JÚLIO CÉSAR COSTA

DETERMINANTES E SEUS TEOREMAS
UMA NOVA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao corpo Docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientadora: Jussara Moreira

Belo Horizonte
2016

Ao meu pai, aos meus familiares
e amigos que sempre me apoiaram.

“Posso ainda não ter
chegado aonde eu queria,
mas estou mais perto do que ontem.”
Sem autor.

Agradeço a Deu pelas oportunidades e bençãos na minha vida.

A todos que me apoiaram na minha vida pessoal e profissional, aos que me deram o impulso inicial para chegar até onde estou.

Agradeço a coordenadora de Pós-Graduação Jussara Moreira pela paciência, atenção, disponibilidade e compreensão.

Agradeço ao meu Pai que sempre fez de tudo para eu obter o sucesso.

Meus mais sinceros agradecimentos.

Sumário

Capítulo 1

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma nova proposta para se trabalhar determinante com alunos do ensino médio regular. Inicialmente trataremos das noções do cálculo de determinante juntamente com todos os teoremas que envolvem tais cálculos. No primeiro capítulo definiremos o que é um determinante para darmos início às demonstrações que serão citadas neste trabalho. Nos capítulos seguintes, será mostrado como é feito o cálculo do determinante de matrizes de 1ª, 2ª e 3ª ordem e em seguida será mostrado o que é um cofator de uma matriz, para então serem demonstrados os teoremas de Laplace, de Binet e o de Jacobi, comentando também sobre a Regra de Sarrus e a Regra de Chió. Por fim, explicamos o que vem a ser a Matriz de Vandermonde sendo proposto ao final deste trabalho uma nova ferramenta a ser utilizada pelos alunos durante as aulas.

Capítulo 2

INTRODUÇÃO

Baseado na experiência em lecionar para alunos do 2º ano do ensino médio desde 2013, nota-se que autores de livros didáticos abordam de maneira sucinta o assunto sobre determinantes, sendo exposto dentre as coleções consultadas algo que não possa vir a contribuir para o aprendizado dos alunos sobre tal conteúdo. A abordagem sobre o estudo de determinantes é feita após o estudo de matrizes, sendo este trabalho proposto partindo do pressuposto de que o público alvo já tenha estudado o conteúdo de matrizes. Estudar determinante pode vir a ser muito útil como uma ferramente para a resolução de sistemas lineares que é trabalhado logo após esta unidade, no que pode ser uma justificativa aos alunos do porquê se estudar determinantes, ressaltando para estes tal importância por ser um pré-requisito para conteúdos seguintes. Portanto este trabalho tem por objetivo mostrar a importância dos cálculos envolvendo determinantes, aplicações, expor um novo plano de se apresentar este contexto demonstrando importantes teoremas que também são esquecidos até por autores de livros didáticos em exercício neste ano de 2016, mas sempre procurando uma abordagem mais simplificada para que o aluno possa compreender o que está sendo ensinado e também entender tal importância, despertando nos discentes o aprendizado e a motivação em se discutir e se informar sobre aquilo que está sendo trabalhado.

Capítulo 3

DETERMINANTES

3.1 Ideia de Determinante

Ao se iniciar um novo conceito matemático, deve-se propor dentro do tema trabalhado algo que faça sentido para os alunos, começando com uma linguagem prática, mais fácil de ser compreendida e se possível dentro de sua realidade. Nos livros didáticos pesquisados, os autores definem determinante como sendo: "*Determinante de uma matriz quadrada é um número real que associamos a essa matriz segundo algumas regras.*" A definição de determinante vai muito além desta afirmação fechada e que não faz nenhum sentido para o aluno. Inicialmente temos que pensar que, para transmitir algo novo para nosso aluno nos dias atuais, é primordial dar um sentido mais concreto, simplesmente colocar uma definição como essa gera um certo desconforto nos alunos, que acabam sempre questionado a razão de estarem estudando aquele determinado assunto. Logo, uma estratégia para motivar tal aprendizado é ensinar mostrando diversas aplicações, para que todos possam compreender a justificativa do uso de determinantes. A abordagem deve ser feita portanto apresentando a utilização do determinante em aplicações diretas, mostrando por exemplo seu uso em cálculos de áreas de triângulos, na resolução de sistemas de equações lineares, volumes de tetraedros e paralelepípedos, determinação de equações de retas, dentre outras aplicações. Com todas essas variadas aplicações, o aluno já irá ter uma noção do quão importante é entender o conteúdo citado.

3.2 Cálculo dos Determinantes

Dentre o espaço amostral de livros pesquisados que serão citados logo a seguir, o tema em questão é, em sua maioria, apresentado de uma forma confusa para os alunos. Há coleções que abordma o assunto envolvendo sistemas lineares, há aqueles volumes que tratam tal tema como cálculo automatizado aplicando diretamente regras (regra de Cramer e de Sarrus) e outro reserva um capítulo somente para ser tratado sobre e especificamente voltado para o contexto de determinante. É importante haver um certo planejamento e uma sequência didática daquilo que vá se propor aos alunos. Introduzir um conceito envolvendo dentro deste outros diversos assuntos, acaba confundindo o aluno como no volume de Gelson Iezzi – Matemática e Aplicação da editora Saraiva, onde o autor aborda o cálculo de determinante dentro do assunto de sistemas lineares, o que acaba forçando ao aluno entender dois conceitos simultaneamente, não há uma preparação adequada. Podemos também verificar que em outra coleção de Katia Stocco e Maria Ignez Diniz – Matemática Ensino Médio, o assunto é bem objetivo e voltado diretamente a mostrar e a treinar como obter diretamente o valor do determinante. A partir disso podemos perceber que realmente tal conteúdo está sendo apresentado de forma a simplesmente automatizar o cálculo não contribuindo para um senso crítico por parte dos alunos. Das amostras pesquisadas, somente uma coleção foi de fato interessante que é o volume de Joamir Souza da editora FTD, este volume traz detalhamentos sobre o desenvolvimento de determinante e demonstrações de dois teoremas fundamentais, onde a linguagem é simples e de fácil entendimento, digamos auto-explicativo. É preciso expor para os alunos que existem diversas formas de se encontrar o determinante de uma matriz, e que algumas formas serão mostradas em sala e até mesmo em livros, caso o livro adotado não apresente o conteúdo necessário, o professor poderá buscar em outras fontes de forma a contribuir com o aprendizado do aluno fazendo com que este possa ter caminhos distintos em sua resolução. Será mostrado a seguir uma sugestão para se trabalhar determinante em sala de aula com algumas aplicações diretas de determinante para que possa fazer sentido na justificativa do aprendizado deste conteúdo, além dos métodos em resolver os diversos tipos de determinantes.

3.2.1 Determinante de Matrizes de Ordem 1.

Uma matriz de ordem 1, ou seja, uma matriz 1x1 (uma linha e uma coluna) é composta por um único elemento, no qual o determinante desta matriz será igual ao próprio elemento que constitui a matriz.

Então dada uma matriz $A_{1x1} = [a_{11}]$, dizemos que o determinante det.(A) = a_{11}.

Para o cálculo deste determinante não temos muito o que se falar pois quando a matriz possui somente um elemento não há o que se fazer com a matriz e muito menos com o termo.

<u>3.2.1.1 Exemplo 1</u>

Dada a matriz M = [2], o det.(M) = 2.

<u>3.2.1.2 Exemplo 2</u>

Considere a matriz B = [–3], o det.(B) = –3.

3.2.2 Determinante de Matrizes de Ordem 2.

Já a partir do cálculo de determinante de uma matriz de ordem 2, envolverá certos cálculos. Para calcular o determinante de uma matriz 2x2, primeiramente devemos identificar as diagonais principal e secundária e, os elementos que as constituem. Identificadas as diagonais e seus respectivos elementos, o determinante será dado através da diferença dos produtos dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária.

Então, se temos a matriz A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz A será dado por:

$$\det.(A) = (a11 \cdot a22) - (a12 \cdot a21)$$

3.2.2.1 Exemplo 1

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, logo det.(A) = (2 · 8) – (4 · 3) = 4.

3.2.3 Determinante de Matrizes de Ordem 3.

Há diversos caminhos para se calcular determinantes de matrizes 3x3. Nos quatro livros didáticos pesquisados em exercício no ano de 2016, só é mostrado a resolução pela Regra de Sarrus e pelo Teorema de Laplace, não proporcionando aos discentes outros métodos de se aprender a calcular tais determinantes. Então, será feito a seguir um plano contendo todos os meios de se chegar ao determinante de uma matriz de ordem 3, de forma simplificada para que os alunos compreendam tais caminhos distintos.

3.2.3.1 Teorema de Laplace

Um dos principais teoremas de que se trata no cálculo de determinantes é o teorema de Laplace. Este teorema nos dá uma outra forma de calcular o determinante de uma matriz de 3ª ordem, mas ele também nos permite obter determinantes de ordens superiores ou iguais a 2. Portanto o teorema de Laplace é usado em matrizes de ordem n, sendo $n \geq 2$ com $n \in N$. Mas pelo espaço amostral da pesquisa realizada, os livros em exercício atualmente pecam pois não há demonstrações e justificativas sobre o teorema. O ideal seria introduzir o teorema de Laplace adaptando sua demonstração às diversas realidades das salas de aula contextualizando e diversificando os tipos de linguagens. O principal objetivo deste teorema é fazer com que o aluno entenda que aprender tal conceito é muito importante pois ele resolve determinantes de qualquer ordem (sendo a ordem mínima igual a 2). Para a aplicação deste teorema precisaremos da ideia dos co-fatores ij de uma matriz. Mas antes de se iniciar tal teorema, é preciso mostrar o que vem a ser um co-fator aos alunos.

O co-fator ij é basicamente o resultado do produto de $(-1)^{i+j}$ com o determinante Dij obtido pela eliminação da linha e coluna em que pertence o elemento a_{ij}. É ideal optar por àquela fileira que possui a maior quantidade de zeros se for o caso, pois o cálculo torna-se mais fácil. Pela linguagem e se tratando de alunos de escola pública estadual, o aluno pode vir a não entender pela forma que for abordado este teorema, sendo muito importante ter uma linguagem apropriada, um diálogo simplificado para que todos possam entender. Então para se obter um co-fator de uma matriz, primeiramente fixamos cada elemento, um por vez, onde uma vez fixado àquele elemento iremos identificar qual sua ordem na matriz, em qual linha e coluna ele pertence que são indicadas por i e j. Feito isso, eliminaremos a linha e a coluna na qual o elemento pertença, e formaremos uma matriz com os elementos restantes. O co-fator será dado através do produto de $(-1)^{i+j}$ (sendo i a linha do elemento e j a coluna) com o determinante da matriz formada após a eliminação da linha e da coluna do elemento em questão. Consideremos a matriz A seguinte e vejamos o passo a passo da obtenção de seus co-fatores.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores da matriz A são:

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$
- $C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$
- $C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$
- $C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$
- $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$
- $C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$
- $C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix}$
- $C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$

O determinante de matrizes de ordem n com n $\geq$ 2 é obtido, através do teorema de Laplace da seguinte maneira:

"*Fixamos uma linha ou uma coluna no qual o determinante será dado através da soma do produto de cada elemento da respectiva linha ou coluna, com seu respectivo co-fator.*"

Utilizando uma linguagem simplificada, pode-se dizer que o determinante de uma matriz através do teorema de Laplace pode ser obtido, primeiramente, fixando uma linha ou coluna a critério do aluno, mas optando pela fila que possui a maior quantidade de zeros pode facilitar o cálculo. Suponhamos que tenham fixado uma linha, então calcula-se o co-fator de cada elemento desta linha, e em seguida multiplicaremos cada co-fator pelo seu respectivo elemento, para então somarmos todos os resultados obtidos. Tal resultado obtido será o determinante da matriz. Veja que dada uma matriz A de 4ª ordem, genericamente o cálculo será da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, fixaremos uma linha ou coluna qualquer. Escolhe-se ao acaso a primeira linha. O determinante det.(A) será dado da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{bmatrix}$$

det.(A) = $(a_{11} \cdot C_{11}) + (a_{12} \cdot C_{12}) + (a_{13} \cdot C_{13}) + (a_{14} \cdot C_{14})$

- $a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{vmatrix} = K$
- $a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{vmatrix} = P$
- $a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a21 & a22 & a24 \\ a31 & a32 & a34 \\ a41 & a42 & a44 \end{vmatrix} = Y$
- $a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \end{vmatrix} = X$

O determinante será dado pelo somatório de K + P + Y + X.

Ou seja: det.(A) = K + P + Y + X.

3.2.3.1.1 Exemplo 1

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ através do teorema de Laplace.

Para encontrar o determinante desta matriz de ordem 2 através do teorema de Laplace, escolhe-se uma das fileiras e no caso será escolhida a primeira coluna. Então o cáculo será feito da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Daí calcula-se os co-fatores de cada elemento desta coluna.

- $C(0) = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$
- $C(4) = (-1)^{2+1} \cdot 5 = (-1) \cdot 5 = -5$

Logo det.(A) = $0 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = 0 - 20 = -20$.

3.2.3.1.2 Exemplo 2

Calcular o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ através do teorema de Laplace.

Neste caso, deve-se fazer a escolha de qual fila irá ser fixada. Optando pela primeira linha, o cálculo será feito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcularemos os co-fatores de cada elemento desta fileira a seguir. Veja:

- $C(2) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (5 - 4) = 1 \cdot 1 = 1.$
- $C(3) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (0 - 8) = (-1) \cdot (-8) = 8.$
- $C(1) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (0 - 20) =) \cdot (-20) = -20.$

Portanto pela definição, dizemos que:

$\det.(A) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot (-20) = 2 + 24 - 20 = 6.$

Logo $\det.(A) = 6$.

3.2.3.2 <u>Regra de Sarrus</u>

O método mais utilizado para se obter o determinante de uma matriz de 3ª ordem é a Regra de Sarrus, tal nome se deu graças a seu criador Pierre Frédéric Sarrus (1789-1861). Ela é conhecida como um caminho mais fácil de se memorizar para encontrar o número que representa a matriz. Podemos definir o cálculo do determinante através da regra de Sarrus como sendo :

"*Dada a matriz 3x3, repetimos a 1ª e 2ª coluna à frente da 3ª coluna e fazemos a soma dos produtos dos elementos das diagonais principais subtraído pela soma dos produtos dos elementos das diagonais secundárias.*"

É possível que ao invés de se repetir as duas primeiras colunas, repetir as duas primeiras linhas abaixo da terceira linha, que chegamos ao mesmo resultado obtido.

Mostrando diversos caminhos para a resolução de um problema faz com que o aluno possa se identificar com àquele método que lhe convém.

- <u>*1º Método: Repetindo as duas primeiras colunas*</u>

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$, logo det.(A) será dado por:

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & a11 & a12 \\ a21 & a22 & a23 & a21 & a22 \\ a31 & a32 & a33 & a31 & a32 \end{vmatrix} =$$

det.(A) = $(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})$

- <u>*2º Método: Repetindo as duas primeiras linhas*</u>

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$, logo det.(A) será dado por:

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \\ a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{vmatrix} =$$

det. (A) = $(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$

Portanto, têm-se dois métodos para aplicação da Regra de Sarrus no cálculo de determinante de uma matriz de 3ª ordem.

3.2.3.2.1 <u>Exemplo 1</u>

Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, calcular det.A.

Optando pelo 1º método de resolução, iremos reescrever a matriz dada repetindo as duas primeiras colunas. Vejamos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(4 + 30 + 12) – (6 + 16 + 15) = 46 – 37 = 9.

Portanto det.(A) = 9.

3.2.4 Aplicações de Determinantes

Após a abordagem dos cálculos de determinantes, é ideal mostrar aos alunos certas aplicações do uso de determinantes dentro de outros contextos pois os livros tratam esse assunto de forma isolada, sendo tal associação importante uma vez que algumas aplicações são abordadas no 3º ano do ensino médio, ou seja, o ensino de determinante acaba sendo um pré-requisito posteriormente, e quando não abordado de forma coesiva, os conteúdos do ano seguinte acabam sendo prejudicados uma vez que os alunos possam vir a esquecer tais conceitos. A seguir, serão expostas tais aplicações.

3.2.4.1 Aplicações em Geometria Analítica

O conteúdo de Geometria Analítica é aprofundado somente no 3º ano do ensino médio, mas já poderá ser feito uma breve antecipação no que se diz respeito à cálculos envolvendo determinantes, que é utilizado na área de triângulos conhecendo as coordenadas de seus vértices e na condição de alinhamento de três pontos.

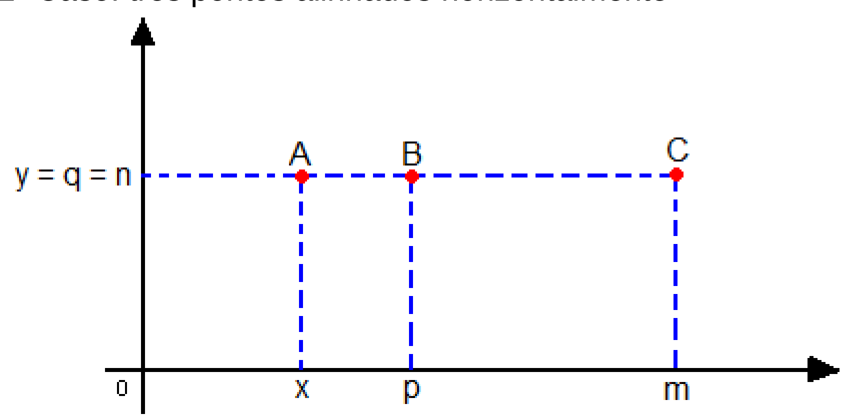
3.2.4.1.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Se três pontos, A(x, y), B(p, q) e C(m, n), estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & q & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

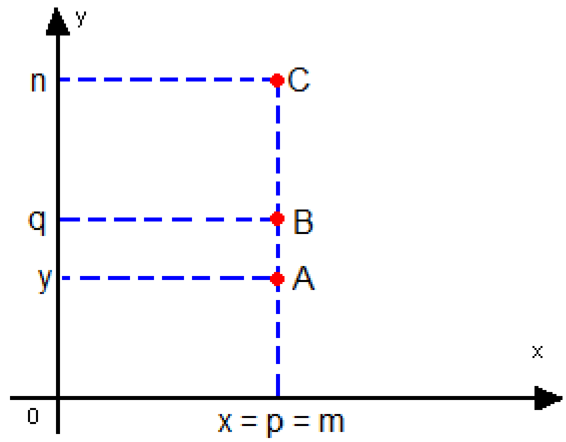
Podemos considerar três casos para tal demonstração:

- ✓ 1º Caso: três pontos alinhados horizontalmente



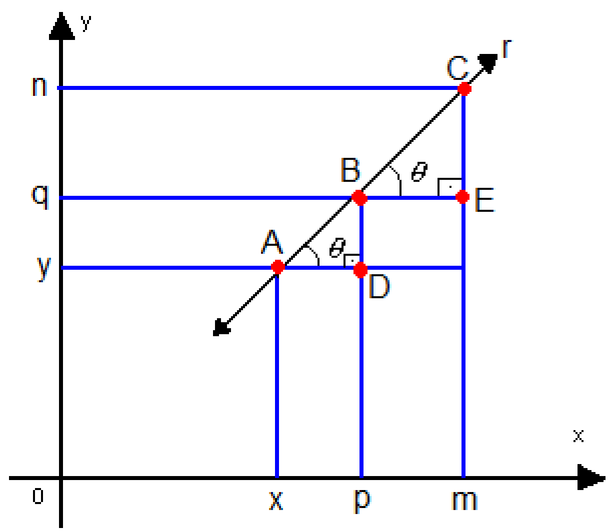
Neste caso, as ordenadas são iguais: y = q = n, e o determinante será nulo pois a 2ª e a 3ª coluna serão proporcionais.

✓ 2º Caso: três pontos alinhados verticalmente.



Neste caso, as abscissas são iguais: x = p = m. Portanto o determinante será nulo pois a 1ª e 3ª coluna são proporcionais.

✓ 3º Caso: três pontos numa reta não-paralela aos eixos cartesianos.



Pela figura, percebe-se que temos dois triângulos ABD e BCE. Tais triângulos são semelhantes. Então teremos que:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \rightarrow \frac{p-x}{m-p} = \frac{q-y}{n-q} \rightarrow \frac{n-q}{m-p} = \frac{q-y}{p-x} .$$

Desenvolvendo:

(n – q)(p – x) = (m – p)(q – y)
(n – q)(p – x) – (m – p)(q – y) = 0
np – nx – pq + qx – mq + my + pq – py = 0
np – nx + qx – mq + my – py = 0

Pela Regra de Sarrus, podemos encontrar o determinante da matriz abaixo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & q & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = qx + my + np - py - mq - nx.$$

Então analogamente, o determinante da matriz acima deverá ser nulo, pois:

qx + my + np – py – mq – nx = 0.

Portanto, dados três pontos A(x,y), B(m,n) e C(p,q), dizemos que eles estarão alinhados, ou seja, pertencerão a uma mesma reta se, e somente se, o determinante de suas coordenadas com as unidades for igual a zero.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ m & n & 1 \\ p & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Vamos verificar se os pontos A(–3,–9), B(1,–1) e C(2,1) estão alinhados.

Para resolver este problema, precisa-se do conceito em resolver determinantes de 3ª ordem. Logo faremos:

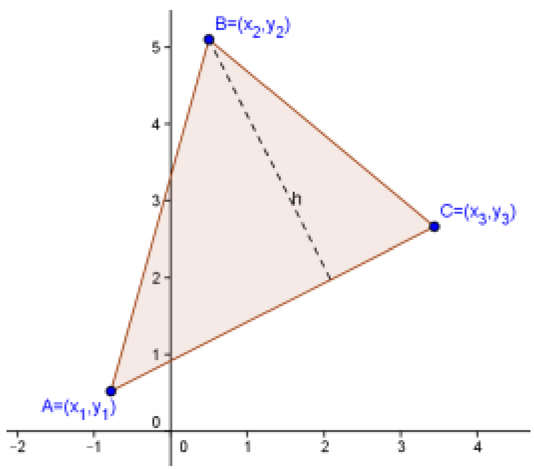
$$\begin{vmatrix} -3 & -9 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$(3 – 18 + 1) – (–2 – 3 – 9) = (–14) – (–14) = 0$

Portando dizemos que os pontos A, B e C estão alinhados, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

3.2.4.1.2 *<u>Área de um triângulo conhecendo seus vertices</u>*

Um triângulo é composto por três vértices. Cada vértice possui duas coordenadas (x,y). A área *S* deste triângulo poderá ser encontrada através dos conceitos de determinante, onde sua área será a metade do determinante formado pelas coordenadas dos vértices do triângulo. Consideremos o triângulo representado graficamente abaixo.



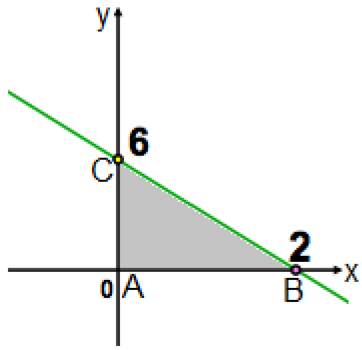
A área de um triângulo em geometria plana é dada pela metade do produto da medida da base pela medida da altura. É com esta ideia que pode-se demonstrar a área de um triângulo utilizando determinantes. Mas a demonstração só poderá ser feita no ano subsequente pois dependerá de outros conceitos da geometria analítica. Então seja um triângulo ABC, de vértices com coordenadas $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)$, a sua área será dada por:

$$\begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow S = \frac{|D|}{2}$$

Onde $|D|$ corresponde ao módulo do determinante.

3.2.4.1.2.1 Exemplo 1:

Calcular a área do triângulo retângulo representado no plano cartesiano abaixo.



Inicialmente, identificaremos as coordenadas de cada vértice deste triângulo ABC, sendo A(0,0), B(2,0) e C(0,6). Tais coordenadas formarão a matriz para ser calculada a área da figura representada, sendo tal área obtida a partir da metade do módulo do determinante desta matriz.

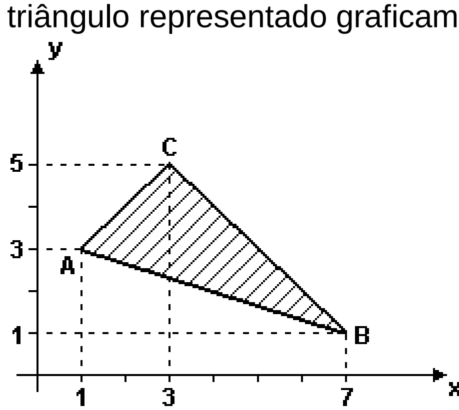
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo este determinante teremos que o determinante será igual a det.(A) = –12. Logo a área do triângulo representado acima será:

$$S = \frac{|D|}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

3.2.4.1.2.2 Exemplo 2:

Vamos calcular, utilizando a ideia de determinantes, a área do triângulo representado graficamente abaixo.



Inicialmente, identificaremos as coordenadas de cada vértice deste triângulo ABC, sendo A(1,3), B(7,1) e C(3,5). A área de um triângulo conhecendo as coordenadas de seus vértices será a metade do módulo do determinante da matriz formada a partir das coordenadas dos vertices do triângulo. Vejamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

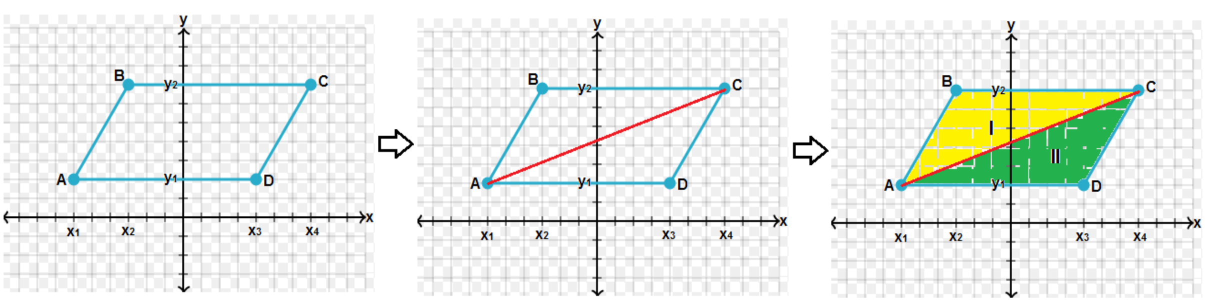
Desenvolvendo este determinante chegaremos a:

(1 + 9 + 35) – (3 + 5 + 21) = (45) – (29) = 16

Portanto S = $\frac{|D|}{2}$ = $\frac{16}{2}$ = 8.

3.2.4.1.3 *Área de um Paralelogramo Conhecendo seus Vértices*

Para se obter a área de um paralelogramo, o cálculo de determinantes pode ser fundamental pois a partir de um paralelogramo é possível obter dois triângulos. De forma análoga como mostrado anteriormente, a área de um paralelogramo quando conhecido seus vertices, será a soma das áreas dos dois triângulos formados conforme figura abaixo.



3.2.4.1.4 *Obtendo a Equação de uma Reta*

O estudo de retas inicia-se no 1º ano do ensino médio ao se trabalhar função polinomial do 1º grau. Portanto os alunos do 2º ano do ensino médio já terão uma ideia do que vem a ser uma reta e principalmente de uma equação de uma reta. Pode-se fazer uma comparação que no ano anterior era dada a equação para se obter o gráfico da reta, mas com a utilização do determinante, é possível através de dois pontos de uma reta, obter sua equação. Então dados dois pontos A(x1,y1) e B(x2,y2), para se obter a equação da reta que passa por esses dois pontos tomaremos um terceiro ponto C(x,y) genérico onde a equação será dada através do determinante das coordenadas desses três pontos juntamente com as unidades e lembrando que, como os três pontos pertencem a uma mesma reta, logo eles estarão alinhados, ou seja, seu determinante deve ser igual a zero.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Optando por desenvolver este determinante através da Regra de Sarrus, chegaremos ao seguinte:

(x·y1 + x1·y2 + y·x2) – (x2·y1 + x·y2 + y·x1) = 0

x·y1 – x·y2 + y·x2 – y·x1 + x1·y2 – x2·y1 = 0

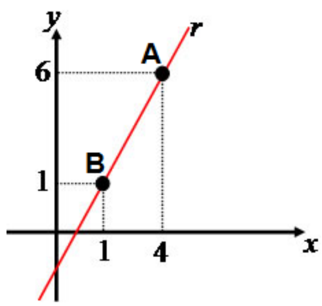
x(y1 – y2) + y(x2 – x1) + (x1·y2 – x2·y1) = 0

x(y1 – y2) – y(x1 – x2) + (x1·y2 – x2·y1) = 0

Tal equação obtida é chamada de equação geral da reta.

3.2.4.1.4.1 <u>Exemplo:</u>

Obter a equação geral da reta r representada graficamente abaixo.



Identificaremos as coordenadas dos dois pontos conhecidos que são A(4,6) e B(1,1). Logo tomaremos um ponto genérico C(x,y) e aplicaremos a ideia de determinante que será formado com as coordenadas dos três pontos A, B e C.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante através da regra de Sarrus, teremos que:

(6x + y + 4) – (x + 4y + 6) = 0

6x + y + 4 – x – 4y – 6 = 0

5x – 3y – 2 = 0 → Equação geral da reta r.

3.2.4.2 Aplicações em Álgebra Linear: Sistemas Lineares

Uma das importantes aplicações que envolvem o cálculo de determinantes é na resolução de sistemas de equações lineares. Dentro deste contexto, é comum surgir problemas como o descrito abaixo cujo objetivo é resolvê-lo através de um sistema de equações lineares. Mas para isso, os alunos devem saber transformar um sistema em uma matriz, sendo tal processo chamado de obtenção da matriz dos coeficientes do sistema. Então dado o sistema a seguir, veja como obter à matriz coeficiente referente ao sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 5x - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Segue o problema:

"*Dois amigos foram a um bar. O primeiro amigo pagou R$ 5,40 por duas latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O Segundo amigo pagou R$ 9,60 por três latas de refrigerantes e duas porções de batatas fritas. Calcule a diferença entre o preço de uma porção de fritas e de uma lata de refrigerante nesse bar*."

Chamaremos de x o valor referente a uma lata de refrigerante e de y o valor referente a uma porção de batatas fritas. O problema pede que seja encontrado (y – x), ou seja, a diferença entre uma porção de batatas fritas por uma lata de refrigerante. Para isso deve-se montar o sistema de equações lineares. Logo teremos:

$$\begin{cases} 2x + y = 5{,}40 \\ 3x + 2y = 9{,}60 \end{cases}$$

Não é muito comum aplicar a ideia de determinante em problemas de sistemas lineares 2x2 (duas equações e duas incógnitas), e sim em problemas que envolvem três ou mais incógnitas e equações. Em casos que a ordem do sistema seja n > 2, uma ferramenta que pode ser útil para se obter facilmente a resolução de tais sistemas é pela Regra de Cramer. Este tipo de problema como citado acima, pode ser resolvido pelos métodos de resolução de um sistema de equações de duas incógnitas. Aplicações como estas possibilita um conhecimento matemático mais significativo sendo possível mostrar aos alunos que existem diferentes aplicabilidades ao se resolver um sistema linear dentro de diversos contextos. A aplicação de situações reais com o desenvolvimento do conteúdo de sistemas de equações lineares para o cálculo de determinante faz com que os alunos percebam o quanto é importante a unificação dos dois conteúdos para se resolver um sistema de equações lineares.

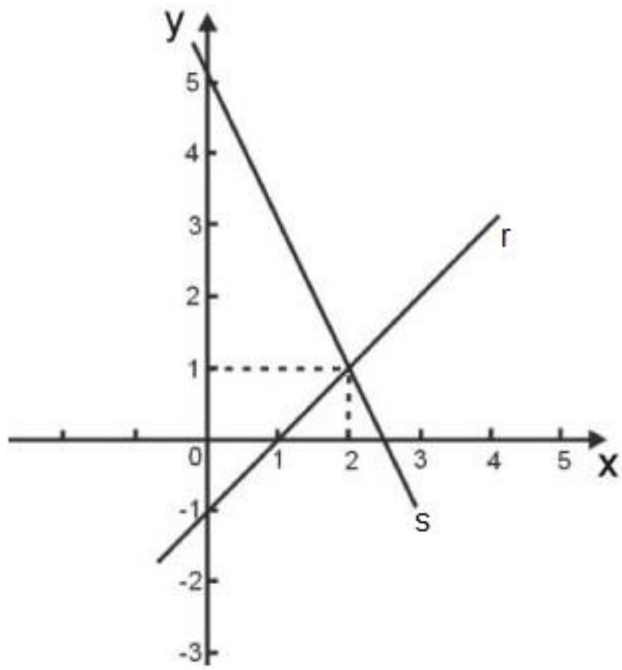
Através do determinante é possível analisar as condições da solução de um sistema linear n x n (n equações e n incógnitas). Para fazer tal análise deve-se transformar o sistema em uma matriz para então aplicar o conceito de determinante, sendo que tal solução pode ser classificada de três modos. Mas antes, é preciso saber o que significa uma matriz incompleta que vem a ser a matriz formada pelos coeficientes do sistema excluindo os termos independentes. E chamamos de:

- Dx o determinante da matriz formada ao substituir os coeficientes de x pelos termos independentes;
- Dy o determinante da matriz formada ao substituir os coeficientes de y pelos termos independentes;
- Dz o determinante da matriz formada ao substituir os coeficientes de z pelos termos independentes;

I. Sistema Possível e Determinado (S.P.D.):

   Quando um sistema linear n x n é possível e determinado, o determinante D da matriz incompleta é diferente de zero. Reciprocamente, quando o determinante da matriz incompleta obtida através dos coeficientes do sistema dado for diferente de zero o sistema será possível e determinado. Podemos dizer também que para cada equação do sistema, representa-se uma reta e neste caso as retas se encontram em um único ponto.

   - Exemplo 1:
     Considere o sistema $\begin{cases} r: 2x + y = 5 \\ s: -x + y = -1 \end{cases}$. Este sistema é um sistema possível e determinado por dois motivos: as retas das equações r e s se cruzam em um único ponto como representado abaixo:



E além disso, ao obter a matriz dos coeficientes do sistema citado, o determinante será diferente de zero.

- Exemplo 2: No caso de um sistema 3x3, o sistema torna-se possível e determinado se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero como no caso abaixo.

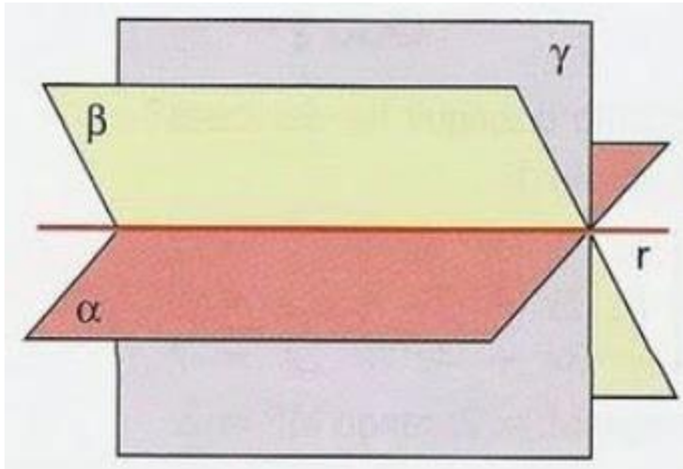
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + y + z = 7 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Obtendo a matriz correspondente ao sistema acima e obtendo o determinante D, teremos:

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Logo D será diferente de zero. Portanto este sistema é classificado por S.P.D.

Mas também pode-se analisar tal classificação pela intersecção dos planos, como neste caso há três incógnitas então representa-se três planos. Se os três planos se interceptarem em uma única reta, o sistema será S.P.D.. Vejamos:

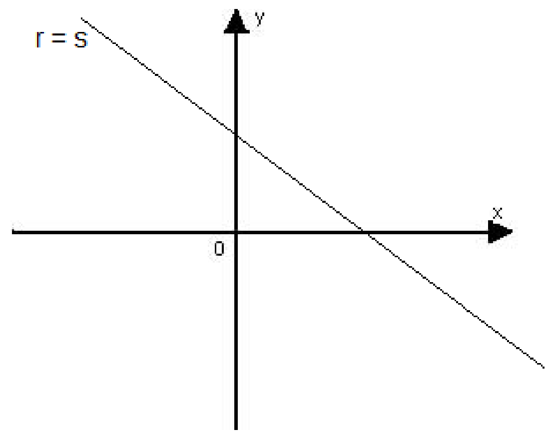


No caso, cada plano possui uma equação e como os planos α, β e γ se encontram na reta r, o sistema de equações é possível e determinado, ou seja, possui uma única solução.

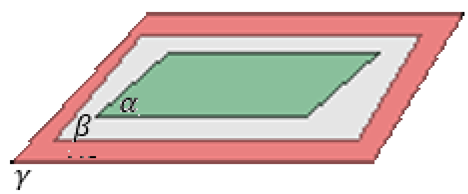
II. Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.):

Quando um sistema linear n x n possui infinitas soluções é classificado em possível e indeterminado. Neste caso, o determinante da matriz incompleta será igual a zero, mas com uma ressalva, para isso acontecer os determinantes Dx, Dy, Dz, Dk … (dependendo da quantidade de incógnitas que possuir), todos devem também ser iguais a zero.
No caso de um sistema 2x2, podemos analisar sua classificação de duas maneiras, sendo a primeira através do método citado acima ou através da representação das retas das equações do sistema no gráfico cartesiano. Se as retas forem uma sobreposta a outra, ou seja, retas coincidentes o sistema será possível e indeterminado.

- Exemplo 3: Seja o sistema $\begin{cases} r: x + y = 8 \\ s: 2x + 2y = 16 \end{cases}$. Percebe-se que a primeira equação é proporcional à segunda. Portanto o sistema torna-se possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções, sendo algumas citadas a seguir: (1,7); (3,5); (–5, 13); etc. Já no plano, as retas correspondentes às equações r e s do sistema são representadas da seguinte maneira:



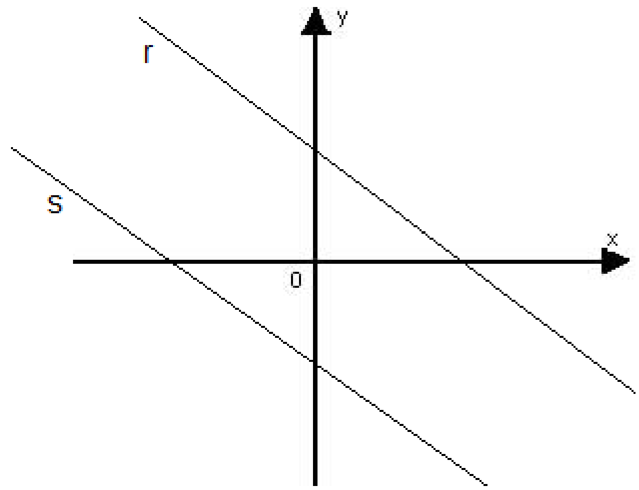
Quando o sistema for 3x3, podemos analisar sua classificação também de duas maneiras sendo a primeira como o método dos determinantes e a outra maneira analisando a disposição dos planos correspondentes a cada equação. Se os planos forem coincidentes, o sistema será possível e indeterminado, como a seguir:



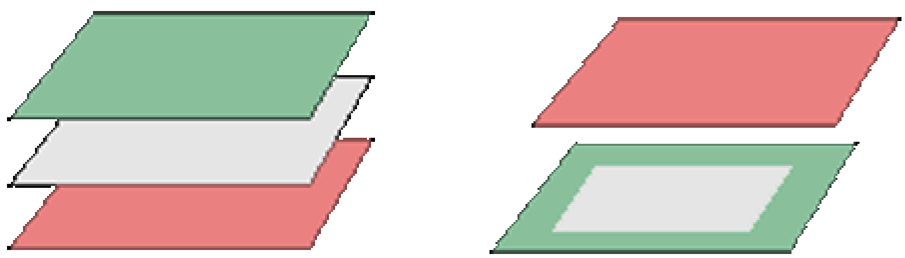
III. Sistema Impossível (S.I.):

Quando um sistema linear n x n não possuir soluções o chamamos de sistema impossível. Para identificar se um sistema linear é impossível, basta analisar o determinante da matriz incompleta, se o determinante for igual a zero e pelo menos um dos determinantes Dx, Dy, Dz, Dk, … for diferente de zero, ele será impossível. Quando o sistema for 2x2, uma alternativa para analisar se o sistema é impossível é através da representação das retas das daus equações no plano cartesiano. Se as retas forem paralelas, logo o sistema não terá solução.

- Exemplo 4: Seja o sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ -x-y=7 \end{cases}$. É possível perceber que não há valores para x e para y que satisfazem ao mesmo tempo às duas equações, portanto este sistema torna-se impossível. No plano cartesiano as retas das respectivas equações ficarão paralelas uma a outra.



Para um sistema 3x3, se pelos menos dois planos correspondentes às equações do sistema forem paralelos, o sistema torna-se impossível.



- Exemplo 5: Vamos discutir o sistema abaixo em função de k.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+ky=3 \end{cases}$$

Discutir um sistema é dizer para que valor ou, para quais valores de k o sistema será S.P.D., S.P.I., ou S.I..

Neste caso, para o sistema ser considerado S.P.D. o determinante D da matriz incompleta deve ser diferente de zero.

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix}$ = k – 2

Portanto k – 2 ≠ 0, segue-se que ∀ k ≠ 2, o sistema será possível e determinado.

Caso k = 2, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Simplificando a segunda equação por 2, obteremos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

O que torna visivelmente o sistema S.I., pois é impossível somar dois números e tal soma resultar em 1 e $\frac{3}{2}$ ao mesmo tempo. Portanto para k = 2, o sistema será S.I..

- Exemplo 6: O sistema a seguir é possível e indeterminado.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + 1 = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

Obtendo a matriz correspondente ao sistema deste exemplo e obtendo o determinante D, teremos:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus, chegaremos ao D = 0. Neste caso, temos duas possibilidades para a análise da solução de tal sistema pois quando D = 0, o sistema pode ser S.P.I ou S.I.. Então deve-se calcular os determinantes Dx, Dy e Dz, se todos forem nulos, logo o sistema será S.P.I., caso um deles seja diferente de zero, o sistema será S.I.. Vejamos:

- Dx = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
  Logo, det.(Dx) = 0.

- Dy = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(Dy) = 0.

- Dz = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(Dz) = 0.

Portanto o sistema é possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções.

3.2.4.2.1 <u>Regra de Cramer</u>

Tal regra foi descoberta para resolver sistemas de equações lineares com n equações e n incógnitas, utilizando o auxílio de determinantes, sendo que se det.(A) ≠ 0, então o sistema terá uma única solução dada por:

x = $\frac{Dx}{D}$ y = = $\frac{Dy}{D}$ z = = $\frac{Dz}{D}$ k = = $\frac{Dk}{D}$ …

onde:

- x, y, z, k, … são as incógnitas do sistema linear;
- D é o determinante da matriz A formada pelos coeficientes do sistema linear;
- Dx é o determinante da matriz A, com a troca dos coeficientes de x pelos termos independentes;
- Dy é o determinante da matriz A, com a troca dos coeficientes de y pelos termos independentes;
- Dz é o determinante da matriz A, com a troca dos coeficientes de z pelos termos independentes; etc

Vejamos tal aplicação na resolução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$.

Inicialmente, formamos a matriz A com os coeficientes do sistema linear.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Daí, utilizando a regra de Sarrus, deve-se calcular os determinantes D, Dx, Dy e Dz, que será feito a seguir.

- D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(D) = –6.

- Dx = $\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(Dx) = –6 .

- Dy = $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(Dy) = 18.

- Dz = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

  Logo, det.(Dz) = 12.

Portanto, a solução do sistema linear será dada por:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Dx}{D} = \frac{-6}{-6} = 1. \\ y &= = \frac{Dy}{D} = \frac{18}{-6} = -3. \\ z &= = \frac{Dz}{D} = \frac{12}{-6} = -2. \end{aligned}\right\} \quad \text{Portando } s = \{1, -3, -2\}.$$

3.2.5 Teorema de Jacobi

Alguns teoremas são ignorados por certos autores de livros didáticos voltados para o público do ensino médio, prejudicando de certa forma o conteúdo, vetando aos alunos tal conhecimento. Dentro do contexto de determinantes há diversas formas de se obter tal valor. Este teorema é fundamental a sua abordagem pois ele serve de auxílio para a resolução de sistemas lineares auxiliando no escalonamento da matriz que é formada com os coeficientes e termos independentes do sistema linear.

O teorema de Jacobi diz:

"*O Determinante de uma matriz não se altera, se adicionarmos aos elementos de uma fila qualquer uma outra fila paralela multiplicada por uma constante.*"

Consideremos a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, pela regra de Sarrus ou Laplace, det.A = 30.

Ao fixarmos a primeira coluna, através deste teorema, faremos a seguinte combinação para mostrar que det.A realmente não se altera. Seja a combinação:

- Multiplicar por 2 a 2ª coluna;
- Multiplicar por –1 a 3ª coluna;
- Somar os produtos obtidos acima à 1ª coluna;

Chamamos essa combinação de combinação linear.

Então vejamos:

$$\begin{bmatrix} 1+2\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 3 & 0 \\ 0+2\cdot 4+(-1)\cdot 2 & 4 & 2 \\ 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+6+0 & 3 & 0 \\ 0+8-2 & 4 & 2 \\ 2+2-5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A'$$

Obteve-se uma matriz A', que segundo o teorema de Jacobi, det.A = detA', ou seja, se calcularmos o determinante da matriz A', detA' será igual a 30.

3.2.6 Regra de Chió

Esta regra permite o cálculo de determinantes em matrizes quadradas com ordens superiores a 3. A ideia é diminuir a ordem da matriz A obtendo assim uma matriz B, onde não se altera o valor do determinante entre essas matrizes, ou seja, fazendo com que det.A = det.B. Para isso, deve-se existir um elemento em alguma fileira, seja em linha ou coluna que seja igual a 1 que indicaremos por $a_{ij} = 1$.

Consideremos a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

- identificaremos um elemento unitário, que no caso será $a_{11} = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- isolaremos a linha e a coluna a que esse elemento unitário pertença, formando uma outra matriz com os elementos restantes.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{8} \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- De cada elemento da nova matriz formada, subtraímos o produto dos elementos correspondentes à linha i e coluna j que foram eliminados anteriormente, por exemplo, os correspondentes ao elemento $a_{22} = 2$ são os elementos 4 e 2, os correspondentes ao elemento $a_{43} = 4$ são os elementos 2 e 0. Vejamos:

$$B = \begin{bmatrix} 2-4\cdot 2 & 3-4\cdot 0 & 7-4\cdot 8 \\ 4-3\cdot 2 & 1-3\cdot 0 & 6-3\cdot 8 \\ 3-2\cdot 2 & 4-2\cdot 0 & 5-2\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8 & 3-0 & 7-32 \\ 4-6 & 1-0 & 6-24 \\ 3-4 & 4-0 & 5-16 \end{bmatrix}$$

Logo a matriz $B = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{bmatrix}$.

- Através da regra de Sarrus, iremos obter det.B, e do resultado multiplicaremos por $(-1)^{i+j}$, onde i e j corresponde à ordem do elemento unitário identificado no primeiro passo. Neste caso, i =1 e j = 1, portanto:

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{i+j}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2}$$

$(-243) \cdot 1 = -243.$

Portanto, det.A = det.B = –243

3.2.7 Propriedades dos Determinantes

As propriedades não são tratadas nos livros didáticos em exercício neste ano de 2016, dentre 4 coleções consultadas. São expostas somente a ideia de se obter o valor do determinante através de regras e teoremas. Mas há algumas propriedades que podem ser úteis principalmente quando for iniciado o contexto de sistemas lineares e com isso, é importante mostrar aos alunos esses outros tipos de caminhos.

De forma análoga, as 1ª, 2ª e 3ª propriedades são todas consequências do teorema de Laplace.

A) 1ª Propriedade:

Se numa fila de um determinante tivermos uma soma de termos, podemos separar este determinante em dois determinantes, sendo que a soma dos determinantes desmembrados será igual ao determinante anterior. Considere o determinante a seguir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c+x \\ d & e & f+y \\ g & h & i+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix}$$

Tal demonstração poderá ser feita em sala passo a passo utilizando a regra de Sarrus.

B) 2ª Propriedade:

Se em uma matriz A, há uma fila em que todos os elementos foram multiplicados por uma única constante k, ou seja, há uma fila que há elementos que possuem o mesmo divisor comum, podemos pegar este divisor comum e simplismente colocá-lo em evidência e em seguida multiplicá-lo pelo determinante da matriz A que foi formada. Vejamos a seguir:

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} k \cdot a & b \\ k \cdot c & d \end{bmatrix}$, percebe-se que na primeira coluna há um divisor comum que é o k. Mas antes, vamos obter o determinante da matriz A.

det.A = k·ac – k · bd

A partir disso, colocamos o k em evidência e teremos:

det.A = k(ac – bd)

Portanto, também podemos colocar o k em evidência e obter o determinante da matriz A.

k · det.A

k · $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

k · (ad – bc)

C) 3ª Propriedade:

Se em uma matriz uma das filas for nula, ou seja, uma fileira conter todos elementos iguais a zero, logo seu determinante será igual a zero. Seja a matriz $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$, é interessante mostrar o passo a passo aos alunos utilizando a regra de Sarrus, para eles perceberem que realmente o determinante será nulo.

D) 4ª Propriedade:

Uma vez já trabalhado a ideia de matriz e principalmente matriz transposta, pode-se dizer que o determinante de uma matriz A é igual ao determinante de sua transposta A^t.

$$\det.A = \det.A^t$$

Considere uma matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Portanto det.A = ad – bc, pelo que já foi visto nos itens anteriores. Se obtermos sua transposta, teremos A^t = $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Logo det.$A^t$ = ad – bc. Portanto det.A = det.A^t.

E) 5ª Propriedade (Teorema de Bezout)

Considere uma matriz A qualquer. Se trocarmos duas filas paralelas entre elas, obteremos uma outra matriz que chamaremos de B. Com isso, o determinante da matriz A será oposto ao determinante da matriz B, ou seja, os determinantes terão sinais contrários. Então seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, logo det.A = ad – bc. Se efetuarmos a troca de duas filas sejam elas linhas ou colunas obteremos; $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$, seu determinante será dado por bc – ad. Ou seja, o oposto do determinante da matriz A original. Neste caso trocamos as duas linhas, mas se trocarmos as duas colunas, também chegaremos a este resultado, vejamos: $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$ onde seu determinante será bc – ad, como citado acima.

F) 6ª Propriedade:

Se uma matriz possui duas colunas com mesmos elementos, então seu determinante será nulo, igual a zero. Consideremos a matriz $\begin{bmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{bmatrix}$, pelo que já foi visto anteriormente, aplicando a Regra de Sarrus, o determinante será dado por (ayc + bcx + abz) – (ayc + abz + bcx) = 0

Neste caso pode-se propor aos alunos que demonstrem através de outras formas de se resolver determinantes de 3ª ordem.

De forma análoga, as propriedades a seguir são todas consequências do teorema de Laplace.

G) 7ª Propriedade:

Considere uma matriz A. Se nessa matriz há uma fila que seja proporcional a uma outra fila, seu determinante será nulo, como por exemplo: $\begin{bmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{bmatrix}$, percebe-se que a terceira coluna é proporcional à primeira coluna. Ao demonstrar o determinante utilizando a regra de Sarrus, é notável que o determinante será igual a zero.

H) 8ª Propriedade (Teorema de Binet):

Sendo A e B duas matrizes de mesma ordem, então Segundo Binet o derminante da matriz produto AB é igual ao produto dos determinantes das matrizes A e B.

$$\det.(A \cdot B) = \det.A \cdot \det.B$$

E ainda através deste teorema, podemos dizer que se A é uma matriz quadrada, então:

$$\det.(A^n) = \det(\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n fatores}}) = [\det(A)]^n$$

3.2.8 Matriz de Vandermonde

Uma matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2 com n natural, cujas colunas estão em progressão geométrica e as entradas da primeira linha são sempre iguais a 1.

Veja uma matriz A de Vandermonde genérica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a1 & a2 & a3 & \ldots & an \\ a1^2 & a2^2 & a3^2 & \ldots & an^2 \\ a1^3 & a2^3 & a3^3 & \ldots & an^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a1^{n-1} & a2^{n-1} & a3^{n-1} & \ldots & an^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vandermonde diz que para se obter o determinante de sua matriz, basta utilizar os elementos da 2ª linha da seguinte maneira:

"*O determinante será dado através do produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos da 2ª linha.*"

Daí temos que:

det.A = (a2 – a1)(a3 – a2)(a3 – a1)(a4 – a3)(a4 – a2)(a4 – a)…

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{bmatrix}$. Ao observar esta matriz, nota-se que as 3ª, 4ª e 5ª linhas podem ser reduzidas à potências de bases referentes à 2ª linha. Logo esta matriz é de Vandermonde pois:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo deste de det.A, inicialmente encontraremos todas as possíveis diferenças entre os elementos da 2ª linha.

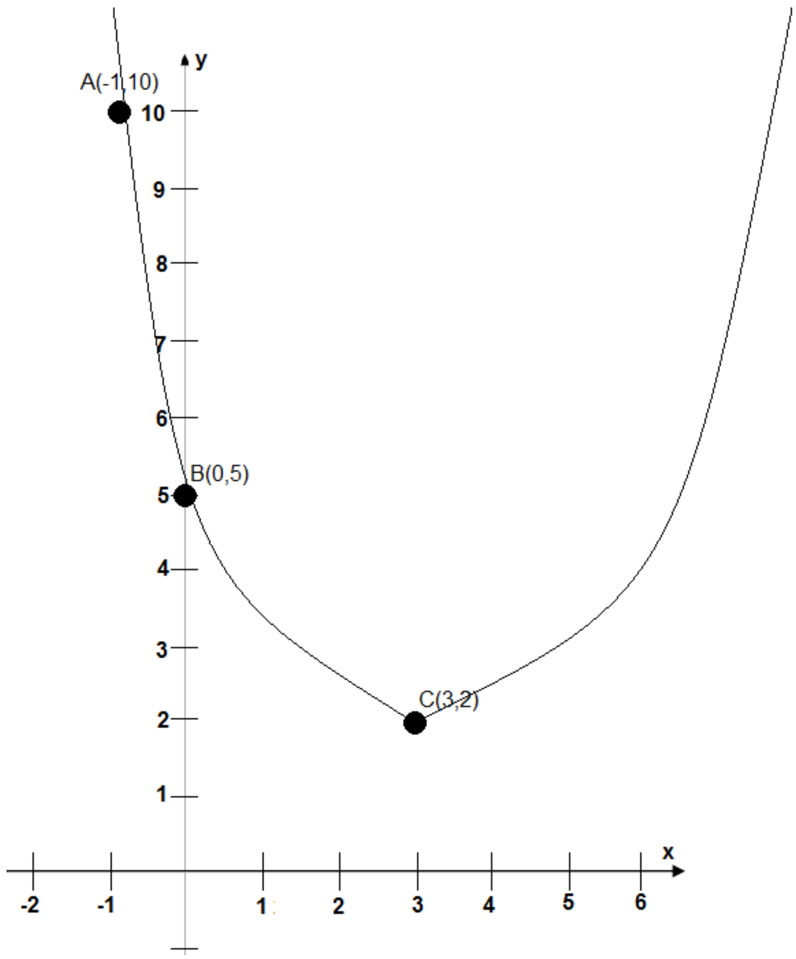
(3 – 2) = 1
(4 – 3) = 1
(4 – 2) = 2
(5 – 4) = 1
(5 – 3) = 2
(5 – 2) = 3
(6 – 5) = 1
(6 – 4) = 2
(6 – 3) = 3
(6 – 2) = 4

O determinante é obtido através do produto dos resultados de todas as diferenças ao lado. Vejamos:

det.A = $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
det. A = 288.

3.2.8.1 *Aplicação de Vandermonde: Interpolação Polinomial*

É possível encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano. Tal polinômio é chamado de Polinômio Interpolador de Pontos. A utilidade do determinante de Vandermonde baseia-se no que será mostrado a seguir, na obtenção da equação da parábola, que está representada graficamente a seguir.



Sabe-se que a equação de uma parábola é dada por p(x) = c + bx + ax² .

Ao substituir os pontos A, B e C em p(x), vamos obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c + b(-1) + a(-1)^2 = 10 \\ c + b \cdot 0 + a \cdot 0^2 = 5 \\ c + b \cdot 3 + a \cdot 3^2 = 2 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, pode-se afirmar que este sistema tem uma única solução, pois o determinante será não-nulo, obtido através dos coeficientes de a, b e c das equações do sistema acima. Consideremos uma matriz A formada pelos coeficientes de a, b e c:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 10 \rightarrow Coordenadaydoponto A \\ 5 \rightarrow Coordendaydoponto B \\ 2 \rightarrow Coordenadaydoponto C \end{array}$$

Daí calculemos det.(A) que será dado por:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}$$

Daí obtemos a transposta de A para chegarmos a matriz de Vandermonde, onde os determinantes serão iguais:

$$\left.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ (-1)^2 & 0^2 & 3^2 \end{vmatrix}\quad\right\} \text{Determinante de Vandermonde.}$$

Logo existirá um valor para o determinante A. Portanto pode-se concluir que existe uma, e somente uma solução (a,b,c), tal que a função p(x) = c + bx + ax² passa pelos pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$. A seguir será mostrado como determinar os valores de a, b e c. Tomaremos:

➔ $c = \frac{|A1|}{A}$ → $b = \frac{|A2|}{A}$ → $a = \frac{|A3|}{A}$

Onde:

- $|A|$ é a matriz de Vandermonde: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ (-1)^2 & 0^2 & 3^2 \end{vmatrix}$

  Logo det.(A) = 12.

- $|A1|$ é a matriz formada pela substituição dos coeficientes de c pelas coordenadas y de cada ponto A, B e C. Vejamos:

  $$\begin{vmatrix} 10 & -1 & (-1)^2 \\ 5 & 0 & 0^2 \\ 2 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

  Logo det.(A1) = 60.

- $|A2|$ é a matriz formada pela substituição dos coeficientes de b pelas coordenadas y de cada ponto A, B e C. Vejamos:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 10 & (-1)^2 \\ 1 & 5 & 0^2 \\ 1 & 2 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

  Logo det.(A2) = –48 .

- $|A3|$ é a matriz formada pela substituição dos coeficientes de a pelas coordenadas y de cada ponto A, B e C. Vejamos:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

  Logo det.(A3) = 12.

Portanto:

- ➔ c = $\frac{|A1|}{A}$ = $\frac{60}{12}$ = 5
- ➔ b = $\frac{|A2|}{A}$ = $\frac{-48}{12}$ = –3
- ➔ a = $\frac{|A3|}{A}$ = $\frac{12}{12}$ = 1

Decorre que o polinômio interpolante é:

p(x) = 5 – 4x + x².

3.2.8.2 *Aplicação de Vandermonde: Sistemas Lineares*

O conhecimento sobre Matriz de Vandermonde pode auxiliar na resolução de certos sistemas de equações lineares, permitindo um cálculo mais rápido. Consideremos o seguinte sistema de equações lineares sendo a, b e c números reais não-nulos e distintos. Deseja-se resolvê-lo.

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = k^3 \end{cases}$$

A matriz A será formada pelos coeficientes do sistema acima.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Neste caso, deve-se colocar abc em evidência para chegarmos à matriz de Vandermonde, obtendo por consequência seu determinante.

$$|A| = abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc \cdot (b-a)(c-a)(c-b)$$

Usando a regra de Cramer para determinar a solução do sistema de equações lineares, teremos que:

- x = $\dfrac{\begin{vmatrix} k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{kbc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{kbc\cdot(b-k)(c-k)(c-b)}{abc\cdot(b-a)(c-a)(c-b)} = \dfrac{k\cdot(b-k)(c-k)}{a\cdot(b-a)(c-a)}$.

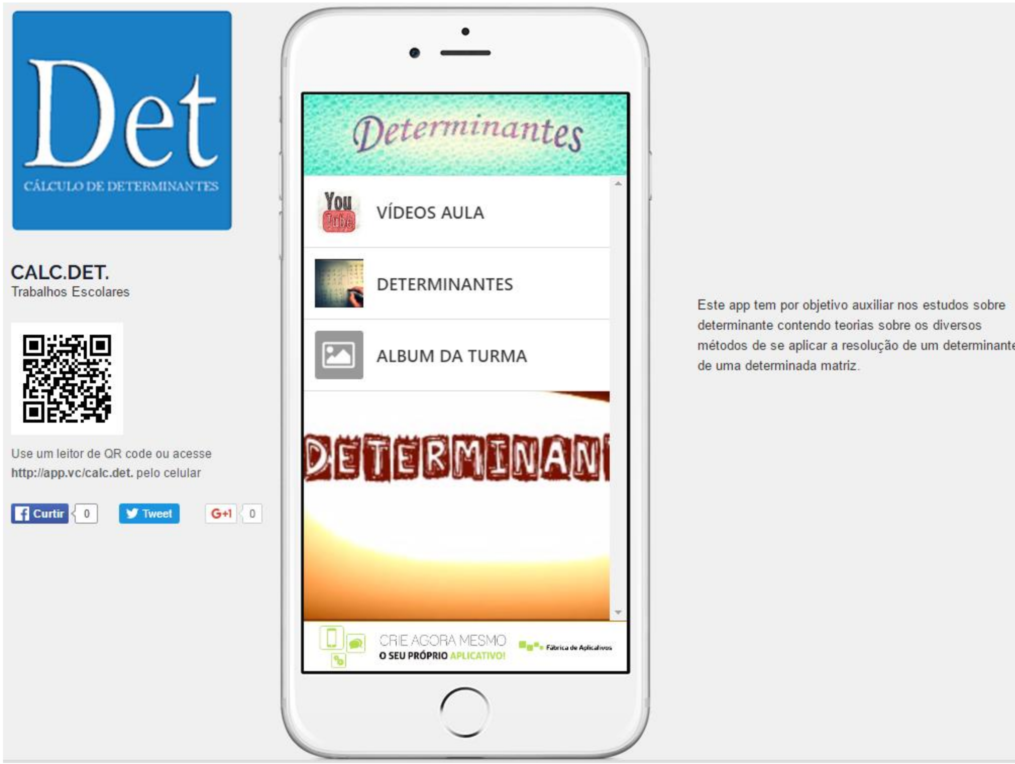
- y = $\dfrac{\begin{vmatrix} a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \\ a^3 & k^3 & c^3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{akc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{akc\cdot(k-a)(c-a)(c-k)}{abc\cdot(b-a)(c-a)(c-b)} = \dfrac{k\cdot(k-a)(c-k)}{a\cdot(b-a)(c-b)}$.

- z = $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \\ a^3 & b^3 & k^3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{abk\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{abk\cdot(b-a)(k-a)(k-b)}{abc\cdot(b-a)(c-a)(c-b)} = \dfrac{k\cdot(k-a)k-b}{a\cdot(c-a)(c-b)}$.

Capítulo 4

APLICATIVO:
FERRAMENTA PARA SER UTILIZADA NAS AULAS

Tendo em vista a necessidade de novidades nas aulas de matemática, em busca de algo que possa auxiliar os alunos como forma de um suporte em tal conteúdo, o uso da tecnologia neste contexto pode vir a se tornar algo positivo. Uma estratégia para que tal utilização possa colaborar com as aulas, é propor a utilização de um aplicativo (app) criado pelo autor desta monografia contendo regras e formas além dos principais teoremas para se resolver certos determinantes. Tal “app” chamado “Calc.Det.” tem por principal fundamento fornecer aos alunos uma nova ferramenta de estudos contribuindo no aprendizado dos mesmos. O aplicativo é dividido inicialmente em duas pastas: Vídeo Aulas e Determinantes. Na pasta voltada para video aulas os alunos poderão acessar vídeos relacionados ao conteúdo estudado como forma de um auxílio para esclarecer quaiquer dúvidas que possam ter surgidos durante a explicação ou em algum exercício. Já a pasta determinante, é subdividida para melhor compreensão dos alunos contendo informações e conceitos iniciais para ser então concluído pelo professor durante as aulas. Como uma das ideias principais da criação deste app é justamente suprir a ausência do livro didático na sala de aula, a consulta desta ferramenta auxiliará durante a explicação do conteúdo pelo professor. A utilização deste app vem para somar nas aulas uma vez em que os alunos da rede pública estadual esquecem ou não levam o livro didático para as aulas, e podemos dizer que a maioria dos alunos possuem um aparelho celular então todos terão uma ferramenta de suporte de fácil acesso e de fácil manuseio.



Com esta ideia em prática, pode-se até propor futuramente a criação de um app que possa resolver de forma detalhada certos determinantes.

O estudo de determinantes é abordado no segundo ano do ensino médio, apesar de os livros didáticos apresentarem este conteúdo de uma forma sucinta, sem muito aprofundamento e muitas vezes sem aplicações. Com isso esperamos que este trabalho possa contruibuir para o planejamento do docente no ensino de determinantes e no aprendizado dos discentes, uma vez que a abordagem deste trabalho possui uma linguagem e organização de fácil entendimento. Tão importante quanto estudar determinantes, é entender suas aplicações, onde o professor deverá ter o bom senso em apresentar diversos caminhos que o aprendizado sobre determinantes possa contribuir para um melhor entendimento, proporcionando aos alunos uma justificativa deste conteúdo exposto.

Destacou-se diferentes métodos de se calcular determinantes, propriedades que envolvem tal conceito, evidenciando a importância do seu uso para um cálculo na aplicação em geometria analítica e por fim, verificou-se que uma das aplicações se dá na resolução de sistemas lineares.

Capítulo 5

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOLDRINI, José Luis; COSTA, Sueli L. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia. WETZLER, Henry G. Álgebra Linear, 3ª edição. Editora Halbra Ltda.
2. Anton Howard, Chris Rorres – Álgebra Linear com aplicações (8ª ed.).
3. Alfredo Steinbruch, Paulo Winterle – Introdução à Álgebra Linear.
4. IEZZI, Gelson; HAZAM, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1993. V. 4.
5. Apostila de Álgebra Linear II 2011/1 – Departamento de Matemática (UDESC – CCT).
6. www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/lucas/material/DeterminantesAluno.pdf
7. www.repositorio.ufc.br/ri/bitstream/riufc/8916/1/2014_dis_drmarques.pdf
8. Interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/583.htm
9. Matemática (Ensino Médio) I. IEZZI, Gelson. II. DOLCE, Osvaldo. III. DEGENSZAJN, David. IV. PÉRIGO, Roberto. V. ALMEIDA, Nilze de. Matemática: Ciência e Aplicações. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
10. PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva/Manoel Paiva – 2.ed. – São Paulo: Moderna, 2013.
11. SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática: 2/Joamir. Roberto de Souza. – 2.ed. – São Paulo: FTD. 2013.
12. SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática: ensino médio: volume 2/Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. – 6.ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.