

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica**

Bárbara Mara Ferreira Gonçalves

**CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA 3-D PARA O MÉTODO SEM MALHA  
NODAL VETORIAL**

Belo Horizonte  
2025

Bárbara Mara Ferreira Gonçalves

**CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA 3-D PARA O MÉTODO SEM MALHA  
NODAL VETORIAL**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Computação e Telecomunicações.

Linha de pesquisa: Antenas, Propagação de Ondas de Rádio e Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Prof. Dr. Elson José da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita

Belo Horizonte  
2025

|       |   |
|-------|---|
| G635c | <p>Gonçalves, Bárbara Mara Ferreira.<br/>         Construção das funções de forma 3-D para o método sem malha nodal vetorial [recurso eletrônico] / Bárbara Mara Ferreira Gonçalves. – 2025.<br/>         1 recurso online (127 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Elson José da Silva.<br/>         Coorientador: Renato Cardoso Mesquita.</p> <p>Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Imagem tridimensional – Teses. 3. Cálculo vetorial – Teses. 4. Campos eletromagnéticos – Teses.<br/>         I. Silva, Elson José da. II. Mesquita, Renato Cardoso. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p> |
|       | CDU: 621.3(043)   |



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

**Escola de Engenharia**

COLEGIADO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM Engenharia Elétrica

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**"Construção das Funções de Forma 3-d Para O Método Sem Malha Nodal Vetorial"**

**Bárbara Mara Ferreira Gonçalves**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 05 de setembro de 2025.

Por:

**Prof. Dr. Elson José da Silva**  
DEE (UFMG) - Orientador

**Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita**  
DEE (UFMG) - Coorientador

**Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha**  
DEE (UFMG)

**Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano**  
DEE (UFMG)

**Prof. Dr. Guilherme Simon da Rosa**  
DEE (Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho)

**Prof. Dr. Marcio Matias Afonso**

## DEE (CEFET-MG)



Documento assinado eletronicamente por **Renato Cardoso Mesquita, Professor do Magistério Superior**, em 14/09/2025, às 13:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elson Jose da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 15/09/2025, às 15:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Luiz da Silva Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 16/09/2025, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Simon da Rosa, Usuário Externo**, em 16/09/2025, às 12:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Matias Afonso, Usuário Externo**, em 18/09/2025, às 09:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodney Rezende Saldanha, Membro de comissão**, em 30/09/2025, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4512172** e o código CRC **35A4D6DD**.

# Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e por ter me proporcionado saúde e perseverança durante essa caminhada.

Ao meu marido, pelo incentivo a iniciar mais esta etapa de estudos, pelo apoio e compreensão durante os momentos desafiadores.

À minha querida família. Agradeço ao meu pai por ter me inspirado caráter e honestidade. À minha mãe, pelo exemplo de força de vontade e dedicação, que sempre me alavancou nos estudos e nunca permitiu que eu desistisse dos meus sonhos.

Aos professores e pesquisadores da UFMG que compartilharam os seus conhecimentos durante as aulas que tive o privilégio de assistir e são inspiração para minha carreira acadêmica e científica. Ao meu orientador, professor Elson José da Silva pela confiança depositada em mim e neste trabalho de pesquisa. Ao professor Renato Cardoso Mesquita pelo trabalho conjunto em prol desta pesquisa.

Ao professor Brahim Ramdane por sua dedicação e a toda equipe do Laboratório G2Elab pela acolhida durante o meu estágio sanduíche na França. Aos colegas do cluster MAGE e a todos os demais que me proporcionaram um ambiente de trabalho super agradável.

Um agradecimento especial ao professor Marcio Matias Afonso pelo apoio e confiança.

A todos os colegas com os quais compartilhei experiências durante todos estes anos de doutorado.

Aos colaboradores da UFMG que se dedicam a tornar a nossa experiência na instituição cada vez melhor.

Ao IFMG *Campus* Ibirité pelo apoio a esta capacitação ao possibilitar o meu afastamento das atividades de ensino e extensão.

À CAPES, CNPq, UFMG, IFMG e G2Elab pelo suporte financeiro.

## RESUMO

Os métodos sem malha tradicionais usam funções de forma escalares e, portanto, apresentam dificuldades na aproximação de campos vetoriais. O Método sem Malha Nodal Vetorial, *Vector Nodal Meshless Method* (VNMM), constrói suas aproximações usando funções de forma baseadas nos espaços  $H(\text{curl})$  e no espaço polinomial de elementos de Nédélec do primeiro tipo. Para a aplicação do método, um conjunto de nós é distribuído no domínio e em suas fronteiras. Cada nó tem um vetor unitário associado. Para a imposição direta das condições de contorno, os nós localizados nas fronteiras do domínio e nas interfaces devem ter a direção vetorial tangente à respectiva fronteira ou interface. O VNMM tem sido aplicado para resolver problemas eletromagnéticos bidimensionais. Esta tese apresenta a construção das funções de forma VNMM para uso em problemas vetoriais tridimensionais. São provadas a capacidade de interpolação da função de forma e as taxas de convergência do método. Um problema de autovalores de uma cavidade retangular é solucionado e os resultados são comparados com aqueles obtidos utilizando o Método de Elementos Finitos de Aresta, *Edge Finite Element Method* (EFEM). A solução numérica para os autovalores aproximados pelo VNMM não é corrompida por modos espúrios. Três problemas magnetostáticos são solucionados: um problema de blindagem magnética, um problema de cabo coaxial e um problema com estrutura periódica e material não linear. Em todos os casos, a solução numérica é validada, não há dificuldades quanto à imposição das condições de contorno, fontes e interfaces. As condições de contorno periódicas são introduzidas no VNMM e validadas. A não linearidade é solucionada por aproximações sucessivas. Um algoritmo para seleção arbitrária dos nós do domínio de suporte da função de forma VNMM é desenvolvido a fim de eliminar a dependência de uma malha ou de uma subdivisão espacial na escolha dos nós de suporte. São apresentados os testes de interpolação das funções de forma com suporte arbitrário.

Palavras-chave: Método sem Malha Nodal Vetorial; funções de forma 3-D; problemas eletromagnéticos tridimensionais; condições de contorno periódicas; não linearidade.

## ABSTRACT

Traditional meshless methods use scalar-based functions and therefore, present difficulties in approximating vector fields. The Vector Nodal Meshless Method (VNMM) constructs its approximations using shape functions based on  $H(\text{curl})$  spaces and Nédélec's first type elements polynomial space. For the application of the method, a set of nodes is distributed in the domain and on its boundary. Each node has an associated unit vector. For the direct imposition of the boundary conditions, the nodes located on the domain boundary and on the interfaces must have the vector direction tangent to the respective boundary or interface. The VNMM has been applied to solve two-dimensional electromagnetic problems. This thesis presents the construction of VNMM shape functions for use in three-dimensional vector problems. The interpolation capability of the shape function and the convergence rates of the method are proven. The problem of eigenvalues of a rectangular cavity is solved with the VNMM and the results are compared with those obtained using the Edge Finite Element Method (EFEM). The numerical solution for the eigenvalues approximated by VNMM is not corrupted by spurious modes. Three magnetostatic problems are solved: a magnetic shielding problem, a coaxial cable problem, and a problem with periodic structure and nonlinear material. In all cases, the numerical solution is validated, there are no difficulties regarding the imposition of boundary conditions, sources and interface conditions. Periodic boundary conditions are introduced into VNMM and validated. Nonlinearity is solved by successive approximations. An algorithm for the arbitrary selection of nodes in the support domain of the VNMM shape function is developed in order to eliminate the dependence on a mesh or a spatial subdivision in the choice of support nodes. Shape function interpolation tests with arbitrary support are presented.

Keywords: Vector Nodal Meshless Method, 3-D shape functions, three-dimensional electromagnetic problems, periodic boundary conditions, nonlinearity.

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Representação de um domínio bidimensional em diferentes métodos numéricos vetoriais. (a) Malha triangular com arestas usada no EFEM. (b) Arestas distribuídas sobre o domínio e sua fronteira para uso do EMM. (c) Nós e seus vetores unitários usados no VNMM. ....   | 23 |
| 2.1 | Funções de Forma VNMM 2-D para o (a) nó 1, (b) nó 2, e (c) nó 3 [15]. ....   | 38 |
| 3.1 | Distribuição de nós e suas direções vetoriais em um domínio $\Omega$ em $\mathbb{R}^3$ .....   | 42 |
| 3.2 | Funções de Forma VNMM para o (a) nó 1, (b) nó 2, (c) nó 3, (d) nó 4, (e) nó 5 e (f) nó 6.....  | 47 |
| 4.1 | Construção de uma <i>kd-tree</i> tridimensional: (a) subdivisões no volume; (b) árvore binária correspondente. ....  | 58 |
| 4.2 | Esquema do algoritmo e uso da estrutura de dados. ....   | 60 |
| 4.3 | Representação da busca pelos seis nós vizinhos mais próximos ao ponto $\mathbf{x}$ com visualizações nos planos (a) <i>xy</i> , (b) <i>xz</i> e (c) <i>yz</i> .....  | 61 |
| 5.1 | Domínio tridimensional com suas fronteiras, características dos materiais e fontes de corrente. $\Gamma_g$ representa a fronteiras de Dirichlet para o campo $\vec{E}$ . ....  | 67 |
| 5.2 | Domínio tridimensional com suas fronteiras, características dos materiais, fontes de corrente imposta. $\Gamma_g$ e $\Gamma_h$ representam as fronteiras de Dirichlet e Neumann para $\vec{A}$ , respectivamente. $\Gamma_i$ é a interface entre meios distintos. .... | 73 |
| 5.3 | Domínio tridimensional com suas fronteiras periódicas $\Gamma_p$ ( $n_l$ , $n_j$ e $n_K$ ) e $\Gamma'_p$ ( $n_{l'}$ , $n_{j'}$ e $n_{K'}$ ). Representação da simetria entre os nós das fronteiras para aplicação da condição de contorno periódica. ....              | 82 |
| 5.4 | Sistema de montagem para o par periódico $n_l - n_{l'}$ . ....   | 83 |
| 6.1 | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6$ , $\vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base de Nédélec.....  | 88 |
| 6.2 | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6$ , $\vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial completa de primeira ordem. ....  | 88 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.3  | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6$ , $\vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial incompleta de primeira ordem. .... | 89  |
| 6.4  | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6$ , $\vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base radial. ....                                  | 89  |
| 6.5  | Cavidade retangular preenchida com vácuo.....   | 90  |
| 6.6  | Casca esférica dentro de cilindro preenchido com vácuo .....  | 93  |
| 6.7  | Módulo do campo magnético $\vec{H}$ .....   | 95  |
| 6.8  | Módulo do campo magnético $\vec{H}$ ao longo de $r$ .....   | 95  |
| 6.9  | Convergência do campo magnético $\vec{H}$ .....   | 96  |
| 6.10 | Cabo coaxial .....  | 97  |
| 6.11 | Módulo do campo magnético $\vec{H}$ ao longo de $\rho$ .....  | 98  |
| 6.12 | Convergência do campo magnético $\vec{H}$ .....   | 99  |
| 6.13 | a) Problema 13 TEAM geometria: bobina em preto e aço em cinza. (b) Curva $\vec{B} - \vec{H}$ para o material magnético do aço [17] .....  | 100 |
| 6.14 | Distribuição da densidade de corrente na bobina.....  | 101 |
| 6.15 | Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM .....   | 101 |
| 6.16 | Regiões específicas para avaliação da densidade de fluxo magnético. Apenas $\frac{1}{4}$ do aço é mostrado .....  | 102 |
| 6.17 | Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com geometria completa. ....  | 102 |
| 6.18 | Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM e o aproveitamento da simetria. ....  | 103 |
| 6.19 | Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com meia geometria.....   | 104 |
| 6.20 | Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM e o aproveitamento da simetria e da periodicidade.....  | 105 |
| 6.21 | Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com $\frac{1}{4}$ da geometria.....   | 105 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.22 | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6, \vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base de Nédélec e suporte arbitrário. ....                              | 108 |
| 6.23 | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6, \vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial completa de primeira ordem e suporte arbitrário. ....   | 109 |
| 6.24 | Convergências e taxas de convergência das (a) funções $\vec{u}_6, \vec{u}_7$ e $\vec{u}_8$ e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial incompleta de primeira ordem e suporte arbitrário. .... | 110 |

# Lista de Tabelas e Quadros

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 4.1 | Pseudocódigo para construção da <i>kd-tree</i> 3-D .....  | 57  |
| 4.2 | Pseudocódigo para busca dos <i>k</i> vizinhos de <b>x</b> na <i>kd-tree</i> .....                       | 59  |
| 4.3 | Pseudocódigo para seleção de nós com correção incremental de posto.....                                 | 64  |
| 4.4 | Pseudocódigo para seleção de nós com correção de dependência linear via decomposição QR .....           | 65  |
| 6.1 | Autovalores da cavidade retangular obtidos com o VNMM e o EFEM e os erros relativos de aproximação..... | 92  |
| 6.2 | Procedimentos de cálculo .....  | 106 |
| 6.3 | Erros relativos de aproximação da função teste (6.7) e seu rotacional.....                              | 111 |

# Lista de Abreviaturas e Siglas

|          |   |
|----------|---|
| EDPs     | Equações Diferenciais Parciais                              |
| EFEM     | Método de Elementos Finitos de Aresta                       |
| EFG      | Element-Free Galerkin Method                                |
| EMM      | Método sem Malha de Aresta                                  |
| EXP      | Função Radial Gaussiana                                     |
| e_EFEM   | Erro associado ao EFEM                                      |
| e_VNMM   | Erro associado ao VNMM                                      |
| FEM      | Método de Elementos Finitos                                 |
| MQ       | Função Multiquádrica  |
| RBF-MLPG | Método sem Malha Petrov Galerkin com Funções de Base Radial |
| RBF      | Funções de Base Radial                                      |
| TE       | Transversal Elétrico  |
| TM       | Transversal Magnético                                       |
| TEAM     | <i>Testing Electromagnetics Analysis Methods</i>            |
| VNMM     | Método sem Malha Nodal Vetorial                             |
| 1-D      | Uma dimensão  |
| 2-D      | Duas dimensões  |
| 3-D      | Três dimensões  |

# Lista de Símbolos

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\alpha$        | Ângulo   |
| $\delta$        | Função Delta Kronecker                                     |
| $\varepsilon$   | Permissividade elétrica                                    |
| $\varepsilon_0$ | Permissividade elétrica do vácuo                           |
| $\varepsilon_r$ | Permissividade elétrica relativa de um meio                |
| $\varepsilon_k$ | Permissividade elétrica relativa do subdomínio $\Omega_k$  |
| $\psi$          | Fator de perturbação do método de regularização            |
| $\lambda$       | Autovalor  |
| $\mu$           | Permeabilidade magnética                                   |
| $\mu_0$         | Permeabilidade magnética do vácuo                          |
| $\mu_r$         | Permeabilidade magnética relativa de um meio               |
| $\mu_k$         | Permeabilidade magnética relativa do subdomínio $\Omega_k$ |
| $\pi$           | Número pi  |
| $\rho$          | Densidade de carga elétrica                                |
| $\sigma$        | Condutividade elétrica do meio                             |
| $\tau_r$        | Tempo de relaxação da carga elétrica                       |
| $\varphi$       | Potencial escalar magnético                                |
| $\omega$        | Frequência angular   |
| $\Gamma_{ap}$   | Fronteira com condição de contorno antiperiódica           |
| $\Gamma_g$      | Fronteira com condição de contorno de Dirichlet            |
| $\Gamma_h$      | Fronteira com condição de contorno de Neumann              |

|                  |  |
|------------------|--|
| $\Gamma_{kq}$    | Interface entre os subdomínios $\Omega_k$ e $\Omega_q$                       |
| $\Omega$         | Domínio em $\mathbb{R}^d$  |
| $\partial\Omega$ | Fronteira do domínio $\Omega$  |
| $\Omega_I$       | Subdomínio   |
| $\alpha$         | Matriz das funções de forma  |
| $\beta_i$        | Vetor coluna dos coeficientes da função de forma do $i$ -ésimo nó de suporte |
| $L_i$            | Vetor coluna Delta Kronecker da função de forma do $i$ -ésimo nó de suporte  |
| $\vec{A}$        | Potencial vetor magnético  |
| $\vec{B}$        | Vetor densidade de fluxo magnético   |
| $\vec{D}$        | Vetor densidade de fluxo elétrico  |
| $\vec{E}$        | Vetor intensidade de campo elétrico  |
| $\vec{F}$        | Função de teste vetorial do método dos resíduos ponderados                   |
| $\vec{H}$        | Vetor intensidade de campo magnético   |
| $\vec{J}$        | Vetor densidade de corrente elétrica   |
| $\vec{J}_s$      | Vetor densidade de corrente imposta  |
| $\vec{N}_i$      | Função de forma vetorial do $i$ -ésimo nó de suporte                         |
| $\vec{g}$        | Valor da condição de contorno de Dirichlet                                   |
| $\vec{h}$        | Valor da condição de contorno de Neumann                                     |
| $\vec{r}$        | Resíduo  |
| $\vec{u}$        | Função vetorial  |
| $\vec{v}$        | Autovetor  |
| $\hat{n}$        | Vetor normal unitário  |
| $\hat{t}$        | Vetor tangente unitário  |
| $\hat{x}$        | Vetor unitário na direção $x$  |

|           |  |
|-----------|--|
| $\hat{y}$ | Vetor unitário na direção $y$  |
| $\hat{z}$ | Vetor unitário na direção $z$  |
| $C$       | Matriz completa da transformação geométrica                                    |
| $F$       | Vetor coluna dos termos fonte  |
| $K$       | Matriz de rigidez  |
| $M$       | Matriz de massa  |
| $N$       | Vetor coluna da função de forma  |
| $R$       | Matriz de rotação da transformação geométrica                                  |
| $T$       | Matriz de translação da transformação geométrica                               |
| $U$       | Vetor coluna da aproximação $u^h$  |
| $c_s$     | Vetor coluna dos coeficientes da projeção de $\vec{u}^h$ nas direções dos nós  |
| $x$       | Coordenadas de um ponto genérico   |
| $H(curl)$ | Espaço de funções cujo rotacional pertence ao espaço $L^2$                     |
| $H^1$     | Espaço de funções cuja derivada primeira possui quadrado integrável            |
| $L_2$     | Norma 2  |
| $L^2$     | Espaço de Hilbert de funções em $\mathbb{R}^d$ que possuem quadrado integrável |
| $P$       | Conjunto de pontos   |
| $V$       | Potencial escalar elétrico   |
| $a$       | Parâmetro de forma da função de base radial                                    |
| $c_i$     | Coefficiente com o valor projetado na direção do $i$ -ésimo nó                 |
| $d$       | <u>Sobrescrito</u> : Dimensão  |
| $d_i$     | Coefficiente com o valor projetado na direção do $i$ -ésimo nó                 |
| $e_r$     | Erro relativo  |
| $h$       | <u>Sobrescrito</u> : indica uma função aproximada pelo método Galerkin         |

|                        |   |
|------------------------|---|
| $h_{max}$              | Maior distância entre dois nós em uma distribuição nodal espacial |
| $i$                    | <u>Subscrito</u> : índice   |
| $j$                    | Unidade imaginária  |
| $j$                    | <u>Subscrito</u> : índice   |
| $k_0$                  | Número de onda para onda no vácuo                                 |
| $k$                    | <u>Subscrito</u> : índice   |
| $n$                    | Número de nós de suporte  |
| $n_i$                  | Nó $i$ -ésimo   |
| $m$                    | Número de pontos espalhados no domínio                            |
| $p$                    | Polinômio   |
| $q$                    | Parâmetro de forma da função de base radial                       |
| $t$                    | Tempo   |
| $w$                    | Função de teste escalar do método dos resíduos ponderados         |
| $\mathcal{O}$          | Complexidade de tempo do algoritmo                                |
| $\mathbb{P}_k$         | Espaço de polinômios de grau $k$                                  |
| $\tilde{\mathbb{P}}_k$ | Espaço de polinômios homogêneos de grau $k$                       |
| $\mathbb{R}^d$         | Espaço dos números reais  |
| $\mathcal{R}^k$        | Espaço de polinômios conforme $H(curl)$                           |
| $\mathcal{S}$          | Espaço de funções admissíveis vetoriais                           |
| $\mathbb{S}^k$         | Espaço auxiliar formado pelos polinômios $\mathbb{P}_k$           |
| $\mathcal{U}$          | Espaço de funções testes vetoriais                                |
| $\mathcal{V}$          | Espaço de funções admissíveis escalares                           |
| $\mathcal{W}$          | Espaço de funções testes escalares                                |
| $\vec{\nabla}$         | Operador nabla  |

⊕

Operador de soma direta de espaços vetoriais

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>20</b> |
| 1.1      | Objetivos .....   | 24        |
| 1.1.1    | Objetivo Principal .....  | 24        |
| 1.1.2    | Objetivos Específicos .....   | 25        |
| 1.2      | Publicações .....   | 27        |
| 1.3      | Organização do Texto .....  | 28        |
| <b>2</b> | <b>Os Métodos Sem Malha Vetoriais</b>                                 | <b>29</b> |
| 2.1      | O Método sem Malha de Aresta .....                                    | 30        |
| 2.1.1    | Função de Forma EMM 2-D com 3 arestas de suporte .....                | 31        |
| 2.1.2    | Função de Forma EMM 2-D com 4 arestas de suporte .....                | 32        |
| 2.1.3    | Função de Forma EMM 2-D com 5 arestas de suporte .....                | 33        |
| 2.1.4    | Função de Forma EMM 2-D com 6 arestas de suporte .....                | 34        |
| 2.2      | O Método sem Malha Nodal Vetorial .....                               | 35        |
| 2.2.1    | Função de Forma VNMM 2-D com 3 nós de suporte .....                   | 36        |
| 2.2.2    | Função de Forma VNMM 2-D com 4 nós de suporte .....                   | 38        |
| 2.2.3    | Função de Forma VNMM 2-D com 5 nós de suporte .....                   | 39        |
| 2.2.4    | Função de Forma VNMM 2-D com 6 nós de suporte .....                   | 40        |
| <b>3</b> | <b>As Funções de Forma para o Método Sem Malha Nodal Vetorial 3-D</b> | <b>41</b> |
| 3.1      | Aproximação VNMM 3-D .....  | 42        |
| 3.2      | Base Polinomial de Nédélec .....                                      | 43        |
| 3.2.1    | Espaço das Funções de Forma .....                                     | 43        |
| 3.2.2    | Construção das Funções de Forma de Primeira Ordem.....                | 44        |
| 3.3      | Base Polinomial de Primeira Ordem Completa.....                       | 48        |
| 3.4      | Base Polinomial de Primeira Ordem Incompleta .....                    | 49        |
| 3.5      | Base Radial .....   | 51        |
| <b>4</b> | <b>O Suporte Arbitrário</b>   | <b>54</b> |
| 4.1      | Construção da <i>kd</i> -tree e o Algoritmo de Busca .....            | 55        |
| 4.2      | Estratégias para Aproximação VNMM com Suporte Arbitrário.....         | 62        |
| 4.2.1    | Correção Incremental via Monitoramento de Posto.....                  | 63        |
| 4.2.2    | Correção via Decomposição QR .....                                    | 64        |
| <b>5</b> | <b>Formulações dos Problemas</b>                                      | <b>66</b> |
| 5.1      | Problema de Autovalor .....   | 66        |
| 5.1.1    | Forma Forte .....   | 66        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.1.2    | Forma Fraca .....                                       | 66         |
| 5.1.3    | Método de Galerkin .....                                | 70         |
| 5.2      | Problema Magnetostático .....                           | 72         |
| 5.2.1    | Forma Forte .....                                       | 74         |
| 5.2.2    | Forma Fraca .....                                       | 74         |
| 5.2.3    | Método de Galerkin .....                                | 76         |
| 5.3      | O Método de Regularização Delta .....                   | 79         |
| 5.4      | Condições de Contorno Periódicas .....                  | 81         |
| <b>6</b> | <b>Resultados</b>                                       | <b>84</b>  |
| 6.1      | Interpolação de Campos Vetoriais .....                  | 84         |
| 6.1.1    | Reprodução de Função Vetorial Constante .....           | 85         |
| 6.1.2    | Reprodução das Funções de Base.....                     | 86         |
| 6.1.3    | Interpolação e Convergência .....                       | 87         |
| 6.2      | Autovalores de uma Cavidade Retangular .....            | 90         |
| 6.3      | Problemas Magnetostáticos .....                         | 92         |
| 6.3.1    | Blindagem Magnética .....                               | 93         |
| 6.3.2    | Cabo Coaxial .....                                      | 96         |
| 6.3.3    | Problema TEAM 13 .....                                  | 99         |
| 6.4      | Interpolação e Convergência com Suporte Arbitrário..... | 106        |
| 6.5      | Considerações Finais .....                              | 111        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões</b>                                       | <b>113</b> |
| 7.1      | Visão Geral .....                                       | 113        |
| 7.2      | Contribuições.....                                      | 115        |
| 7.3      | Trabalhos Futuros .....                                 | 116        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                       | <b>118</b> |
|          | <b>Apêndice</b>   |            |
| <b>A</b> | <b>Equações de Maxwell</b>                              | <b>121</b> |
| A.1      | Equações de Maxwell no Domínio do Tempo .....           | 121        |
| A.2      | Equações de Maxwell no Domínio da Frequência .....      | 122        |
| <b>B</b> | <b>Transformação Geométrica 3-D</b>                     | <b>124</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

A modelagem de fenômenos eletromagnéticos é, em geral, obtida por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), tais como as de Laplace, Poisson e Helmholtz, e por restrições associadas ao domínio e às condições físicas do problema chamadas de condições de contorno. Problemas que envolvem EDPs e condições de contorno são denominados problemas de valor de contorno e sua solução é obtida fazendo com que as EDPs, assim como as condições de contorno, sejam satisfeitas, simultaneamente, em todo o domínio [1].

Os métodos numéricos são uma ferramenta essencial na solução de problemas reais de valor de contorno, cujas geometrias e características tornam a sua solução analítica inviável. Os métodos numéricos mais comuns utilizam técnicas de discretização para aproximar as EDPs a um sistema de equações algébricas em pontos discretos (nós) no espaço e no tempo. Em outras palavras, a equação diferencial que deveria ser avaliada em todo o domínio de um problema transforma-se em equações algébricas que serão aplicadas a uma malha de elementos ou a nós distribuídos pelo mesmo domínio.

Os principais métodos numéricos que envolvem a construção de malhas são o Método de Diferenças Finitas, o Método de Elementos Finitos e o Método de Volumes Finitos. Dentre esses, o Método de Elementos Finitos, do inglês *Finite Element Method* (FEM), é um dos métodos numéricos mais bem conceituados atualmente devido ao seu alto grau de precisão e a sua capacidade de modelar problemas complexos [2]. Dessa forma, o FEM tem sido tomado como referência na comparação com outros métodos numéricos. Contudo, a precisão do método depende da qualidade da malha, o que ainda impõe dificuldades na solução de problemas em três dimensões [1] ou que envolvam movimento. Neste último caso, problemas com interfaces móveis ou deformações com o tempo, quando solucionados pelo Método de Elementos Finitos, requerem grande esforço computacional para a reconstrução da malha a cada intervalo de tempo predefinido ou o uso de técnicas específicas [3].

A fim de evitar problemas numéricos e reduzir o esforço envolvendo a construção de malhas, foram desenvolvidos os métodos sem malha (*Meshless*). Como o próprio nome sugere, estes métodos dispensam a construção de uma malha na aproximação numérica ao trabalhar apenas com um conjunto de nós distribuídos pelo domínio do problema. Enquanto o FEM deriva uma interpolação baseada nos elementos usando funções de forma, nos métodos sem malha o conceito de elemento não é mais usado. A conectividade entre os nós não é definida por uma malha, mas somente por conceitos de vizinhança e/ou campo de influência [3]. Além da ausência da malha, as funções de forma dos métodos sem malha podem ser facilmente construídas para se obter a ordem de continuidade desejada e, em geral, esses métodos apresentam melhores resultados de convergência do que os métodos baseados em malhas [4].

Até aqui, tanto o FEM quanto os tradicionais métodos sem malha são usados para aproximar campos escalares. Quando se trata de campos vetoriais, o método de referência é o Método dos Elementos Finitos de Arestas, do inglês, *Edge Finite Element Method* (EFEM) [2]. No EFEM as funções de forma e os graus de liberdade são associados às arestas dos elementos e não aos nós. Já nos métodos sem malha não há definição de arestas devido à ausência de conectividade entre os nós. Neste caso, quando um método sem malha nodal é aplicado a problemas vetoriais, aparecem os indesejados modos espúrios na solução numérica. Há dificuldades na imposição das condições de contorno e interface e no tratamento de bordas condutoras e cantos elétricos devido às singularidades associadas a essas estruturas [5].

Os problemas eletromagnéticos vetoriais cujo objetivo é encontrar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  requerem, especificamente, que o método numérico tenha funções de base rotacionais [6], ou seja, gerem aproximações vetoriais com componentes tangenciais contínuas nas interfaces. No entanto, os métodos sem malha tradicionais constroem suas funções de forma com base em nós e estas não são rotacionais, levando à presença de soluções numéricas não físicas [2]. Para contornar isso, alguns métodos sem malha nodais para a aplicação em problemas vetoriais foram propostos. Em [7] são usados multiplicadores de Lagrange associados à malha nodal para impor a condição do divergente nulo. Contudo, continua sendo necessário associar um grau de liberdade a cada componente de campo vetorial o que eleva a ordem do sistema matricial a ser resolvido. A estratégia utilizada por [1] para garantir o divergente nulo é usar formas fracas enfraquecidas associadas ao método da penalidade. Para aplicação desta técnica faz-se necessário um grau de liberdade para cada componente de campo vetorial e um fator de penalidade que pode variar de acordo com o problema. O método não elimina os modos

espúrios e apresenta dificuldades na imposição das condições de contorno e interface. Em [8] funções de base radial vetorial para o método sem malha são desenvolvidas como uma alternativa para suprimir os modos espúrios. No entanto, a imposição das condições de contorno e interface continua sendo um desafio nesta abordagem.

Com uma proposta recente e inovadora, o Método Sem Malha de Aresta, do inglês, *Edge Meshless Method* (EMM) foi inicialmente proposto em 2014 por [9] para solucionar problemas vetoriais através de funções de forma rotacionais conformes. Este método espalha um conjunto de arestas sobre o domínio e seus limites. As funções de forma e os graus de liberdade são associados às arestas e não aos nós, de forma semelhante ao Método dos Elementos Finitos de Arestas [10].

Em sua formulação original, as funções de forma EMM possuem divergência nula imposta por uma função de peso que depende da distância entre a aresta e o ponto onde a aproximação é calculada [10]. Assim, as funções de forma são obtidas forçando que a circulação do campo seja satisfeita em cada aresta de suporte de tal forma que a imposição das condições de contorno e das condições de interface entre diferentes materiais é feita de maneira simplificada. Além disso, o EMM consegue gerar soluções numéricas sem presença dos modos espúrios [8]. Em [11], o EMM com aproximações polinomiais baseadas nos espaços  $H(\text{curl}; \Omega)$  e nos elementos do primeiro tipo de Nédélec é apresentado e aplicado a um domínio bidimensional. Funções de forma de ordem superior foram introduzidas no EMM por [12] através do uso de quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte. Notou-se ainda que um problema pode ser aproximado via EMM usando uma mistura de funções de forma de ordem distintas [12].

Após constatar que o erro do EMM não é sensível ao comprimento das arestas, [13] forçou o limite dos comprimentos das arestas a zero, criando o Método sem Malha Nodal Vetorial, do inglês, *Vector Nodal Meshless Method* (VNMM). No VNMM, um conjunto de nós é distribuído sobre o domínio do problema e suas fronteiras de tal forma que exista um vetor unitário associado a cada nó. Como não há arestas no VNMM, as funções de forma devem satisfazer uma propriedade de projeção para impor corretamente as condições de contorno e interface. A propriedade de projeção afirma que o componente da função de forma deve ser igual a um na direção do vetor unitário de seu próprio nó e, igual a zero na direção do vetor dos outros nós [13].

Além de herdar todas as vantagens do EMM, tais como, ausência de modos espúrios na solução e imposição facilitada das condições de contorno e interface, o VNMM ainda é mais

fácil de implementar que o EMM. Isso porque no VNMM não é necessário calcular integrais de linha sobre as arestas o que torna a construção das suas funções de forma mais simples quando comparada ao EMM. Em suma, o VNMM é capaz de contornar os problemas associados aos métodos nodais escalares quando estes são aplicados a problemas vetoriais e é mais vantajoso que o Método Sem Malha de Aresta em termos de implementação e custo computacional.

A figura 1.1 traz uma visão comparativa entre o Método de Elementos Finitos de Aresta EFEM, o Método sem Malha de Aresta EMM e o Método sem Malha Nodal Vetorial VNMM, mostrando como um mesmo domínio bidimensional é discretizado para a aplicação de cada método.

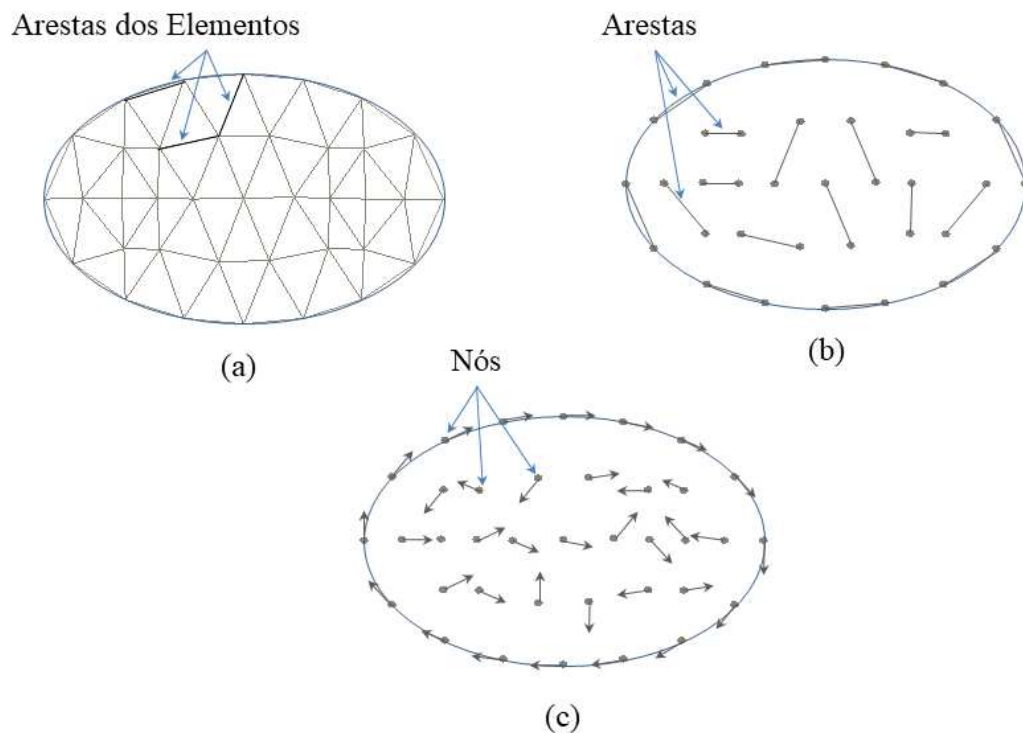


Figura 1.1: Representação de um domínio bidimensional em diferentes métodos numéricos vetoriais. (a) Malha triangular com arestas usada no EFEM. (b) Arestas distribuídas sobre o domínio e sua fronteira para uso do EMM. (c) Nós e seus vetores unitários usados no VNMM.

Todas as publicações envolvendo o uso dos métodos EMM e VNMM levaram em consideração a simetria dos problemas físicos para modelá-los em dimensões inferiores. No entanto, embora alguns problemas físicos possam ser representados ou aproximados por um

modelo matemático uni ou bidimensional, todos são, por natureza, tridimensionais. Logo, quando uma representação ou aproximação uni ou bidimensional não é possível, ou mesmo desejável, um tratamento tridimensional é então necessário [2]. Desta necessidade surge a motivação do presente trabalho de pesquisa.

## 1.1 Objetivos

A crescente necessidade de melhoria na eficiência e no desempenho de dispositivos eletromagnéticos enfatiza o papel da modelagem vetorial 3-D na fase de projeto. Na modelagem 2-D de dispositivos eletromagnéticos, alguns parâmetros são negligenciados ou modelados separadamente [14]. Portanto, a modelagem tridimensional não é apenas necessária, mas essencial para se dimensionar corretamente modelos mais complexos com a presença de transitórios, não linearidades e correntes parasitas. Há, entretanto, recursos que podem ser utilizados na análise 3-D para reduzir o tamanho do domínio computacional, requisitos de memória e o tempo de processamento. Opções interessantes são o aproveitamento de simetrias e o uso das condições de contorno periódicas.

Nesse cenário é possível traçar os objetivos desta tese considerando a construção das funções de forma 3-D para introdução do VNMM e das condições de contorno periódicas na modelagem vetorial 3-D de dispositivos eletromagnéticos.

### 1.1.1 Objetivo Principal

O objetivo principal desta tese de doutorado é construir as funções de forma do Método sem Malha Nodal Vetorial em 3-D e aplicá-las na solução de problemas eletromagnéticos de valor de contorno. Esta abordagem pode ser desmembrada em objetivos específicos que são apresentados a seguir.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

No presente texto descreve-se as teorias e desenvolver as formulações que fundamentam o método VNMM em 3-D. Tradicionalmente, as funções de forma VNMM 3-D podem ser construídas tomando-se como referência o elemento de Nédélec tridimensional de primeiro tipo definido no espaço  $H(\text{curl})$ . As funções de forma vetoriais devem satisfazer a propriedade de projeção com a finalidade de impor as condições de contorno e interface de forma direta.

Além de construir as funções de forma 3-D com a base de Nédélec busca-se explorar recursos do método que ainda não foram implementados nas versões anteriores. Em 2-D, as funções de forma VNMM foram construídas considerando-se a variação do número de nós de suporte com conseqüente modificação das funções de base. No VNMM 3-D as aproximações locais são realizadas utilizando um número de nós de suporte invariável, porém, com possibilidade de alterações nas funções de base. Essa abordagem só é possível uma vez que o VNMM atribui os graus de liberdade aos nós para qualquer função usada na base das funções de forma. Logo, um problema pode ser solucionado mantendo-se o domínio de suporte fixo e variando-se apenas a base da função de forma, se desejável.

Por ser um método sem malha, o VNMM possibilita a obtenção de uma aproximação local sem a existência de parâmetros associados a elementos ou conectividade. Entretanto, as funções de forma do VNMM têm sido construídas considerando um domínio de influência ou suporte previamente conhecido o que permite menos esforço e um menor custo computacional. Tanto no EMM quanto no VNMM 2-D, o suporte é predeterminado por uma estrutura de dados ou uma subdivisão planar [15]. Essa estrutura define previamente a localização dos nós e suas direções vetoriais. A subdivisão estabelece ainda que os nós de suporte estejam sempre localizados sobre as arestas de um polígono, o que define, diretamente, quantos e quais nós irão participar da aproximação local.

Seguindo o mesmo princípio o VNMM 3-D busca trabalhar, inicialmente, com uma subdivisão regular cujos nós de cada domínio de suporte e suas respectivas direções vetoriais são previamente conhecidos. No entanto, a possibilidade de se trabalhar com nós de suporte escolhidos arbitrariamente elimina a dependência de uma subdivisão preliminar proporcionando maior versatilidade ao método. Essa versatilidade pode facilitar, por exemplo, o tratamento de interfaces móveis em problemas vetoriais.

O método de elementos finitos de aresta tem sido referência na aproximação de problemas vetoriais com movimento devido à sua capacidade de representar corretamente o comportamento físico do campo ao longo da interface móvel. Contudo, a modelagem torna-se complexa quando ocorre uma distorção significativa da malha ao longo da interface móvel sendo necessárias etapas de remalhamento ou técnicas específicas [16].

No contexto do VNMM, a escolha dos nós de suporte próximos à interface móvel deve ser arbitrária de tal forma que permita uma aproximação adequada do campo nesta região dispensando o uso de técnicas específicas para se levar em conta o movimento. Implementa-se, então, um algoritmo de busca e seleção dos nós do domínio de suporte da função de forma VNMM com intuito de eliminar a dependência de uma malha ou de uma subdivisão espacial para a escolha destes nós.

Em um segundo momento aplica-se o VNMM a um domínio tridimensional regular. Neste caso, um conjunto de nós é distribuído no domínio incluindo a sua fronteira e, a cada nó é associado um vetor unitário. As características das funções de forma, tais como a capacidade de reprodução das funções vetoriais de base, interpolação de funções vetoriais e convergência são avaliadas. São feitos os testes considerando um suporte predefinido e o suporte arbitrário.

Em seguida o VNMM é aplicado a problemas tridimensionais vetoriais. Na literatura o VNMM foi aplicado a problemas de guia de onda em duas dimensões [13]. Neste trabalho, um problema de autovalor em uma cavidade retangular é solucionado usando o VNMM, e suas funções de forma 3-D, com o intuito de validar o método e verificar se solução é corrompida por modos espúrios. Além disso, problemas magnetostáticos são aproximados com o objetivo de testar o desempenho e aplicabilidade do método em situações que envolvam interfaces e fontes. Por fim, um problema não-linear é solucionado usando o método VNMM pela primeira vez.

O fundamento teórico para aplicação das condições de contorno periódicas é introduzido no contexto do VNMM assim como a sua implementação computacional. A utilização das condições de contorno periódicas em dispositivos periódicos possibilita a redução do domínio de estudo e conseqüentemente ganhos em relação ao custo computacional e à convergência da solução. Um modelo tradicional na literatura [17] de um problema 3-D magnetostático e não-linear é usado para validação do uso das condições de contorno periódicas no VNMM mediante comparação com os valores obtidos por medição.

## 1.2 Publicações

Este texto visa auxiliar pesquisadores na área de métodos numéricos aplicados ao eletromagnetismo e eletromagnetismo computacional, especialmente àqueles focados em métodos sem malha e, mais especificamente, àqueles interessados na aproximação de problemas vetoriais 3-D. Acredita-se também que este trabalho possa contribuir para desenvolvedores de *softwares* voltados a métodos numéricos.

Durante o início desta pesquisa até a data de conclusão deste texto de tese, cinco publicações associadas a esta pesquisa foram geradas, a constar:

- B. M. F. Gonçalves, E. J. Silva, R. C. Mesquita. *Vector Nodal Meshless Method for 3-D Magnetostatic Applications*. Em: *20<sup>th</sup> Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation – CEFC 2022*.
- B. M. F. Gonçalves, E. J. Silva, R. C. Mesquita. *Vector Nodal Meshless Method for 3-D Applications*. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 59, no. 5, pp. 1-4, maio 2023, doi: 10.1109/TMAG.2022.3233527.
- B. M. F. Gonçalves, M. M. Afonso, B. Ramdane, E. J. Silva, R. C. Mesquita. *Vector Nodal Meshless Method Applied to Solve the Symmetrical TEAM 13 Problem*. Em: *La 10ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Électromagnétisme – NUMELEC 2024*.
- B. M. F. Gonçalves, E. J. Silva, R. C. Mesquita, M. M. Afonso, B. Ramdane. *Periodic Boundary Conditions in Vector Nodal Meshless Method*. Em: *25<sup>th</sup> International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields – COMPUMAG 2025*.
- B. M. F. Gonçalves, E. J. Silva, R. C. Mesquita, M. M. Afonso, B. Ramdane. *Periodic Boundary Conditions in Vector Nodal Meshless Method*. *IEEE Transactions on Magnetics*, setembro 2025, doi: 10.1109/TMAG.2025.3609622.

## 1.3 Organização do Texto

A seguir é apresentado um esboço introduzindo, sumariamente, os capítulos seguintes deste texto.

O capítulo 2 apresenta o estado da arte para os métodos sem malha vetoriais, o EMM e o VNMM, sintetizando as funções de forma 2-D, os resultados já consolidados em duas dimensões e apontando os mais recentes avanços obtidos com o uso do método.

O capítulo 3 introduz a construção das funções de forma vetoriais 3-D para o Método sem Malha Nodal Vetorial.

O capítulo 4 define o conceito de suporte arbitrário e apresenta as estratégias e algoritmos utilizados na sua implementação no contexto do VNMM.

O capítulo 5 apresenta os modelos matemáticos que serão utilizados nas aplicações propostas nesta tese. As formulações discretas para o uso do método numérico VNMM é toda deduzida através das respectivas formas fortes que caracterizam os problemas tridimensionais vetoriais a serem aproximados. A teoria e os detalhes da implementação computacional das condições de contorno periódicas no VNMM 3-D são introduzidos.

O capítulo 6 foca na aplicação do Método sem Malha Nodal Vetorial para a solução de problemas de valor de contorno vetoriais em três dimensões. A princípio, um problema de autovalores e, em seguida, problemas magnetostáticos são solucionados usando a aproximação VNMM. Os resultados de interpolação e convergência utilizando um suporte arbitrário também são apresentados.

O capítulo 7 resume os resultados obtidos neste trabalho destacando suas contribuições e indicando os trabalhos relevantes que podem ser executados para a continuação desta pesquisa.

## Capítulo 2

# Os Métodos Sem Malha Vetoriais

A aproximação dos campos vetoriais representa um desafio significativo para os métodos sem malha nodais tradicionais. Esses métodos utilizam funções de base escalares e, na maioria dos casos, é necessário associar um grau de liberdade a cada componente do campo vetorial elevando consideravelmente o custo computacional. Além disso, quando se deseja aproximar um problema no espaço  $H(\text{curl})$  é preciso implementar estratégias para garantir a condição de divergência nula tais como multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade na formulação variacional. Como consequência da utilização dos multiplicadores de Lagrange, a ordem matricial do sistema a ser resolvido aumenta consideravelmente [7]. Já o uso de formas fracas enfraquecidas associado ao método da penalidade não é capaz de eliminar por completo os modos espúrios e as dificuldades associadas à imposição das condições de contorno e condições de interface [1].

Os métodos sem malha vetoriais propostos, a constar o Método sem Malha de Aresta [9] e o Método sem Malha Nodal Vetorial [15], possuem funções de base vetoriais e, portanto, são capazes de reproduzir campos vetoriais por completo sem a necessidade de associar um grau de liberdade a cada componente. Suas funções de forma são derivadas dos espaços  $H(\text{curl})$  e dos espaços polinomiais de Nédélec dispensando o uso de estratégias para garantia da divergência nula. A projeção das funções de forma verifica a propriedade delta de Kronecker facilitando a imposição de condições de contorno essenciais e de interface.

Os aspectos supracitados evidenciam as vantagens do uso do EMM e do VNMM na aproximação vetorial quando estes são comparados aos tradicionais métodos sem malha. Ambos foram desenvolvidos para aplicações bidimensionais, porém o VNMM se destaca por sua facilidade de implementação. Por isso, este capítulo dedica-se a explorar as raízes do VNMM partindo da abordagem do EMM. Neste sentido, são apresentadas as construções das funções de forma 2-D para ambos os métodos.

## 2.1 O Método Sem Malha de Aresta

Lima e Mesquita [9] apresentaram o Método Sem Malha de Aresta – *Edge Meshless Method* (EMM) – ao meio científico em uma conferência em 2014. A proposta era trabalhar com um novo método que aproximasse funções vetoriais tal como o tradicional Método de Elementos Finitos de Aresta (EFEM) porém sem a relação de conectividade entre as arestas.

Os resultados consolidados da aplicação do método em dispositivos eletromagnéticos foram publicados em 2017 [10]. O método, porém, apresentava algumas limitações como a presença de modos espúrios quando o número de arestas de suporte era aumentado e a falta de garantia de consistência do ponto de vista matemático. Em 2018, os autores Silva, Mesquita e Lima [11] consideraram que a causa dessas limitações estavam associadas à escolha inapropriada do espaço de funções usado na aproximação vetorial. Propuseram então uma nova abordagem para a construção das funções de forma do EMM com aproximações polinomiais baseadas no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  e nos elementos do primeiro tipo de Nédélec. Em 2021, Ortis, Mesquita e Lima [12] introduziram funções de forma de ordem superior no EMM usando quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte.

Vale observar e ressaltar que as funções de forma do EMM foram construídas e testadas apenas em modelos bidimensionais.

Esta seção apresenta a construção das funções de forma vetoriais para o Método Sem Malha de Aresta baseadas no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  que são o ponto de partida para a construção das funções de forma do Método sem Malha Nodal Vetorial.

### 2.1.1 Função de Forma EMM 2-D com 3 arestas de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação para a construção da função de forma vetorial utilizando 3 arestas de suporte. A função de forma vetorial para a  $i$ -ésima aresta de suporte é dada por [11]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Como três coeficientes precisam ser encontrados para gerar as funções de forma vetoriais, três arestas de suporte são utilizadas. Para garantir que as funções  $\vec{N}_i$  apenas tenham componente tangencial ao longo da aresta  $e_i$ , força-se que a circulação da aresta seja igual a um sobre ela e zero nas outras arestas, ou seja:

$$\int_{e_i} \vec{N}_i \cdot \vec{t}_k dl = \delta_{ik} \quad (2.2)$$

onde  $\vec{t}_k$  é o vetor unitário na direção da aresta  $e_k$  e o  $\delta_{ik}$  é definido por:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (2.3)$$

Assim, os seguintes sistemas devem ser resolvidos para encontrar os coeficientes  $\beta$ :

$$\alpha \beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.4)$$

onde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (y_1 t_{1x} - x_1 t_{1y}) dl \\ t_{2x} & t_{2y} & \int_{e_2} (y_2 t_{2x} - x_2 t_{2y}) dl \\ t_{3x} & t_{3y} & \int_{e_3} (y_3 t_{3x} - x_3 t_{3y}) dl \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i} \quad \beta_{2i} \quad \beta_{3i}]^T \quad (2.6)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l_2 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário da  $k$ -ésima aresta de suporte e  $l_i$  denota o comprimento da  $i$ -ésima aresta. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida fazendo:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i(\mathbf{x})c_i = \mathbf{N}\mathbf{c}_s \quad (2.8)$$

com:

$$\mathbf{N} = [\vec{N}_1 \quad \vec{N}_2 \quad \vec{N}_3] \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Função de Forma EMM 2-D com 4 arestas de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para construção da função de forma vetorial utilizando 4 arestas de suporte. A função de forma vetorial para a  $i$ -ésima aresta de suporte é dada por [12]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Força-se a circulação na aresta  $e_i$  para garantir que as funções  $\vec{N}_i$  tenham componente tangencial ao longo desta aresta tal como em (2.2). Assim, para quatro arestas, o sistema matricial dado por (2.4) torna-se:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{L}_i, \quad i=1, \dots, 4 \quad (2.11)$$

onde:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} y_1 t_{1x} dl & \int_{e_1} x_1 t_{1y} dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{4x} & t_{4y} & \int_{e_4} y_4 t_{4x} dl & \int_{e_4} x_4 t_{4y} dl \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \quad \beta_{2i} \quad \beta_{3i} \quad \beta_{4i}]^T \quad (2.13)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário da  $k$ -ésima aresta de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8) e (2.9) considerando  $i = 1, \dots, 4$ .

### 2.1.3 Função de Forma EMM 2-D com 5 arestas de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação para a construção da função de forma vetorial utilizando 5 arestas de suporte. A função de forma vetorial para a  $i$ -ésima aresta de suporte é dada por [12]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 5$  são os coeficientes a serem encontrados considerando as cinco arestas de suporte. Forçando-se a circulação na aresta  $e_i$  tal como em (2.2), para cinco arestas, o sistema matricial dado por (2.4) torna-se [12]:

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{L}_i, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (2.16)$$

onde:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} y_1 t_{1x} dl & \int_{e_1} x_1 t_{1y} dl & \int_{e_1} (y_1^2 t_{1x} - x_1^2 t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{5x} & t_{5y} & \int_{e_5} y_5 t_{5x} dl & \int_{e_5} x_5 t_{5y} dl & \int_{e_5} (y_5^2 t_{5x} - x_5^2 t_{5y}) dl \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i}]^T \quad (2.18)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_5 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário da  $k$ -ésima aresta de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8) e (2.9) considerando  $i = 1, \dots, 5$ .

#### 2.1.4 Função de Forma EMM 2-D com 6 arestas de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação para a construção da função de forma vetorial utilizando 6 arestas de suporte. A função de forma vetorial para a  $i$ -ésima aresta de suporte é dada por [12]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 6$  são os coeficientes a serem encontrados considerando as seis arestas de suporte. Forçando-se a circulação na aresta  $e_i$  tal como em (2.2), para seis arestas, o sistema matricial dado por (2.4) torna-se [12]:

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{L}_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.21)$$

onde:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} y_1 t_{1x} dl & \int_{e_1} x_1 t_{1y} dl & \int_{e_1} y_1^2 t_{1x} dl & \int_{e_1} x_1^2 t_{1y} dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{6x} & t_{6y} & \int_{e_6} y_6 t_{6x} dl & \int_{e_6} x_6 t_{6y} dl & \int_{e_6} y_6^2 t_{6x} dl & \int_{e_6} x_6^2 t_{6y} dl \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i}]^T \quad (2.23)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/l_6 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário da  $k$ -ésima aresta de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8) e (2.9) considerando  $i = 1, \dots, 6$ .

## 2.2 O Método Sem Malha Nodal Vetorial

Em 2021, Ortiz [13] apresentou um novo método numérico, o Método Sem Malha Nodal Vetorial, do inglês, *Vector Nodal Meshless Method* (VNMM), que propõe sanar os problemas associados ao uso de métodos escalares nodais sem malha quando aplicados a problemas eletromagnéticos vetoriais. Este método é baseado na ideia do Método Sem Malha de Aresta (EMM) porém com o comprimento das arestas tendendo para zero.

Ortiz construiu as funções de forma vetoriais para aplicações em problemas bidimensionais, de tal forma que três, quatro, cinco e seis nós de suporte possam ser utilizados na aproximação. Para aplicar o VNMM é necessário espalhar um conjunto de nós na fronteira do problema e em seu domínio, sendo que para cada nó é associado um vetor unitário. As funções de forma possuem as seguintes características: são funções vetoriais; estão baseadas nos espaços  $H(\text{curl})$ ; as funções e graus de liberdade estão associados aos nós como nos tradicionais métodos sem malha; tem divergente nulo impondo essa condição desde a formulação. O autor considera, ainda, duas condições necessárias para impor, de forma simples, as condições de contorno na fronteira e na interface entre materiais. A primeira condição deve garantir que a componente tangencial da função de forma ao longo da direção vetorial de um dado nó seja igual a 1 (um) neste nó e igual a zero nos demais nós de suporte. A segunda condição é garantir que a direção vetorial dos nós distribuídos ao longo das fronteiras e interfaces sejam tangentes às respectivas fronteiras e interfaces.

Quando comparada ao EMM, a construção das funções de forma no VNMM é mais simples e computacionalmente menos custosa pois dispensa o cálculo de integrais uma vez que não depende do comprimento das arestas.

Em [13], o VNMM foi aplicado no cálculo dos autovalores de três guias de onda bidimensionais com geometrias diferentes e incluindo meios isotrópicos, anisotrópicos e não homogêneos. O método aproximou corretamente os autovalores e a solução numérica não foi corrompida por modos espúrios. A condição de continuidade de campo na interface entre dois meios foi satisfeita e as singularidades de campo foram corretamente superadas.

O VNMM também foi aplicado usando distribuições não uniformes de nós e direções vetoriais. Essa distribuição, contudo, deve formar uma subdivisão planar de forma a satisfazer a condição de continuidade entre domínios de suporte [15]. Neste caso, três, quatro, cinco e seis nós de suporte podem ser usados na aproximação da função do mesmo problema a depender da subdivisão planar utilizada.

A seguir é apresentado uma síntese das funções de forma vetoriais em duas dimensões considerando três, quatro, cinco e seis nós de suporte. Todas foram desenvolvidas e apresentadas em [15].

### 2.2.1 Função de Forma VNMM 2-D com 3 nós de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para construção da função de forma vetorial utilizando 3 nós de suporte. A função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte é dada por [15]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 3$  são os coeficientes a serem encontrados considerando os três nós de suporte. Observa-se que se trata da mesma função dada em (2.1) para o cálculo do EMM com 3 arestas de suporte, ou seja, ambos os métodos possuem a mesma função de base para a construção da função de forma. De maneira similar ao EMM, os coeficientes  $\beta$  também são obtidos forçando que a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte tal que:

$$\vec{N}_i \cdot \hat{t}_k = \delta_{ik} \quad (2.26)$$

onde  $\hat{t}_k$  é o vetor unitário associado ao  $k$ -ésimo nó e  $\delta_{ik}$  é o delta Kronecker definido em (2.3). Se as funções de forma satisfazem a equação (2.26) é possível impor diretamente as condições de contorno de Dirichlet e manter a continuidade na interface. Usando as equações (2.25) e (2.26) para todos  $\vec{N}_i$  e  $\hat{t}_k$  pertencentes ao domínio de suporte, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\alpha \beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.27)$$

onde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & y_1 t_{1x} - x_1 t_{1y} \\ t_{2x} & t_{2y} & y_2 t_{2x} - x_2 t_{2y} \\ t_{3x} & t_{3y} & y_3 t_{3x} - x_3 t_{3y} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i} \quad \beta_{2i} \quad \beta_{3i}]^T \quad (2.29)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8).

A figura 2.1 apresenta o comportamento das funções de forma dentro de um triângulo de dimensões unitárias. É observada que a projeção da função de forma vetorial associada a um nó é igual a 1 (um) sobre a direção vetorial deste nó e perpendicular às outras direções vetoriais. Portanto, a função de forma vetorial satisfaz a condição de projeção forçada em (2.26).

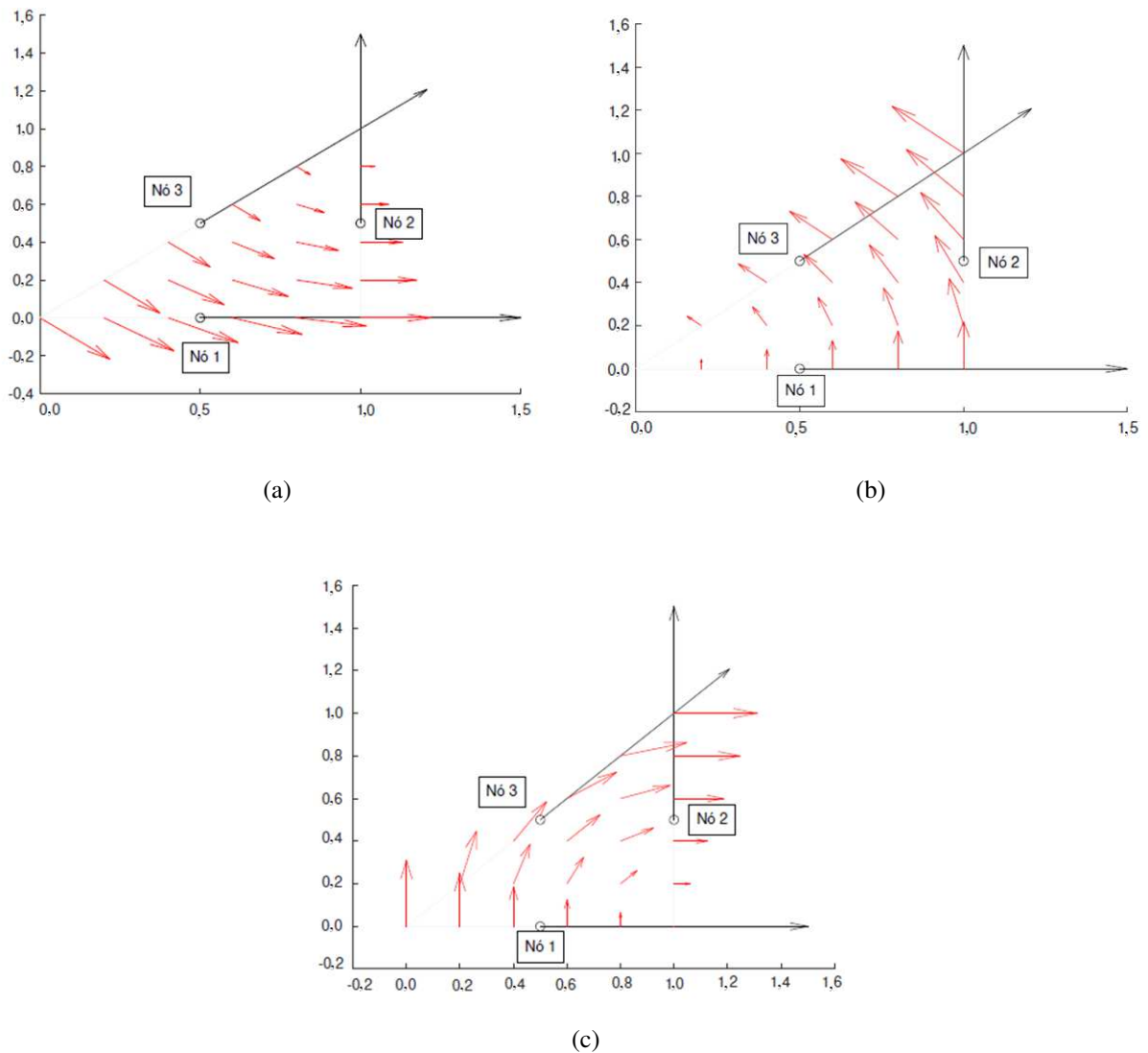


Figura 2.1: Funções de Forma VNMM 2-D para o (a) nó 1, (b) nó 2, e (c) nó 3 [15].

## 2.2.2 Função de Forma VNMM 2-D com 4 nós de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para construção da função de forma vetorial utilizando 4 nós de suporte. Tal como no EMM, a função de forma vetorial  $\vec{N}_i$  para o  $i$ -ésimo nó de suporte é dada por (2.10). Forçando-se a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte tal como em (2.26), para quatro nós de suporte, o sistema matricial torna-se [15]:

$$\alpha \beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.31)$$

onde:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & y_1 t_{1x} & x_1 t_{1y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{4x} & t_{4y} & y_4 t_{4x} & x_4 t_{4y} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i}]^T \quad (2.33)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8).

### 2.2.3 Função de Forma VNMM 2-D com 5 nós de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para construção da função de forma vetorial utilizando 5 nós de suporte. Tal como no EMM, a função de forma vetorial  $\vec{N}_i$  para o  $i$ -ésimo nó de suporte é dada por (2.15). Forçando-se a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte tal como em (2.26), para cinco nós de suporte, o sistema matricial torna-se [15]:

$$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{L}_i, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (2.35)$$

onde:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & y_1 t_{1x} & x_1 t_{1y} & y_1^2 t_{1x} - x_1^2 t_{1y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{5x} & t_{5y} & y_5 t_{5x} & x_5 t_{5y} & y_5^2 t_{5x} - x_5^2 t_{5y} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i}]^T \quad (2.37)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8).

## 2.2.4 Função de Forma VNMM 2-D com 6 nós de suporte

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para construção da função de forma vetorial utilizando 6 nós de suporte. Tal como no EMM, a função de forma vetorial  $\vec{N}_i$  para o  $i$ -ésimo nó de suporte é dada por (2.20). Forçando-se a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte tal como em (2.26), para seis nós de suporte, o sistema matricial torna-se [15]:

$$\alpha \beta_i = \mathbf{L}_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.39)$$

onde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & y_1 t_{1x} & x_1 t_{1y} & y_1^2 t_{1x} & x_1^2 t_{1y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{6x} & t_{6y} & y_6 t_{6x} & x_6 t_{6y} & y_6^2 t_{6x} & x_6^2 t_{6y} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i}]^T \quad (2.41)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

onde  $t_{kx}$  e  $t_{ky}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser obtida tal como em (2.8).

## Capítulo 3

# As Funções de Forma para o Método Sem Malha Nodal Vetorial 3-D

Este capítulo apresenta a construção das funções de forma do Método Sem Malha Nodal Vetorial para aproximações de campos vetoriais tridimensionais. Tal como na abordagem bidimensional, as funções de forma geradas devem ser funções vetoriais e baseadas no espaço  $H(\text{curl})$ .

Em 2-D, as funções de forma VNMM foram construídas considerando-se a variação do número de nós de suporte com consequente modificação das funções de base. Contudo, a versatilidade do método permite manter um suporte fixo variando-se apenas a base da função de forma. Neste sentido, o VNMM 3-D é implementado trabalhando-se com um número de nós de suporte invariável porém, com diferentes funções de base. Nesta abordagem 6 (seis) nós de suporte são usados e 4 (quatro) funções de bases distintas são propostas para construir as funções de forma VNMM 3-D. São elas: a base de Nédélec para elementos de primeira ordem 3-D, uma função vetorial polinomial de primeira ordem completa, uma função vetorial polinomial de primeira ordem livre de divergência e uma função vetorial radial.

A base de Nédélec tem sido tradicionalmente utilizada na construção das funções de forma VNMM e, naturalmente, sua aplicação é estendida para a análise 3-D. O contexto e a motivação que levaram à escolha das demais bases polinomiais e da base radial estão relacionadas à implementação do VNMM com suporte arbitrário. O suporte arbitrário é introduzido no capítulo 4. A contextualização e os testes de avaliação da qualidade das bases propostas são devidamente apresentados no capítulo 6.

### 3.1 Aproximação VNMM 3-D

Dado um conjunto de nós distribuídos no domínio do problema  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$  e seus limites  $\partial\Omega$ . Um vetor unitário é associado a cada nó em direções que podem ser predefinidas ou arbitrárias, conforme mostrado na figura 3.1.

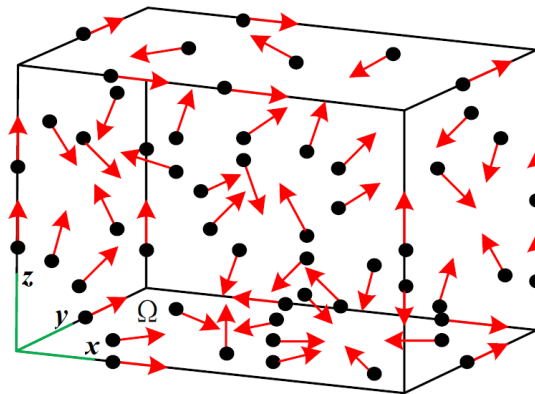


Figura 3.1: Distribuição de nós e suas direções vetoriais em um domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$ .

A aproximação  $\vec{u}^h$  de um dado campo vetorial  $\vec{u}$  no ponto  $\mathbf{x}(x, y, z)$ , pertencente a  $\Omega$ , é realizada usando um subconjunto arbitrário dos nós. Esses nós, chamados nós de suporte, e suas direções associadas serão usados para construir as funções de forma VNMM. Quando  $\Omega$  é composto por mais de um material, os nós de suporte devem pertencer ao mesmo material ou estar localizados na interface entre os materiais. A aproximação do campo vetorial  $\vec{u}^h$  é dada por:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i(\mathbf{x})c_i \quad (3.1)$$

onde  $n$  é o número de nós de suporte,  $\vec{N}_i$  são as funções de forma vetoriais e  $c_i$  são os coeficientes da projeção de  $\vec{u}^h$  nas direções dos respectivos nós.

## 3.2 Base Polinomial de Nédélec

Nesta seção é apresentada a formulação matemática e a definição dos espaços para a construção das funções vetoriais VNMM 3-D com seis nós de suporte. A base do vetor polinomial é a mesma usada nos elementos de Nédélec do primeiro tipo [18].

### 3.2.1 Espaço das Funções de Forma

Para a construção das funções de forma vetoriais  $\vec{N}_i$ , é considerado um domínio Lipschitziano  $\Omega$ , aberto e limitado com uma fronteira regular  $\partial\Omega$ . Os espaços das funções vetoriais  $H(\text{curl})$  são definidos como [19]:

$$H(\text{curl}; \Omega) = \{u \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \text{curl } u \in [L^2(\Omega)]^3 \} \quad (3.2)$$

onde  $[L^2(\Omega)]^3$  é o espaço de Hilbert de funções em  $\mathbb{R}^3$  que possuem quadrado integrável.

Em [18], Nédélec introduz o espaço funcional  $\mathcal{R}^k$ . A família de elementos de Nédélec do primeiro tipo em conformidade com o espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  é baseada nos espaços polinomiais [19]:

$$\mathcal{R}^k = (\tilde{\mathbb{P}}_{k-1})^3 \oplus \mathbb{S}^k \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}$  é o espaço polinomial de grau  $k - 1$  e a dimensão dos espaços  $\mathcal{R}^k$  é dada por [19]:

$$\dim(\mathcal{R}^k) = \frac{(k+3)(k+2)k}{2} \quad (3.4)$$

O espaço auxiliar  $\mathbb{S}^k$  é então definido como [19]:

$$\mathbb{S}^k := \left\{ p \in [\tilde{\mathbb{P}}_k]^3 : p \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 p_i \mathbf{x}_i \equiv 0 \right\} \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{x}$  é um ponto dentro do domínio de suporte tal que  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ . Em três dimensões,  $\mathbb{S}^k$  tem uma dimensão igual a  $k(k + 2)$ .

### 3.2.2 Construção das Funções de Forma de Primeira Ordem

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para a construção das funções vetoriais VNMM com seis nós de suporte. A base do vetor polinomial é a mesma usada nos elementos de Nédélec do primeiro tipo [18].

Seja  $p$  um polinômio de primeiro grau, ou seja,  $k = 1$  em  $[\mathbb{P}_1]^3$  dado por:

$$p_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,3 \quad (3.6)$$

A condição para  $p \in \mathbb{S}^1$  é:

$$p \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^3 (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j \equiv 0 \quad (3.7)$$

Isso leva à seguinte condição para os coeficientes da função polinomial em  $\mathbb{S}^1$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} &= -a_{21}, a_{31} = -a_{13}, a_{23} = -a_{32} \end{aligned} \quad (3.8)$$

A base de  $\mathbb{S}^1$  obtida escolhendo  $a_{ij} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j > i$  e considerando todos os outros coeficientes iguais a zero é:

$$\mathbb{S}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.9)$$

tal que o espaço de Nédélec  $\mathcal{R}^1$  seja dado por:

$$\mathcal{R}^1 = (\tilde{\mathbb{P}}_0)^3 \oplus \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.10)$$

Assim a base do vetor polinomial do elemento de Nédélec do primeiro tipo dado pelo espaço  $\mathcal{R}^1$  é:

$$\mathcal{R}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.11)$$

e a função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte é dada por:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 6$  são os coeficientes a serem encontrados considerando os seis nós de suporte. Esses coeficientes podem ser obtidos forçando que a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte seja igual a um se  $i = k$ , e igual a zero se  $i \neq k$ :

$$\vec{N}_i \cdot \hat{t}_k = \delta_{ik} \quad (3.13)$$

com:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $\hat{t}_k$  é o vetor unitário associado ao  $k$ -ésimo nó e  $\delta_{ik}$  é o delta Kronecker. Se as funções de forma satisfazem a equação (3.13) é possível impor diretamente as condições de contorno de Dirichlet e manter a continuidade na interface. Usando as equações (3.12) e (3.13) para todos  $\vec{N}_i$  e  $\hat{t}_k$  pertencentes ao domínio de suporte, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\alpha \beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

onde  $n$  é igual a 6 e:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & -z_1 t_{1y} + y_1 t_{1z} & z_1 t_{1x} - x_1 t_{1z} & -y_1 t_{1x} + x_1 t_{1y} \\ t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & -z_2 t_{2y} + y_2 t_{2z} & z_2 t_{2x} - x_2 t_{2z} & -y_2 t_{2x} + x_2 t_{2y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{6x} & t_{6y} & t_{6z} & -z_6 t_{6y} + y_6 t_{6z} & z_6 t_{6x} - x_6 t_{6z} & -y_6 t_{6x} + x_6 t_{6y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i}]^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $t_{kx}$ ,  $t_{ky}$  e  $t_{kz}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte.

Após solucionar os sistemas de equações (3.15) e, em seguida, substituir os  $\boldsymbol{\beta}_i$  em (3.12), as funções de forma  $\vec{N}_i$  são definidas. Uma vez encontrada a função de forma vetorial, a aproximação de  $\vec{u}^h$  no ponto  $\mathbf{x}$  para os seis nós de suporte pode ser obtida fazendo:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^6 \vec{N}_i(\mathbf{x}) c_i = \mathbf{N} \mathbf{c}_s \quad (3.19)$$

com:

$$\mathbf{N} = [\vec{N}_1 \ \vec{N}_2 \ \vec{N}_3 \ \vec{N}_4 \ \vec{N}_5 \ \vec{N}_6] \quad (3.20)$$

$$\mathbf{c}_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A figura 3.2 mostra o comportamento das funções dentro de um suporte de referência que forma um tetraedro de dimensões unitárias. Observa-se que a projeção da função de forma vetorial associada com determinado nó é igual a 1 na direção deste nó e perpendicular nas outras direções. Portanto, a função de forma vetorial satisfaz a condição da projeção forçada na equação (3.13).

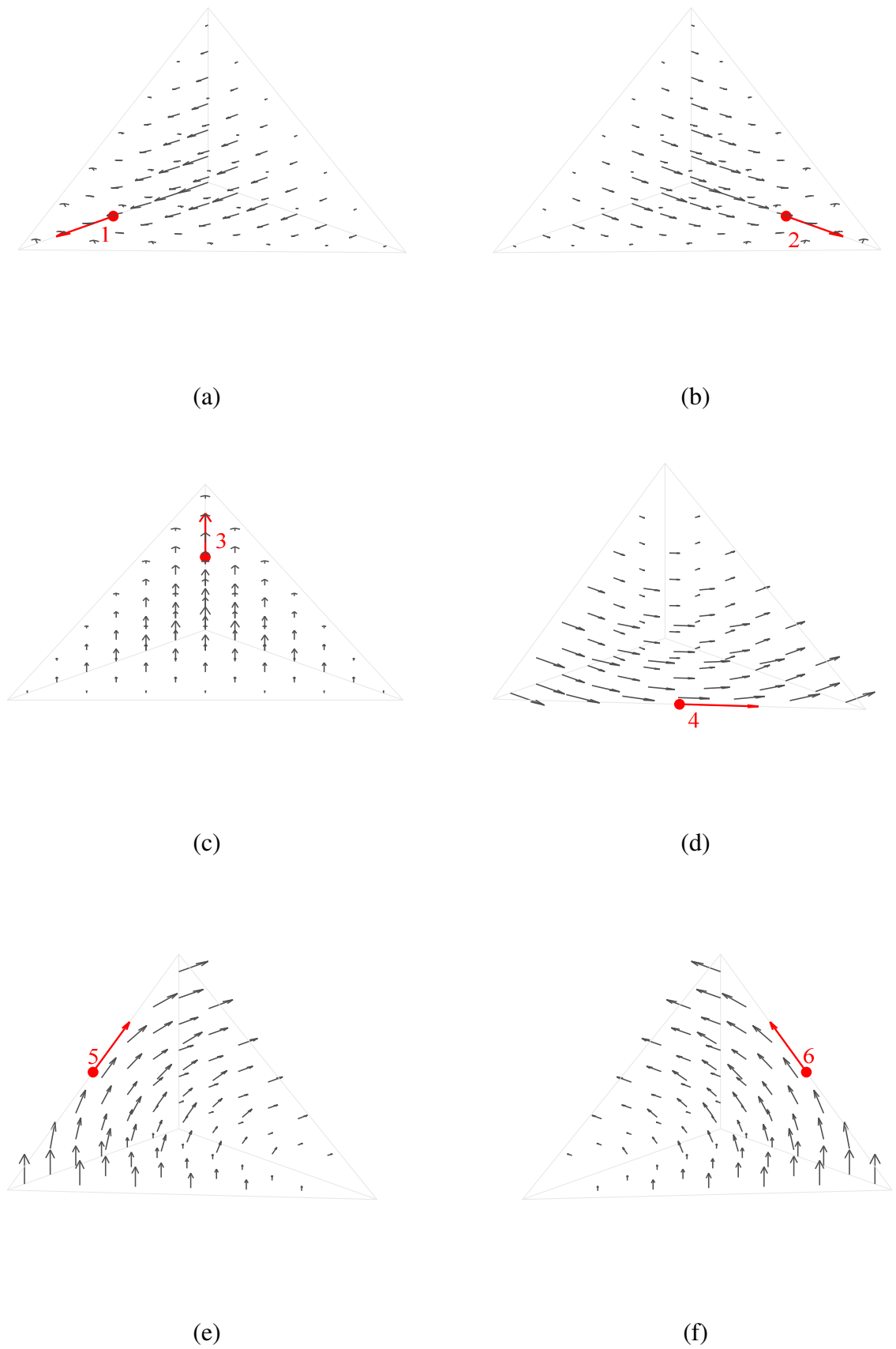


Figura 3.2: Funções de Forma VNMM para o (a) nó 1, (b) nó 2, (c) nó 3, (d) nó 4, (e) nó 5 e (f) nó 6.

### 3.3 Base Polinomial de Primeira Ordem Completa

Nesta seção é apresentada a formulação e a definição dos espaços para a construção das funções vetoriais VNMM 3-D com seis nós de suporte e base polinomial completa de primeira ordem.

A construção do novo espaço funcional  $\mathcal{R}^k$  é baseada no espaço polinomial  $\mathbb{P}_k$ :

$$\mathcal{R}^k = (\mathbb{P}_k)^3 \quad (3.22)$$

onde  $\mathbb{P}_k$  é o espaço polinomial de grau  $k$ . Assim a base do vetor polinomial de primeira ordem dado pelo espaço  $\mathcal{R}^1$  é:

$$\mathcal{R}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.23)$$

e a função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte VNMM-3D é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{N}_i = & \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{7i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{8i} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{9i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \\ & + \beta_{10i} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{11i} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{12i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 6$  e  $j = 1, \dots, 12$ , são os doze coeficientes a serem encontrados considerando os seis nós de suporte. Da mesma forma que foi apresentado nas equações (3.13) e (3.14), esses coeficientes podem ser obtidos forçando que a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte,  $\hat{t}_k$ , seja igual a um se  $i = k$ , e igual a zero se  $i \neq k$ . Considerando todos  $\vec{N}_i$  e  $\hat{t}_k$  pertencentes ao domínio de suporte, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\alpha \beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

onde  $n$  é igual a 6 e:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & x_1 t_{1x} & x_1 t_{1y} & x_1 t_{1z} & y_1 t_{1x} & y_1 t_{1y} & y_1 t_{1z} & z_1 t_{1x} & z_1 t_{1y} & z_1 t_{1z} \\ t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & x_2 t_{2x} & x_2 t_{2y} & x_2 t_{2z} & y_2 t_{2x} & y_2 t_{2y} & y_2 t_{2z} & z_2 t_{2x} & z_2 t_{2y} & z_2 t_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{6x} & t_{6y} & t_{6z} & x_6 t_{6x} & x_6 t_{6y} & x_6 t_{6z} & y_6 t_{6x} & y_6 t_{6y} & y_6 t_{6z} & z_6 t_{6x} & z_6 t_{6y} & z_6 t_{6z} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i} \ \beta_{7i} \ \beta_{8i} \ \beta_{9i} \ \beta_{10i} \ \beta_{11i} \ \beta_{12i}]^T \quad (3.27)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde  $t_{kx}$ ,  $t_{ky}$  e  $t_{kz}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Nota-se que, neste caso, têm-se 12 incógnitas para 6 equações. Soluciona-se, então, a equação linear dada por (3.25) minimizando o valor da norma  $|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{L}|$  de tal forma que, existindo várias soluções, toma-se a solução que minimiza a norma de  $\boldsymbol{\beta}$ .

### 3.4 Base Polinomial de Primeira Ordem Incompleta

Nesta seção é apresentada a formulação e a definição dos espaços para a construção das funções vetoriais VNMM 3-D com seis nós de suporte e base polinomial incompleta de primeira ordem.

A construção do novo espaço funcional  $\mathcal{R}^k$  é baseada nos espaços polinomiais:

$$\mathcal{R}^k = (\tilde{\mathbb{P}}_{k-1})^3 \oplus \mathbb{S}^k \quad (3.29)$$

onde  $\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}$  é o espaço polinomial de grau  $k - 1$  e o espaço auxiliar  $\mathbb{S}^k$  é definido como:

$$\mathbb{S}^k := \left\{ p \in [\tilde{\mathbb{P}}_k]^3 : p \cdot \mathbf{x} = \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^3 p_j \mathbf{x}_i \equiv 0 \right\} \quad (3.30)$$

Seja  $p$  um polinômio de primeiro grau, ou seja,  $k = 1$  em  $[\tilde{\mathbb{P}}_1]^3$  definido por:

$$p_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_j. \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

A condição para  $p \in \mathbb{S}^1$  é:

$$p \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i=j}}^3 a_{ij} x_j \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^3 a_{ii} x_i^2 \equiv 0. \quad (3.32)$$

Isso leva à seguinte condição para os coeficientes da função polinomial em  $\mathbb{S}^1$ :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0. \quad (3.33)$$

A base de  $\mathbb{S}^1$  obtida escolhendo  $a_{ij} = 1$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$  e considerando todos os outros coeficientes iguais a zero é:

$$\mathbb{S}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (3.34)$$

Voltando à equação (3.29), a base do vetor polinomial de primeira ordem incompleta  $\mathcal{R}^1$  pode ser definida como:

$$\mathcal{R}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.35)$$

e a função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte VNMM-3D é dada por:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \dots$$

$$+\beta_{6i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{7i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} + \beta_{8i} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{9i} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 6$  e  $j = 1, \dots, 9$ , são os nove coeficientes a serem encontrados considerando os seis nós de suporte. Da mesma forma que foi apresentado nas equações (3.13) e (3.14), esses coeficientes podem ser obtidos forçando que a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte,  $\hat{t}_k$ , seja igual a um se  $i = k$ , e igual a zero se  $i \neq k$ . Considerando todos  $\vec{N}_i$  e  $\hat{t}_k$  pertencentes ao domínio de suporte, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\alpha\beta_i = L_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.37)$$

onde  $n$  é igual a 6,  $L_i$  é o vetor dado em (3.28) e:

$$\alpha = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & x_1 t_{1y} & x_1 t_{1z} & y_1 t_{1x} & y_1 t_{1z} & z_1 t_{1x} & z_1 t_{1y} \\ t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & x_2 t_{2y} & x_2 t_{2z} & y_2 t_{2x} & y_2 t_{2z} & z_2 t_{2x} & z_2 t_{2y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{6x} & t_{6y} & t_{6z} & x_6 t_{6y} & x_6 t_{6z} & y_6 t_{6x} & y_6 t_{6z} & z_6 t_{6x} & z_6 t_{6y} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i} \ \beta_{5i} \ \beta_{6i} \ \beta_{7i} \ \beta_{8i} \ \beta_{9i}]^T \quad (3.39)$$

onde  $t_{kx}$ ,  $t_{ky}$  e  $t_{kz}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Nota-se que, neste caso, têm-se 9 incógnitas para 6 equações. Soluciona-se, então, a equação linear dada por  $\alpha\beta = L$  minimizando o valor da norma  $|\alpha\beta - L|$  de tal forma que, existindo várias soluções, toma-se a solução que minimiza a norma de  $\beta$ .

## 3.5 Base Radial

Nesta seção é apresentada a formulação e a definição dos espaços para a construção das funções vetoriais VNMM 3-D com seis nós de suporte e base radial.

As funções de base radial, *Radial Basis Function* (RBF), são amplamente utilizadas em métodos sem malha. Neste trabalho, são implementadas dois tipos de RBF para composição

da base do VNMM 3-D: a função radial gaussiana (EXP) e a função multiquádrica (MQ) definidas, respectivamente, em [20]:

$$R_i = e^{-ar_i^2} ; R_{ik} = e^{-ar_{ik}^2} \quad (3.40)$$

$$R_i = (r_i^2 + a^2)^q ; R_{ik} = (r_{ik}^2 + a^2)^q \quad (3.41)$$

onde  $a$  e  $q$  são chamados de parâmetro de forma que controlam a taxa de decaimento da RBF. As variáveis  $r_i$  e  $r_{ik}$  são, respectivamente, a distância entre o ponto de interesse  $\mathbf{x}$  ( $x, y, z$ ) e o nó de suporte  $n_i$  ( $x_i, y_i, z_i$ ) e, a distância entre um nó de suporte  $n_k$  ( $x_k, y_k, z_k$ ) e o nó  $n_i$  ( $x_i, y_i, z_i$ ), ou seja:

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (3.42)$$

$$r_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2} \quad (3.43)$$

O novo espaço funcional  $\mathcal{S}$  baseado nas funções RBF pode ser construído fazendo:

$$\mathcal{S} = \left\langle \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_i \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.44)$$

e a função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte VNMM-3D é dada por:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ R_i \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_i \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

onde  $\beta_{ji}$ , com  $i = 1, \dots, 6$  e  $j = 1, \dots, 3$ , são os três coeficientes a serem encontrados para cada um dos seis nós de suporte. Esses coeficientes podem ser obtidos forçando que a projeção da  $i$ -ésima função de forma na direção do vetor associado ao  $k$ -ésimo nó de suporte,  $n_k$  ( $x_k, y_k, z_k$ ), seja igual a um se  $i = k$ , e igual a zero se  $i \neq k$ :

$$\vec{N}_{ik} \cdot \hat{t}_k = \delta_{ik} \quad (3.46)$$

com:

$$\vec{N}_{ik} = \beta_{1i} \begin{bmatrix} R_{ik} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ R_{ik} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{ik} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

onde  $\hat{t}_k$  é o vetor unitário associado ao  $k$ -ésimo nó e  $\delta_{ik}$  é o delta Kronecker. Para cada  $\vec{N}_{ik}$  e  $\hat{t}_k$  pertencentes ao domínio de suporte, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\alpha_i \beta_{ji} = L_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.48)$$

onde  $n$  é igual a 6,  $L_i$  é o vetor dado em (3.28) e:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} R_{i1}t_{1x} & R_{i1}t_{1y} & R_{i1}t_{1z} \\ R_{i2}t_{2x} & R_{i2}t_{2y} & R_{i2}t_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{i6}t_{6x} & R_{i6}t_{6y} & R_{i6}t_{6z} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i}]^T \quad (3.50)$$

onde  $t_{kx}$ ,  $t_{ky}$  e  $t_{kz}$  são as componentes do vetor unitário do  $k$ -ésimo nó de suporte. Obtidos os coeficientes  $\beta_{ji}$ , esses são usados em (3.45) para obtenção função de forma vetorial para o  $i$ -ésimo nó de suporte.

# Capítulo 4

## O Suporte Arbitrário

Este capítulo dedica-se a apresentar as estratégias utilizadas para a escolha e a implementação de um suporte arbitrário para a construção das funções de forma VNMM apresentadas no capítulo 3.

Os nós de suporte são aqueles que participam da aproximação local do campo vetorial  $\vec{u}^h$  em cada ponto de interesse  $\mathbf{x}$ , conforme (3.1). Nas implementações em 2-D, o suporte é predeterminado por uma estrutura de dados ou uma subdivisão planar [15]. Seguindo o mesmo princípio o VNMM 3-D trabalha, inicialmente, com uma subdivisão regular de nós cujos seis nós de cada domínio de suporte e suas respectivas direções vetoriais são previamente conhecidos. Trabalhar com um suporte previamente conhecido economiza custo computacional ao não depender de estratégias e algoritmos de busca e seleção dos nós de suporte. Essa estratégia é vantajosa e interessante de ser utilizada na solução de problemas estáticos. No entanto, a possibilidade de se trabalhar com nós escolhidos arbitrariamente elimina a dependência de uma subdivisão preliminar, proporciona mais versatilidade ao método e abre portas à sua utilização na aproximação de problemas que envolvam movimento.

Os métodos sem malha têm sido amplamente utilizados na modelagem de dispositivos móveis ou com condições geométricas variantes no tempo [21]. Nesses métodos, uma nuvem de nós, sem relações de conectividade, é espalhada sobre o domínio do problema e suas fronteiras fornecendo ajustes mais facilitados em interfaces móveis quando comparados aos métodos baseados em malha. O movimento pode ser facilmente implementado pois não há necessidade de gerar um novo conjunto de nós para cada nova posição ou usar algoritmos especiais para conectar a parte fixa com a parte móvel.

No contexto do VNMM, a escolha dos nós de suporte próximos à interface móvel deve ser arbitrária de tal forma que permita uma aproximação adequada do campo  $\vec{u}^h$  nesta região dispensando o uso de técnicas específicas para se levar em conta o movimento.

Para obter um suporte arbitrário, uma *kd-tree* [22] em três dimensões foi construída e um algoritmo de busca e seleção dos nós do domínio de suporte da função de forma foi implementado. Este algoritmo escolhe os seis nós mais próximos de um dado ponto de integração  $\mathbf{x}$  para participarem da aproximação local. A seção 4.1 apresenta os detalhes de construção da *kd-tree* e as rotinas computacionais implementadas para a escolha adequada dos nós de suporte.

Em seguida, na seção 4.2, são levantadas as condições necessárias para se construir as funções de forma VNMM utilizando o suporte arbitrário. São introduzidas duas técnicas que adicionam restrições na escolha dos nós de suporte e suas devidas rotinas computacionais.

Os resultados dos testes de aproximação utilizando um suporte arbitrário são devidamente apresentados no capítulo 6.

## 4.1 Construção da *kd-tree* e do Algoritmo de Busca

Uma *kd-tree* é uma estrutura de dados binária que particiona recursivamente um espaço de dimensão  $k$  [22]. Originalmente, em um espaço tridimensional ter-se-ia uma *3d-tree*. No entanto, na literatura é mais comum referir-se a essa árvore binária 3-D como uma *kd-tree* tridimensional [23].

O processo de construção desta árvore consiste em dividir um conjunto  $P$  de  $n$  pontos em subconjuntos. Seja um conjunto  $P$  definido por um prisma retangular de dimensões  $[x: x'] \times [y: y'] \times [z: z']$ , um ponto  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_z)$  se encontra dentro deste prisma se e somente se:

$$\mathbf{x}_x \in [x: x'] , \mathbf{x}_y \in [y: y'] \text{ e } \mathbf{x}_z \in [z: z'] \quad (4.1)$$

Logo uma busca em um intervalo retangular tridimensional é composta por três buscas unidimensionais, uma em cada coordenada.

Considera-se, portanto, a seguinte definição geral recursiva da árvore de pesquisa binária: o conjunto de pontos unidimensionais é dividido em dois subconjuntos de tamanhos aproximadamente iguais; um subconjunto contém os pontos menores ou iguais ao valor de divisão, o outro subconjunto contém os pontos maiores que o valor de divisão. O valor de

divisão é armazenado na raiz, e os dois subconjuntos são armazenados recursivamente nas duas subárvores [23].

Em um espaço tridimensional a divisão é feita de acordo com os planos ou superfícies. A ordem em que as divisões são feitas depende da escolha da mediana, ou seja, define-se um plano inicial, geralmente localizado paralelamente a um dos eixos de coordenadas. O processo é o seguinte: na raiz, divide-se o conjunto  $P$  em dois subconjuntos de tamanhos aproximadamente iguais através de um plano localizado em um valor  $x$  constante dado por  $x_m$ . O plano de divisão é armazenado na raiz. O subconjunto de pontos com valores de  $x$  menores ou iguais a  $x_m$ , definido por  $x_m^-$ , é armazenado no ramo esquerdo da árvore, e o subconjunto com valores de  $x$  maiores que  $x_m$  é armazenado no ramo direito da árvore. O ramo esquerdo da raiz é dividido em dois subconjuntos com um plano em  $y$  constante dado por  $y_m$ ; os pontos ficam agora armazenados na subárvore esquerda do ramo esquerdo, e na subárvore direita do ramo esquerdo a depender da posição que se encontram em relação a  $y_m$ . O próprio ramo esquerdo armazena o plano de divisão. O mesmo procedimento é feito no ramo direito. Cada ramo gerado da última divisão é dividido em dois subconjuntos com um plano em  $z$  constante dado por  $z_m$ . Em suma, divide-se pela coordenada  $x$ , depois pela coordenada  $y$ , depois pela coordenada  $z$ , novamente pela coordenada  $x$  e assim por diante. A recursão finaliza quando resta apenas um ponto, que é então armazenado em uma folha da árvore.

Pode-se construir uma *kd-tree* com o procedimento recursivo descrito no quadro 4.1. Esse procedimento tem dois parâmetros: um conjunto de pontos e um número inteiro. O primeiro parâmetro é o conjunto para o qual queremos construir a *kd-tree*; inicialmente, esse é o conjunto  $P$ . O segundo parâmetro é a profundidade (*depth*) da recursão. Esse parâmetro determina em qual plano deve-se dividir e seu valor inicial é zero. O procedimento retorna a raiz da *kd-tree*.

O algoritmo usa a convenção de que o ponto na face de divisão — aquele que determina a coordenada mediana — pertence ao subconjunto dos valores menores ou iguais à mediana. Assim a mediana escolhida entre dois valores é sempre a menor deles, o que garante que o algoritmo seja concluído.

A figura 4.1 apresenta um caso de uma árvore 3-D que divide o espaço usando planos paralelos aos planos principais do sistema de coordenadas e a sua árvore binária correspondente.

**Rotina:** BUILDKDTREE: Constroi *kd-tree* 3-D

**Entradas:** conjunto de pontos  $P$ , profundidade atual ( $depth$ )

**Saídas:** A raiz de uma *kd-tree* que armazena  $P$

1. **if**  $P$  contiver apenas um ponto
2.     **return** uma folha que armazena esse ponto;
3.     **else if** resto ( $depth/3$ ) = 0
4.         Divida  $P$  em dois subconjuntos com um plano  $S$  passando pela coordenada  $x$  mediana ( $x_m$ ) dos pontos em  $P$ . Seja  $P1$  o subconjunto de pontos no plano  $S$  e no volume  $x_m^-$  e seja  $P2$  o subconjunto de pontos no volume  $x_m^+$ .
5.     **else if**  $depth =$  resto ( $depth/3$ ) = 1
6.         Divida  $P$  em dois subconjuntos com um plano  $S$  passando pela coordenada  $y$  mediana ( $y_m$ ) dos pontos em  $P$ . Seja  $P1$  o subconjunto de pontos no plano  $S$  e no volume  $y_m^-$  e seja  $P2$  o subconjunto de pontos no volume  $y_m^+$
7.     **else**
8.         Divida  $P$  em dois subconjuntos com um plano  $S$  passando pela coordenada  $z$  mediana ( $z_m$ ) dos pontos em  $P$ . Seja  $P1$  o subconjunto de pontos no plano  $S$  e no volume  $z_m^-$  e seja  $P2$  o subconjunto de pontos no volume  $z_m^+$
9.     **end if**
10.  $v\_left \leftarrow$  BUILDKDTREE( $P1, depth+1$ )
11.  $v\_right \leftarrow$  BUILDKDTREE( $P2, depth+1$ )
12. Crie um nó  $v$  armazenando  $S$ , faça  $v\_left$  o ramo esquerdo de  $v$  e faça  $v\_right$  o ramo direito de  $v$ .
13. **return**  $v$

Quadro 4.1: Pseudocódigo para construção da *kd-tree* 3-D

Avaliando-se o custo computacional para a construção de uma *kd-tree* tridimensional pode-se afirmar que a etapa mais cara é encontrar o plano de divisão pois esta é realizada a cada chamada recursiva. Já a localização da mediana pode ser feita em tempo linear. Uma abordagem interessante é pré-classificar o conjunto de pontos nas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O conjunto de parâmetros  $P$  é agora passado para o procedimento na forma de três listas classificadas, uma para cada coordenada. Dadas as três listas ordenadas, é fácil encontrar a mediana da coordenada em tempo linear. Portanto, o tempo de construção  $T(n)$  satisfaz a recorrência [23]:

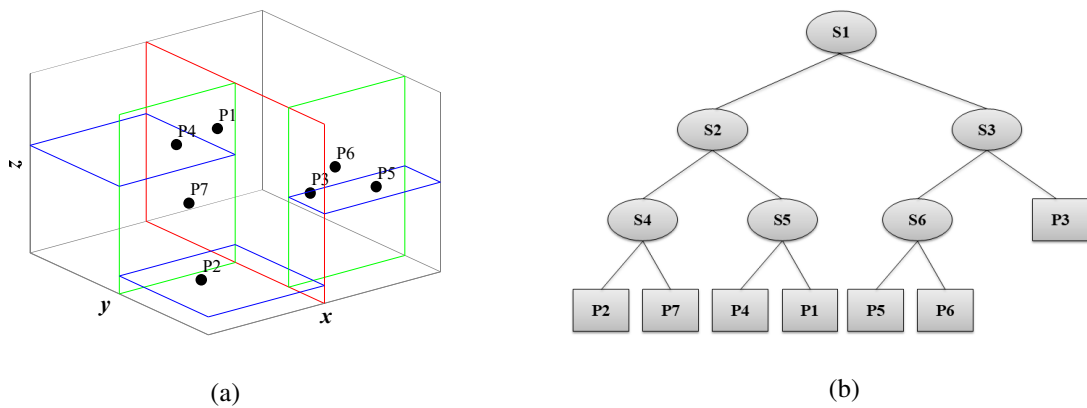


Figura 4.1: Construção de uma *kd-tree* tridimensional: (a) subdivisões no volume; (b) árvore binária correspondente.

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{se } n = 1 \\ O(n) + 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

o que resulta em  $O(n \log n)$ . Esse limite inclui o tempo que gastamos para pré-classificar os pontos nas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Para limitar a quantidade de armazenamento, observamos que cada folha na *kd-tree* armazena um ponto distinto de  $P$ . Portanto, há  $n$  folhas. Como uma *kd-tree* é uma árvore binária e cada folha e nó interno usa armazenamento  $O(1)$ , isso implica que a quantidade total de armazenamento é  $O(n)$ . Concluindo, uma *kd-tree* para um conjunto de  $n$  pontos usa armazenamento  $O(n)$  e pode ser construída em tempo  $O(n \log n)$ .

O algoritmo de busca na árvore *kd-tree* baseia-se na distância Euclidiana para obter a menor distância entre o ponto de interesse  $\mathbf{x}$  e um dado nó na árvore. O processo é executado até que os  $k$  vizinhos mais próximos sejam encontrados. Um pseudocódigo para essa rotina pode ser visto no quadro 4.2.

O processo de busca inicia-se definindo o melhor caminho de busca na árvore conforme a localização do ponto de interesse. Ou seja, se a coordenada do ponto de interesse for menor ou igual ao valor da dimensão ou do eixo de divisão, ele irá para a subárvore esquerda e, caso contrário, ele irá para a subárvore direita. Esse processo se repete até que o último nó seja um nó folha. Atualiza-se o nó repetidamente até encontrar o nó mais próximo do ponto de interesse de acordo com o caminho de busca.

|   |
|---|
| <p><b>Rotina:</b> KNNKDTREE: Busca na kd-tree vizinhos mais próximos de <math>\mathbf{x}</math></p> <p><b>Entradas:</b> a raiz da kd-tree <math>v</math>, o ponto de interesse <math>\mathbf{x}</math>, o número de vizinhos desejado <math>k</math>; a região de busca <math>R</math></p> <p><b>Saídas:</b> <u>Os nós vizinhos mais próximos do ponto de interesse <math>best\_nodes</math></u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Inicializa na primeira chamada da função:<br/><math>number\_of\_neighbors=0; R=1;</math></li> <li>2. <b>if</b> o nó atual for uma folha</li> <li>3.     <b>return</b> o resultado atual ou o nó armazenado em <math>v(R)</math>;</li> <li>4. <b>end if</b></li> <li>5. <b>if</b> o nó atual não for uma folha</li> <li>6.     <b>if</b> o ponto está à esquerda da dimensão de divisão</li> <li>7.         KNNKDTREE (<math>0, \mathbf{x}, k, v\_left(R)</math>);</li> <li>8.     <b>else</b></li> <li>9.         KNNKDTREE (<math>0, \mathbf{x}, k, v\_right(R)</math>);</li> <li>10.    <b>end if</b></li> <li>11. <b>end if</b></li> <li>12. <b>while</b> <math>number\_of\_neighbors &lt; k</math> <b>ou</b> a menor distância atual for menor que o limite da região de busca</li> <li>13.     <math>dist(R) =</math> calcula distância entre <math>\mathbf{x}</math> e <math>v(R)</math></li> <li>14.     <b>if</b> <math>dist(best\_node) &gt; dist(R)</math></li> <li>15.         <math>number\_of\_neighbors = number\_of\_neighbors + 1</math></li> <li>16.         <math>best\_nodes(number\_of\_neighbors) = v(R)</math></li> <li>17.     <b>end if</b></li> <li>18. <b>end while</b></li> <li>19. <b>return</b> <math>best\_nodes</math></li> </ol> |
|---|

Quadro 4.2: Pseudocódigo para busca dos  $k$  vizinhos de  $\mathbf{x}$  na kd-tree

No contexto do método VNMM o espaço a ser particionado pela kd-tree é o domínio  $\Omega$  onde todos os nós e seus vetores unitários estão distribuídos no seu interior e nas fronteiras. Dado um ponto de integração  $\mathbf{x} \in \Omega$ , deseja-se encontrar os seis nós de suporte que irão participar da aproximação local. A estratégia mais natural implica em procurar os seis nós mais próximos de cada ponto de integração e usá-los para computar a função de forma. Essa busca deve, portanto, ser realizada em cada ponto de integração.

A estrutura completa do algoritmo está representada na figura 4.2 e consiste basicamente em duas etapas: construir as árvores e fazer as buscas dos seis nós a cada ponto de integração. Construir a árvore precisa ser feito apenas uma vez com o custo  $O(n \log n)$  e os pontos em um intervalo de busca podem ser obtidos em tempo  $O(m \log n)$ , onde  $m$  é o número de pontos de integração.

Vale ressaltar que ao fazer a integração numérica da forma fraca VNMM, as características do material devem ser conhecidas no ponto de integração. Isso é importante para garantir a continuidade das funções de forma entre os diferentes materiais, o que implica que todos os nós contidos em um domínio de influência devem pertencer a uma região única. Em outras palavras, as funções de forma em uma região não devem se sobrepor às funções de forma em outras regiões, de modo que cada região deve manter uma  $kd$ -tree de seus nós. Em seguida, o algoritmo de varredura itera sobre a grade de integração e fornece a região que contém o ponto de integração atual. Com essas informações em mãos, sabe-se onde a busca por vizinhos deve ser realizada e também se as propriedades corretas do material serão utilizadas na montagem das contribuições locais. A figura 4.2 considera a situação na qual cada região necessita da construção de uma árvore.

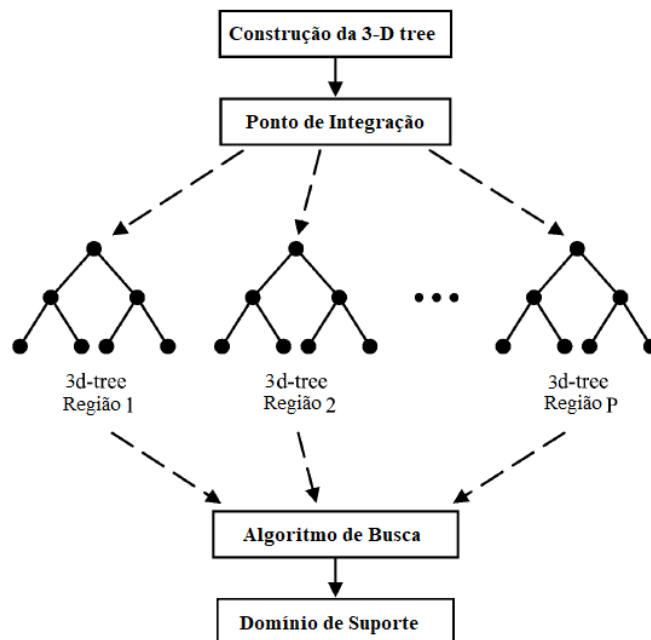


Figura 4.2: Esquema do algoritmo e uso da estrutura de dados.

A título de ilustração, em uma aproximação VNMM 3-D considera-se  $n$  nós e seus vetores unitários espalhados aleatoriamente em um domínio  $\Omega$ . Insere-se, arbitrariamente, um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Na figura 4.3 é possível ver o resultado do algoritmo de busca dos seis nós mais próximos do ponto  $\mathbf{x}$ . Os nós selecionados para contribuir no domínio de suporte da função de forma estão representados em vermelho enquanto os demais nós do domínio  $\Omega$  estão em azul. Nota-se que não há a representação dos vetores unitários associados aos devidos nós uma vez que essa informação não é necessária no procedimento de busca de vizinhos mais próximos, ou seja, apenas a localização dos nós é considerada.

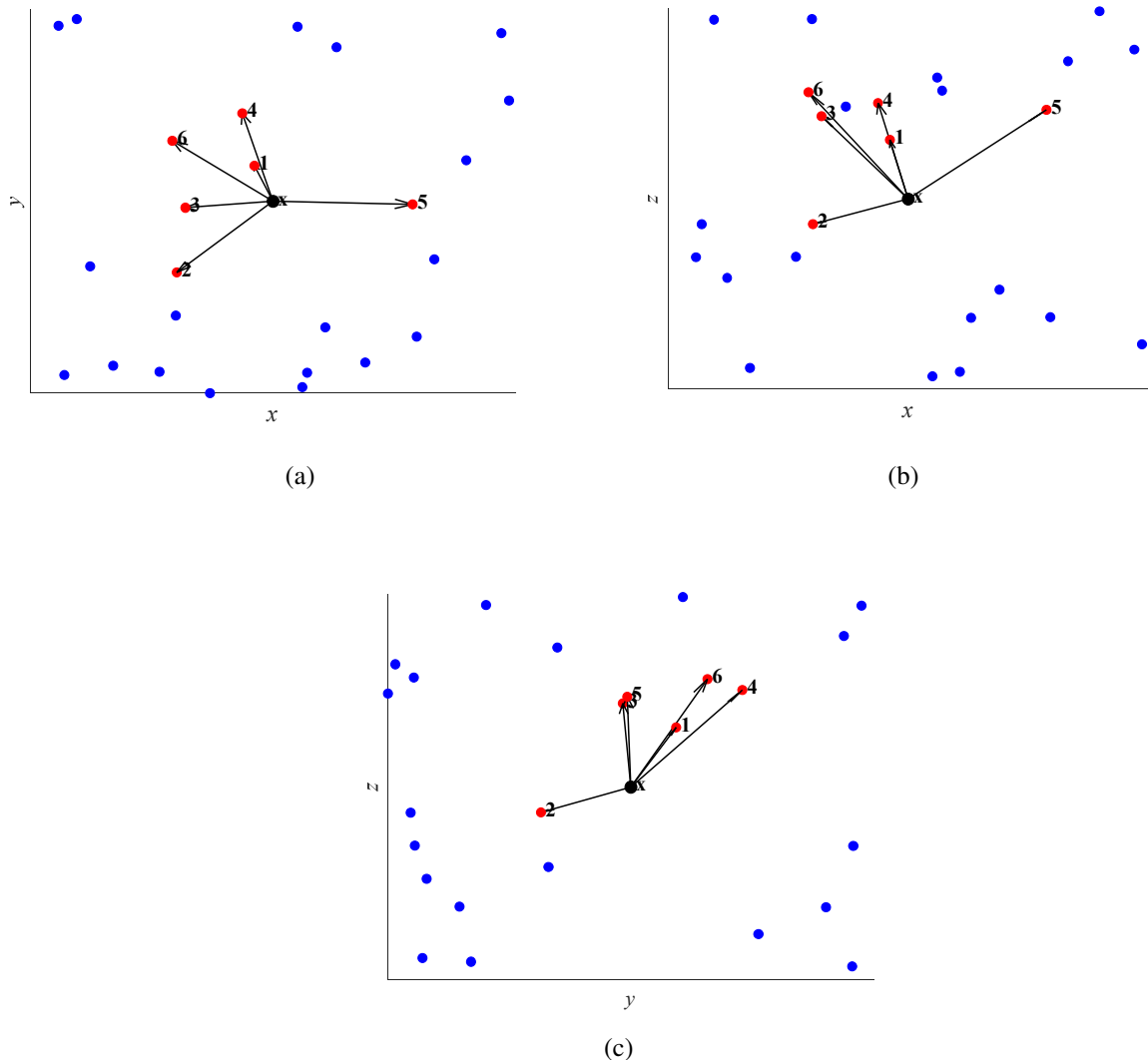


Figura 4.3: Representação da busca pelos seis nós vizinhos mais próximos ao ponto  $\mathbf{x}$  com visualização no plano (a)  $xy$ , (b)  $xz$  e (c)  $yz$

## 4.2 Estratégias para Aproximação VNMM com Suporte Arbitrário

Dados os seis nós mais próximos de um dado ponto de integração  $\mathbf{x}$ , estes são os nós de suporte que participarão da construção das funções de forma  $\vec{N}_i$ . Aplica-se, naturalmente, esse suporte arbitrário à função de forma  $\vec{N}_i$ , dada em (3.12), construída utilizando a base do vetor polinomial do elemento de Nédélec do primeiro tipo.

No entanto, para a construção das funções de forma  $\vec{N}_i$  é necessário a obtenção dos coeficientes  $\beta_i$  que são encontrados após a solução do sistema linear dado por (3.15). Com o uso do suporte arbitrário, surgem alguns casos de singularidade e mau condicionamento da matriz  $\alpha$ , dada em (3.16), inviabilizando a obtenção dos coeficientes necessários à construção da função de forma.

Dentre as opções para se fazer o tratamento da singularidade estão: uma transformação geométrica 3-D, a inclusão de restrições na escolha dos nós de suporte ou o uso de estratégias algébricas que implicariam em alterações na base da função de forma.

A transformação geométrica consiste em levar o domínio de suporte à origem do sistema de coordenadas e, em seguida, girá-lo em torno da origem. Esse recurso foi utilizado com sucesso para tratar um problema de singularidade em 2-D, no caso específico em que as coordenadas dos quatro nós de suporte se repetem sequencialmente [15]. Apesar de não ter sido observado nenhum padrão geométrico nos domínios de suporte com singularidade, a transformação geométrica foi construída para a aplicação em 3-D. Essa estratégia, no entanto, não foi bem sucedida no tratamento da singularidade para este caso. Os detalhes da construção da transformação geométrica 3-D estão devidamente apresentados no Apêndice B deste texto caso seja necessário implementá-la em outra situação futura.

Para a inclusão de restrições na escolha dos nós de suporte duas estratégias são propostas: uma delas corrige o posto da matriz singular e, a outra identifica a dependência linear mediante uma decomposição QR. Ambas envolvem a escolha de novos nós para compor o domínio suporte após a exclusão daqueles que causam a dependência linear ou o problema de posto. Essas técnicas apresentadas corrigem as singularidades e melhoram o condicionamento da matriz  $\alpha$  garantindo menores erros na aproximação numérica. Os detalhes de construção e implementação computacional dessas técnicas são apresentadas nas seções 4.2.1 e 4.2.2.

A estratégia algébrica consiste em inserir mais termos na base da função de forma reconstruindo-a através de uma base polinomial de primeira ordem completa. Trata-se, portanto, da função de forma construída no capítulo 3 e dada pela equação (3.24). A inserção dos novos termos na base melhora o condicionamento da matriz  $\alpha$  e elimina os casos de singularidade anteriormente observados utilizando a base de Nédélec. A vantagem do uso da estratégia algébrica é que esta dispensa o uso das rotinas computacionais de restrição de escolha dos nós de suporte que aumentam o custo computacional para a obtenção da função de forma.

As outras duas funções de forma montadas no capítulo 3 – com base polinomial de primeira ordem incompleta e com base radial – foram propostas em um contexto que busca reduzir os erros de aproximação do rotacional quando o suporte arbitrário é utilizado em conjunto com as estratégias anteriores. A função com base polinomial incompleta elimina da base polinomial completa justamente os termos que não geram rotacionais. Já a função de forma com base radial tem sido amplamente utilizada em métodos sem malha, associadas ou não a funções polinomiais, para melhorar o condicionamento das funções de forma e alcançar resultados mais precisos [20].

#### 4.2.1 Correção Incremental via Monitoramento de Posto

Para remover a dependência linear e a consequente singularidade da matriz  $\alpha$ , implementou-se uma rotina para monitoramento e correção do seu posto, quando necessário. Essa rotina é apresentada nesta seção.

A matriz  $\alpha$  quando não é singular apresenta posto igual a seis. A manutenção de um posto igual a seis acrescenta uma restrição na escolha dos seis nós de suporte da função de forma. A busca pelos nós de suporte continua sendo feita com o auxílio da *kd-tree* porém o conjunto de seis nós de suporte deve, necessariamente, gerar uma matriz  $\alpha$  com posto seis. Para isso, a busca dos nós é feita de maneira incremental, ou seja, inicia-se com dois nós, testa-se o posto dois, acrescenta-se outro nó, testa-se o posto três e assim por diante até alcançar o posto seis com seis nós. Quando algum nó incrementado não passa no teste de posto, ele é eliminado do conjunto de nós e retorna-se ao algoritmo de busca. Um pseudocódigo para essa rotina é apresentado a seguir:

**Algoritmo:** Seleção de nós com correção de posto

*Entradas:* dados dos nós, coordenadas do ponto  $\mathbf{x}$ , a raiz da kd-tree  $\mathbf{v}$

*Saídas:* matriz  $\alpha$ , nós do suporte

```

1.  posto = 1;
2.  n_eliminados = 0;
3.  lista_eliminados =  $\emptyset$ ;
4.  while posto < 6
5.       $k = \text{posto} + \text{n\_eliminados} + 1$ ;
6.      lista_nós = KNNKDTREE ( $\mathbf{v}, \mathbf{x}, k$ );
7.      nós do suporte = lista_nós - lista_eliminados;
8.      matriz alfa (dados dos nós (nós do suporte));
9.      posto_novo = rank (matriz alfa);
10.     if posto_novo > posto
11.         posto = posto_novo;
12.     else
13.         nó_eliminado = último nó da lista_nós;
14.         lista_eliminados = lista_eliminados  $\cup$  nó_eliminado;
15.         n_eliminados = n_eliminados + 1;
16.     end if
17. end while

```

Quadro 4.3: Pseudocódigo para seleção de nós com correção incremental de posto

onde KNNKDTREE representa a função que chama o algoritmo de busca e **rank** é a função que fornece o número de posto da matriz.

## 4.2.2 Correção via Decomposição QR

Nesta seção apresenta-se outra forma de se eliminar os nós que causam dependência linear na matriz  $\alpha$ . A proposta parte do princípio que cada linha da matriz  $\alpha$  está diretamente relacionada a um nó de suporte conforme verifica-se em (3.16). Neste sentido ao se identificar as linhas que são linearmente dependentes pode-se eliminar do suporte os nós que geram a dependência linear. Um pseudocódigo para essa rotina é apresentado a seguir:

**Algoritmo:** Seleção de nós com correção por decomposição QR

*Entradas:* dados dos nós, coordenadas do ponto  $\mathbf{x}$ , a raiz da kd-tree  $\mathbf{v}$

*Saídas:* matriz alfa, nós do suporte

```

1. tamanho_alfa = 5;
2. n_eliminados = 0;
3. lista_eliminados =  $\emptyset$ ;
4. while tamanho_alfa < 6
5.      $k = n\_eliminados + 6$ ;
6.     lista_nós = KNNKDTree ( $\mathbf{v}, \mathbf{x}, k$ );
7.     nós do suporte = lista_nós - lista_eliminados;
8.     matriz alfa (dados dos nós (nós do suporte));
9.     [alfa_nova, linhas_eliminadas] = licols (matriz alfaT);
10.    tamanho_alfa = size (alfa_nova);
11.    nó_eliminado = lista_nós (linhas_eliminadas);
12.    lista_eliminados = lista_eliminados  $\cup$  nó_eliminado;
13.    n_eliminados = n_eliminados + 1;
14. end while

```

Quadro 4.4: Pseudocódigo para seleção de nós com correção de dependência linear via decomposição QR

onde KNNKDTree representa a função que chama o algoritmo de busca e **licols** é a função que identifica as colunas linearmente dependentes. Essa função utiliza uma decomposição QR para identificar a dependência linear. Observe que a matriz  $\alpha$  deve ser transposta ao ser passada para função **licols** tal que o efeito seja, de fato, a eliminação das linhas linearmente dependentes e não das colunas.

Basicamente, a decomposição QR obtém uma decomposição da matriz  $\alpha^T$ , de tamanho 6 x 6, em forma de bloco tal que  $\alpha^T E = QR$ , onde  $E$  é uma matriz de permutação de coluna e  $R$  é uma matriz triangular superior 6 x 6 com diagonais decrescentes não nulas. Valores muito pequenos das diagonais de  $R$ , geralmente na ordem de  $10^{-10}$  vezes o valor máximo, indicam a presença de colunas linearmente dependentes. Tomando-se, portanto, os valores das diagonais de  $R$  e a ordenação de permutação dada por  $E$  é possível identificar, de uma única vez, todas as colunas de  $\alpha^T$  que são linearmente dependentes.

# Capítulo 5

## Formulações dos Problemas

Um problema de valor de contorno é governado por uma equação diferencial e pelas suas condições de contorno definindo, assim, a sua formulação forte. Para solucionar numericamente um problema desta natureza, vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos, dentre eles, o Método Sem Malha Nodal Vetorial que se concentra na aproximação de campos vetoriais. A solução de um problema vetorial através do Método Sem Malha Vetorial Nodal envolve a obtenção de uma formulação variacional ou forma fraca do problema. Em seguida, a aproximação pode ser obtida pelo método de Galerkin, quando um sistema de equações discreto para a solução numérica do problema é desenvolvido.

Neste capítulo são apresentadas as formulações para a solução numérica de dois diferentes problemas eletromagnéticos: problema de autovalor e problema magnetostático. Ambas formulações são usadas na obtenção dos resultados apresentados no capítulo 6 deste texto. Além disso, há uma seção dedicada a apresentar o método de regularização delta usado na formulação magnetostática. Por fim, as condições de contorno periódicas são introduzidas para uso no VNMM e sua validação é feita no capítulo 6.

### 5.1 Problema de Autovalor

Considera-se o domínio tridimensional  $\Omega$ , apresentado na figura 5.1, preenchido com ar e cujas paredes são condutoras elétricas perfeitas (CEP) onde:  $\vec{H}$  é o campo magnético dado em (ampère/metro),  $\vec{E}$  é o campo elétrico dado em (volt/metro),  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo dada em (henry/metro),  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo dada em (farad/metro),  $\vec{J}$  é a densidade de corrente dada em (ampère/metro<sup>2</sup>),  $\sigma$  é a condutividade do material dada em (siemens/metro), e  $\omega$  é a frequência angular dada em (radianos/segundo).

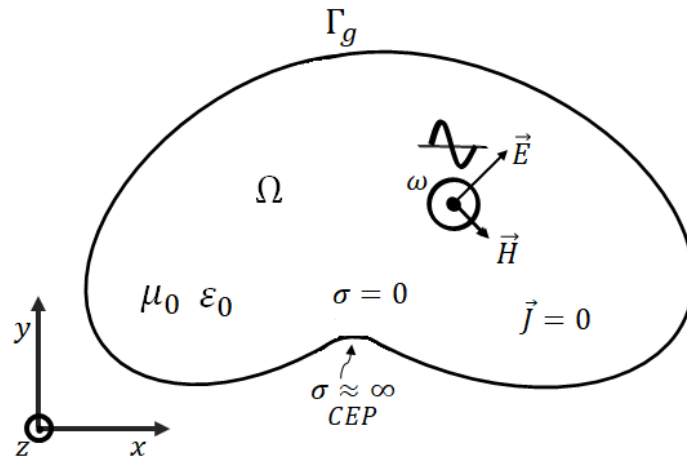


Figura 5.1: Domínio tridimensional com suas fronteiras, características dos materiais e fontes de corrente.  $\Gamma_g$  representa a fronteiras de Dirichlet para o campo  $\vec{E}$ .

Para modelagem matemática do problema tomam-se as Equações de Maxwell para campos harmônicos no domínio da frequência apresentadas no apêndice A e substitui-se a relação (A.16) na equação (A.11):

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad (5.1)$$

Tomando o rotacional em ambos lados da equação (5.1):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu_0\nabla \times \vec{H} \quad (5.2)$$

Substituindo  $\nabla \times \vec{H}$  pelas equações (A.12) e (A.15):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{E} - j\omega\mu_0\vec{J} \quad (5.3)$$

Considerando que a condutividade elétrica é nula no interior do domínio  $\Omega$ , e  $\vec{J}$ , a densidade de corrente também é nula, obtém-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2\vec{E} = \vec{0} \quad (5.4)$$

onde  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ .

As fronteiras do domínio  $\Gamma_g$  são paredes condutoras elétricas perfeitas o que significa que as componentes tangenciais do campo  $\vec{E}$  são nulas sobre estas fronteiras, isto é, a seguinte condição de contorno se aplica:

$$\hat{n} \times \vec{E} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_g \quad (5.5)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à fronteira do domínio.

### 5.1.1 Forma Forte

Considerando a equação governante dada por (5.4) e a condição de contorno definida em (5.5) pode-se enunciar a forma forte deste problema de valor de contorno. Determinar os autovalores  $\lambda = k_0^2$  tal que satisfaça:

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \lambda \vec{E} = \vec{0} & \text{em } \Omega \\ \hat{n} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{em } \Gamma_g \end{cases} \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Forma Fraca

Para a solução do problema pelo Método Sem Malha Vetorial Nodal é necessário obter a forma fraca ou forma variacional do problema. Portanto, sejam  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{U}$  o espaço de funções admissíveis e de teste, respectivamente, definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \vec{E} \mid \vec{E} \in H(\text{curl}), \hat{n} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \\ \mathcal{U} &= \{ \vec{F} \mid \vec{F} \in H(\text{curl}), \hat{n} \times \vec{F} = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

tal que  $H(\text{curl}) = \{ \vec{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \nabla \times \vec{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \}$  representa o espaço no qual as funções e seus rotacionais possuem derivada primeira com quadrado integrável no domínio relacionado.

Utiliza-se a seguir o método de resíduos ponderados, assumindo que  $\vec{E}$  é uma solução aproximada do problema, tal que a integral do resíduo da equação (5.4) em todo domínio ponderado pela função de teste  $\vec{F}$  seja nula:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \lambda \vec{E}) \cdot \vec{F} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.8)$$

que pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{F} \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{E} \cdot \vec{F} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.9)$$

Aplicando o teorema de Green vetorial na primeira integral da equação (5.9) e após algumas manipulações vetoriais tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{F} \cdot \vec{E} \, d\Omega - \int_{\Gamma_g} \nabla \times \vec{E} \cdot (\hat{n} \times \vec{F}) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.10)$$

Mas  $\hat{n} \times \vec{F} = 0$  em  $\Gamma_g$ , logo:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{F} \cdot \vec{E} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.11)$$

Portanto, a forma fraca para o problema vetorial harmônico no tempo descrito pela equação (5.6) é expressa como:

Dados  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\omega$  e  $\vec{F}$ , determinar os autovalores  $\lambda = k_0^2$  tal que o campo elétrico  $\vec{E} \in H(\text{curl}, \Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{F} \cdot \vec{E} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.12)$$

### 5.1.3 Método de Galerkin

Seja  $H(\text{curl})^h$  um subconjunto de  $H(\text{curl})$ , ou seja,  $H(\text{curl})^h \subset H(\text{curl})$ , e  $\vec{E}^h$  a aproximação para o campo elétrico  $\vec{E}$  tal que  $\vec{E}^h \in H(\text{curl})^h$ . Considera-se ainda uma aproximação para função teste tal que  $\vec{F}^h \in H(\text{curl})^h$ . Sejam, então,  $\mathcal{S}^h$  e  $\mathcal{U}^h$  o espaço de funções admissíveis e de teste, respectivamente, definidos da seguinte maneira [24]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^h &= \{ \vec{E}^h | \vec{E}^h \in H(\text{curl})^h, \hat{n} \times \vec{E}^h = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \\ \mathcal{U}^h &= \{ \vec{F}^h | \vec{F}^h \in H(\text{curl})^h, \hat{n} \times \vec{F}^h = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Portanto, (5.12) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}^h) \cdot (\nabla \times \vec{E}^h) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{F}^h \cdot \vec{E}^h d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F}^h \in \mathcal{U}^h \quad (5.14)$$

As aproximações  $\vec{E}^h$  e  $\vec{F}^h$  são dadas pela função admissível e pela função teste apresentadas pela equação (3.1), onde a função vetorial  $\vec{u}$  é substituída por  $\vec{E}, \vec{F}$  tal como se segue:

$$\begin{aligned} \vec{E}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \vec{N}_i(\mathbf{x}) c_i, \\ \vec{F}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m \vec{N}_j(\mathbf{x}) d_j, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde  $m$  é o número de nós no domínio  $\Omega$ ,  $\vec{N}_i$  é a função de forma vetorial do  $i$ -ésimo nó,  $c_i$  é o coeficiente da projeção de  $\vec{E}^h$  na direção do  $i$ -ésimo nó e,  $d_j$  é o coeficiente da projeção de  $\vec{F}^h$  na direção do  $j$ -ésimo nó.

Se  $\vec{E}^h$  e  $\vec{F}^h$  das equações (5.15) forem substituídos na equação (5.14), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j \cdot \left( \nabla \times \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j \left( \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) d\Omega = 0 \quad (5.16)$$

Isola-se o termo comum  $\sum_{j=1}^m d_j$  em todas as parcelas da equação (5.16) obtendo-se:

$$\sum_{j=1}^m d_j \left[ \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \left( \nabla \times \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{N}_j \left( \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) d\Omega \right] = 0 \quad (5.17)$$

Reorganizando e isolando também o somatório  $\sum_{i=1}^m$  tem-se:

$$\sum_{j=1}^m d_j \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j \cdot (\nabla \times \vec{N}_i c_i) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{N}_j \vec{N}_i c_i d\Omega \right] \right\} = 0 \quad (5.18)$$

Para que a equação (5.18) seja verdadeira para todo e qualquer  $d_j$ , todo o conteúdo dentro da chave { } deve ser igual à zero. Portanto:

$$\sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j \cdot (\nabla \times \vec{N}_i c_i) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \vec{N}_j \vec{N}_i c_i d\Omega \right] = 0 \quad (5.19)$$

assim,

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j \cdot (\nabla \times \vec{N}_i c_i) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} \vec{N}_j \vec{N}_i c_i d\Omega, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, m. \quad (5.20)$$

A equação (5.20) pode ser desmembrada da seguinte forma:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \vec{N}_j \vec{N}_i d\Omega, \quad (5.21)$$

obtendo-se:

$$K_{ij}c_i = \lambda M_{ij}c_i \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (5.22)$$

A equação (5.22) remete a um sistema discreto de equações lineares onde  $m$  é o número total de nós pertencentes ao domínio  $\Omega$ . Logo, a equação (5.22) pode ser generalizada de modo que:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

onde  $\lambda = k_0^2$  são os autovalores,  $\mathbf{K}$  é a matriz rigidez,  $\mathbf{M}$  é a matriz massa, ambas matrizes simétricas de tamanho  $m \times m$ ,  $\mathbf{v}$  é um vetor coluna de tamanho  $m$  com os valores dos autovetores desconhecidos.

## 5.2 Problema Magnetostático

A modelagem magnetostática de um dispositivo eletromagnético pode ser obtida a partir das equações de Maxwell sempre que os efeitos da variação do tempo  $\frac{\partial}{\partial t}$  possam ser desprezados nas equações de Maxwell [25].

Considera-se o domínio tridimensional  $\Omega$  apresentado na figura 5.2 onde  $\vec{B}$  é a densidade de fluxo magnético dada em (weber/metro<sup>2</sup>),  $\vec{A}$  é o potencial vetor magnético dado em (weber/metro),  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material dada em (henry/metro),  $\vec{J}_s$  é a densidade de corrente imposta dada em (ampère/metro<sup>2</sup>).

Seja o domínio  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_f$ , tal que  $\Omega_0$  é a região do ar com  $\mu = \mu_0$  e  $\Omega_f$  é a região do ferro com  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Para este problema deseja-se encontrar o campo  $\vec{H}$  e o fluxo  $\vec{B}$  definidos nas equações de Maxwell dadas no apêndice A.

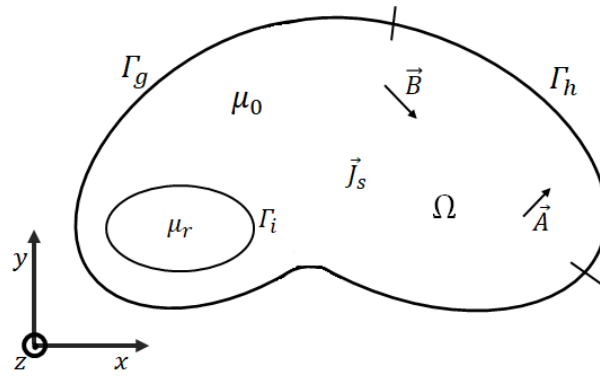


Figura 5.2: Domínio tridimensional com suas fronteiras, características dos materiais, fontes de corrente imposta.  $\Gamma_g$  e  $\Gamma_h$  representam as fronteiras de Dirichlet e Neumann para  $\vec{A}$ , respectivamente.  $\Gamma_i$  é a interface entre meios distintos.

Em problemas magnetostáticos o campo elétrico  $\vec{E}$  é nulo e, portanto, a densidade de corrente definida em (A.10) se reduz a  $\vec{J} = \vec{J}_s$ . Desprezando os efeitos da variação do tempo  $\frac{\partial}{\partial t}$  na equação (A.2) e substituindo as relações (A.9) e (A.10) tem-se:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{J}_s \quad \text{em } \Omega \quad (5.24)$$

Nestes casos é usual trabalhar com o potencial vetor magnético definido por:  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Assim a equação (5.24) torna-se:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_s \quad \text{em } \Omega \quad (5.25)$$

As condições de contorno que garantem a unicidade da solução são aquelas impostas sobre as componentes tangenciais e normais de campo. Na fronteira de Neumann a componente tangencial do vetor intensidade do campo magnético pode ser definida pela relação:

$$\hat{n} \times \vec{H} = \hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{h} \quad \text{em } \Gamma_h \quad (5.26)$$

A componente normal da densidade de fluxo magnético define a condição de Dirichlet da seguinte forma:

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = -b \rightarrow (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} = -b \rightarrow \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{A}) = b \rightarrow \hat{n} \times \vec{A} = \vec{g} \quad \text{em } \Gamma_g \quad (5.27)$$

onde  $\nabla \cdot \vec{g} = b$ .

### 5.2.1 Forma Forte

Considerando a equação governante dada por (5.25) e as devidas condições de contorno pode-se enunciar a forma forte deste problema de valor de contorno. Dados  $\mu$  e  $\vec{J}_s$ , determinar o potencial vetor  $\vec{A}$  que satisfaça:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_s & \text{em } \Omega \\ \hat{n} \times \vec{A} = \vec{g} & \text{em } \Gamma_g \\ \hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{h} & \text{em } \Gamma_h \\ \hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{0} & \text{em } \Gamma_i \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Em (5.28),  $\Omega$  é o domínio do problema limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ , onde  $\Gamma_g$  é a fronteira de Dirichlet cujo valor das componentes tangenciais é conhecido e igual ao vetor  $\vec{g}$ ,  $\Gamma_h$  é a fronteira de Neumann e  $\Gamma_i$  representa o limite da interface.

### 5.2.2 Forma Fraca

Seja o espaço  $H(curl)$  definido na seção 5.1.2, consideram-se os espaços de funções admissíveis e os espaços de funções de teste dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \vec{A} \mid \vec{A} \in H(curl), \hat{n} \times \vec{A} = \vec{g}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \\ \mathcal{U} &= \{ \vec{F} \mid \vec{F} \in H(curl), \hat{n} \times \vec{F} = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

Utiliza-se o método de resíduos ponderados, assumindo que  $\vec{A}$  seja uma solução aproximada do problema, tal que o resíduo seja dado por:

$$\vec{r} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \vec{J}_s \quad \forall \vec{A} \in \mathcal{S} \quad (5.30)$$

A melhor aproximação para  $\vec{A}$  deve ser aquela que reduz o erro (resíduo) a zero em todo o domínio  $\Omega$ , ou seja:

$$\int_{\Omega} \vec{r} \cdot \vec{F} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U}$$

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{F} \, d\Omega - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{F} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.31)$$

onde  $\vec{F}$  é a função de teste ou função peso. A partir da identidade vetorial  $\vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} = -\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u}$  e o teorema da divergência aplicados ao primeiro termo de (5.31), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{F} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot (\nabla \times \vec{F}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{F} \, d\Gamma \quad (5.32)$$

Em  $\Gamma_g$ ,  $\hat{n} \times \vec{F} = 0$  e em  $\Gamma_h$ ,  $\hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{h}$ . Assim, voltando à equação (5.31):

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot (\nabla \times \vec{F}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{F} \, d\Gamma_h - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{F} \, d\Omega = 0 \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.33)$$

Para evitar problemas de singularidade ou mal condicionamento da matriz de rigidez faz-se necessário a inserção de um termo de regularização definido por  $\psi \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{F} \, d\Omega$  onde  $\psi$  é o fator de perturbação do termo de regularização [26]. Trata-se de um parâmetro de regularização global cujos detalhes dessa técnica são apresentados na seção 5.3.

Logo, a forma fraca do problema de valor de contorno dado pela equação (5.28), torna-se: dados  $\mu, \vec{J}_s, \vec{h}$  e  $\psi$ , encontre  $\vec{A} \in \mathcal{S}$  tal que:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) \cdot (\nabla \times \vec{F}) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{F} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{j}_s \cdot \vec{F} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{F} d\Gamma_h \quad \forall \vec{F} \in \mathcal{U} \quad (5.34)$$

A densidade de fluxo magnético pode ser obtida fazendo:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.35)$$

### 5.2.3 Método de Galerkin

Seja  $H(\text{curl})^h \subset H(\text{curl})$ ,  $\vec{A}^h$  a aproximação para o potencial vetor  $\vec{A}$  tal que  $\vec{A}^h \in H(\text{curl})^h$ , e  $\vec{F}^h \in H(\text{curl})^h$  uma aproximação para função teste. Sejam  $\mathcal{S}^h$  e  $\mathcal{U}^h$  o espaço de funções admissíveis e de teste, respectivamente, definidos da seguinte maneira [24]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^h &= \{ \vec{A}^h | \vec{A}^h \in H(\text{curl})^h, \hat{n} \times \vec{A}^h = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}, \\ \mathcal{U}^h &= \{ \vec{F}^h | \vec{F}^h \in H(\text{curl})^h, \hat{n} \times \vec{F}^h = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Portanto, (5.34) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^h \right) \cdot (\nabla \times \vec{F}^h) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{A}^h \cdot \vec{F}^h d\Omega = \int_{\Omega} \vec{j}_s \cdot \vec{F}^h d\Omega - \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{F}^h d\Gamma_h \quad \forall \vec{F}^h \in \mathcal{U}^h \quad (5.37)$$

As aproximações  $\vec{A}^h$  e  $\vec{F}^h$  são dadas pela função admissível e pela função teste apresentadas pela equação (3.1), onde a função vetorial  $\vec{u}$  é substituída por  $\vec{A}, \vec{F}$  tal que:

$$\begin{aligned} \vec{A}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \vec{N}_i(\mathbf{x}) c_i, \\ \vec{F}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m \vec{N}_j(\mathbf{x}) d_j, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde  $m$  é o número de nós no domínio  $\Omega$ ,  $\vec{N}_i$  é a função de forma vetorial do  $i$ -ésimo nó,  $c_i$  é o coeficiente da projeção de  $\vec{A}^h$  na direção do  $i$ -ésimo nó e,  $d_j$  é o coeficiente da projeção de  $\vec{F}^h$  na direção do  $j$ -ésimo nó.

Se  $\vec{A}^h$  e  $\vec{F}^h$  das equações (5.38) forem substituídos na equação (5.37), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) \cdot \left( \nabla \times \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j \right) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \cdot \left( \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j d\Omega + \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \sum_{j=1}^m \vec{N}_j d_j d\Gamma_h = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Isola-se o termo comum  $\sum_{j=1}^m d_j$  em todas as parcelas da equação (5.39) obtendo-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m d_j \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \left( \nabla \times \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i \right) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{N}_j \cdot \sum_{i=1}^m \vec{N}_i c_i d\Omega - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{N}_j d\Omega + \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{N}_j d\Gamma_h \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Reorganizando e isolando também o somatório  $\sum_{i=1}^m$  tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m d_j \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \left( \nabla \times \vec{N}_i c_i \right) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{N}_j \cdot \vec{N}_i c_i d\Omega - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{N}_j d\Omega + \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{N}_j d\Gamma_h \right] \right\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para que a equação (5.41) seja verdadeira para todo e qualquer  $d_j$ , todo o conteúdo dentro da chave  $\{ \}$  deve ser igual à zero. Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \left( \nabla \times \vec{N}_i c_i \right) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{N}_j \cdot \vec{N}_i c_i d\Omega - \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{N}_j d\Omega + \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{N}_j d\Gamma_h \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

assim,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{N}_j \cdot (\nabla \times \vec{N}_i c_i) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{N}_j \cdot \vec{N}_i c_i d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{N}_j d\Omega - \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{N}_j d\Gamma_h, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (5.43)$$

A equação (5.43) pode ser desmembrada da seguinte forma:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{N}_j \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega$$

$$M_{ij} = \psi \int_{\Omega} \vec{N}_i \cdot \vec{N}_j d\Omega$$

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{N}_j d\Omega - \int_{\Gamma_h} \vec{h} \cdot \vec{N}_j d\Gamma_h \quad (5.44)$$

obtendo-se:

$$K_{ij} c_i + M_{ij} c_i = F_j \quad i, j = 1, \dots, m \quad (5.45)$$

A equação (5.45) remete a um sistema discreto de equações lineares onde  $m$  é o número total de nós pertencentes ao domínio  $\Omega$ . Logo, a equação (5.45) pode ser generalizada de modo que:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.46)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz rigidez,  $\mathbf{M}$  é a matriz massa, ambas matrizes simétricas de tamanho  $m \times m$ ,  $\mathbf{U}$  é um vetor coluna, de tamanho  $m$ , com os valores dos coeficientes desconhecidos, e  $\mathbf{F}$  é um vetor coluna, de tamanho  $m$ , dos termos fonte.

### 5.3 O Método de Regularização Delta

Esta seção apresenta o método de regularização delta usado para garantia de unicidade da solução em problemas de rotacional duplo com restrição de divergência nula. Este método, originalmente apresentado por [26], foi proposto no contexto de elementos finitos nodais e de aresta e sua aplicação pode ser estendida para o método sem malha nodal vetorial conforme apresentado a seguir.

Em uma modelagem magnetostática, o campo  $\vec{B}$  pode ser obtido utilizando a formulação de rotacional duplo do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  tal que:

$$\begin{cases} \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_s & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.47a)$$

$$(5.47b)$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema,  $\mu$  é a permeabilidade magnética e  $\vec{J}_s$  é a densidade de corrente imposta.

A equação (5.47b) adiciona uma restrição de divergência nula não apenas pelas características físicas do problema, mas também para garantir a unicidade da solução. Em outras palavras, apenas a equação (5.47a) não é capaz de determinar  $\vec{A}$  unicamente porque se  $\vec{A}$  é uma solução então qualquer função expressa como  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$  também é uma solução. Assim, para determinar uma solução única para  $\vec{A}$ , deve-se impor uma condição em sua divergência chamada de calibre e dada por (5.47b). Entretanto, matematicamente, se o objetivo é obter a densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$  e a energia gerada pela corrente, a equação (5.47a) sozinha gera resultados válidos, ou seja, qualquer que seja a solução obtida para o potencial  $\vec{A}$  este produz o mesmo fluxo magnético e energia.

No entanto, na aproximação da solução por elementos finitos (FEM) a imposição direta do calibre pode resultar em grandes erros a depender do tipo de problema e da malha utilizada [2]. Isso porque quando a equação (5.47) é discretizada esta possui solução em um subespaço restrito definido por:

$$\mathcal{S}^h = \{\vec{A}^h | \vec{A}^h \in [H_0(\text{curl})^h \cap H(\text{div}^0)^h]\} \quad (5.48a)$$

onde:

$$H_0(curl) = \{ \vec{A} \mid \vec{A} \in H(curl), \hat{n} \times \vec{A} = \vec{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \} \quad (5.48b)$$

$$H(div^0) = \{ \vec{A} \mid \vec{A} \in H(div), \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \} \quad (5.48c)$$

tal que  $H(curl) = \{ \vec{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \nabla \times \vec{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \}$  e  $H(div) = \{ \vec{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \nabla \cdot \vec{u} \in L^2(\Omega) \}$ . A construção de um espaço de elemento finito consistindo de polinômios de ordem inferior para satisfazer a restrição livre de divergência não é uma tarefa trivial. Na prática, a regra para lidar com essa restrição é deixá-la ser satisfeita na forma fraca. Isso pode ser feito incluindo a restrição de divergência diretamente na formulação variacional e buscando a solução em algum espaço de Hilbert mais amplo – diferente do restrito  $H_0(curl)^h \cap H(div^0)^h$ . Duas maneiras gerais de fazer isso são o método de divergência-regularização e o método misto, contudo ambos envolvem modificações sofisticadas na formulação fraca. Já o método de regularização  $\psi$  negligencia completamente a restrição livre de divergência considerando apenas um problema perturbado por um valor  $\psi$ , ou seja, com  $\psi > 0$  e tendendo para zero, encontre  $\vec{A}_\psi^h \in H_0(curl)$  tal que [26]:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_\psi^h \right) \cdot (\nabla \times \vec{F}^h) d\Omega + \psi \int_{\Omega} \vec{A}_\psi^h \cdot \vec{F}^h d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J}_s \cdot \vec{F}^h d\Omega \quad \forall \vec{F}^h \in H_0(curl) \quad (5.49)$$

Logo, o método de regularização  $\psi$  não possui restrição de divergência nula e está definido no subespaço  $H_0(curl)$ . Em comparação com outros métodos há as seguintes vantagens: (a) não está sujeito à restrição de divergência nula como no tradicional calibre de Coulomb; (b) envolve apenas um espaço  $H_0(curl)$ , que pode ser discretizado por elementos de aresta compostos de polinômios por partes de ordem inferior, uma vez que nenhum multiplicador de Lagrange é introduzido; (c) é sempre bem-posto e resulta em um sistema simétrico positivo definido na discretização de elementos finitos, então o sistema algébrico resultante pode ser implementado mais prontamente. De fato, uma vez que resulta em um sistema simétrico positivo definido, o problema de regularização  $\psi$  pode ser convenientemente resolvido por quaisquer métodos diretos ou iterativos [27, 28].

Quando se trata da aproximação de problemas de rotacional duplo usando o método sem malha nodal vetorial VNMM observa-se um comportamento semelhante ao do FEM quanto à

aplicação direta do calibre dado por (5.47b). Isso ocorre naturalmente pois o enfraquecimento da formulação e os subespaços de aproximação são idênticos em ambos os métodos. Logo, a escolha do método de regularização  $\psi$  no VNMM para o tratamento da não unicidade da solução possui vantagens semelhantes ao FEM.

Neste trabalho, todos os problemas magnetostáticos solucionados via VNMM utilizaram o método de regularização  $\psi$  para obtenção de uma solução para o potencial vetor  $\vec{A}$  pois a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é singular e somente a adição da matriz massa  $\mathbf{M}$  ao sistema de equações (5.46) torna o sistema não singular.

## 5.4 Condições de Contorno Periódicas

Nesta seção, as condições de contorno periódicas são introduzidas para utilização no âmbito do Método sem Malha Nodal Vetorial. Essa condição de contorno é aplicada e validada em um problema no capítulo 6.

As condições de contorno periódicas são comuns em análise de dispositivos periódicos onde a consideração de periodicidade pode reduzir substancialmente o tamanho do domínio computacional. Na análise 3-D esta condição é especialmente importante para reduzir os requisitos de memória e o tempo de processamento [29]. Vale ressaltar que a aplicação da condição periódica em modelagens vetoriais se dá de forma diferente daquela apresentada em análises nodais escalares. Neste sentido, é apresentada uma abordagem que considera a natureza vetorial dos nós de maneira similar àquela implementada em [30] usando os elementos de aresta. Os detalhes da implementação computacional são fornecidos neste texto.

Para introduzir as condições de contorno periódicas considera-se o domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$ , representado na figura 5.3, onde os nós  $n_I$ ,  $n_J$  e  $n_K$  bem como seus respectivos vetores sobre o par de fronteiras periódicas estão destacados. A posição geométrica dos nós na superfície periódica  $\Gamma'_p$  é obtida pelo giro da posição dos nós localizados em  $\Gamma_p$  em torno do eixo  $z$ . Este giro define um ângulo  $\alpha$  entre as superfícies de modo que as direções dos graus de liberdade dos nós sejam rotacionalmente simétricas entre as fronteiras periódicas. Em outras palavras, a direção vetorial dos nós na superfície periódica  $\Gamma'_p$  é obtida pelo espelhamento da direção vetorial dos nós localizados em  $\Gamma_p$ .

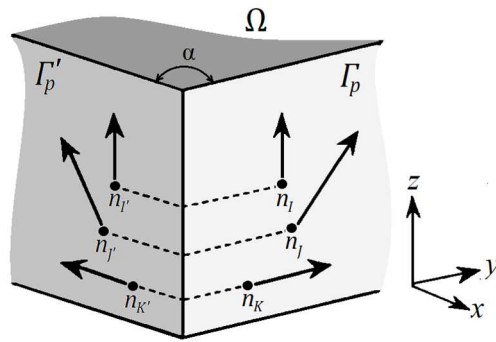


Figura 5.3: Domínio tridimensional com suas fronteiras periódicas  $\Gamma_p$  ( $n_I$ ,  $n_J$  e  $n_K$ ) e  $\Gamma'_p$  ( $n_{I'}$ ,  $n_{J'}$  e  $n_{K'}$ ). Representação da simetria entre os nós das fronteiras para aplicação da condição de contorno periódica.

Os módulos dos graus de liberdade ao longo dos nós simétricos são os mesmos, ou seja:  $|A_I| = |A_{I'}|$ ,  $|A_J| = |A_{J'}|$ ,  $|A_K| = |A_{K'}|$ , onde  $A_I$ ,  $A_{I'}$ ,  $A_J$ ,  $A_{J'}$ ,  $A_K$ ,  $A_{K'}$  são projeções do potencial vetor  $\vec{A}$  ao longo das direções pares simétricos  $n_I - n_{I'}$ ,  $n_J - n_{J'}$ ,  $n_K - n_{K'}$ . Os sinais são atribuídos a cada par simétrico de forma que um grau de liberdade localizado em uma fronteira aponta na direção idêntica à indicada por seu parceiro simétrico enquanto gira em torno do eixo  $z$  através do ângulo  $\alpha$ .

A imposição das condições de contorno periódicas é feita após a montagem de todas as contribuições locais na matriz global  $\mathbf{K}$ , ou seja, antes que o sistema de equações lineares definido em (5.46), por exemplo, seja solucionado. Para isso, as contribuições relacionadas aos nós sobre a fronteira  $\Gamma_p$  ( $n_I$ ,  $n_J$  e  $n_K$ ) devem ser associadas àquelas sobre a fronteira  $\Gamma'_p$  ( $n_{I'}$ ,  $n_{J'}$  e  $n_{K'}$ ) e montadas devidamente na matriz global.

Para efeito de análise, consideram-se os nós  $n_{I'}$  e  $n_I$  como um par periódico de uma estrutura periódica. Antes de solucionar o sistema (5.46), por exemplo, as contribuições para o nó  $n_{I'}$  devem ser alocadas na posição relacionada ao nó  $n_I$  a fim de obter  $|A_I| = |A_{I'}|$ . Isto indica para a fronteira  $\Gamma_p$  a presença de um domínio idêntico em  $\Gamma'_p$ . A figura 5.4 mostra os detalhes deste processo para o par periódico  $n_I - n_{I'}$ . Deve-se fazer  $K_{I'I'} = 1$ ,  $K_{I'I} = -1$  e  $F_{I'} = 0$ . É importante notar que antes de fazer  $K_{I'I'} = 1$ , sua contribuição é passada para  $K_{II}$ . Além disso, os valores na linha  $I'$  da matriz  $K$  devem ser adicionados àqueles na linha  $I$ . O mesmo processo necessita ser feito para os termos da fonte  $F$ . Desta maneira, após a solução do sistema (5.46), por exemplo, os valores de  $A_I$  são obtidos considerando as contribuições de

$n_{I'}$ . O mesmo procedimento necessita ser repetido para os nós  $n_J - n_{J'}$  e  $n_K - n_{K'}$ , assim como para todos os pares de nós localizados sobre as superfícies  $\Gamma_p$  e  $\Gamma'_p$ .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} I' \\ \downarrow \\ \vdots \\ \boxed{1} \\ \vdots \end{array} \\
 I' \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} K_{I'1} & \cdots & 1 & K_{I'2} & \cdots & K_{I'M} \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ + & \vdots & & + & \vdots & + \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} I \\ \downarrow \\ \vdots \\ \boxed{-1} \\ \vdots \end{array} \\
 I \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} K_{I1} & \cdots & K_{II'} & K_{I2} & \cdots & K_{IM} \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ + & \vdots & & + & \vdots & + \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \right] \\
 \vdots
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ A_{I'} \\ \vdots \\ A_I \\ \vdots \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ F_{I'} \\ \downarrow \\ + \\ \downarrow \\ F_I \\ \vdots \end{array} \right]$$

Figura 5.4: Sistema de montagem para o par periódico  $n_I - n_{I'}$ .

Para uma estrutura antiperiódica o procedimento é similar devendo-se, contudo, estabelecer  $K_{I'I'} = 1$ ,  $K_{I'I} = 1$  e  $F_{I'} = 0$ . Além disso, as contribuições relacionadas ao nó  $n_{I'}$  devem ser transferidas ao nó  $n_I$  com sinais opostos, pois, neste caso, os nós  $n_{I'}$  e  $n_I$  estão em um subdomínio cujas fontes têm sinais opostos [31].

# Capítulo 6

## Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o uso das funções de forma do Método Sem Malha Vetorial Nodal em três dimensões. Inicialmente são testadas as funções de forma quanto à capacidade de reprodução das funções de base, interpolação de funções vetoriais e a convergência. Em seguida, um problema de autovalores de uma cavidade com parede condutora elétrica perfeita é solucionado com o VNMM para validação do método, comparação com o Método de Elementos Finitos de Aresta, EFEM, e verificação de possível aparecimento de modos espúrios. Problemas magnetostáticos são aproximados com o intuito de avaliar o desempenho do VNMM quanto à imposição das condições de contorno essenciais e naturais, fontes e condições de interface. Para avaliar a robustez do método e introduzir as técnicas de tratamento de não linearidade e condição de contorno periódica, um problema composto de material não-linear e fronteira periódica é solucionado. Por último, são apresentados os resultados obtidos dos testes de aproximações usando as funções de forma com suporte arbitrário. As rotinas e os gráficos foram implementados no software *Matlab* [32]. Casos onde a geração de uma malha é necessária, para o EFEM por exemplo, o software *Gmsh* [33] é utilizado.

### 6.1 Interpolação de Campos Vetoriais

Nesta seção, o Método Sem Malha Vetorial Nodal é aplicado à interpolação de diferentes funções vetoriais: função constante, funções presentes na base da função de forma, funções polinomiais e senoidais. A função de vetor constante é interpolada para verificar a reprodução exata de qualquer função constante. Funções com polinômios de primeira ordem incompletos são compostas de monômios presentes na base das funções de forma. Desta forma, é testada a

reprodução exata de funções vetoriais compostas por monômios presentes na base das funções. A convergência das funções polinomiais completas e senoidais também é apresentada. O erro relativo das aproximações é calculado em  $n$  pontos espalhados pelo domínio e suas fronteiras:

$$e_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\vec{u}(\mathbf{x}_i) - \vec{u}^h(\mathbf{x}_i)|}{|\vec{u}(\mathbf{x}_i)|} \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{x}_i$  é o  $i$ -ésimo ponto distribuído no domínio,  $\vec{u}$  representa a função do vetor de referência e  $\vec{u}^h$  é a aproximação da função do vetor de referência.

Para cada teste, a função é interpolada em um conjunto de 210 pontos distribuídos uniformemente no domínio e em suas fronteiras. A distribuição nodal é regular e consiste em 1.750 nós tal que a direção vetorial atribuída a cada nó é a mesma direção da aresta de um tetraedro e o nó está localizado no centro das arestas. Além disso, o suporte é previamente definido e são os seis nós de cada tetraedro.

Todas as funções de teste são aproximadas no domínio tridimensional definido por  $\Omega = [-1 \ 1]^3$ . O número de nós e de pontos distribuídos no domínio é o mesmo em todos os testes para realizar a comparação corretamente.

### 6.1.1 Reprodução de Função Vetorial Constante

O primeiro teste consiste em interpolar um campo vetorial constante para testar a reprodução de funções constantes pela função de forma VNMM 3-D. A função vetorial constante é dada por:

$$\vec{u}_1 = 1\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \quad (6.2)$$

A função vetorial é interpolada usando o VNMM com base de Nédélec, obtendo um erro relativo de  $8,0122 \times 10^{-17}$ . Trata-se de um erro da ordem de representação numérica em ponto flutuante o que pode ser considerado uma aproximação exata. As demais funções de forma com base polinomial também reproduzem um campo constante apresentando erros relativos da ordem de  $10^{-16}$ . Isso indica que todas as funções de forma vetoriais com base polinomiais

apresentadas são capazes de reproduzir uma função constante, o que era esperado, uma vez que os termos vetoriais de ordem zero estão presentes na base de todas as funções de forma polinomiais. Já a função com base radial não possui monômios constantes na base e apresenta um erro relativo de aproximação da função (6.2) na ordem de  $10^{-3}$ .

### 6.1.2 Reprodução das Funções de Base

O segundo teste consiste em interpolar uma função vetorial com polinômio de primeira ordem incompleto. O objetivo é testar se as funções de forma vetorial podem reproduzir um vetor que forma a base das funções de forma. Para isso, as seguintes funções são interpoladas:

$$\vec{u}_2 = -z\hat{y} + y\hat{z} \quad (6.3)$$

$$\vec{u}_3 = z\hat{x} - x\hat{z} \quad (6.4)$$

$$\vec{u}_4 = -y\hat{x} + x\hat{y} \quad (6.5)$$

Essas funções estão explícitas na base de Nédélec e também estão presentes nas demais bases polinomiais. Usando o VNMM 3-D com base de Nédélec, as funções vetoriais (6.3) a (6.5) são interpoladas obtendo um erro relativo de zero, ou seja, a aproximação é exata. Para as demais funções com base polinomial o erro é da ordem de ponto flutuante, o que também indica exatidão na interpolação. Portanto todas as funções de forma polinomiais apresentadas são capazes de reproduzir qualquer função presente na base da função de forma. Já a função de forma com base radial não foi capaz de reproduzir uma função vetorial radial gaussiana aproximando-a com erro relativo da ordem de  $10^{-2}$ .

No terceiro teste, uma função vetorial com combinações de vetores de funções constantes e de base é interpolada. A função vetorial é dada por:

$$\vec{u}_5 = (1 - 2z + 3y)\hat{x} + (3 + z - 3x)\hat{y} + (9 - y + 2x)\hat{z} \quad (6.6)$$

A função vetorial é interpolada usando o VNMM com base de Nédélec, obtendo um erro relativo de  $8,5576 \times 10^{-17}$ . Observa-se que essa aproximação é exata, pois o erro é da ordem da

representação numérica em ponto flutuante. As demais funções com base polinomial e radial aproximaram a função (6.6) com erros relativos da ordem de  $10^{-3}$ . Isso indica que apenas a função de forma com base de Nédélec é capaz de reproduzir exatamente qualquer combinação das funções vetoriais presentes em sua base.

### 6.1.3 Interpolação e Convergência

Os testes de convergência são feitos utilizando uma função polinomial completa de segundo grau, uma função polinomial incompleta de terceiro grau e também uma função senoidal. As funções testadas e os seus respectivos rotacionais são dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{u}_6 &= (2 - y + z + y^2 + z^2) \hat{x} + (2 + x - z + x^2 + z^2) \hat{y} + (2 - x + y + x^2 + y^2) \hat{z} \\ \nabla \times \vec{u}_6 &= (2 + 2y - 2z) \hat{x} + (2 - 2x + 2z) \hat{y} + (2 + 2x - 2y) \hat{z}\end{aligned}\quad (6.7)$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_7 &= (2z + z^2 - 2zx^2) \hat{x} + \left(2x - \frac{2}{3}x^3 - 2xy\right) \hat{y} + \left(2y + \frac{2}{3}y^3 - 2zy\right) \hat{z} \\ \nabla \times \vec{u}_7 &= (2 + 2y^2 - 2z) \hat{x} + (2 - 2x^2 + 2z) \hat{y} + (2 + 2x^2 - 2y) \hat{z}\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_8 &= [\cos(\pi z) - \sin(\pi y)] \hat{x} + [\sin(\pi x) + \cos(\pi z)] \hat{y} + [\cos(\pi x) - \sin(\pi y)] \hat{z} \\ \nabla \times \vec{u}_8 &= \pi[-\cos(\pi y) + \sin(\pi z)] \hat{x} + \pi[-\sin(\pi z) + \sin(\pi x)] \hat{y} + \pi[\cos(\pi x) + \cos(\pi y)] \hat{z}\end{aligned}\quad (6.9)$$

Todas as funções de teste e seus rotacionais são aproximadas no domínio definido por  $\Omega = [-1 \ 1]^3$ . Esse domínio é discretizado em quatro distribuições nodais distintas tendo como referência a maior distância entre os nós distribuídos no domínio, definida por  $h_{max}$ . A figura 6.1 mostra a convergência das funções testadas e as suas respectivas taxas de convergência quando a função de forma com base de Nédélec, dada em (3.12), é utilizada na aproximação. Todas as funções e seus rotacionais apresentam taxa de convergência próximas a um.

As figuras 6.2 e 6.3 mostram os mesmos testes, porém utilizando na aproximação as funções de forma com base polinomial completa de primeira ordem e com base polinomial incompleta de primeira ordem, dadas em (3.24) e em (3.36), respectivamente. Todas as funções e seus rotacionais também apresentam taxa de convergência próximas a um. No entanto, os erros

relativos globais de aproximação são menores que aqueles observados usando a função de Nédélec.

Observa-se que as taxas de convergência do rotacional apresentadas nos três testes são idênticas, o que é esperado, uma vez que os termos acrescentados às funções polinomiais de primeira ordem completa e incompleta são exatamente aqueles que não geram rotacionais.

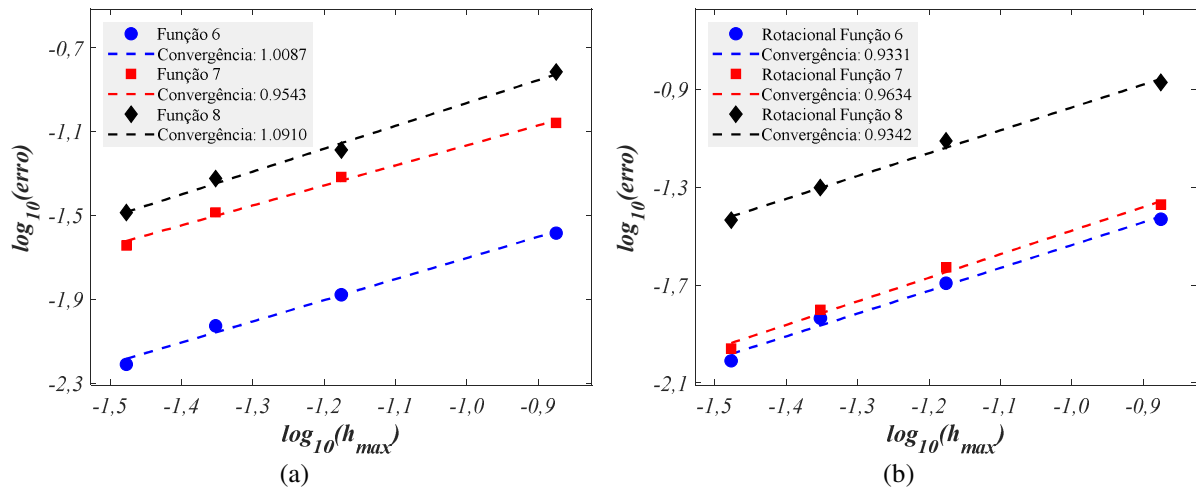


Figura 6.1: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base de Nédélec.

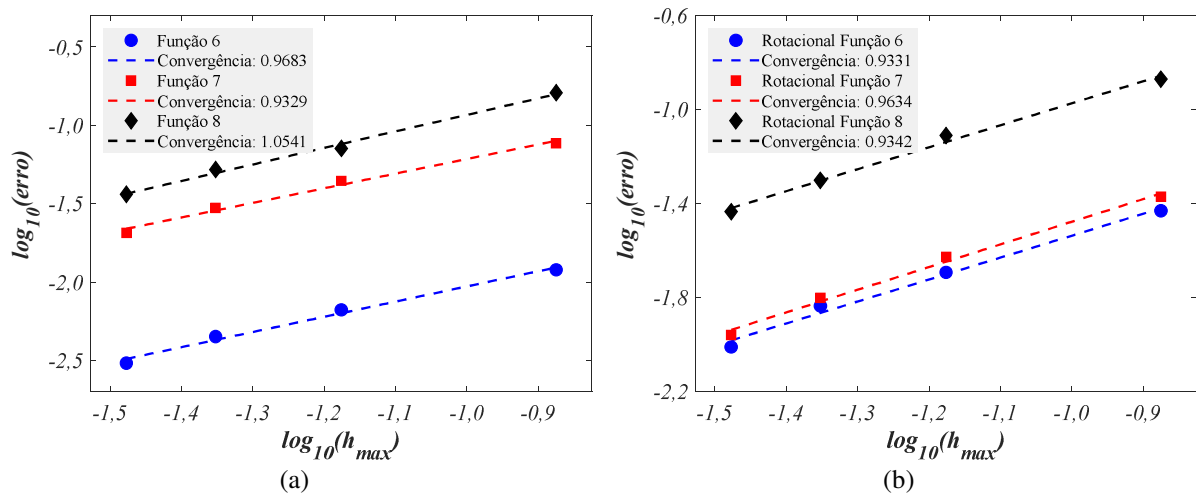


Figura 6.2: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial completa de primeira ordem.

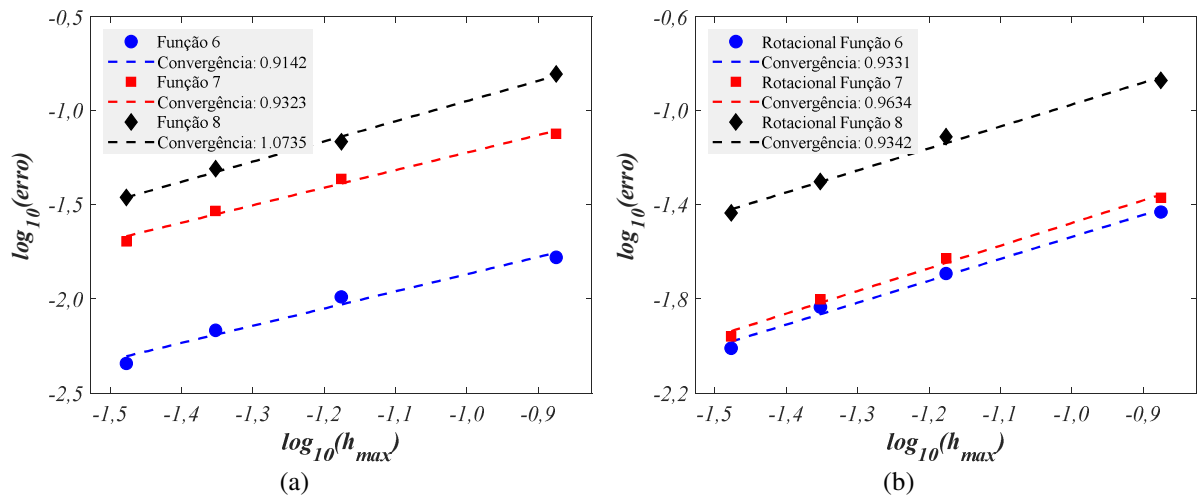


Figura 6.3: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial incompleta de primeira ordem.

Por último, os testes de convergência são realizados tomando-se a função de forma com base radial, dada em (3.45). As aproximações das funções convergiram com taxas próximas a um, porém a aproximação do rotacional não convergiu. Além disso, nota-se que os erros relativos globais são maiores que os observados usando as funções de forma anteriores.

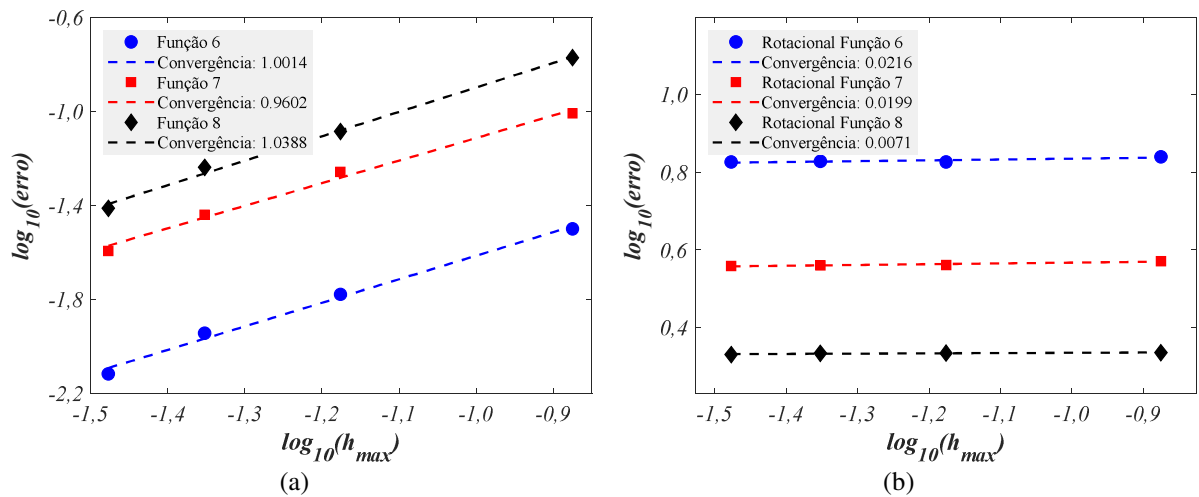


Figura 6.4: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base radial.

Todas as funções de forma com base polinomiais passaram no teste de convergência na aproximação de diferentes funções e seus rotacionais, logo, estão aptas a serem utilizadas na aproximação de problemas de valor de contorno vetoriais no espaço  $H(\text{curl})$ . Na solução dos

problemas que se seguem, nas seções 6.2 e 6.3, a função com base de Nédélec e suporte predefinido foi utilizada. Esta base apresenta um custo computacional menor que as demais, uma vez que possui uma menor quantidade de termos reduzindo o número de operações necessárias à obtenção da função de forma. No entanto, o uso das funções de forma com as outras bases polinomiais são retomadas na aproximação com suporte arbitrário, na seção 6.4, no qual apresentam um papel relevante.

## 6.2 Autovalores de uma Cavidade Retangular

Nesta seção, o Método Sem Malha Nodal Vetorial é aplicado a um problema de autovalores. A formulação do problema foi apresentada no capítulo 5 e o VNMM é aplicado em uma cavidade preenchida com meio homogêneo e isotrópico. Este problema possui solução analítica e poderá ser utilizado, primeiro, na validação do método, segundo, na comparação com o tradicional Método de Elementos Finitos de Aresta e, terceiro, na verificação de aparecimento de modos espúrios na solução.

Dada uma cavidade com seção transversal retangular mostrada na figura 6.5. As dimensões da cavidade são:  $a = 1,00$  cm,  $b = 0,50$  cm e  $c = 0,75$  cm, suas paredes  $\Gamma_g$  são condutoras elétricas perfeitas,  $\sigma = \infty$ , e seu interior está preenchido com vácuo, ou seja,  $\mu = \mu_0$  e  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . O objetivo é encontrar os autovalores  $\lambda = k_0^2$  associados aos modos do campo elétrico  $\vec{E}$  dentro da cavidade. No interior da cavidade pode-se expressar os campos nos modos TE ou TM em qualquer uma das coordenadas devido à simetria do problema [34].

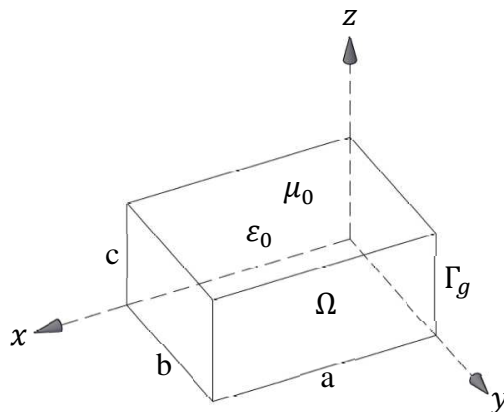


Figura 6.5: Cavidade retangular preenchida com vácuo.

A solução analítica deste problema é dada por [34]:

$$\lambda = k_0^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \quad (6.10)$$

com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e  $p = 0, 1, 2, \dots$  para o modo  $TM_{mnp}$  e  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e  $p = 1, 2, 3, \dots$  exceto quando  $m = n = 0$  simultaneamente para o modo  $TE_{mnp}$ . As quantidades  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as dimensões da cavidade conforme a figura 6.5.

O problema foi solucionado utilizando o tradicional Método de Elementos Finitos de Aresta, o EFEM, e em seguida, o Método Sem Malha Nodal Vetorial, VNMM. Ambos os métodos podem ser aplicados utilizando a formulação apresentada na Seção 5.1 e os resultados foram comparados com a solução analítica apresentada na equação (6.10). Para a solução via EFEM utilizou-se uma malha composta de 1.992 tetraedros e 2.980 arestas. Na solução numérica utilizando o VNMM foram distribuídos 2.980 nós no domínio aproveitando as coordenadas do ponto médio das arestas presentes na malha EFEM. Assim, seis nós de suporte foram usados para gerar as funções de forma VNMM. Em ambos métodos, a integração da forma fraca, expressa pela equação (5.12), é realizada numericamente utilizando a quadratura gaussiana com 4 pontos por célula de integração.

Os primeiros cinco autovalores computados são apresentados na tabela 6.1. Mostra-se os autovalores obtidos pelos métodos EFEM, VNMM, a solução analítica e os erros associados onde  $e_r$  é o erro calculado para cada método. O erro relativo é calculado fazendo:

$$e_r = \frac{\lambda_a - \lambda_h}{\lambda_a} \quad (6.11)$$

onde  $\lambda_a$  é o autovalor obtido analiticamente e  $\lambda_h$  refere-se à aproximação numérica do autovalor.

As funções de forma VNMM computam os autovalores de forma correta e não foram observados modos espúrios na solução numérica. Observa-se que os resultados obtidos com o VNMM coincidem com os calculados usando o EFEM. Isso se deve ao fato de que, neste problema em particular, os vetores unitários dos nós no VNMM estão orientados na mesma

direção das arestas da malha obtida para o EFEM Além disso, os nós de suporte do VNMM coincidem com as arestas que participam da construção da função de forma do EFEM.

Tabela 6.1: Autovalores da cavidade retangular obtidos com o VNMM e o EFEM e os erros relativos de aproximação.

| Autovalores |             |                     |                     |           |           |
|-------------|-------------|---------------------|---------------------|-----------|-----------|
| $(m,n,p)$   | $\lambda_a$ | $\lambda_{h\_EFEM}$ | $\lambda_{h\_VNMM}$ | $e\_EFEM$ | $e\_VNMM$ |
| (1,0,1)     | 5,2360      | 5,2436              | 5,2436              | 0,0014    | 0,0014    |
| (1,1,0)     | 7,0248      | 7,0368              | 7,0368              | 0,0017    | 0,0017    |
| (0,1,1)     | 7,5514      | 7,5718              | 7,5718              | 0,0027    | 0,0027    |
| (2,0,1)     | 7,5514      | 7,5870              | 7,5870              | 0,0047    | 0,0047    |
| (1,1,1)     | 8,1789      | 8,1944              | 8,1944              | 0,0019    | 0,0019    |

### 6.3 Problemas Magnetostáticos

Nesta seção três problemas magnetostáticos são solucionados utilizando o VNMM. Na primeira abordagem um problema de blindagem magnética é utilizado para testar o VNMM quanto à aplicação das condições de contorno e o seu comportamento na interface. Em seguida, um problema de cabo coaxial é solucionado para validação do uso do VNMM em problemas com fontes. Por último, um clássico problema magnetostático não-linear, o problema 13 do TEAM (*Testing Electromagnetics Analysis Methods*) é usado para avaliação do desempenho do VNMM na solução de problemas magnetostáticos mais complexos que envolvem campos vetoriais tridimensionais, fontes, entreferro, interfaces e não-linearidade. A simetria e a periodicidade da geometria do TEAM 13 são levadas em consideração e comparadas com a solução do domínio com geometria inteira. Em todos os casos, as formulações apresentadas na seção 5.2 do capítulo 5 são utilizadas para obtenção dos resultados aproximados pelo VNMM.

### 6.3.1 Blindagem Magnética

Nesta seção, uma casca esférica de material ferromagnético é colocada em um meio onde existe um campo magnético com o objetivo de blindar a presença do campo em seu interior. Neste problema não há fontes de corrente. Inicialmente, deseja-se obter um fluxo magnético constante mediante a imposição adequada das condições de contorno, especialmente, nas fronteiras de Dirichlet. Em seguida, na presença da esfera, é possível verificar as condições necessárias na interface para obtenção da blindagem magnética.

Dada uma casca esférica com raio interno igual a  $a$ , raio externo igual a  $b$ , feita de material ferromagnético de permeabilidade magnética relativa igual a  $\mu_r = 10^4$  e localizada dentro de um cilindro preenchido com ar. O raio e a altura do cilindro são ambos iguais a  $c = 5a$ . Antes da esfera ser adicionada, havia, dentro do cilindro, um campo magnético uniforme  $\vec{H}_0 = \frac{0,1}{\mu_0} \hat{z}$  ampère/metro, e, conseqüentemente, uma densidade de fluxo magnético uniforme  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 = 0,1 \hat{z}$  tesla. A espessura da casca esférica é determinada com o objetivo de reduzir o campo dentro da esfera para  $1/10^4$  do seu valor externo, ou seja,  $\vec{B}_i = 10^{-5} \hat{z}$  tesla.

Devido à simetria axial, é conveniente solucionar o problema em uma geometria reduzida conforme mostra a figura 6.6. A densidade de fluxo magnético uniforme no interior do cilindro,  $\vec{B}_0$ , é obtida mediante a imposição adequada das condições de contorno nas fronteiras do domínio. Estas condições de contorno se aplicam às componentes tangenciais do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  e do campo magnético  $\vec{H}$  conforme definido na forma forte do problema dada pela equação (5.51).

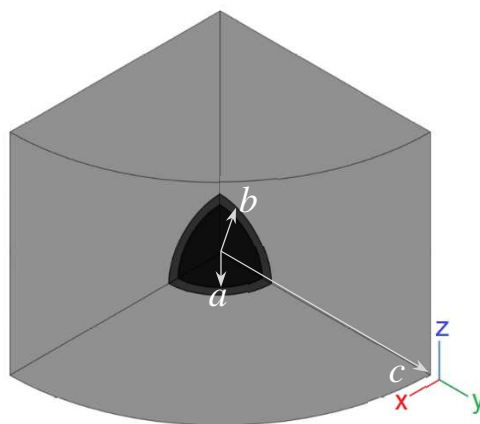


Figura 6.6: Casca esférica dentro de cilindro preenchido com vácuo.

Na figura 6.6, o domínio do problema é limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ , onde  $\Gamma_g$  é a fronteira de Dirichlet e  $\Gamma_h$  é a fronteira de Neuman. A fronteira de Dirichlet  $\Gamma_g$  é formada pelas superfícies  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = c$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ . Nesta fronteira o valor de  $\vec{g}$  é imposto de tal forma a garantir que a circulação de fluxo magnético forneça uma indução constante  $\vec{B}_0 = 0,1 \hat{z}$  tesla. As demais superfícies externas do cilindro são fronteiras de Neuman. As condições de contorno são condições homogêneas nas fronteiras de Neumann, ou seja, as componentes tangenciais do campo magnético  $\vec{H}$  são nulas.

O problema foi solucionado utilizando o Método Sem Malha Nodal Vetorial, VNMM. No VNMM, um conjunto de nós é distribuído no domínio do problema e em suas fronteiras, e um vetor unitário é associado a cada nó. Para os nós localizados nas fronteiras do domínio e nas interfaces, a direção do vetor deve ser tangente ao respectivo limite ou interface. Esta condição garante que a imposição das condições de contorno possa ser feita diretamente.

Foram distribuídos um total de 39.519 nós no domínio considerando seis nós de suporte na aproximação. A integração da forma fraca, expressa pela equação (5.55), é realizada numericamente utilizando a quadratura gaussiana com 4 pontos por célula de integração.

Após a obtenção da aproximação do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  através da formulação apresentada na seção 5.2, o campo magnético pode ser obtido fazendo:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (6.12)$$

A solução analítica para este problema, em coordenadas esféricas, é dada por [35]:

$$\vec{H} = \begin{cases} -\delta \cos(\theta) \hat{r} + \delta \sin(\theta) \hat{\theta} & \text{para } r < a \\ \left(-\beta + \frac{2\gamma}{r^3}\right) \cos(\theta) \hat{r} + \left(\beta + \frac{\gamma}{r^3}\right) \sin(\theta) \hat{\theta} & \text{para } a \leq r < b \\ \left(H_0 + \frac{2\alpha}{r^3}\right) \cos(\theta) \hat{r} + \left(-H_0 + \frac{\alpha}{r^3}\right) \sin(\theta) \hat{\theta} & \text{para } r < b \end{cases} \quad (6.13)$$

onde:

$$\delta = -H_0 \left[ \frac{9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2(a^3/b^3)(\mu - 1)^2} \right]$$

$$\beta = \frac{(2\mu + 1)\delta}{3\mu}; \quad \gamma = \frac{a^3(\mu - 1)\delta}{3\mu}$$

$$\alpha = \frac{-(2\mu + 1)(\mu - 1)(b^3 - a^3)\delta}{9\mu}$$

A figura 6.7 mostra o módulo do campo  $\vec{H}$  no domínio apresentado na figura 6.6.

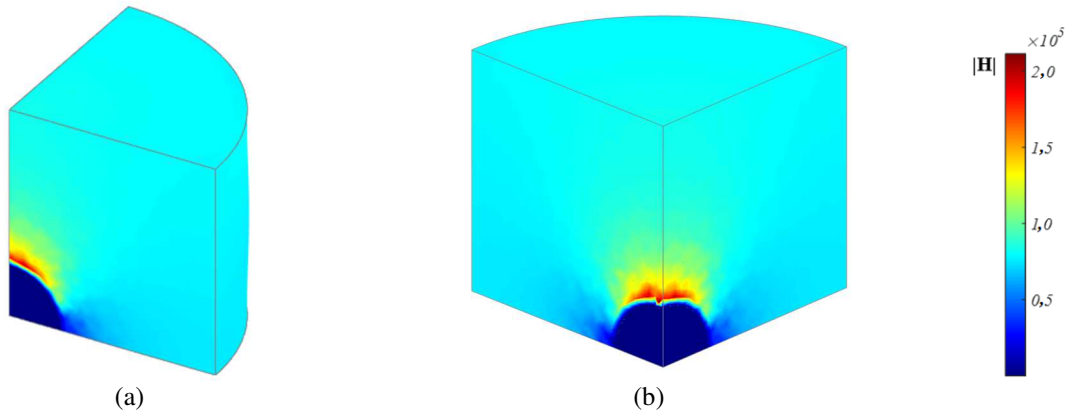


Figura 6.7: Módulo do campo magnético  $\vec{H}$ .

Na figura 6.8 o módulo do campo magnético  $\vec{H}$  ao longo da coordenada  $y$ , em  $x, z = 0$ , para as soluções analítica e aproximada pelo VNMM é apresentado. A convergência do campo magnético  $\vec{H}$  é traçada na figura 6.9 na qual a taxa de convergência é 1,44.

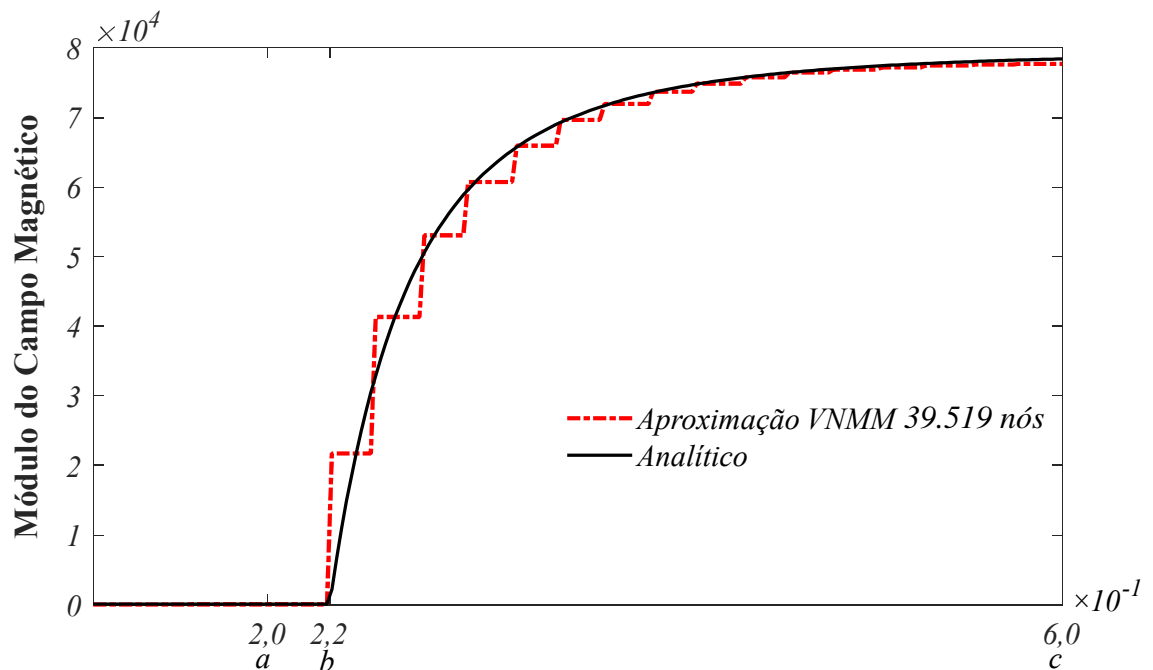


Figura 6.8: Módulo do campo magnético  $\vec{H}$  ao longo de  $r$ .

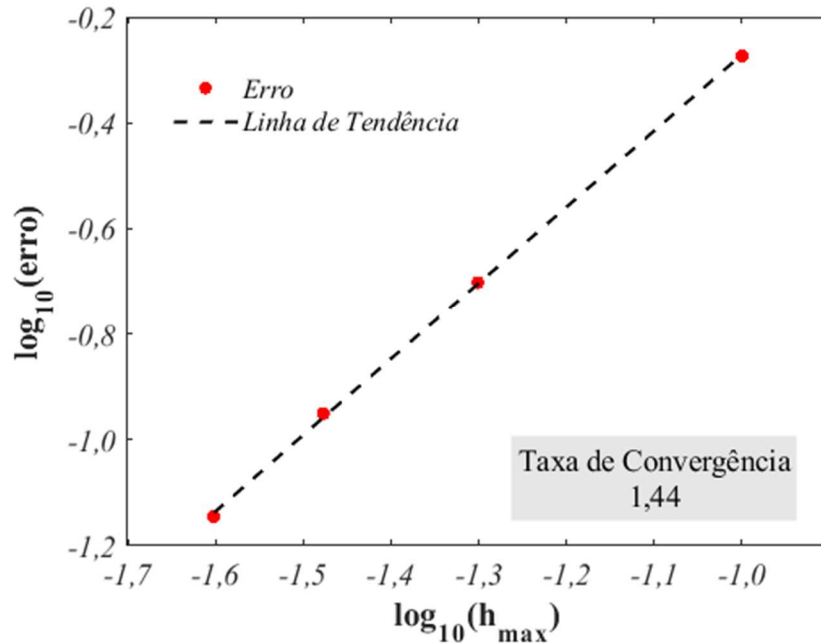


Figura 6.9: Convergência do campo magnético  $\vec{H}$ .

Os resultados comprovam a eficiência do método VNMM na aproximação de problemas de valor de contorno vetoriais uma vez que a solução numérica converge à solução analítica. Não há descontinuidade na interface nem dificuldades na imposição das condições de contorno, uma vez observada a condição de tangência das direções vetoriais dos nós nestas fronteiras.

### 6.3.2 Cabo Coaxial

Nesta seção, o campo magnético em um cabo coaxial tridimensional é obtido com o uso do VNMM. Deseja-se obter o campo magnético mediante a imposição adequada das fontes de corrente.

O cabo coaxial de comprimento  $l = 2$  cm, da figura 6.10, está centralizado longitudinalmente ao longo do eixo  $z$ . A corrente  $I = 1$  A circula pelo condutor central, de raio  $a = 1$  cm, e a mesma corrente, com sentido inverso, circula no condutor externo, de raio externo  $c = 2$  cm e interno  $b = \sqrt{3}$  cm. Os condutores e o material isolante entre os condutores têm permeabilidade relativa  $\mu_r = 1$ . As condições de contorno são condições homogêneas nas

fronteiras de Dirichlet, ou seja,  $\vec{g} = \vec{0}$  o que significa que as componentes tangenciais do potencial vetor  $\vec{A}$  são nulas.

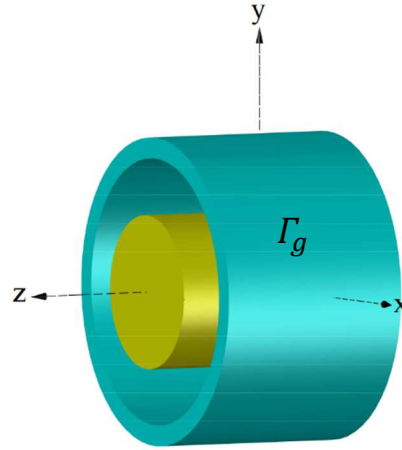


Figura 6.10: Cabo coaxial.

Na figura 6.10 o domínio do problema é limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g$ , onde  $\Gamma_g$  é a fronteira de Dirichlet dada por três superfícies  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = c$ ,  $z = 0$  e  $z = l$ . O vetor densidade de corrente possui componente apenas na direção  $z$ , ou seja,  $\vec{J} = \frac{I}{\pi\rho^2}\hat{z}$  para  $\rho < a$  e  $\vec{J} = -\frac{I}{\pi\rho^2}\hat{z}$  para  $b \leq \rho < c$ .

Após a obtenção da aproximação do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  através da formulação apresentada na seção 5.2, o campo magnético pode ser obtido fazendo:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (6.14)$$

A solução analítica deste problema é dada por [36]:

$$\vec{H} = \begin{cases} -\frac{J_a}{2}\rho & \text{para } \rho < a \\ -\frac{J_a a^2}{2\rho} & \text{para } a \leq \rho < b \\ \frac{J_a a^2 + J_c(\rho^2 - b^2)}{2\rho} & \text{para } b \leq \rho < c \end{cases} \quad (6.15)$$

onde  $J_a$  representa a densidade de corrente no condutor interno e  $J_c$  a densidade de corrente no condutor externo.

O problema foi solucionado utilizando o Método Sem Malha Nodal Vetorial, VNMM, com 149.184 nós distribuídos uniformemente pelo domínio e seis nós de suporte na aproximação. A integração da forma fraca, expressa pela equação (5.55), é realizada numericamente utilizando a quadratura gaussiana com 4 pontos por célula de integração.

A figura 6.11 mostra o módulo do campo magnético  $\vec{H}$  ao longo de  $\rho$  para as soluções analítica e aproximada pelo VNMM. A convergência do campo magnético  $\vec{H}$  é traçada na figura 6.12 na qual a taxa de convergência se aproxima do valor unitário. Os resultados comprovam a eficiência do método VNMM na modelagem de circuitos magnéticos contendo fontes de corrente impostas, uma vez que a solução numérica converge à solução analítica.

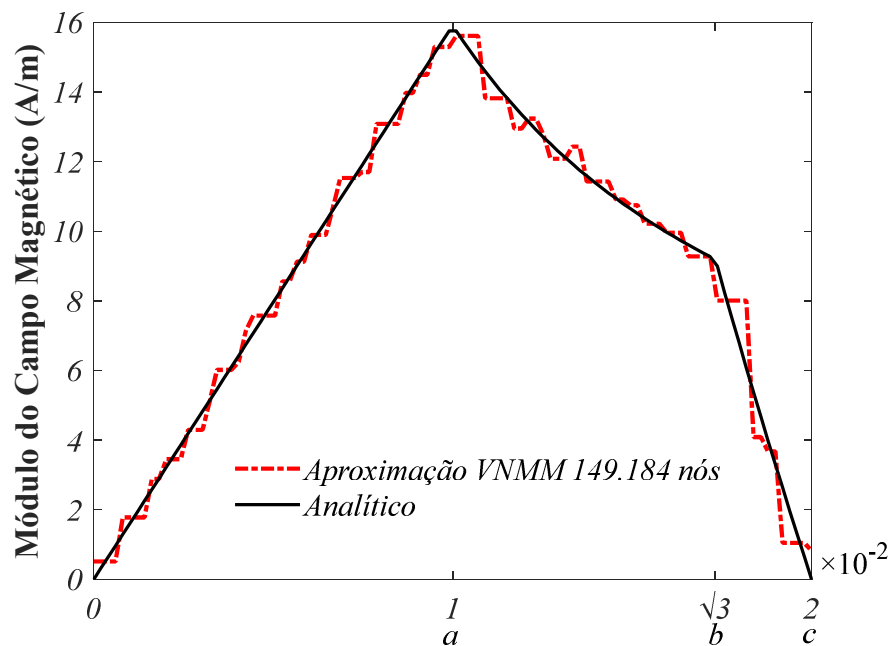


Figura 6.11: Módulo do campo magnético  $\vec{H}$  ao longo de  $\rho$ .

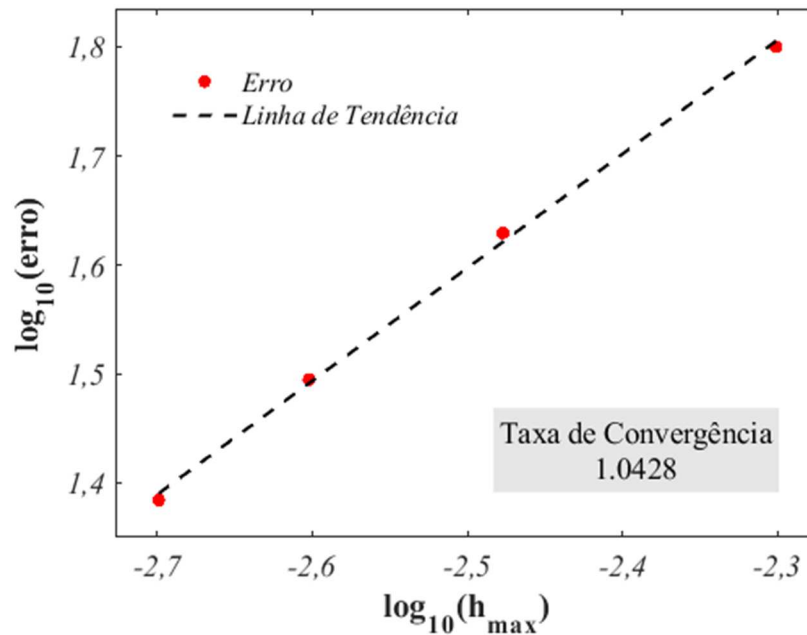


Figura 6.12: Convergência do campo magnético  $\vec{H}$ .

### 6.3.3 Problema TEAM 13

Os problemas apresentados nos *workshops* do TEAM (*Testing Electromagnetics Analysis Methods*) servem como referência para avaliação de métodos numéricos que analisam problemas de campo eletromagnético.

O problema de referência TEAM 13 é um problema magnetostático não linear cujo modelo é mostrado na figura 6.13 (a). As dimensões detalhadas desta estrutura podem ser encontradas em [17]. A geometria consiste em dois canais opostos em forma de U, feitos de aço. Uma fina placa de aço é inserida entre os dois canais, induzindo entreferros muito pequenos. Uma bobina de excitação com seção transversal retangular está situada entre os canais. A bobina é excitada por corrente contínua com 1.000 ampères-espira, o que é suficiente para saturar o aço. O comportamento do material do aço é não linear e definido por meio da curva  $\vec{B} - \vec{H}$  mostrada na figura 6.13 (b) e também fornecida em [17]. Devido ao deslocamento dos canais de aço, um campo de densidade de fluxo magnético tridimensional  $\vec{B}$  é gerado.

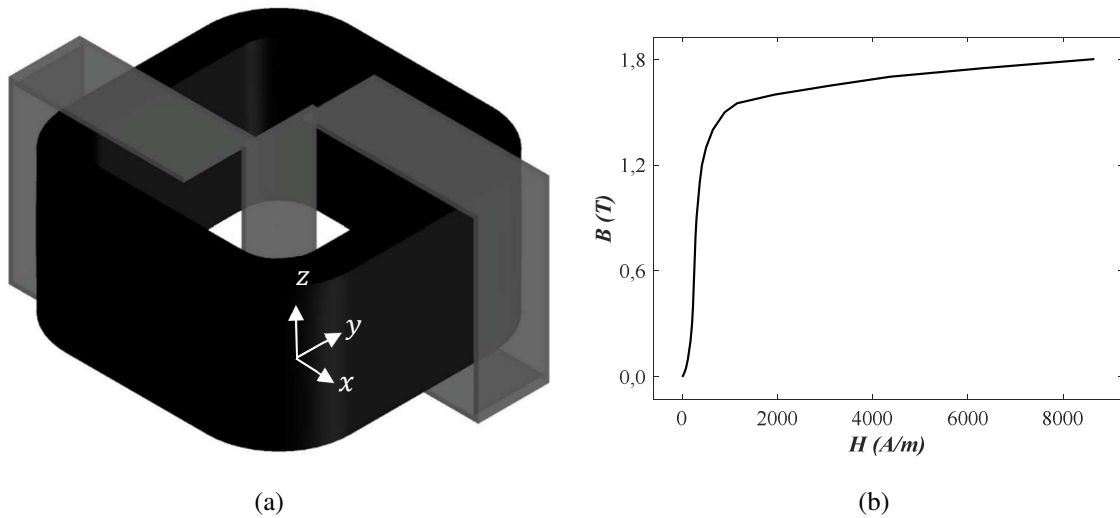


Figura 6.13: (a) Geometria do problema TEAM 13: bobina em preto e aço em cinza. (b) Curva  $\vec{B} - \vec{H}$  para o material magnético do aço [17].

O objetivo é calcular a densidade de fluxo magnético em locais previamente determinados e comparar as soluções obtidas com a modelagem do domínio completo e dos domínios reduzidos por simetria e periodicidade. A validação da aproximação numérica pode ser obtida mediante a comparação com valores medidos em experimentação e fornecidos por [17].

O domínio de interesse, dado por  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ , onde  $\Omega_0$  é preenchido com ar de permeabilidade  $\mu_0$  e  $\Omega_1$  é composto por material magnético com permeabilidade  $\mu$ . O problema de campo magnético estático com a presença de material magnético não linear e as suas condições de contorno pode ser modelado usando o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  através da formulação apresentada na seção 5.2. O vetor densidade de corrente  $\vec{J}_s$  é imposto de forma a garantir um divergente nulo, ou seja,  $\nabla \cdot \vec{J}_s = 0$ , tal como demonstrado na figura 6.14.

A integração da forma variacional, expressa pela equação (5.51), é realizada numericamente usando a quadratura Gaussiana com 4 pontos por célula de integração. Em (5.51)  $\Gamma_l$  é a interface entre  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$ . Aproximações sucessivas foram aplicadas para resolver a não linearidade convergindo após 10 iterações com um critério de  $10^{-6}$  e dispensando a utilização de métodos iterativos mais elaborados tal como Newton Raphson.

Quando a geometria completa é utilizada o domínio é limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g$  definida por uma caixa que envolve toda a estrutura e com dimensões que permitam o espraiamento adequado do fluxo magnético. A fronteira  $\Gamma_g$  com  $\vec{g} = 0$  é formada pelas

superfícies de uma caixa preenchida com vácuo e que envolve toda a geometria mostrada na figura 6.13 (a).

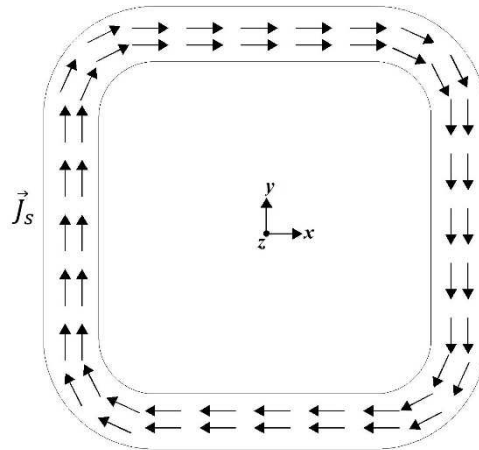


Figura 6.14: Distribuição da densidade de corrente na bobina.

A figura 6.15 mostra o módulo do vetor densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$  no aço excitado por uma corrente de 1.000 ampère-espiras quando o domínio  $\Omega$  é completamente modelado. O problema é resolvido usando 122.018 nós distribuídos no domínio  $\Omega$  e seis nós de suporte na aproximação.

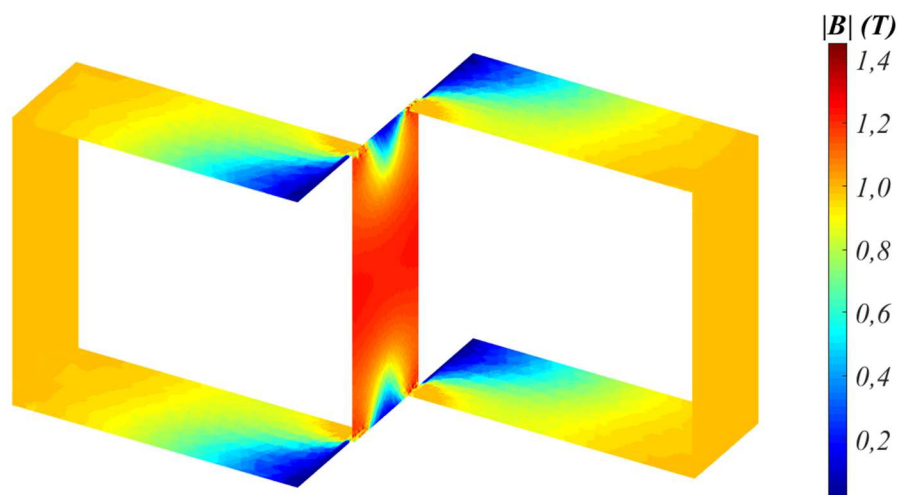


Figura 6.15: Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM.

A densidade de fluxo magnético é avaliada nas três regiões mostradas na figura 6.16. A média de  $\vec{B}$  é calculada nas superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  em diferentes posições ao longo do aço. A figura 6.17 plota os resultados obtidos pela aproximação do método VNMM e os dados de medição fornecidos por [17]. A densidade média do fluxo magnético nas áreas de observação  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  é mostrada em função da posição. Uma boa concordância pode ser observada principalmente nos canais U – regiões CD e EF do aço. Uma melhor aproximação na região da placa central poderia ser obtida com um refinamento da distribuição nodal na região do entreferro, contudo, os requisitos de memória e o tempo de processamento tornam-se bastante elevados.

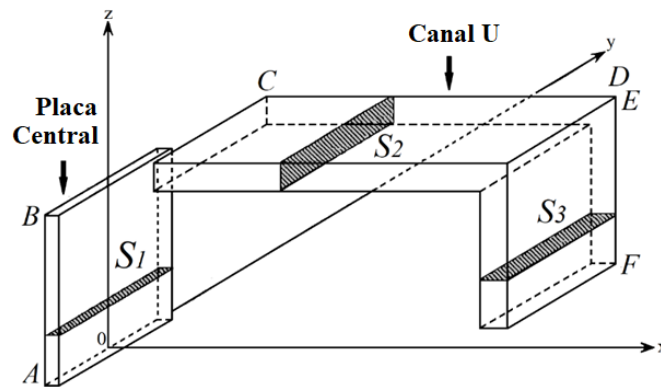


Figura 6.16: Regiões específicas para avaliação da densidade de fluxo magnético. Apenas  $\frac{1}{4}$  do aço é mostrado.

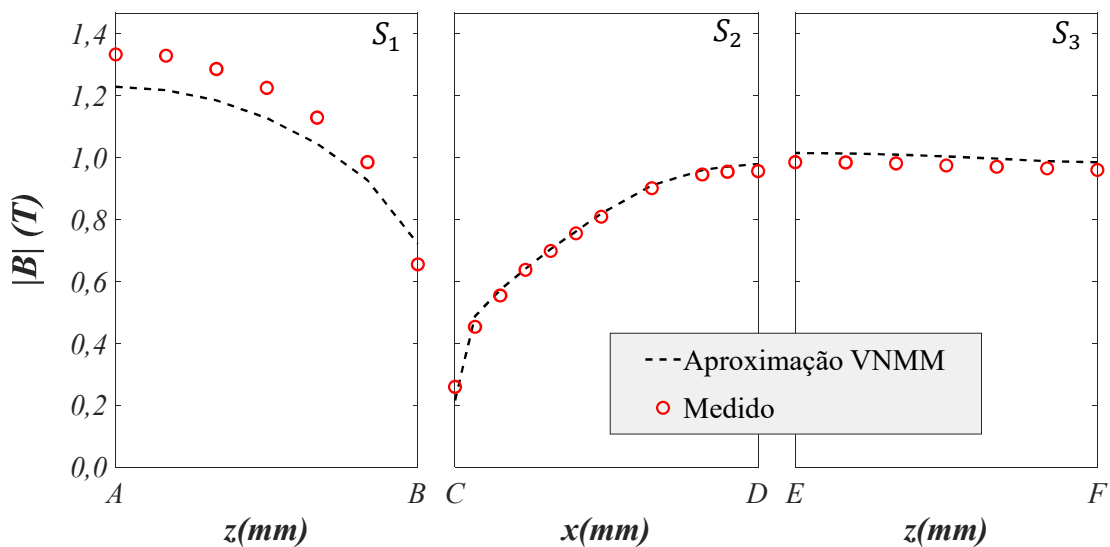


Figura 6.17: Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com geometria completa.

Desejando-se aproveitar a simetria da estrutura apresentada figura 6.13 (a), apenas metade da geometria necessita ser modelada e o domínio é limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ , onde  $\Gamma_g$  é a fronteira com condição de contorno de Dirichlet e  $\Gamma_h$  é a fronteira com condição de Neumann. A fronteira de simetria, onde ocorre a condição de Neumann com  $\vec{h} = 0$ , é dada pelo plano  $z = 0$ . As demais fronteiras possuem condição de Dirichlet com  $\vec{g} = 0$  e são definidas pela caixa que envolve a estrutura.

Esse problema é resolvido usando 64.302 nós distribuídos no domínio  $\frac{1}{2} \Omega$  e seis nós de suporte na aproximação. A figura 6.18 mostra o módulo do vetor densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$  no aço excitado por uma corrente de 1.000 ampère-espiras quando a metade do domínio  $\Omega$  é modelado.

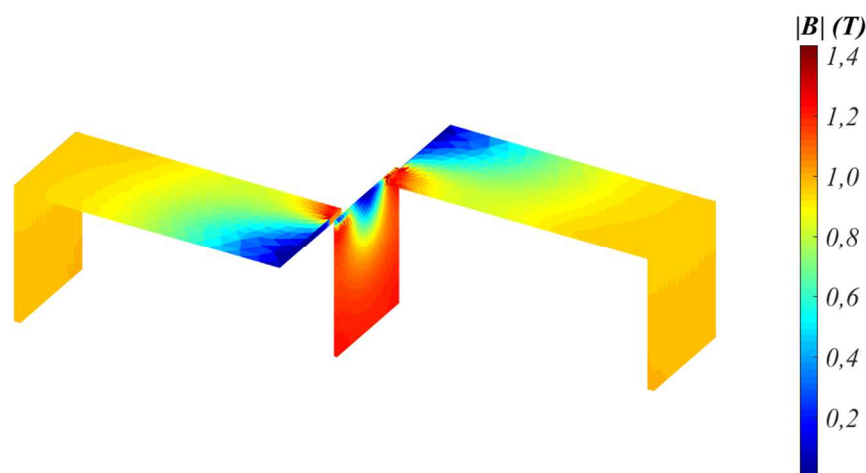


Figura 6.18: Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM e o aproveitamento da simetria.

A densidade de fluxo magnético é avaliada nas três regiões apresentadas na figura 6.16 da mesma forma que foi feito para a geometria completa. A figura 6.19 plota os resultados obtidos pela aproximação do método VNMM e os dados de medição fornecidos por [17]. Uma boa concordância pode ser observada principalmente nos canais U – regiões CD e EF do aço. Para comparar com a simulação usando a geometria completa, toma-se como referência a superfície localizada em A (figura 6.16). Nela há, visivelmente, uma maior diferença entre o valor medido e o valor aproximado em ambas simulações (figuras 6.17 e 6.19). O erro relativo foi calculado em cada caso. Para a geometria completa o erro da aproximação de  $|\vec{B}|$  na superfície A foi de 7,83% contra 7,70% quando comparado à aproximação com metade da geometria. Nota-se,

portanto, uma leve redução no erro de aproximação da densidade de fluxo na placa central quando comparada à simulação utilizando a geometria completa.

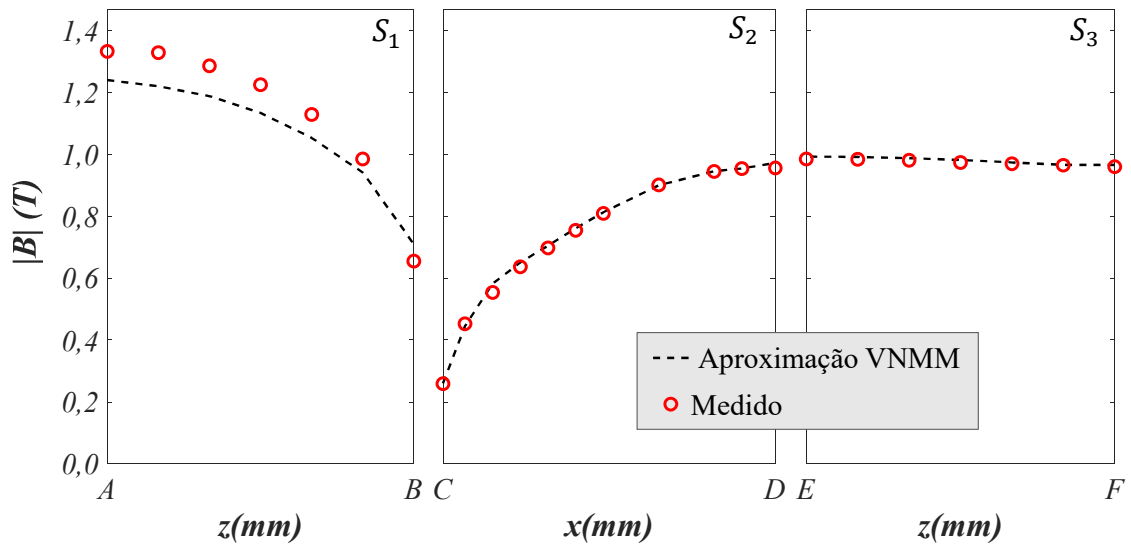


Figura 6.19: Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com meia geometria.

Considerando ambas simetria e periodicidade do modelo do problema TEAM 13, apenas  $\frac{1}{4}$  da geometria necessita ser modelada. Toda a teoria para a implementação das condições de contorno periódicas foi apresentada na seção 5.4 deste texto. Nesta situação, o domínio do problema é limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \cup \Gamma_p$ , onde  $\Gamma_g$  e  $\Gamma_h$  já foram definidas e  $\Gamma_p$  é a fronteira com condição de contorno periódica. A fronteira de simetria, onde ocorre a condição de Neumann com  $\vec{h} = 0$ , é dada pelo plano  $z = 0$ . O par de fronteiras periódicas ocorre em  $x = 0; y^+$  e em  $x = 0; y^-$  tal como apresentado na figura 5.3 com um ângulo  $\alpha = 180^\circ$ . As demais fronteiras possuem condição de Dirichlet com  $\vec{g} = 0$  e são definidas pela caixa que envolve a estrutura.

Esse problema é resolvido usando 46.239 nós distribuídos no  $\frac{1}{4} \Omega$  e seis nós de suporte na aproximação. A figura 6.20 mostra o módulo do vetor densidade de fluxo magnético  $\vec{B}$  no aço excitado por uma corrente de 1.000 ampère-espiras quando um quarto do domínio  $\Omega$  é modelado. Para validação, a densidade de fluxo magnético é avaliada nas três regiões apresentadas na figura 6.16. A figura 6.21 plota os resultados obtidos pela aproximação do método VNMM e os dados de medição fornecidos por [17]. Observa-se, principalmente, uma

melhora na aproximação da densidade de fluxo na placa central quando comparada às simulações utilizando a geometria completa e a meia geometria. Tomando-se novamente a superfície  $A$  (figura 6.16) o erro relativo da aproximação numérica foi de 2,94%, o que representa uma redução de mais de 60% em relação ao erro relativo usando a geometria completa. Essa melhora na precisão se deve ao refinamento da distribuição nodal na região do entreferro. A redução da geometria possibilitou esse refinamento uma vez que os requisitos de memória já não são mais um empecilho na solução computacional.

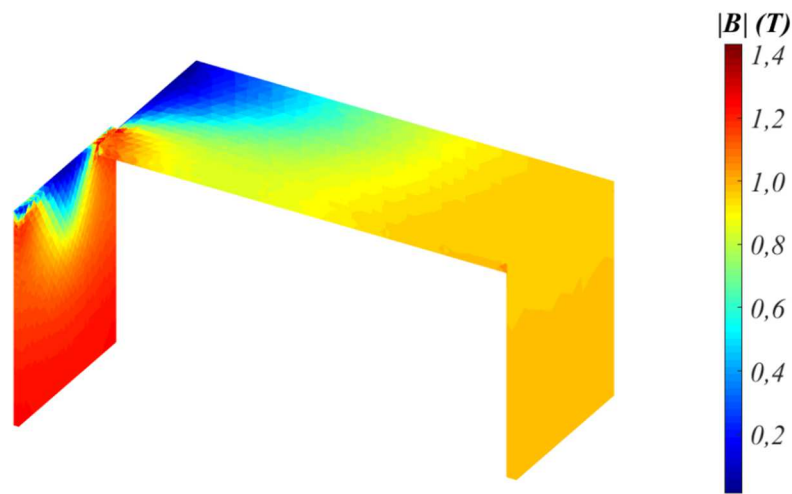


Figura 6.20: Módulo da densidade do fluxo magnético na superfície da estrutura de aço obtido com o uso do VNMM e o aproveitamento da simetria e da periodicidade.

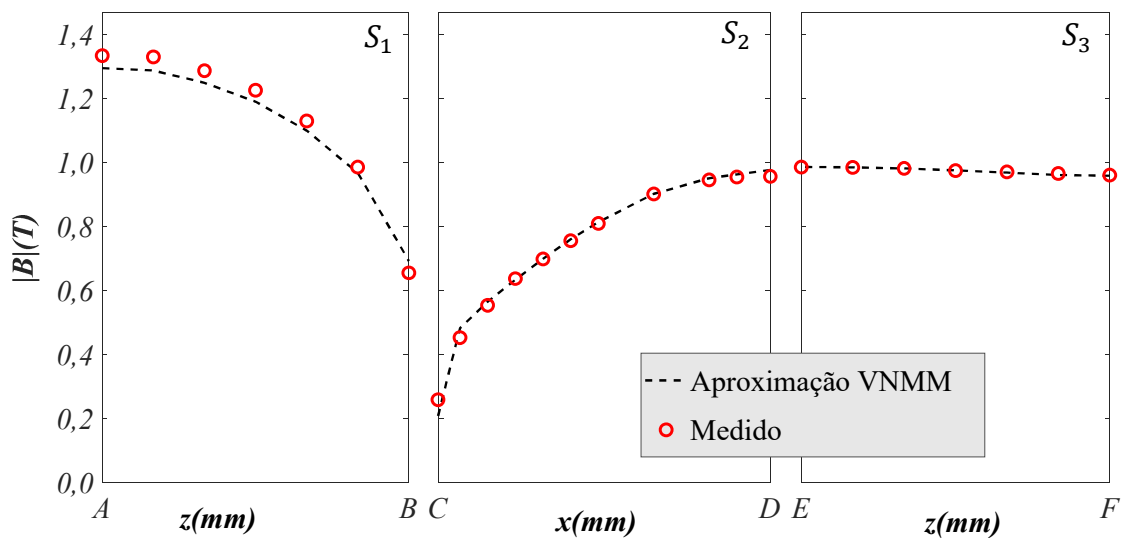


Figura 6.21: Validação numérica do VNMM para solução do problema TEAM 13 com  $\frac{1}{4}$  da geometria.

A tabela 6.2 resume os procedimentos computacionais adotados para obtenção dos resultados do problema TEAM 13. Detalhes do método de regularização delta foram apresentados na seção 5.3 deste texto. As demais técnicas numéricas citadas são de amplo conhecimento no meio científico e acadêmico. Para a solução de equações lineares são usados métodos diretos e sua escolha varia de acordo com o tipo da matriz. Usualmente opta-se pela decomposição LU ou Eliminação de Gauss mas se a matriz for hermitiana a fatorização LDL é a melhor opção.

Tabela 6.2: Procedimentos de cálculo

| Item   | Especificação           |        |        |
|--|-------------------------|--------|--------|
| Fração de geometria                                | 1                       | 1/2    | 1/4    |
| Condição de calibre                                | Método de regularização |        |        |
| Técnica para não-linearidade                       | Aproximações sucessivas |        |        |
| Método de aproximação da curva $\vec{B} - \vec{H}$ | Akima                   |        |        |
| Método de solução de equações lineares             | Método direto           |        |        |
| Número de nós de suporte                           | 6                       | 6      | 6      |
| Pontos de Gauss para integração numérica           | 4                       | 4      | 4      |
| Número de nós                                      | 122.018                 | 64.302 | 46.239 |
| Número de incógnitas                               | 113.567                 | 60.046 | 45.018 |

## 6.4 Interpolação e Convergência com Suporte Arbitrário

No capítulo 4 vimos que trabalhar com um domínio de suporte que possa ser arbitrariamente escolhido é condição necessária para garantir uma maior versatilidade ao método VNMM. O suporte arbitrário elimina a dependência de uma subdivisão preliminar do domínio de estudo para a definição dos nós de suporte. Esta seção dedica-se a apresentar o passo-a-passo e os resultados obtidos nos testes de aproximação utilizando as funções de forma VNMM com um suporte escolhido arbitrariamente.

Um suporte arbitrário pode ser obtido com o auxílio de uma *kd-tree* [22] e do algoritmo de busca e seleção de nós apresentado no capítulo 4. Este algoritmo escolhe os seis nós mais próximos de um dado ponto de integração  $\mathbf{x}$  para participarem da aproximação local dada pela equação (3.1). As funções de forma  $\vec{N}_i$  são construídas utilizando os dados de coordenadas e direções vetoriais dos nós arbitrariamente selecionados. Para validação das funções de forma

$\vec{N}_i$  geradas por um suporte arbitrário são aplicados os tradicionais testes de interpolação e convergência. Estes testes foram aplicados às funções de forma, na seção 6.1, quando um suporte predefinido é utilizado.

Para a obtenção dos erros relativos apresentados na tabela 6.3, a função a ser interpolada é definida pela equação (6.7) no domínio tridimensional  $\Omega = [-1 \ 1]^3$ . Para este teste, a função (6.7) é interpolada em um conjunto de 210 pontos distribuídos uniformemente no domínio  $\Omega$  e em suas fronteiras. A distribuição nodal consiste em 1.750 nós tal que a direção vetorial atribuída a cada nó é a mesma direção da aresta de um tetraedro e o nó está localizado no centro das arestas. O número de nós e pontos distribuídos no domínio é o mesmo em todos os testes com o intuito de realizar as comparações.

O erro relativo da aproximação é calculado conforme a equação (6.1) com  $n = 210$ . Toma-se um erro relativo de referência para avaliação do desempenho das funções de forma utilizando o suporte arbitrário. Esse erro de referência é aquele obtido mediante interpolação usando a função VNMM tradicional, ou seja, com a base de Nédélec e o suporte previamente determinado pelos nós situados no centro das arestas do tetraedro.

Para efeito de comparação com os resultados obtidos utilizando um suporte predefinido, os testes de convergência são feitos utilizando as mesmas funções de teste e os seus respectivos rotacionais apresentados nas equações (6.7) a (6.8).

Naturalmente, a primeira função de forma a ser avaliada é a função com base polinomial do elemento de Nédélec do primeiro tipo, dada pela equação (3.12). Contudo, casos de singularidade e mau condicionamento da matriz  $\alpha$  – equação (3.16) – surgem inviabilizando a obtenção dos coeficientes  $\beta$  necessários à construção da função de forma. Para tratar os problemas de singularidade da matriz  $\alpha$ , mantendo a base de Nédélec, duas estratégias foram propostas no capítulo 4. Uma delas elimina a dependência linear corrigindo de forma incremental o posto da matriz singular; a outra elimina todas as linhas linearmente dependentes após identificá-las por um processo de decomposição QR. Ambas, contudo, envolvem a escolha de novos nós para compor o domínio suporte após a exclusão daqueles que causam a dependência linear.

No teste de aproximação da função (6.7), a função de Nédélec com suporte arbitrário apresentou erro relativo de 0,0361, que representa um aumento de 38% em relação ao valor de referência. A figura 6.22 mostra o resultado do teste de convergência para função de forma. Nesta simulação foi utilizado o algoritmo de correção de posto para tratar a singularidade de  $\alpha$ . A estratégia utilizando a decomposição QR apresenta resultados similares. As taxas de

convergência para a aproximação da função permanecem próximas a um com erros relativos um pouco maiores que aqueles apresentados quando o suporte predefinido é utilizado (vide figura 6.1).

Entretanto, quando se trata da aproximação do rotacional são observados a falta de convergência associada a elevados erros. Uma avaliação local do erro, ou seja, o erro relativo ponto a ponto, permitiu observar que a maioria dos pontos apresentou uma boa aproximação local, ou seja, o erro elevado ocorre em apenas alguns pontos. Esses pontos foram individualmente avaliados com o intuito de identificar quaisquer padrões geométricos, numéricos e/ou construtivos que justificasse o erro elevado, no entanto, nenhum padrão evidente foi identificado.

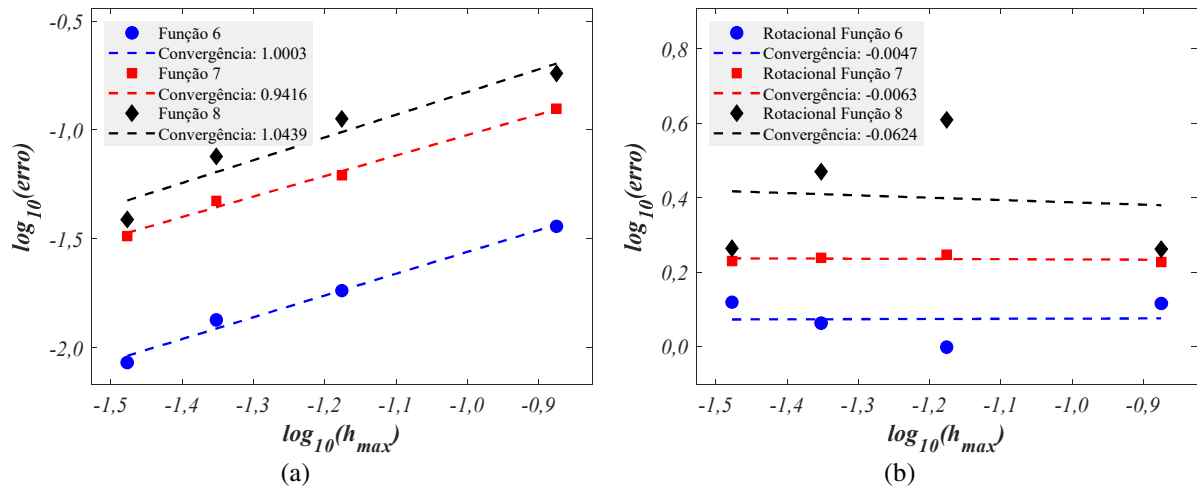


Figura 6.22: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base de Nédélec e suporte arbitrário.

A função de forma a ser testada a seguir é função com base polinomial de primeira ordem completa dada pela equação (3.24). Essa função surge de uma estratégia algébrica para melhorar o condicionamento da matriz  $\alpha$ . Logo, construir a função de forma com a base polinomial de primeira ordem completa dispensa o uso de restrições na escolha dos nós de suporte já que nenhum caso de singularidade é observado na matriz  $\alpha$ . Desta forma, os seis nós mais próximos do ponto de aproximação são efetivamente utilizados na aproximação local.

Na interpolação de (6.7), a função de forma com base polinomial de primeira ordem completa apresentou redução no erro relativo de aproximadamente 54% quando comparado ao valor de referência e uma redução sutil de 1% quando comparada ao uso do suporte predefinido.

A figura 6.23 mostra o resultado desta função de forma no teste de convergência. As taxas de convergência para a aproximação da função permanecem próximas a um tal como apresentado nas figuras 6.1 a 6.3 para o suporte predefinido. O ganho na redução do erro relativo também fica evidenciado.

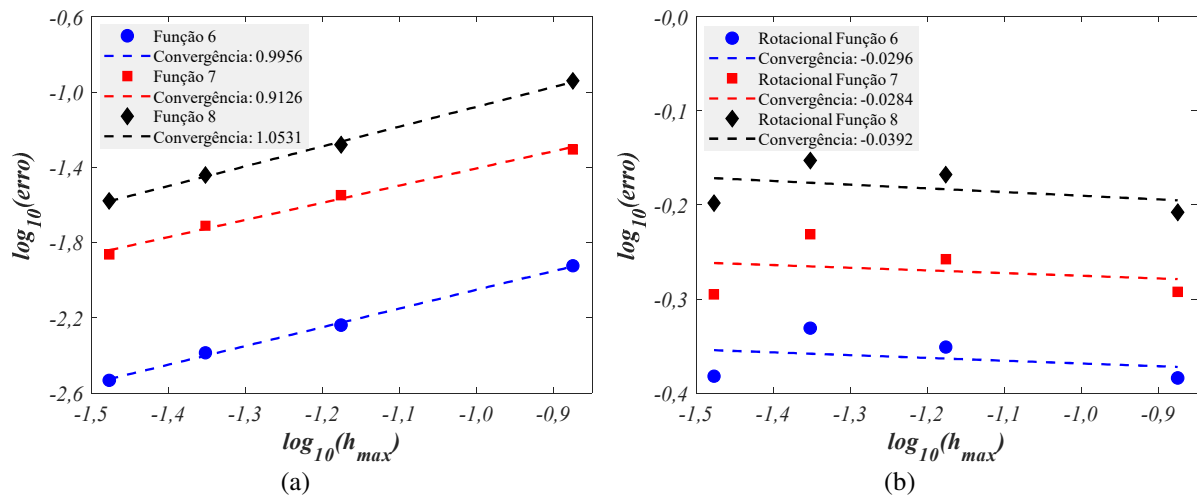


Figura 6.23: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial completa de primeira ordem e suporte arbitrário.

Apesar do bom resultado na aproximação da função teste, a aproximação do rotacional não é satisfatória. A análise local dos erros relativos de aproximação do rotacional mostra uma situação similar à observada nas funções de Nédélec: o erro elevado ocorre em apenas alguns pontos, no entanto, nenhum padrão que justifique o erro nesses pontos foi identificado.

Com o intuito de reduzir os elevados erros relativos na aproximação do rotacional propõe-se implementar uma nova base polinomial sem os termos que não geram o rotacional. A nova base e a nova função de forma são apresentadas, respectivamente, nas equações (3.35) e (3.36). Na interpolação de (6.7), essa função de forma com base polinomial incompleta apresentou redução no erro relativo de 41% quando comparada ao erro de referência, e redução de 7,8% quando comparada ao uso desta função com suporte predefinido. A figura 6.24 mostra o resultado desta função de forma no teste de convergência. As taxas de convergência para a aproximação da função permanecem próximas a um com destaque para a função senoidal, dada por (6.9), que apresenta uma maior taxa de convergência em comparação com os testes anteriores.

No entanto, novamente, a aproximação do rotacional não é satisfatória. Além disso, quando comparados ao teste feito com a função polinomial de primeira ordem, os erros dos rotacionais apresentam maior instabilidade. A avaliação dos erros relativos locais mostra uma situação similar àquela encontrada nos testes anteriores: o erro relativo elevado em poucos pontos e a não identificação de um padrão geométrico, numérico e/ou construtivo que justifique os erros.

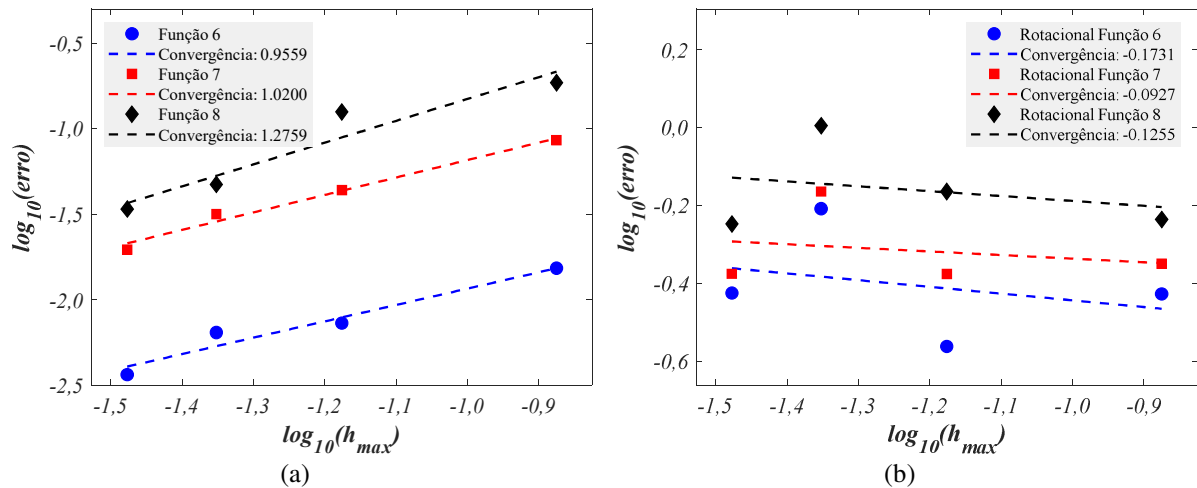


Figura 6.24: Convergências e taxas de convergência das (a) funções  $\vec{u}_6$ ,  $\vec{u}_7$  e  $\vec{u}_8$  e (b) seus rotacionais utilizando a função de forma VNMM com base polinomial incompleta de primeira ordem e suporte arbitrário.

A terceira opção algébrica seria testar a função de forma com base radial. Essa função de forma foi construída e apresentada na equação (3.45). Conforme visto na seção 6.1, especialmente na figura 6.4, a função de forma com base radial não foi capaz de proporcionar uma boa aproximação do rotacional e nem apresentou convergência para o mesmo. Lembrando que esse teste usou um suporte predefinido. Com o suporte arbitrário a situação se repete, apresenta convergência e boa aproximação da função teste, porém não aproxima o rotacional dessa função adequadamente. São observados quase 10% de redução do erro relativo na aproximação da função (6.7) quando comparado ao valor de referência e 25% quando comparado ao uso do suporte predefinido.

Para efeito de comparação dos resultados, os valores dos erros relativos de aproximação da função (6.7) e seu rotacional são mostrados na tabela 6.3. O tempo de processamento também é medido e apresentado. Todas as funções de forma usadas na aproximação bem como o tipo de suporte utilizado aparecem na tabela. Na aproximação da função teste, todas as funções de forma, exceto a função de Nédélec, apresentam erro relativo menor quando o suporte arbitrário

é utilizado. Observa-se ainda que a escolha mais vantajosa, em termos de precisão, para se interpolar uma função usando o VNMM com suporte arbitrário é o uso da função de forma com base polinomial de primeira ordem completa.

Tabela 6.3: Erros relativos de aproximação da função teste (6.7) e seu rotacional

| Base da função de forma           | Método de escolha do suporte       | Erro de aproximação da função | Erro de aproximação do rotacional da função | Tempo de processamento em segundos |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---|------------------------------------|
| Nédélec de 1ª Ordem               | Predefinido                        | 0,0261*                       | 0,0371*                                     | 3,7453                             |
|                                   | Arbitrário (com correção de posto) | 0,0361                        | 1,3051                                      | 65,7692                            |
| Polinomial de 1ª Ordem Completa   | Predefinido                        | 0,0120                        | 0,0371                                      | 3,8411                             |
|                                   | Arbitrário                         | 0,0119                        | 0,4131                                      | 24,2502                            |
| Polinomial de 1ª Ordem Incompleta | Predefinido                        | 0,0166                        | 0,0371                                      | 3,8340                             |
|                                   | Arbitrário                         | 0,0153                        | 0,3737                                      | 25,5761                            |
| Radial                            | Predefinido                        | 0,0316                        | 6,9227                                      | 3,9837                             |
|                                   | Arbitrário                         | 0,0236                        | 6,3550                                      | 27,7754                            |

\* Valores de referência

## 6.5 Considerações Finais

Os resultados apresentados neste capítulo validam a utilização do VNMM na modelagem de problemas eletromagnéticos com campos vetoriais tridimensionais. Esta validação abre um leque de possibilidades de implementação deste método em diferentes dispositivos eletromagnéticos.

Observou-se que o VNMM, construído por qualquer função de base, tem uma taxa de convergência próxima a um para a aproximação de funções polinomiais e senoidais. Essa convergência linear, além de ser uma garantia de convergência da solução numérica, indica a redução do erro de aproximação na mesma proporção do refinamento da distribuição nodal no domínio.

As soluções dos problemas de valor de contorno deram luz ao fato de que o método não apresenta dificuldades na imposição das condições de contorno essenciais, interfaces e fontes. O método VNMM calculou corretamente os autovalores de uma cavidade e apresentou resultados idênticos aos obtidos pelo EFEM. A solução numérica não é corrompida por modos espúrios.

O método VNMM foi pioneiramente aplicado na aproximação de um problema não linear e mostrou-se eficaz na obtenção de campos tridimensionais apresentando resultados próximos ao valor de referência. As condições de contorno periódicas foram implementadas e os resultados mostraram que a sua utilização na redução da geometria trouxe expressivos ganhos na aproximação do campo.

Em termos de requisitos de memória, o VNMM é semelhante ao FEM, pois as matrizes têm o mesmo padrão de esparsidade. O VNMM requer mais tempo que o FEM para calcular a função de forma, pois não possui expressões analíticas fechadas. Este tempo é compensado por não precisar construir uma malha.

A interpolação de uma função utilizando o VNMM com suporte arbitrário foi bem sucedida. Além disso, mostrou-se que é possível modificar a base polinomial da função de forma VNMM com reduções no erro relativo de aproximação quando comparada à função tradicional. Os casos de singularidade motivaram o desenvolvimento de estratégias e ferramentas computacionais úteis no tratamento da singularidade e no desenvolvimento do método. A interpolação do rotacional, necessária para se aproximar os problemas de valor de contorno apresentados neste texto, ainda é um desafio. No entanto, há caminhos a serem explorados e estes são devidamente apresentados no próximo capítulo.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho, suas principais contribuições e as propostas de trabalhos futuros para continuação desta pesquisa.

Esta tese introduziu a construção das funções de forma do Método sem Malha Nodal Vetorial (VNMM) para aplicação em problemas de valor de contorno vetoriais em três dimensões. O VNMM é um método sem malha vetorial antes apenas explorado em problemas de guias de onda em duas dimensões e, por isso, muitos avanços puderam ser obtidos com o uso do VNMM 3-D na modelagem de dispositivos eletromagnéticos. A seguir, uma visão geral deste trabalho é apresentada a fim de se destacar os aspectos relevantes que levaram aos resultados obtidos.

### 7.1 Visão Geral

Os métodos sem malha são usados para evitar problemas numéricos e reduzir o esforço envolvendo a construção de malhas. Esses métodos são tradicionalmente usados para aproximar campos escalares, contudo, os problemas que envolvem campos eletromagnéticos são vetoriais e requerem que o método numérico tenha funções de base vetoriais. O Método sem Malha Nodal Vetorial, o VNMM, foi proposto como uma alternativa simplificada ao Método Sem Malha de Aresta, o EMM, para resolver problemas vetoriais sem a necessidade de construção de uma malha.

No VNMM, um conjunto de nós é distribuído sobre o domínio do problema e suas fronteiras de tal forma que exista um vetor unitário associado a cada nó. As funções de forma geradas são funções vetoriais e baseadas no espaço  $H(\text{curl})$ . Neste trabalho, seis nós de suporte foram usados para gerar as funções de forma em três dimensões. Quatro funções de bases distintas foram usadas para construir as funções de forma VNMM 3-D incluindo a

tradicional base de Nédélec de primeiro tipo. As funções de forma vetoriais do VNMM satisfazem a propriedade de projeção afim de impor as condições de contorno e interface de forma direta.

Os testes realizados com as funções de forma VNMM 3-D com suporte predefinido mostraram que a função com base de Nédélec é capaz de reproduzir qualquer combinação das funções vetoriais e constantes que estejam presentes na base da função de forma. As demais funções com base polinomial reproduziram funções constantes e monômios presentes na base. Os testes de convergência foram feitos utilizando funções teste polinomiais completas de primeiro e de segundo grau e também uma função senoidal. Todas as funções apresentaram taxa de convergência linear indicando garantia de convergência. Para o teste de convergência do rotacional apenas a função radial não convergiu. Todas as funções com base polinomiais apresentaram taxa de convergência do rotacional próximas a um.

As formulações variacionais para a aplicação do VNMM em problemas de autovalores e em problemas magnetostáticos foram apresentadas. Foram, então, solucionados um problema de autovalor, um problema de blindagem magnética, um problema com fonte de corrente e um problema magnetostático não-linear.

O problema de autovalor da cavidade retangular permitiu a validação da solução aproximada pelo VNMM mediante comparação com a solução analítica e também com o tradicional Método de Elementos Finitos de Aresta. Este problema também possibilitou verificar que a solução aproximada pelo VNMM não apresenta modos espúrios.

A solução dos problemas magnetostáticos permitiu aprofundar o uso do método e observar seu comportamento em diferentes situações. Em todos os casos houve convergência do método para a solução de referência. O método não apresentou descontinuidade tangencial nas interfaces nem dificuldades na imposição das condições de contorno já que as direções vetoriais associadas aos nós distribuídos nas fronteiras do domínio e nas interfaces são tangentes à respectiva fronteira ou interface. Além disso, os resultados também comprovaram a eficácia do método VNMM na modelagem de problemas magnetostáticos contendo fontes de corrente imposta.

As condições de contorno periódicas foram introduzidas e validadas no VNMM 3-D através da sua aplicação no problema TEAM 13. Este problema foi solucionado considerando a modelagem da geometria inteira, a modelagem de  $\frac{1}{2}$  geometria dada a simetria da estrutura e a modelagem de  $\frac{1}{4}$  da geometria dadas ambas simetria e periodicidade. A técnica de aproximações sucessivas, pioneiramente aplicada ao método, mostrou-se eficaz e eficiente no

tratamento da não linearidade do material. Por último, o aproveitamento da simetria e da periodicidade resultou em ganhos na aproximação do campo.

Nos problemas solucionados com o VNMM o domínio de suporte das funções de forma é predeterminado por uma estrutura de dados ou uma subdivisão espacial. No entanto, para maior versatilidade, o suporte arbitrário foi introduzido. A seleção dos nós para a obtenção de um domínio de suporte arbitrário foi feita através de um algoritmo de busca e seleção dos nós previamente montados em uma *kd-tree*.

Aproximações numéricas utilizando as funções de forma VNMM 3-D com um suporte escolhido arbitrariamente foram validadas através dos testes de convergência. A aproximação mediante a função de forma com base de Nédélec requer a aplicação de restrições na escolha dos nós de suporte. Contudo, é possível obter melhores resultados, com ganho de precisão e sem aplicação de restrições, utilizando as outras funções de forma construídas com as bases polinomiais e radial.

Para a aproximação dos problemas eletromagnéticos cujas formulações foram apresentadas no capítulo 5 é necessário que a função de forma com suporte arbitrário seja também capaz de aproximar o rotacional da função de teste. Contudo, a interpolação do rotacional apresentou erros locais elevados e a aproximação não convergiu. Entende-se que o caminho para se solucionar essa questão passa por identificar padrões geométricos, numéricos e/ou construtivos naqueles domínios de suporte que apresentam os maiores erros. Essa é, contudo, uma tarefa árdua em três dimensões dada a quantidade de variáveis envolvidas. Na seção 7.3 sugere-se, portanto, como continuidade deste trabalho, que essa análise seja feita primeiramente em 2-D.

O custo computacional não foi computado nessa tese, uma vez que o objetivo central é validar o VNMM 3-D e aplicá-lo na modelagem de problemas em 3-D.

## 7.2 Contribuições

Esta seção dedica-se a destacar pontualmente e sucintamente as contribuições inéditas deste trabalho:

1. Construção das funções de forma VNMM 3-D com base de Nédélec.
2. Construção das funções de forma VNMM 3-D com diferentes bases.
3. Aplicação do VNMM em problemas magnetostáticos.
4. Aplicação do VNMM em um problema não-linear.
5. Introdução e validação das condições de contorno periódicas no VNMM.
6. Introdução e validação do suporte arbitrário na aproximação VNMM.

### 7.3 Trabalhos Futuros

Com base nos resultados alcançados nesta pesquisa e apresentados neste texto de tese citam-se, a seguir, algumas possibilidades de continuidade e/ou aprimoramento do Método sem Malha Nodal Vetorial:

#### *1. Implementar o suporte arbitrário em 2-D*

Com o intuito de solucionar os problemas de interpolação do rotacional observados quando o suporte arbitrário é utilizado, sugere-se implementar o suporte arbitrário em 2-D. O objetivo seria a identificação de padrões geométricos, numéricos e/ou construtivos que possam estar relacionados aos erros. Os testes podem ser feitos no VNMM e, se necessário, também no EMM.

#### *2. Construir a função de forma VNMM 3-D baseadas em outros elementos de Nédélec*

Considerando a família de elementos de Nédélec introduzida em [19] é possível construir novas bases para as funções de forma VNMM 3-D aumentando, conseqüentemente, o número de nós de suporte. A função de forma baseada no prisma triangular seria construída com 9 nós de suporte e a função de forma baseada no cubo seria construída com 12 nós de suporte.

### *3. Construir a função de forma VNMM 3-D para ordens superiores*

No contexto do VNMM construir uma função de forma de ordem superior requer basicamente aumentar a ordem polinomial da função de base. Uma das vantagens do VNMM é que ele sempre atribui os graus de liberdade aos nós para qualquer ordem polinomial usada na base da função de forma. Além disso, aumentar a ordem polinomial da função de base não requer necessariamente um aumento no número de nós de suporte. No entanto, o aumento do número de nós de suporte pode requerer uma base polinomial de ordem superior. Essa última construção foi feita em 2-D por [15] e pode ser estudada e estendida para o 3-D.

### *4. Trabalhar com distribuições irregulares de nós em 3-D*

O VNMM 3-D aqui implementado trabalha com uma distribuição regular de nós, ou seja, o número de nós de suporte é invariável para as aproximações locais em todo o domínio do problema. Nas distribuições irregulares o número de nós de suporte pode variar de acordo com a subdivisão planar utilizada em 2-D [15]. Propõe-se, portanto, a criação de uma subdivisão volumétrica para trabalhar com distribuições irregulares em 3-D.

### *5. Aplicar o VNMM na solução de problemas que envolvam movimento*

Uma vez bem sucedida a aproximação do rotacional com suporte arbitrário é possível solucionar problemas eletromagnéticos que envolvam movimento, tais como as máquinas elétricas. A análise pode ser feita inicialmente em 2-D e posteriormente em 3-D observando, especialmente, o comportamento do método VNMM na interface móvel.

## Referências Bibliográficas

- [1] N. Z. Lima. *Métodos sem Malha Aplicados ao Eletromagnetismo: Formas Fracas Enfraquecidas e Funções de Forma Vetoriais*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- [2] J. Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc. - New York, NY, 2 ed., 2002.
- [3] F. Chinesta et al. *Natural Element Method for the Simulation of Structures and Processes*. Wiley, 2013.
- [4] R. P. da Silva. *Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas UFMG, 2012.
- [5] G. R. Liu. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, 2 ed. CRC Press, 2009.
- [6] D. Boffi, P. Fernandes, L. Gastaldi, and I. Perugia, *Computational Models of Electromagnetic Resonators: Analysis of Edge Element Approximation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 36, nº. 4, pp. 1264–1290, 1999.
- [7] W. L. de Nicomedes. *Mixed Meshfree Methods in Computational Electromagnetism: Mathematical Foundations and Problems in Wave Scattering*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- [8] Lima, N. and Mesquita, R. *Meshless Vector Radial Basis Functions With Weak Forms*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 53, nº. 6, pp. 1-4, 2017.
- [9] Lima, N. and Mesquita, R. *An Edge Meshless Method*. Annecy, France. Em: The 16th IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), 2014.
- [10] Lima, N. and Mesquita, R. *Edge Meshless Method Applied to Vector Electromagnetic Problems*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 53, nº. 6, pp. 1-4, 2017.

- [11] P. M. I. Silva, R. C. Mesquita, and N. Z. Lima. *New Vectorial  $H$  (curl) Shape Functions for the Edge Meshless Method*. IET Science, Measurement & Technology, vol. 12, n°. 6, pp. 821–828, 2018.
- [12] L. A. G. Ortiz, R. C. Mesquita, N. Z. Lima. *Creating higher order vector shape functions based on  $H(\text{curl})$  for the edge meshless method*. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 35(11), 1511–1528, 2021.
- [13] L. A. G. Ortiz, R. C. Mesquita, N. Z. Lima. *Nodal Meshless Method with vectorial shape functions based on  $H(\text{curl})$* . IEEE Transactions on Magnetics, vol. 57, n°. 6, pp. 1-4, 2021.
- [14] J. Keränen, A. Manninen, J. Pippuri. *Multi-physics simulations for electrical machine development*. VTT Technical Research Centre of Finland, 2015.
- [15] L. A. G. Ortiz. *Método sem malha nodal utilizando funções de forma vetoriais baseadas em  $H(\text{curl})$* . Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, 2023.
- [16] A. Chauhan, et al. *A review on methods to simulate three dimensional rotating electrical machine in magnetic vector potential formulation using edge finite element method under sliding surface principle*. J Numer Model, 35(1):e2925, 2022.
- [17] International Compumag Society. *Testing electromagnetic analysis methods (T.E.A.M.)*. Disponível em: <http://www.compumag.org/jsite/team.html>, Acesso em: 03/03/2022.
- [18] J. C. Nedelec. *Mixed finite elements in  $R^3$* . Numer. Math., vol. 35, n°. 3, pp. 315–341, 1980.
- [19] J.C. Nédélec. *A New family of Mixed Finite Elements in  $IR^3$* . Numer. Math., vol. 50, pp. 57-81, 1986.
- [20] G. R. Liu, et. al. *A meshfree radial point interpolation method (RPIM) for three-dimensional solids*. Comput Mech, vol.36: 421–430, 2005.
- [21] V. Shapiro, I. Tsukanov. *Meshfree simulation of deforming domains*. Computer-Aided Design, 31 459–471, 1999.
- [22] J. L. Bentley. *Multidimensional binary search trees used for associative searching*, Commun. ACM, vol. 18, n°. 9, pp. 509–517, 1975.
- [23] M. de Berg, et. al. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. 3 ed, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [24] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- [25] R. Albanese G. Rubinacci. *Finite Element Methods for the Solution of 3D Eddy Current Problems*. Advances in Imaging and Electron Physics, vol. 102, 1998.

- [26] H. Duan et. al., *A delta-regularization finite element method for a double curl problem with divergence-free constraint*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 50, n°. 6, pp. 3208-3230, 2012.
- [27] G. H. Golub, C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. 2 ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.
- [28] D. N. Arnold, R. S. Falk, R. Winther. *Multigrid in  $H(\text{div})$  and  $H(\text{curl})$* . Numer. Math., pp. 197-218, 2000.
- [29] T. Nakata et al. *Periodic boundary condition for 3-D magnetic field analysis and its applications to electrical machines*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, n°. 6, 1988.
- [30] P. Olszewski. *Expansion of periodic boundary condition for 3-D FEM analysis using edge elements*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, n°. 2, 1992.
- [31] E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. *Periodic boundary conditions in element free Galerkin method*. Em: The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering (COMPEL), 28(4): 921- 933, 2009.
- [32] MATLAB Tutorial. *The Language of Technical Computing*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/>. Acesso em: 05/08/2021.
- [33] GMSH: *open source 3D finite element mesh generator*. Disponível em: <https://gmsh.info/>. Acesso em: 06/04/2021.
- [34] R. F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE Press, 2001.
- [35] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: Wiley, 1999.
- [36] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

# Apêndice A

## Equações de Maxwell

Neste apêndice são apresentadas as Equações de Maxwell no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência bem como suas relações constitutivas para representação de campos eletromagnéticos.

### A.1 Equações de Maxwell no Domínio do Tempo

Neste apêndice são apresentadas as Equações de Maxwell no Domínio do Tempo e suas relações constitutivas para representação de campos eletromagnéticos variáveis no tempo e espaço [34]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

As relações constitutivas descrevem as propriedades macroscópicas do meio tais que [34]:

$$\vec{B} = \mathcal{B}(\vec{H}) \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{D} = \mathcal{D}(\vec{E}) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{J} = \mathcal{J}(\vec{E}) \quad (\text{A.7})$$

Para um meio homogêneo, linear e isotrópico, as relações constitutivas (A.5) - (A.7) tomam a forma particular [34]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{A.10})$$

onde:

$\vec{E}$  = Intensidade de campo elétrico (V/m)

$\vec{D}$  = Densidade de fluxo elétrico ou Deslocamento elétrico (C/m<sup>2</sup>)

$\vec{H}$  = Intensidade de campo magnético (A/m)

$\vec{B}$  = Densidade de fluxo magnético (W/m<sup>2</sup>)

$\vec{J}$  = Densidade de corrente elétrica (A/m<sup>2</sup>)

$\vec{J}_s$  = Densidade de corrente elétrica imposta ou termo fonte (A/m<sup>2</sup>)

$\rho$  = Densidade de carga elétrica (C/m<sup>3</sup>)

$\epsilon$  = Permissividade elétrica (F/m)

$\mu$  = Permeabilidade magnética (H/m)

$\sigma$  = Condutividade elétrica (S/m)

$t$  = tempo

## A.2 Equações de Maxwell no Domínio da Frequência

Neste apêndice são apresentadas as Equações de Maxwell no Domínio da Frequência e suas relações constitutivas para representação de campos eletromagnéticos harmônicos no tempo.

Quando os campos variam senoidalmente com uma única frequência, os campos são chamados harmônicos no tempo. Usando a notação fasorial complexa, as equações de Maxwell podem ser escritas como [2]:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.14})$$

As relações constitutivas descrevem as propriedades macroscópicas do meio considerado. Para um meio homogêneo, linear e isotrópico elas são [34]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{A.17})$$

onde:

$\vec{E}$  = Intensidade de campo elétrico (V/m)

$\vec{D}$  =Densidade de fluxo elétrico (C/m<sup>2</sup>)

$\vec{H}$  =Intensidade de campo magnético (A/m)

$\vec{B}$  =Densidade de fluxo magnético (W/m<sup>2</sup>)

$\vec{J}$  =Densidade de corrente elétrica (A/m<sup>2</sup>)

$\vec{J}_s$  = Densidade de corrente elétrica imposta ou termo fonte (A/m<sup>2</sup>)

$\rho$  =Densidade de carga elétrica (C/m<sup>3</sup>)

$\epsilon$  =Permissividade elétrica (F/m)

$\mu$  =Permeabilidade magnética (H/m)

$\sigma$  =Condutividade elétrica (S/m)

$\omega$  =Frequência angular

## Apêndice B

### Transformação Geométrica 3-D

Neste apêndice é apresentada uma transformação geométrica em 3-D que pode ser utilizada para evitar singularidades na construção das matrizes de função de forma. No VNMM 2-D a singularidade da matriz  $\alpha$  pode ser evitada através de transformações geométricas simples [15]. A técnica de transformação geométrica pode ser estendida para o VNMM 3-D conforme apresentado nesta seção. Para isso, escolhe-se, arbitrariamente, um dos nós do domínio de suporte, leva-o à origem do sistema de coordenadas e, então, gira-o em torno da origem de tal forma que a direção associada ao nó coincida com um dos eixos do sistema de coordenadas. As coordenadas homogêneas são utilizadas de modo que as transformações possam ser representadas matricialmente. Assim, qualquer ponto de coordenadas homogêneas  $\mathbf{x}$  ( $x, y, z, 1$ ) no sistema de coordenadas original pode ser representado neste novo sistema translado e rotacionado pelo ponto  $\mathbf{x}'$  ( $x', y', z', 1$ ) tal que:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{C}(x_1, y_1, z_1) \mathbf{x} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\mathbf{C}(x_1, y_1, z_1)$  é a matriz de transformação que será desenvolvida a seguir.

Sejam as coordenadas do nó  $n_1$  ( $x_1, y_1, z_1$ ) pertencente a um dado domínio de suporte cujas coordenadas homogêneas são dadas por  $n_1(x_1, y_1, z_1, 1)$ . Para levar esse nó à origem utiliza-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{T}(x_1, y_1, z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

onde  $T$  é chamada matriz de translação. Para realizar a rotação toma-se o vetor unitário associado ao nó  $n_1$ ,  $\vec{t}_1 = t_{1x}\hat{x} + t_{1y}\hat{y} + t_{1z}\hat{z}$  e mais outros dois vetores unitários perpendiculares entre si e a  $\vec{t}_1$  tal que:

$$\begin{aligned}\vec{r}_3 &= r_{3x}\hat{x} + r_{3y}\hat{y} + r_{3z}\hat{z} = \vec{t}_1 \\ \vec{r}_2 &= r_{2x}\hat{x} + r_{2y}\hat{y} + r_{2z}\hat{z} = \frac{\vec{t}_1 \times \hat{x}}{|\vec{t}_1 \times \hat{x}|}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

$$\vec{r}_1 = r_{1x}\hat{x} + r_{1y}\hat{y} + r_{1z}\hat{z} = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3$$

A rotação é escolhida de tal forma que o vetor  $\vec{t}_1$  coincida com o eixo  $\hat{z}$ . Esses três vetores unitários definidos por (B.3) podem ser usados diretamente para construir a matriz de rotação  $R$ , tal que:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & 0 \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} & 0 \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (\text{B.4})$$

onde a submatriz superior 3x3 é ortonormal e representa um sistema de coordenadas local.

Há exceções na montagem da matriz de rotação  $R$  nos casos em que  $\vec{t}_1$  coincida com os eixos  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  ou  $\hat{z}$ . Se  $\vec{t}_1 = 1\hat{z}$ , a matriz  $R$  é a matriz identidade e não é necessária nenhuma rotação. No entanto, se  $\vec{t}_1 = 1\hat{x}$  é necessário girar em torno de  $\hat{y}$  para que o eixo  $\hat{x}$  coincida com o eixo  $\hat{z}$ . Assim a matriz  $R$  torna-se:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (\text{B.5})$$

Neste sentido se  $\vec{t}_1 = 1\hat{y}$  é necessário girar em torno de  $\hat{x}$  para que o eixo  $\hat{y}$  coincida com o eixo  $\hat{z}$ , ou seja:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

A matriz de transformação completa, ou seja, translação seguida de rotação, pode então ser calculada pelo produto:

$$\mathbf{C}(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{RT} = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & (-x_1 r_{1x} - y_1 r_{1y} - z_1 r_{1z}) \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} & (-x_1 r_{2x} - y_1 r_{2y} - z_1 r_{2z}) \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} & (-x_1 r_{3x} - y_1 r_{3y} - z_1 r_{3z}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Uma vez transformada as coordenadas dos nós e as direções vetoriais para esse novo sistema de coordenadas, efetua-se o cálculo dos coeficientes  $\beta_i$  e das funções de forma  $\bar{N}_i$  neste novo sistema de coordenadas. Em seguida é feita a transformação inversa que consta da rotação inversa seguida da translação inversa.

Como a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é ortogonal, sua inversa é a sua transposta, portanto:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & 0 \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} & 0 \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Já a translação de volta às coordenadas originais do nó  $n_1(x_1, y_1, z_1)$  é dada por:

$$\mathbf{T}^{-1}(x_1, y_1, z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +x_1 \\ 0 & 1 & 0 & +y_1 \\ 0 & 0 & 1 & +z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Logo:

$$\mathbf{C}^{-1}(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & x_1 \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} & y_1 \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

E o retorno de qualquer ponto  $\mathbf{x}$  ao sistema de coordenadas original é dado por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}(x_1, y_1, z_1) \mathbf{x}' \quad (\text{B.11})$$