

**Espalhamento Fóton-Fóton: Ambiguidades e Seção de
Choque**

Gabriel Fagundes Camargo

2013



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

Espalhamento Fóton-Fóton: Ambiguidades e Seção de Choque

Gabriel Fagundes Camargo

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Co-orientadora: Prof. Dr^a. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de título de Mestre em Física

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos

“Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa.”

Guimarães Rosa em “Grande Sertão: Veredas”

Agradecimentos

Agradeço imensamente a todos que estiveram do meu lado e contribuíram comigo e com toda essa busca. O mundo é construído por interações; sendo assim, o presente trabalho teve de contar com muitas pessoas para ser realizado, e sou profundamente grato à todas elas. Como a corrida é rápida e a memória é falha, certamente esquecerei de citar gente importante aqui, mas com certeza lembrarei sempre comigo.

A meus pais, Sandra e José Luiz, com quem sempre pude contar, pela força, honestidade, conselhos, e pelo modo mais humano e ético de ver a vida. Aos meus avós, Aparecida e Lindolfo, pela força e incentivo essenciais para o início dessa carreira. Às minhas irmãs, Ana Luiza, Isabela e Daniele, por sempre estarem presentes. A toda minha família. Devo uma lembrança especial para meu avô Lindolfo, cuja contribuição foi uma das mais importantes, e tia Madrinha, cujo incentivo eu aprecio bastante.

Aos meus orientadores. Ao Marcos pela oportunidade e conselhos. À Carolina, pelo exemplo de garra e de vontade com a física. Também ao Cabral, que sempre teve disposição para minhas dúvidas, e pela grande e valiosa biblioteca.

Ao Departamento de Física da UFMG. Especialmente àqueles professores que têm a vontade de contribuir para uma boa formação dos discentes. E também a todos os funcionários responsáveis por manter a excelência do departamento. Aos representantes discentes e docentes, que merecem os devidos cumprimentos pela essencial contribuição. A todo o pessoal da biblioteca; à Shirley, exemplo de pessoa, sempre disposta, por toda ajuda com o acervo e outras questões. À Clarisse, que me acolheu bem e sempre ajudou a mim e a todo o departamento. À Marluce e Michele, por todo tipo de esclarecimentos e ajudas.

Aos meus amigos da Física. Ao grupo de TQC pela amizade, unidade e valiosos conhecimentos: Alex, Jean, Helvécio, Júnior, Yuri, Arthur, Gazzola, Joilson. E também fora

do grupo: Natalia Moller, sempre amiga e companheira. Jonas (Gandhi), pelas conversas de física a filosofia, passando pelo mercado de trabalho e música, e também importante companheiro no colegiado, entre outras tantas. Lucas Mussnich, pelo exemplo de fraternidade e profissionalismo. Aos que estavam comigo na organização dos seminários dos alunos, e também pela amizade: Ligia Parreira e Henrique Limborço. Ao Aloísio pelo exemplo de humanidade. A Elvis Cano, Edith e Victoria, pela amizade. Aos amigos, companheiros e conviventes Júlia Roquette, Mario Mazzoni, Barbara Rosa, Roberto Shiguera, Bárbara Costa, Rodolfo, Érico, Gilberto, Marcos, Ana, Mychel, Fábio, Gláucia, Karoline, Campolina, Tiago Grasio, Daniel, Mangos, Regiane, Leandra *et al.*

Aos meus amigos de Divinópolis que também compartilharam e foram fundamentais nessa etapa. À Turma do Bizio mais Lucas Milher, especialmente ao Gabriel Arruda, pela boa convivência todo esse tempo e que não reclamou muito de eu sempre usar a mesa grande. À república Engenho, especialmente a Pedro Poeta e Gabriel, pelo acolhimento. À família Tai Lau Chuan, pela fraternidade.

Ao colégio Roberto Carneiro, que me preparou bem a educação básica.

À CAPES, pelo suporte financeiro, e também ao governo brasileiro e toda a nação.

A você, leitor.

E a muitos outros.

Enfim, como a gente é mais uma obra frankensteiniana do que uma peça original, o presente trabalho tem contribuições em diversos níveis de todas as pessoas acima.

"[...]

Eu adoro todas as coisas

E o meu coração é um albergue aberto toda a noite.

Tenho pela vida um interesse ávido

Que busca compreendê-la sentindo-a muito.

Amo tudo, animo tudo, empresto humanidade a tudo,

Aos homens e às pedras, às almas e às máquinas,

Para aumentar com isso a minha personalidade.

Pertenço a tudo para pertencer cada vez mais a mim próprio

E a minha ambição era trazer o universo ao colo

Como uma criança a quem a ama beija.

Eu amo todas as coisas, umas mais do que as outras,

Não nenhuma mais do que outra, mas sempre mais as que estou vendo

Do que as que vi ou verei.

Nada para mim é tão belo como o movimento e as sensações.

A vida é uma grande feira e tudo são barracas e saltimbancos.

Penso nisto, enternoço-me mas não sossego nunca.

[...]"

Acordar, de Álvaro de Campos

Resumo

Neste trabalho calculamos a seção de choque para o espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ de uma maneira independente de regularização, através do método da Regularização Implícita, e comparamos o resultado obtido com análises prévias. Tais cálculos possuem qualidades matemáticas e físicas que os tornam intrigantes. O problema é caracterizado por uma amplitude de espalhamento finita, como requiere a invariância de calibre, mas que necessita de um método de regularização nos passos intermediários, trazendo ambiguidades intrínsecas. Nós mostramos que tais ambiguidades são resolvidas tendo como base a invariância de rótulo, que por sua vez está relacionada aos termos de superfície — que são termos originados da diferença finita de duas integrais com o mesmo grau de divergência — e à simetria de calibre.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos, Espalhamento Fóton-Fóton, Regularização Implícita, Ambiguidades

Abstract

In this paper we calculate the $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ scattering cross section in a regularization independent fashion, through Implicit Regularization scheme, and compare our result with previous analyses. These calculations possess many interesting physical and mathematical features. It is characterized by a finite total amplitude, as required by gauge invariance, which nevertheless needs a regularization scheme in the intermediate steps which brings in intrinsic ambiguities. We show that such ambiguities are fixed on momentum routing invariance grounds which in turn are related to surface terms — which appear by the finite difference of two integrals with the same level of divergence — and gauge symmetry.

Keywords: Quantum Field Theory, Photon-Photon Scattering; Implicit Regularization; Ambiguities

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
1 Introdução	1
2 Teorias Quânticas de Campos e a Eletrodinâmica Quântica	7
2.1 A Teoria Quântica Não-Relativística	7
2.2 A Equação de Dirac	8
2.3 A Densidade de Lagrangeana e o Campo de Klein-Gordon	10
2.4 Quantizando o Campo de Dirac	14
2.5 Sobre a Dinâmica de Emissão e Absorção de Radiação, a Invariância de Ca- libre e a Lagrangeana da QED	15
2.6 Quantização do Campo de fótons	17
2.7 A Dinâmica em TQC	21
2.8 Regras de Feynman para a QED	24
2.9 Processos de Espalhamento	26
3 A Regularização Implícita	29
3.1 Divergências em TQC	29
3.2 Técnicas de Regularização	31
3.3 Regularização Implícita	32
3.4 Avaliando os Termos de Superfície	34
3.5 Exemplo I: O Tensor de Polarização do Vácuo na QED	36
3.6 Exemplo II: O Tadpole	38

4 A Amplitude do Espalhamento Fóton-Fóton	40
4.1 A Seção de Choque Diferencial: Cálculo de M_a	44
4.2 Seção de Choque Despolarizada	48
5 Resultados e Conclusões	49
A A representação de Schrödinger, Heisenberg e de Interação	50
B Cálculo da Amplitude Despolarizada	52
B.1 Desenvolvendo Produtos	52
B.2 O Algoritmo	53
Referências Bibliográficas	73

Capítulo 1

Introdução

Logo após a finalização da estrutura formal da mecânica quântica, em 1926, houve tentativas de construir uma teoria quântica covariante (invariante a transformações de Lorentz) que respeitasse os princípios da relatividade especial. Por teoria quântica podemos dizer toda teoria que tem como ponto de partida os elementos axiomáticos e interpretativos da mecânica quântica, com seus observáveis, seu espaço de estados, regras de comutação etc. Dado o sucesso da versão não-relativística da teoria, logo deu-se início a procura de hamiltonianos que levassem à equações de movimento covariantes, e o primeiro a conseguir conciliar satisfatoriamente todos esses princípios foi Dirac[1], já em 1928, com a equação que leva seu nome e que forneceu uma descrição para o comportamento dos elétrons. Essa teoria continha com vários pontos fortes, pois conseguiu fornecer um entendimento *a priori* sobre o spin do elétron (e então sobre o fenômeno que ele chamou de dupplexidade, devido ao fato que havia o dobro de estados estacionários para um elétron no átomo do que se previa) e a explicar corretamente as correções para os níveis de energia atômicos provenientes do termo de Darwin. Nesse contexto, a radiação ainda era tratada como um campo clássico por Dirac, mas já havia tentativas bem sucedidas de quantização do campo eletromagnético. Iniciada com Einstein, em sua explicação para o efeito fotoelétrico, a ideia de que a luz se compor-

tava como uma partícula quântica foi desenvolvida, dentro de um escopo matemático, por Heisenberg, Jordan e outros, e até mesmo por Dirac, em meados da década de 1920 (veja por exemplo [2] e [3]); o ponto principal era quantizar os modos do campo eletromagnético com operadores de criação e aniquilação.

A princípio houve uma queda de braço entre analisar a equação de Dirac do ponto de vista de que descrevia a evolução da função de onda de uma só partícula, que era o ponto de vista defendido por Dirac, e do ponto de vista que era uma equação para um campo quântico, em analogia com a quantização do campo eletromagnético, uma entidade que descreve um sistema de múltiplas partículas e sua evolução no tempo. Já do ponto de vista de Dirac, sua equação descrevia a evolução do estado quântico do elétron, mas essa interpretação continha alguns problemas. Existiam soluções para a equação de movimento cujas energias eram negativa e sem um limite inferior. Não se podia simplesmente eliminar tal soluções porque eventualmente a dinâmica do sistema levaria um estado quântico inicial à um daqueles. Dirac, então, foi obrigado a postular a existência de um "mar de elétrons" que ocupava esses infinitos estados; os elétrons observados por nós eram apenas as soluções de energia positiva. Podemos notar, inclusive, que a predição do pósitron se deu no contexto de Dirac, em 1931[4] e essa partícula surgia quando um elétron do "mar" saltava para um estado de energia positiva, deixando um "buraco", que se comportava como um elétron de carga contrária, que a de início a tentaram relacionar com o próton, mas cuja massa se revelou sendo necessariamente idêntica à do elétron. A comprovação experimental da existência do pósitron se deu um ano após sua previsão. Foi nesse contexto da teoria dos buracos que foi feita a primeira hipótese, por Halpern [5] em 1932, que a luz poderia induzir uma polarização no vácuo, o que seria responsável, em mais altas ordens, por produzir um espalhamento da luz pela própria luz.

No fim do embate, venceu a interpretação de campos, devido a sua conveniência na utilização. Os problemas e propostas eram resolvidos na base de teorias de perturbação e, às mais baixas ordens, que chamamos de cálculos a nível árvore (devido a semelhança de sua representação em diagramas de Feynman), tudo se mostrava coerente. O problema ocorre quando se passa aos cálculos das perturbações de mais alta ordem porque, ao invés de encontrarmos pequenas correções, muitas vezes encontramos integrais que divergem. Tentou-se se livrar desse infinitos de duas maneiras: propriamente eliminando-os — atra-

vés da inserção de novas interações, o que dava certo para cálculos de auto-energias em mais baixa ordem — e contornando-os, fazendo uma redefinição dos parâmetros da teoria, o que chamamos de renormalização. No contexto de diagramas de Feynman, a aparecer em 1950, as divergências aparecem onde se encontram integrações sobre momentos internos de partículas virtuais, que são virtualmente geradas e destruídas no meio do processo. Elas divergem tanto para pequenos valores dos momentos internos (limite inferior da integral), que chamamos de divergências no infravermelho, quanto para grandes valores, chamadas divergências no ultravioleta. Tal "defeito" da teoria (o que hoje talvez seja uma benção) foi alvo de grades discussões e de um certo descrédito que se tomou entorno dessa empreitada teórica. Apesar de tudo, também a eletrodinâmica clássica foi sempre embebida em infinitos, e tal característica em teoria de campos não causou o abandono da abordagem. As primeiras ideias de renormalização apareceram em meados da década 1930, surgindo aí uma área particular de estudos dentro de teoria de campos. A teoria da renormalização resolvia o problema das divergências afirmando que os parâmetros da teoria, como carga e massa, seriam renormalizáveis, absorvendo os infinitos que apareciam. Ou seja, a carga e massa efetivas do elétron poderiam variar com algum parâmetro de escala, que hoje relacionamos à energia do processo. A renormalização permitiu que a teoria quântica de campos fornecesse as medidas mais precisas feitas pelo homem, como o valor do momento magnético do elétron.

A teoria da renormalização conta com uma etapa que se chama regularização. Nessa etapa, isolamos e classificamos as divergências em termos convenientes e de modo a explicitar o que será renormalizado depois. Existem vários métodos de regularização: regularização dimensional, por *cut-off*, Pauli-Villars, redução dimensional etc.

Os diferentes métodos de regularização devem preservar características essenciais da teoria em questão, como acontece, por exemplo, na regularização dimensional (DReg) ou regularização de Pauli-Villars em processos da Eletrodinâmica Quântica. Mas não é sempre que se vê coerência nos cálculos, devido à complexidade, extensão e sutilezas envolvidas no estudo da renormalização. Um método bastante empregado que frequentemente aparece associado à quebra de simetrias é a regularização por *cut-off*, cuja prescrição nos faz com que as integrais sejam avaliadas até certo valor de momento, o que já imediatamente não é uma postura covariante. Além do mais, à medida que as teorias se tornam mais complexas com mais dimensões, ou simetrias não triviais, como supersimetria ou simetria quiral, nós encon-

tramos algumas dificuldades na regularização das amplitudes a fim de se obter resultados que não são ambíguos e que respeitam as simetrias originais da Lagrangeana. Por exemplo, existem problemas associados à continuação dimensional da matriz γ_5 e tensores $\epsilon_{\mu\nu\dots}$. Assim, um dos nossos objetivos nesse trabalho é empregar uma recente proposta que lida muito bem com esses problemas: a regularização implícita (IReg). Nesse método, os infinitos são tratados algebricamente, não sendo necessário regularizar de fato uma integral divergente, i.e., torná-la finita através de uma redefinição dos limites de integração, de modificar o integrando das amplitudes originais ou usar de uma continuação analítica do número de dimensões do espaço-tempo da teoria. Isso torna o método independente de regularização, e qualquer regularização coerente deveria respeitar as análises e resultados da IReg.

Na segunda etapa do processo de renormalização, buscamos incluir tais infinitos em uma redefinição dos parâmetros da teoria (massa, carga etc.), e é onde estes adquirem a dependência com um parâmetro de escala.

A regularização implícita — que abreviaremos por IReg — busca uma solução mais natural para o problema das divergências, deixando-o para última análise. A amplitude de um determinado processo pela prescrição da IReg deve ser expressa em três partes. A primeira parte é finita e livre de causar qualquer discórdia. A segunda seriam integrais divergentes básicas padrão que, quando necessário, seria a parte a se renormalizar através dos parâmetros da teoria. A terceira componente seriam termos de superfície que se originam da diferença finita de duas integrais com o mesmo grau de divergência, e é precisamente nesses termos que surgem ambiguidades, ou seja, termos finitos que não são definidos *a priori* pela Lagrangeana da teoria. Tais termos são altamente dependentes de regularização. O que a regularização implícita faz não é tentar avaliar a integral correspondente ao termo de superfície, mas sim avalia-lo *ad hoc* com base no que a simetria da teoria diz que ele deve ser. Pode-se usar qualquer simetria para fixar seus valores: a simetria de calibre, simetria de escala, invariância de rotulo etc. Esse método vem sendo desenvolvido há mais de uma década e tem se mostrado bastante coerente e útil em diversas aplicações. Uma discussão interessante sobre esse tipo de abordagem foi feita por R. Jackiw[6].

O problema tratado nesta dissertação é o espalhamento fóton-fóton $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ no contexto da Eletrodinâmica Quântica(QED). A QED é a teoria que explica o comportamento de elétrons, e outros férmions de spin 1/2, fótons e as interações entre eles. Ela é o modelo

para se construir outras teorias, como a força eletrofraca e o modelo padrão da física de partículas.

O problema do espalhamento em questão tem características bastante interessantes, tanto do ponto de vista matemático como físico. Ele pode ser representado pelo diagrama de Feynman a seguir:

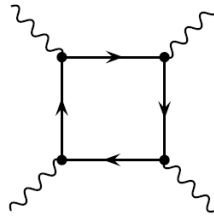


Figura 1.1: Diagrama de mais baixa ordem que contribui para o espalhamento.

O que acontece é que ele possui divergências em suas amplitudes parciais mas, por outro lado, ele deve representar uma contribuição total finita. Essa finitude faz com que esse cálculo seja muito sensível a ambiguidades e, como veremos, diferentes cálculos podem resultar em diferentes ordens de grandeza. Outra característica interessante é o fato de ele ser responsável pela inserção de um termo efetivo não linear na Lagrangeana clássica do eletromagnetismo, que representaria uma interação efetiva entre diferentes campos eletromagnéticos.

O cálculo desta amplitude está presente em diversos trabalhos, sendo que o primeiro que se têm notícia, após a sugestão por parte de Halpern citada acima, consta de artigos de estudantes orientados pelo próprio Heisenberg, em 1935 e 1936, feitos por H. Euler e B. Kockel[7][8]. Eles lançaram mão da Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg para o feito. O primeiro artigo nos fornece uma ordem de grandeza para o espalhamento, e já se vê claramente que a seção de choque em questão é muito pequena. O segundo trabalho faz um cálculo explícito. Já no contexto de diagramas de Feynman, foram R. Karplus e M. Neuman que lidaram com este problema, em dois artigos[9][10]. Para lidar com as divergências, eles usaram a regularização de Pauli-Villars. No primeiro trabalho, eles fizeram uma análise do problema para várias energias de espalhamento, e também encontraram a Lagrangeana de Euler-Heisenberg. No segundo trabalho, eles trabalharam sobre o espalhamento de dois fótons, incluindo também variações sobre o tema, como espalhamento por um campo externo. No que concerne ao espalhamento fóton-fóton, eles foram capazes de encontrar a seção de

choque para baixas energias:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{139\alpha^4}{(180\pi)^2 m^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 (3 + \cos^2\theta)^2. \quad (1.1)$$

Em 1977, o mesmo cálculo foi feito utilizando a recente proposta da regularização dimensional, e foi encontrado a mesma resposta. Porém, recentemente, este resultado foi questionado[11], propondo a seguinte seção de choque:

$$\frac{d\sigma_{FK}}{d\Omega} = \frac{\alpha^4}{(12\pi)^2 \omega^2} (3 + 2\cos^2\theta + \cos^4\theta). \quad (1.2)$$

Esse trabalho foi o começo de uma série de trabalhos sobre a questão. O primeiro a aparecer foi um tutorial sobre o espalhamento fóton-fóton, argumentando que a proposta em [11] estava incorreta. O autor também calcula o caminho livre médio para fótons em um fundo de microondas para ambas as seções de choque e verifica que a recente proposta prevê um caminho livre muito pequeno para os fótons, da ordem da orbita de Júpiter. Em 2012, surgiu um trabalho [12] sobre a possibilidade de medir o espalhamento, com pulsos gaussianos de laser de potência 10 PW, gerando sinais detectáveis. Enfim, uma análise independente do método de regularização serviria para dar um ponto final à questão.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 há uma discussão sobre as motivações iniciais sobre a teoria quântica de campos (TQC), passando pela eletrodinâmica quântica, diagramas de Feynman e processos de espalhamento. No capítulo 3, discuto sobre as divergência em TQC, discutindo os métodos para contornar este problema, e principalmente o método utilizado neste trabalho: a regularização implícita. No capítulo 4 é feita a conta sobre a seção de choque do espalhamento fóton-fóton, e no capítulo 5 são resumidos os resultados. No apêndice A apresento as diferentes representações da mecânica quântica. No apêndice B, apresento um jeito útil de organizar as contas com vários termos e o cálculo computacional da amplitude.

Neste trabalho usaremos o sistema de unidades naturais, com $\hbar = c = 1$. Usamos também $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1; -1; -1; -1)$.

Capítulo 2

Teorias Quânticas de Campos e a Eletrodinâmica Quântica

Neste capítulo explico brevemente a passagem da teoria quântica não relativística para a relativística, tendo em vista os conceitos fundamentais necessários e a busca por uma equação quântica covariante, isto é, invariante por transformações de Lorentz. A equação proposta por Dirac para descrever o movimento dos elétrons estava intimamente relacionada aos paradigmas aqui representados pela mecânica quântica de Schrodinger, Heisenberg e outros. Em seguida, exploro a simplicidade da quantização de um campo escalar e, logo após, a quantização da eletrodinâmica.

2.1 A Teoria Quântica Não-Relativística

A teoria quântica não relativística esta assentada no conceito de estado físico e de sua evolução no tempo. Na representação (cenário) de Schrodinger, o estado $|\psi\rangle$ de um sistema é um objeto matemático que fornece todas as informações possíveis sobre observáveis que podemos obter, como energia e momento. Sua evolução no tempo, e conseqüentemente das

suas propriedades, são governadas por um Hamiltoniano segundo a equação

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (2.1)$$

e podemos associar as seguintes interpretações à função de onda correspondente:

densidade de carga

$$\rho = -e\psi^*\psi, \quad (2.2)$$

densidade de corrente

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (2.3)$$

densidade de energia

$$u = \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi. \quad (2.4)$$

É de grande importância também a seguinte regra de comutação:

$$[p, q] = i, \quad (2.5)$$

em que p e q são as variáveis canônicas de posição e momento associadas ao hamiltoniano.

A mecânica quântica de Schrödinger, depois de se mostrar sua equivalência com a mecânica matricial de Heisenberg, e adicionando a interpretação probabilística de Born sobre a função de onda, se tornou a principal abordagem para a descrição do comportamento das partículas conhecidas (a saber, quando a teoria se completou, havia apenas a noção da existência de elétrons e prótons, como partículas supostamente elementares).

Vale notar que Jordan e Klein mostraram, em 1927, que a mecânica quântica de um sistema de n partículas idênticas obedecendo a estatística de Bose-Einstein podia ser obtida interpretando a função de onda como um operador que obedece à lei de comutação análoga à (2.5), mas para sistemas contínuos.

2.2 A Equação de Dirac

A famosa equação de Dirac, proposta em 1928, veio nesse contexto, como uma equação de onda relativística para o elétron. Como pontos muito fortes, ela continha uma explicação teórica para o spin (e portanto o momento magnético) e também explicou a estrutura fina do átomo de hidrogênio.

A busca pela equação se inicia na formula para a energia relativística livre $E^2 = m^2 + p^2$, que pode ser escrita como:

$$-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0, \quad (p_0 \equiv E), \quad (2.6)$$

e depois buscar uma equação que é de primeira ordem na energia. Isso porque, para quantizarmos o sistema, aplicamos a prescrição da "primeira"quantização, que seria apenas a substituição dos valores de momento e energia por

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}; \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad (2.7)$$

e, portanto, buscamos uma equação que contém a primeira derivada no tempo, o que convém à uma interpretação probabilística da função de onda. Também deve ser uma equação de primeira ordem nas variáveis espaciais, para garantir a invariância de Lorentz. A equação desejada deve ter a seguinte forma:

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta)\psi = 0 \quad (2.8)$$

e de tal maneira que

$$(-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) = (-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta)(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) = 0 \quad (2.9)$$

A equação acima só pode ser satisfeita se considerarmos uma álgebra não comutativa, que pode ser representada com matrizes 4×4 : as matrizes γ . Elas satisfazem as seguintes regras de anti-comutação:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

e, também, a condição de hermiticidade

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.11)$$

Finalmente, a equação de Dirac se lê (note a soma implícita ao índice de Lorentz μ):

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \psi(x) = 0, \quad (2.12)$$

cuja densidade de Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \psi(x). \quad (2.13)$$

cujas soluções são os quadriespinores de Dirac:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

E temos, em analogia com a versão não relativística da mecânica quântica, as quantidades: densidade de carga

$$\rho = q\psi^\dagger(x)\psi(x), \quad (2.15)$$

densidade de corrente

$$j^i = q\bar{\psi}(x)\gamma^i\psi(x). \quad (2.16)$$

O problema mais marcante dessa abordagem é que o espaço de estados envolvia soluções para a equação de onda cujas energias eram negativa. E não há como excluir esses estados, pois eventualmente uma evolução unitária levaria o estado inicial em um deles. Isso forçou Dirac a postular a existência de um "mar" de elétrons que ocupavam esses estados de energia negativa e, pelo princípio da exclusão de Pauli, não haveria como os elétrons transitarem para eles. Esse mar não poderia produzir nenhum campo eletromagnético quando completo e não poderia ser detectável, porém, se um elétron saltasse do "mar" para um estado de energia positiva, esse elétron deixaria um estado vazio — um buraco — que se comportaria como um elétron, mas de carga positiva. A descoberta dessa "partícula" aconteceu logo depois de sua previsão, o que fez a teoria de Dirac subir alguns níveis epistemológicos.

Esse mar de elétrons deixou de ser problema na interpretação de campos para a equação de Dirac, em que as soluções para energia negativa se tornam soluções de energia positiva descrevendo a antipartícula do elétron: o pósitron.

2.3 A Densidade de Lagrangeana e o Campo de Klein-Gordon

Para se formar uma teoria plenamente covariante, a ação clássica deve envolver as coordenadas espaciais e temporais de uma maneira equivalente. Por isso definimos as densidades de Lagrangeana (\mathcal{L}) e Hamiltoniana (H) a partir de:

$$L = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\alpha\phi(x)), H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H}(x) \quad (2.17)$$

então temos o momento canonicamente conjugado

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (2.18)$$

Para iniciar o método usado em teoria de campos, começamos explicando o campo de Klein-Gordon, que é um campo escalar. Partindo da equação relativística para a energia

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad (2.19)$$

e aplicando a "primeira" quantização, chegamos à equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.20)$$

em que $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ é o operador d'Alabertiano. Temos a seguinte densidade de Lagrangeana associada:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2), \quad (2.21)$$

cujo momento conjugado é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (2.22)$$

Prosseguindo, neste ponto analisamos o campo e seu momento conjugado como as variáveis canônicas do sistema e, então, aplicamos as regras de comutação de modo análogo ao feito para a MQ, mas de modo a ser consistente com sistemas com graus de liberdade contínuos:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (2.23)$$

sendo que os outros comutadores se anulam. Para interpretar a teoria, expandimos os campos num conjunto completo de soluções de frequência positiva e negativa da equação de Klein-Gordon:

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2Vw_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2Vw_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} = \phi^+ + \phi^-, \quad (2.24)$$

e então chegamos à regra de comutação

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}; \quad (2.25)$$

com os outros comutadores nulos. Estas são justamente as relações de comutação para o oscilador harmônico, e, em analogia às suas soluções, podemos reconhecer o operador número:

$$N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad (2.26)$$

com os autovalores $n = 0, 1, 2, \dots$. Também podemos associar os operadores $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$ como os operadores de criação e destruição, respectivamente, de partículas de momento \mathbf{k} e energia $\omega_{\mathbf{k}} = (m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$. O Hamiltoniano e o operador de momento podem ser escritos como

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right), \\ \mathbf{P} &= - \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi} \nabla\phi = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como o Hamiltoniano tem uma soma infinita para a energia de ponto zero ($\sum_{\mathbf{k}} (1/2)\omega_{\mathbf{k}}$), devemos normalizá-lo. Definimos o ordenamento normal — ou produto normal — como escrever o operador em questão composto de operadores de criação e aniquilação, deslocando os de criação para a extrema esquerda. Ou seja, no caso de operadores bosônicos, temos:

$$N(a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2)a^\dagger(\mathbf{k}_3)) = a^\dagger(\mathbf{k}_3)a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) \quad (2.28)$$

e fermiônicos (que falaremos depois, ao descrevermos os elétrons):

$$N(a(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_3)) = -a^\dagger(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_3). \quad (2.29)$$

em que o sinal de menos veio porque tais operadores respeitam a uma regra de anticomutação, e não de comutação. Então redefinimos todos os observáveis em termos de produtos normais. O Hamiltoniano e o operador momento, desse modo, se tornam

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} N \left\{ \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \right\} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \right), \\ \mathbf{P} &= - \int d^3\mathbf{x} N \left\{ \dot{\phi} \nabla\phi \right\} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Na discussão acima, definimos o comutador de um campo em dois pontos espaciais distintos, mas considerados em um mesmo tempo. Precisamos então derivar um comutador também para tempos distintos para garantir a covariância da teoria. Notamos que

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)] = [\phi^-(x), \phi^-(y)] = 0 \quad (2.31)$$

assim

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] \quad (2.32)$$

então calculando cada parte do comutador explicitamente, encontramos:

$$\begin{aligned}
 [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ikx+ik'y} \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} \\
 &= i\Delta^+(x-y)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

em que definimos

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ikx}. \tag{2.34}$$

Analogamente temos

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = -i\Delta^+(y-x) \equiv i\Delta^-(x-y). \tag{2.35}$$

Sendo

$$\Delta \equiv \Delta^+ + \Delta^- = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(kx), \tag{2.36}$$

o comutador passa a ser escrito como

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y). \tag{2.37}$$

Outra definição importante é a função delta de Feynman Δ_F , definida a partir de do valor esperado no vácuo de um ordenamento temporal de um campo. Tal ordenamento pode ser escrito como

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = \theta(t-t')\phi(x)\phi(x') + \theta(t'-t)\phi(x')\phi(x) \tag{2.38}$$

e, então, Δ_F é definido da maneira:

$$i\Delta_F \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(x')\}|0\rangle = \theta(t)\Delta^+(x) - \theta(-t)\Delta^-(x) \tag{2.39}$$

em que, notamos aqui, $i\Delta^+(x-x') = \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$.

Podemos interpretar Δ_F , chamado de propagador de Feynman, como uma partícula escalar sendo criada em um certo evento e se propagando até ser aniquilada em outro. Para $t > t'$, a partícula é criada em x' e viaja até x , onde é absorvida. Para $t' > t$ temos a situação inversa, em que a partícula é criada em x e viaja até x' .

O propagador pode ser escrito como

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \tag{2.40}$$

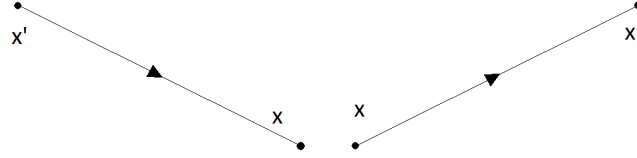


Figura 2.1: Partícula se propagando de x' para x (esquerda) e x para x' (direita)

em que ε deve ser levado à zero ao fim dos cálculos. Veremos que há propagadores diferentes para vários tipos de partículas, como as espinoriais da eletrodinâmica quântica e mésons escalares, que utilizam do propagador acima. O caso de espinores consideraremos abaixo.

2.4 Quantizando o Campo de Dirac

Para quantizar o campo de Dirac, nós o expandimos em termos de uma base completa de soluções de ondas planas:

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ \sum_{r\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} [c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + d_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}] \quad (2.41)$$

Para fazer a segunda quantização, ao invés de aplicar uma relação de comutação, aplicamos uma de anticomutação nos operadores de criação e aniquilação:

$$[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ \equiv c_r(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{p}') + c_s^\dagger(\mathbf{p}')c_r(\mathbf{p}) = [d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (2.42)$$

Para definirmos os operadores de número

$$N_r(\mathbf{p}) = c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) \quad \text{e} \quad \bar{N}_r(\mathbf{p}) = d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p}), \quad (2.43)$$

com, por exemplo,

$$c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = |\mathbf{p}_r\rangle, \quad (2.44)$$

sendo que todos os outros anti-comutadores se anulam, como por exemplo:

$$[c_r, c_s]_+ = [c_r^\dagger, c_s^\dagger]_+ = [c_r^\dagger, d_s^\dagger]_+ = [c_r, d_s]_+ = [c_r, d_s^\dagger]_+ = 0, \quad (2.45)$$

que caracterizam dois tipos de partículas fermiônicas, ou seja, que obedecem a estatística de Fermi-Dirac, pois:

$$(c_r^\dagger)^2|0\rangle = 0; \quad c_r^\dagger d_s^\dagger|0\rangle = -d_s^\dagger c_r^\dagger|0\rangle \quad (2.46)$$

O propagador para este campo fermiônico também deve ser desenvolvido. Primeiramente formamos uma matriz partindo dos dois comutadores não nulos:

$$\{iS^\pm(x-y)\}_{\alpha\beta} \equiv [\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right)_{\alpha\beta} \Delta^\pm(x-y), \quad (2.47)$$

definimos a matriz $S(x)$ como

$$S(x) \equiv S^+ + S^- = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \Delta(x), \quad (2.48)$$

De maneira análoga ao campo de Klein-Gordon, introduzimos o propagador do férmion como

$$iS_F(x-x') = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle. \quad (2.49)$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} S_F(x) &= \theta(t)S^+(x) - \theta(-t)S^-(x) = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \Delta_F(x) \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \equiv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{1}{\not{p} - m + i\eta} \end{aligned} \quad (2.50)$$

em que usamos que $(\not{p} \pm m)(\not{p} \mp m) = p^2 - m^2$ e teremos que tomar os limites $\varepsilon \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow 0$ ao fim dos cálculos.

2.5 Sobre a Dinâmica de Emissão e Absorção de Radiação, a Invariância de Calibre e a Lagrangeana da QED

Para se adicionar a interação eletromagnética à teoria de Dirac, fazemos a substituição mínima, como ocorre no eletromagnetismo clássico:

$$H = i \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x); \quad \mathbf{p} = -i\nabla \rightarrow -i\nabla - q\mathbf{A}(x), \quad (2.51)$$

em que $\phi(x)$ agora é o potencial escalar da teoria eletromagnética clássica e $\mathbf{A}(x)$ o potencial vetor. Essas substituições são representadas na "derivada covariante"

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x), \quad (2.52)$$

que substituirá a derivada na Lagrangeana de Dirac (2.12):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (2.53)$$

com

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \text{ e } \mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (2.54)$$

em que \mathcal{L}_0 é a Lagrangeana livre de Dirac e \mathcal{L}_I faz o papel da Lagrangeana de interação. A invariância de calibre(ou invariância de *gauge*), se refere

A unicidade da descrição física de um sistema sobre a eletrodinâmica se baseia nos campos elétricos e magnéticos.A liberdade que temos no contexto clássico de adicionar a derivada de uma função ao potencial quadrivetor sem alterar o conteúdo descritivo do sistema se representa através da transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (2.55)$$

Porém, a Lagrangeana (2.53) não é invariante sobre essas transformações,pois

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f \quad (2.56)$$

e então, para respeitar a livre escolha do calibre, devemos transformar o campo por uma fase local. Os campos devem se transformar de acordo com:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{ief(x)} \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

O conjunto de transformações (2.55) e (2.57) são as chamadas transformações de calibre, que são um conjunto de transformações que devem ser feitas simultaneamente. Aplicando-as na Lagrangeana de Dirac com o acoplamento mínimo, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f, \\ \mathcal{L}_I &\rightarrow \mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f; \end{aligned} \quad (2.58)$$

então, a Lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ é invariante sobre essas transformações de calibre.

Poderíamos ter feito o caminho contrário, exigindo a invariância de fase local — o que faz sentido se pensarmos que tratamos o sistema como contendo infinitos graus de liberdade — e depois percebendo como o campo de calibre, no caso $A_\mu(x)$, se transformaria, e chegaríamos às mesmas transformações de calibre.

Para obtermos a Lagrangeana final da QED, basta que adicionemos a Lagrangeana livre do eletromagnetismo (que ja é covariante) para o quadrivetor potencial, ou seja, para

o campo de fótons:

$$\mathcal{L}_{fotons} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

em que $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. E ntão chegamos à lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.60)$$

2.6 Quantização do Campo de fótons

A lagrangeana (2.60) não é conveniente para nossa quantização, pois possui um dos momentos canônicos igual a zero:

$$\pi^0 = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0}\mathcal{L} = -F^{00} = 0. \quad (2.61)$$

Portanto, uma outra foi proposta por Fermi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu(x)) - s_\mu(x)A^\mu(x), \quad (2.62)$$

com $s_\mu \equiv -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e possuindo o seguinte momento conjugado:

$$\pi^\mu(x) = -\dot{A}^\mu(x). \quad (2.63)$$

A Lagrangeana (2.62) leva à seguinte equação de movimento:

$$\square A^\mu(x) = s^\mu(x), \quad (2.64)$$

o que só é equivalente às equações de movimento da Lagrangeana original (2.60) se o quadivetor potencial satisfizer à condição

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (2.65)$$

Devemos portanto, quantizar o campo utilizando a equação (2.62) e depois aplicar o vínculo acima. Poderemos calibrar o campo $A(x)$ resolvendo

$$\partial_\mu A^\mu(x) + \square f(x) = 0. \quad (2.66)$$

e, então, escolhemos o campo como sendo

$$A_\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad (2.67)$$

então

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu f) = 0. \quad (2.68)$$

Isso não fixa o quadrivetor, pois ainda podemos fazer a transformação

$$A''^\mu = A'^\mu + \partial^\mu f \quad (2.69)$$

se mantermos

$$\square f(x) = 0. \quad (2.70)$$

A condição (2.70) é chamada de calibre de Lorentz, e mantém a invariância de calibre dentro de um subespaço.

Para quantizarmos o campo fotônico, utilizaremos a equação de movimento (2.64) para o campo livre. Essa equação nos permite expandir a solução para o campo em soluções de ondas planas:

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x) \quad (2.71)$$

em que

$$\begin{aligned} A^{\mu+}(x) &\equiv \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} \\ A^{\mu-}(x) &\equiv \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \end{aligned} \quad (2.72)$$

em que $r = 0, \dots, 3$ corresponde às soluções linearmente independentes reais e que respeitam as relações de completudeza:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\mu}(\mathbf{k}) &= -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, \dots, 3 \\ \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) &= -g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

em que

$$\zeta_0 = -1, \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1. \quad (2.74)$$

Escolheremos um conjunto particular ortonormal de vetores de polarização, a saber:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) &= n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0) \\ \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) &= (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.75)$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \quad (2.76)$$

ainda, ε_1^μ e ε_2^μ são chamadas de polarizações transversas, ε_3^μ de longitudinal e ε_0^μ de polarização escalar. Necessitaremos ainda do propagador do fóton, que desenvolveremos a seguir.

Para começar, aplicamos as regras de quantização canônicas e covariantes para tempos iguais:

$$\begin{aligned} [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= [\dot{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\mu(\mathbf{x}', t)] = 0; \\ [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.77)$$

Essas equações são idênticas às relações de comutação para o campo de Klein-Gordon, multiplicado por $g^{\mu\nu}$, e cada componente $A_\mu(x)$ satisfaz à mesma equação de movimento do campo $\phi(x)$ para o limite de massa nula. Portanto, podemos extrair a matemática similar e estendê-la para o caso do campo vetorial. Sendo assim, a relação de comutação geral pode ser escrita como

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = iD^{\mu\nu}(x - x') \quad (2.78)$$

com

$$D^{\mu\nu}(x) = \lim_{m \rightarrow 0} [-g^{\mu\nu} \Delta(x)] \quad (2.79)$$

Assim, o propagador de Feynman para o foton segue analogamente:

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(x') \} | 0 \rangle = iD_F^{\mu\nu}(x - x') \quad (2.80)$$

com

$$D_F^{\mu\nu}(x' - x) = \lim_{m \rightarrow 0} [-g^{\mu\nu} \Delta_F(x)] = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (2.81)$$

As regras de comutação para os operadores de criação e aniquilação seguem a partir da eq. (2.78):

$$\begin{aligned} [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] &= \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] &= [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

E, apesar do fator ζ_r , temos que

$$a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (2.83)$$

e

$$a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle = |1_{\mathbf{k}r}\rangle. \quad (2.84)$$

Para justificar a interpretação na representação número, notamos que o Hamiltoniano

$$\int d^3 \mathbf{x} N [\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x)] \quad (2.85)$$

se torna

$$H = \sum_{r\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}), \quad (2.86)$$

e é positivo definido, como podemos ver com um estado de um foton:

$$\begin{aligned} H |1_{\mathbf{k}r}\rangle &= \sum_{\mathbf{q}s} \omega_{\mathbf{q}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q}) a_s(\mathbf{q}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \\ &= \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle, \quad r = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.87)$$

e o operador número para fótons se lê

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \quad (2.88)$$

e a normalização dos estados:

$$\langle 1_{\mathbf{k}r} | 1_{\mathbf{k}r} \rangle = \zeta_r \quad (2.89)$$

Para fótons escalares, temos um problema de interpretação, que será resolvido impondo a condição de Lorentz, de modo que a interpretação física dos estados será por conta apenas dos estados de polarização transversal. Não podemos satisfazer (2.65) para o campo $A^\mu(x)$, pois temos que

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = i\partial_\mu D^{\mu\nu}(x-x') \neq 0. \quad (2.90)$$

Então, temos que substituir essa condição por outra mais fraca:

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x) |\Psi\rangle = 0 \implies \langle \Psi | \partial_\mu A^\mu |\Psi\rangle = 0. \quad (2.91)$$

Substituindo as equações, nós obtemos as condições

$$\begin{aligned} [a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] |\Psi\rangle &= 0, \quad \forall \mathbf{k} \\ \implies \langle \Psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) |\Psi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

o que leva à

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \quad (2.93)$$

Isso representa o fato de sempre termos o fator ζ_r a frente de observáveis, e então só entrarão no conteúdo físico do sistema os modos transversais do campo eletromagnético, como devia ser. Mas para fótons virtuais na presença de interação, as outras polarizações têm um importante papel, fazendo parte da explicação da força Coulombiana.

2.7 A Dinâmica em TQC

Há vários modos de se obter a evolução de um estado ao longo do tempo para a teoria quântica de campos. Aqui farei uso da expansão perturbativa para a matriz S , que faz a conexão entre os estados iniciais e finais de um dado sistema de várias partículas. Nesta seção utilizaremos a representação de interação (apresentada no apêndice A), que é apropriado para processos de espalhamento.

Começamos separando o Hamiltoniano em duas partes:

$$H = H_0 + H_I \quad (2.94)$$

em que H_0 representa o Hamiltoniano livre e H_I é a parte de interação, que acopla os diferentes campos. Na dinâmica no cenário de interação, os estados têm a seguinte evolução:

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_I |\Phi(t)\rangle, \quad (2.95)$$

O estado inicial $|\Phi(t_i)\rangle$ contém toda a informação sobre o sistema, e pode conter várias partículas de diferentes tipos, associadas a campos distintos. Na QED, por exemplo, tal estado conteria um determinado número de elétrons, pósitrons e fótons, com certos momentos, spins e polarizações. É durante a evolução do sistema que aparece a característica que é uma das quebras fundamentais com a mecânica quântica não-relativística. Enquanto nesta o estado inicial e final contém o mesmo número de partículas, do mesmo tipo, na outra há uma evolução não apenas das características da partícula, como pode haver mais partículas do que inicialmente havia, e até mesmo o tipo das partículas iniciais nem constarem no estado final do sistema, sistema, como uma colisão entre dois elétrons levando a dois múons. O LHC (*Large Hadron Collider*) por exemplo, usa colisões de prótons e gera uma variedade enorme de partículas como subprodutos da colisão. Isso tudo vem do fato que o Hamiltoniano de interação contém diferentes campos acoplados, e conseqüentemente, diferentes operadores de aniquilação e criação combinados. Essa ideia pode ser matematicamente formulada através do espaço de Fock F_ν , que pode ser representado como a soma direta de produtos tensoriais de espaços de Hilbert para uma partícula:

$$F_\nu(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (S_\nu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus (S_\nu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \oplus \dots \quad (2.96)$$

em que S_ν é um operador que simetriza ou anti-simetriza o espaço (dependendo do tipo da partícula ser bosônica ou fermiônica, respectivamente). Os estados de Fock são estados de

múltiplas partículas na representação de número:

$$|n_0, n_1, n_2, \dots, n_k\rangle = |\psi_0\rangle^{n_0} |\psi_1\rangle^{n_1} |\psi_2\rangle^{n_2} \dots |\psi_k\rangle^{n_k}, \quad (2.97)$$

e portanto podemos descrever transições entre estados com diferentes números de partículas.

Dado que H_I é Hermitiano, a evolução é unitária, ou seja,

$$\langle \Phi(t) | \Phi(t) \rangle = \text{constante} \quad (2.98)$$

No processo, um estado inicial livre $|i\rangle$ com um número definido de partículas e propriedades bem definidas, interage a partir de certo ponto e durante um certo tempo. Cessada a interação, o estado final se apresenta como $|f\rangle$. Para simplificar, consideraremos a hipótese adiabática, em que o estado é livre em um tempo infinitamente anterior e de novo em um infinitamente posterior. Ou seja

$$|i\rangle \equiv |\Phi(-\infty)\rangle \quad e \quad |f\rangle \equiv |\Phi(\infty)\rangle. \quad (2.99)$$

Se quisermos saber qual a probabilidade do estado final se encontrar no estado particular genérico $|a\rangle = |\mathbf{p}_1, s_1, \mathbf{p}_2, s_2, \dots\rangle$, calculamos

$$|\langle a | \Phi(\infty) \rangle|^2. \quad (2.100)$$

Podemos representar então $|\Phi(\infty)\rangle$ numa base de estados ortonormal:

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a | \Phi(\infty) \rangle \equiv \sum_a |a\rangle S_{ia} \quad (2.101)$$

e a unitariedade da matriz S se vê pela condição $\sum_a |S_{ia}|^2 = 1$.

Para solucionar a equação (2.95) para um tempo t, fazemos uma iteração:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \\ &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) |\Phi(t_2)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n)\} |i\rangle. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Portanto, a matriz S pode ser escrita:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots \mathcal{H}_I(x_n)\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Em seguida, aplicamos o teorema de Wick, que relaciona o ordenamento temporal com o ordenamento normal, porém, antes explico o que é uma contração de Wick, e um ordenamento normal com uma contração. A contração a tempos iguais, cujo símbolo é um colchete ligando dois operadores, é definida como o propagador de Feynman, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} &= i\Delta_F(x_1 - x_2), \\
 \overline{\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)} &= \overline{\phi^\dagger(x_2)\phi(x_1)} = i\Delta_F(x_1 - x_2), \\
 \overline{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} &= \overline{\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)} = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\
 \overline{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2).
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

O ordenamento normal com contração pode ser escrito como

$$N(\overline{ABC} \dots YZ) = (-1)^p \overline{AC} N(BD) \tag{2.105}$$

em que p é o numero de trocas entre operadores fermiônicos para trazer os operadores indicados na contração lado a lado.

Wick demonstrou que o ordenamento temporal de um produto de operadores está relacionado com seu ordenamento normal através de:

$$\begin{aligned}
 T(ABCD \dots WXYZ) &= N(ABCD \dots WXYZ) \\
 &+ N(\overline{ABC} \dots YZ) + N(\overline{ABC} \dots YZ) + \dots + N(ABC \dots \overline{YZ}) \\
 &+ N(\overline{ABC} \overline{D} \dots YZ) + \dots + N(AB \dots \overline{WXYZ}) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Ou seja, o ordenamento temporal pode ser escrito como uma soma de ordenamentos normais com uma contração, somado com duas contrações, com três e assim até acabar os pares que há para se contrair.

Quando temos ainda um ordenamento normal dentro de um temporal, como é o caso da QED, tem-se a seguinte definição:

$$T\{N(AB \dots)_{x_1} \dots N(AB \dots)_{x_n}\} = T\{(AB \dots)_{x_1} \dots (AB \dots)_{x_n}\}_{c.t.d.} \tag{2.107}$$

em que *c.t.d* indica que a contração deve ser feita apenas para tempos distintos, ou seja, entre operadores em diferentes parênteses.

Utilizando do teorema de Wick, a matriz S passa a ter uma interpretação mais pictórica, vindo a ser expressa por diagramas de Feynman, como explicado na próxima seção.

Por exemplo, consideramos a segunda ordem na expansão dessa matriz para a QED, com $H_I = -eN[\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)]$:

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)}, \quad (2.108)$$

em que

$$\begin{aligned} S_A &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \\ S_B &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \\ &\quad + N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}]\} \\ S_C &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \\ S_D &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \\ &\quad + N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}]\}, \\ S_E &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}], \\ S_F &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 (\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Na seção a seguir, digo como Feynman conseguiu interpretar os termos acima no espaço dos momentos, e assim criar um conjunto de regras para, a partir de diagramas, ver qual seria a expressão matemática correspondente.

2.8 Regras de Feynman para a QED

Feynman propôs uma maneira muito útil e revolucionária de se realizar os cálculos em teorias quânticas de campos. Sua ideia era tratar a evolução do sistema como integrais que representavam a probabilidade da partícula se propagar de um ponto a outro. Isso leva a uma interpretação das integrais na expansão perturbativa da matriz S de uma maneira pictórica, e nos fornece regras para construção de diagramas de Feynman, que teriam uma representação também no espaço dos momentos. Seus diagramas são a base da maioria dos cálculos atuais, e neles também estão contidos os problemas das divergências. Considere um espalhamento Compton de um elétron por um fóton, como representado na figura 2.8. esse é um exemplo de um diagrama de Feynman. Cada linha reta representa um elétron (ou pósitron), cada linha ondulada representa um fóton e cada vértice representa uma ordem

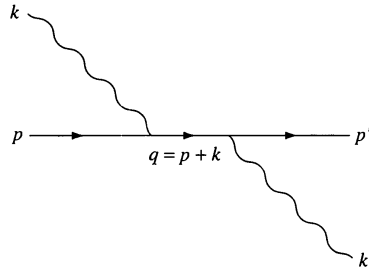


Figura 2.2: Espalhamento Compton

na expansão perturbativa da matriz S ; neste caso temos dois vértices, então é um diagrama de segunda ordem. As linhas internas — que são linhas cujas extremidades terminam em vértices — são chamadas também de propagadores, pois se relacionam com a probabilidade do campo em um evento afetar um evento posterior. Considerando que o tempo flui da direita para a esquerda, na figura temos um elétron e um fóton interagindo, em que o elétron absorve este fóton e depois de se propagar (virtualmente), o emite novamente. Os elétron e fóton finais não necessariamente possuem o mesmo momento inicial, mas o momento total é conservado. Esse diagrama é tirado diretamente da transformada de Fourier dos termos em (2.109) de cada variável para o espaço dos momentos.

Com base em diagramas como o acima, podemos deduzir a ordem correspondente da matriz S em questão. Para tal, há algumas regras que devemos obedecer. Os elementos da matriz podem ser escritos como:

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \delta(\sum p_f - \sum p_i) \prod_{ext.} \left(\frac{m}{VE} \right)^{(1/2)} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{(1/2)} \right] \mathcal{M}. \quad (2.110)$$

com

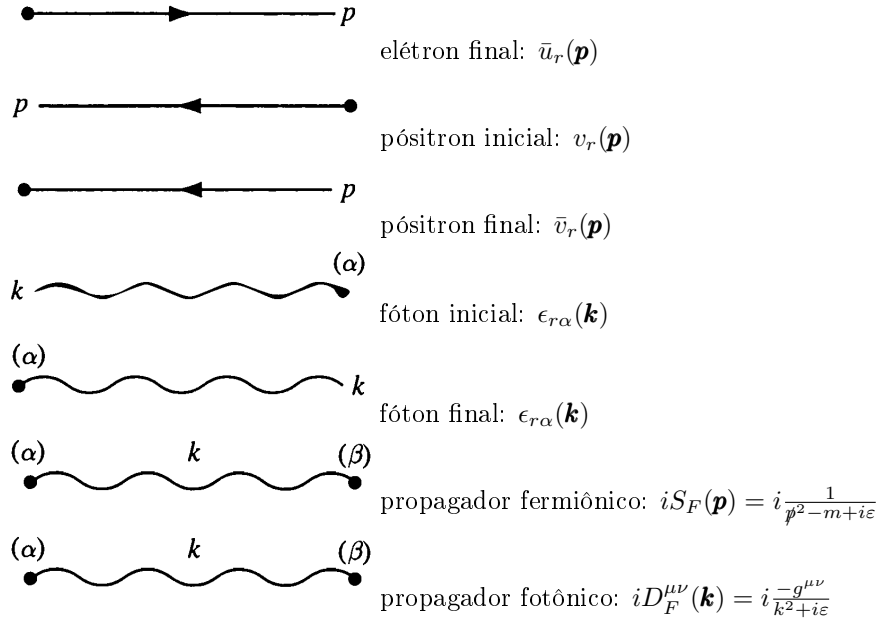
$$\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}^{(n)}, \quad (2.111)$$

uma soma sobre a ordem n da série; p_f, p_i é uma soma sobre os momentos finais e iniciais, respectivamente, o primeiro produtório é sobre os elétrons (e férmions em geral) de energia E , e o segundo sobre os fótons de energia ω . Além do mais, cada termo $\mathcal{M}^{(n)}$ é uma soma sobre todos os diagramas topologicamente distintos $\mathcal{M}_i^{(n)}$ com o mesmo número de vértices e as mesmas linhas externas, correspondentes às partículas iniciais e finais.

Para cada diagrama, usamos as seguintes regras para se construir a expressão matemática correspondente à amplitude $\mathcal{M}_i^{(n)}$:



para elétron inicial, escreva o fator $u_r(\mathbf{p})$



E, também,

- para cada vértice, escreva $ie\gamma^\alpha$,
- para linhas fermiônicas, escreva os fatores espinoriais (matrizes γ , funções S_F e quadri-espinores) da esquerda para a direita seguindo o sentido contrário ao apontado pelas setas,
- para cada laço, inclua a integração $(2\pi)^4 \int d^4q$,
- para cada laço fermiônico, tome o traço e multiplique por -1
- Multiplique a expressão por $(-1)^p$, sendo p o número de trocas de operadores fermiônicos necessárias para colocá-los em ordenamento normal.

Sendo assim, a expressão para a contribuição correspondente à 2.8 fica sendo escrita como:

$$\mathcal{M} = -e^2 u(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (2.112)$$

2.9 Processos de Espalhamento

O cálculo de seções de choque é de grande importância na física de partículas. Ele nos fornece informações sobre a probabilidade de vários processos ocorrerem em colisões e é a maior base para o entendimento e corroboração da teoria. A seção de choque nos dá a área

efetiva que governa a probabilidade de um espalhamento ou transições de um estado inicial para estados finais.

Necessitamos neste trabalho da seção de choque no centro de momento de um sistema de duas partículas iniciais levando a duas partículas finais. Tal quantidade se lê:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}'_1|}{|\mathbf{p}_1|} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2, \quad (2.113)$$

em que E_1, E_2 e p_1 são as energias e momentos das partículas iniciais; $|p'_1|$ é o valor do momento das partículas finais e m_l são as massas dos léptons envolvidos.

Usualmente, para um sistema como o espalhamento foton-foton, as seções de choque medidas não distinguem a polarização dos feixes, então devemos calcular amplitudes despolarizadas. Existe um jeito conveniente para se calcular amplitudes em que estão presentes fótons como partículas finais ou iniciais. De acordo com as regras de Feynman, esse tipo de amplitude pode ser escrita como:

$$\mathcal{M} = \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \mathcal{M}_\mu(\mathbf{k}). \quad (2.114)$$

As transformações de calibre do tipo (2.55), com $f(x) = \tilde{f}(k)e^{ikx}$ produzem a seguinte mudança nas regras de Feynman dessa amplitude:

$$\varepsilon_r^\mu e^{ikx} \rightarrow [\varepsilon_r^\mu + ik^\mu] \tilde{f} \cdot e^{ikx}. \quad (2.115)$$

Então, para respeitarmos a invariância de calibre, devemos ter

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.116)$$

A amplitude despolarizada é obtida fazendo a média sobre os estados iniciais de polarização e somando sobre os estados finais:

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{\text{n}^\circ \text{ de polarizações}} \sum_{rs\dots} |\mathcal{M}_{rs\dots}|^2. \quad (2.117)$$

Agora, se somarmos sobre as polarizações antes de contrairmos os índices, ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_r |\mathcal{M}^r|^2 &= \sum_r \mathcal{M}_\mu^*(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \mathcal{M}_\nu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \\ &= \mathcal{M}_\mu^*(\mathbf{k}) \mathcal{M}_\nu(\mathbf{k}) \sum_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Agora, usando o sistema referencial em (2.75), temos a relação

$$\sum_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} - \frac{1}{(kn)^2} [k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)], \quad (2.119)$$

e também lançando mão da condição (2.116), nós obtemos

$$\sum_r |\mathcal{M}^r|^2 = \mathcal{M}_\mu^*(\mathbf{k}) \mathcal{M}_\nu(\mathbf{k}) (-g^{\mu\nu}) = -\mathcal{M}_\mu^*(\mathbf{k}) \mathcal{M}^\mu(\mathbf{k}) \quad (2.120)$$

Isso significa que não há a necessidade de se calcular produtos escalares que envolvam as polarizações, mas apenas os momentos externos. A regra é que para cada soma sobre o mesmo índice de polarização, há a sua substituição pelo tensor métrico, o que equivale a se contrair os respectivos índices de Lorentz.

Capítulo 3

A Regularização Implícita

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem para tratar integrais divergentes através de uma maneira independente de regularização, a chamada regularização implícita (IReg). O tratamento feito aqui é para um laço — com uma variável de integração apenas — mas as versões generalizadas a n laços existem, e podem ser consultadas em [18].

3.1 Divergências em TQC

Considere os diagramas a seguir

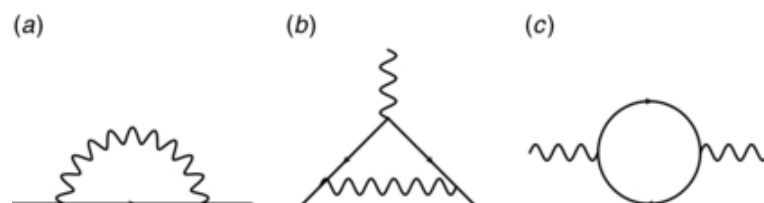


Figura 3.1: Diagramas divergentes: (a)auto-energia do elétron (b)vértice (c)tensor de polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}$

Analisando (a), por exemplo, cuja expressão matemática pode ser escrita como

$$\begin{aligned} ie^2\Sigma(p) &= \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_{F\alpha\beta}(k)\gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta \\ &= \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.1)$$

podemos ver que, para valores grandes da variável de integração, essa integral se comporta como $(\int d^4k/(k^2)^2)$, e portanto diverge logaritmicamente, de acordo com um limite superior impróprio para sua integral indefinida. A divergência para grandes valores de k é chamada *divergência ultravioleta*, relacionando altos valores de k com a energia da partícula virtual. Além do mais essa integral também apresenta problemas para o limite inferior de integração. À medida que $k \rightarrow 0$, essa integral também diverge (*divergência infravermelha*).

Os outros exemplos básicos de divergências tem a seguinte expressão correspondente:

correção de vértice:

$$e^2\Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha iS_F(p' - k)\gamma^\mu iS_F(p - k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

tensor de polarização:

$$\Pi_{\mu\nu} = -(ie)^2 \int_k^\Lambda Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2} \right\}. \quad (3.3)$$

Há varias linhas que explicam o surgimento dessas divergências. Sobre as divergências ultravioletas, entre as principais ideias estão a que associa essas divergências a uma falha, para altas energias, da teoria de cuja interação provém, pois é bem razoável assumir um limite de validade para certa descrição matemática, um ponto de vista bem positivista. Outra linha de pensamento é associar as divergências à própria estrutura matemática cujos passos não são tão bem definidos. Supomos distribuições, produtos entre elas consideradas no mesmo ponto e produtos delas com funções de Heaviside (funções degrau). Essas operações são ilegítimas do ponto de vista matemático porque são mal definidas.

Para sabermos se uma integral é divergente no ultravioleta, analisamos seu grau superficial de divergência δ , que é a contagem de momentos de integração (internos) presentes no numerador(n_n) adicionado de d (o número de dimensões da teoria) para cada laço, menos os momentos internos presentes no denominador(n_d):

$$\delta = d + n_n - n_d. \quad (3.4)$$

Vemos que a amplitude acima contém respectivamente $\delta = 0, 0$ e 2 , sendo que $\delta = 0$ são divergências logarítmicas e $\delta = 2$ são divergências quadráticas.

3.2 Técnicas de Regularização

Para tornarmos finita uma amplitude de Feynman, primeiro devemos esclarecer como separar integrais divergentes em seu conteúdo físico e o conteúdo divergente intrínseco. Não há uma prescrição definida, mas existem alguns esquemas de regularização que basicamente devem respeitar as simetrias, a unitariedade e localidade, apesar de que não raro se vê métodos de regularização que quebram algum desses aspectos.

O método de *cut off* regulariza a integral supondo um corte nos limites da integral, que então se torna própria dentro de uma região em torno da origem, e depois tomar o limite da fronteira dessa região indo para o infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k, q_i) \rightarrow \lim_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow -\infty}} \int_{\epsilon}^{\Lambda} f(k, q_i) \quad (3.5)$$

Pelo evitar cortes abruptos, podemos modificar o integrando para tornar a integral convergente, fazendo um corte suave na região de momentos mais energéticos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k, q_i) \rightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, q_i) \rho(\Lambda^2, k^2) \quad (3.6)$$

em que

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \rho(\Lambda^2, k^2) = 1. \quad (3.7)$$

e de tal forma que o integrando contenha potencias suficientes do momento interno para tornar a integral convergente para valores finitos de Λ . Podemos ainda utilizar da regularização dimensional (DReg), que lança mão de uma continuação analítica do número de dimensões do espaço-tempo para fazer com q a integral seja convergente, e então aplicar o limite para quatro dimensões. Por exemplo considere a integral:

$$\Pi(s) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - s)^2}. \quad (3.8)$$

Faremos uma continuação analítica das potências dimensionais, e estendemos $\Pi(s)$ para $D = 4 - \eta$ dimensões:

$$\Pi(s) = \mu^{-s} \Pi_{\eta}(s), \quad (3.9)$$

em que

$$\Pi_{\eta}(s) = \mu^{\eta} \int \frac{d^{4-\eta} k}{(2\pi)^{4-\eta}} \frac{1}{(k^2 - s)^2}, \quad (3.10)$$

e tratar a integral acima como uma integral convergente.

O problema com as duas primeiras regularizações por *cut-off* é que elas estão frequentemente associadas à quebra de simetrias. Com relação à DReg, ela não consegue lidar com continuações analíticas de objetos como a matriz $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, e o tensor antissimétrico $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Recentemente, visando um tratamento algébrico das divergências, e evitando as dificuldades descritas acima, foi desenvolvida a regularização implícita (IReg).

3.3 Regularização Implícita

A amplitude de qualquer processo a ordem de um laço pode ser escrita como:

$$I^{\nu_1 \dots \nu_m} = \int_k f(k, q_i) = \int_k \frac{A^{\nu_1 \dots \nu_m}(k, q_i)}{\prod_i [(k - q_i)^2 - \mu^2]}, \quad (3.11)$$

em que $\int_k \equiv \int d^d k \setminus (2\pi)^d$, q_i são os momentos externos e μ é a massa, para propagadores de campos massivos, ou um regulador infravermelho, caso contrário. A função $A^{\nu_1 \dots \nu_m}(k, q_i)$ é uma combinação de k e q_i compatível com a estrutura de Lorentz.

A idéia principal da regularização implícita (IReg) é assumir tacitamente que as integrais estão regularizadas, ou seja:

$$\int_k f(k, q_i) \rightarrow \int_k f(k, q_i) \rho(k^2, \Lambda) \equiv \int_k^\Lambda f(k, q_i), \quad (3.12)$$

em que $\rho(k^2, \Lambda)$ é uma função genérica reguladora, que *permite a manipulação algébrica no nível dos integrandos*. Essa garantia nos permite aplicar a importante identidade (quando necessário):

$$\frac{1}{(k_l - q_i)^2 - \mu^2} = \sum_{j=0}^{n_i^{(k_l)} - 1} \frac{(-1)^j (q_i^2 - 2q_i \cdot k_l)^j}{(k_l^2 - \mu^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n_i^{(k_l)}} (q_i^2 - 2q_i \cdot k_l)^{n_i^{(k_l)}}}{(k_l^2 - \mu^2)^{n_i^{(k_l)}} [(k_l - q_i)^2 - \mu^2]}. \quad (3.13)$$

Neste trabalho em particular, precisaremos da relação com $n_i^{(k_l)} = 1$:

$$\frac{1}{(k - q_i)^2 - \mu^2} = \frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{q_i^2 - 2q_i \cdot k}{(k^2 - \mu^2)[(k - q_i)^2 - \mu^2]}. \quad (3.14)$$

Note que esta identidade contém um termo com o mesmo grau em k , outro com um grau menor e mais um com dois graus abaixo. O objetivo dessa substituição é expressar a amplitude em três partes:

$$I^{\nu_1 \dots \nu_m} = I_{fin} + I_{div} + I_\Upsilon, \quad (3.15)$$

sendo:

- I_{fin} : parte finita, que respeita as várias regularizações e é livre de qualquer ambiguidade;
- I_{div} : parte divergente básica, que é escrita em termos de integrais padrão (BDIs, de *Basic Divergent Integrals*) que não dependem do momento externo;
- I_{Υ} : parte ambígua, contendo termos de superfície, que depende da regularização mas que é finita.

Depois de expressar as divergências nessas três partes, não precisamos calcular explicitamente as integrais divergentes básicas presentes em I_{div} , mas incluí-las na definição dos parâmetros renormalizáveis da teoria.

As integrais divergente básicas são as seguintes, a um loop:

$$I_{log}(\mu^2) \equiv \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{(d/2)}}, \quad (3.16)$$

e

$$I_{quad}(\mu^2) \equiv \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\frac{d-2}{2}}}, \quad (3.17)$$

sendo que existem integrais relacionadas às acima, mas com índices de lorentz

$$I_{log}^{\nu_1 \dots \nu_r}(\mu^2) \equiv \int_k^\Lambda \frac{k^{\nu_1} \dots k^{\nu_r}}{(k^2 - \mu^2)^\beta}, \quad (3.18)$$

e

$$I_{quad}^{\nu_1 \dots \nu_{r+2}}(\mu^2) \equiv \int_k^\Lambda \frac{k^{\nu_1} \dots k^{\nu_{r+2}}}{(k^2 - \mu^2)^\beta}, \quad (3.19)$$

em que $r = 2\beta - d$. As BDIs lineares são sempre nulas, pois são funções ímpares num intervalo simétrico. No caso de dois e quatro índices de Lorentz, existem as relações :

$$I_{log}^{\mu\nu}(\mu^2) = \left(\frac{2}{d}\right) \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{log}(\mu^2) - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\}, \quad (3.20)$$

$$I_{quad}^{\mu\nu}(\mu^2) = \left(\frac{2}{d-2}\right) \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{quad}(\mu^2) - \frac{1}{2} \Upsilon_2^{\mu\nu} \right\}, \quad (3.21)$$

$$I_{log}^{\mu\nu\lambda\sigma}(\mu^2) = \frac{1}{24} \{ I_{log}(\mu^2) [g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}] - g^{\mu\sigma} \Upsilon_0^{\nu\lambda}(\mu^2) + g^{\mu\lambda} \Upsilon_0^{\nu\sigma}(\mu^2) + g^{\mu\nu} \Upsilon_0^{\lambda\sigma}(\mu^2) - 4 \Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma} \}, \quad (3.22)$$

em que

$$\begin{aligned} \Upsilon_0^{\mu\nu} &\equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^{d/2}}, \quad \Upsilon_2^{\mu\nu} \equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^{\frac{d-2}{2}}}, \\ \Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu k^\lambda k^\sigma}{(k^2 - \mu^2)^{\frac{d+2}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os Υ s acima são tipos específicos de uma classe mais geral de termos de superfície. Essas relações aparecem diretamente através da diferenciação do integrando. Explicito com $d=4$, por exemplo:

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} = \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} = \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - 2 \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \quad (3.24)$$

São tais termos de superfície, originados da diferença de duas integrais divergentes de mesma ordem, que compõem a parte ambígua da integral (I_Υ).

Existe ainda uma relação que nos permite introduzir o parâmetro de escala da regularização:

$$\begin{aligned} I_{log}(\mu^2) - I_{log}(\lambda^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) \\ \implies I_{log}(\lambda^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln(\lambda^2) &= I_{log}(\mu^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln(\mu^2) = \text{constante.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que λ é o parâmetro de escala. Essa relação vale para valores genéricos do argumento do I_{log} , e não só para um parâmetro de escala.

A IReg está de acordo com a unitariedade, localidade e invariância de Lorentz [18], e também é compatível com divergências sobrepostas através da fórmula de recursão de Bogoliubov, então a parte divergente das amplitudes pode sempre ser escrita em termos de BDIs. Existem diversos trabalhos sobre o assunto que podem ser consultados na literatura, como as referências de [13]-[19].

3.4 Avaliando os Termos de Superfície

Os termos de superfície são gerados a partir da diferença finita de duas integrais com o mesmo grau de divergência, como em (3.24). Para atribuir corretamente um valor a eles, devemos recorrer às simetrias do problema. Como está feito em [19], podemos usar a invariância de rótulo para avaliá-los.

A invariância de rótulo relaciona duas amplitudes que diferem apenas por uma mudança na variável de integração. Ao reivindicarmos essa invariância, queremos que

$$\int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [f(k + \alpha, q_i) - f(k + \beta, q_i)] = 0 \quad (3.26)$$

em que α e β são rótulos arbitrários.

Expandindo em série de potências, temos que

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\exp\left(\alpha_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma}\right) - \exp\left(\beta_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma}\right) \right] f(k, q_i) = 0. \quad (3.27)$$

Agora, $f(k, q_i)$ é da forma:

$$f(k, q_i) = \frac{g(k, q_i)}{\prod_{j=1}^L [(k + l_j(q_i))^2 - \mu^2]},$$

em que $g(k, q_i)$ e $l_j(k, q_i)$ são polinômios nos argumentos.

Se $f(k, q_i)$ é finito ou logaritmicamente divergente, nós temos que a condição (3.26) é automaticamente satisfeita, através do teorema de Gauss. Para divergências lineares, depois de usar a equação (3.13) convenientemente, nos fornece:

$$f(k, q_i) = f_{lin}(k, q_i) + f_{log}(k, q_i) + f_{fin}(k, q_i). \quad (3.28)$$

Os últimos três termos satisfazem (3.26). A forma geral do termo que resta é:

$$\int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f_{lin}(k, q_i) = \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\prod_i (k \cdot q_i)^{b_i} \prod_k (q_i \cdot q_k)^{c_i k}}{[k^2 - \mu^2]^L} \quad (3.29)$$

em que $d + s - 2L = 1$ e $s \equiv \sum_i b_i$. Para chegar em expressões desse tipo, todos os termos contendo k^2 devem ser cancelados com o denominador. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \int_k^\Lambda \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^3} &= \int_k^\Lambda \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2)^3} = \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \int_k^\Lambda \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \\ &= I_{log}(m^2) + \text{termo finito} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Respeitando a condição da expansão (3.27) para $f_{lin}(k, q_i)$, nós temos a seguinte consequência:

$$(\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial f_{lin}(k, q_i)}{\partial k_\sigma} = (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) h_{\nu_1 \dots \nu_s}(q_i) \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_1 \dots \nu_s}}{[k^2 - \mu^2]^L} = 0; \quad (3.31)$$

o que é o mesmo que afirmar que

$$\Upsilon_0^{(1)\sigma\nu_1 \dots \nu_s} = 0. \quad (3.32)$$

Agora, considere as divergências quadráticas, que podem ser escritas como:

$$f_{quad}(k, q_i) = f_{quad}(k, q_i) + f_{lin}(k, q_i) + f_{log}(k, q_i) + f_{fin}(k, q_i). \quad (3.33)$$

Falta apenas analisar o primeiro termo, cuja contribuição é da forma:

$$\int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f_{quad}(k, q_i) = \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\prod_i (k \cdot q_i)^{b_i} \prod_k (q_i \cdot q_k)^{c_i k}}{[k^2 - \mu^2]^L}, \quad (3.34)$$

em que $d + s - 2L = 2$.

Inserindo (3.34) em (3.27), nós obtemos:

$$(\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{quad}(k, q_i) = (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) h_{\nu_1 \dots \nu_s}(q_i) \times \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_1 \dots \nu_s}}{[k^2 - \mu^2]^L} = 0, \quad (3.35)$$

e

$$\begin{aligned} & (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)(\alpha_\rho - \beta_\rho) \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} f_{quad}(k, q_i) = (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)(\alpha_\rho - \beta_\rho) h_{\nu_1 \dots \nu_s}(q_i) \\ & \times \left[g^{\nu_1 \rho} \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_2} \dots k^{\nu_s}}{[k^2 - \mu^2]^L} + \sum_{j=2}^{s-1} g^{\nu_j \rho} \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_1} \dots k^{\nu_{j-1}} k^{\nu_{j+1}} \dots k^{\nu_s}}{[k^2 - \mu^2]^L} \right. \\ & \left. + g^{\nu_s \rho} \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_2} \dots k^{\nu_{s-1}}}{[k^2 - \mu^2]^L} + 2L \int_k \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \frac{k^{\nu_2} \dots k^{\nu_s} k^{\nu_\rho}}{[k^2 - \mu^2]^{L+1}} \right] = 0. \quad (3.36) \end{aligned}$$

O que é equivalente à afirmar que:

$$\Upsilon_1^{(1)\sigma\nu_1 \dots \nu_s} = \Upsilon_0^{(1)\sigma\nu_2 \dots \nu_s} = \Upsilon_0^{(1)\sigma\nu_2 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_s} = \Upsilon_0^{(1)\sigma\nu_1 \dots \nu_{s-1}} = \Upsilon_0^{(1)\sigma\nu_1 \dots \nu_s \nu_\rho} = 0, \quad (3.37)$$

Portanto, para se respeitar a invariância de rótulo, devemos avaliar os termos de superfície como zero. Outra característica bastante importante da invariância de rótulo é que foi demonstrado em [19] que ela é uma condição necessária e suficiente para a invariância de calibre. *Em consequência, os termos de superfície devem ser todos nulos na QED.*

3.5 Exemplo I: O Tensor de Polarização do Vácuo na QED

Exemplificamos o caso acima com dois casos. O primeiro caso é o tensor de polarização do vácuo, que aparece quando das correções para o propagador do fóton. O rótulo arbitrário está presente no diagrama, com o vínculo de que $k_2 - k_1 = p$.

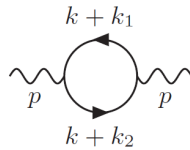


Figura 3.2: Tensor de polarização do vácuo.

Podemos escrever o fator do laço como

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu} &= -(ie)^2 \int_k^\Lambda Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2} \right\} \\ &= -(ie^2) \int_k^\Lambda Tr \left\{ \frac{i\gamma_\mu [\not{k} + \not{k}_1 + m] i\gamma_\nu [\not{k} + \not{k}_2 + m]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Desenvolvendo o traço, obtemos[17]:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} &= \Pi_{\mu\nu}^0 + 4[\Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)\Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{3}(k_1^\lambda k_1^\sigma + k_2^\lambda k_2^\sigma + k_1^\lambda k_2^\sigma)\Upsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}^0 \\ &\quad - (k_1 + k_2)^\lambda (k_1 + k_2)_\mu \Upsilon_{\nu\lambda}^0 - \frac{1}{2}(k_1^\lambda k_1^\sigma + k_2^\lambda k_2^\sigma)g_{\mu\nu}\Upsilon_{\lambda\sigma}^0], \end{aligned} \quad (3.39)$$

em que

$$\Pi_{\mu\nu}^0 = \frac{4}{3}(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)I_{\log}(m^2) + \text{termos finitos} \quad (3.40)$$

é transverso. Como as pernas dos diagramas são fótons, e a teoria possui simetria de calibre, podemos verificar a transversalidade dos termos remanescentes:

$$\begin{aligned} p^\mu \Pi_{\mu\nu} &= 4[p^\mu \Upsilon_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)p^\mu \Upsilon_{\mu\nu}^0 + \frac{1}{3}p^\mu (k_1^\lambda k_1^\sigma + k_2^\lambda k_2^\sigma + k_1^\lambda k_2^\sigma)\Upsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}^0 \\ &\quad - p^\mu (k_1 + k_2)^\lambda (k_1 + k_2)_\mu \Upsilon_{\nu\lambda}^0 - \frac{1}{2}p^\mu (k_1^\lambda k_1^\sigma + k_2^\lambda k_2^\sigma)g_{\mu\nu}\Upsilon_{\lambda\sigma}^0] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Parametrizando o vínculo $k_2 - k_1 = p$ através das relações

$$\begin{aligned} k_1 &= (\lambda - 1)p, \\ k_2 &= \lambda p, \end{aligned} \quad (3.42)$$

e, notando que, por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \Upsilon_{\mu\nu}^0 = 0 \quad (3.43)$$

e outras relações semelhantes, os termos de superfície devem ser finitos e proporcionais a uma combinação simétrica de tensores métricos. Então, eles podem ser parametrizados através de um escalar multiplicando tal combinação sobre os índices de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\mu\nu}^2 &= m^2 r g_{\mu\nu}, \\ \Upsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}^0 &= s(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}), \\ \Upsilon_{\mu\nu}^0 &= t g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

nós encontramos

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 4p^2 p_\nu \left\{ \left(\frac{m}{p} \right)^2 r - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + \lambda(\lambda - 1)]s - [(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 + (2\lambda - 1)^2]t \right\}. \quad (3.45)$$

Assim, a fim de preservar a simetria de calibre de uma maneira que não dependa da escolha de um rótulo particular, devemos levar à zero os escalares:

$$r = s = t = 0, \quad (3.46)$$

o que corresponde a fixar os termos de superfície à zero:

$$\Upsilon_{\mu\nu}^2 = \Upsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}^0 = \Upsilon_{\mu\nu}^0 = 0. \quad (3.47)$$

3.6 Exemplo II: O Tadpole

Considerando processos na QED, quando não há o ordenamento normal, aparecem diagramas como o Tadpole, que pode contribuir com correções em funções de Green de dois pontos.

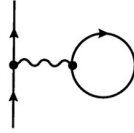


Figura 3.3: Tadpole.

Este laço tem a expressão:

$$eT^\mu = - \int_q \text{Tr} \left\{ ie\gamma^\mu \frac{i}{\not{q} - m} \right\}. \quad (3.48)$$

Pode se notar que este termo é analiticamente nulo, mas, para analisar os termos de superfície, faremos uma mudança na variável de integração $q \rightarrow q + k$.

$$eT^\mu = - \int_q \text{Tr} \left\{ ie\gamma^\mu \frac{i}{\not{q} + \not{k} - m} \right\} = e \int_q \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{q} + \not{k} + m)]}{(q + k)^2 - m^2}. \quad (3.49)$$

Como estamos interessados nos termos de superfície, explicitamos a parte divergente. Após o traço, obtemos:

$$T^\mu = 4k^2 k^\mu I_{\log}(m^2) - 16k^2 k_\nu I_{\log}^{\mu\nu} + 32k_\nu k_\lambda k_\sigma I_{\log}^{\mu\nu\lambda\sigma} - 4k^m I_{quad} + 8k_\nu I_{quad}^{\mu\nu}, \quad (3.50)$$

e, usando as relações (11) – (13), as BDIs se cancelam, e sobramos com

$$T^\mu = 8k^2 k_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} - 4k^\mu k_\lambda k_\sigma \Upsilon_0^{\lambda\sigma} - \frac{32}{6} k_\nu k_\lambda k_\sigma \Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma} - 4k_\nu \Upsilon_2^{\mu\nu}. \quad (3.51)$$

Ou, parametrizando os termos de superfície como (3.44):

$$T^\mu = [k^2(4t - 16s) - 4m^2 r] k^\mu = 0. \quad (3.52)$$

Como o valor de k é arbitrário, nos poderíamos usar valores particulares dos rótulos t , r e s para garantir o resultado, mas isso determina o valor de termos de superfície em outros cálculos, como o $\Pi^{\mu\nu}$ acima. Então, vemos que se nós firmarmos os termos de superfície em zero, nós temos um resultado nulo para o tadpole, como esperado.

Capítulo 4

A Amplitude do Espalhamento Fóton-Fóton

Nosso objetivo é então analisar, de uma maneira independente de regularização, a seção de choque diferencial para o processo de espalhamento de dois fótons. Existem seis diagramas topologicamente diferentes que correspondem a esse espalhamento, sendo que três deles estão representados na Figura 4.1. Para cada um desses três diagramas existe um outro correspondente com o laço fermiônico em sentido contrário e, então, possui respectivamente a mesma expressão, segundo o teorema de Furry, que diz que laços com número par de linhas externas de fótons são equivalentes, e os que possuem número ímpar, se anulam. Portanto, a amplitude de espalhamento pode ser escrita como sendo

$$\begin{aligned} M^{rr's's'} &= 2(M_a + M_b + M_c) \\ &= 2(M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_b^{\mu\nu\lambda\sigma} + M_c^{\mu\nu\lambda\sigma})\epsilon_\mu^r(k)\epsilon_\sigma^s(l)\epsilon_\lambda^{r'}(k')\epsilon_\nu^{s'}(l'), \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que os estados de polarização de cada fóton é representado por ϵ 's, cujos índices romanos r, r', s e s' podem assumir dois distintos valores, digamos, 1 e 2 e indicam o estado de polarização dos fótons de momento k, k', l e l' respectivamente. Para começar, a expressão

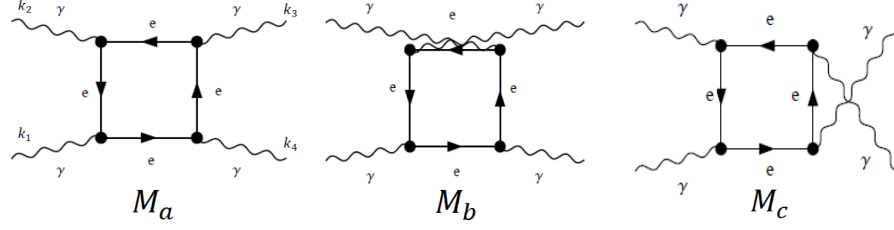


Figura 4.1: Diagramas contribuintes para o espalhamento.

matemática para a amplitude M_a pode ser escrita como

$$M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{(\not{q} - \not{l} - \not{k} + m)}{[(q-l-k)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{(\not{q} - \not{l}' + m)}{[(q-l')^2 - m^2]} \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{q} + m)}{[q^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{q} - \not{l} + m)}{[(q-l)^2 - m^2]} \right\}. \quad (4.2)$$

Podemos obter as amplitudes M_b e M_c através da amplitude M_a apenas fazendo as seguintes correspondências:

$$M_b : \quad \sigma \leftrightarrow \lambda \quad e \quad l' \leftrightarrow k' \\ M_c : \quad \sigma \leftrightarrow \mu \quad e \quad k \leftrightarrow -k'. \quad (4.3)$$

Podemos notar, através do grau superficial de divergência, que as integrais acima divergem logaritmicamente na região ultra-violeta. Apesar disso, a amplitude total — e portanto a soma dos três diagramas — deve ser finita, dado que não temos parâmetros na teoria que poderiam renormalizar uma divergência gerada por essa amplitude; precisaríamos de um termo proporcional ao produto local de quatro vetores potencial. Ainda que finita, devemos aplicar um método coerente para regularizá-las; uma integral divergente não tem um significado estrito sem tal método. Esse é o ponto mais delicado do cálculo, porque se aplicarmos uma regularização qualquer, como a regularização por *cut-off*, poderemos ter resultados que quebram alguma simetria como, por exemplo, a simetria de calibre. Porém é um ponto forte para a IReg, uma vez que ela não se utiliza de um método particular de regularização, e sim de relações de consistência algébricas entre integrais divergentes, e também tem as simetrias como base para livrar as teorias de ambiguidades.

Para escrever a amplitude (4.2) na forma conveniente para a IReg, devemos aplicar a identidade (3.14) uma vez para cada propagador do laço:

$$\begin{aligned}
M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = & -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q} - \not{l} - \not{k} + m) \left(\frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{(l+k)^2 - 2(l+k)\cdot q}{(q^2 - m^2)[q - (l+k)]^2 - m^2} \right) \right. \\
& \times \gamma^\sigma (\not{q} - \not{l}' + m) \left(\frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{l'^2 - 2l'\cdot q}{(q^2 - m^2)[(q - l')^2 - m^2]} \right) \\
& \times \gamma^\lambda \frac{(\not{q} + m)}{[q^2 - m^2]} \\
& \left. \times \gamma^\nu (\not{q} - \not{l} + m) \left(\frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{l^2 - 2l\cdot q}{(q^2 - m^2)[(q - l)^2 - m^2]} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dos termos resultantes da amplitude acima, obtemos apenas um divergente, e que origina as ambiguidades que queremos resolver:

$$D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int_q \frac{\operatorname{Tr}[\gamma^\mu \not{q} \gamma^\sigma \not{q} \gamma^\lambda \not{q} \gamma^\nu \not{q}]}{[q^2 - m^2]^4}. \tag{4.5}$$

Realizando o traço acima, nós encontramos a seguinte integral divergente:

$$\begin{aligned}
D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = & 4 \int_q \frac{1}{[q^2 - m^2]^4} [(q^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \\
& - 2q^2 (q^\mu q^\nu g^{\lambda\sigma} + q^\mu q^\sigma g^{\nu\lambda} + q^\nu q^\lambda g^{\mu\sigma} + q^\lambda q^\sigma g^{\mu\nu}) + 8q^\mu q^\nu q^\lambda q^\sigma]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A soma dos termos divergentes para cada amplitude $D^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} + D_b^{\mu\nu\lambda\sigma} + D_c^{\mu\nu\lambda\sigma}$ deve ser finita, e vamos agora resultado em alguns esquemas, para explicitar sua dependência com a regularização.

- **Integração Simétrica**

A integração simétrica consiste em supor uma fonteira simétrica esférica para uma integral regularizada, e então aplicar as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
q^\mu q^\nu & \rightarrow \frac{q^2}{4} g^{\mu\nu}, \\
q^\mu q^\nu q^\lambda q^\sigma & \rightarrow \frac{(q^2)^2}{24} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

o que leva à

$$D^{\mu\nu\lambda\sigma} = 0. \tag{4.8}$$

Podemos notar o efeito de transformações simétricas em IReg. Se aplicarmos essas transformações em (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_m} \frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)^2} &\rightarrow \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int_k \frac{g^{\mu\nu} k^2}{4(k^2 - m^2)^3} \\
&= \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int_k \frac{g^{\mu\nu} (k^2 - m^2 + m^2)}{4(k^2 - m^2)^3} \\
&= \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_k \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\
&= \frac{ig^{\mu\nu}}{32\pi^2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

o que está em claro desacordo com o valor de termos de superfície em QED, por exemplo. Essas transformações são a raiz da quebra de simetria em [11]. Como apontou [19], a invariância de calibre é garantida com a nulidade dos termos de superfície. Além do mais, como notou [20], uma situação semelhante ocorre no cálculo do decaimento do Higgs em dois fótons nas referências [21] e [22], e contestado em [23] e [24] na integral:

$$I_{\mu\nu} = \int_q \frac{g_{\mu\nu} q^2 - 4q^\mu q^\nu}{[q^2 - m^2 + i\epsilon]^3}.$$

O problema com estas integrais é que elas são do tipo $\infty - \infty$, e então fortemente dependentes da fronteira de integração, como mostra [25] que realiza os cálculos acima com uma fronteira elíptica arbitrária e mostra a dependência do resultado da integral com o parâmetro da fronteira. Comentários relevantes sobre o papel das simetrias em integrais finitas podem ser lidos em [6]

- **Regularização Dimensional(DReg)**

O método de regularização dimensional é um método válido para tratar integrais divergentes no contexto do eletrodinâmica quântica, preservando a invariância de calibre da teoria. Portanto, ele servirá como um teste de consistência para a IReg; conseguiremos ver diretamente que a nulidade dos termos de superfície é necessária no cálculo dessa amplitude. Utilizando a DReg, nós obtemos o seguinte resultado:

$$D^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{-i}{24\pi^2} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}). \tag{4.10}$$

- **Regularização Implícita**

Nós devemos expressar a integral (4.6) como uma combinação de $I_{\log}(m^2)$, $I_{\log}^{\mu\nu}(m^2)$ e $I_{\log}^{\mu\nu\lambda\sigma}(m^2)$:

$$\begin{aligned}
D_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ (g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \left[I_{\log}(m^2) - \frac{5i\pi^2}{6(2\pi)^4} \right] \right. \\
- 2 \left[g^{\mu\sigma} \left(I_{\log}^{\nu\lambda}(m^2) - \frac{i\pi}{12(2\pi)^4} \right) + g^{\lambda\sigma} \left(I_{\log}^{\mu\nu}(m^2) - \frac{i\pi}{12(2\pi)^4} \right) \right. \\
+ g^{\nu\lambda} \left(I_{\log}^{\mu\sigma}(m^2) - \frac{i\pi}{12(2\pi)^4} \right) + g^{\mu\nu} \left(I_{\log}^{\lambda\sigma}(m^2) - \frac{i\pi}{12(2\pi)^4} \right) \left. \right] \\
\left. + 8I_{\log}^{\mu\nu\lambda\sigma}(m^2) \right\}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Usamos então, as relações entre eles para escrever tudo em termos de $I_{\log}(m^2)$ e termos de superfície.

Então nós esperamos um resultado equivalente ao da DReg, e realmente nós obtemos:

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{-i}{24\pi^2} (g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) + \frac{4}{3} (g^{\mu\sigma}\Upsilon_0^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda}\Upsilon_0^{\mu\sigma} + g^{\lambda\sigma}\Upsilon_0^{\mu\nu} \\
+ g^{\mu\lambda}\Upsilon_0^{\nu\sigma} + 2g^{\nu\sigma}\Upsilon_0^{\mu\lambda} + 3g^{\mu\nu}\Upsilon_0^{\lambda\sigma}) + 16\Upsilon_0^{\mu\nu\lambda\sigma}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

onde, considerando a condição de invariância de rótulo, nós devemos avaliar os termos de superfície como nulos, recuperando identicamente o resultado para a regularização dimensional.

4.1 A Seção de Choque Diferencial: Cálculo de M_a

Aqui vamos calcular a seção de choque diferencial do espalhamento para baixas energias. A ideia é utilizar uma parametrização de Feynman e separar os integrandos por dependência na variável de integração. Depois disso, expandimos o resultado em potências da energia dos fótons e, enfim, calculamos a amplitude resultante. Antes de realizar os cálculos, devemos manipular algebricamente a amplitude para chegar numa expressão mais conveniente, e as operações se tornarem mais práticas. Começamos com uma parametrização de Feynman:

$$\begin{aligned}
M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\
\times \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{q} - \not{l} - \not{k} + m)\gamma^\sigma(\not{q} - \not{l}' + m)\gamma^\lambda(\not{q} + m)\gamma^\nu(\not{q} - \not{l} + m)]}{[q^2 - 2q \cdot A + B]^4}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

com

$$A^\mu \equiv l^\mu z_1 + (l' - l)^\mu z_2 + (k')^\mu z_3 \quad \text{e} \quad B \equiv 2l \cdot k - m^2.$$

Agora, definimos:

$$\begin{aligned} t &\equiv q - A, \\ \not{a} &\equiv \not{A} - \not{l} - \not{k}, \\ \not{b} &\equiv \not{A} - \not{l}', \\ \not{c} &\equiv \not{A}, \\ \not{d} &\equiv \not{A} - \not{l}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Perceba que, devido à amplitude ser logaritmicamente divergente e termos invariância de rótulo, a mudança no momento interno é permitida. Em outros tipos de divergências, como em integrais com divergências quadráticas, deve-se tomar cuidado ao realizar tal operação. A expressão para M_a se torna:

$$\begin{aligned} M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\ &\times \frac{\text{Tr}[(\not{t} + \not{a} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{d} + m)]}{[t^2 - A^2 + B]^4}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, nós separamos os graus de dependência em t no numerador (para não se perder nas contas, talvez seja bom olhar o apêndice B):

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{t} + \not{a} + m)\gamma^\sigma(\not{t} + \not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{t} + \not{c} + m)\gamma^\nu(\not{t} + \not{d} + m)] \\ &= t^2 F^{\mu\nu\lambda\sigma} + G^{\mu\nu\lambda\sigma} + \text{Tr}[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu], \end{aligned} \tag{4.16}$$

em que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv -4m^2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\lambda\not{c}\gamma^\nu\not{d} + \gamma^\mu\gamma^\lambda\not{b}\gamma^\sigma\gamma^\nu\not{d} \\ &\quad + \gamma^\mu\gamma^\sigma\not{b}\gamma^\lambda\not{c}\gamma^\nu + (\gamma^\mu\not{a}\gamma^\sigma)(\gamma^\lambda\gamma^\nu\not{d} + \gamma^\nu\not{c}\gamma^\lambda + \not{b}\gamma^\lambda\gamma^\nu)], \\ G^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{d} + m)\gamma^\sigma(\not{b} + m)\gamma^\lambda(\not{c} + m)\gamma^\nu(\not{d} + m)], \end{aligned} \tag{4.17}$$

para obter:

$$\begin{aligned} M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \int d^4t \\ &\times \frac{t^2 F^{\mu\nu\lambda\sigma} + G^{\mu\nu\lambda\sigma} + \text{Tr}[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu]}{[t^2 - A^2 + B]^4}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora, uma integral semelhante a (4.5) aparece:

$$I_a^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \int d^4t \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu \not{t} \gamma^\sigma \not{t} \gamma^\lambda \not{t} \gamma^\nu \not{t}]}{[t^2 - s_a]^4}, \quad (4.19)$$

com $s_a \equiv A^2 - B$. Devemos enfatizar a diferença entre as duas equações. Enquanto em (4.5) aparece o I_{log} com m^2 como argumento, em (4.19) o argumento é s_a , uma combinação de momentos externos e parâmetros de Feynman. Antes de resolver essa questão vamos usar a prescrição da IReg para manipular a integral acima, já considerando que temos a invariância de rótulo, i.e., sem termos de superfície. Obtemos assim:

$$I_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ \frac{1}{3} [g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}] (2\pi)^4 I_{log}(s_a) - \frac{i\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}. \quad (4.20)$$

Agora, a fim de se obter um I_{log} independente dos momentos externos, nós lançamos mão da relação independente de regularização (3.25) com $d=4$:

$$I_{log}(s_a) = I_{log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{m^2}{s_a} \right). \quad (4.21)$$

Então, definindo $Q^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}$, nós chegamos à seguinte contribuição para a amplitude:

$$I_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left\{ \frac{1}{3} Q^{\mu\nu\lambda\sigma} (2\pi)^4 \left[I_{log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{m^2}{s_a} \right) \right] - \frac{i\pi^2}{6} (3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}. \quad (4.22)$$

Prosseguindo, nós temos para (4.18):

$$M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 (-i\pi^2) \left\{ \frac{2F^{\mu\nu\lambda\sigma}}{B - A^2} + \frac{G^{\mu\nu\lambda\sigma}}{(B - A^2)^2} + 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{i\pi^2} I_{log}(m^2) + \ln \left(\frac{m^2}{A^2 - B} \right) \right] - 4(3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}. \quad (4.23)$$

Podemos escrever, com $\xi \equiv \omega/m$:

$$B - A^2 = m^2 \{1 - \xi^2 U_a\}, \quad (4.24)$$

em que

$$U_a = 4 \left[z_2(z_2 - z_1 - z_3) \sin^2 \frac{\theta}{2} - z_3 z_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + z_3 \right].$$

Antes de continuar, devemos expressar $F^{\mu\nu\lambda\sigma}$ and $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ em termo de outros objetos tensoriais para cálculos posteriores:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -4m^2 Q^{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{2}\omega^2 R^{\mu\nu\lambda\sigma}, \\ G^{\mu\nu\lambda\sigma} &= \omega^4 S^{\mu\nu\lambda\sigma} + m^2 \omega^2 R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + m^4 T^{\mu\nu\lambda\sigma}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \frac{1}{\omega^2} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\lambda \not{b} \gamma^\sigma \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{b} \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu \\ &\quad + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\sigma)(\gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\nu \not{d} \gamma^\lambda + \not{b} \gamma^\lambda \gamma^\nu)], \\ R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \frac{1}{\omega^2} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{b} \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{b} \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu \\ &\quad + (\gamma^\mu \not{d} \gamma^\sigma)(\gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu + \not{b} \gamma^\lambda \gamma^\nu)], \\ S^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \frac{1}{\omega^4} \text{Tr}[\gamma^\mu \not{d} \gamma^\sigma \not{b} \gamma^\lambda \not{d} \gamma^\nu], \\ T^{\mu\nu\lambda\sigma} &\equiv \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu], \end{aligned} \quad (4.26)$$

e, finalmente, nós obtemos

$$\begin{aligned} M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \times \left\{ \frac{8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} + \xi^2 R^{\mu\nu\lambda\sigma}}{1 - \xi^2 U_a} \right. \\ &\quad + \frac{\xi^4 S^{\mu\nu\lambda\sigma} + \xi^2 R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + T^{\mu\nu\lambda\sigma}}{(1 - \xi^2)^2} + 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{i\pi^2} I_{\log}(m^2) + \ln\left(\frac{m^2}{A^2 - B}\right) \right] \\ &\quad \left. - 4(3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para encontrar a aproximação para baixas energias, devemos expandir a amplitude acima em potências de ξ^2 :

$$\begin{aligned} M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} &= -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \\ &\quad \times \left\{ 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} + (R + 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} U_a) \xi^2 + (R^{\mu\nu\lambda\sigma} U_a + 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} U_a^2) \xi^4 + \dots \right. \\ &\quad + T^{\mu\nu\lambda\sigma} + (R_0^{\mu\nu\lambda\sigma} + 2T U_a) \xi^2 + (S^{\mu\nu\lambda\sigma} + 2R^{\mu\nu\lambda\sigma} U_a + 2T^{\mu\nu\lambda\sigma} U_a^2) \xi^4 + \dots \\ &\quad + 8Q^{\mu\nu\lambda\sigma} \left[\frac{(2\pi)^4}{i\pi^2} I_{\log}(m^2) + \ln(m^2) U_a \xi^2 + \frac{1}{2} U_a^2 \xi^4 + \dots \right] \\ &\quad \left. - 4(3g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 3g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - 5g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora se tornou fácil integrar sobre os parâmetros de Feynman, porque só temos polinômios. Então, na prática, poderíamos calcular a seção de choque à qualquer ordem que quisermos.

4.2 Seção de Choque Despolarizada

Prosseguindo, a seção de choque diferencial despolarizada, no referencial do centro de momentum se lê [26]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2\omega)^2} \frac{1}{4} \sum_{rr'ss'} |M|^2, \quad (4.29)$$

em que se faz a média sobre os estados iniciais de polarização e se soma sobre os estados finais.

Para uma amplitude da forma de (4.1), nós podemos fazer a correspondência

$$\sum_{rr'ss'} \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\nu(k) \rightarrow -g^{\mu\nu} \quad (4.30)$$

e encontrar:

$$\sum_{rr'ss'} |M|^2 = M_{\mu\nu\lambda\sigma}^* M^{\mu\nu\lambda\sigma}. \quad (4.31)$$

Então, após somar os três diagramas, os termos de ordem ξ^0 se anulam. Prosseguindo com a integração e a contração, que estão feitas no Apêndice B, a contribuição que resultaria em termos de ordem ξ^2, ξ^4 e ξ^6 para $|M|^2$ também se anulam. O *output* que obtemos no apêndice

$$\frac{2224 (\cos^2(\theta) + 3)^2}{2025} \quad (4.32)$$

de ser ainda multiplicado pelo devido coeficiente $4 \times \left| -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \right|^2$ para se obter $\sum_{rr'ss'} |M|^2$:

$$\sum_{rr'ss'} |M|^2 = M_{\mu\nu\lambda\sigma}^* M^{\mu\nu\lambda\sigma} = 4 \left| -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \right|^2 \times \text{output} \quad (4.33)$$

e, portanto,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(2\omega)^2} \frac{4}{4} \left| -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} i\pi^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \right|^2 \times \frac{2224 (\cos^2(\theta) + 3)^2}{2025}, \quad (4.34)$$

recuperando o resultado esperado para a seção de choque diferencial para baixas energias:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{139\alpha^4}{(180\pi)^2 m^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 (3 + \cos^2\theta)^2$$

q.e.d. (4.35)

Capítulo 5

Resultados e Conclusões

Neste trabalho calculamos o espalhamento fóton-fóton a baixas energias e encontramos uma seção de choque invariante de calibre. Vimos que este cálculo possui ambiguidades não fixadas por sua Lagrangeana; sua seção de choque, por ser finita mas com diagramas parciais divergentes, é altamente dependente de regularização. Vimos que a integração simétrica não é confiável, porque, dado que a escolha de uma fronteira de integração particular equivale a uma ordem de integração particular, somado ao fato de que a amplitude total se origina da diferença finita de integrais divergentes, a escolha da fronteira atua diretamente no resultado final. Sendo assim, a integração simétrica se torna imprópria para tais casos. A regularização implícita se mostrou totalmente conveniente para amplitudes finitas, e suas ambiguidades foram resolvidas naturalmente com base em invariância de rótulo e simetria de calibre. Os resultados encontrados estão em concordância com outros presentes na literatura.

Apêndice A

A representação de Schrödinger, Heisenberg e de Interação

Neste apêndice, descrevo as várias representações da mecânica quântica, que são formalismos empregados para descrever a evolução do sistema e de suas qualidades. As diversas representações estão ligadas entre si por transformações unitárias, e basicamente o que muda de uma para outra é onde se encontra a dependência temporal e como é a equação de movimento. Aqui falo de três representações: a representação de Schrödinger (R.S.), a de Heisenberg (R.H.) e a de interação (R.I.). A representação de interação é intermediária à de Schrödinger, cuja evolução do sistema no tempo está contida nos estados, e de Heisenberg, cuja evolução está contida nos operadores.

Na R.S., os estados são regidos pela equação de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |A, t\rangle_S = H |A, t\rangle_S. \quad (\text{A.1})$$

Se o estado inicial do sistema é $|A, t_0\rangle_S$, a solução para o sistema acima pode ser escrita como

$$|A, t\rangle_S = U_S(t) |A, t_0\rangle_S \quad (\text{A.2})$$

com

$$U_S(t) = e^{-iH(t-t_0)}. \quad (\text{A.3})$$

A conexão do formalismo de Schrödinger com a R.H. se dá através de operadores unitários que transportam a dependência temporal para os observáveis:

$$O^H(t) = U_S^\dagger(t) O^S U_S(t). \quad (\text{A.4})$$

Os estados de Heisenberg são

$$|A\rangle_H = |A, t_0\rangle_S. \quad (\text{A.5})$$

A equivalência destas descrições pode ser vista no modo como elas deixam invariante o elemento de matriz de um operador

$${}_S \langle B, t | O^S | A, t \rangle_S = {}_H \langle B, t | O^H | A, t \rangle_H. \quad (\text{A.6})$$

Se derivarmos a equação (A.4), encontramos a evolução dos observáveis na R.H.:

$$i \frac{d}{dt} O^H(t) = [O^H(t), H]. \quad (\text{A.7})$$

Para passarmos para a representação de interação(R.I.), separamos o Hamiltoniano em duas partes:

$$H = H_0 + H_I. \quad (\text{A.8})$$

em que H_0 é a parte livre e H_I é a parte de interação do Hamiltoniano.

Na representação de interação, a dependência temporal se distribui nos estados e nos operadores. Definindo

$$U_0(t) = e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (\text{A.9})$$

um observável na R.I. passa a ser definido como

$$O^I(t) = U_0^\dagger(t) O^S U_0(t), \quad (\text{A.10})$$

e os estados,

$$|A, t\rangle_I = U_0^\dagger(t) |A, t\rangle_S. \quad (\text{A.11})$$

Note também que

$$H_0^I = H_0^S = H_0. \quad (\text{A.12})$$

Assim, a equação de movimento para os operadores se torna

$$i \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0], \quad (\text{A.13})$$

e para os estados:

$$i \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I = H_I^I(t) |A, t\rangle_I. \quad (\text{A.14})$$

Podemos relacionar os operadores e os estados na R.I. com a R.H.:

$$O^I(t) = U(t) O^H(t) U^\dagger(t) \quad (\text{A.15})$$

e

$$|A, t\rangle_I = U(t) |A\rangle_H. \quad (\text{A.16})$$

Apêndice B

Cálculo da Amplitude Despolarizada

Aqui apresento uma representação prática para produtos distributivos não comutativos, como a amplitude (4.2). Apesar dos existentes recursos computacionais, essa prática é particularmente útil para separar as dependências na variável de integração, massa e momento externo e para não se perder no meio de tantos termos. Em seguida apresento o cálculo das contrações presentes em (4.28) como foi feito, através do software Wolfram Mathematica[®].

B.1 Desenvolvendo Produtos

Considere a amplitude usada neste trabalho:

$$M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{(\not{q} - \not{l} - \not{k} + m)}{[(q-l-k)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{(\not{q} - \not{l}' + m)}{[(q-l')^2 - m^2]} \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{q} + m)}{[q^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{q} - \not{l} + m)}{[(q-l)^2 - m^2]} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

podemos escrevê-la da forma geral:

$$\begin{aligned}
 M_a^{\mu\nu\lambda\sigma} = & -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{(\not{q} + P_1 + m)}{[(q-l-k)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{(\not{q} + P_2 + m)}{[(q-l')^2 - m^2]} \right. \\
 & \left. \times \gamma^\lambda \frac{(\not{q} + P_3 + m)}{[q^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{(\not{q} + P_4 + m)}{[(q-l)^2 - m^2]} \right\}. \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

em que P_i representa uma soma dos momentos externos (ao loop) presentes no propagador.

Podemos representar a multiplicação com uma contagem ternária, em que $q \rightarrow 0$, $P_i \rightarrow 1$ e $m \rightarrow 2$, de tal forma que a integral acima, depois de se ter feito os produtos distributivos, fica representada por

$$\begin{aligned}
 & 0000 + 0001 + 0002 + 0010 + 0011 + 0012 + \dots + \\
 & + 1000 + 1001 + 1002 + 1010 + 1011 + \dots + \\
 & + \dots + 2211 + 2212 + 2220 + 2221 + 2222. \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

em que, por exemplo,

$$\begin{aligned}
 0000 \equiv & -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{q}}{[(q-l-k)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{\not{q}}{[(q-l')^2 - m^2]} \right. \\
 & \left. \times \gamma^\lambda \frac{\not{q}}{[q^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{\not{q}}{[(q-l)^2 - m^2]} \right\} \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 1122 \equiv & -\frac{(ie)^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{P_1}{[(q-l-k)^2 - m^2]} \gamma^\sigma \frac{P_2}{[(q-l')^2 - m^2]} \right. \\
 & \left. \times \gamma^\lambda \frac{m}{[q^2 - m^2]} \gamma^\nu \frac{m}{[(q-l)^2 - m^2]} \right\}. \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

Dessa maneira é fácil identificar a dependência na variável de integração — contando a quantidade de vezes que o número 0 aparece — ficando fácil separar as ordens e eliminar potências ímpares. Podemos também contar a quantidade de matrizes γ através do número de termos do produto menos a quantidade de termos que correspondem à massa (2) (0102, por exemplo, tem sete matrizes γ presentes no traço, e portanto é um termo nulo.)

B.2 O Algoritmo

O algoritmo abaixo foi feito usando o pacote "High Energy Physics" do software Mathematica. Cito alguns comandos úteis:

- FCI]] : serve para traduzir as expressões padrão para a linguagem aceita pelo pacote *FeynCalc*
- definir matrizes gamma e quadrimomentos barrados: $\gamma^\sigma = \text{GA}[\sigma]$ e $\not{p} = \text{GS}[p]$
- realizar traço de matrizes gamma: `DiracTrace[argumento, DiracTraceEvaluate \rightarrow true]`,
- produtos escalares e tensores: `Pair[Momentum[p], Momentum[q]] = p.q;`
 $g^{\mu\nu} = \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{LorentzIndex}[\nu]] = \text{FCI}[\text{MT}[\mu, \nu]]$

A sequência de passos e os comandos não foram feitos da maneira mais simples possível, pois o processo aqui transcrito foi também de aprendizado, e tudo vai ficando mais prático à medida em que se exploram as técnicas. A idéia básica é definir os objetos tensoriais como feito em (4.26), definir os produtos escalares (que talvez poderia ser usado um *upvalue* ou *downvalue*) depois integrar nos parâmetros de Feynman a expansão em ordens de ξ^2 em (4.26). Em seguida contraio os termos da integral na seguinte ordem: a parte de ξ^2 com ξ^2 , ξ^4 com ξ^4 e por fim ξ^2 com ξ^4 . O primeiro termo — que corresponde à ordem ξ^4 — e o último termo ($O(\xi^6)$) dão um valor nulo para a contração, e o últimos nos leva à expressão invariante de calibre existente na literatura, proporcional à ξ^8 . No fim há um teste de transversalidade, que também respeita a invariância de calibre. No algoritmo na maior parte está presente aqui apenas os *inputs* (em negrito), para não ficar muito extenso.

O algoritmo segue:

<< **HighEnergyPhysicsFeynCalc**

Loading FeynCalc from C:\ProgramData\Mathematica\Applications\HighEnergyPhysics

FeynCalc 8.1.0 For help, type ?FeynCalc, open FeynCalcRef8.nb or visit www.feyncalc.org

Loading FeynArts, see www.feynarts.de for documentation

FeynArts 3.4 patched for use with FeynCalc

P1 = GA[μ]

P2 = GA[σ]

P3 = GA[λ]

P4 = GA[ν]

P5 = GS[a]

P6 = GS[b]

$$P7 = \text{GS}[c]$$

$$P8 = \text{GS}[d]$$

$$P0 = \text{GS}[t]$$

$$\gamma^\mu$$

$$\gamma^\sigma$$

$$\gamma^\lambda$$

$$\gamma^\nu$$

$$\gamma \cdot a$$

$$\gamma \cdot b$$

$$\gamma \cdot c$$

$$\gamma \cdot d$$

$$\gamma \cdot t$$

$$Q = \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{LorentzIndex}[\sigma]] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\lambda], \text{LorentzIndex}[\nu]]$$

$$+\text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{LorentzIndex}[\nu]] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\sigma], \text{LorentzIndex}[\lambda]]$$

$$-2\text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{LorentzIndex}[\lambda]] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\sigma], \text{LorentzIndex}[\nu]]$$

$$g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\sigma} - 2g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma}$$

$$R =$$

$$\text{Expand}[$$

$$(1/w^2)(\text{DiracTrace}[P1, P2, P3, P7, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P3, P6, P2, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P2, P6, P3, P7, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P3, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P4, P7, P3, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P6, P3, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]]]$$

$$Ro =$$

$$\text{Expand}[(1/w^2)(\text{DiracTrace}[P1, P2, P3, P7, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P2, P6, P3, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P2, P6, P3, P7, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P3, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P3, P7, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$+\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P6, P3, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]]]$$

$$S = \text{Expand}[(1/w^4)\text{DiracTrace}[P1, P5, P2, P6, P3, P7, P4, P8, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]]$$

$$T = \text{DiracTrace}[P1, P2, P3, P4, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}]$$

$$4 (g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma})$$

$$B = 2z3kl - m^2$$

$$A = lz1 + (l' - l)z2 + k'z3$$

$$2klz3 - m^2$$

$$z3k' + z2 (l' - l) + lz1$$

$$BA2x = \text{Expand}[(B - A^2)] \text{ (*Para calcular } Ua^*)$$

$$-2z2z3k'l' - 2lz1z3k' + 2lz2z3k' - z3^2 (k')^2 + 2klz3 + l^2 (-z1^2) + 2l^2z1z2 - l^2z2^2 - 2lz1z2l' + 2lz2^2l' - z2^2 (l')^2 - m^2$$

$$BA2a = \text{Expand}[BA2x/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta])\}]$$

$$Ua = \text{Expand}[((-BA2a/m^2) - 1)/(-w^2/m^2)]$$

$$2z1z2 \cos(\theta) - 2z1z2 - 2z1z3 \cos(\theta) - 2z1z3 - 2z2^2 \cos(\theta) + 2z2^2 + 2z2z3 \cos(\theta) - 2z2z3 + 4z3$$

$$\text{Expand}[4(z2(z2 - z1 - z3)((1 - \text{Cos}[\theta])/2) - z3z1((1 + \text{Cos}[\theta])/2) + z3)]$$

$$2z1z2 \cos(\theta) - 2z1z2 - 2z1z3 \cos(\theta) - 2z1z3 - 2z2^2 \cos(\theta) + 2z2^2 + 2z2z3 \cos(\theta) - 2z2z3 + 4z3$$

$$Aa = (z1 - z2 - 1)l + z2l' + z3k' - k$$

$$Bb = (z1 - z2)l + (z2 - 1)l' + z3k'$$

$$Cc = (z1 - z2)l + z2l' + z3k'$$

$$Dd = (z1 - z2 - 1)l + z2l' + z3k'$$

$$ab = \text{Expand}[AaBb]$$

(*calculando produtos escalares*)

$$ac = \text{Expand}[AaCc]$$

$$ad = \text{Expand}[AaDd]$$

$$bc = \text{Expand}[BbCc]$$

$$bd = \text{Expand}[BbDd]$$

$$\mathbf{cd} = \mathbf{Expand}[\mathbf{CcDd}]$$

$$\mathbf{aa} = \mathbf{Expand}[\mathbf{AaAa}]$$

$$\mathbf{bb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{BbBb}]$$

$$\mathbf{cc} = \mathbf{Expand}[\mathbf{CcCc}]$$

$$\mathbf{dd} = \mathbf{Expand}[\mathbf{DdDd}]$$

$$2z_2z_3k'l' - z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - lz_3k' + z^3(k')^2 - kz_3k' - kz_2l' + kl' - klz_1 + klz_2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - l^2z_1 + l^2z_2^2 + l^2z_2 + 2lz_1z_2l' - lz_1l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - z_2(l')^2 + ll'$$

$$2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - lz_3k' + z^3(k')^2 - kz_3k' - kz_2l' - klz_1 + klz_2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - l^2z_1 + l^2z_2^2 + l^2z_2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - lz_2l'$$

$$2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - 2lz_3k' + z^3(k')^2 - kz_3k' - kz_2l' - klz_1 + klz_2 + kl + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - 2l^2z_1 + l^2z_2^2 + 2l^2z_2 + l^2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - 2lz_2l'$$

$$2z_2z_3k'l' - z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 + l^2z_2^2 + 2lz_1z_2l' - lz_1l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 + lz_2l' - z_2(l')^2$$

$$2z_2z_3k'l' - z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - lz_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - l^2z_1 + l^2z_2^2 + l^2z_2 + 2lz_1z_2l' - lz_1l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - z_2(l')^2 + ll'$$

$$2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - lz_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - l^2z_1 + l^2z_2^2 + l^2z_2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - lz_2l'$$

$$k^2 + 2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - 2lz_3k' + z^3(k')^2 - 2kz_3k' - 2kz_2l' - 2klz_1 + 2klz_2 + 2kl + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - 2l^2z_1 + l^2z_2^2 + 2l^2z_2 + l^2 + 2lz_1z_2l' + z^2(l')^2 - 2lz_2^2l' - 2lz_2l'$$

$$2z_2z_3k'l' - 2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 + l^2z_2^2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_1l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 + 2lz_2l' - 2z_2(l')^2 + (l')^2$$

$$2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 + l^2z_2^2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2$$

$$2z_2z_3k'l' + 2lz_1z_3k' - 2lz_2z_3k' - 2lz_3k' + z^3(k')^2 + l^2z_1^2 - 2l^2z_1z_2 - 2l^2z_1 + l^2z_2^2 + 2l^2z_2 + l^2 + 2lz_1z_2l' - 2lz_2^2l' + z^2(l')^2 - 2lz_2l'$$

$$\mathbf{AA} = \mathbf{Expand}[\mathbf{aa}/\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge}2, kl' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge}2, ll' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}]$$

$$\mathbf{BB} = \mathbf{Expand}[\mathbf{bb}/\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge}2, kl' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge}2, ll' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}]$$

$$\mathbf{CC} = \mathbf{Expand}[\mathbf{cc}/\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge}2, kl' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge}2, ll' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}]$$

$$\mathbf{DD} = \mathbf{Expand}[\mathbf{dd}/\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$\begin{aligned}
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{AB} &= \text{Expand}[ab/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{AC} &= \text{Expand}[ac/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{AD} &= \text{Expand}[ad/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{BC} &= \text{Expand}[bc/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{BD} &= \text{Expand}[bd/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]) \\
 \text{CD} &= \text{Expand}[cd/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), \\
 &kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])
 \end{aligned}$$

$$-2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 4w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 4w^2z_3 + 4w^2$$

$$2w^2z_1 \cos(\theta) - 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - 2w^2z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + 2w^2z_2 - 4w^2z_3$$

$$-2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3$$

$$-2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 2w^2z_2 - 2w^2z_3 \cos(\theta) - 2w^2z_3$$

$$w^2z_1 \cos(\theta) - 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 3w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - w^2z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + w^2z_2 - 4w^2z_3 + 2w^2$$

$$-2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 2w^2z_3$$

$$-2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + w^2z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - w^2z_2 - w^2z_3 \cos(\theta) - 3w^2z_3 + 2w^2$$

$$w^2z_1 \cos(\theta) - 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - w^2z_1 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - w^2z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + w^2z_2 - 2w^2z_3$$

$$\begin{aligned}
 & -w^2 \cos(\theta) + w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 + 2w^2 z_1 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_3 - w^2 z_1 + \\
 & 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 - w^2 z_3 \cos(\theta) - 3w^2 z_3 + w^2 \\
 & -2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 + 2w^2 z_1 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 + w^2 z_2 \cos(\theta) - \\
 & 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 - w^2 z_2 - w^2 z_3 \cos(\theta) - w^2 z_3
 \end{aligned}$$

$$E2ax = \text{Expand}[R + Ro + 2TUa + 16QUa]$$

$$E2a =$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Expand}[E2ax/.\{\text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[b]] \rightarrow \text{AB}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[c]] \\
 & \rightarrow \text{AC}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \text{AD}, \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[c]] \rightarrow \text{BC}, \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \text{BD}, \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \text{CD}, \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[a]] \rightarrow \text{AA}, \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[b]] \rightarrow \text{BB}, \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{Momentum}[c]] \rightarrow \text{CC}, \text{Pair}[\text{Momentum}[d], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \text{DD}, \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{LorentzIndex}[i_]] \rightarrow (z_1 - z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[i]] \\
 & + z_2 \text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[i]] + z_3 \text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[i]] \\
 & - \text{Pair}[\text{Momentum}[k], \text{LorentzIndex}[i]], \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{LorentzIndex}[j_]] \rightarrow (z_1 - z_2)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[j]] \\
 & + (z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[j]] + z_3 \text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[j]], \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{LorentzIndex}[zx_]] \rightarrow (z_1 - z_2)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[zx]] \\
 & + z_2 \text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[zx]] + z_3 \text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[zx]], \\
 & \text{Pair}[\text{Momentum}[d], \text{LorentzIndex}[as_]] \rightarrow (z_1 - z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[as]] \\
 & + z_2 \text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[as]] + z_3 \text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[as]]\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Integrate}[E2a, \{z_3, 0, z_2\}]$$

$$\text{Integrate}[\%, \{z_2, 0, z_1\}]$$

$$\text{Integrate}[\%, \{z_1, 0, 1\}]$$

$$E2af = \%$$

$$N\text{Terms}[\%]$$

92

$$Bib = B/.\{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

$$2klz_3 - m^2$$

$$Aib = A/.\{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

$$z^2(k' - l) + z^3l' + lz_1$$

A

$$z^3k' + z^2(l' - l) + lz_1$$

$$\mathbf{BA2bx} = \mathbf{Expand}[\mathbf{Bib} - (\mathbf{Aib})^{\wedge 2}]$$

$$\mathbf{BA2b} = \mathbf{Expand}[\mathbf{BA2bx} /. \{l^{\wedge 2} \rightarrow 0, k^{\wedge 2} \rightarrow 0, l'^{\wedge 2} \rightarrow 0, k'^{\wedge 2} \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge 2}(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge 2}, kl' \rightarrow w^{\wedge 2}(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge 2}, ll' \rightarrow w^{\wedge 2}(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge 2}(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}]$$

$$-m^2 - 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) - 2w^2z_1z_2 + 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) - 2w^2z_1z_3 + 2w^2z_2^2 \cos(\theta) + 2w^2z_2^2 -$$

$$2w^2z_2z_3 \cos(\theta) - 2w^2z_2z_3 + 4w^2z_3$$

$$\mathbf{Ub} = \mathbf{Expand}[\mathbf{((-BA2b/m^{\wedge 2}) - 1)/(-w^{\wedge 2}/m^{\wedge 2})}]$$

$$\mathbf{Ua} = \mathbf{Expand}[\mathbf{((-BA2a/m^{\wedge 2}) - 1)/(-w^{\wedge 2}/m^{\wedge 2})}]$$

$$-2z_1z_2 \cos(\theta) - 2z_1z_2 + 2z_1z_3 \cos(\theta) - 2z_1z_3 + 2z_2^2 \cos(\theta) + 2z_2^2 - 2z_2z_3 \cos(\theta) - 2z_2z_3 + 4z_3$$

$$2z_1z_2 \cos(\theta) - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 \cos(\theta) - 2z_1z_3 - 2z_2^2 \cos(\theta) + 2z_2^2 + 2z_2z_3 \cos(\theta) - 2z_2z_3 + 4z_3$$

$$\mathbf{Aab} = \mathbf{Aa} /. \{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

Aa

$$\mathbf{Bbb} = \mathbf{Bb} /. \{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

Bb

$$\mathbf{Ccb} = \mathbf{Cc} /. \{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

Cc

$$\mathbf{Ddb} = \mathbf{Dd} /. \{l' \rightarrow k', k' \rightarrow l'\}$$

Dd

$$z^2k' - k + z^3l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$z^3k' - k + z^2l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$(z^2 - 1)k' + z^3l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z^3k' + (z^2 - 1)l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z^2k' + z^3l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z^3k' + z^2l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z^2k' + z^3l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$z^3k' + z^2l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$\mathbf{abb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{AabBbb}]$$

$$\mathbf{acb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{AabCcb}]$$

$$\mathbf{adb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{AabDdb}]$$

$$\mathbf{bcb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{BbbCcb}]$$

$$\mathbf{bdb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{BbbDdb}]$$

$$\mathbf{cdb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{CcbDdb}]$$

$$\mathbf{aab} = \mathbf{Expand}[\mathbf{AabAab}]$$

$$\mathbf{bbb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{BbbBbb}]$$

$$\mathbf{ccb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{CcbCcb}]$$

$$\mathbf{ddb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{DdbDdb}]$$

$$2z2z3k'l' - z3k'l' + 2lz1z2k' - lz1k' - 2lz2^2k' + lk' + z2^2(k')^2 - z2(k')^2 - kz2k' + kk' - kz3l' - klz1 + klz2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - l^2z1 + l^2z2^2 + l^2z2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - lz3l'$$

$$2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' - lz2k' + z2^2(k')^2 - kz2k' - kz3l' - klz1 + klz2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - l^2z1 + l^2z2^2 + l^2z2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - lz3l'$$

$$2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' - 2lz2k' + z2^2(k')^2 - kz2k' - kz3l' - klz1 + klz2 + kl + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - 2l^2z1 + l^2z2^2 + 2l^2z2 + l^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - 2lz3l'$$

$$2z2z3k'l' - z3k'l' + 2lz1z2k' - lz1k' - 2lz2^2k' + lz2k' + z2^2(k')^2 - z2(k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 + l^2z2^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2$$

$$2z2z3k'l' - z3k'l' + 2lz1z2k' - lz1k' - 2lz2^2k' + lk' + z2^2(k')^2 - z2(k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - l^2z1 + l^2z2^2 + l^2z2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - lz3l'$$

$$2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' - lz2k' + z2^2(k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - l^2z1 + l^2z2^2 + l^2z2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - lz3l'$$

$$k^2 + 2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' - 2lz2k' + z2^2(k')^2 - 2kz2k' - 2kz3l' - 2klz1 + 2klz2 + 2kl + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - 2l^2z1 + l^2z2^2 + 2l^2z2 + l^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - 2lz3l'$$

$$2z2z3k'l' - 2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz1k' - 2lz2^2k' + 2lz2k' + z2^2(k')^2 - 2z2(k')^2 + (k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 + l^2z2^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2$$

$$2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' + z2^2(k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 + l^2z2^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2$$

$$2z2z3k'l' + 2lz1z2k' - 2lz2^2k' - 2lz2k' + z2^2(k')^2 + l^2z1^2 - 2l^2z1z2 - 2l^2z1 + l^2z2^2 + 2l^2z2 + l^2 + 2lz1z3l' - 2lz2z3l' + z3^2(l')^2 - 2lz3l'$$

$$\mathbf{AAb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{aab}/.\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge}2, kl' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge}2, ll' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}\}$$

$$\mathbf{BBb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{bbb}/.\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^{\wedge}2, kl' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^{\wedge}2, ll' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]), lk' \rightarrow w^{\wedge}2(1 + \mathbf{Cos}[\theta])\}\}$$

$$\mathbf{CCb} = \mathbf{Expand}[\mathbf{ccb}/.\{l^{\wedge}2 \rightarrow 0, k^{\wedge}2 \rightarrow 0, l'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k'^{\wedge}2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^{\wedge}2(1 - \mathbf{Cos}[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$DDb = \text{Expand}[ddb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$ABb = \text{Expand}[abb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$ACb = \text{Expand}[acb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$ADb = \text{Expand}[adb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$BCb = \text{Expand}[bcb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$BDb = \text{Expand}[bdb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$CDb = \text{Expand}[cdb/.\{l^2 \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0, l'^2 \rightarrow 0, k'^2 \rightarrow 0, k k' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]),$$

$$kl \rightarrow 2w^2, kl' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta]), k'l' \rightarrow 2w^2, ll' \rightarrow w^2(1 - \cos[\theta]), lk' \rightarrow w^2(1 + \cos[\theta])\}}\}$$

$$2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 4w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 4w^2z_3 + 4w^2$$

$$-2w^2z_1 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + 2w^2z_2 - 4w^2z_3$$

$$2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3$$

$$2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - 2w^2z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 2w^2z_2 + 2w^2z_3 \cos(\theta) - 2w^2z_3$$

$$-w^2z_1 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 3w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + w^2z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + w^2z_2 - 4w^2z_3 + 2w^2$$

$$2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - 2w^2z_3$$

$$2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - w^2z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - w^2z_2 + w^2z_3 \cos(\theta) - 3w^2z_3 + 2w^2$$

$$\begin{aligned}
 & -w^2z_1 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - w^2z_1 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - \\
 & 2w^2z_2^2 + w^2z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + w^2z_2 - 2w^2z_3 \\
 & w^2 \cos(\theta) - w^2z_1 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - w^2z_1 - \\
 & 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 + 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 + w^2z_3 \cos(\theta) - 3w^2z_3 + w^2 \\
 & 2w^2z_1z_2 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_2 - 2w^2z_1z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_1z_3 - 2w^2z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2z_2^2 - w^2z_2 \cos(\theta) + \\
 & 2w^2z_2z_3 \cos(\theta) + 2w^2z_2z_3 - w^2z_2 + w^2z_3 \cos(\theta) - w^2z_3
 \end{aligned}$$

Expand[R]

$$\mathbf{Rb} = \text{Expand}[\mathbf{R}/.\{\sigma \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma\}]$$

$$\mathbf{Rob} = \text{Expand}[\mathbf{Ro}/.\{\sigma \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma\}]$$

$$\mathbf{Tb} = \text{Expand}[\mathbf{T}/.\{\sigma \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma\}]$$

Expand[T]

$$\mathbf{Sb} = \text{Expand}[\mathbf{S}/.\{\sigma \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma\}]$$

$$\mathbf{Qb} = \text{Expand}[\mathbf{Q}/.\{\sigma \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma\}]$$

$$\mathbf{E2bxx} = \text{Expand}[\mathbf{Rb} + \mathbf{Rob} + 2\mathbf{TbUb} + 16\mathbf{QbUb}]$$

E2b =

$$\text{Expand}[\mathbf{E2bxx}/.\{\text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[b]] \rightarrow \mathbf{ABb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[c]] \rightarrow$$

$$\mathbf{ACb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{ADb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[c]] \rightarrow \mathbf{BCb},$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{BDb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{CDb},$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[a]] \rightarrow \mathbf{AAb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[b]] \rightarrow \mathbf{BBb},$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{Momentum}[c]] \rightarrow \mathbf{CCb}, \text{Pair}[\text{Momentum}[d], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{DDb},$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{LorentzIndex}[i_]] \rightarrow (z_1 - z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[i]] +$$

$$z_2\text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[i]] + z_3\text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[i]]$$

$$- \text{Pair}[\text{Momentum}[k], \text{LorentzIndex}[i]], \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{LorentzIndex}[j_]] \rightarrow$$

$$(z_1 - z_2)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[j]] + (z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[j]]$$

$$+ z_3\text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[j]], \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{LorentzIndex}[zx_]] \rightarrow$$

$$(z_1 - z_2)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[zx]] + z_2\text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[zx]]$$

$$+ z_3\text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[zx]], \text{Pair}[\text{Momentum}[d], \text{LorentzIndex}[as_]] \rightarrow$$

$$(z_1 - z_2 - 1)\text{Pair}[\text{Momentum}[l], \text{LorentzIndex}[as]] + z_2\text{Pair}[\text{Momentum}[k'], \text{LorentzIndex}[as]]$$

$$+ z_3\text{Pair}[\text{Momentum}[l'], \text{LorentzIndex}[as]]\}}]$$

Integrate[E2b, {z3, 0, z2}]

Integrate[%, {z2, 0, z1}]

E2bf = Integrate[%, {z1, 0, 1}]

NTerms[%]

92

Bic = B/.{k → -k', k' → -k}

B

$-2lz3k' - m^2$

$2klz3 - m^2$

Aic = A/.{k → -k', k' → -k}

A

$-kz3 + z2(l' - l) + lz1$

$z3k' + z2(l' - l) + lz1$

BA2cx = Expand[Bic - (Aic)^2]

$-k^2z3^2 - 2lz3k' + 2kz2z3l' + 2klz1z3 - 2klz2z3 + l^2(-z1^2) + 2l^2z1z2 - l^2z2^2 - 2lz1z2l' + 2lz2^2l' - z2^2(l')^2 - m^2$

BA2c = Expand[BA2cx/.{l^2 → 0, k^2 → 0, l'^2 → 0, k'^2 → 0, k k' → w^2(1 - Cos[θ]),

kl → 2w^2, kl' → w^2(1 + Cos[θ]), k'l' → 2w^2, ll' → w^2(1 - Cos[θ]), lk' → w^2(1 + Cos[θ])}]

$-m^2 + 2w^2z1z2 \cos(\theta) - 2w^2z1z2 + 4w^2z1z3 - 2w^2z2^2 \cos(\theta) + 2w^2z2^2 + 2w^2z2z3 \cos(\theta) - 2w^2z2z3 - 2w^2z3 \cos(\theta) - 2w^2z3$

Uc = Expand[(((-BA2c/m^2) - 1)/(-w^2/m^2))]

Ua = Expand[(((-BA2a/m^2) - 1)/(-w^2/m^2))]

$2z1z2 \cos(\theta) - 2z1z2 + 4z1z3 - 2z2^2 \cos(\theta) + 2z2^2 + 2z2z3 \cos(\theta) - 2z2z3 - 2z3 \cos(\theta) - 2z3$

$2z1z2 \cos(\theta) - 2z1z2 - 2z1z3 \cos(\theta) - 2z1z3 - 2z2^2 \cos(\theta) + 2z2^2 + 2z2z3 \cos(\theta) - 2z2z3 + 4z3$

Aac = Aa/.{k → -k', k' → -k}

Aa

Bbc = Bb/.{k → -k', k' → -k}

Bb

Ccc = Cc/.{k → -k', k' → -k}

Cc

$$\text{Ddc} = \text{Dd} / \{ \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}', \mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k} \}$$

Dd

$$k' - kz_3 + z_2 l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$z_3 k' - k + z_2 l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$-kz_3 + (z_2 - 1)l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z_3 k' + (z_2 - 1)l' + l(z_1 - z_2)$$

$$-kz_3 + z_2 l' + l(z_1 - z_2)$$

$$z_3 k' + z_2 l' + l(z_1 - z_2)$$

$$-kz_3 + z_2 l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$z_3 k' + z_2 l' + l(z_1 - z_2 - 1)$$

$$\mathbf{abc} = \text{Expand}[\mathbf{AacBbc}]$$

$$\mathbf{acc} = \text{Expand}[\mathbf{AacCcc}]$$

$$\mathbf{adc} = \text{Expand}[\mathbf{AacDdc}]$$

$$\mathbf{bcc} = \text{Expand}[\mathbf{BbcCcc}]$$

$$\mathbf{bdc} = \text{Expand}[\mathbf{BbcDdc}]$$

$$\mathbf{cdc} = \text{Expand}[\mathbf{CccDdc}]$$

$$\mathbf{aac} = \text{Expand}[\mathbf{AacAac}]$$

$$\mathbf{bbc} = \text{Expand}[\mathbf{BbcBbc}]$$

$$\mathbf{ccc} = \text{Expand}[\mathbf{CccCcc}]$$

$$\mathbf{ddc} = \text{Expand}[\mathbf{DdcDdc}]$$

$$k^2 z_3^2 + z_2 k' l' - k' l' + l z_1 k' - l z_2 k' - k z_3 k' - 2k z_2 z_3 l' + k z_3 l' - 2k l z_1 z_3 + 2k l z_2 z_3 + k l z_3 + l^2 z_1^2 - 2l^2 z_1 z_2 - l^2 z_1 + l^2 z_2^2 + l^2 z_2 + 2l z_1 z_2 l' - l z_1 l' - 2l z_2^2 l' + z_2^2 (l')^2 - z_2 (l')^2 + l l'$$

$$k^2 z_3^2 + z_2 k' l' + l z_1 k' - l z_2 k' - k z_3 k' - 2k z_2 z_3 l' - 2k l z_1 z_3 + 2k l z_2 z_3 + k l z_3 + l^2 z_1^2 - 2l^2 z_1 z_2 - l^2 z_1 + l^2 z_2^2 + l^2 z_2 + 2l z_1 z_2 l' - 2l z_2^2 l' + z_2^2 (l')^2 - l z_2 l'$$

$$k^2 z_3^2 + z_2 k' l' + l z_1 k' - l z_2 k' - l k' - k z_3 k' - 2k z_2 z_3 l' - 2k l z_1 z_3 + 2k l z_2 z_3 + 2k l z_3 + l^2 z_1^2 - 2l^2 z_1 z_2 - 2l^2 z_1 + l^2 z_2^2 + 2l^2 z_2 + l^2 + 2l z_1 z_2 l' - 2l z_2^2 l' + z_2^2 (l')^2 - 2l z_2 l'$$

$$k^2 z_3^2 - 2k z_2 z_3 l' + k z_3 l' - 2k l z_1 z_3 + 2k l z_2 z_3 + l^2 z_1^2 - 2l^2 z_1 z_2 + l^2 z_2^2 + 2l z_1 z_2 l' - l z_1 l' - 2l z_2^2 l' + z_2^2 (l')^2 + l z_2 l' - z_2 (l')^2$$

$$k^2 z_3^2 - 2k z_2 z_3 l' + k z_3 l' - 2k l z_1 z_3 + 2k l z_2 z_3 + k l z_3 + l^2 z_1^2 - 2l^2 z_1 z_2 - l^2 z_1 + l^2 z_2^2 + l^2 z_2 + 2l z_1 z_2 l' - l z_1 l' - 2l z_2^2 l' + z_2^2 (l')^2 - z_2 (l')^2 + l l'$$

$$\begin{aligned}
& -2w^2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - \\
& 2w^2 z_2^2 - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 + 2w^2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_3 - 2w^2 \\
& 2w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 - 2w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - \\
& 2w^2 z_2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 + 2w^2 z_2 + 2w^2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_3 \\
& -2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 \\
& -2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 + 2w^2 z_2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + \\
& 2w^2 z_2 z_3 - 2w^2 z_2 + 4w^2 z_3 \\
& -w^2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - \\
& w^2 z_2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 + w^2 z_2 + 2w^2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_3 - w^2 \\
& w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + \\
& 2w^2 z_2 z_3 + w^2 z_3 \cos(\theta) + w^2 z_3 \\
& -w^2 \cos(\theta) + w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - \\
& 2w^2 z_2^2 + w^2 z_2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 - w^2 z_2 + w^2 z_3 \cos(\theta) + 3w^2 z_3 - w^2 \\
& w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 - w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 - w^2 z_2 \cos(\theta) - \\
& 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 + w^2 z_2 + w^2 z_3 \cos(\theta) + w^2 z_3 \\
& -w^2 \cos(\theta) + w^2 z_1 \cos(\theta) - 2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 - w^2 z_1 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - \\
& 2w^2 z_2^2 - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + 2w^2 z_2 z_3 + w^2 z_3 \cos(\theta) + 3w^2 z_3 + w^2 \\
& -2w^2 z_1 z_2 \cos(\theta) + 2w^2 z_1 z_2 - 4w^2 z_1 z_3 + 2w^2 z_2^2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2^2 + w^2 z_2 \cos(\theta) - 2w^2 z_2 z_3 \cos(\theta) + \\
& 2w^2 z_2 z_3 - w^2 z_2 + 2w^2 z_3
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Rc} = \text{Expand}[\mathbf{R}/.\{\mu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu\}]$$

$$\text{Expand}[\mathbf{R}]$$

$$\mathbf{Roc} = \text{Expand}[\mathbf{Ro}/.\{\mu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu\}]$$

$$\mathbf{Tc} = \text{Expand}[\mathbf{T}/.\{\mu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu\}]$$

$$\mathbf{Sc} = \text{Expand}[\mathbf{S}/.\{\mu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu\}]$$

$$\mathbf{Qc} = \text{Expand}[\mathbf{Q}/.\{\mu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu\}]$$

$$\mathbf{E2cxx} = \text{Expand}[\mathbf{Rc} + \mathbf{Roc} + 2\mathbf{TcUc} + 16\mathbf{QcUc}]$$

$$\mathbf{E2c} =$$

$$\text{Expand}[\mathbf{E2cxx}/.\{\text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[b]] \rightarrow \mathbf{ABc}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[c]] \rightarrow$$

$$\mathbf{ACc}, \text{Pair}[\text{Momentum}[a], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{ADc}, \text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[c]] \rightarrow \mathbf{BCc},$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[b], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{BDc}, \text{Pair}[\text{Momentum}[c], \text{Momentum}[d]] \rightarrow \mathbf{CDc},$$

```

Pair[Momentum[a], Momentum[a]] → AAc, Pair[Momentum[b], Momentum[b]] → BBc,
Pair[Momentum[c], Momentum[c]] → CCc, Pair[Momentum[d], Momentum[d]] → DDc,
Pair[Momentum[a], LorentzIndex[i_]] → (z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[i]]
+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[i]] -z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[i]]
+Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[i]], Pair[Momentum[b], LorentzIndex[j_]] →
(z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[j]] + (z2 - 1)Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[j]]
-z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[j]], Pair[Momentum[c], LorentzIndex[zx_]] →
(z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[zx]] + z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[zx]]
-z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[zx]], Pair[Momentum[d], LorentzIndex[as_]] →
(z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[as]] + z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[as]]
-z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[as]]}

```

```
Integrate[E2c, {z3, 0, z2}]
```

```
Integrate[%, {z2, 0, z1}]
```

```
E2cf = Integrate[%, {z1, 0, 1}]
```

```
NTerms[%]
```

```
91
```

```
E2f = E2af + E2bf + E2cf
```

(*Cálculo da ordem ξ^4 *)

```

Contract[%, %]/.{Pair[Momentum[l], Momentum[l]] → 0, Pair[Momentum[k], Momentum[k]] → 0,
Pair[Momentum[l'], Momentum[l']] → 0, Pair[Momentum[k'], Momentum[k']] → 0,
Pair[Momentum[k], Momentum[k']] → w^2(1 - Cos[θ]), Pair[Momentum[k], Momentum[l]] → 2w^2,
Pair[Momentum[k], Momentum[l']] → w^2(1 + Cos[θ]), Pair[Momentum[k'], Momentum[l']] → 2w^2,
Pair[Momentum[l], Momentum[l']] → w^2(1 - Cos[θ]),
Pair[Momentum[l], Momentum[k']] → w^2(1 + Cos[θ])}

```

```
Expand[%]
```

```
0 (*SEM CONTRIBUIÇÕES O( $\xi^4$ *)
```

```
E4ax =
```

```

Expand[RUa + 8QUa^2 + S + 2RoUa + 3TUa^2 + 4Q * Ua^2/.{Pair[Momentum[a], Momentum[b]]
→ AB, Pair[Momentum[a], Momentum[c]] → AC, Pair[Momentum[a], Momentum[d]] → AD,
Pair[Momentum[b], Momentum[c]] → BC, Pair[Momentum[b], Momentum[d]] → BD,
Pair[Momentum[c], Momentum[d]] → CD, Pair[Momentum[a], Momentum[a]] → AA,

```

```

Pair[Momentum[b], Momentum[b]] → BB, Pair[Momentum[c], Momentum[c]] → CC,
Pair[Momentum[d], Momentum[d]] → DD, Pair[Momentum[a], LorentzIndex[i_]] →
(z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[i]] + z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[i]]
+z3Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[i]] - Pair[Momentum[k], LorentzIndex[i]],
Pair[Momentum[b], LorentzIndex[j_]] → (z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[j]]
+(z2 - 1)Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[j]] + z3Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[j]],
Pair[Momentum[c], LorentzIndex[zx_]] → (z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[zx]]
+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[zx]] + z3Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[zx]],
Pair[Momentum[d], LorentzIndex[as_]] → (z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[as]]
+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[as]] + z3Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[as]]}
Integrate[%, {z3, 0, z2}]
Integrate[%, {z2, 0, z1}]
Integrate[%, {z1, 0, 1}]
E4a = %
E4bx =
Expand[RbUb + 8QbUb^2 + Sb + 2RobUb + 3TbUb^2 + 4Qb * Ub^2/.{Pair[Momentum[a],
Momentum[b]] → ABb, Pair[Momentum[a], Momentum[c]] → ACb, Pair[Momentum[a],
Momentum[d]] → ADb, Pair[Momentum[b], Momentum[c]] → BCb, Pair[Momentum[b],
Momentum[d]] → BDb, Pair[Momentum[c], Momentum[d]] → CDb, Pair[Momentum[a],
Momentum[a]] → AAb, Pair[Momentum[b], Momentum[b]] → BBb,
Pair[Momentum[c], Momentum[c]] → CCb, Pair[Momentum[d], Momentum[d]] → DDb,
Pair[Momentum[a], LorentzIndex[i_]]->(z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[i]]
+z2Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[i]] + z3Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[i]]
-Pair[Momentum[k], LorentzIndex[i]], Pair[Momentum[b], LorentzIndex[j_]] →
(z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[j]] + (z2 - 1)Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[j]]
+z3Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[j]], Pair[Momentum[c], LorentzIndex[zx_]] →
(z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[zx]] + z2Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[zx]]
+z3Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[zx]],
Pair[Momentum[d], LorentzIndex[as_]] → (z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[as]]
+z2Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[as]] + z3Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[as]]}
Integrate[%, {z3, 0, z2}]

```

Integrate[%, {z2, 0, z1}]

Integrate[%, {z1, 0, 1}]

E4b = %

E4cx =

Expand[RcUc + 8QcUc^2 + Sc + 2RocUc + 3TcUc^2 + 4Qc * Uc^2/.

{Pair[Momentum[a], Momentum[b]] → ABc, Pair[Momentum[a], Momentum[c]] → ACc,

Pair[Momentum[a], Momentum[d]] → ADc, Pair[Momentum[b], Momentum[c]] → BCc,

Pair[Momentum[b], Momentum[d]] → BDc, Pair[Momentum[c], Momentum[d]] → CDc,

Pair[Momentum[a], Momentum[a]] → AAc, Pair[Momentum[b], Momentum[b]] → BBc,

Pair[Momentum[c], Momentum[c]] → CCc, Pair[Momentum[d], Momentum[d]] → DDc,

Pair[Momentum[a], LorentzIndex[i_]] -> (z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[i]]

+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[i]] - z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[i]]

+Pair[Momentum[k'], LorentzIndex[i]],

Pair[Momentum[b], LorentzIndex[j_]] → (z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[j]]

+(z2 - 1)Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[j]] - z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[j]],

Pair[Momentum[c], LorentzIndex[zx_]] → (z1 - z2)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[zx]]

+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[zx]] - z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[zx]],

Pair[Momentum[d], LorentzIndex[as_]] → (z1 - z2 - 1)Pair[Momentum[l], LorentzIndex[as]]

+z2Pair[Momentum[l'], LorentzIndex[as]] - z3Pair[Momentum[k], LorentzIndex[as]]}]

Integrate[%, {z3, 0, z2}]

Integrate[%, {z2, 0, z1}]

Integrate[%, {z1, 0, 1}]

E4c = %

E4f = E4a + E4b + E4c

Expand[Contract[%, %]]

%/.{Pair[Momentum[l], Momentum[l]] → 0, Pair[Momentum[k], Momentum[k]] → 0,

Pair[Momentum[l'], Momentum[l']] → 0, Pair[Momentum[k'], Momentum[k']] → 0,

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{k}']] \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{l}]] \rightarrow 2w^2, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}'], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow 2w^2, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}], \text{Momentum}[\mathbf{k}']] \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta])\}$$

Expand[%]

$$\frac{2224 \cos^4(\theta)}{2025} + \frac{4448 \cos^2(\theta)}{675} + \frac{2224}{225}$$

Together[%]

$$\frac{2224(\cos^4(\theta) + 6 \cos^2(\theta) + 9)}{2025}$$

Factor[%]

$$\frac{2224(\cos^2(\theta) + 3)^2}{2025} \quad (*\text{OUTPUT PRINCIPAL}*)$$

Expand[Contract[E4f, E2f]] (*Ordem ξ^6 *)

Expand[Expand[%]/.

$$\{\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}], \text{Momentum}[\mathbf{l}]] \rightarrow 0, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{k}]] \rightarrow 0,$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}'], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow 0, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}'], \text{Momentum}[\mathbf{k}']] \rightarrow 0,$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{k}']] \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{l}]] \rightarrow 2w^2, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{k}'], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow 2w^2, \text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}], \text{Momentum}[\mathbf{l}']] \rightarrow w^2(1 - \text{Cos}[\theta]),$$

$$\text{Pair}[\text{Momentum}[\mathbf{l}], \text{Momentum}[\mathbf{k}']] \rightarrow w^2(1 + \text{Cos}[\theta])\}$$

0

Contract[E2f, FCI[FV[k, μ]]] (*fazendo $k_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda\sigma}$ *)

Expand[%/.{Pair[Momentum[l], Momentum[l]] \rightarrow 0, Pair[Momentum[k], Momentum[k]] \rightarrow 0,

Pair[Momentum[l'], Momentum[l']] \rightarrow 0, Pair[Momentum[k'], Momentum[k']] \rightarrow 0,

Pair[Momentum[k], Momentum[k']] \rightarrow $w^2(1 - \text{Cos}[\theta])$,

Pair[Momentum[k], Momentum[l]] \rightarrow $2w^2$, Pair[Momentum[k], Momentum[l']] \rightarrow $w^2(1 + \text{Cos}[\theta])$,

Pair[Momentum[k'], Momentum[l']] \rightarrow $2w^2$, Pair[Momentum[l], Momentum[l']] \rightarrow $w^2(1 - \text{Cos}[\theta])$,

Pair[Momentum[l], Momentum[k']] \rightarrow $w^2(1 + \text{Cos}[\theta])$,

FCI[FV[k, x_] \rightarrow FV[k', x] + FV[l', x] - FV[l, x]//FCI}

0

Expand[Contract[E4f, FCI[FV[k, μ]]]/.

{Pair[Momentum[l], Momentum[l]] \rightarrow 0, Pair[Momentum[k], Momentum[k]] \rightarrow 0,

```

Pair[Momentum[l'], Momentum[l']] → 0, Pair[Momentum[k'], Momentum[k']] → 0,
Pair[Momentum[k], Momentum[k']] → w^2(1 - Cos[θ]),
Pair[Momentum[k], Momentum[l]] → 2w^2, Pair[Momentum[k], Momentum[l']] → w^2(1 + Cos[θ]),
Pair[Momentum[k'], Momentum[l']] → 2w^2, Pair[Momentum[l], Momentum[l']] → w^2(1 - Cos[θ]),
Pair[Momentum[l], Momentum[k']] → w^2(1 + Cos[θ])}]
Expand[%/.FCI[FV[k, x_]] → FV[k', x] + FV[l', x] - FV[l, x]//FCI]
0

```

(*Ou seja, verificamos a transversalidade da amplitude até a $O(\xi^4)$ *)

Referências Bibliográficas

- [1] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **117** 610 (1928) doi: 10.1098/rspa.1928.0023
- [2] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **112** 661 (1926) doi: 10.1098/rspa.1926.0133
- [3] M. Born, W. Heisenberg, e P. Jordan, Z. Phys. **35** 557 (1926).
- [4] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **133** 60 (1931)
- [5] O. Halpern, Phys. Rev. **44**, 855 (1933).
- [6] R. Jackiw, Int. J. Mod. Phys. B, 14, 2011 (2000), arXiv: hep-th/9903044.
- [7] H. Euler e B. Kockel, Naturwissenschaften **23**, 246 (1935).
- [8] [4] H. Euler, Ann. Physik **26**, 398 (1936).
- [9] R. Karplus, e M. Neuman, Phys. Rev. **80** , 380 (1950).
- [10] R. Karplus, e M. Neuman, Phys. Rev. **83** , 776 (1951).
- [11] N. Kanda, arXiv:1106.0592 (2011).
- [12] B. King, e C. H. Keitel, arXiv:1202.3339 (2012)
- [13] A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, e M. C. Nemes, Phys. Rev. D **63** (2001) 046004.
- [14] O. A. Battistel, A. L. Mota, e M. C. Nemes, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1597 (1998).
- [15] L. C. T. Brito, H. G. Fargnoli, A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, e M.C. Nemes ,
Physics Letters B **673** 220 (2009).
- [16] J.C.C. Felipe, L.C.T. Brito, Marcos Sampaio, e M. C. Nemes. Phys. Lett. B **700** 86
(2011)

- [17] A.P.B. Scarpelli, Tese de Doutorado, UFMG (2001)
- [18] A. L. Cherchiglia, M. Sampaio, e M. C. Nemes, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 2591 (2011).
- [19] L. C. Ferreira, A. L. Cherchiglia, Brigitte Hiller, M. Sampaio, e M. C. Nemes, *Phys. Rev. D* **86**, 025016 (2012).
- [20] Liang. Y, and Czarnecki, arXiv: 1111.6126v2 (2011).
- [21] M. Shifman, A. Vainshtein, M. B. Voloshin, e V. Zakharov, arxiv: 1109.5304 (2011).
- [22] J. R. Ellis, M. K. Gaillard, e D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys.* **B106** 292 (1976).
- [23] R. Gastmans, S. L. Wu, e T. T. Wu, arXiv:1108.5322 (2011).
- [24] R. Gastmans, S. L. Wu, e T. T. Wu, arXiv:1108.55872 (2011).
- [25] F. Piccinini, A. Pilloni, e A.D. Polosa, arXiv: 1112.4764 (2011).
- [26] F. Mandl, e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, (Wiley, 2010).