

Simulação de Monte Carlo em redes triangulares irregulares

Monte Carlo simulation in triangular irregular networks

DOI:10.34117/bjdv7n10-277

Recebimento dos originais: 20/09/2021

Aceitação para publicação: 20/10/2021

Alex de Lima Teodoro da Penha

Mestre em Engenharia (Instituto Militar de Engenharia) e Mestre em Economia (Universidade Candido Mendes). Endereço: Instituto Militar de Engenharia (IME), Departamento de Engenharia Cartográfica (DECART), Praça Gen. Tibúrcio, 80, Urca, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
E-mail: alexdapenha@gmail.com.

Vagner Braga Nunes Coelho

Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação (Universidade Federal do Rio de Janeiro) e Pós-Doutor em Ciências dos Computadores (Faculdade de Ciências da Universidade do Porto). Endereço: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Instituto de Geociências (IGC), Departamento de Cartografia, Av. Antônio Carlos, 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil.
E-mail: vagnercoelho@hotmail.com.

ABSTRACT

Triangular Irregular Networks (TINs) are one of the most used ways to represent surface topology when working with Digital Terrain Models (DTM) or Geographic Information Systems (GIS). Given this form of representation, this article investigates one probabilistic demonstration to quantify how each point's accuracy σ (sigma) can be considered to have ambiguity, from the topological point of view, in any new 2D Delaunay Triangulation. To achieve it, this research designed an initial demonstration that, there is a maximum precision for which the network topology remains constant in a new Delaunay Triangulation, at each point and in the TIN as a whole. The methodological approach was experimental, with various mathematical experiments carried out using the Monte Carlo Simulation method. First, for each point of the network, and then for all network points for varied σ . The experiments culminate in helping to solve the problem of the existence of maximum σ for which the probability of occurrence in constant TIN topology is 100%. The mathematical results originated the following statement: Considering a TIN generated by Delaunay Triangulation, if any point of coordinates (x_i, y_i) in a Triangular Irregular Network is disrupted (i.e., has its place altered), according to a Normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$, then, exists a value σ_{\max} (sigma maximum) for which the topology of the network remains constant. For example, it was found that $\sigma_{\max.1}$ of one point exists and is obtained by $\sigma_{\max.1} = 0.30866$, and at another point, $\sigma_{\max.2} = 0.2$. The results also indicate the following for TIN: Every two-dimensional Triangular Irregular Network generated by the Delaunay Triangulation has a value σ_* (sigma asterisk) to which the network topology remains constant. In this work, simulating the worst case of a Triangular Irregular Network: $\sigma_* = 0.2$. Finally, it is concluded that the σ maximum for each point exists, as well as for the network as a whole. However, the results need to be tested in more extensive networks to prove (or not) if it always

happened. This research advances the knowledge on the TIN combining simulation techniques and network topology.

Keywords: Irregular Triangular Networks, Monte Carlo Simulation, Topology, TIN, Delaunay Triangulation, Triangular Irregular Network, Monte Carlo Simulation, Topology, Delaunay Triangulation.

RESUMO

As Redes Triangulares Irregulares (TINs) são uma das formas mais utilizadas para representar topologia de superfície quando se trabalha com Modelos Digitais de Terreno (DTM) ou Sistemas de Informação Geográfica (GIS). Dada esta forma de representação, este artigo investiga uma demonstração probabilística para quantificar como a precisão de cada ponto σ (sigma) pode ser considerada ambígua, do ponto de vista topológico, em qualquer nova Triangulação Delaunay 2D. Para o conseguir, esta investigação concebeu uma demonstração inicial de que, existe uma precisão máxima para a qual a topologia da rede permanece constante numa nova Triangulação Delaunay, em cada ponto e no TIN como um todo. A abordagem metodológica foi experimental, com várias experiências matemáticas realizadas utilizando o método de Simulação de Monte Carlo. Primeiro, para cada ponto da rede, e depois, para todos os pontos da rede, para variados σ . As experiências culminaram em ajudar a resolver o problema da existência do máximo σ para o qual a probabilidade de ocorrência em topologia de NIF constante é de 100%. Os resultados matemáticos deram origem à seguinte afirmação: Considerando um NIF gerado pela Triangulação Delaunay, se algum ponto de coordenadas (x_i, y_i) numa Rede Triangular Irregular for perturbado (ou seja, tem o seu lugar alterado), de acordo com uma distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$, então, existe um valor σ_{max} (sigma máximo) para o qual a topologia da rede permanece constante. Por exemplo, verificou-se que $\sigma_{(max.1)}$ de um ponto existe e é obtido por $\sigma_{(max.1)}=0.30866$, e noutra ponto, $\sigma_{(max.2)}=0.2$. Os resultados indicam também o seguinte para o TIN: Cada Rede Triangular Irregular bidimensional gerada pela Triangulação Delaunay tem um valor σ^* (sigma asterisco) para o qual a topologia da rede permanece constante. Neste trabalho, simulando o pior caso de uma Rede Triangular Irregular: $\sigma^*=0.2$. Finalmente, conclui-se que existe o máximo de σ para cada ponto, bem como para a rede como um todo. No entanto, os resultados precisam de ser testados em redes mais extensas para provar (ou não) se isso sempre aconteceu. Esta investigação faz avançar os conhecimentos sobre o TIN combinando técnicas de simulação e topologia de rede.

Palavras-chave: Redes Triangulares Irregulares, Simulação de Monte Carlo, Topologia, TIN, Triangulação de Delaunay, Triangular Irregular Network, Monte Carlo Simulation, Topology, Delaunay Triangulation.

1 INTRODUÇÃO

As ciências geoespaciais (Kalyanam et al., 2019; Merlemis et al., 2021; Sikka et al., 2021) trabalham com aspectos geométricos e de Bancos de Dados Geográficos (BDGs). Na aquisição dos dados geométricos, a triangulação (Hegeman et al., 2014; Kastrisios and Tsoulos, 2018; Kim et al., 2010) e/ou a trilateração (Cheng et al., 2004; Mazuelas et al., 2009) são importantes métodos empregados para o povoamento desses

BDG. Tais métodos permitem a geração das Redes Irregulares de Triângulos, Triangular Irregular Networks (TINs) - (Kastrisios and Tsoulos, 2018; Reuter et al., 2007) utilizadas em Sistemas de Informações Geográficas (SIGs) - (Kamel Boulos and Geraghty, 2020; Mollalo et al., 2020).

Esse processamento de Redes Triangulares Irregulares para a geração e a extração de geometrias em um SIG é influenciado pelos erros inerentes a cada vértice (Florinsky, 2002). Em triangulações geodésicas (Kastrisios and Tsoulos, 2018; Martínez et al., 2005; Sharp et al., 2019; Wang et al., 2000) e topográficas (Florinsky, 2002; Li et al., 2006) as distâncias entre os vértices são muito grandes, o que indica que, provavelmente, a interferência na geração de triângulos é muito reduzida, devido à relação entre a precisão do ponto e o comprimento da aresta. No entanto, em uma TIN com arestas menores esses erros influenciam ainda mais a geração dos triângulos, que podem variar conforme se reduz a precisão no vértice. Tais erros indicam inclusive a rigidez matemática e física de seus triângulos.

Considerando esse contexto de aquisição de geometrias para SIGs a partir de redes triangulares, esta pesquisa se propõe a entender a seguinte questão: até quanto uma alteração na qualidade do ajustamento, ou seja, aumentando ou diminuindo a precisão nos pontos, a triangulação continuaria sendo considerada estável. Para atender a essa questão de pesquisa, desenvolveu-se uma demonstração inicial que permite mostrar que, existe uma precisão máxima para a qual a topologia da rede permanece constante depois de uma nova Triangulação de Delaunay. Primeiro, simulado a cada ponto e depois na TIN como um todo. A partir desses experimentos iniciais, é possível reconhecer padrões capazes de gerar novas TINs com triangulação similar, mesma topologia e mesma qualidade estatística da original.

Este artigo se propõe a contribuir com resultados que quantifiquem até que precisão σ (sigma) pode-se considerar o que é ambíguo do ponto de vista topológico em uma Rede Triangula Irregular. Com isso, avançamos o conhecimento sobre a topologia das Redes Irregulares Triangulares utilizando técnicas de simulação de Monte Carlo (Carmel et al., 2009; Gugiu and Dumitrache, 2005; Wałędzik and Mańdziuk, 2018).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conteúdos teóricos sobre a definição e a geração de Redes Triangulares Irregulares (TINs) por meio da Triangulação de Delaunay, de topologia de uma TIN e do

método de simulação de Monte Carlo são aspectos essenciais para o entendimento desta pesquisa.

Geração de uma Rede Triangular Irregular

Existem diversos algoritmos para a geração de uma Rede Triangular Irregular a partir de uma malha de pontos. Dentre eles, a Triangulação de Delaunay (Kastrisios and Tsoulos, 2018; Zeiler, 1999; Felgueiras e Goodchild, 1995; Tsai, 1993; Fernandes e Menezes, 2005) permite gerar triângulos mais homogêneos e próximos de um triângulo equilátero quanto possíveis, otimizando a superfície representada. Além disso, é a técnica mais popular utilizada para essa conversão, estando presente em praticamente todos os Sistemas de Informações Geográficas (Gosciewski, 2013; Hamid et al., 2019; Liu et al., 2017). Dessa forma, a TIN é um formato de dados vetorial definido por uma triangulação a partir de um conjunto de pontos amostrais irregularmente distribuídos nas coordenadas (x, y) , com respectivos valores em z , normalmente referentes à altimetria, que permitem modelar matematicamente uma superfície por meio de uma rede.

Topologia de uma Rede Triangular Irregular

O relacionamento topológico geométrico vetorial em uma Rede Triangular Irregular é o cerne deste artigo. Segundo Casanova et al. (2005), topologia é a parte da matemática na qual se investigam as propriedades das configurações que permanecem invariantes nas transformações de rotação, translação e escala. São relações espaciais que independem da geometria, mas sim dos elementos do relacionamento topológico vetorial. Esses elementos são, genericamente: conectividade, adjacência e contingência. Erciyas (2013), define a conectividade ou conexidade (connectedness) de um grafo da seguinte forma: “Um grafo está conectado se houver um caminho entre qualquer par de vértices V_1 e V_2 .” A adjacência é a informação sobre vizinhança de objetos espaciais, no qual uma aresta determina o polígono à esquerda e à direita. Por fim, contingência é a informação sobre a inclusão de um objeto espacial dentro de outro objeto espacial. Desses elementos do relacionamento topológico vetorial, a conectividade é essencial para o presente estudo, no que se refere à TIN. A topologia de uma rede triangular irregular é considerada constante se, com a alteração das coordenadas dos vértices, os triângulos continuarem sendo os mesmos após uma nova Triangulação de Delaunay.

Simulação de Monte Carlo

Outro aspecto essencial para o entendimento deste artigo é o método de Monte Carlo (Metropolis et al., 1953; Amar, 2006; Mark e Mordechai, 2011), uma aplicação de estatística inferencial com nome originado do Cassino de Monte Carlo, no principado de Mônaco. Por exemplo, Amar (2006) descreve alguns dos algoritmos que foram desenvolvidos para realizar simulações de Monte Carlo. Nesta pesquisa, a simulação de Monte Carlo é usada na experimentação do efeito dos erros aleatórios em cada coordenada de um ponto original da Rede Triangular Irregular.

3 MÉTODO DE PESQUISA

Na primeira etapa, define-se a modelagem matemática inicial. Por isso, seja o ponto bidimensional $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, no qual:

$$(\forall x_1 \in x)(\exists y_1 \in y)((x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2)$$

Sendo seus erros σ_{x_1} e σ_{y_1} associados às coordenadas em x e y ; e suas tendências τ_{x_i} e τ_{y_i} também associadas às mesmas coordenadas. Matematicamente, parte-se da premissa de incerteza associada às coordenadas geométricas de cada ponto em um Banco de Dados Geográfico. Portanto, analogamente, também associadas às geometrias linha e polígono. A partir desse enunciado, a coordenada cartesiana verdadeira de um ponto A pode ser definida por:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} x_1 + \tau_x \pm \sigma_{x_1} \\ y_1 + \tau_y \pm \sigma_{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{y_1} \end{bmatrix}$$

Logo, genericamente, a incerteza de um ponto bidimensional pode ser escrita na forma:

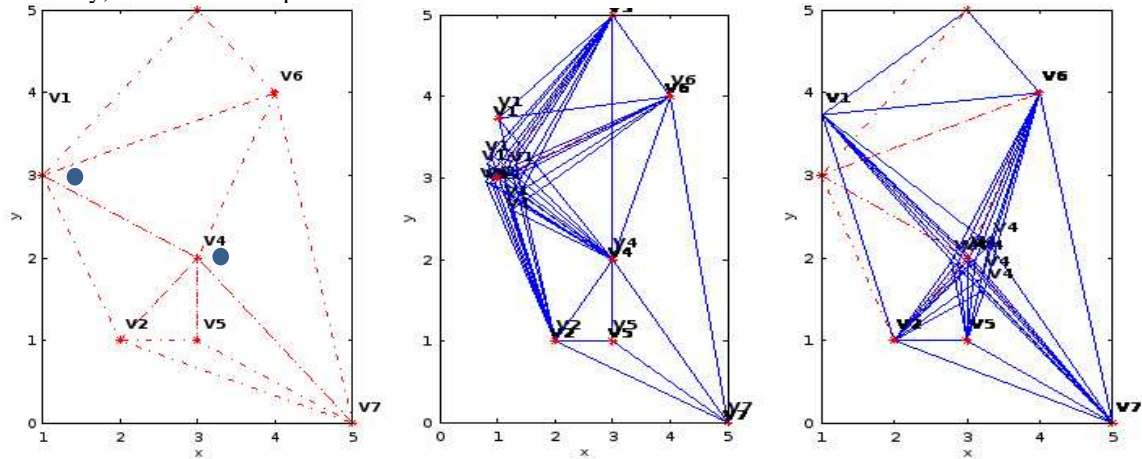
$$\hat{P}_i = \begin{bmatrix} x_i + \tau_x \pm \sigma_{x_i} \\ y_i + \tau_y \pm \sigma_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \end{bmatrix}$$

Como esta pesquisa não objetiva estudo de tendência, considerou-se $\tau = 0$.

Dessas definições iniciais, considerou-se alguns conjuntos de experimentos aleatórios com perturbação (alterações de coordenadas) de cada ponto da rede, chamados de experimentos ou simulações locais. Para efeito deste texto, os termos perturbação, ruído e oscilação dos pontos são usados como sinônimos. O termo simulação refere-se à rede triangular irregular cujos pontos estão sendo perturbados. Além disso, a partir dos experimentos buscou-se reconhecer se existe e até que precisão σ (sigma) a topologia

gerada pela triangulação pode ser considerada constante. Com isso, implementou-se um algoritmo para comparar topologias de redes triangulares irregulares.

Figura 1. Exemplo de simulação de topologia de uma rede triangular irregular, triangulada pelo método de Delaunay, alterando-se os pontos V1 e V4.



A figura 1 apresenta três exemplos de simulação com topologia constante. No primeiro gráfico (Figura 1.A) apresenta-se a Triangulação de Delaunay original, em vermelho; no segundo (Figura 1.B) a perturbação no ponto 1 (V1), com as triangulações simuladas em azul; e no terceiro gráfico (Figura 1.C) as perturbações no ponto 4 (V4), com as triangulações simuladas também em azul.

Os experimentos foram realizados em rede simulada com 4 pontos e configuração losangular, de tal forma a permitir testar a metodologia e os comportamentos locais para, em etapas posteriores da pesquisa, aplicá-la em redes triangulares irregulares com mais vértices. Foram realizados experimentos matemáticos aleatórios, por meio do método de Monte Carlo.

Para a simulação, em cada ponto foi inserido um ruído k vezes, de tal forma a simular a perturbação do ponto original. A perturbação do ponto foi realizada gerando-se um ruído conforme a distribuição normal padronizada, que possui média zero e variância igual a 1, portanto: $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$. A fórmula foi reescrita em x e em y por: $z_{x_i} = \frac{x_i - x(\text{ponto})}{\sigma}$ e $z_{y_i} = \frac{y_i - y(\text{ponto})}{\sigma}$. Nas simulações fez-se: $\sigma \cdot z = \hat{x} - x(\text{ponto})$ e $\sigma \cdot z = \hat{y} - y(\text{ponto})$. Portanto,

$$\hat{x}_i = (\sigma \cdot z_i) + x(\text{ponto}); \hat{y}_i = (\sigma \cdot z_i) + y(\text{ponto})$$

No qual \hat{x}_i e \hat{y}_i são as novas coordenadas obtidas pela perturbação de cada ponto original e $i = 1, \dots, k$. Para a geração dos números pseudoaleatórios normalmente

distribuídos optou-se pelo método Marsaglia and Tsang Ziggurat, descrito em Marsaglia e Tsang, 2000.

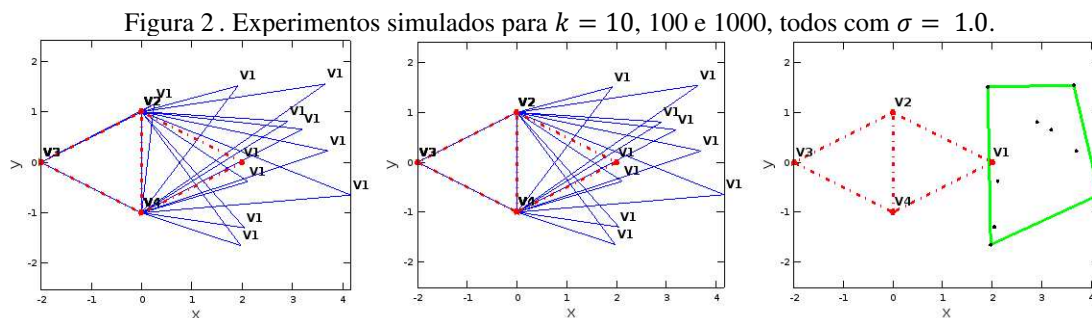
Inicialmente, as oscilações foram realizadas para cada ponto da rede de forma isolada. Cada vértice foi inicialmente perturbado com $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = 1$, genericamente modelado na forma:

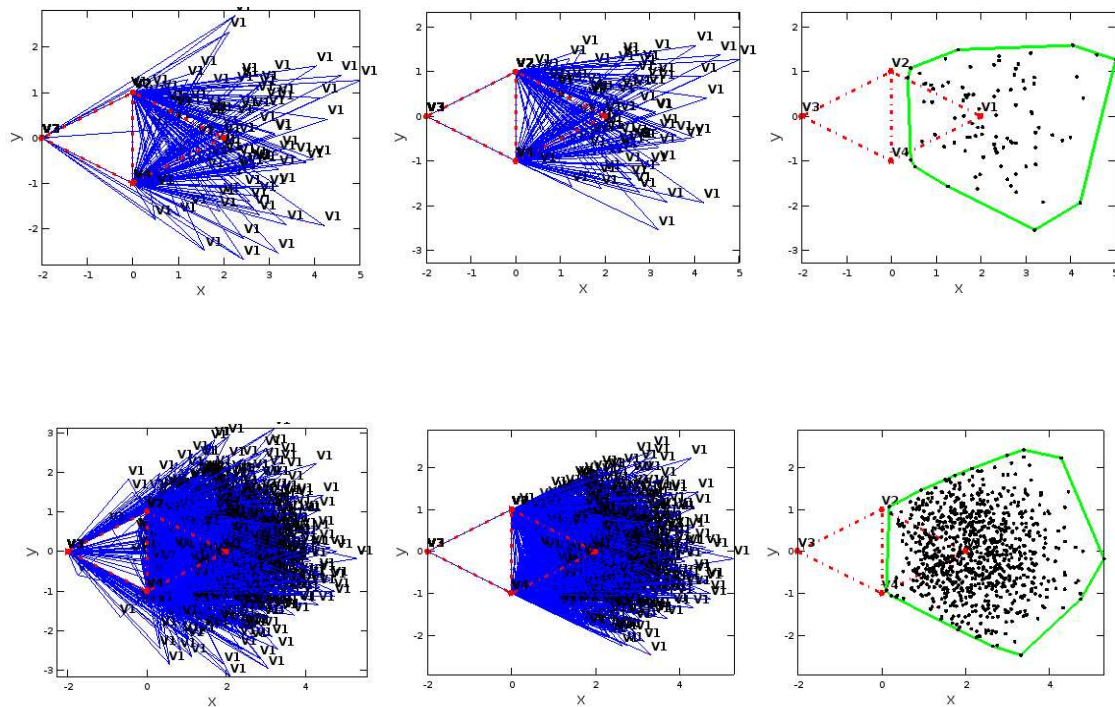
$$\hat{V}_i = \begin{bmatrix} x_i \pm \sigma_{x_i} \\ y_i \pm \sigma_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \end{bmatrix}$$

Em seguida, realizou-se a simulação na rede para σ variados. A primeira rede simulada foi composta de 4 pontos $V_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$, formando um losango de coordenadas $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Esta rede foi escolhida inicialmente por ser a menor quantidade de pontos que permite triangulações diferentes durante a sua perturbação. A escolha na forma de losango foi motivada por ser uma geometria simples para as análises iniciais.

3 RESULTADOS

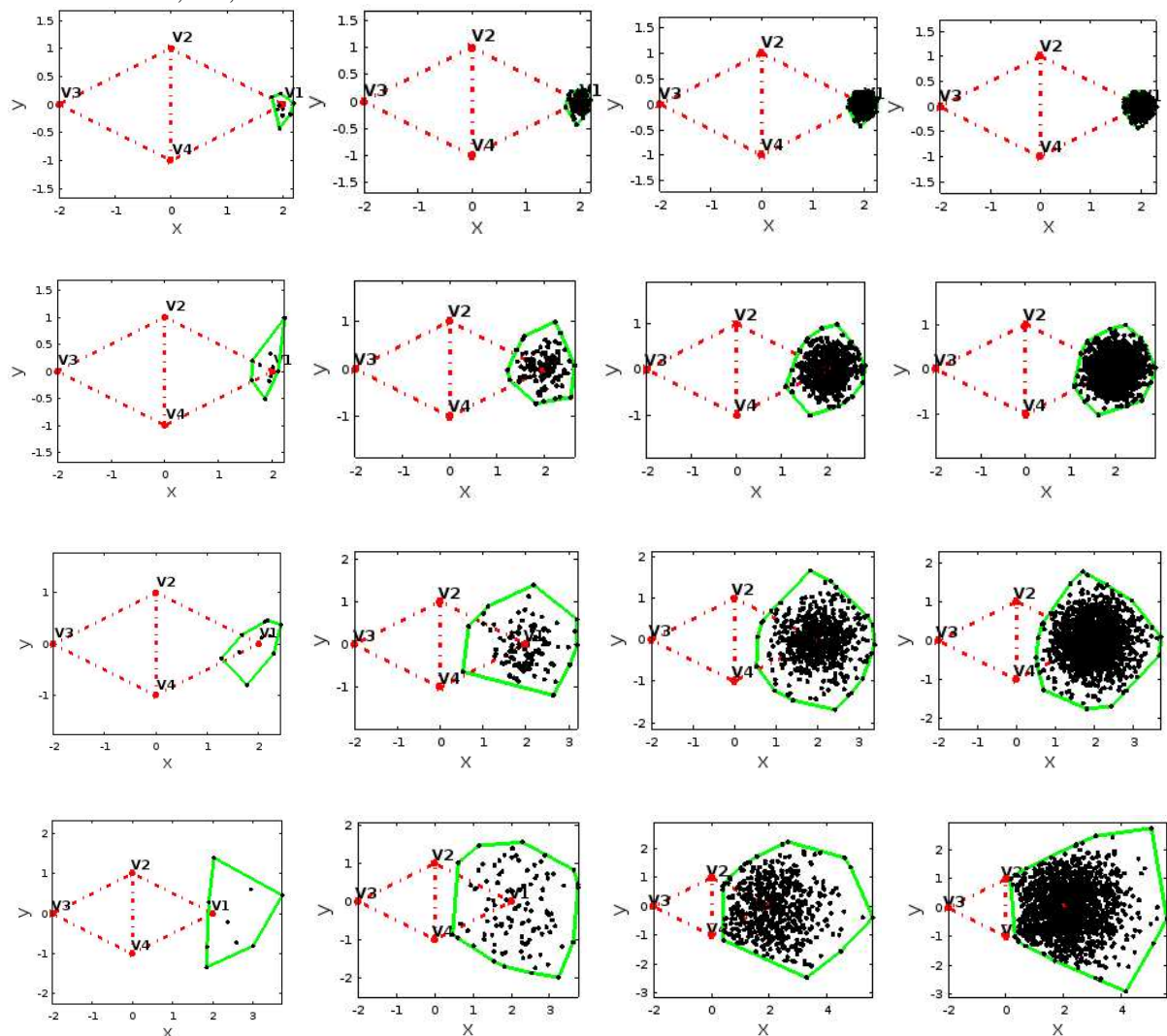
Os resultados das simulações de Monte Carlo são apresentados em cada ponto da rede separadamente, seguida da análise dos resultados. As figuras apresentam as simulações realizadas no ponto V_1 (figura 2 e figura 3) e no ponto V_2 (figura 4 e figura 5). Todas as análises relativas aos pontos V_3 e V_4 são análogas, pois são simétricos.





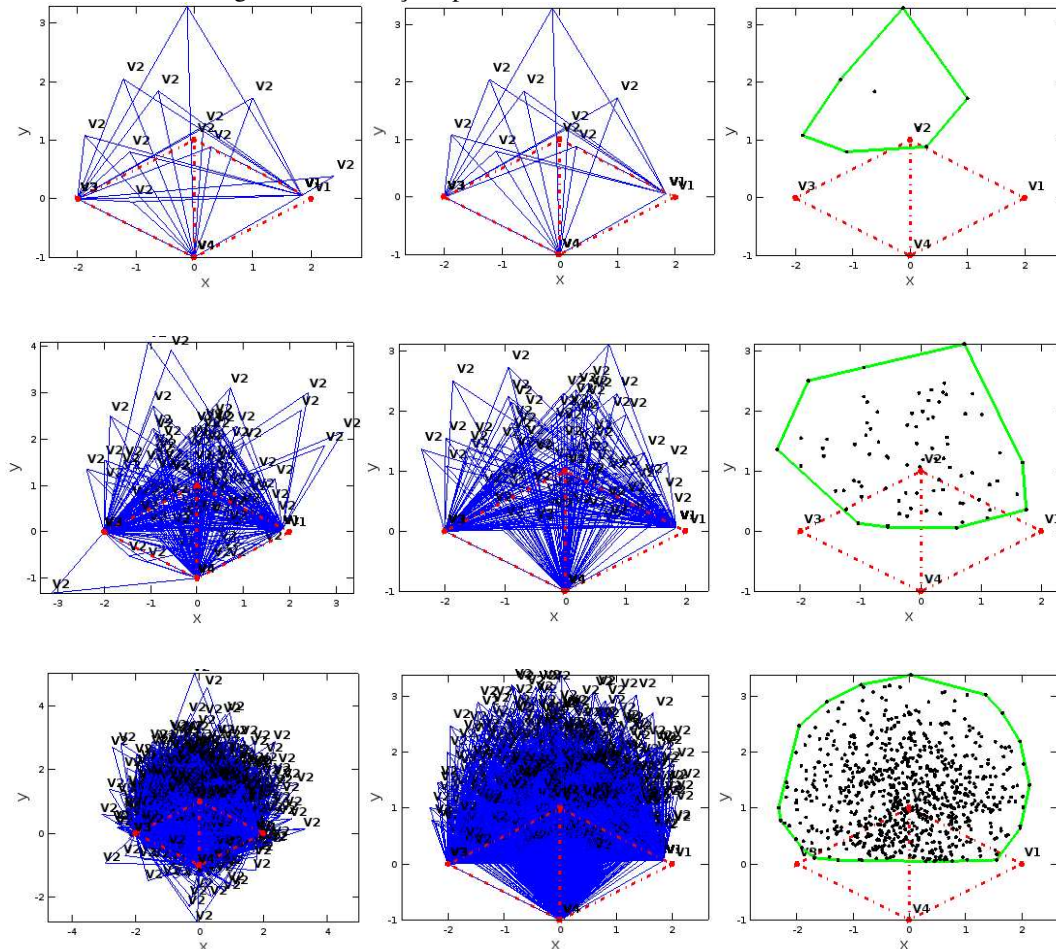
A figura (Figura 2) apresenta os resultados de todas as Triangulações de Delaunay simuladas: (i) Sem comparação de topologia, ou seja, mantendo as k perturbações referentes ao ponto 1 original, com as triangulações simuladas apresentadas em azul; (ii) As triangulações com topologia constante, ou seja, $k_{TC} \leq k$, no qual k_{TC} é a quantidade de perturbações com topologia constante (TC), também em azul; e (iii) O fecho convexo resultante dos pontos com ruído que permitiram gerar Triangulações de Delaunay com a mesma topologia da rede original, apresentado na cor verde. Os experimentos aleatórios foram realizados para $k = 10, 100$ e 1000 , apresentados cada um em uma linha com os 3 gráficos descritos, inicialmente com $\sigma = 1$. Mostrou-se necessário identificar para outros σ qual o comportamento da região por onde o ponto 1 pode oscilar e, mesmo assim, permanecer com topologia constante.

Figura 3. Fechos convexos locais do ponto perturbado para simulações com $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$ e 1.0 ; cada um com $k = 10, 100, 500$ e 1000 .



A figura 3 apresenta os pontos e os fechos convexos que delimitam a região de topologia constante com simulações distintas, alterando-se o valor de σ para $0.1, 0.3, 0.5$ e 1.0 ; cada um com $k = 10, 100, 500$ e 1000 . Na figura são apresentados em cada linha $k = 10, 100, 500$ e 1000 para $\sigma = 0.1$; $k = 10, 100, 500$ e 1000 para $\sigma = 0.3$; e assim por diante.

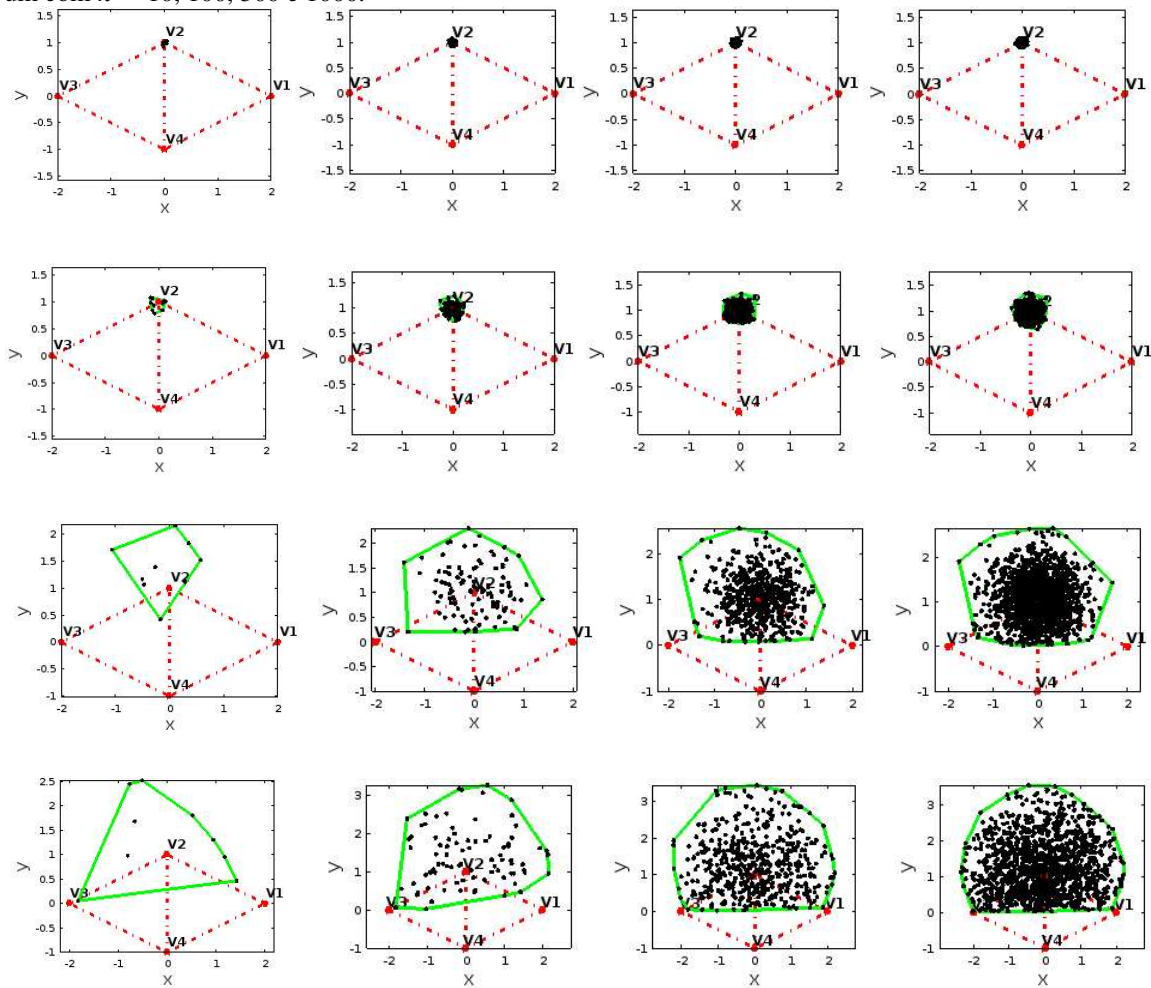
Figura 4. Simulações para $k = 10, 100$ e 1000 , com $\sigma = 1.0$.



Na segunda simulação foram realizadas perturbações no ponto V_2 . Assim como ocorreu no vértice 1, foram realizados experimentos no ponto 2 com $k = 10, 100$ e 1000 , com $\sigma = 1.0$. Em seguida (Figura 4), os experimentos permitem reconhecer padrões de comportamento quando σ é variável.

Da mesma forma, com o objetivo de identificar o padrão de comportamento para diversos σ quando a topologia permanece inalterada, foram realizadas simulações para os valores de $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$ e 1.0 ; cada experimento com perturbações $k = 10, 100, 500$ e 1000 . A figura 5 apresenta esses resultados, de tal forma que, a cada linha de gráficos estejam apresentados todos os experimentos de um determinado σ , com k na ordem crescente.

Figura 5. Experimentos para o fecho convexo dos pontos com simulações para $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$ e 1.0 ; cada um com $k = 10, 100, 500$ e 1000 .



4 DISCUSSÕES

A simulação de Monte Carlo é usada para resolver o problema de identificação da existência de σ máximo para o qual a probabilidade de ocorrer topologia constante na rede triangular irregular é de 100% após uma nova triangulação pelo método de Delaunay. Os resultados matemáticos deram origem à seguinte declaração.

Considere uma Rede Triangular Irregular (TIN) gerada a partir da Triangulação de Delaunay. Se um ponto qualquer de coordenadas (x_i, y_i) é perturbado (tem seu lugar alterado), segundo uma distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$, então existe um valor σ_{max} (sigma máximo) para o qual a topologia da TIN permanecerá constante.

Demonstração: Para encontrar o sigma máximo σ_{max} para o qual a topologia permanece constante, realizou-se milhares de perturbações no ponto 1 da seguinte forma: σ variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001; conforme tabela 1.

Tabela 1. Resultados das simulações com σ variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001

Intervalos de variação de σ	Resultados de $\sigma_{max.1}$ para $P(TC = 1) = 1$	Resultados de $\sigma_{min.1}$ para $P(TC = 1) < 1$
0.1:0.01:0.5	$\sigma = 0.38000$	$\sigma = 0.39000$
0.1:0.001:0.5	$\sigma = 0.35100$	$\sigma = 0.35200$
0.1:0.0001:0.5	$\sigma = 0.30920$	$\sigma = 0.30930$
0.1:0.00001:0.5	$\sigma = 0.30866$	$\sigma = 0.30867$
0.1:0.000001:0.5	$\sigma = 0.30909$	$\sigma = 0.30909$

Com isso, verifica-se que $\sigma_{max.1}$ do ponto 1 existe e é obtido por $\sigma_{max.1} = \min(\sigma_{max}) = 0.30866$. Para o ponto 2, com o objetivo de encontrar $\sigma_{max.2}$ realizou-se as simulações conforme a tabela 2.

Tabela 2. Resultados das simulações com σ variando de 0.1 a 5 com intervalos de 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; ...; 0.000001

Intervalos de variação de σ	Resultados de $\sigma_{max.2}$ para $P(TC = 1) = 1$	Resultados de $\sigma_{min.2}$ para $P(TC = 1) < 1$
0.1:0.1:0.5	$\sigma = 0.20000$	$\sigma = 0.30000$
0.1:0.01:0.5	$\sigma = 0.26000$	$\sigma = 0.27000$
0.1:0.001:0.5	$\sigma = 0.25700$	$\sigma = 0.25800$
0.1:0.0001:0.5	$\sigma = 0.25190$	$\sigma = 0.25200$
0.2:0.00001:0.5	$\sigma = 0.20240$	$\sigma = 0.20241$

Com isso, identificou-se $\sigma_{max.2} = 0.2$.

4 CONCLUSÕES

Da análise dos experimentos simulados realizados por meio da Simulação de Monte Carlo, é possível propor o seguinte, em relação à oscilação máxima dos pontos da Rede Triangular Irregular.

Toda Rede Triangular Irregular (TIN) gerada a partir da Triangulação de Delaunay de duas dimensões possui um valor σ_* (sigma asterisco) para o qual a topologia da rede permanecerá constante, obtido por:

$$\sigma_* = \min(\max \sigma_i) = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}, \dots, \sigma_{max.n})$$

Demonstração: Generalizando, fazendo o pior caso da rede triangular irregular como: $\sigma_* = \min(\sigma_{max.1}, \sigma_{max.2}) = \min(0.30866, 0.2) = 0.2$.

Note-se que, apesar do método de Monte Carlo ser ineficiente do ponto de vista computacional, sendo dependente de um grande número de perturbações (alteração das coordenadas dos pontos) para a obtenção dos resultados probabilísticos, ele se mostrou adequado para este tipo de pesquisa demonstrativa.

Por fim, é possível concluir, para os casos simulados, que existe um σ máximo para cada ponto da rede triangular irregular triangulada pelo critério de Delaunay, assim como, existe um σ máximo para o qual a rede como um todo se mantém com a sua topologia constante. Sugere-se que em trabalhos futuros sejam realizados experimentos simulados com múltiplas redes triangulares irregulares com múltiplos tamanhos, além de simulações em redes reais para provar (ou não) os enunciados propostos neste artigo.

REFERÊNCIAS

Amar, J. G.: The Monte Carlo method in science and engineering, *Comput. Sci. Eng.*, 8 (2), 9–19, doi:10.1109/MCSE.2006.34, 2006.

Casanova, M., Câmara, G., Davis, C., Vinhas, L. e Queiroz, G. R. de: Bancos de Dados Geográficos, MundoGEO, Curitiba., 2005.

Carmel, Y., Paz, S., Jahashan, F., Shoshany, M., 2009. Assessing fire risk using Monte Carlo simulations of fire spread. *For. Ecol. Manag.* 257, 370–377. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.09.039>

Cheng, X., Thaeler, A., Xue, G., Chen, D., 2004. TPS: A time-based positioning scheme for outdoor wireless sensor networks. Presented at the Proceedings - IEEE INFOCOM, pp. 2685–2696. <https://doi.org/10.1109/INFCOM.2004.1354687>

Florinsky, I.V., 2002. Errors of signal processing in digital terrain modelling. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 16, 475–501. <https://doi.org/10.1080/13658810210129139>

Gosciewski, D., 2013. Selection of interpolation parameters depending on the location of measurement points. *GIScience Remote Sens.* 50, 515–526. <https://doi.org/10.1080/15481603.2013.827369>

Gugiu, D., Dumitrache, I., 2005. Monte Carlo estimation of the dose and heating of cobalt adjuster rods irradiated in the CANDU 6 reactor core. *Radiat. Prot. Dosimetry* 116, 69–72. <https://doi.org/10.1093/rpd/nci270>

Hamid, H.M., Al-Azawi, F.W., Abbas, Z.D., Hassan, S.T., Makki, Z.F., 2019. Producing a geographical information system (GIS) model for the preliminary location of groundwater wells for the regions of al Najaf government. *Plant Arch.* 19, 3515–3521.

Hegeman, J.W., Sardeshmukh, V.B., Sugumaran, R., Armstrong, M.P., 2014. Distributed LiDAR data processing in a high-memory cloud-computing environment. *Ann. GIS* 20, 255–264. <https://doi.org/10.1080/19475683.2014.923046>

Kalyanam, R., Zhao, L., Song, C., Biehl, L., Kearney, D., Kim, I.L., Shin, J., Villoria, N., Merwade, V., 2019. MyGeoHub—A sustainable and evolving geospatial science gateway. *Future Gener. Comput. Syst.* 94, 820–832. <https://doi.org/10.1016/j.future.2018.02.005>

Kamel Boulos, M.N., Geraghty, E.M., 2020. Geographical tracking and mapping of coronavirus disease COVID-19/severe acute respiratory syndrome coronavirus 2 (SARS-CoV-2) epidemic and associated events around the world: How 21st century GIS technologies are supporting the global fight against outbreaks and epidemics. *Int. J. Health Geogr.* 19. <https://doi.org/10.1186/s12942-020-00202-8>

Kastrisios, C., Tsoulos, L., 2018. Voronoi tessellation on the ellipsoidal earth for vector data. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 32, 1541–1557. <https://doi.org/10.1080/13658816.2018.1434890>

Kim, J.O., Yu, K., Heo, J., Lee, W.H., 2010. A new method for matching objects in two different geospatial datasets based on the geographic context. *Comput. Geosci.* 36, 1115–1122. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2010.04.003>

Li, R., Archinal, B.A., Arvidson, R.E., Bell, J., Christensen, P., Crumpler, L., Des Marais, D.J., Di, K., Duxbury, T., Golombek, M.P., Grant, J.A., Greeley, R., Guinn, J., Johnson, A., Kirk, R.L., Maimone, M., Matthies, L.H., Malin, M., Parker, T., Sims, M., Thompson, S., Squyres, S.W., Soderblom, L.A., 2006. Spirit rover localization and topographic mapping at the landing site of Gusev crater, Mars. *J. Geophys. Res. E Planets* 111. <https://doi.org/10.1029/2005JE002483>

Liu, Z.-P., Yang, B., Liu, J., He, H.-J., 2017. Three-dimensional limit equilibrium method based on GRASS GIS and TIN sliding surface. *Yantu Lixue/Rock Soil Mech.* 38, 221–228. <https://doi.org/10.16285/j.rsm.2017.01.028>

Martínez, D., Velho, L., Carvalho, P.C., 2005. Computing geodesics on triangular meshes. *Comput. Graph. Pergamon* 29, 667–675. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2005.08.003>

Mazuelas, S., Bahillo, A., Lorenzo, R.M., Fernandez, P., Lago, F.A., Garcia, E., Blas, J., Abril, E.J., 2009. Robust Indoor Positioning Provided by Real-Time RSSI Values in Unmodified WLAN Networks. *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.* 3, 821–831. <https://doi.org/10.1109/JSTSP.2009.2029191>

Merlemis, N., Kesidis, A.L., Sianoudis, I., 2021. Measurement of laser beam spatial profile by laser scanning. *Eur. J. Phys.* 42. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abba01>

Mollalo, A., Vahedi, B., Rivera, K.M., 2020. GIS-based spatial modeling of COVID-19 incidence rate in the continental United States. *Sci. Total Environ.* 728. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.138884>

Reuter, H.I., Nelson, A., Jarvis, A., 2007. An evaluation of void-filling interpolation methods for SRTM data. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 21, 983–1008. <https://doi.org/10.1080/13658810601169899>

Sharp, N., Soliman, Y., Crane, K., 2019. Navigating intrinsic triangulations. *ACM Trans. Graph.* 38. <https://doi.org/10.1145/3306346.3322979>

Sikka, G., Yenneti, K., Singh, R.B., 2021. IGU-YECG special issue: Geospatiality and sustainable development goals. *Geogr. Environ. Sustain.* 14, 6–8.

Wałędzik, K., Mańdziuk, J., 2018. Applying hybrid Monte Carlo Tree Search methods to Risk-Aware Project Scheduling Problem. *Inf. Sci.* 460–461, 450–468. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.08.049>

Wang, Y., Peterson, B.S., Staib, L.H., 2000. Shape-based 3D surface correspondence using geodesics and local geometry. Presented at the Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 644–651.

Erciyees, K.: *Distributed Graph Algorithms for Computer Networks*, Springer-Verlag London, London, 2013.

Felgueiras, C.; Goodchild, M. F.: Two papers on triangulated surface modeling: Technical Report 95-2, National Center for Geographic Information and Analysis - NCGIA, University of California, Santa Barbara, CA, USA. [online] Available from: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.25.6645> (Accessed 26 November 2013), 1995.

Fernandes, M. do C.; Menezes, P. M. L. de: *Comparação Entre Métodos Para Geração de MDE Para a Obtenção de Observações em Superfície Real no Maciço da Tijuca - RJ*, *Rev. Bras. Cartogr.*, 57(02), 154–161, 2005.

Goodchild, M. F. Attribute accuracy. In: Guptill, S.C. and Morrison, J.L. (eds.), *Elements of Spatial Data Quality*. Amsterdam: Elsevier, pp. 59–79, 1995.

Mark, S. and Mordechai, S.: *Applications of Monte Carlo Method in Science and Engineering*, InTech, Rijeka, Croatia. [online] Available from: www.intechopen.com, 2011.

Marsaglia, G. and Tsang, W. W.: The Ziggurat Method for Generating Random Variables, *J. Stat. Softw.*, 5(8), 1–7 [online] Available from: <http://www.jstatsoft.org/v05/i08/>, 2000.

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N. and Teller, A. H.: Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, *J. Chem. Phys.*, 21(6), 1087–1092, 1953.

Tsai V. J. D. 1993, Delaunay triangulations in TIN creations: an overview and a linear-time algorithm. *International Journal of Geographical Information Systems*, 7, 501-524.
Zeiler, M.: *Modeling Our World: The ESRI Guide to Geodatabase Design*, Environmental Systems Research Institute, Inc., Redlands, California, EUA, 1999.