÇÕES QUE IMPLEMENTAM A FTF

Neste capítulo exibiremos cálculos numéricos e gráficos da contagem de coincidência que nos permite visualizar a robustez da FTF sob ruídos de defasagem e de amplitude amortecida.

Considere dois qudits sob a ação de operações unitárias diagonais como as mostradas nas Eqs. (31) e (33)

$$U_S = \text{diag}[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_d}]; U_I = \text{diag}[e^{i\chi_1}, e^{i\chi_2}, \dots, e^{i\chi_d}] \quad (67)$$

onde ξ_n e χ_n são fatores de fase introduzidos pelos SLMs nos caminhos dos fótons definidos pelas fendas e que obedecem $\sum_n \xi_n = \sum_n \chi_n = 0$ para que não haja fase trivial adicionada pelas operações e para assegurar que $\det(U_S) = 1$ e $\det(U_I) = 1$. Em princípio, as operações locais implementadas pelos dois SLMs podem ser independentes e totalmente diferentes, porém, para os exemplos abordados neste capítulo de dimensões 2, 3 e 4, consideraremos tais evoluções cíclicas efetuadas por

$$\begin{aligned} d = 2: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = \frac{\pi}{2}t \\ \xi_2 = \chi_2 = -\frac{\pi}{2}t \end{cases}, \\ d = 3: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = \frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}(2t-1)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_2 = \chi_2 = -\frac{2\pi}{3}t \\ \xi_3 = \chi_3 = \frac{\pi}{3}(2t-1)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{cases}, \\ d = 4: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = -\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}(1-2t)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_2 = \chi_2 = \frac{\pi}{4}t \\ \xi_3 = \chi_3 = \frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}(1-2t)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_4 = \chi_4 = -\frac{3\pi}{4}t \end{cases} \end{aligned} \quad (68)$$

onde t é um parâmetro real $t \in [0,1]$, e $H(t)$ é a função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (69)$$

Estas operações são tais que na metade da evolução, os fasores $e^{i(\xi_n+\chi_n)}$ estão uniformemente distribuídos no círculo trigonométrico (Tabela 1) e no final se alinham na posição correspondente à γ_{FTF} , ou ainda um múltiplo dela, mesmo que negativo.

	FASES	FASORES: $Z_m(t) = e^{i[(\xi_m(t)+\chi_m(t))]}$		
	$\xi_m + \chi_m$	$t=0$	$t=1/2$	$t=1$
$d=2$				
$d=3$				
$d=4$				

Tabela 1: Gráficos que exemplificam a evolução das fases e dos respectivos fasores que compõem a evolução $SU(d)$ que usaremos nos exemplos numéricos. A primeira coluna de tabela mostra a evolução das fases $\xi_m + \chi_m$ descritas pelas Eqs. (68), cuja correlação se dá pelos fótons gêmeos. As demais colunas mostram a evolução dos correspondentes fasores $Z_m(t) = e^{i[(\xi_m+\chi_n)]}$.

Este é o ponto central das operações que implementam a FTF: não importa qual seja a evolução, o importante é que, ao final dela, todos os fasores dos fótons correlacionados estejam exatamente em γ_{FTF} . Com isso, para medirmos a FTF, basta medirmos a diferença de fase entre a curva do padrão de interferência final e inicial da contagem de coincidência em relação à $\theta = \theta_s + \theta_l$ da Eq. (64), não importando por qual evolução $SU(d)$ o estado foi submetido. Assim,

de posse das fases nos s tempos paramétricos $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$, as funções mostradas na Eq. (68) se reduzem aos valores apresentados na Tabela 2.

<i>Funções</i>	<i>t</i>			<i>Funções</i>	<i>t</i>			<i>Funções</i>	<i>t</i>		
	0	$\frac{1}{2}$	1		0	$\frac{1}{2}$	1		0	$\frac{1}{2}$	1
$\xi_1 = \chi_1$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\xi_1 = \chi_1$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\xi_1 = \chi_1$	0	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{4}$
$\xi_2 = \chi_2$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\xi_2 = \chi_2$	0	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\xi_2 = \chi_2$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
Qubits	Fases			$\xi_3 = \chi_3$	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\xi_3 = \chi_3$	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$
				Qutrits	Fases			$\xi_4 = \chi_4$	0	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{4}$
								Ququarts	Fases		

Tabela 2: A tabela apresenta as principais fases das funções da Eq. (68) nos instantes paramétricos $t = 0, 1/2$ e 1 . As funções ξ_m e χ_m adicionadas aos caminhos m ($m = 1, \dots, d$) dos fótons correspondem às fases que promovem a evolução $SU(d)$ nos fótons Signal e Idler, respectivamente. Cada parte do estado quântico bipartido em questão (Signal e Idler) terá dimensão $d = 2$ (Qubit), 3 (Qutrit) e 4 (Ququart).

Substituiremos estes valores na expressão da contagem de coincidências mostrada na Eq. (64) para o estado maximamente emaranhado (MES – *maximally entangled state*) e para o estado produto (PS – *product state*) de dimensões $2, 3$ e 4 , também chamados de qubits, qutrits, ququarts, os quais apresentamos respectivamente abaixo:

$$\begin{aligned}
 d = 2 & \begin{cases} |\psi_{MES}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |22\rangle) \\ |\psi_{PS}\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle + |2\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle) \end{cases} \\
 d = 3 & \begin{cases} |\psi_{MES}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|11\rangle + |22\rangle + |33\rangle) \\ |\psi_{PS}\rangle = \frac{1}{3}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \end{cases} \\
 d = 4 & \begin{cases} |\psi_{MES}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|11\rangle + |22\rangle + |33\rangle + |44\rangle) \\ |\psi_{PS}\rangle = \frac{1}{4}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{70}$$

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB RUÍDO DE DEFASAGEM

Para o caso em que há somente ruído de fase no caminho dos fótons, a *contagem em coincidências geral normalizada (multiplicada por $4/\beta$) do experimento FTF, com os ruídos de defasagem* ((Eq. (64)) passa a ser

$$C = \frac{1}{4} \left[2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{gh}^{(d)} \left(r_{mn}^{gh(D)} + r_{nm}^{gh*(D)} \right) \right]$$

$$r_{mn}^{gh(D)} = (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_I))]} \quad (71)$$

$$r_{nm}^{gh*(D)} = (-1)^{(\delta_n^g + \delta_m^h)} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_I))]}$$

Na Secção 3.2 definimos que ruído de 25% é aquele em que a identidade está presente 75% do tempo de medida ou tem um peso de 0,75 entre os operadores de Kraus, $p_{00}^{(D)} = 0,75$. Faremos os gráficos somente dos casos extremos de 0% (sem ruído) e 100% de ruído. Abordaremos somente os casos dos *ruídos isoponderados (ruído-iso)* que no experimento em questão tem a seguinte estrutura: $p_{g \neq 0; h \neq 0}^{(D)} = p/d$ e $p_{00}^{(D)} = 1 - p$. Então, quando afirmarmos que o ruído é de 100% ($p=1$) teremos $p_{g \neq 0; h \neq 0}^{(D)} = 1/d$ e $p_{00}^{(D)} = 0$ de modo que a não haverá identidade no mapa de Kraus³⁸. Assim, com essa definição do peso p para a representação do ruído, a *contagem de coincidências com ruído de defasagem* presente no caminho dos fótons no estado maximamente emaranhado (MES) e no estado produto (PS) serão denotados como $C_{MES}(p)$ e $C_{PS}(p)$ na tabela abaixo (Tabela 3).

Com esses critérios, se substituírmos as fases da Tabela 2 na Eq. (71) para os estados mostrados na Eq. (70), somos capazes de computar a FTF para as evoluções $SU(d)$. Na Tabela 3 apresentamos os resultados dos cálculos das contagens em coincidências para diferentes situações, onde a visibilidade do padrão de interferência é calculada por

$$v = (C_{max} - C_{min}) / (C_{max} + C_{min}). \quad (72)$$

³⁸ Semelhante ao ruído isoponderado, tem-se também o *mapa isoponderado (mapa-iso)*, cujo componente são da forma $p_{gh}^{(D)} = 1/(d + 1)$ para todos os operadores de Kraus, incluindo a identidade [44].

Contagem de coincidência normalizada mostrando a FTF sob ruído de defasagem. (Contagem em função do peso p do ruído.)				
$d = 2$: dois-qubits				
t	$C_{MES}(p)$	$v_{MES}(p)$	$C_{PS}(p)$	$v_{PS}(p)$
0	$\frac{1}{2} - \frac{(1-p)^2}{2} \cos(\theta)$	$(1-p)^2$	$\frac{1}{2} - \frac{(1-p)^2}{2} \cos(\theta)$	$(1-p)^2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{(1-p)^2}{4} \cos(\theta)$	$\frac{(1-p)^2}{2}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{(1-p)^2}{2} \cos(\theta - \pi)$	$(1-p)^2$	$\frac{1}{2}$	0
$d = 3$: dois-qutrits				
0	$\frac{1}{2} - \frac{(3-2p)^2}{18} \cos(\theta)$	$\frac{(3-2p)^2}{9}$	$\frac{1}{2} - \frac{(3-2p)^2}{18} \cos(\theta)$	$\frac{(3-2p)^2}{9}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{2(3-2p)^2}{81} \cos(\theta)$	$\frac{4(3-2p)^2}{9 \cdot 9}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{(3-2p)^2}{18} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{(3-2p)^2}{9}$	$\frac{1}{2} - \frac{(3-2p)^2}{162} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{1(3-2p)^2}{9 \cdot 9}$
$d = 4$: dois-ququarts				
0	$\frac{1}{2} - \frac{(2-p)^2}{8} \cos(\theta)$	$\frac{(2-p)^2}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{(2-p)^2}{8} \cos(\theta)$	$\frac{(2-p)^2}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{(2+\sqrt{2})(2-p)^2}{64} \cos(\theta)$	$\frac{(2+\sqrt{2})(2-p)^2}{8 \cdot 4}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{(2-p)^2}{8} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{(2-p)^2}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{(2-p)^2}{32} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1(2-p)^2}{4 \cdot 4}$

Tabela 3: $C_{MES}(p)$ e $C_{PS}(p)$ são expressões das contagens em coincidências normalizadas dada pela equação Eq. (71) aplicada a dois-qutrits maximamente emaranhados (MES) e produto (PS) com dimensões 2, 3 e 4 [Eq. (70)] mediante as operações locais $SU(d)$ da Eq. (67) do experimento para medir a FTF com ruído de defasagem. Atribuindo valores para p em tais expressões obtemos os padrões de interferência em função do parâmetro θ dos PZTs (Figura 7) correspondentes aos instantes paramétricos 0, 1/2 e 1 de $t \in [0,1]$ da evolução $SU(d)$. Os dois-qutrits estão em um ambiente com ruído de defasagem, cuja intensidade relativa dos operadores de Kraus em relação à operação de identidade é determinada pelo parâmetro $p \in [0,1]$. As visibilidades dependentes de p dos padrões de interferência correspondentes aos estados MES (v_{MES}) e PS (v_{PS}) foram determinadas pela Eq. (72).

Pelas expressões na Tabela 3, com exceção do estado produto de dois-qubits, o deslocamento $2\pi/d$ está presente em todos os casos entre os padrões de interferência de $t=0$ e $t=1$, mesmo com a visibilidade diminuindo significativamente no estado produto de dois-qutrits ($d > 2$). Portanto, $2\pi/d$ se faz presente inclusive para $p=1$ (100% de ruído de defasagem). Este

resultado nos mostra que o deslocamento de $2\pi/d$ após operação $SU(d)$, consequência da geração da FTF no estado de dois qudits, é robusto na presença do ruído de defasagem. A visibilidade do padrão de interferência zera para cada um dos MES em $t=1/2$, o que nos diz que estes estados em $t=1/2$ são ortogonais aos seus respectivos estados iniciais, já que o que faz o interferômetro mostrado na Figura 7 é criar um estado de superposição entre o estado inicial e o estado evoluído que contém a FTF, cujo o padrão de interferência calculamos na saída do interferômetro. Ortogonalidade semelhante ocorre entre os qubits-PS em $t=0$ e $t=1$ quando $p \neq 1$. Por fim, é possível notar que as demais visibilidades diferentes de zero possuem a mesma estrutura matemática, portanto, são múltiplas entre si.

Na Figura 8 estão os gráficos das expressões de coincidência da Tabela 3 com $p=0$ (sem ruído de defasagem) e $p=1$ (ruído máximo) para os estados MES e PS. Os gráficos de $p=0$ estão sobrepostos aos de $p=1$, sendo os 3 primeiros rótulos da legenda referente à $p=0$ e os demais referentes à $p=1$. Para $d>2$ é visível que o deslocamento de fase $2\pi/d$ sempre se manifesta mesmo sob 100% de ruído de defasagem ($p=1$), já para o caso $d=2$ temos duas peculiaridades: no estado de dois qubits-MES, o deslocamento aparece somente para ruídos menores que 100% e no estado de dois qubits-PS a fase $2\pi/d$ nem se manifesta, conforme percebemos pelas respectivas equações da Tabela 3. Tanto pelos gráficos quanto pelas equações, as visibilidades são visivelmente perceptíveis e iguais para o MES em $t=0$ e $t=1$, o que não ocorre para o PS, sobretudo com $p=1$. Este último fato nos indica que o emaranhamento do estado facilita a medida da FTF em um experimento.

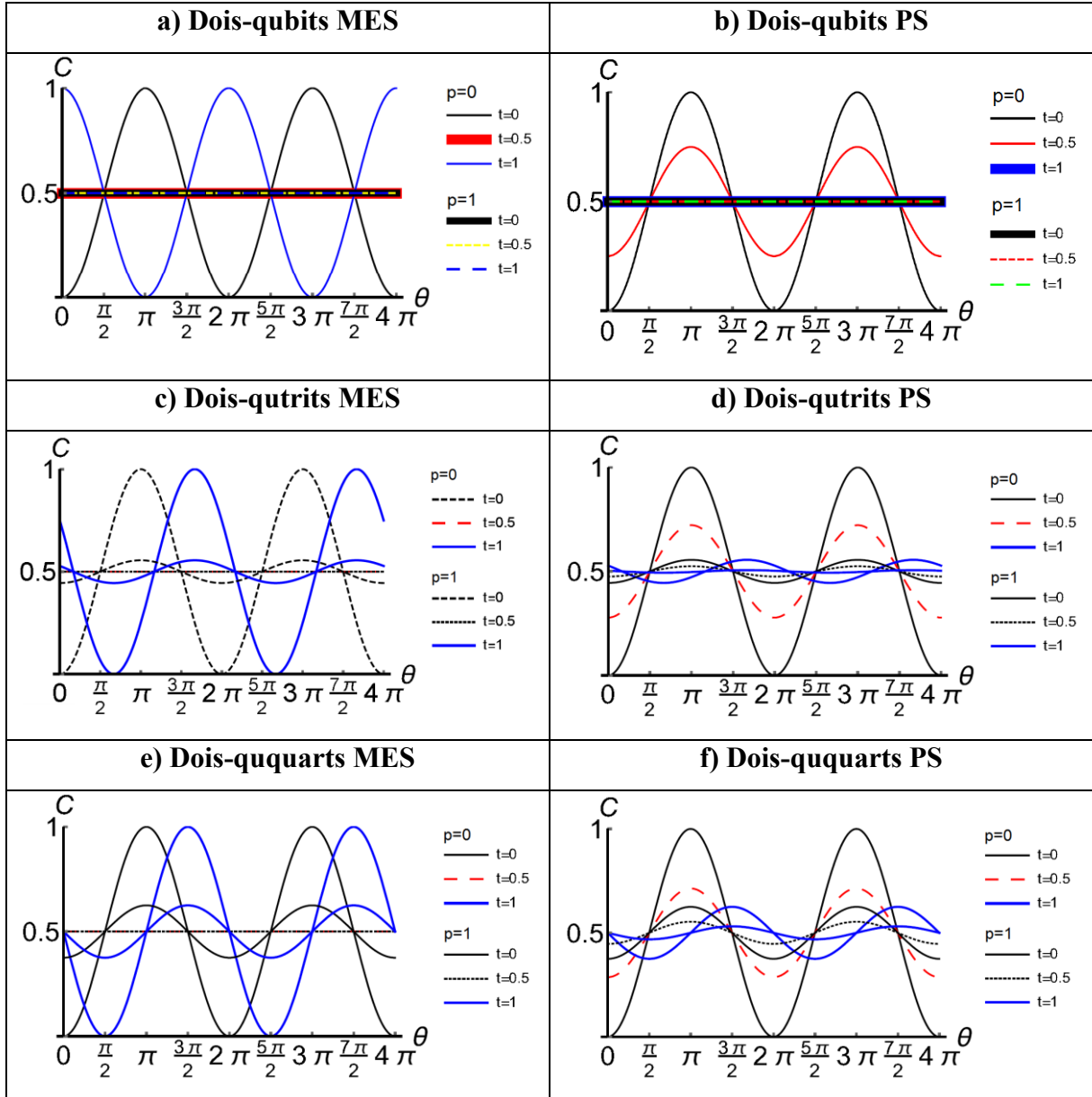


Figura 8: Gráficos da contagem em coincidência teórica para o experimento de medida da FTF sob ruído de defasagem. O parâmetro θ segue da atuação dos PZTs da Figura 7. Conforme legenda, os primeiros rótulos da legenda ($t = 0, 1/2$ e 1) correspondem aos casos sem ruído ($p=0$) e os demais aos casos com ruído ($p=1$), cujas curvas possuem visibilidades menores quando comparadas com os casos $p=0$. O deslocamento $2\pi/d$ entre os padrões de coincidências pretos ($t=0$) e azuis ($t=1$) sobrevive mesmo ao mais forte ruído de defasagem nos casos dois-qutrits e dois-ququarts [Gráficos de (c) a (f)], já para o estado dois-qubits-MES, a sobrevivência desse deslocamento ocorre somente para o caso de ruído de fase menor que o de 100% [Gráfico (a)] e para dois-qubits-PS, o deslocamento não se manifesta [Gráfico (b)].

Finalmente, na Figura 9, mostramos os gráficos da visibilidade do padrão de interferência para os estados maximamente emaranhados e produtos obtidos das expressões das

contagens em coincidência apresentadas na Tabela 3 em função do parâmetro de intensidade do ruído de defasagem, p . Pelos gráficos da Figura 9 vemos que a visibilidade

Diminui monotonamente com p para estado MES e PS. No entanto, decresce mais lentamente quanto maior é a dimensão do espaço de estados correspondentes, de modo que a dimensão também pode ser encarada como um parâmetro que aumenta a robustez da coerência do estado em relação à presença do ruído. Podemos dizer que isso ocorre porque há uma diluição do ruído sob os vetores da base do estado conforme aumentamos a dimensão do estado e este afeta menos a visibilidade do padrão. Matematicamente, isso se deve ao fato de todos os cálculos terem as mesmas estruturas de ruídos [Eqs. (40) e (43)] para estados de diferentes dimensões – sob esses critérios temos maior capacidade de caracterizar nossas descrições.

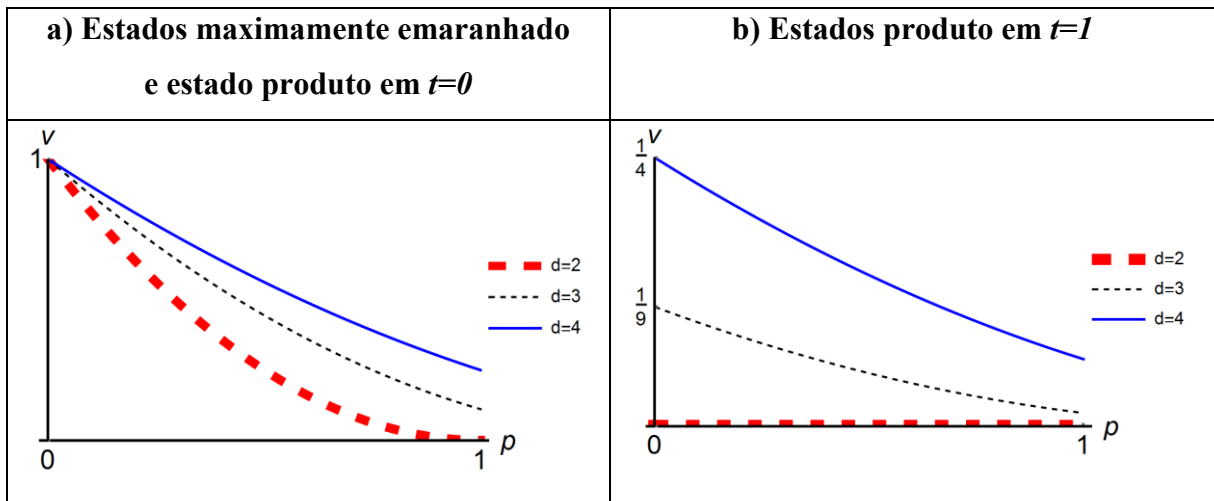


Figura 9: (a) Visibilidade (v) do padrão de interferência para dois-qubits MES ($d=2, 3$, ou 4) em função do parâmetro p de intensidade relativa à identidade do ruído de defasagem nos instante $t=0$ e $t=1$ da evolução do estado. Este mesmo gráfico (a) descreve a visibilidade do estado produto em $t=0$, pois as equações deste estado são iguais ao MES, como podemos verificar na Tabela 3. (b) Visibilidade do padrão de interferência para dois-qubits PS ($d=2, 3$, ou 4) em termos do parâmetro p de intensidade do ruído de defasagem no instante $t=1$ [Tabela 3]. Pelos gráficos nota-se que o aumento da dimensão melhora a visibilidade do padrão de interferência.

Antes de finalizarmos esta seção, vamos analisar uma última evolução, multiplicando todas as fases da Eq. (68) por 2 como se segue

$$\begin{aligned}
d = 2: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = 2 * \frac{\pi}{2} t \\ \xi_2 = \chi_2 = -2 * \frac{\pi}{2} t \end{cases} ; \\
d = 3: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = 2 \left[\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{3} (2t - 1) H \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \xi_2 = \chi_2 = -2 \frac{2\pi}{3} t \\ \xi_3 = \chi_3 = 2 \frac{\pi}{3} (2t - 1) H \left(t - \frac{1}{2} \right) \end{cases} ; \\
d = 4: & \begin{cases} \xi_1 = \chi_1 = 2 \left[-\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2} (1 - 2t) H \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \xi_2 = \chi_2 = 2 \frac{\pi}{4} t \\ \xi_3 = \chi_3 = 2 \left[\frac{3\pi}{4} t - \frac{\pi}{2} (1 - 2t) H \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \xi_4 = \chi_4 = -2 \frac{3\pi}{4} t \end{cases} ; \\
H(x) = & \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, t \in [0, 1] \\ 1, & x > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{73}$$

Analisando somente os instantes paramétricos $t=0$ e $t=1$ necessários para medir o deslocamento $2\pi n/d$, constatamos que ambos os estados, MES e PS, apresentam equações semelhantes para os padrões de interferência e visibilidades, tendo a mesma forma que as equações do estado MES na Tabela 3 adaptadas para tal evolução, ou seja, padrões da forma $\cos(\theta - 2 \times 2\pi/d)$ em $t=1$ e mesma visibilidade em $t=1$ e $t=0$. Entretanto, isto não se sucede quando implementamos a Eq. (68) para o estado produto. Vale ressaltar que, ao implementar a Eq. (68) para $d=2$, o deslocamento πn não se manifesta para o estado produto, porém, implementando a Eq. (73), o deslocamento πn surge igualmente em ambos os estados, MES e PS. Antes acreditava-se que o estado produto não recuperava a visibilidade mediante operações cíclicas $SU(d)$, mas, ao efetuarmos uma operação cíclica $SU(d)$ com fases do tipo $2\xi_i$ e $2\eta_i$, verificamos que a visibilidade do estado produto também se recupera e que todas as demais expressões para as contagens de coincidência são idênticas às dos estados MES. Como todos os demais detalhes serão idênticos aos já discutidos, nos eximiremos de apresentar as expressões bem como os gráficos correspondente aos deslocamentos $2 \times 2\pi/d$.

Em suma, concluímos que o emaranhamento possui um papel importante na eficiência da medida do deslocamento $2\pi/d$ para evoluções $SU(d)$ sobre os estados com dimensões $d>2$ e é fundamental no caso da dimensão $d=2$. Entretanto, o emaranhamento do estado de duas partes se mostra indiferente para evoluções $SU(d)$ com fases do tipo $2\xi_i$ e $2\eta_i$, como discutido acima.

4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB O RUÍDO DE AMPLITUDE

Para o caso em que há somente ruído de amplitude no sistema, a *contagem de coincidências geral e normalizada* ³⁹ do experimento FTF com os ruídos de amplitude amortecida obtida a partir de Eq. (64) passa a ser

$$C = \frac{1}{4} \left[1 + \alpha_{mn} \alpha_{mn}^* p_{ij}^{(C)} (s_{mn}^{ij})^2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{ij}^{(C)} (r_{mn}^{ij(C)} + r_{nm}^{ij*(C)}) \right];$$

$$s_{mn}^{ij} = e^{-(\Omega_V^i \delta_m^i + \Omega_V^j \delta_n^j)},$$

$$r_{mn}^{ij(C)} = s_{mn}^{ij} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_I))]},$$

$$r_{nm}^{ij*(C)} = s_{nm}^{ij} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_I))]}.$$
(74)

A Figura 10 apresenta o comportamento atenuante do operador ruído de amplitude amortecida. Adotaremos $\Omega = 0,69 \rightarrow e^{-0,69} \sim 0,50$ nos cálculos numéricos que implica em uma atenuação de 50% do número de fótons que passa pelo caminho (fenda) com ruído. Se usássemos $\Omega = 5 \rightarrow e^{-5} \sim 0,0067$, teríamos praticamente o bloqueio da fenda. Para os demais parâmetros, consideramos os mesmos critérios adotados na secção anterior: ruído isoponderado de 100%; $C_{MES}(p)$ e $C_{PS}(p)$ são as *contagens de coincidência com ruído de amplitude* para os estados maximamente emaranhado e produto, respectivamente.

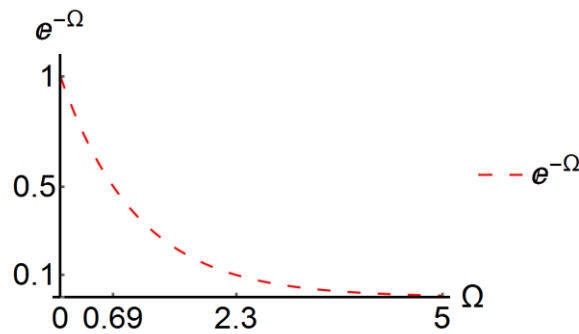


Figura 10: Porcentagem remanescente do sinal após atenuação da amplitude promovida pelo parâmetro de atenuação Ômega. O valor $\Omega = 0,69$, que corresponde aproximadamente à 50% de atenuação do sinal, é o valor que usaremos para efetuar os cálculos numéricos. Para a atenuação de 90% tem-se $\Omega = 2,3$ e, finalmente, $\Omega = 5$ corresponde à 99,3% de atenuação.

³⁹ Multiplicamos por $4/\beta$ para que a oscilação do padrão de coincidência sem ruído fique entre 0 e 1, o que facilita a análise das porcentagens de queda de visibilidade (β é a eficiência total de detecção).

Substituindo $\Omega = 0,69$, as fases da Tabela 2 e os coeficientes dos estados da Eq. (70) na Eq. (74) determinamos as expressões das contagens de coincidências e suas respectivas visibilidades pela Eq. (72) expostos na Tabela 4. Com exceção do estado produto de dois-qubits, todos os demais apresentam o deslocamento de fase $2\pi/d$ mesmo sob 100% de ruído de amplitude amortecida ($p=1$). As visibilidades diferentes de zero apresentaram a mesma estrutura matemática, característica também manifestada no caso do ruído de defasagem.

Contagem de coincidência normalizada na saída do interferômetro (Figura 7) sob ruído de amplitude com atenuação de 50%, em função da intensidade do ruído.				
$d = 2$: dois-qubits				
t	$C_{MES}(p)$	$v_{MES}(p)$	$C_{PS}(p)$	$v_{PS}(p)$
0	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256} - \frac{(4-p)^2}{32} \cos(\theta)$	$\frac{8(4-p)^2}{64 + (8-3p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256} - \frac{(4-p)^2}{32} \cos(\theta)$	$\frac{8(4-p)^2}{64 + (8-3p)^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256} - \frac{(4-p)^2}{64} \cos(\theta)$	$\frac{4(4-p)^2}{64 + (8-3p)^2}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256} - \frac{(4-p)^2}{32} \cos(\theta - \pi)$	$\frac{8(4-p)^2}{64 + (8-3p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(16-3p)p}{256}$	0
$d = 3$: dois-quitrts				
0	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64} - \frac{(6-p)^2}{72} \cos(\theta)$	$\frac{(8/9)(6-p)^2}{16 + (4-p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64} + \frac{(6-p)^2}{72} \cos(\theta)$	$\frac{(8/9)(6-p)^2}{16 + (4-p)^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64} - \frac{(6-p)^2}{162} \cos(\theta)$	$\frac{(32/81)(6-p)^2}{16 + (4-p)^2}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64} - \frac{(6-p)^2}{72} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{(8/9)(6-p)^2}{16 + (4-p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{(8-p)p}{64} + \frac{(6-p)^2}{648} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{(8/81)(6-p)^2}{16 + (4-p)^2}$
$d = 4$: dois-ququarts				
0	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024} - \frac{(8-p)^2}{128} \cos(\theta)$	$\frac{8(8-p)^2}{256 + (16-3p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024} - \frac{(8-p)^2}{128} \cos(\theta)$	$\frac{8(8-p)^2}{256 + (16-3p)^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024}$	0	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024} - \frac{(8-p)^2}{300} \cos(\theta)$	$\frac{(256/75)(8-p)^2}{256 + (16-3p)^2}$
1	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024} - \frac{(8-p)^2}{128} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{8(8-p)^2}{256 + (16-3p)^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{3(32-3p)p}{1024} - \frac{(8-p)^2}{512} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{2(8-p)^2}{256 + (16-3p)^2}$

Tabela 4: $C_{MES}(p)$ e $C_{PS}(p)$ são expressões das contagens em coincidências normalizadas dada pela equação Eq. (74) aplicada à dois-quidits MES e PS com dimensões 2, 3 e 4 [Eq. (70)] mediante as operações locais $SU(d)$ da Eq. (67) do experimento para medir a FTF sob ruído de amplitude amortecida. Atribuindo valores para p em tais expressões obtemos os padrões de interferência (em termos do parâmetro θ dos PZTs da Figura 7) correspondentes aos valores paramétricos t em 0, $1/2$ e 1 para $t \in [0,1]$ da evolução $SU(d)$. Os dois-quidits estão em um ambiente com ruído de amplitude amortecido cujo parâmetro de atenuação é $\Omega = 0,69$ e a intensidade em relação à identidade é determinada pelo parâmetro $p \in [0,1]$. As visibilidades dependentes de p dos padrões de interferência correspondentes aos estados MES (v_{MES}) e PS (v_{PS}) foram determinadas pela Eq. (72).

Analisando as visibilidades mostradas na Tabela 4, nota-se que, com exceção do estado produto de dois-qubits, o deslocamento $2\pi/d$ se faz presente em todos padrões de interferências de $t=1$ em relação à $t=0$, mesmo sob 100% de ruído ($p=1$). Em $t=0$ as expressões C_{MES} , C_{PS} e suas visibilidades são idênticas, já em $t=1$ as contagens em coincidência C_{MES} recuperam a visibilidade enquanto C_{PS} , não. Em $t=1/2$ as contagens em coincidência C_{MES} são constantes, não apresentam oscilação e nem visibilidade diferente de zero, o que mostra a ortogonalidade entre os estados de dois-qubits que interferem. Ortogonalidade semelhante ocorre entre os estados de dois qubits-PS em $t=0$. Nota-se, ainda, que as visibilidades diferentes de zero apresentam a mesma estrutura matemática.

Na Figura 11 estão os gráficos das expressões de coincidência da Tabela 4 com $p=0$ (sem ruído de amplitude) e $p=1$ (ruído máximo) para os estados MES e PS. Com exceção do estado produto de dois-qubits, todos os demais estados manifestam o deslocamento de fase $2\pi/d$ mesmo sob 100% de ruído de amplitude amortecida. Se compararmos os gráficos da Figura 8 com os da Figura 11 notamos que as visibilidades desta última são significativamente maiores que as da Figura 8 para atenuação de 50% ($e^{-0,69} = 0,501$) e que a fase $2\pi/d$ se manifesta no estado dois-qubits MES sob 100% de ruído.

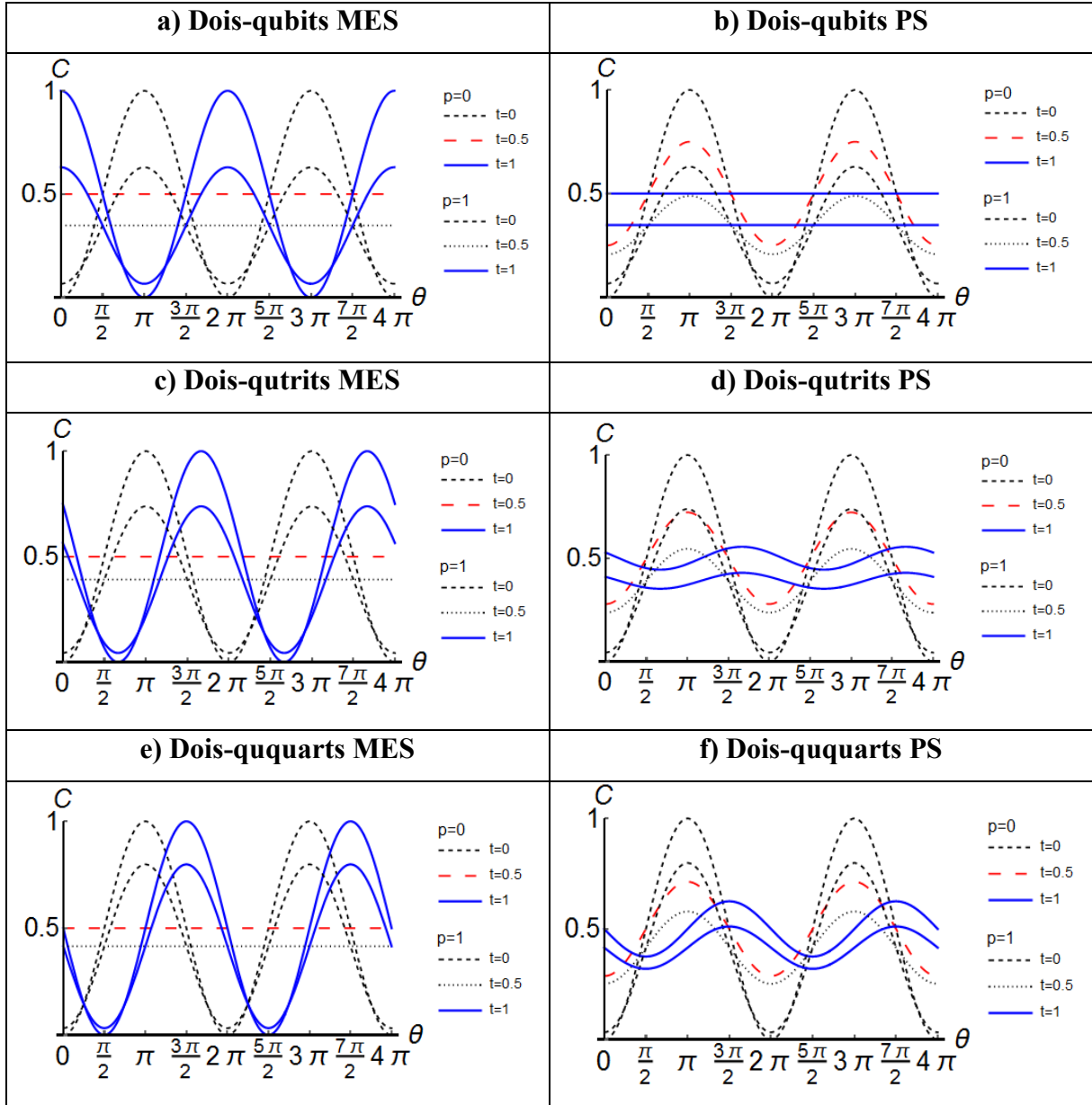


Figura 11: Gráficos teóricos da contagem em coincidência do experimento para medida da FTF sob ruído de amplitude amortecida. O parâmetro θ segue da atuação dos PZTs da Figura 7. Os primeiros rótulos da legenda ($t = 0, 1/2$ e 1) correspondem aos casos sem ruído ($p=0$) e os demais aos casos com ruído de 100% ($p=1$), cujas curvas possuem visibilidades menores quando comparadas com os casos $p=0$. O deslocamento $2\pi/d$ entre os padrões de coincidências pontilhados ($t=0$) e azuis ($t=1$) sobrevive ao mais intenso ruído de amplitude, com exceção do estado produto dois-qubits.

Um questionamento natural a ser levantado é se a alteração do parâmetro de atenuação Ω influenciará no deslocamento de fase de $2\pi/d$ e, também, de que maneira a visibilidade é afetada. Na Tabela 5 estão as expressões dependentes de Ω obtidas da Eq. (74) com 100% de ruído de amplitude ($p=1$) e suas respectivas visibilidades via Eq. (72). Vemos que em todos os

casos o deslocamento de fase de $2\pi/d$ independe do valor de Ω . Novamente, o padrão de interferência do estado produto de dois-qubits não manifesta o deslocamento de fase.

Contagem de coincidências normalizada na saída do interferômetro (Figura 7) sob ruído de amplitude com intensidade de 100% em função do parâmetro Ω.				
$d = 2$: dois-qubits				
t	$C_{MES}(\Omega)$	$v_{MES}(\Omega)$	$C_{PS}(\Omega)$	$v_{PS}(\Omega)$
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} [a_1(\Omega) - a_2(\Omega) \cos(\theta)]$ $a_1(\Omega) = 1 + 2e^{2\Omega} + 5e^{4\Omega}$ $a_2(\Omega) = 2e^{2\Omega}(1 + e^\Omega)^2$	$\frac{a_2(\Omega)}{a_1(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} [a_1(\Omega) - a_2(\Omega) \cos(\theta)]$	$\frac{a_2(\Omega)}{a_1(\Omega)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} \left[a_1(\Omega) - \frac{a_2(\Omega)}{2} \cos(\theta) \right]$	$\frac{1}{2} \frac{a_2(\Omega)}{a_1(\Omega)}$
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} [a_1(\Omega) - a_2(\Omega) \cos(\theta - \pi)]$	$\frac{a_2(\Omega)}{a_1(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0
$d = 3$: dois-quítrits				
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} [a_3(\Omega) - a_4(\Omega) \cos(\theta)]$ $a_3(\Omega) = 1 + 4e^{2\Omega} + 13e^{4\Omega}$ $a_4(\Omega) = 2e^{2\Omega}(1 + 2e^\Omega)^2$	$\frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} [a_3(\Omega) - a_4(\Omega) \cos(\theta)]$	$\frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} a_3(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{4}{9} a_4(\Omega) \cos(\theta) \right]$	$\frac{4}{9} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - a_4(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$	$\frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{1}{9} a_4(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$	$\frac{1}{9} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
$d = 4$: dois-ququarts				
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} [a_5(\Omega) - a_6(\Omega) \cos(\theta)]$ $a_5(\Omega) = 1 + 6e^{2\Omega} + 25e^{4\Omega}$ $a_6(\Omega) = 2e^{2\Omega}(1 + 3e^\Omega)^2$	$\frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} [a_5(\Omega) - a_6(\Omega) \cos(\theta)]$	$\frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} a_5(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{c_1}{18} a_6(\Omega) \cos(\theta) \right]$ $c_1 = 400.000/52069 \approx 23/3$	$\frac{c_1}{18} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - a_6(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$	$\frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{1}{4} a_6(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$	$\frac{1}{4} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$

Tabela 5: As expressões $C_{MES}(\Omega)$ e $C_{PS}(\Omega)$ são as contagens em coincidências normalizadas dadas pela expressão mostrada na Eq. (74) aplicada à dois-quidits MES e PS com dimensões 2, 3 e 4 [Eq. (70)] mediante as operações locais $SU(d)$ da Eq. (67) no experimento proposto para medir a FTF sob ruído de amplitude amortecida dependente do parâmetro de atenuação Ω . Atribuindo valores para Ω em tais expressões obtemos os padrões de interferência em termos do parâmetro θ dos PZTs da Figura 7, correspondentes aos valores paramétricos 0, 1/2 e 1 de $t \in [0,1]$ da evolução $SU(d)$. Os dois-quidits estão em um ambiente com ruído de amplitude amortecida de máxima intensidade ($p=1$). As visibilidades de $C_{MES}(\Omega)$ e $C_{PS}(\Omega)$, simbolizadas respectivamente por v_{MES} e v_{PS} , foram determinadas pela Eq. (72).

Analisando a Tabela 5, vemos que, com exceção do estado produto de dois-qubits, o deslocamento de fase de $2\pi/d$ se faz presente em todas expressões de $t=1$ em relação à $t=0$ e as expressões das visibilidades são análogas. A partir das expressões da Tabela 5 podemos fazer um gráfico das visibilidades para compararmos os efeitos do ruído na FTF para os estados de diferentes dimensões, bem como visualizar os valores da visibilidade no cenário limite em que o ruído atue a 100% e com absorção absoluta do sinal no caminho em que o ruído estiver atuando. A absorção absoluta é equivalente ao bloqueio da fenda em questão, ou seja, as fendas (caminhos possíveis para os fótons) serão bloqueadas ($\Omega_{\text{máximo}} \geq 5$) aleatoriamente, uma por vez. Observe a diminuição lenta da visibilidade na Figura 12 (a) e Figura 12 (b) em função de Ω , o que denota uma **robustez da coerência** destes estados de maiores dimensões em relação ao ruído de amplitude.

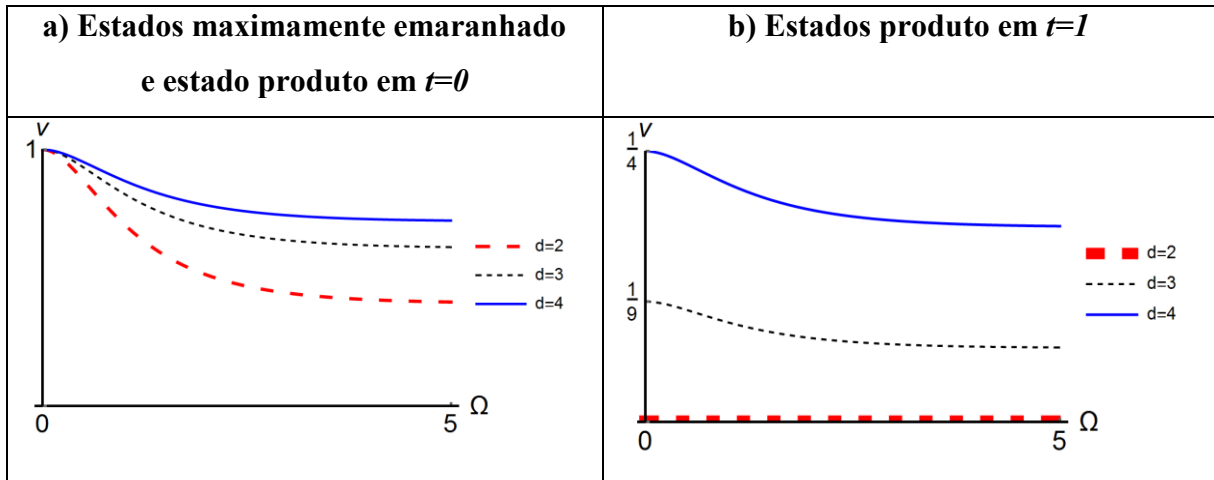


Figura 12: Curvas das expressões de visibilidades (v) da Tabela 5 em função do parâmetro de atenuação Ω do ruído de amplitude amortecida para dois-qubits ($d=2, 3$, ou 4) nos instante $t=0$ e $t=1$ da evolução $SU(d)$. Em (a), temos as curvas dos dois-qubits-MES (em $t=0$ e $t=1$) e dos dois-qubits-PS em $t=0$. Em (b), temos as curvas relativas ao dois-qubits-PS em $t=1$. A resiliência das visibilidades em (a) e (b) é um aspecto notável da robustez da coerência dos estados de dois qubits em relação ao ruído de amplitude.

4.4 RESULTADOS NUMÉRICOS DA FTF SOB APLICAÇÃO SIMULTÂNEA DOS RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA⁴⁰

Mediante aos resultados anteriores, é natural que o deslocamento $2\pi/d$ se manifeste também quando aplicado simultaneamente os ruídos de fase e de amplitude amortecida. O que nos resta saber é como será o comportamento da visibilidade dos padrões de coincidência em função do parâmetro de atenuação Ω mediante aplicação simultânea dos ruídos de defasagem e de amplitude, ambos a 100% de intensidade – pior dos cenários tratados acima. Aplicando esses critérios, calculando as expressões dependentes de Ω tiradas da Eq. (64) e suas respectivas visibilidades, notamos que os resultados expostas na Tabela 6 tem a mesma estrutura das expressões da Tabela 5, com exceção de $d=2$, o que já era esperado a partir dos resultados da Tabela 3 e Figura 8. A visibilidade para o estado de dois qutrits ($d=3$) na Tabela 6 é $1/9$ da respectiva visibilidade na Tabela 5, enquanto para o estado de dois ququarts ($d=4$), a relação é de $1/4$. Analisando a Tabela 6, vemos que, com exceção do estado de dois-qubits MES e PS, as visibilidades dos padrões de interferência para $t=0$ e $t=1$ são diferentes de zero, o que nos garante que o deslocamento $2\pi/d$ se fará presente nos padrões de interferência correspondentes.

⁴⁰ O mapa de um ruído atua independente do mapa do outro ruído, ou seja, não há sincronia entre os mapas.

Contagem de coincidências normalizada na saída do interferômetro (Figura 7) sob ruídos de defasagem e de amplitude, ambos com intensidades de 100%, em função do parâmetro de atenuação Ω .				
$d = 2$: dois-qubit				
t	$C_{MES}(\Omega)$	$v_{MES}(\Omega)$	$C_{PS}(\Omega)$	$v_{PS}(\Omega)$
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$ $a_1(\Omega) = 1 + 2e^{2\Omega} + 5e^{4\Omega}$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{16} a_1(\Omega)$	0
$d = 3$: dois-qutrits				
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{1}{9} a_4(\Omega) \cos(\theta) \right]$ $a_3(\Omega) = 1 + 4e^{2\Omega} + 13e^{4\Omega}$ $a_4(\Omega) = 2e^{2\Omega}(1 + 2e^\Omega)^2$	$\frac{1}{9} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{1}{9} a_4(\Omega) \cos(\theta) \right]$	$\frac{1}{9} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} a_3(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{4}{81} a_4(\Omega) \cos(\theta) \right]$	$\frac{4}{81} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{1}{9} a_4(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$	$\frac{1}{9} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{36} \left[a_3(\Omega) - \frac{1}{81} a_4(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$	$\frac{1}{81} \frac{a_4(\Omega)}{a_3(\Omega)}$
$d = 4$: dois-ququarts				
0	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{1}{4} a_6(\Omega) \cos(\theta) \right]$ $a_5(\Omega) = 1 + 6e^{2\Omega} + 25e^{4\Omega}$ $a_6(\Omega) = 2e^{2\Omega}(1 + 3e^\Omega)^2$	$\frac{1}{4} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} [a_5(\Omega) - a_6(\Omega) \cos(\theta)]$	$\frac{1}{4} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} a_5(\Omega)$	0	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{c_1}{4 * 18} a_6(\Omega) \cos(\theta) \right]$ $c_1 = 400.000/52069 \approx 23/3$	$\frac{c_1}{4 * 18} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$
1	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{1}{4} a_6(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$	$\frac{1}{4} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$	$\frac{e^{-4\Omega}}{64} \left[a_5(\Omega) - \frac{1}{16} a_6(\Omega) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$	$\frac{1}{16} \frac{a_6(\Omega)}{a_5(\Omega)}$

Tabela 6: As expressões $C_{MES}(\Omega)$ e $C_{PS}(\Omega)$ são as contagens em coincidências normalizadas dadas pela equação Eq. (64) aplicada à dois-qutrits MES e PS com dimensões 2, 3 e 4 [Eq. (70)] mediante as operações locais $SU(d)$ da Eq. (67) do experimento para medir a FTF sob ruídos de defasagem e de amplitude amortecida dependente do parâmetro de atenuação Ω . Atribuindo valores para Ω em tais expressões obtemos os padrões de interferência em função do parâmetro θ dos PZTs da Figura 7, correspondentes aos valores paramétricos 0, 1/2 e 1 de $t \in [0,1]$, da evolução $SU(d)$. Os dois-qutrits estão em um ambiente com ruídos de defasagem e de amplitude amortecida com máximas intensidades ($p=1$) em relação ao operador identidade. As visibilidades de $C_{MES}(\Omega)$ e $C_{PS}(\Omega)$, simbolizadas respectivamente por v_{MES} e v_{PS} , foram determinadas pela Eq. (72).

Na Figura 13 estão os gráficos das visibilidades dos padrões de interferência descritos pelas expressões da Tabela 6. Ao compararmos estes gráficos notamos que as curvas da Figura 13 (a) não partem mais de 1 como nos gráficos da Figura 12, mas sim das frações de $1/9$ e $1/4$ para $d=3$ e $d=4$, respectivamente, de modo a serem idênticas às curvas da Figura 12 (b). A menos de uma constante multiplicadora, as curvas de Figura 13 (b) são idênticas às curvas da Figura 13 (a).

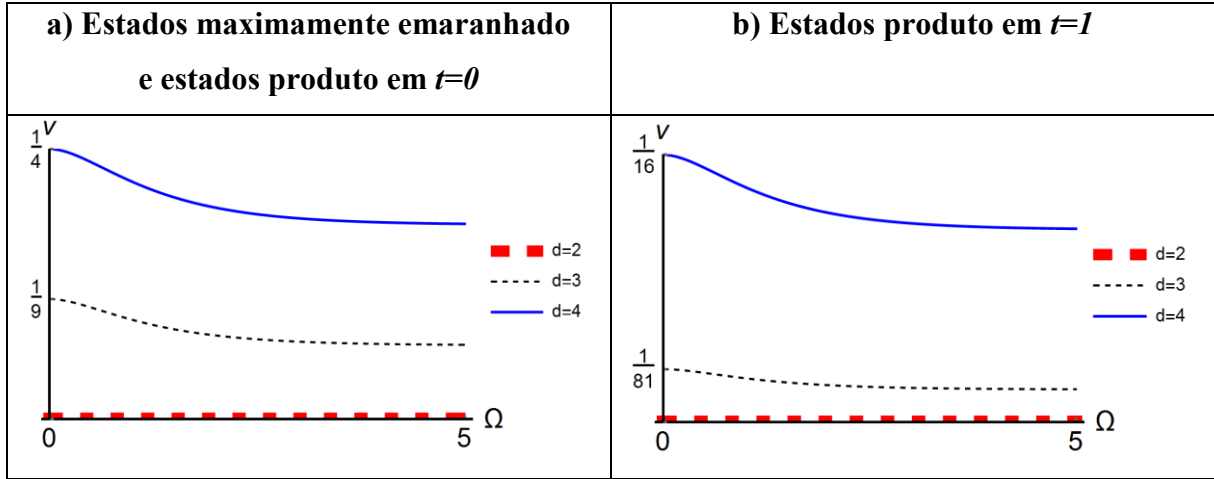


Figura 13: Curvas das expressões de visibilidade (v) da Tabela 6 em função do parâmetro de atenuação do ruído de amplitude amortecida para dois-qudits ($d=2, 3$, ou 4) nos instantes $t=0$ e $t=1$ da evolução $SU(d)$. Em (a) temos as curvas dos dois-qudits-MES (em $t=0$ e $t=1$) e dos dois-qudits-PS em $t=0$. Em (b) temos as curvas relativas ao dois-qudits-PS em $t=1$. As curvas do gráfico (b) são iguais às curvas dos gráficos em (a) multiplicadas por $1/4$ para $d=4$ e $1/9$ para $d=3$. Já as curvas em (a) são idênticas às curvas da Figura 12 (b).

Finalizamos, aqui, a apresentação das expressões teóricas dos padrões de interferência, suas visibilidades e gráficos previstos para o experimento para medida da FTF via interferômetros Mach-Zehnder triplo composto com PBS, na presença de ruído de defasagem e amplitude. No próximo capítulo, demonstraremos que os dois Mach-Zehnder internos (simétricos à montagem) são dispensáveis para a realização desse experimento.

CAPÍTULO 5

SIMPLIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS

Os resultados apresentados aqui podem ser obtidos a partir de uma montagem experimental mais simples que a apresentada na Figura 7. O uso dos dois Mach-Zehnder é pedagógico, mas eles podem ser excluídos do Mach-Zehnder triplo composto com PBSs. Teoricamente, essas mudanças não terão grandes impactos, mas o uso do Mach-Zehnder com PBS apenas é melhor na implementação experimental por ser mais estável em relação ao caso em que estão os dois Mach-Zehnder. Para tanto, precisamos utilizar uma propriedade inerente dos SLM e substituir os PZT. Os SLM atuam em apenas uma única polarização, a depender da orientação do equipamento e os PZT podem ser substituídos por um deslocador de fase (*Phase shift*) que mudará o Operador de Varredura (Eq. (29)) por um novo operador de varredura que acrescenta fase entre a componente H e V. Além dessa simplificação, podemos efetuar as operações $SU(d)$ e o ruído de fase com um único SLM, de modo a economizarmos o número de equipamentos a ser usado. Vejamos a seguir os detalhes de tais simplificações.

Primeiramente, dadas as matrizes de transformação das placas de onda HWP (H) e QWP(Q)

$$\begin{aligned} H(\theta) &= e^{-i\pi/2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ Q(\varphi) &= e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + i \sin^2 \varphi & (1-i) \sin \varphi \cos \varphi \\ (1-i) \sin \varphi \cos \varphi & i \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (75)$$

podemos construir dois tipos de deslocadores de fase (Ph-Sh) da forma abaixo e, respectivamente, umas das suas formas equivalentes com a eliminação da fase isolada:

$$\begin{aligned} Ph_Sh_1 &= Q(45^\circ)H(\theta + \pi/4)Q(45^\circ) = - \begin{pmatrix} e^{-i2\theta} & 0 \\ 0 & e^{i2\theta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-i4\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Ph_Sh_2 &= Q(45^\circ)H(\theta)H(\pi/2)Q(45^\circ) = -i \begin{pmatrix} 0 & e^{-i2\theta} \\ e^{i2\theta} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{i4\theta} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (76)$$

Com isso definimos um novo operador de varredura (*scan*), utilizando o operador de deslocamento de fase que substituirá o antigo operador de varredura construído com PZT, Eq. 16. Usando a primeira matriz mostrada na Eq. (29), o novo operador de varredura será:

$$S = \left(e^{-i4\theta_s} \delta_H^\alpha I_{Caminho}^S \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| \right) \otimes \left(e^{-i4\theta_I} \delta_H^\beta I_{Caminho}^I \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \right) \therefore S^\dagger S = I, \quad (77)$$

Com a substituição do PZTs pelo deslocador de fase e com o fato dos SLM atuarem somente em uma componente da polarização, ou H ou V, já podemos eliminar os dois Mach-Zehnders de modo que os feixes do sinal e do Idler passem diretamente (sem uso de PBS) pelos SML e pelos deslocadores de fase e vá diretamente para o PBS final pertencente ao setor de medição

da montagem experimental. Antes de reapresentarmos o novo setup, vejamos outra simplificação importante.

Na Figura 14 vemos a sequência de SLM que aplicam as operações $SU(d)$ e as defasagens. O SLM-FTF acrescenta as fases da Tabela 2 por meio da acréscimo da Escala de Cinza (EC) na tela de cristal líquido do SLM, que permanece fixo (em uma única $EC(FTF)$) durante toda a construção da curva experimental. Na sequência, o SLM-NOISE acrescenta uma fase aleatória no caminho do fóton variando aleatoriamente a $EC(Dinâmica do Ruído)$ da tela do SLM. A depender da intensidade do ruído, a aleatoriedade que implementamos influencia o estado de forma diferente, por exemplo, com o ruído de 25% teremos a atuação dos operadores de Kraus 25% do tempo de aquisição e nos outros 75% teremos a identidade. Explicando em detalhe o caso da implementação do operador de defasagem: os 25% do tempo de aquisição são divididos igualmente em d intervalos de tempo para a atuação dos operadores de Kraus K_i ($i = 1, 2, 3 \dots d$), isto é, uma fase de π é acrescentada em um dos modos de fenda (caminho i) e zero nos outros $d - 1$ modos de fenda (caminhos $j \neq i$). Desta forma, podemos transferir esse acréscimo de fase aleatória para o SLM-FTF, assim passando a ter um único modulador espacial físico que implementará as operações unitárias $SU(d)$ e o ruído, ou seja um SLM-FTF+RUÍDO. Com isso, cada frame das máscaras dos SLM-FTF+RUÍDO terá uma parte constante (FTF) e outra parte, uma função aleatória de p (RUÍDO), de forma que a escala de cinza de cada máscara do SLM resultará de $EC(Máscara) = EC(Dinâmica do Ruído) + EC(FTF)$. Teoricamente, as fases $e^{\pm i\pi}$ produzem o mesmo efeito, -1 . Porém, experimentalmente, temos que diferir, pois $e^{+i\pi}$ aumentará a escala de cinza do SLM e $e^{-i\pi}$ diminuirá ⁴¹. Como a escala de cinza do SLM é finita, ao usarmos um único SLM teremos que nos adaptar quanto ao acréscimo/decrécimo da fase sobre a máscara da FTF, de modo que, nos caminhos mais curtos, acrescentaremos fase $e^{+i\pi}$ e, conseqüentemente, aumentaremos a escala de cinza no SLM, já nos caminhos mais longos acrescentaremos fase $e^{-i\pi}$ de modo a diminuir a escala de cinza (Figura 14).

⁴¹ Aumentar e diminuir a escala de cinza é equivalente a aumentar ou diminuir o caminho ótico percorrido pelo fóton transmitido por uma determinada fenda até o detector. Então usaremos a expressão aumentar ou diminuir o “caminho definido por cada fenda” para melhor explicar os efeitos advindos da variação da escala de cinza do SLM que implica na alteração do índice de refração do material e, portanto, modifica localmente a fase do feixe refletido pelo SLM ou transmitido através do SLM.

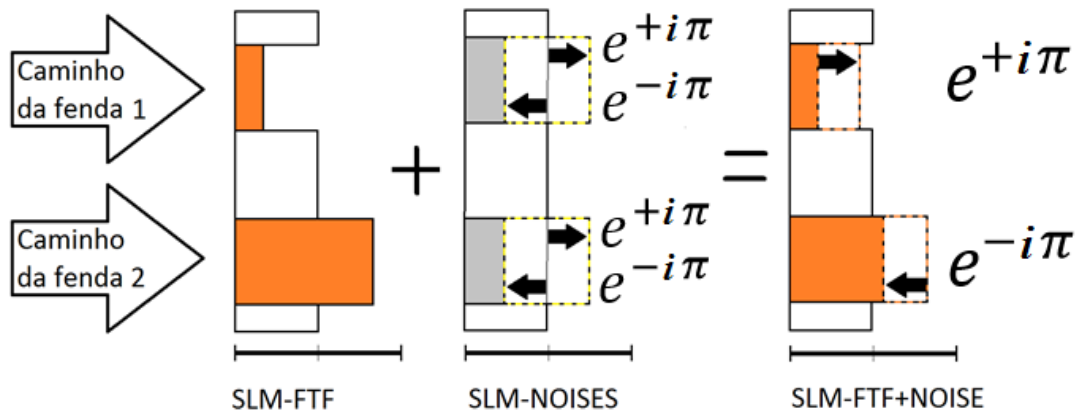


Figura 14: Procedimento experimental para realizarmos a operação topológica e acréscimo de ruído com um único SLM a partir da combinação do SLM-FTF que implementa as fases topológica com o SLM-NOISES que implementa as fases do ruído. A resultante dessa combinação é expressa e implementada por SLM-FT+NOISES.

Agora, de posse do novo operador de varredura construído com deslocador de fase e com a junção moduladores espaciais em um único (SLM-FASE+RUÍDO), podemos definitivamente substituir a proposta experimental mostrada na Figura 7 pela montagem da Figura 15, sem nem uma perda significativa.

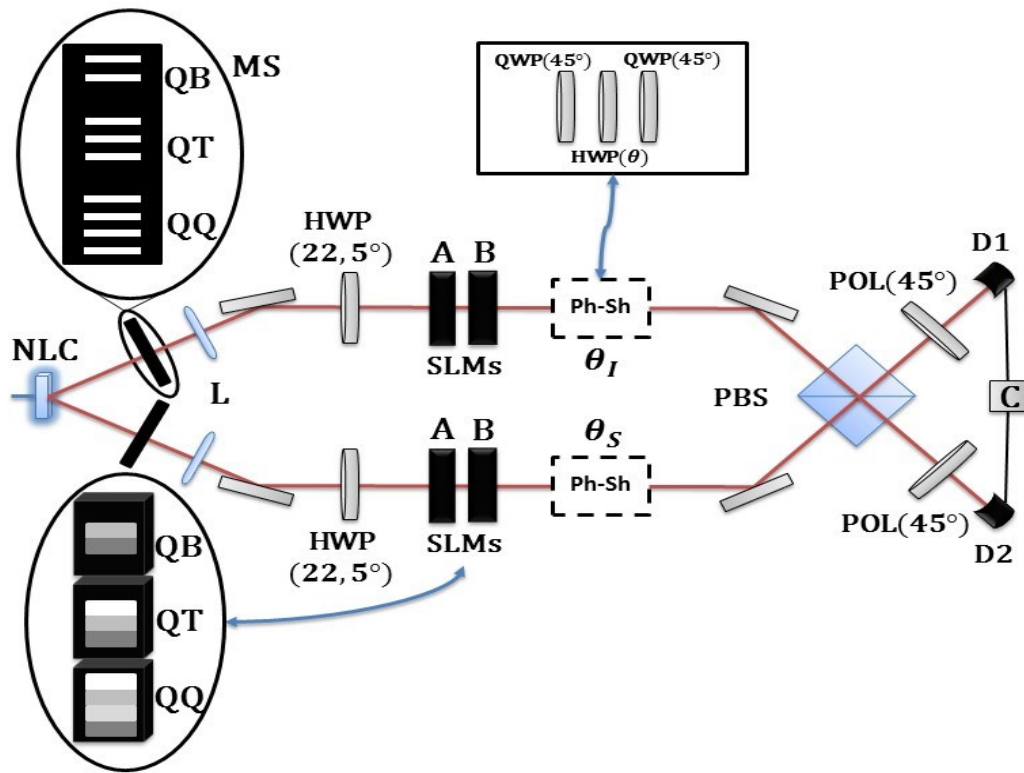


Figura 15: A Proposta experimental simplificada usa apenas um interferômetro de Hong-Ou-Mandel com PBS cujas saídas contêm polarizadores à 45° para medir a FTF via padrão de interferência detectado na contagem de coincidências. Identificamos a interferência de dois fótons com a polarização usada como grau de liberdade auxiliar. Os elementos ópticos usados são: NLC, cristal não-linear; MS (“multiple slits”), fendas múltiplas de dimensões 2 (Qubit), 3 (Qutrit) e 4 (Ququart); L, lentes que projetam a imagem da MS no SLMs, como mostra o diagrama circulado de baixo; HWP: placa de meia onda; SLM, modulador espacial de luz; Ph-Sh (“phase shift”), deslocador de fase θ_j ($j = I, S$) entre as componentes H e V do estado; PBS, divisor de feixe por polarização; POL, polarizador; e D_l ($l = 1, 2$) detectores de único-fóton [33].

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTO DA FTF VIA HIPEREMARANHAMENTO ⁴².

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO-EXPERIMENTAL

Na secção 6.1, apresentaremos uma nova proposta experimental com fótons hiperemaranhados para medir a FTF ($2\pi/d$) sob ruídos de defasagem e de amplitude amortecida aplicados em dois qubits, dois qutrits e dois ququarts maximamente emaranhados. A fonte hiperemaranhada, na qual os pares de fótons estão emaranhados em polarização e caminhos, permite realizar a medida da FTF no grau de liberdade de caminhos sem o uso de interferômetro. O emaranhamento de polarização dos fótons é utilizado como grau de liberdade auxiliar e nos permite detectar a interferência entre os estados de caminhos de dois qudits sem e com a evolução $SU(d)$, requisitos necessários para a medida da FTF. Isso é um avanço experimental, dado que se conhecia somente o método interferométrico de caminhos para medir a FTF. O hiperemaranhamento sem interferometria de caminhos torna o experimento para medir a FTF mais estável em relação aos demais experimento conhecidos até o presente momento [27, 32]. Entretanto, veremos que o uso somente do hiperemaranhamento no processo de medidas da FTF nos impõe uma restrição quanto à evolução do estado, limitação essa não verificada nas medidas por interferometria de caminhos, como ficará evidente ao final do 6.1. Essa restrição pode ser eliminada se efetuarmos medidas utilizando tanto a fonte de dois fótons em estado hiperemaranhado quanto o interferômetro Mach-Zehnder triplo com PBSs. Deste modo, obtemos os benefícios tanto do hiperemaranhamento quanto da interferometria de caminhos. Embora haja vantagens no uso simultâneo do hiperemaranhamento e da interferometria de caminhos, optaremos pelo uso somente do hiperemaranhamento para evidenciar os seus avanços no processo de medição, bem como as limitações. À semelhança do 0 em que aplicamos os ruídos de defasagem e de amplitude amortecida no estado, descreveremos na secção 6.1 todos os cálculos teóricos com tais ruídos e, no 0, apresentaremos os resultados experimentais que obtivemos com a fonte hiperemaranhada sob ruído de defasagem.

⁴² Notificamos que os principais resultados desta tese de doutorado serão expostos neste capítulo e que parte dos resultados experimentais foram publicados na Referência [10].

6.1 EXPERIMENTO PARA MEDIR A FTF COM FONTE DE FÓTONS HIPEREMARANHADOS SOB RUÍDOS DE DEFASAGEM E DE AMPLITUDE AMORTECIDA

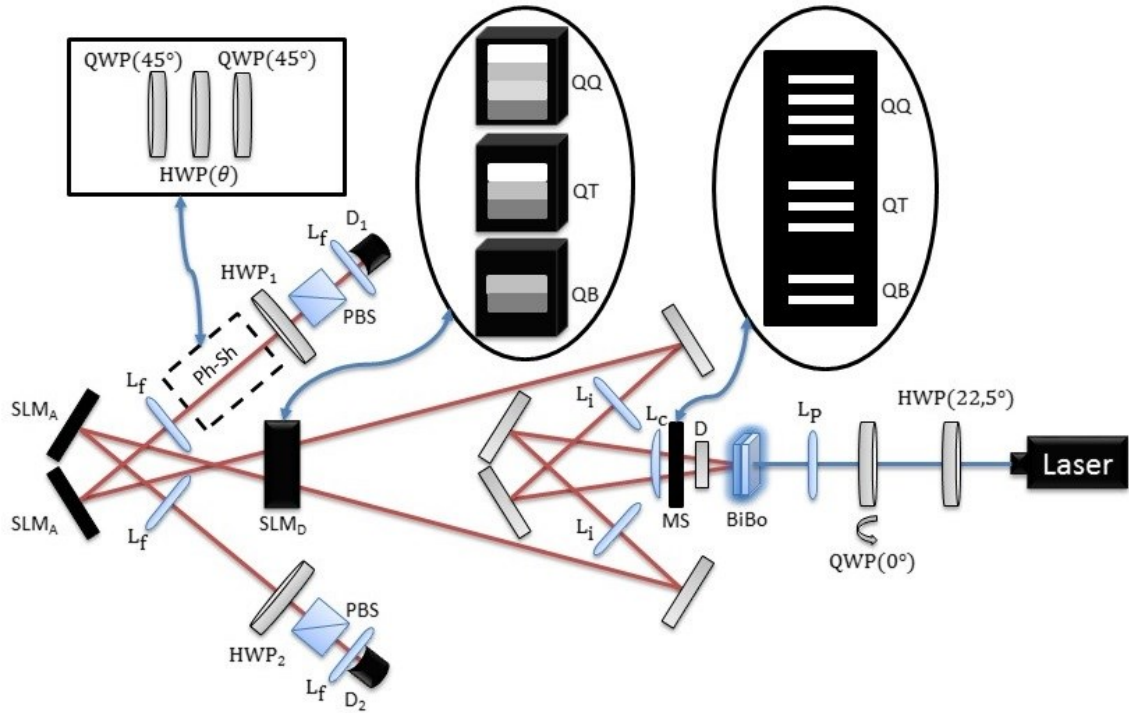


Figura 16: Montagem experimental para medir a FTF sob ruídos de defasagem e de amplitude amortecida via hiperemaranhamento. Os elementos ópticos usados são : Laser contínuo de 355 nm; HWP, placa de meia onda; QWP, placa de um quarto de onda, fixada a 0° que pode se inclinar em relação ao eixo de incidência para gerar um fator $e^{i\lambda}$ entre as componentes horizontal e vertical do laser; L_p , lente do feixe de bombeamento (*pump*) cujo foco coincide com o plano da MS; BiBO, dois cristais não-lineares tipo I com eixos óticos ortogonais (Borato de Bismuto) e 0,5 mm de espessura cada um, gerando um feixe não-colinear de fótons emaranhados em polarização em 710 nm; D, espelho dicróico; MS, fenda múltipla, que define a dimensão dos estados de caminho (qubit, qutrit e ququart); L_c , lente cilíndrica que amplia a imagem da MS na direção perpendicular ao plano da mesa (vertical); L_i , lentes esféricas que, em conjunto com a L_c , formam a imagem ampliada da MS sobre o SLM; SLM_j ($j=D, A$), moduladores espaciais de luz que implementam as evoluções $SU(d)$ e os ruídos de defasagem (D) e amplitude (A); L_f , associação de lentes após o SLM e antes do detector, cujo foco efetivo está no detector; Ph-Sh (deslocador de fase), introduz uma fase θ na polarização H em relação à V, ou vice e versa; D_j ($j = 1,2$), detectores de único-fóton.

Considere um feixe de laser de ultravioleta polarizado a 45° após atravessar uma placa de meia onda (HWP) a $22,5^\circ$ e uma placa de um quarto de onda (QWP) a 0° . Este feixe de laser,

comumente chamado de feixe de bombeamento, produz pares de fótons através da conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC) ao atravessar dois cristais BiBO de tipo I com eixos óticos ortogonais (0,5 mm de espessura cada cristal), gerando o estado emaranhado em polarização [52]:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + e^{i\lambda}|V, V\rangle), \quad (78)$$

onde o fator de fase $e^{i\lambda}$ é o mesmo fator que existe entre as componentes de polarização do feixe de laser de bombeamento. Graças à birrefringência da QWP, podemos ajustá-la em relação ao eixo z de propagação do feixe de modo a termos um ângulo de incidência não-normal à placa QWP, assim, produzindo $e^{i\lambda} = -1$ no estado. Após a MS o estado de caminho na notação de Einstein passará a ser

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha_{mn}}{\sqrt{2}}(|mH, nH\rangle - |mV, nV\rangle), \quad (79)$$

que pode ser reescrito compactamente como

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha_{mn}^\mu}{\sqrt{2}}|m\mu, n\mu\rangle; (\mu, \nu = H, V; \alpha_{mn}^H = -\alpha_{mn}^V = \alpha_{mn}), \quad (80)$$

onde, para o estado maximamente emaranhado, temos $\alpha_{mn} = 1$. Para inserirmos ruídos, temos que usar a descrição do experimento através do formalismo de operador densidade do estado como se segue

$$\rho^{SI} = \frac{1}{2} \alpha_{mn}^\mu \alpha_{m'n'}^{\mu'*} |m\mu, n\mu\rangle\langle m'\mu', n'\mu'|. \quad (81)$$

Considere, agora, que os SLM de defasagem (D) e de absorção (C, *Amplitude cushioning*) transformem o estado de caminho do fóton quando a sua polarização é H e apliquem o operador identidade no estado de caminho quando a polarização de fóton é V. Os SLMs de defasagem implementarão tanto as transformações $SU(d)$ e de ruído de defasagem, como exposto na Figura 14. Assim, as operações unitárias $SU(d)$, ruído de defasagem, ruído de amplitude e de varreduras podem ser expressas da seguinte forma, respectivamente:

$$\begin{aligned} T &= (e^{i\xi_p \delta_H^\alpha} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)^S \otimes (e^{i\chi_q \delta_H^\beta} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)^I; \\ D_{gh} &= (e^{i\pi \delta_p^g \delta_H^\alpha} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)^S \otimes (e^{i\pi \delta_q^h \delta_H^\beta} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)^I; \\ C_{ij} &= (e^{-\Omega_\alpha^i \delta_p^i} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|)^S \otimes (e^{-\Omega_\beta^j \delta_q^j} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)^I, \\ &(g, h, i, j, = 0, \dots, d), (p, q = 1, \dots, d); \\ S &= (e^{-i4\theta \delta_H^\alpha} I_{Caminho}^S \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|) \otimes (I_{Caminho}^I \otimes I_{Polarização}^I); \end{aligned} \quad (82)$$

onde, agora, teremos somente um deslocamento de fase (θ) atuando no fóton signal, $\Omega_H \neq 0$ e $\Omega_V = 0$. Efetuando as operações na sequência do experimento ($\varepsilon = \varepsilon_S \circ \varepsilon_C \circ \varepsilon_D \circ \varepsilon_T(\rho^{SI})$), tal como já apresentado no CAPÍTULO 3 (sessão 3.3.5), obtemos o estado exatamente antes dos PBS próximos aos detectores:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\rho^{SI}) &= p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{m\mu n\mu}^{ghij} F_{m'\mu' n'\mu'}^{ghij*} |m\mu, n\mu\rangle \langle m'\mu', n'\mu'| \\
 F_{m\mu n\mu}^{ghij} &= \frac{\alpha_{mn}^\mu}{\sqrt{2}} c_{m\mu n\mu}^{ghij} f_{m\mu n\mu} ; F_{m'\mu' n'\mu'}^{ghij*} = \frac{\alpha_{m'n'}^{\mu'*}}{\sqrt{2}} c_{m'\mu' n'\mu'}^{ghij*} f_{m'\mu' n'\mu'}^* \\
 c_{m\mu n\mu}^{ghij} &= (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)\delta_H^\mu} e^{-i(\Omega_\mu^i \delta_m^i + \Omega_\mu^j \delta_n^j)} \\
 f_{m\mu n\mu} &= e^{i(\xi_m + \chi_n - 4\theta)\delta_H^\mu} \\
 c_{m'\mu' n'\mu'}^{ghij*} &= (-1)^{(\delta_{m'}^g + \delta_{n'}^h)\delta_H^{\mu'}} e^{-i(\Omega_{\mu'}^i \delta_{m'}^i + \Omega_{\mu'}^j \delta_{n'}^j)} \\
 f_{m'\mu' n'\mu'}^* &= e^{-i(\xi_{m'} + \chi_{n'} - 4\theta)\delta_H^{\mu'}}
 \end{aligned} \tag{83}$$

onde os elementos “ f_s ” contêm os termos correspondente à medida da FTF e os elementos “ c_s ” os termos dos ruídos de defasagem e amplitude [16]. A combinação da placa HWP e do PBS antes do detector têm o mesmo efeito de um polarizador, de modo que os operadores de campo positivo dos detectores são

$$\begin{aligned}
 E_1^+ &= (E_{SH}^+ + E_{SV}^+)/\sqrt{2} \\
 E_2^+ &= (E_{IH}^+ + E_{IV}^+)/\sqrt{2}
 \end{aligned} \tag{84}$$

tais que da multiplicação

$$E_2^+ E_1^+ = [E_{SH}^+ E_{IH}^+ + E_{SV}^+ E_{IH}^+ + E_{SV}^+ E_{SH}^+ + E_{IV}^+ E_{IV}^+]/2, \tag{85}$$

já podemos constatar que os termos $E_{SV}^+ E_{IH}^+$ e $E_{SV}^+ E_{SH}^+$ produzirão resultado zero já que o estado da Eq. (83), sob o qual será aplicado estes operadores, não possui componentes com polarizações cruzadas. Com este fato, aplicando os operadores campo elétrico (Eq. (84)) no operador densidade que descreve o estado dos fótons (Eq. (83)), encontramos

$$E_2^+ E_1^+ F_{m\mu n\mu}^{ghij} |m\mu, n\mu\rangle = (F_{mHnH}^{ghij} E_{SH}^+ E_{IH}^+ |mH, nH\rangle + F_{mVnV}^{ghij} E_{SV}^+ E_{IV}^+ |mV, nV\rangle)/2 \tag{86}$$

que é semelhante à expressão da Eq. (58), com as diferenças de definições e de estado inicial. Aplicando as Eqs. (51) e (53) na Eq. (86), encontramos

$$\begin{aligned}
 E_2^+ E_1^+ F_{m\mu n\mu}^{ghij} |m\mu, n\mu\rangle &= |vac\rangle \\
 &\times (F_{mHnH}^{ghij} \delta_{pm} \delta_{HH} \delta_{qn} \delta_{HH} \eta_p^2 \eta_q^1 + F_{mVnV}^{ghij} \delta_{pm} \delta_{VV} \delta_{qn} \delta_{VV} \eta_p^2 \eta_q^1)/2 \\
 &= |vac\rangle (F_{mHnH}^{ghij} \eta_m^2 \eta_n^1 + F_{mVnV}^{ghij} \eta_m^2 \eta_n^1)
 \end{aligned} \tag{87}$$

O termo $\eta_m^2 \eta_n^1$ nos diz que o fóton Signal (m) será detectado somente pelo detector 2 e o fóton Idler (n) somente pelo detector 1. Para que ocorra a permutação $\eta_n^2 \eta_m^1$, tal como na Eq. (60),

devemos efetuar a medida via interferometria, o que nos possibilitaria efetuar evoluções mais complexas nas quais $(\xi_m + \chi_n) \neq (\xi_n + \chi_m)$. Para tanto, podemos modificar o aparato direcionando os fótons Signal e Idler antes dos detectores para um único PBS de modo a formar um interferômetro Mach-Zehnder composto com PBS e, assim, obtermos a possibilidade das evoluções mais complexas. Além da permutação entre m e n no último termo da Eq. (87), teremos a troca do seu sinal, como podemos constatar pelas Eqs. (57) e (58), onde temos $-F_{mVnV}^{ghij}$, sinal que altera a fase inicial dos padrões de interferência, fato que não traz consequência efetiva na medida da FTF dado que todos os padrões de interferência para t diferentes deslocarão igualmente. Devido aos ganhos com o uso da fonte de estados hiperemaranhados para a medida, escolhemos esta montagem para a realização da medida da FTF (Figura 16). Feita essa observação, voltemos aos cálculos. Como $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \beta \text{Tr}[E_2^+ E_1^+ (\varepsilon(\rho^{SI})) E_1^- E_2^-]$, a partir da Eq. (87) encontramos

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} + F_{mHnH}^{ghij} F_{m'Vn'V}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{m'Hn'H}^{ghij*}) \eta_m^2 \eta_n^1 \eta_m^{2*} \eta_n^{1*} / 4 \quad (88)$$

onde β é a eficiência total de detecção. Ao usarmos a ortogonalidade dos modos de fenda na integração espacial da contagem de coincidências, Eq. (52),

$$C \equiv \int d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ C = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} + F_{mHnH}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*}) \delta_{mm'} \delta_{nn'} / 4, \quad (89)$$

obtemos

$$C = \beta p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} + F_{mHnH}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} + F_{mVnV}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*}) / 4. \quad (90)$$

Lembrando da Eq. (80) que $\alpha_{mn}^H = -\alpha_{mn}^V = \alpha_{mn}$, usando $\Omega_H \neq 0$ e $\Omega_V = 0$ nos elementos da Eq. (83), reduzimos os termos da contagem de Coincidência na Eq. (90) [APÊNDICE C], que passa a ser

$$C = \beta \frac{1}{8} \left[1 + \alpha_{mn} \alpha_{mn}^* p_{ij}^{(C)} (s_{mn}^{ij})^2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (r_{mn}^{ghij} + r_{mn}^{ghij*}) \right];$$

$$s_{mn}^{ij} = e^{-(\Omega_H^i \delta_m^i + \Omega_H^j \delta_n^j)};$$

$$r_{mn}^{ghij} = (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} s_{mn}^{ij} e^{i(\xi_m + \chi_n - 4\theta)};$$

$$r_{mn}^{ghij*} = (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} s_{mn}^{ij} e^{-i(\xi_m + \chi_n - 4\theta)}.$$

(91)

Essencialmente, as Eqs. (64) e (91) se diferem pela ausência da permutação de m e n em r_{mn}^{ghij*} devido à eliminação da interferometria no processo de medida e, ainda, pelo fator de

normalização de $4/\beta$ que passa a ser $2/\beta$, cujo significado é o aumento da contagem de fótons devido ao uso de uma fonte hiperemaranhada, quando comparado com o processo de interferometria da Figura 7. Se usarmos o hiperemaranhamento e a interferometria no processo de medida, teremos o ganho na contagem de fótons e também a permutação, que aumenta a variedade de evoluções possíveis incluindo a situação onde $\xi_m + \chi_n \neq \xi_n + \chi_m$, tendo, como consequência, a alteração do sinal do último termo da Eq. (91), que acrescentará uma fase em todos os padrões de interferência que efetivamente nada altera na medida da FTF. Os cálculos numéricos da Eq. (91) terão os mesmos resultados aos da Eq. (64), dado que os exemplos numéricos aplicados à Eq. (64) foram do tipo $\xi_m + \chi_n = \xi_n + \chi_m$. No entanto, a inclusão de um interferômetro Mach-Zehnder composto com PBS aumenta a complexidade do experimento, diminuindo a contagem e a visibilidade em uma situação real.

CAPÍTULO 7

MEDIDAS DA FTF COM FONTE DE FÓTONS HIPEREMARANHADOS SOB RUÍDOS DE DEFASAGEM E AMPLITUDE

7.1 PREPARAÇÃO DO ESTADO

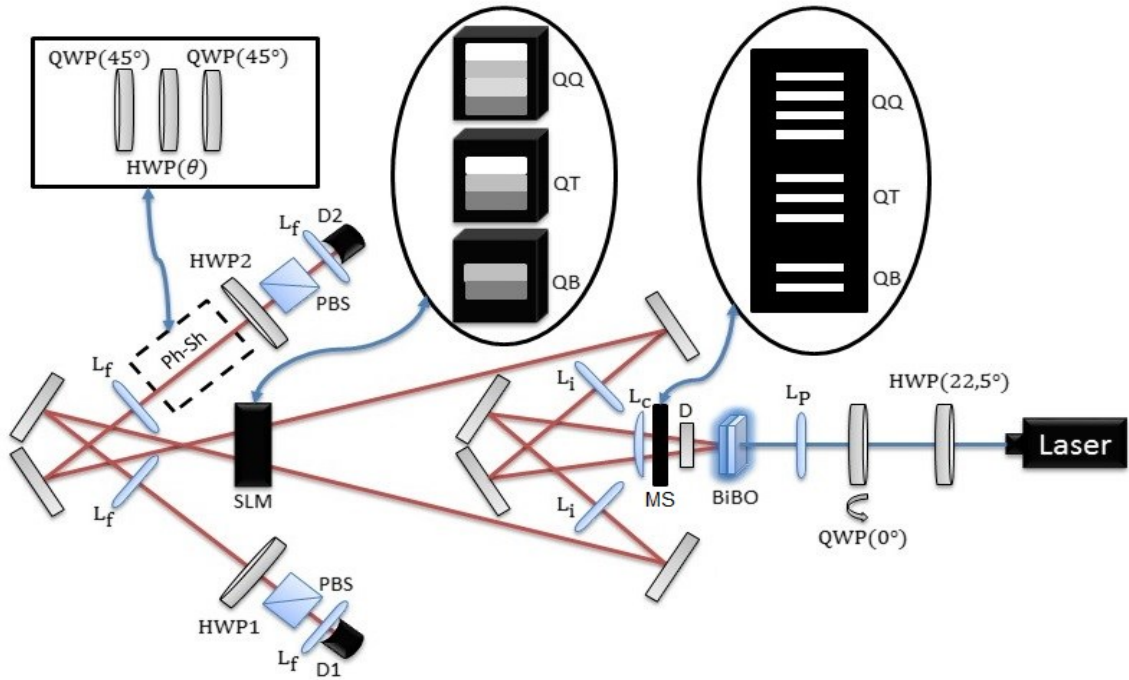


Figura 17: Montagem experimental para medir a FTF sob ruído de defasagem. Laser contínuo de 355nm; HWP, placa de meia onda; QWP, placa de um quarto de onda, fixada a 0° que pode se inclinar em relação ao eixo de incidência para gerar um fator de fase de $e^{i\lambda}$ entre as componentes horizontal e vertical do laser; L_p , lente do feixe de bombeamento (*pump*) cujo foco coincide com o plano da MS; BiBO, dois cristais não-lineares tipo I com eixos óticos ortogonais (Borato de Bismuto) e 0,5mm de espessura cada um, gerando um feixe não-colinear de fótons emaranhados em polarização em 710nm; D, espelho dicróico; MS, fenda múltipla, que define a dimensão dos estados de caminho (qubit, qutrit e ququart); L_c , lente cilíndrica que amplia a imagem da MS na direção perpendicular ao plano da mesa (vertical); L_i , lentes esféricas que, em conjunto com a L_c , formam a imagem ampliada da MS sobre o SLM; SLM_j ($j=D, A$), moduladores espaciais de luz que implementam as evoluções $SU(d)$ e os ruídos de defasagem (D) e amplitude (A); L_f , associação de lentes após o SLM e antes do detector, cujo foco efetivo está no detector; Ph-Sh (deslocador de fase), introduz uma fase θ na polarização H em relação a V, ou vice e versa; D_j ($j = 1,2$), detectores de único-fóton que possuem um filtro passa-banda centrado em 710nm cuja largura de banda é 10nm.

Os resultados experimentais correspondem somente à implementação do ruído de defasagem (*dephasing*), pois não temos SLM que implemente o ruído de amplitude amortecida. Para tanto, os dois SLM_A da Figura 16 serão substituídos por espelhos. Com a aplicação de somente o ruído de defasagem, a Eq. (91) se reduz a

$$C = \frac{1}{4} \left[2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{gh}^{(D)} \left(r_{mn}^{gh(D)} + r_{mn}^{gh*(D)} \right) \right]$$

$$r_{mn}^{gh(D)} = (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_l))]} \quad (92)$$

$$r_{mn}^{gh*(D)} = (-1)^{(\delta_n^g + \delta_m^h)} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_l))]}$$

que é igual à Eq. (71) quando as evoluções são do tipo $\xi_m + \chi_n = \xi_n + \chi_m$, a exemplo da Eq. (68) que implementaremos experimentalmente. Pretendemos gerar um estado experimental próximo do estado MES da Eq. (70), efetuar as operações da Eq. (68) com ruído de defasagem por meio do SLM e comprovar que a FTF é robusta ao ruído. O SLM de transmissão utilizado nesse experimento é o *Meadowlark-D3128* que atua somente na polarização H quando posicionado como mostrado na Figura 18. A tela de cristal líquido do SLM será dividida em 2 regiões, metade para transmissão dos fótons Signal e a outra metade, para o Idler, como se pode ver na Figura 17.



Figura 18: À esquerda está a ilustração do SLM da Meadowlark - D3128 e à direita a tela do seu programa de controle, pelo qual podemos alterar a escala de cinza de cada pixel, promovendo a variação da refração do cristal líquido para somente a componente H da luz incidente, o que provoca um atraso da componente H em relação à V (ou vice e versa) do feixe de luz que o atravessa. As operações SU(d) e o ruído de defasagem serão implementados por este SLM como explicado na Figura 14.

Para verificar o emaranhamento em polarização do estado realizamos o teste de Bell descrito na Referência [53] e os nossos resultados estão na Figura 19. Esse teste foi realizado

no plano de Fourier da imagem da tela do SLM antes e após instalarmos a MS, sendo observada pouca variação entre os dois resultados. Primeiro, programamos o SLM e posicionamos o deslocador de fase para não realizarem nenhuma operação nos estados de caminho e polarização dos fótons. Em seguida posicionamos a HWP 2 em um ângulo da base de Bell (0° ; 45° ; $22,5^\circ$; $-22,5^\circ$) e girando HWP 1 em passos de 5° , obtemos um padrão de interferência na contagem de coincidência para cada um dos ângulos da Base de Bell. Os padrões 0° e 45° são ortogonais entre si (deslocamento de fase relativa de π), já os padrões $22,5^\circ$ e $-22,5^\circ$, também ortogonais entre si, podem manifestar-se de duas maneiras: (a) sobrepostos aos padrões 0° e 45° se o estado não for MES; (b) deslocados de $\pm\pi/2$ em relação aos padrões 0° e 45° se o estado for MES. As medidas da Figura 19 nos apresentam padrões de interferência de um estado MES em polarização antes e depois da instalação e alinhamento da MS. Para obtermos tal resultado, foi crucial ajustar a inclinação da QWP em relação à normal, a fim de termos $e^{i\lambda} = -1$ na Eq. (78). Acreditamos que os padrões $22,5^\circ$ e $-22,5^\circ$ não possuem a mesma visibilidade dos padrões 0° e 45° devido ao fato dos filtros de interferência na entrada do detector não terem largura de banda estreitas o suficiente para melhorar esse resultado (filtro passa-banda de 10nm). Apesar disso, nós prosseguimos com as medidas e obtemos resultados satisfatórios. Todos os demais testes e a medida da FTF serão realizados com as placas HWP 1 e 2 a $22,5^\circ$.

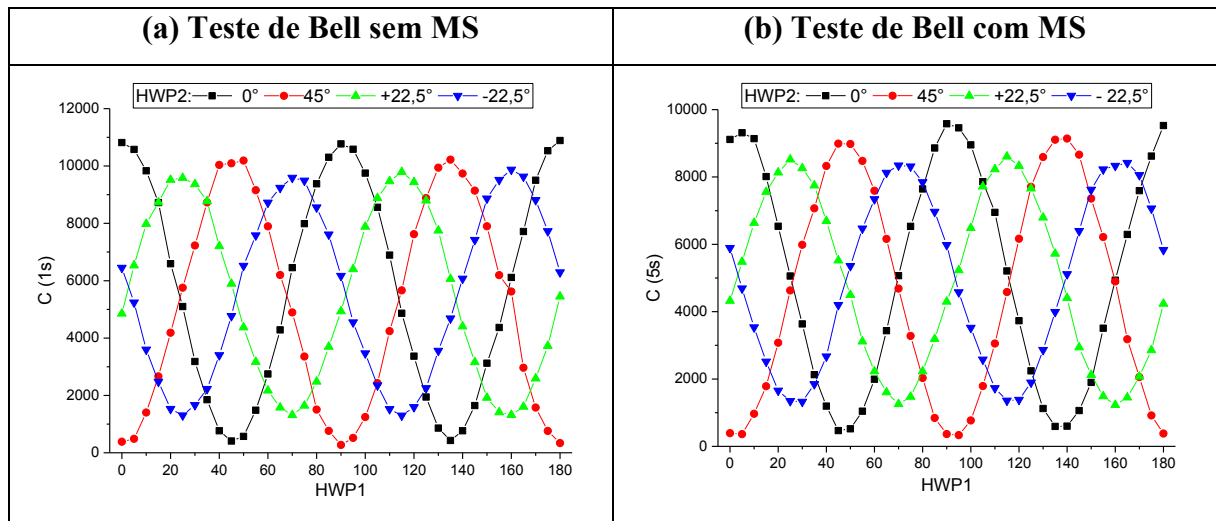


Figura 19: Medidas do Teste de Bell para verificar o emaranhamento em polarização do estado Eq. (78) a partir do padrão de interferência da contagem de coincidências, C . O teste de Bell foi realizado no plano de Fourier da tela do SLM. Em (a) temos as medidas sem a fenda múltipla no setup da Figura 17 e em (b) as medida com a MS instalada e alinhada. Para efetuar as medidas, a placa HWP2 da Figura 17 é posicionada em um dos ângulos da base de Bell enquanto giramos a HWP1 em intervalos de 5° , para construir cada um dos padrões de interferência.

Para garantir que tais operações do SLM sejam endereçadas ao caminho a ser atuado, de modo que não haja superposição entre os caminhos dos fótons no estado de fendas, realizamos dois procedimentos: (a) com um laser de alinhamento, verificamos a imagem da MS antes e depois do SLM (Figura 20 (a)); (b) efetuamos o teste de correlação espacial entre os pares de fótons gêmeos próximo à tela do SLM, (Figura 20 (b)). Este teste nos dá uma ideia do emaranhamento presente no estado de caminhos dos dois fótons (estado de dois qudits transversal), pois a medida foi feita no plano de Fourier da tela do SLM. Assim, com um único teste, captamos a correlação espacial e a imagem do feixe na tela do SLM sem precisar trocar as lentes L_f de foco efetivo f_e nos detectores (teste de Fourier a partir de padrões condicionais) para a lente $2f_e$, própria para medir a imagem da tela do SLM. Portanto, esse teste ***Fourier-Imagem*** nos mostra a correlação presente entre os estados da base computacional de caminhos dos fótons. Para realizar tal teste, logo à frente do SLM, colocamos uma fenda (largura 0,1 mm) selecionando um modo de fenda de um dos fótons (signal) e no outro braço varremos em passos de 0,1 mm uma outra fenda (largura 0,1 mm) perpendicularmente a direção de propagação do outro fóton (idler). O perfil do feixe nesse teste de correlação segue abaixo na Figura 20 para o caso de dois ququarts. As cores diferentes correspondem aos feixes diferentes captados pela fenda seletora. Notamos que somente o deixo verde da MS apresenta uma correlação indesejada significativa. O desequilíbrio entre os picos se deve à dificuldade de acoplar igualmente todos os modos de fenda na fibra óptica. Realizamos os mesmos procedimentos para dois qutrits e dois qubits, mas omitimos tais medidas, pois não houve alterações significativas que justifique mais gráficos. Ressaltamos que, por conveniência experimental, os estados de dois qutrits e dois qubits foram preparados a partir do bloqueio de uma ou duas fendas laterais da imagem da MS de 4 fendas diante da tela do SLM. Esse procedimento simplificou o procedimento experimental que utilizávamos anteriormente, que consistia na substituição da MS com 4 fendas pela MS com 3 fendas e ou pela MS com 2 fendas, o que, por consequência, exigia o trabalho de realinhá-las na montagem experimental. Para assegurarmos que o bloqueio de fendas laterais como forma de preparar estados de dois qudits de dimensões diferentes em nada comprometeria o experimento, nós realizamos novamente os testes de Bell e de correlação, os quais nos confirmaram que tal procedimento simplificador é confiável.

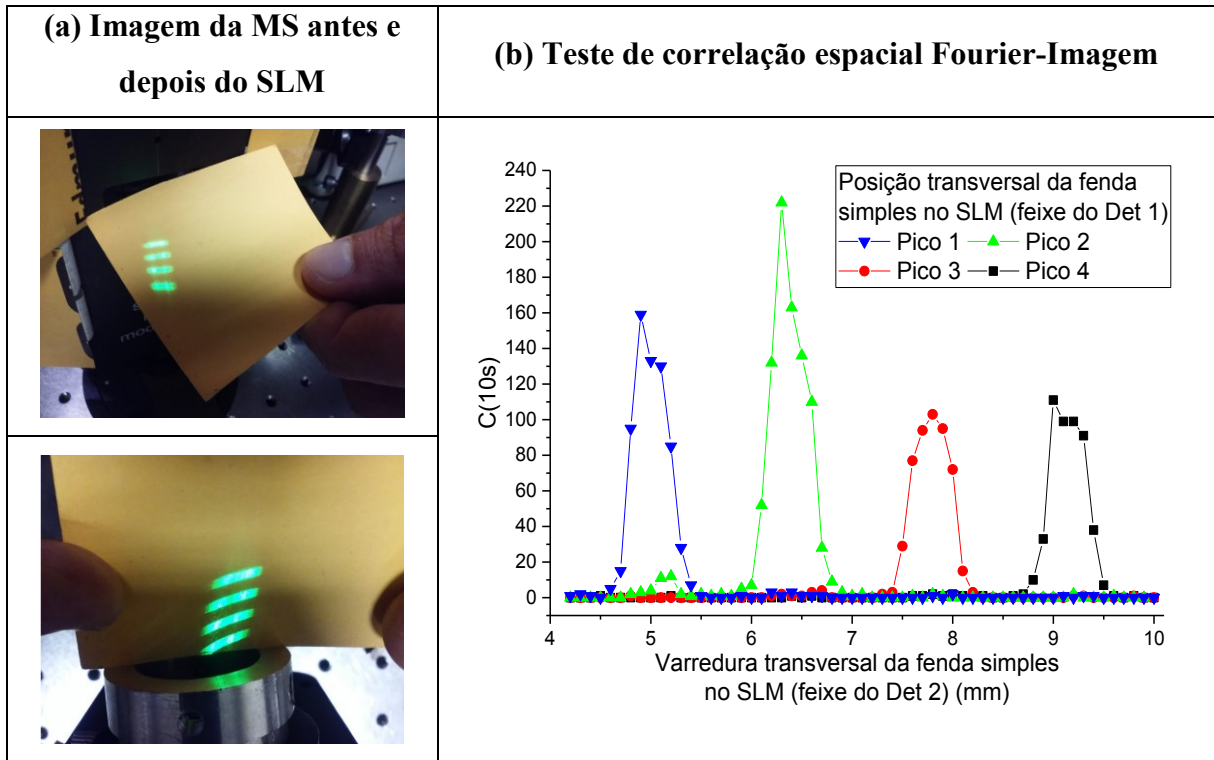


Figura 20: (a) Imagem da MS antes (foto acima) e depois do SLM (foto abaixo). (b) Resultado experimental do teste de correlação espacial realizado diante da tela do SLM por meio de duas fendas simples seletoras dos caminhos, uma para cada braço do experimento mostrado na Figura 17. Antes do SLM, selecionamos um pico de contagem simples no braço 1 posicionando uma das fendas em um dos caminhos e no braço 2, varremos uma outra fenda simples em passos de 0,1 mm, assim detectando as coincidências espaciais entre os caminhos dos pares de fótons nos dois braços do experimento. As medidas foram realizadas no plano de Fourier do SLM, de modo que as cores diferentes correspondem aos feixes diferentes captados pela fenda seletora. Notamos que somente o deixe verde da MS apresenta uma correlação indesejada significativa. O desequilíbrio entre os picos se deve à dificuldade de acoplar igualmente todos os modos de fenda na fibra óptica que conduz os fótons aos detectores.

A partir do cálculo da área de cada pico do teste de correlação da Figura 20 para o qubits, qutrits e ququarts, obtemos $|\alpha_{mn}|^2$ e, assim, determinamos a população das matrizes de coeficientes, como mostra a Figura 21.

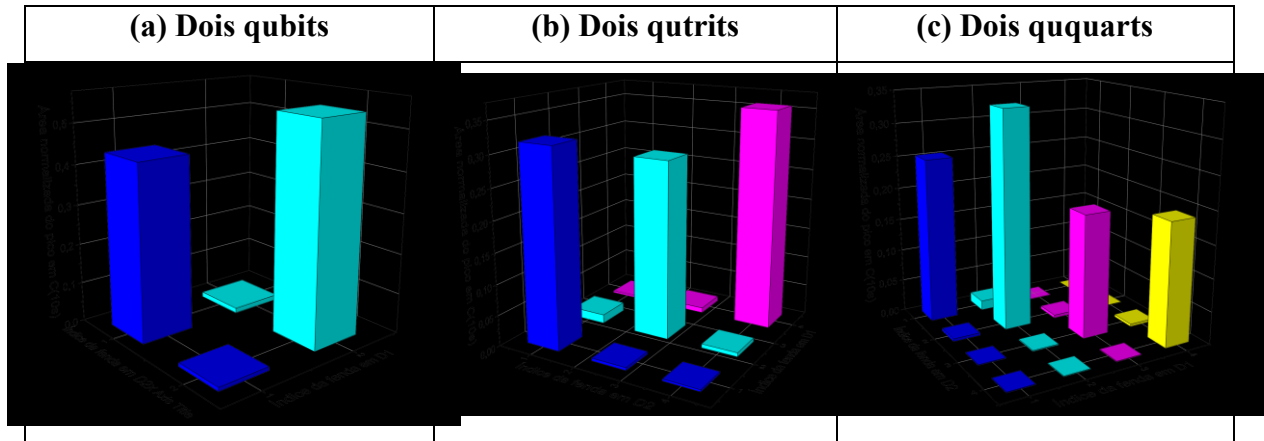


Figura 21: Área abaixo dos picos da Figura 20 do testes *Fourier-Imagem* para verificar a correlação espacial nas variáveis espaciais transversais através da contagem de coincidências correspondente à probabilidade $|\alpha_{mn}|^2$ para cada par de modos de fenda. A soma das probabilidades, ou seja, dos valores dos elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes dos estados medidos é: (a) 0,97 para dois qubits; (b) 0,96 para dois qutrits; (c) 0,96 para dois ququarts. Para o MES, espera-se observar apenas contagens de fótons entre os caminhos definidos por fendas opostas, isto é, apenas a presença de elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes dos estados de qudits e que os seus valores sejam iguais.

Após o teste de correlação da Figura 21, ainda com as fendas múltiplas, efetuamos a calibração do SLM (Figura 18) para os fótons Signal (Det1) e Idler (Det2), como mostrado na Figura 22. Para a calibração, não são usadas as fendas simples necessárias para o teste de correlação. Em cada calibração, enquanto mantínhamos a escala de cinza zero (0V) para um dos feixes (metade da tela do SLM), para o outro feixe acrescentamos a mesma escala de cinza (mesma fase de caminho) em todos os modos de fenda para obtermos as medidas da Figura 22 (a). Repetimos o mesmo procedimento com o outro feixe para obter a Figura 22 (b). Essa variação de escala de cinza é medida em volts no programa do SLM, cuja variação mínima é 0,001V. Então, de 0 a 10 V com passos de 0,01V, observamos nas curvas de calibração que a extensão de fase da escala de cinza para o detector 1 é 419° e para o detector 2 é 434° , aproximadamente. Para realizar o experimento da medida da FTF consideramos como fase zero a escala de cinza de 2,081 V para o detector 1 e 2,41 V para o detector 2, de modo que possamos implementar fases negativas, como as próprias curvas sugerem.

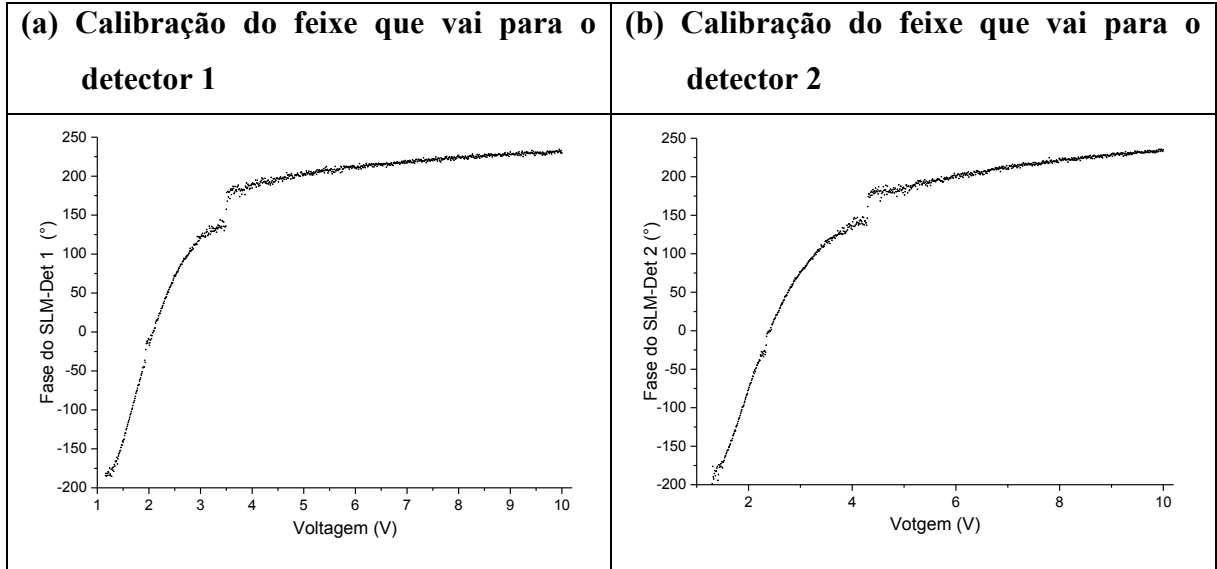


Figura 22: Calibração do SLM para cada um dos braços do experimento da Figura 17. A extensão de fase da escala de cinza para o detector 1 é 419° e para o detector 2 é 434° , aproximadamente. A fase 0° do Det1 está em 2,081V e do Det2 em 2,41 V.

Para os estados de dois qubits, dois qutrits e dois ququarts, as voltagens que determinam as escalas de cinza do SLM e as respectivas fases com as incertezas para as operações $SU(d)$, necessárias para a medida da FTF, estão respectivamente na Tabela 10, Tabela 11 e Tabela 12 [APÊNDICE D]. Cada um dos valores destas tabelas foi determinado dos gráficos da Figura 22. A partir das respectivas incertezas de cada valor nas tabelas, usando os fasores das Figuras presentes na Tabela 1, podemos calcular a incerteza da FTF resultante do SLM. Pelas Figuras da Tabela 1, a FTF é o ângulo entre o fasor resultante final ($Z_R(t = 1) = \sum_{i=1}^d Z_i(t = 1)$) e o fasor resultante inicial ($Z_R(t = 0) = \sum_{i=1}^d Z_i(t = 0)$) de modo que a sua incerteza seja resultado da incerteza dos d fasores para *cada estado de dois qudits de dimensão d* , ou seja,

$$\gamma = \arg\left(\sum_{i=1}^d Z_i(t = 1)\right) - \arg\left(\sum_{i=1}^d Z_i(t = 0)\right);$$

$$\Delta\gamma_{SLM}^2 = [\Delta\arg(Z_R(t = 1))]^2 + [\Delta\arg(Z_R(t = 0))]^2 \quad (93)$$

$$\Delta\gamma_{SLM}^2 = \sum_{m,n=1}^d [(\Delta\xi_m(t = 1))^2 + (\Delta\chi_n(t = 1))^2 + (\Delta\xi_m(t = 0))^2 + (\Delta\chi_n(t = 0))^2],$$

onde Z_i é o fasor de cada uma das fendas, Z_R é o fasor resultante e $\Delta\xi_m$ e $\Delta\chi_n$ serão obtidos pela metade entre dois pontos vizinhos do ângulo desejado nas medidas da Figura 22, tal como extraímos a incerteza da escala de uma régua. Resta determinarmos a incerteza com o ruído de defasagem, que será a soma da incerteza de todos os fasores envolvidos ponderado pelo peso p definido no experimento pelo tempo de atuação. Por exemplo, para um ruído isoponderado de

intensidade p , temos a identidade K_0 aplicado a cada modo de fenda representado por um fasor Z_i durante $(1 - p)$ vezes o tempo de aquisição e os demais operadores de Kraus ($K_{j \neq 0}$) aplicados aos modos de fenda representados por $\bar{Z}_i = -Z_i$ no restante do tempo correspondente ao próprio p . O fasor resultante do ruído também terá uma incerteza associada a ele, que podemos escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\gamma_{SLM}}^2 &= [\Delta \arg(-Z_R(1)) + \Delta \arg(-Z_R(0))]^2 \\ \Delta \overline{\gamma_{SLM}}^2 &= \sum_{m,n=1}^d [(\Delta \overline{\xi_m}(1))^2 + (\Delta \overline{\chi_n}(1))^2 + (\Delta \overline{\xi_m}(0))^2 + (\Delta \overline{\chi_n}(0))^2], \end{aligned} \quad (94)$$

tal que $\overline{\xi_m} = \xi_m \pm 180^\circ$ e $\overline{\chi_n} = \chi_n \pm 180^\circ$ são as fases do ruído de defasagem ($\bar{Z}_i$) que seguem os critérios descritos na Figura 14, cujas incertezas também serão tiradas da Figura 22. Com esses critérios, chegamos ao seguinte resultado para a incerteza da FTF incluindo o ruído de defasagem isoponderado

$$(\Delta \gamma_{SLM}(p))^2 = \left(1 - \frac{p}{d}\right) \Delta \gamma_{SLM}^2 + \left(\frac{p}{d}\right) \Delta \overline{\gamma_{SLM}}^2 \quad (95)$$

onde d é a dimensão do estado. Os valores de $\Delta \gamma_{SLM}^2$ e $\Delta \overline{\gamma_{SLM}}^2$ do qubits, qutrits e ququarts estão no APÊNDICE D organizados, respectivamente, na Tabela 10, Tabela 11 e Tabela 12. Estas tabelas apresentam as fases e voltagens das máscaras do SLM para o ququarts, qutrits e qubits da Figura 21.

Por fim, a incerteza total da FTF terá contribuição também do ajuste dos gráficos e do deslocador de fase, cuja incertezas podem ser obtidas,

$$\begin{aligned} (\Delta \gamma_{Total}(p))^2 &= (\Delta \gamma_{SLM}(p))^2 + \Delta \gamma_{Plot}^2 + \Delta \theta_{PhSh}^2 ; \\ \Delta \theta_{PhSh} &= \pm 4^\circ . \end{aligned} \quad (96)$$

Essa será a incerteza que usaremos nas medidas da FTF apresentadas na próxima sessão de resultados experimentais.

7.2 MEDIDAS DA FTF

A seguir, estão os padrões de interferência em coincidências que detectamos para extrair experimentalmente a FTF para qubits, qutrits e ququarts submetidos ao ruído de defasagem. As operações $SU(d)$ experimentais com e sem ruído de defasagem aplicadas sob os estados da Figura 21 estão no APÊNDICE D [Tabela 10, Tabela 11, Tabela 12]. As tabelas experimentais deste apêndice correspondem à Tabela 1 e à Tabela 2 com e sem ruído de defasagem, Eq. (40). Como os qubits da Figura 21 não são idênticos aos estados MES ideais teórico (Eq. (70)), bem como as operações $SU(d)$ experimentais [APÊNDICE D] não são exatamente idênticas às operações $SU(d)$ teóricas [Tabela 2], logo é esperado que os resultados experimentais sejam aproximados aos teóricos.

A curva de ajuste dos gráficos experimentais mostrados na Tabela 7, Tabela 8 e Tabela 9 é

$$C = A[1 + v \cos(4\theta - w)] \quad (97)$$

cujas a diferença de fase entre o padrão inicial ($t=0$) e final ($t=1$) será obtido pelo módulo da seguinte diferença

$$\gamma_{Experimental} = |w(t=1) - w(t=0)|. \quad (98)$$

Submetemos cada um dos estados da Figura 21 ao ruído de defasagem isoponderado de intensidade de 0%, 50%, 75% e 100%, respectivamente. Os resultados obtidos experimentalmente são condizentes com os resultados numéricos obtidos na seção 4.2 desta tese, que previa a robustez da FTF sob ruído de defasagem, $\gamma_{Teórico} = 2\pi/d$ em todos os casos, mesmo com 100% de ruído de defasagem, com exceção do qubit que apresenta visibilidade zero. Outra previsibilidade é da robustez da coerência vinculada ao comportamento da visibilidade dos padrões de interferência com o aumento do ruído. Vejamos os resultados abaixo.

A Tabela 7 traz as medidas dos qubits da Figura 21. Para as três primeiras intensidades de ruído, o $\gamma_{Experimental}$ variou de $176^\circ \pm 6^\circ$ a $179^\circ \pm 12^\circ$ e para o ruído de 100% o deslocamento é de $19^\circ \pm 28^\circ$. Para cada caso, a visibilidade do padrão $t=1$ é próxima ao do padrão em $t=0$, já as visibilidades de $t=1/2$, embora esperássemos visibilidades zero, variaram de $0,084 \pm 0,007$ a $0,023 \pm 0,006$. E ainda, para ruído de intensidade de 100%, a visibilidade do padrão em $t=0$ e $t=1$ são menores que o de $t=1/2$, o que reforça que estes valores nos parecem condizer com a teoria, cuja previsão para a visibilidade de todos os padrões é zero.

As medidas com os qutrits da Figura 21 estão na Tabela 8. Todos os padrões apresentaram $\gamma_{Experimental}$ que variou de $122^\circ \pm 10^\circ$ a $128^\circ \pm 7^\circ$ e visibilidades dos padrões para $t=0$ próximas às visibilidades dos padrões para $t=1$, mesmo com ruído de intensidade de 100%. Novamente, em $t=1/2$, as visibilidades não foram zero e ficaram entre $0,063 \pm 0,008$ e $0,018 \pm 0,007$.

Já a Tabela 9 traz as medidas com os ququarts da Figura 21. Todos os padrões apresentaram $\gamma_{Experimental}$ variando de $89^\circ \pm 7^\circ$ a $94^\circ \pm 7^\circ$ e visibilidades de $t=0$ e $t=1$ próximas, inclusive com ruído de 100%. Novamente, em $t=1/2$, as visibilidades não foram zero e ficaram entre $0,066 \pm 0,006$ e $0,030 \pm 0,005$. A medida da FTF sob ruído de defasagem e a sua concordância com a previsão teórica de $\gamma_{Teórico} = 2\pi/d$, em todos os casos, confirma a robustez prevista da FTF sob ruído de defasagem. Outro ponto importante, é observar que a evolução cíclica é fechada aplicando operações $SU(d)$ nas duas partes do estado, de forma complementar e, portanto, temos uma operação não local cíclica que leva ao aparecimento da fase topológica fracionária.

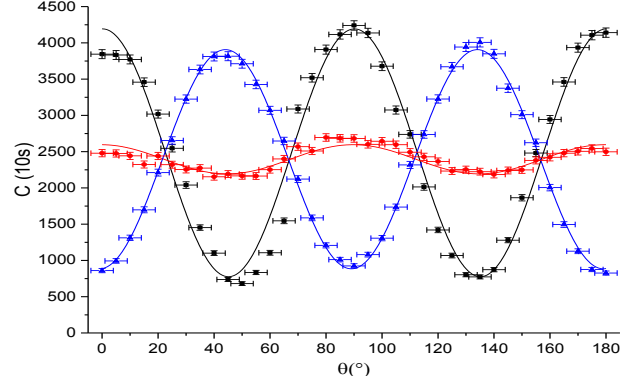
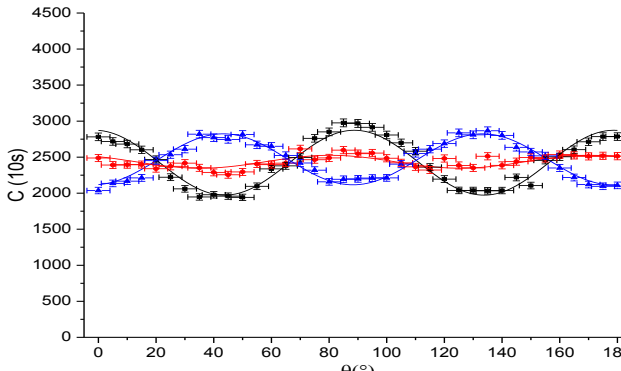
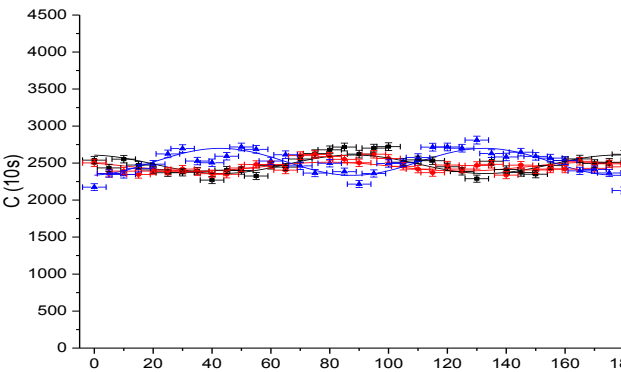
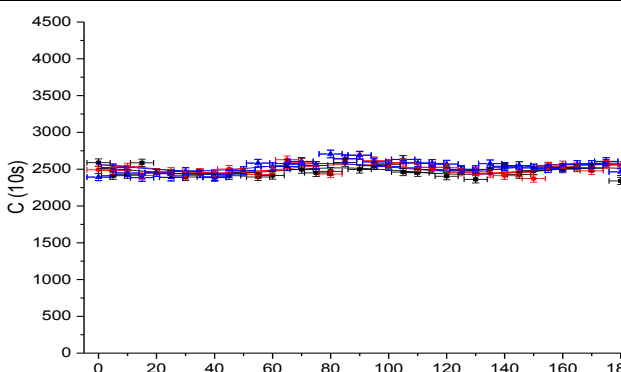
	<table> <tr> <th colspan="2">Qubits à 0% de ruído $\gamma = 176^\circ \pm 6^\circ$</th></tr> <tr> <th>Parâmetros(t)</th><th>Valores $\pm$ Incertezas</th></tr> <tr> <td>A(0)</td><td>2484 ± 40</td></tr> <tr> <td>v(0)</td><td>$0,69 \pm 0,02$</td></tr> <tr> <td>d(0)</td><td>0 ± 2</td></tr> <tr> <td>A(1/2)</td><td>2395 ± 12</td></tr> <tr> <td>v(1/2)</td><td>$0,084 \pm 0,007$</td></tr> <tr> <td>d(1/2)</td><td>-1 ± 5</td></tr> <tr> <td>A(1)</td><td>2396 ± 10</td></tr> <tr> <td>v(1)</td><td>$0,631 \pm 0,006$</td></tr> <tr> <td>d(1)</td><td>$176,3 \pm 0,5$</td></tr> </table>	Qubits à 0% de ruído $\gamma = 176^\circ \pm 6^\circ$		Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas	A(0)	2484 ± 40	v(0)	$0,69 \pm 0,02$	d(0)	0 ± 2	A(1/2)	2395 ± 12	v(1/2)	$0,084 \pm 0,007$	d(1/2)	-1 ± 5	A(1)	2396 ± 10	v(1)	$0,631 \pm 0,006$	d(1)	$176,3 \pm 0,5$
Qubits à 0% de ruído $\gamma = 176^\circ \pm 6^\circ$																							
Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas																						
A(0)	2484 ± 40																						
v(0)	$0,69 \pm 0,02$																						
d(0)	0 ± 2																						
A(1/2)	2395 ± 12																						
v(1/2)	$0,084 \pm 0,007$																						
d(1/2)	-1 ± 5																						
A(1)	2396 ± 10																						
v(1)	$0,631 \pm 0,006$																						
d(1)	$176,3 \pm 0,5$																						
	<table> <tr> <th colspan="2">Qubits à 50% de ruído $\gamma = 178^\circ \pm 7^\circ$</th></tr> <tr> <th>Parâmetros(t)</th><th>Valores $\pm$ Incertezas</th></tr> <tr> <td>A(0)</td><td>2423 ± 13</td></tr> <tr> <td>v(0)</td><td>$0,186 \pm 0,007$</td></tr> <tr> <td>d(0)</td><td>-5 ± 2</td></tr> <tr> <td>A(1/2)</td><td>2436 ± 10</td></tr> <tr> <td>v(1/2)</td><td>$0,037 \pm 0,006$</td></tr> <tr> <td>d(1/2)</td><td>-38 ± 9</td></tr> <tr> <td>A(1)</td><td>2470 ± 9</td></tr> <tr> <td>v(1)</td><td>$0,143 \pm 0,005$</td></tr> <tr> <td>d(1)</td><td>173 ± 2</td></tr> </table>	Qubits à 50% de ruído $\gamma = 178^\circ \pm 7^\circ$		Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas	A(0)	2423 ± 13	v(0)	$0,186 \pm 0,007$	d(0)	-5 ± 2	A(1/2)	2436 ± 10	v(1/2)	$0,037 \pm 0,006$	d(1/2)	-38 ± 9	A(1)	2470 ± 9	v(1)	$0,143 \pm 0,005$	d(1)	173 ± 2
Qubits à 50% de ruído $\gamma = 178^\circ \pm 7^\circ$																							
Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas																						
A(0)	2423 ± 13																						
v(0)	$0,186 \pm 0,007$																						
d(0)	-5 ± 2																						
A(1/2)	2436 ± 10																						
v(1/2)	$0,037 \pm 0,006$																						
d(1/2)	-38 ± 9																						
A(1)	2470 ± 9																						
v(1)	$0,143 \pm 0,005$																						
d(1)	173 ± 2																						
	<table> <tr> <th colspan="2">Qubits à 75% de ruído $\gamma = 179^\circ \pm 12^\circ$</th></tr> <tr> <th>Parâmetros(t)</th><th>Valores $\pm$ Incertezas</th></tr> <tr> <td>A(0)</td><td>2484 ± 13</td></tr> <tr> <td>v(0)</td><td>$0,050 \pm 0,007$</td></tr> <tr> <td>d(0)</td><td>-8 ± 8</td></tr> <tr> <td>A(1/2)</td><td>2452 ± 11</td></tr> <tr> <td>v(1/2)</td><td>$0,024 \pm 0,006$</td></tr> <tr> <td>d(1/2)</td><td>-40 ± 15</td></tr> <tr> <td>A(1)</td><td>2517 ± 15</td></tr> <tr> <td>v(1)</td><td>$0,072 \pm 0,008$</td></tr> <tr> <td>d(1)</td><td>171 ± 7</td></tr> </table>	Qubits à 75% de ruído $\gamma = 179^\circ \pm 12^\circ$		Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas	A(0)	2484 ± 13	v(0)	$0,050 \pm 0,007$	d(0)	-8 ± 8	A(1/2)	2452 ± 11	v(1/2)	$0,024 \pm 0,006$	d(1/2)	-40 ± 15	A(1)	2517 ± 15	v(1)	$0,072 \pm 0,008$	d(1)	171 ± 7
Qubits à 75% de ruído $\gamma = 179^\circ \pm 12^\circ$																							
Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas																						
A(0)	2484 ± 13																						
v(0)	$0,050 \pm 0,007$																						
d(0)	-8 ± 8																						
A(1/2)	2452 ± 11																						
v(1/2)	$0,024 \pm 0,006$																						
d(1/2)	-40 ± 15																						
A(1)	2517 ± 15																						
v(1)	$0,072 \pm 0,008$																						
d(1)	171 ± 7																						
	<table> <tr> <th colspan="2">Qubits à 100% de ruído $\gamma = 19^\circ \pm 28^\circ$</th></tr> <tr> <th>Parâmetros(t)</th><th>Valores $\pm$ Incertezas</th></tr> <tr> <td>A(0)</td><td>2474 ± 10</td></tr> <tr> <td>v(0)</td><td>$0,018 \pm 0,006$</td></tr> <tr> <td>d(0)</td><td>-28 ± 19</td></tr> <tr> <td>A(1/2)</td><td>2506 ± 10</td></tr> <tr> <td>v(1/2)</td><td>$0,023 \pm 0,006$</td></tr> <tr> <td>d(1/2)</td><td>-12 ± 14</td></tr> <tr> <td>A(1)</td><td>2528 ± 12</td></tr> <tr> <td>v(1)</td><td>$0,019 \pm 0,007$</td></tr> <tr> <td>d(1)</td><td>-47 ± 20</td></tr> </table>	Qubits à 100% de ruído $\gamma = 19^\circ \pm 28^\circ$		Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas	A(0)	2474 ± 10	v(0)	$0,018 \pm 0,006$	d(0)	-28 ± 19	A(1/2)	2506 ± 10	v(1/2)	$0,023 \pm 0,006$	d(1/2)	-12 ± 14	A(1)	2528 ± 12	v(1)	$0,019 \pm 0,007$	d(1)	-47 ± 20
Qubits à 100% de ruído $\gamma = 19^\circ \pm 28^\circ$																							
Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas																						
A(0)	2474 ± 10																						
v(0)	$0,018 \pm 0,006$																						
d(0)	-28 ± 19																						
A(1/2)	2506 ± 10																						
v(1/2)	$0,023 \pm 0,006$																						
d(1/2)	-12 ± 14																						
A(1)	2528 ± 12																						
v(1)	$0,019 \pm 0,007$																						
d(1)	-47 ± 20																						

Tabela 7: Dados experimentais dos padrões de interferência (a esquerda) ajustados pela equação $C = A[1 + v \cos(4\theta - d)]$ e usados para medir a FTF de **dois qubits** da Figura 21 sob ruído de defasagem, Eq. (40). A transformação $SU(d)$ no estado correspondente ao instante paramétrico t está na Tabela 2, tirado da Eq.(68), representada na Tabela 1 e cuja correspondência experimental está na Tabela 10 do APÊNDICE D. A FTF é determinada pela Eq. (98) e sua incerteza pela Eq. (96).

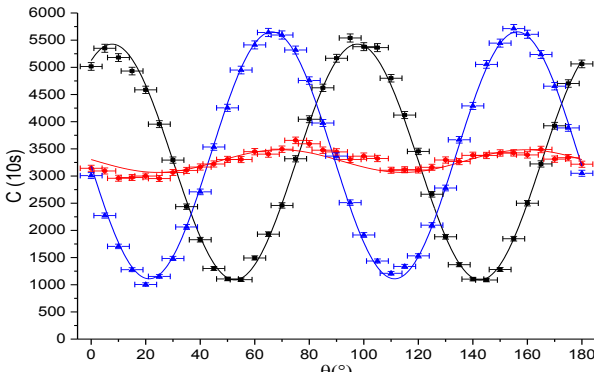
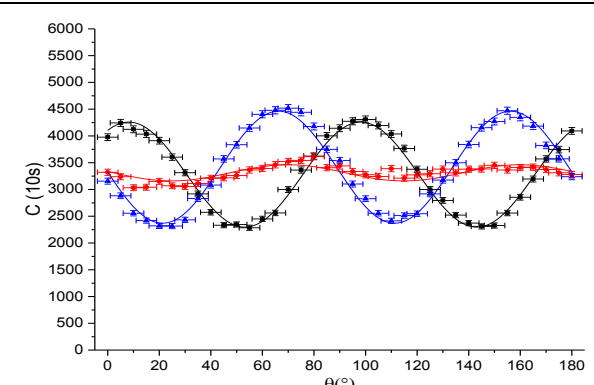
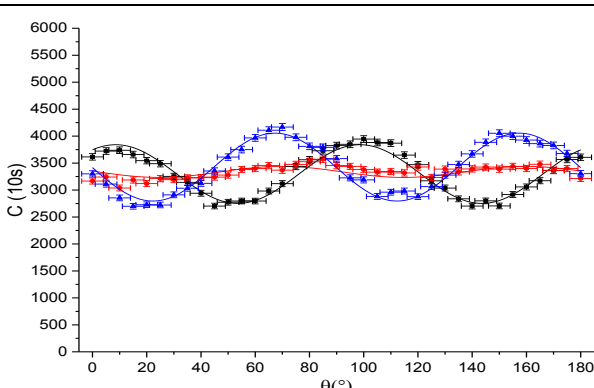
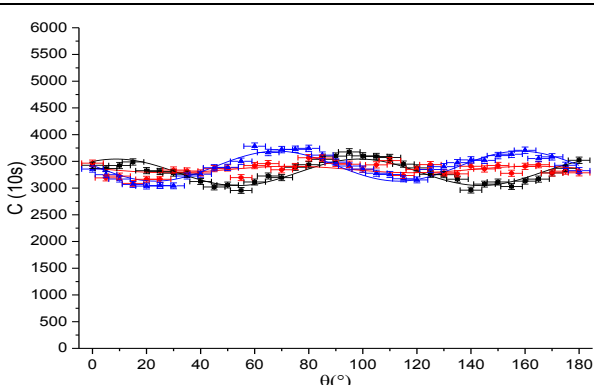
	Qutrits à 0% de ruído $\gamma= 125^\circ \pm 7^\circ$	
	Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas
	A(0)	3258 ± 16
	v(0)	$0,665 \pm 0,008$
	d(0)	$30,6 \pm 0,6$
	A(1/2)	3275 ± 17
	v(1/2)	$0,063 \pm 0,008$
	d(1/2)	278 ± 7
	A(1)	3381 ± 14
	v(1)	$0,672 \pm 0,007$
d(1)	$-94,9 \pm 0,5$	
	Qutrits à 50% de ruído $\gamma= 128^\circ \pm 7^\circ$	
	Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas
	A(0)	3278 ± 13
	v(0)	$0,299 \pm 0,006$
	d(0)	33 ± 1
	A(1/2)	3311 ± 15
	v(1/2)	$0,045 \pm 0,007$
	d(1/2)	-80 ± 8
	A(1)	3416 ± 17
	v(1)	$0,306 \pm 0,007$
d(1)	-95 ± 1	
	Qutrits à 75% de ruído $\gamma= 125^\circ \pm 8^\circ$	
	Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas
	A(0)	3296 ± 16
	v(0)	$0,165 \pm 0,007$
	d(0)	34 ± 2
	A(1/2)	3336 ± 16
	v(1/2)	$0,031 \pm 0,007$
	d(1/2)	-81 ± 13
	A(1)	3426 ± 16
	v(1)	$0,184 \pm 0,007$
d(1)	-91 ± 2	
	Qutrits à 100% de ruído $\gamma= 122^\circ \pm 10^\circ$	
	Parâmetros(t)	Valores $\pm$ Incertezas
	A(0)	3295 ± 14
	v(0)	$0,075 \pm 0,006$
	d(0)	35 ± 5
	A(1/2)	3348 ± 18
	v(1/2)	$0,018 \pm 0,007$
	d(1/2)	-67 ± 23
	A(1)	3410 ± 14
	v(1)	$0,082 \pm 0,006$
d(1)	-87 ± 4	

Tabela 8: Dados experimentais dos padrões de interferência (a esquerda) ajustados pela equação $C = A[1 + v \cos(4\theta - d)]$ e usados para medir a FTF de **dois qutrits** da Figura 21 sob ruído de defasagem, Eq. (40). A transformação $SU(d)$ no estado correspondente ao instante paramétrico t está na Tabela 2, tirada da Eq.(68), representada na Tabela 1 e cuja correspondência experimental está na Tabela 11 do APÊNDICE D. A FTF é determinada pela Eq. (98) e sua incerteza pela Eq. (96).

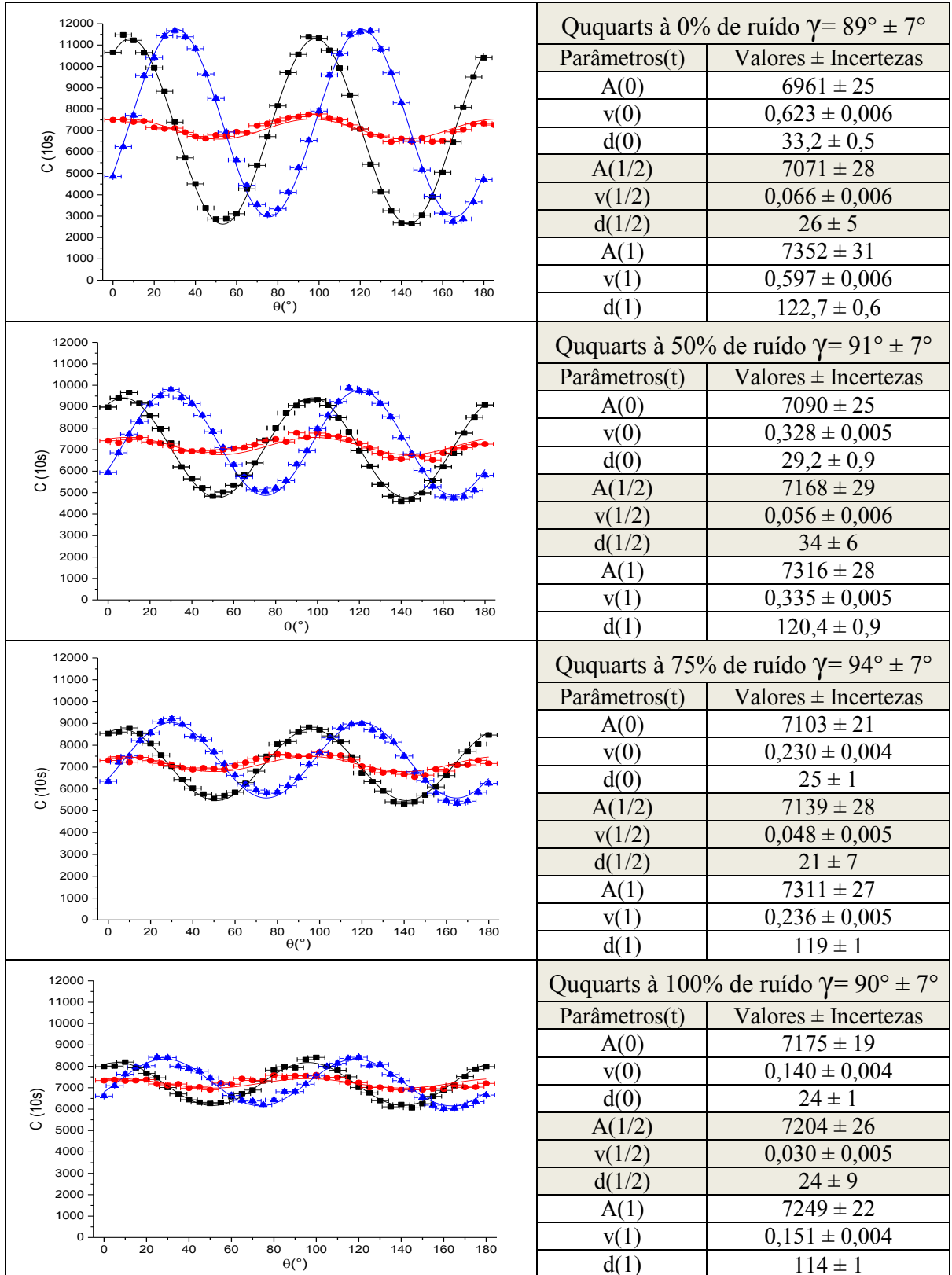


Tabela 9: Dados experimentais dos padrões de interferência (a esquerda) ajustados pela equação $C = A[1 + v \cos(4\theta - d)]$ e usados para medir a FTF de **dois quarks** da Figura 21 sob ruído de defasagem, Eq. (40). A transformação $SU(d)$ no estado correspondente ao instante paramétrico t está na Tabela 2, tirada da Eq.(68), representada na Tabela 1 e cuja correspondência experimental está na Tabela 12 do APÊNDICE D. A FTF é determinada pela Eq. (98) e sua incerteza pela Eq. (96).

Ao comparar a influência do ruído de defasagem sobre a manutenção da coerência para cada estado, notamos que os ququarts são mais robustos que os qutrits, que por sua vez e mais robustos que os qubits, como aponta os gráfico da Figura 9. Fazamos um gráfico com as visibilidades normalizadas para visualizarmos e compararmos melhor estes dados experimentais com a previsão da teoria. Para $t=0$ e $t=1$, vamos normalizar todas as visibilidades da Tabela 7, Tabela 8 e Tabela 9 pela visibilidade do correspondente padrão sem ruído de defasagem, ou seja:

$$V_{Normal}(p) = \frac{V_{Experimental}(p\% \text{ de Ruído})}{V_{Experimental}(0\% \text{ de Ruído})}. \quad (99)$$

Cada ponto experimental desta equação deve ser condizente com as curvas teóricas da Figura 9 plotadas a partir das equações da Tabela 3. De fato, pela Figura 23 com os dados das visibilidades experimentais normalizadas, constatamos que estes acompanham as curvas teóricas idênticas às das Figura 9.

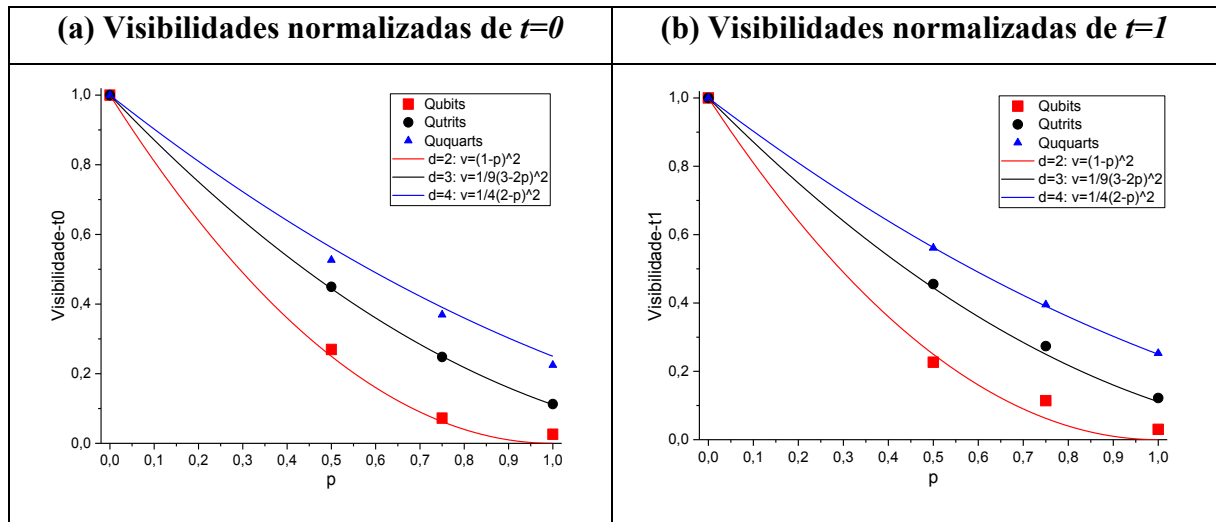


Figura 23: Visibilidades experimentais normalizadas (Eq. (99)) da Tabela 7, Tabela 8 e Tabela 9 sobrepostos às curvas teóricas da Figura 9, cujas equações nas legendas foram tiradas da Tabela 3. As visibilidades experimentais normalizadas acompanham as curvas teóricas, demonstrando assim que os ququarts são mais robustos que os qutrits e estes que os qubits em relação à manutenção da coerência do estado de dois qudits sob ruído de defasagem.

III. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, estudamos a Fase Topológica Fracionária (FTF) observada em estados de dois fótons correlacionados preparados nas variáveis de caminhos dos fótons. O estado de dois fótons emaranhados nas variáveis de caminho é preparado ao passar pares de fótons produzidos via conversão paramétrica descendente espontânea (*Spontaneous Parametric Down Conversion*, SPDC) por uma fenda múltipla (*multiple slits*, MS) que recebe um feixe de fótons gêmeos correlacionados pelos seus momentos lineares transversais. Pares de fótons chegam correlacionados no plano da MS devido à conservação do momento linear transversal dos fótons da SPDC, garantida pelo uso de um cristal fino para a produção da SPDC e pela focalização do feixe de bombeamento no plano da MS. As fendas por onde passam os fótons definem os vetores da base do estado fotônico: estados de fendas ou estados de caminho. A imagem da MS é projetada na tela do SLM (*Spatial Light Modulator*), o qual insere fases relativas diferentes entre os modos espacial de fenda ou entre os estados de caminho dos fótons. Isto possibilita a realização de operações $SU(d)$ nos estados de caminhos, o que nos permite calcular a FTF analiticamente prevista e demonstrar a sua robustez diante de ruídos de defasagem e de amplitude amortecida. Gráficos dos padrões de interferência previstos foram construídos para evidenciar a robustez da FTF sob ruído de defasagem e de amplitude.

Para demonstrar teoricamente a robustez da FTF, utilizamos duas propostas experimentais: um interferômetro nas variáveis de caminho dos fótons constituído por dois Mach-Zehnder com PBSs cujas saídas se combinam em PBS e uma proposta alternativa onde se usa uma fonte hiperemaranhada de pares de fótons (polarização e caminho). Analisamos, também, uma montagem simplificada com interferômetros de caminhos sem os dois interferômetros de Mach-Zehnder, que possibilitam a medida da FTF só com o interferômetro onde os fótons do par são combinados em um PBS ao sair passar pelos SLMs. Já a fonte hiperemaranhada é uma técnica totalmente nova para medir a FTF com melhor aproveitamento do sinal, além de ser uma fonte mais estável e com maior razão sinal/ruído. Além disso, embora com alguns prejuízos quanto às possibilidades de evoluções $SU(d)$ do estado, é possível eliminar totalmente a necessidade de interferometria de caminhos na medida da FTF – procedimento desconhecido até a publicação do nosso trabalho experimental [10]. O hiperemaranhamento, o uso da variável auxiliar de polarização e as operações $SU(d)$ condicionadas a esta variável via SLM, substituem o uso da interferometria de caminhos com ganhos na simplificação da montagem e ganhos na contagem de coincidência devido à eliminação da necessidade da pós-seleção através do PBS e detecção em coincidências, presentes na interferometria de caminhos.

Demonstramos também que o deslocamento de fase $2\pi/d$ entre os padrões de contagem de coincidência de ambas montagens experimentais propostas ocorre tanto para o estado maximamente emaranhado (MES) quanto para o estado produto (PS), porém a medida da FTF com o estado MES é mais eficiente do que com o estado PS nas operações $SU(d)$, já que a visibilidade dos padrões de interferência são os mesmos no início e ao fechar-se o ciclo da operação unitária, maximizando a razão sinal/ruído dos padrões e minimizando o erro relativo na medida do deslocamento de fase. Observamos, no entanto, que ambos estados têm o mesmo comportamento em relação à visibilidade dos padrões se dobramos as fases nas operações diagonais $SU(d)$. Para o estado MES temos a certeza de que o deslocamento $2\pi/d$ é de natureza puramente topológica, mas para o estado PS necessitamos realizar um estudo posterior, pois não há literatura comprovando a natureza do deslocamento $2\pi/d$ do estado PS. A constatação de que o estado PS manifesta o deslocamento $2\pi/d$ após a aplicação de uma operação unitária cíclica deve ser investigado em um trabalho teórico.

Experimentalmente, demonstramos que a fonte de pares de fótons em estado hiperemaranhados implementa a medida da FTF sem a necessidade de interferometria unicamente na variável de caminhos dos fótons. Com essa montagem, fomos capazes de medir a FTF e demonstrar a sua robustez mediante ruído de defasagem quase que tal como a teoria previa, exceto pelo fato de termos visibilidades dos padrões de interferência inicial e final um pouco diferentes entre si e visibilidade diferente de zero na metade da evolução $SU(d)$. Uma vez que normalizamos as visibilidades dos padrões de interferência iniciais e finais a partir do padrão sem ruído, fomos capazes de demonstrar a equivalência entre o comportamento da coerência do estado experimental e o comportamento coerência do estado teórico. Estes fatos nos levam a crer que a FTF é um candidato realmente confiável para ser explorada na implementação de algoritmos quânticos [54-56]. Este assunto deverá ser estudado no futuro por nós.

A robustez da informação é um elemento central na implementação de algoritmo e no funcionamento de computadores. Elementos insensíveis a ruídos são centrais na comunicação quântica, pois a manipulação da informação significa atuar sobre alguma propriedade ou grandeza relacionada ao estado e é necessário que a informação seja preservada no contato entre o estado quântico e o ambiente. Estados quânticos ou grandezas físicas que se mostram extremamente sensíveis às operações experimentais sob ruído devem ser evitados, pois isso muitas vezes descaracteriza a informação contida no estado que se obtém no ato de medição. Finalmente, gostaríamos de mencionar que as medidas da FTF sob ruído foram realizadas com operações $SU(d)$ que fechavam o ciclo de forma compartilhada entre as partes do estado,

representadas pelos fótons signal e idler, ou seja, a FTF foi medida para estados de dois qudits através de operações SU (d) não locais.

Esperamos, em breve, concluir a escrita do artigo [57] e submetê-lo a publicação. Almejamos, também, adaptar a nossa montagem experimento para medir as FTF da referência [29]. Outros trabalhos futuros poderão ser realizados visando a medida da FTF para estado produtos de qudits e a verificação da robustez da FTF para ruído de amplitude.

IV. APÊNDICES.

APÊNDICE A

RELAÇÃO ENTRE A FTF E A FASE GEOMÉTRICA DE BERRY

Neste apêndice deduziremos o vínculo da *fase topológica fracionária* (FTF) da Eq. (15) com a *fase geométrica de Berry para estados puros*. Reescrevendo a fase geométrica em termos da matriz de coeficientes do estado como exposto na Referência [27], encontramos

$$\begin{aligned}\gamma_g &= \arg\langle\psi(0)|\psi(T)\rangle + i \int_0^T dt' \langle\psi(t')|\dot{\psi}(t')\rangle \\ &= \arg\left(e^{i\theta} \overbrace{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(0)]}^{=1}\right) + i \int_0^T dt' \text{Tr}[\alpha^\dagger(t')\dot{\alpha}(t')] \\ &= \Delta\phi + \gamma_s + i \int_0^T dt' \text{Tr}[\alpha^\dagger(t')\dot{\alpha}(t')],\end{aligned}\tag{100}$$

onde θ foi substituído por $\Delta\phi$ e $\gamma_s = 2n\pi/d$ conforme já deduzido nas Eqs. (14) e (15). Usando a decomposição polar da Eq. (11), obtemos a derivada de $\alpha(t)$

$$\dot{\alpha}(t) = i\dot{\phi}\alpha(t) + e^{i\phi}[Q\dot{S}(t) + Q(t)\dot{S}(t)]\tag{101}$$

para substituir na Eq. (100). No primeiro termo da Eq. (101) usamos a condição de normalização $\langle\psi|\psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger(t)\alpha(t)] = 1$ para que a integral de $i\dot{\phi}\alpha(t)$ seja exatamente $-\Delta\phi$, o que anulará a fase global trivial da Eq. (100), restando somente a parte geométrica γ_s e a segunda parte da Eq. (101). Então, empregando a relação

$$\alpha^\dagger(t) = e^{-i\phi(t)}S^\dagger(t)Q^\dagger(t)\tag{102}$$

na Eq. (100) e a propriedade cíclica do traço, obtemos

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} + i \int_0^T dt \text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] + i \int_0^T dt \text{Tr}[Q^2(t)\dot{S}(t)S^\dagger(t)]\tag{103}$$

onde a primeira integral será zero ao percebermos que $\text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] = 0$, fato consequente da condição de normalização $\text{Tr}[Q^2(t)] = 1$,

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} + i \int_0^t dt \text{Tr}[Q^2(t)\dot{S}(t)S^\dagger(t)].\tag{104}$$

Para lidar com essa integral vamos identificar os seguintes invariantes sob evolução unitária local: $\text{Tr}[\rho_f^p]$, $p = 1, \dots, d$, corresponde à matriz densidade reduzida do qudit ($f = S$ ou I). De

fato, lançando mão da propriedade cíclica do traço e da unitariedade da evolução temporal, $U_f^\dagger U_f = I$ ⁴³, sob uma evolução local $\rho_f' = U_f \rho_f U_f^\dagger$ concluímos que

$$Tr[(\rho_f')^p] = Tr[(U_f \rho_f U_f^\dagger)^p] = Tr[(U_f \rho_f^p U_f^\dagger)] = Tr[\rho_f^p]. \quad (105)$$

Definindo os operadores densidades a partir da Eq. (7) e os correspondentes operadores densidades para os subsistemas pelo traço parcial

$$\begin{aligned} \rho^{SI} &= \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |m, n\rangle \langle m', n'| \\ \rho_S &= Tr_I[\rho^{SI}] = \alpha_{mn} \alpha_{m'n}^* |m\rangle \langle m'| \equiv \alpha \alpha^\dagger \\ \rho_I &= Tr_S[\rho^{SI}] = \alpha_{mn} \alpha_{mn'}^* |n\rangle \langle n'| \equiv (\alpha^\dagger \alpha)^T, \end{aligned} \quad (106)$$

da Eq. (8) e Eq.(11), podemos reescrevê-los como

$$\begin{aligned} \rho_S &= \alpha \alpha^\dagger = S(t) Q^2(t) S^\dagger(t) \\ \rho_I &= (\alpha^\dagger \alpha)^T = (Q^2(t))^T \end{aligned} \quad (107)$$

e constatar que ambos satisfazem a Eq.(105), $Tr[\rho_f^{2p}] = Tr[Q^{2p}] = Tr[(Q^{2p})^T]$. O invariante correspondente a $p = 1$ reproduz a condição de normalização e à $p = 2$ se relaciona com o quantificador de emaranhamento denominado *I-Concorrência* de um estado puro de dois qudits [9] definido como

$$C = \sqrt{2(1 - Tr[\rho_f^2])} \quad \therefore C_{PS} = 0 ; C_{MES} = \sqrt{2(d-1)/d} ; \quad (108)$$

onde os valores particulares correspondem aos estados produto (PS: *Product State*) e Maximamente Emaranhado (MES: *Maximum Entangled State*), pois, no primeiro caso, o traço vale $Tr[\rho_f^2] = Tr[\rho_f] = 1$ e no segundo caso $Tr[\rho_f^2] = 1/d$, já que o traço parcial do MES pode ser escrito como $\rho_f = I/d$ e portanto $\rho_f^2 = I/d^2$. Em outras palavras, o traço dessas matrizes ao quadrado está relacionado com a pureza do estado. Ou seja, se o estado global puro é produto, então cada componente está num estado puro também. Porém, se o estado global puro for maximamente emaranhado, então cada componente está num estado maximamente misto, cuja representação matricial é uma matriz identidade (vide as notas de rodapé 44 e 45).

Das Eqs. (107) e (108) tiramos a expressão abaixo que usaremos mais afrente

⁴³ I no cálculo matricial é a matriz identidade. Já o I ou S , como índices das equações, se referem aos fótons Signal e Idler no nosso sistema experimental, ou genericamente, as partes I ou S de um sistema composto de duas partes.

$$\text{Tr}[Q^4] = \text{Tr}[\rho_f^2] = 1 - C^2/2. \quad (109)$$

Definamos, ainda, um conjunto de matrizes geradoras das matrizes $SU(d)$, $\{I, X_1, \dots, X_{d^2-1}\}$, onde $\text{Tr}[X_i] = 0$ e $\text{Tr}[X_i X_j] = \delta_{ij}/2$, $(i, j = 1, \dots, d^2 - 1)$ ⁴⁴. Qualquer matriz hermitiana e anti-hermitiana normalizadas podem ser geradas por combinação dos geradores, sendo as matrizes de Pauli o exemplo mais conhecido no caso de sistema de dois níveis, $d=2$. Usando essa definição nas matrizes que geram os subsistemas ⁴⁵

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{d} [I + \vec{q} \cdot \vec{X}] \\ Q^4 &= \frac{1}{d^2} [I + 2\vec{q} \cdot \vec{X} + (\vec{q} \cdot \vec{X})^2], \end{aligned} \quad (110)$$

aplicando a ortogonalidade dos geradores no último termo dessa equação no cálculo do traço,

$$\text{Tr}[Q^4] = \frac{1}{d^2} \left[d + \frac{q^2}{2} \right], \quad (111)$$

podemos expressar o módulo do vetor $\vec{q}$ por meio da Eq. (109) com os elementos da Eq. (108)

$$q = d\sqrt{2(d-1)/d - C^2} = d\sqrt{C_{MES}^2 - C^2} \quad (112)$$

e substituindo na primeira relação da Eq. (110)

$$Q^2 = \frac{I}{d} + \sqrt{C_{MES}^2 - C^2} \hat{q} \cdot \vec{X}, \quad (113)$$

nos permite reescrever a Eq. (104) como

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} + i \int_0^t dt \text{Tr} \left[\frac{\dot{S}(t)S^\dagger(t)}{d} + \sqrt{C_{MES}^2 - C^2} (\hat{q}(t) \cdot \vec{X}) \dot{S}(t)S^\dagger(t) \right] \quad (114)$$

e a Eq. (107) como

⁴⁴ $\{I, X_1, \dots, X_{d^2-1}\}$ é o conjunto das matrizes geradoras do subsistema bipartido, tal que todas as matrizes X_i possuem traço nulo. A evolução do estado pelo mapa completamente positivo $\Lambda(\rho_I) = p_i M_i \rho_I M_i^\dagger, p_i M_i^\dagger M_i \leq I$, produzirá um novo estado $\Lambda(\rho_I) = \frac{1}{d} [I + A\vec{q} \cdot \vec{X}]$, onde a matriz A é caracterizada pelo mapa e $\vec{q}$ caracteriza o estado.

⁴⁵ Compararmos as Eqs. (110) com (107), podemos atribuir um significado físico imediato para o vetor $\vec{q}(t)$ que caracteriza o subsistema ρ_I . Quando $|\vec{q}| = 1$, o estado é puro e quando $|\vec{q}| < 1$ o estado é misto, sendo maximamente misto quando $|\vec{q}| = 0$. Para qubits, $\vec{q}$ é chamado de vetor de Bloch do sistema, e de forma análoga, $\vec{q}$ é identificado como o vetor de Bloch generalizado para sistema de dimensões maiores [58].

$$\begin{aligned}\rho_S &= \frac{1}{d} \left[I + \vec{q} \cdot \left(S(t) \vec{X}(t) S^\dagger(t) \right) \right] = \frac{1}{d} \left[I + A(t) \vec{q} \cdot \vec{X}(t) \right] \\ \rho_I &= \frac{1}{d} \left[I + \vec{q} \cdot \vec{X}^T \right]\end{aligned}\quad (115)$$

onde $A(t)$ é uma matriz que transfere para o vetor todas as mudanças da evolução dos geradores sob a transformação $S(t)$. Dado que $SS^{-1} = SS^\dagger = I$ e $\det S = 1$, podemos empregar a propriedade das matrizes invertíveis

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \det A \operatorname{Tr} \left[A^{-1} \frac{dA}{dt} \right] \quad (116)$$

e verificar que o primeiro termo da integral presente na Eq. (114) vale zero, ou seja,

$$0 = \frac{d(\det S)}{dt} = \operatorname{Tr} \left[S^{-1} \frac{dS}{dt} \right] = \operatorname{Tr} [S^\dagger \dot{S}]. \quad (117)$$

Pela derivação de $SS^\dagger = I$ encontramos $\dot{S}S^\dagger + S\dot{S}^\dagger = 0$ e $\dot{S}S^\dagger = -(\dot{S}S^\dagger)^\dagger$ que é uma matriz anti-hermitiana, a qual pode ser reescrita por alguma combinação linear dos geradores, tal como fazemos com um matriz hermitiana, porém multiplicado por i para recuperarmos a propriedade anti-hermitiana, ou seja,

$$\dot{S}(t)S^\dagger(t) = i\vec{s}(t) \cdot \vec{X}, \quad (118)$$

onde $\vec{s}(t) \in \mathbb{R}^{d^2-1}$ é um vetor semelhante ao vetor estado $\vec{q}$ que carrega a história da evolução quântica contida em $\dot{S}(t)S^\dagger(t)$. Finalmente, substituindo as Eqs. (117) e (118) em (114), usando a ortogonalidades dos geradores, obtemos o seguinte resultado

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} - \frac{1}{2} \sqrt{C_{MES}^2 - C^2} \oint \hat{\mathbf{q}} \cdot d\vec{x} \quad (119)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}$ é um vetor unitário de um dos subsistemas e $d\vec{x} = \vec{s}(t)dt$ é o vetor deslocamento infinitesimal em $\mathbb{R}^{d^2-1}$ que depende da história da evolução do estado e C é a *I-Concorrência* de um estado puro de dois-qudits tal que C_{MES} corresponde ao valor para o caso do emaranhamento máximo.

Resumidamente, este resultado nos diz que a fase geométrica para estado puro é composta por uma contribuição fracionária e uma contribuição integral que depende da história da evolução do estado quântico em uma evolução fechada, parametrizada nos setores Hermitiano e $SU(d)$ da decomposição polar. Essa contribuição integral é ponderada pelo emaranhamento e desaparece para estados maximamente emaranhados, para os quais apenas os valores fracionários da fase geométrica não se anulam [27, 39].

O estado maximamente emaranhado manifesta a FTF e satisfaz a condição de ciclicidade ao recuperar a visibilidade semelhante à Figura 1 após a evolução, como apontam

os gráficos dos nossos cálculos numéricos no CAPÍTULO 4. O que verificamos também é que estados produtos de dimensão maior que dois também manifestam o deslocamento $2n\pi/d$, mas os padrões de interferências não recuperam a visibilidade na contagem de coincidência ao final da evolução cíclica, assim, indicando que a evolução do estado não foi cíclica, ou seja, o estado final não é o mesmo que o estado inicial multiplicado por uma fase como pressupõem a Eq. (13).

APÊNDICE B
CÁLCULOS OMITIDOS NO CAPÍTULO 3.

Segue abaixo os cálculos omitidos entre as Eqs. (63) e (64). Como mencionamos anteriormente, usando as relações $\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{mn}$ para $\mu, \nu = H$ e V , usando $\Omega_H = 0$ e $\Omega_V \neq 0$ nos termos da Eq. (47), temos

$$\begin{aligned}
 F_{m\mu\nu}^{ghij} F_{m'\mu'n'\nu'}^{ghij*} &= c_{m\mu\nu}^{ghij} c_{m'\mu'n'\nu'}^{ghij*} f_{m\mu\nu} f_{m'\mu'n'\nu'}^* \frac{\alpha_{m\mu\nu} \alpha_{m'\mu'n'\nu'}^*}{2} \\
 c_{m\mu\nu}^{ghij} c_{m'\mu'n'\nu'}^{ghij*} &= (-1)^{(\delta_m^g \delta_\mu^V + \delta_n^h \delta_\nu^V)} e^{-(\Omega_\mu^i \delta_m^i + \Omega_\nu^j \delta_n^j)} \\
 &\quad \times (-1)^{(\delta_{m'}^g \delta_{\mu'}^V + \delta_{n'}^h \delta_{\nu'}^V)} e^{-(\Omega_{\mu'}^i \delta_{m'}^i + \Omega_{\nu'}^j \delta_{n'}^j)}
 \end{aligned} \tag{120}$$

$$f_{m\mu\nu} f_{m'\mu'n'\nu'}^* = e^{i[(\xi_m \delta_\mu^V + \theta_s \delta_\mu^H) + (\chi_n \delta_\nu^V + \theta_l \delta_\nu^H)]} e^{-i[(\xi_{m'} \delta_{\mu'}^V + \theta_s \delta_{\mu'}^H) + (\chi_{n'} \delta_{\nu'}^V + \theta_l \delta_{\nu'}^H)]}$$

e cada termo da contagem em coincidência Eq. (63) se reduz a

$$\begin{aligned}
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mHnH}^{ghij} c_{mHnH}^{ghij*} \right) (f_{mHnH} f_{mHnH}^*) \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{4} = \frac{1}{4} \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mVnV}^{ghij} c_{mVnV}^{ghij*} \right) (f_{mVnV} f_{mVnV}^*) \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{4} \\
 &= p_{ij}^{(C)} e^{-2(\Omega_V^i \delta_m^i + \Omega_V^j \delta_n^j)} \frac{|\alpha_{mn}|^2}{4} \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{nVmV}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mHnH}^{ghij} c_{nVmV}^{ghij*} \right) (f_{mHnH} f_{nVmV}^*) \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} \\
 &= p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (-1)^{(\delta_n^g + \delta_m^h)} e^{-(\Omega_V^i \delta_n^i + \Omega_V^j \delta_m^j)} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_l))]} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{nHmH}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mVnV}^{ghij} c_{nHmH}^{ghij*} \right) (f_{mVnV} f_{nHmH}^*) \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} \\
 &= p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} e^{-(\Omega_V^i \delta_m^i + \Omega_V^j \delta_n^j)} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_l))]} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4}
 \end{aligned} \tag{121}$$

de modo a nos possibilitar a reescrever como

$$\begin{aligned}
p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} &= \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{4} = \frac{1}{4} \\
p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} &= \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{4} p_{ij}^{(C)} (s_{mn}^{ij})^2 ; \quad s_{mn}^{ij} = e^{-(\Omega_V^i \delta_m^i + \Omega_V^j \delta_n^j)} \\
p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{nVmV}^{ghij*} &= \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} r_{nm}^{ghij*}; \\
r_{nm}^{ghij*} &= (-1)^{(\delta_n^g + \delta_m^h)} s_{nm}^{ij} e^{-i[(\xi_n + \chi_m - (\theta_s + \theta_l))]} \\
p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{nHmH}^{ghij*} &= \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} r_{mn}^{ghij} \\
r_{mn}^{ghij} &= (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} s_{mn}^{ij} e^{i[(\xi_m + \chi_n - (\theta_s + \theta_l))]}
\end{aligned} \tag{122}$$

Substituindo os termos da Eq. (122) na Eq. (63), encontramos finalmente a Eq. (64).

APÊNDICE C

CÁLCULOS OMITIDOS NO CAPÍTULO 4.

Segue abaixo os cálculos omitidos entre as Eqs. (90) e (91). Lembrando da Eq. (80) que $\alpha_{mn}^H = -\alpha_{mn}^V = \alpha_{mn}$, usando $\Omega_H \neq 0$ e $\Omega_V = 0$ nos elementos da Eq. (83), reduzimos os termos da contagem de Coincidência Eq. (90) em

$$\begin{aligned}
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{mHnH}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mHnH}^{ghij} c_{mHnH}^{ghij*} \right) (f_{mHnH} f_{mHnH}^*) \frac{\alpha_{mn}^H \alpha_{mn}^{H*}}{2} \\
 &= p_{ij}^{(C)} e^{-2(\Omega_H^i \delta_m^i + \Omega_H^j \delta_n^j)} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{2}, \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{mVnV}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mVnV}^{ghij} c_{mVnV}^{ghij*} \right) (f_{mVnV} f_{mVnV}^*) \frac{\alpha_{mn}^V \alpha_{mn}^{V*}}{2} = \frac{1}{2}, \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mHnH}^{ghij} F_{nVmV}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mHnH}^{ghij} c_{nVmV}^{ghij*} \right) (f_{mHnH} f_{nVmV}^*) \frac{\alpha_{mn}^H \alpha_{mn}^{V*}}{2} \\
 &= -p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} e^{-(\Omega_H^i \delta_m^i + \Omega_H^j \delta_n^j)} e^{i(\xi_m + \chi_n - 4\theta)} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{2}, \\
 p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} F_{mVnV}^{ghij} F_{nHmH}^{ghij*} &= \left(p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} c_{mVnV}^{ghij} c_{nHmH}^{ghij*} \right) (f_{mVnV} f_{nHmH}^*) \frac{\alpha_{mn}^V \alpha_{nm}^{H*}}{2} \\
 &= -p_{gh}^{(D)} p_{ij}^{(C)} (-1)^{(\delta_m^g + \delta_n^h)} e^{-(\Omega_H^i \delta_m^i + \Omega_H^j \delta_n^j)} e^{-i(\xi_m + \chi_n - 4\theta)} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{2},
 \end{aligned} \tag{123}$$

Substituindo as Eq. (123) na Eq. (90) e, encontramos finalmente a Eq. (91).

APÊNDICE D

TABELAS DAS FASES-VOLTAGENS USADAS NAS MÁSCARAS NO SLM.

Fendas	Operadores de Kraus para o ququart				
	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
ξ_1 ou χ_4					
ξ_2 ou χ_3					
ξ_3 ou χ_2					
ξ_4 ou χ_1					

Figura 24: Máscaras implementadas pelo SLM em cada braço do experimento da Figura 17. Cada uma das máscaras corresponde a um operador de Kraus, sendo o K_0 a identidade no instante t da evolução $SU(d)$ e K_j a correspondente defasagem de π na fenda j . O estado quântico é exposto a todos os operadores de Kraus durante o intervalo de aquisição Δt . Para um ruído iso-ponderado de intensidade p , cada fenda K_j fica exposto durante $p\Delta t/d$ e a identidade K_0 durante $(1 - p)\Delta t$ do intervalo de aquisição. Para ruído de 100% ($p = 1$) só haverá os operadores K_j expostos $\Delta t/d$, cada um, durante intervalo de aquisição. A identidade K_0 é a própria operação $SU(d)$ no instante parametrizado t da evolução. As numerações das MS nos dois braços foram dispostas de modo que ξ_j esteja correlacionado com χ_j .

A Figura 24 mostra as máscaras utilizadas para inserir ruído de defasagem relativa entre as fendas múltipla pela variação da escala de cinzas (voltagens) no SLM. Cada uma das figuras monta uma máscara correspondente a cada Operadores de Kraus implementado no ququart. O operador $K_0(t)$ corresponde à operação identidade, que não insere fase relativa entre as fendas. O operador $K_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, d$) insere defasagem π na fenda j em relação as demais fendas, tomando como referencial a máscara $K_0(t)$ [44]. A máscara $K_0(t)$ é a operação $SU(d)$ em t da evolução. Assim, em um intervalo de aquisição sob ruído de defasagem, implementamos aleatoriamente todas as máscaras dos operadores de Kraus nos ququarts dos dois braços do experimento da Figura 17. O tempo de exposição de cada máscara depende da intensidade do ruído. Por exemplo, um ruído iso-ponderado, todos os $K_j(t)$ que implementaremos terão o mesmo tempo de exposição a ser definido pela intensidade do ruído – no ruído de 25% teremos a atuação dos $K_j(t)$ 25% do tempo de aquisição e nos outros 75% teremos a identidade. Explicando em detalhe o caso da implementação do operador de defasagem: os 25% do tempo de aquisição são divididos igualmente em d intervalos de tempo para a atuação dos operadores de Kraus K_j , isto é, uma fase de π é acrescentada em um dos modos de fenda (caminho j) e zero

nos outros $d - 1$ modos de fenda (caminhos $i \neq j$); os demais 75% do tempo de aquisição será implementado do K_0 . Os procedimentos para os qutrits e qubits são idênticos.

Nas tablas a seguir, estão as Fases-Voltagens (escala de cinzas) aplicadas no SLM para implementar as operações $SU(d)$ juntamente com os correspondes ruídos de defasagem, conforme descrito na Figura 14.

Fendas	$t=0$		$t=1/2$		$t=1$	
	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)
ξ_1	$0 \pm 0,9$	2,41	$45 \pm 1,1$	2,77	$90 \pm 0,8$	3,404
ξ_2	$0 \pm 0,9$	2,41	$-45 \pm 1,8$	2,173	$-90 \pm 1,9$	1,938
χ_2	$0 \pm 1,9$	2,41	$45 \pm 2,9$	2,666	$90 \pm 1,6$	3,1
χ_1	$0 \pm 1,9$	2,41	$-45 \pm 1,7$	2,151	$-90 \pm 1,7$	1,907
$\bar{\xi}_1$	$-180 \pm 1,4$	1,574	$-135 \pm 1,6$	1,748	$-90 \pm 1,9$	1,938
$\bar{\xi}_2$	$-180 \pm 1,4$	1,574	$135 \pm 13,6$	5,036	$90 \pm 0,8$	3,404
$\bar{\chi}_2$	$180 \pm 2,5$	5,57	-135 ± 6	1,675	$-90 \pm 1,7$	1,907
$\bar{\chi}_1$	$180 \pm 2,5$	5,57	$135 \pm 1,5$	3,841	$90 \pm 1,6$	3,1
$\Delta\gamma_{SLM}^2$	18,54					
$\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$	26,12					

Tabela 10: Fases e correspondentes voltagens foram obtidas a partir da calibração do SLM na Figura 22. Esta fase são as mesmas apresentadas na Tabela 2, que usaremos para montar as máscaras do SLM que implementarão a FTF com ruído de defasagem nos **dois qubits** da Figura 21. As fases ξ_m (correspondentes ao Det 1) e χ_n (correspondentes ao Det 2) foram enumerada respeitando a correlação das fendas físicas advinda da conservação do momento angular da geração dos fótons gêmeos da Figura 17. As fases $\bar{\xi}_m = \xi_m \pm 180^\circ$ e $\bar{\chi}_n = \chi_n \pm 180^\circ$ foram determinadas segundo os critérios descritos na Figura 14. As incertezas $\Delta\gamma_{SLM}^2$ e $\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$ foram calculadas pelas Eqs. (93) e (94).

Fendas	$t=0$		$t=1/2$		$t=1$	
	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)
ξ_1	$0 \pm 0,9$	2,41	$-60 \pm 0,8$	2,067	$-120 \pm 2,6$	1,812
ξ_2	$0 \pm 0,9$	2,41	$0 \pm 0,9$	2,41	$60 \pm 1,4$	2,919
ξ_3	$0 \pm 0,9$	2,41	$60 \pm 1,4$	2,919	$60 \pm 1,4$	2,919
χ_3	$0 \pm 1,9$	2,41	$60 \pm 1,1$	2,814	$60 \pm 1,1$	2,814
χ_2	$0 \pm 1,9$	2,41	$0 \pm 1,9$	2,41	$60 \pm 1,1$	2,814
χ_1	$0 \pm 1,9$	2,41	$-60 \pm 0,9$	2,074	$-120 \pm 2,8$	1,77
$\bar{\xi}_1$	$-180 \pm 1,4$	1,574	$120 \pm 0,8$	4,819	$60 \pm 1,4$	2,919
$\bar{\xi}_2$	$-180 \pm 1,4$	1,574	$-180 \pm 1,4$	1,574	$-120 \pm 2,6$	1,812
$\bar{\xi}_3$	$-180 \pm 1,4$	1,574	$-120 \pm 2,6$	1,812	$-120 \pm 2,6$	1,812
$\bar{\chi}_3$	$180 \pm 2,5$	5,57	$-120 \pm 2,8$	1,77	$-120 \pm 2,8$	1,77
$\bar{\chi}_2$	$180 \pm 2,5$	5,57	$180 \pm 2,5$	5,57	$-120 \pm 2,8$	1,77
$\bar{\chi}_1$	$180 \pm 2,5$	5,57	$120 \pm 1,3$	3,532	$60 \pm 1,1$	2,814
$\Delta\gamma_{SLM}^2$	34,2					
$\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$	57					

Tabela 11: Fases e correspondentes voltagens foram obtidas a partir da calibração do SLM na Figura 22. Esta fase são as mesmas apresentadas na Tabela 2, que usaremos para montar as máscaras do SLM que implementarão a FTF com ruído de defasagem nos **dois qutrits** da Figura 21. As fases ξ_m (correspondentes ao Det 1) e χ_n (correspondentes ao Det 2) foram enumerada respeitando a correlação das fendas físicas advinda da conservação do momento angular da geração dos fótons gêmeos da Figura 17. As fases $\bar{\xi}_m = \xi_m \pm 180^\circ$ e $\bar{\chi}_n = \chi_n \pm 180^\circ$ foram determinadas segundo os critérios descritos na Figura 14. As incertezas $\Delta\gamma_{SLM}^2$ e $\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$ foram calculadas pelas Eqs. (93) e (94).

Fendas	$t=0$		$t=1/2$		$t=1$	
	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)	Fases (°)	Volt(V)
ξ_1	$0 \pm 1,2$	2,081	$-22,5 \pm 3,8$	1,94	$-135 \pm 2,3$	1,526
ξ_2	$0 \pm 1,2$	2,081	$22,5 \pm 1,4$	2,196	$45 \pm 0,4$	2,339
ξ_3	$0 \pm 1,2$	2,081	$67,5 \pm 1,2$	2,474	$225 \pm 0,8$	7,974
ξ_4	$0 \pm 1,2$	2,081	$-67,5 \pm 0,3$	1,805	$-135 \pm 2,3$	1,526
χ_4	$0 \pm 1,9$	2,41	$-67,5 \pm 1,5$	2,049	$-135 \pm 1,1$	1,711
χ_3	$0 \pm 1,9$	2,41	$67,5 \pm 1,8$	2,903	$225 \pm 0,5$	8,479
χ_2	$0 \pm 1,9$	2,41	$22,5 \pm 1,1$	2,557	$45 \pm 0,9$	2,723
χ_1	$0 \pm 1,9$	2,41	$-22,5 \pm 4,5$	2,336	$-135 \pm 1,1$	1,711
$\bar{\xi}_1$	$-180 \pm 1,7$	1,22	$157,5 \pm 10,8$	3,5	$45 \pm 1,6$	2,339
$\bar{\xi}_2$	$-180 \pm 1,7$	1,22	$-157,5 \pm 1,4$	1,417	$-135 \pm 2,3$	1,526
$\bar{\xi}_3$	$-180 \pm 1,7$	1,22	$-112,5 \pm 1,1$	1,619	$45 \pm 1,6$	2,339
$\bar{\xi}_4$	$-180 \pm 1,7$	1,22	$112,5 \pm 0,6$	2,91	$45 \pm 1,6$	2,339
$\bar{\chi}_4$	$-180 \pm 1,9$	1,388	$112,5 \pm 1,8$	3,471	$45 \pm 0,9$	2,723
$\bar{\chi}_3$	$-180 \pm 1,9$	1,388	$-112,5 \pm 1,3$	1,83	$45 \pm 0,9$	2,723
$\bar{\chi}_2$	$-180 \pm 1,9$	1,388	$-157,5 \pm 1,1$	1,581	$-135 \pm 1,1$	1,711
$\bar{\chi}_1$	$-180 \pm 1,9$	1,388	$157,5 \pm 7,4$	4,298	$45 \pm 0,9$	2,723
$\Delta\gamma_{SLM}^2$	35,06					
$\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$	42,61					

Tabela 12: Fases e correspondentes voltagens foram obtidas a partir da calibração do SLM na Figura 22. Esta fase são as mesmas apresentadas na Tabela 2, que usaremos para montar as máscaras do SLM que implementarão a FTF com ruído de defasagem no **dois ququart** da Figura 21. As fases ξ_m (correspondentes ao Det 1) e χ_n (correspondentes ao Det 2) foram enumerada respeitando a correlação das fendas físicas advinda da conservação do momento angular da geração dos fótons gêmeos da Figura 17. As fases $\bar{\xi}_m = \xi_m \pm 180^\circ$ e $\bar{\chi}_n = \chi_n \pm 180^\circ$ foram determinadas segundo os critérios descritos na Figura 14. As incertezas $\Delta\gamma_{SLM}^2$ e $\Delta\bar{\gamma}_{SLM}^2$ foram calculadas pelas Eqs. (93) e (94).

V. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1	S. Pancharatnam. <i>Generalized theory of interference, and its applications</i> . Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 44:247, 1956.
2	M. V. Berry. <i>Quantal phase factors accompanying adiabatic changes</i> . Proc. Roy. Soc. Lond. A, 392:45–57, 1984.
3	A. C. Lobo, R. A. Ribeiro, C. A. Ribeiro, and P. R. Dieguez, <i>Geometry of the adiabatic theorem</i> . European Journal of Physics (Print), 33:1063–1072, 2012.
4	Y. Aharonov and J. Anandan. <i>Phase change during a cyclic quantum evolution</i> . Phys. Rev. Lett., 58:1593–1596, Apr 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1593. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1593
5	Leslie E. Ballentine, <i>Quantum Mechanics: A Modern Development</i> , World Scientific, 1998.
6	P. Bruno, <i>Berry phase effects in magnetism</i> . https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0506270v1.pdf
7	M. Berry, <i>Some geometric phase</i> , Cours/Lecture Series at CERN, Geneva, 1993.
8	J. J. Sakurai, <i>Modern Quantum Mechanics</i> , Addison Wesley, 2nd ed, 1994.
9	Artur Araújo Matoso. <i>Fase topológica fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente</i> . Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2014.
10	A. A. MATOSO, R. A. RIBEIRO, L. E. OXMAN, A. Z. KHOURY, S. PÁDUA. <i>Fractional topological phase measurement with a hyperentangled photon source</i> . Scientific Reports, v. 9, p. 577, 2019.
11	Akira Tomita and Raymond Y. Chiao. <i>Observation of berry's topological phase by use of an optical fiber</i> . Phys. Rev. Lett., 57:937–940, Aug 1986. doi: 10.1103/PhysRevLett.57.937. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.937
12	T. Bitter and D. Dubbers. <i>Manifestation of berry's topological phase in neutron spin rotation</i> . Phys. Rev. Lett., 59:251–254, Jul 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.251. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.251
13	D. J. Richardson, A. I. Kilvington, K. Green, and S. K. Lamoreaux. <i>Demonstration of berry's phase using stored ultracold neutrons</i> . Phys. Rev. Lett., 61:2030–2033, Oct 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.2030. URL https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.61.2030

14	Paul G. Kwiat and Raymond Y. Chiao. <i>Observation of a nonclassical berry's phase for the photon</i> . Phys. Rev. Lett., 66:588–591, Feb 1991. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.588
15	A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M. França Santos and V. Vedral. <i>Geometric Phase in Open Systems</i> . Phys. Rev. Lett., 90: 16, 2003. URL https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.160402
16	D.M. Tong, E. Sjöqvist, L. C. Kwek, and C. H. Oh1. <i>Kinematic Approach to the Mixed State Geometric Phase in Nonunitary Evolution</i> . Phys. Rev. Lett. 95, 249902 (2005) URL https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.93.080405
17	Jiangfeng Du, Ping Zou, Mingjun Shi, Leong Chuan Kwek, Jian-Wei Pan, C. H. Oh, Artur Ekert, Daniel K. L. Oi, and Marie Ericsson. <i>Observation of Geometric Phases for Mixed States using NMR Interferometry</i> . Phys. Rev. Lett. 91, 100403 – Published 5 September 2003. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.100403
18	Erik Sjöqvist, Arun K. Pati, Artur Ekert, Jeeva S. Anandan, Marie Ericsson, Daniel K. L. Oi, and Vlatko Vedral. <i>Geometric Phases for Mixed States in Interferometry</i> . Phys. Rev. Lett. 85, 2845 – Published 2 October 2000 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2845
19	Erik Sjöqvist. <i>Geometric phase for entangled spin pairs</i> . Phys. Rev. A, 62:022109, Jul 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.022109. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.022109
20	Björn Hessmo and Erik Sjöqvist. <i>Quantal phase for nonmaximally entangled photons</i> . Phys. Rev. A, 62:062301, Oct 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.062301. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062301
21	Pérola Milman and Rémy Mosseri. <i>Topological phase for entangled two-qubit states</i> . Phys. Rev. Lett., 90:230403, Jun 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.230403. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.230403
22	W. LiMing, Z. L. Tang, and C. J. Liao. <i>Representation of the $SO(3)$ group by a maximally entangled state</i> . Phys. Rev. A, 69:064301, Jun 2004. doi: 10.1103/PhysRevA.69.064301. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.064301
23	Pérola Milman. <i>Phase dynamics of entangled qubits</i> . Phys. Rev. A, 73:062118, Jun 2006. doi: 10.1103/PhysRevA.73.062118. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.062118

24	C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury. <i>Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam</i> . Phys. Rev. Lett., 99:160401, Oct 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.160401. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.160401 .
25	Jiangfeng Du, Jing Zhu, Mingjun Shi, Xinhua Peng, and Dieter Suter. <i>Experimental observation of a topological phase in the maximally entangled state of a pair of qubits</i> . Phys. Rev. A, 76:042121, Oct 2007. doi: 10.1103/PhysRevA.76.042121. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042121
26	L. E. Oxman and A. Z. Khoury. <i>Fractional topological phase for entangled qudits</i> . Phys. Rev. Lett., 106:240503, Jun 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.240503. URL https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.106.240503
27	A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. Matoso, and S. Pádua. <i>Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits</i> . Phys. Rev. A, 87:042113, Apr 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.87.042113. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042113
28	Markus Johansson, Marie Ericsson, Kuldip Singh, Erik Sjöqvist, and Mark S. Williamson. <i>Topological phases and multiqubit entanglement</i> . Phys. Rev. A, 85:032112, Mar 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.85.032112. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.032112 .
29	Markus Johansson, Antonio Z. Khoury, Kuldip Singh, and Erik Sjöqvist. <i>Three-qubit topological phase on entangled photon pairs</i> . Phys. Rev. A, 87:042112, Apr 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.87.042112. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042112
30	A. Z. Khoury and L. E. Oxman. <i>Topological phase structure of entangled qudits</i> . Phys. Rev. A, 89:032106, Mar 2014. doi: 10.1103/PhysRevA.89.032106. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.032106
31	J. C. Loredó, M. A. Broome, D. H. Smith, and A. G. White. <i>Observation of entanglement-dependent two-particle holonomic phase</i> . Phys. Rev. Lett., 112:143603, Apr 2014. doi: 10.1103/PhysRevLett.112.143603. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.143603

32	A. A. Matoso, X. Sánchez-Lozano, W. M. Pimenta, P. Machado, B. Marques, F. Sciarrino, L. E. Oxman, A. Z. Khoury, and S. Pádua. <i>Experimental observation of fractional topological phases with photonic qudits</i> . Phys. Rev. A, 94:052305, Nov 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.94.052305. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.052305
33	R. A. Ribeiro, A. A. Matoso, L. E. Oxman, A. Z. Khoury, and S. Pádua. <i>Robustness of the fractional topological phase to dephasing</i> . Phys. Rev. A 99, 042101 – Published 1 April 2019. URL https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.99.042101
34	Acessado em 19/20/2015: http://www.lasmatematicasdemario.com/Geometria/Diferencial/Superficies/Plano.htm
35	J. C. Romão. <i>Sobre Fases em Mecânica Quântica</i> . Departamento de Física & CFTP, Lisboa, Portugal. Acessado em 20/02/2015. https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1692629431484695/BerryPhases.pdf
36	K. Tenenblat. <i>Introdução à Geometria Diferencial</i> . UnB, 1988.
37	M. A. Nielsen e I. L. Chuang. <i>Computação Quântica e Informação Quântica</i> . Bookman, 2005.
38	W. K. Nicholson, <i>Algebra Linear</i> , 2ª Ed. Mc Graw Hill, 2006.
39	P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn. <i>Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions</i> . Phys. Rev. A, 64:042315, 2001.
40	C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. <i>Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion</i> . Phys. Rev. A, 57:3123–3126, Apr 1998. doi: 10.1103/PhysRevA.57.3123. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.3123
41	R. C. Drumond, <i>Topicos Algebra Linear em Mecânica Quântica</i> , Departamento de Matemática, UFMG, 2014.
42	<i>Open Quantum Systems</i> . MIT Open Course Ware, 2012. https://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-51-quantum-theory-of-radiation-interactions-fall-2012/lecture-notes/MIT22_51F12_Ch8.pdf
43	J. Koch, <i>The Theory of Open Quantum Systems</i> , 2013. https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.northwestern.edu/dist/2/1168/files/2013/03/PHYS450-1.pdf

44	B. M. G. Teixeira, <i>Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos</i> , Tese de Doutorado, UFMG, 2013. https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-97VKFM
45	J. G. Fonseca, <i>Tomografia quântica de qubits espaciais usando um modulador espacial de luz</i> , Dissertação de Mestrado, UFMG, 2009. https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/ES CZ-7Y SHPZ
46	M. R. Barros, <i>DEMONSTRAÇÃO ÓPTICA DO ALGORITMO DE DEUTSCH-JOZSA COM 1 QUBIT</i> , Dissertação de Mestrado, UFMG, 2010. https://www.fisica.ufmg.br/posgraduacao/defesas/mestrado-2010-mariana-barros/
47	W. M. Pimenta, <i>Tomografia experimental de estados quânticos: implementação de tomografia mínima</i> , Dissertação de Mestrado, UFMG, 2010. https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/IACO-84RRCW
48	John Preskill's Lecture Notes about Quantum Computation, 2015. http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph219/topological.pdf
49	Artur Araújo Matoso. <i>Medição da Fase Topológica Fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente</i> . Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2018.
50	R. A. Ribeiro, <i>Robustez da fase topológica fracionária ao ruído de fase</i> . Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2015.
51	Leonardo Teixeira Neves. <i>Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente</i> . Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2006.
52	Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Philippe H. Eberhard. <i>Ultrabright source of polarization-entangled photons</i> . Phys. Rev. A, 60:R773–R776, Aug 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.60.R773. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.R773
53	Taehyun Kim, Marco Fiorentino, and Franco N. C. Wong. <i>Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization sagnac interferometer</i> . Phys. Rev. A, 73:012316, Jan 2006. doi: 10.1103/PhysRevA.73.012316. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.012316
54	J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, <i>Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance</i> , Nature (London) 403: 869, 2000.

55	L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller. <i>Geometric Manipulation of Trapped Ions for Quantum Computation</i> . Science 292:1695, 2001.
56	A. Kitaev. <i>Fault-tolerant quantum computation by anyons</i> . Ann. Phys., NY, 303:2, 2003. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491602000180
57	 R. A. Ribeiro, A. A. Matoso, L. E. Oxman, A. Z. Khoury, and S. Pádua. <i>Experimental Robustness of the fractional topological phase to dephasing</i> .
58	Reinhold A Bertlmann and Philipp Krammer. <i>Bloch vectors for qudits</i> . Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 15 May 2008. URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/41/23/235303/meta