

**O papel da discriminação de estados quânticos
na generalização de dualidades interferométricas
em cenários de múltiplos caminhos**

Renan Souza Cunha

Abril de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

O papel da discriminação de estados quânticos na generalização de dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de mestre em ciências.

Renan Souza Cunha

Orientador: Leonardo Teixeira Neves

Belo Horizonte

Abril de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C972p Cunha, Renan Souza.

O papel da discriminação de estados quânticos na generalização de dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos / Renan Souza Cunha. – 2017.
117f.

Orientador: Leonardo Teixeira Neves.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais –
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 108-116.

1. Dualidade - Física. 2. Mecânica quântica. 3. Teoria quântica - Física.
4. Interferometria. 5. Informação quântica. I. Título. II. Neves, Leonardo
Teixeira Neves. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de
Física.

CDU – 530.145.6(043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637
(xx) (31) 3499 5633
Fax (xx) (31) 3499 5688
(xx) (31) 3499 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 586ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR Renan Souza Cunha orientado pelo professor Leonardo Teixeira Neves para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de sete de abril de 2017, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Leonardo Teixeira Neves** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG) e **José Geraldo Peixoto de Faria** (Departamento de Física e Matemática /CEFET) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **Renan Souza Cunha** à arguição de seu trabalho de dissertação de Mestrado, que recebeu o título de "**O papel da discriminação de estados quânticos na generalização de dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos**". Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho e o parecer final da comissão, concluindo pela aprovação do trabalho.

Belo Horizonte, 07 de abril de 2017.

Prof. Leonardo Teixeira Neves
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Prof. José Geraldo Peixoto de Faria
Departamento de Física e Matemática/CEFET

Candidato

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao único Deus, Jesus Cristo, O qual é o grande Criador de todas as coisas. Nenhuma física haveria se antes o universo não fosse criado com incrível inteligência. À Ele seja todo o louvor e glória por tudo o que Ele fez, o único que é Deus e Salvador. Que o conhecimento adquirido por meio deste trabalho e os frutos que ele gerar, sejam todos dados ao Senhor, o verdadeiro responsável. Aos meus pais por todo o suporte de vida. Sou grato a Deus pela vida deles, os quais construíram este caminho e, mesmo comigo diante dele, ainda me ajudaram a trilhar. Não se pode medir o real impacto de uma família sólida na vida de um dos seus membros e, por isso, eu mal sei o que dizer. Mas há em mim o grato sentimento de devedor. Obrigado, meus amados pai e mãe! Ao meu irmão por ser meu melhor amigo. Venceu comigo as batalhas da vida. Essa foi só mais uma. E com certeza venceu muitas por mim em suas orações. Que eu possa retribuir, de algum modo, o que você é para mim, cara! À minha querida Paula, companheira que vou levar para a vida. Pelo amor, pelo carinho, pelas broncas e todo o suporte de perto, especialmente na hora que eu mais precisei. Te amo. À minha grande família que, de um jeito ou outro, participa de perto ou de longe. E tem participado desde sempre. Meu avô e minhas avós, meus tios e tias, primos, etc. E aqui um agradecimento em memória do meu avô materno que certamente teria aproveitado este momento. À minha igreja e os irmãos que me auxiliam em orações e na grande amizade. Vocês também são parte disso. Aos colegas do departamento, professores e funcionários, em especial à secretaria do colegiado da pós-graduação por toda dedicação.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Partindo do experimento mental da fenda dupla com recuo, protagonista dos debates entre Einstein e Bohr, estudamos os principais passos que levaram a discussão da complementaridade entre informação de caminho e visibilidade de interferência para domínios onde cada quantidade é conhecida parcialmente. Procurando evidenciar as estratégias que quantificam o conhecimento sobre os caminhos num interferômetro, ressaltamos a existência de dois regimes da complementaridade. O primeiro regime, o qual leva à formulação da dualidade Greenberger-Yasin, é baseado em estratégias preditivas. Já o segundo, o qual leva à formulação da dualidade Englert-Greenberger-Yasin (EGY), é baseado na retrodição do caminho através do resultado de uma medição sobre um sistema auxiliar. Nesse segundo regime, acentuamos o ponto de que a descrição do sistema auxiliar através de estados não ortogonais é o ingrediente essencial na derivação da dualidade EGY. Dessa forma, o estudo quantitativo da complementaridade abre espaço para uma relação estreita com as estratégias de discriminação de estados quânticos, o que, por muito tempo, foi mencionado na literatura apenas de forma muito sutil. Além disso, também estudamos trabalhos recentes, os quais fazem uso de um quantificador de coerência e que dão passos importantes na obtenção de dualidades interferométricas num cenário de múltiplos caminhos. Ao final, apresentamos uma forma preliminar de generalização desses trabalhos considerando um interferômetro de três caminhos.

Abstract

Starting from the recoiling double slit gedanken experiment, protagonist of the debates between Einstein and Bohr, we study the main steps that led to the discussion of the complementarity between path information and interference visibility at intermediate domains, where each quantity is partially known. Trying to highlight the strategies of quantification of path knowledge, we emphasize the existence of two regimes of complementarity. The first regime, which leads to the formulation of Greenberger-Yasin duality, is based on predictive strategies. The second one, which leads to the formulation of Englert-Greenberger-Yasin duality (EGY), is based on the retrodiction of the path through the result of a measurement on an auxiliary system. In this second regime, we stress the point that the description of the auxiliary system through nonorthogonal quantum states is the essential ingredient in the derivation of EGY duality. Thus, the quantitative study of complementarity opens space for a close relationship with the strategies of discrimination of quantum states, which for a long time was mentioned in the literature only in a very subtle way. In addition, we also study recent works, which make use of a coherence quantifier and take important steps in obtaining interferometric dualities in a multipath scenario. At the end we present a preliminary form of generalization of these works in a three-way interferometer.

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
Introdução	9
1 Complementaridade em mecânica quântica: os fundamentos	13
1.1 O debate Einstein-Bohr: domínios extremos	13
1.2 Fenda dupla com recuo: domínios intermediários	17
1.2.1 Formalização do problema físico	18
1.2.2 Obtenção simultânea da posição e do momento	22
1.2.3 Informação e complementaridade	24
1.3 Absorção e informação de caminho na interferometria de nêutrons	26
1.3.1 Abordagem I: absorção parcial estática	27
1.3.2 Abordagem II: absorção dinâmica	27
1.3.3 Interferência e o conteúdo informacional das abordagens	28
2 Dualidades interferométricas em cenários de dois caminhos	30
2.1 Dualidade interferométrica: Greenberger e Yasin	30
2.1.1 Estratégia de aposta: predição	31
2.2 Marcadores de caminho e o apagador quântico: o papel das correlações	34
2.2.1 Fenda dupla com átomos de Rydberg	35
2.2.2 Explorando graus de liberdade adicionais	36
2.2.3 Marcador de caminho	38
2.2.4 Apagador quântico	39
2.3 Dualidade interferométrica: Englert	44
2.3.1 O ramo das predições	45
2.3.2 O ramo das medições	48
2.3.3 Hierarquia do conhecimento de caminho	54
2.4 Teste da dualidade Englert-Greenberger-Yasin	57
2.5 Considerações finais	59

3	Marcadores de caminho e estados quânticos não ortogonais	61
3.1	O problema da não ortogonalidade	62
3.2	Medições projetivas <i>versus</i> medições generalizadas	64
3.2.1	Medições projetivas	65
3.2.2	Medições generalizadas e o formalismo POVM	66
3.2.3	Discriminação de estados quânticos	68
3.3	Discriminação sem ambiguidade	68
3.3.1	Custo da exigência de discriminação sem ambiguidade	70
3.3.2	O limite Ivanovic-Dieks-Peres e o teorema de Naimark	72
3.4	Discriminação com erro mínimo	74
3.4.1	Teste de hipóteses	74
3.4.2	Estrutura de um teste de hipóteses binário	75
3.4.3	Teste de hipóteses quântico	76
3.4.4	O limite de Helstrom e a distinguibilidade de Englert	77
3.5	Discriminação com confiança máxima	80
3.5.1	Uma família de estratégias	80
3.5.2	Otimização da discriminação com confiança máxima	81
3.6	Considerações finais	81
4	Dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos	83
4.1	Problemas não solucionados em complementaridade	83
4.2	Coerência como recurso: uma generalização da visibilidade?	85
4.2.1	Estrutura de uma teoria de recursos	86
4.2.2	Coerência quântica	87
4.2.3	Coerência e interferômetros de múltiplos caminhos	89
4.3	Coerência e discriminação sem ambiguidade	90
4.3.1	Norma l_1 da coerência como generalização da visibilidade	92
4.3.2	Um limite superior como distinguibilidade dos caminhos	94
4.3.3	Montando o quebra-cabeça	95
4.4	Coerência e discriminação com erro mínimo	97
4.4.1	Outro limite superior como distinguibilidade dos caminhos	98
4.5	Coerência e discriminação de estados linearmente dependentes	100
4.5.1	Um interferômetro de três caminhos com marcadores simétricos	100
4.5.2	Distinguibilidade com erro mínimo	101
4.5.3	Distinguibilidade com confiança máxima: uma tentativa	102
4.6	Considerações finais	105
5	Conclusão e perspectivas	106
	Referências Bibliográficas	108

Introdução

Uma das curiosas consequências do formalismo da teoria quântica é a existência de observáveis físicos que são representados por operadores incompatíveis¹ [1]. Por exemplo, se dois observáveis O e O' são representados por $\hat{O}$ e $\hat{O}'$, respectivamente, onde esses são incompatíveis, uma sequência de medições de O , O' e novamente O , pode (com boa probabilidade) fornecer um resultado diferente daquele obtido na primeira medição. Essa incompatibilidade está associada a diversos fenômenos que não possuem um análogo perfeito (ou sequer algum análogo) com aqueles descritos pela teoria clássica. Dentre esses fenômenos, podemos destacar o *steering* presente no famoso “Paradoxo EPR” [2], a não-localidade de Bell [3, 4], a contextualidade [5], os fenômenos quânticos obedecendo as relações de incerteza de Heisenberg [6], e o mais importante para nós neste trabalho, a complementaridade. A noção de complementaridade foi discutida inicialmente, e principalmente, por Niels Bohr [7] e se tornou um dos temas centrais dos debates entre ele e Albert Einstein. No que se refere aos fundamentos da teoria quântica, a complementaridade representa uma ruptura de conceitos clássicos, evidenciando que objetos no domínio quântico (fótons, elétrons, nêutrons, átomos, etc.) podem apresentar propriedades que são mutuamente excludentes [8]. Portanto, não é possível exigir que essas propriedades sejam conjuntamente observadas com a mesma precisão que quando observadas separadamente. Dentre os observáveis que se comportam dessa maneira, neste trabalho vamos discutir apenas a relação de complementaridade que surge quando um sistema quântico interage com um interferômetro. Nesse caso, um aspecto da complementaridade se manifesta entre a acessibilidade de informação de caminho e a visibilidade de um padrão de interferência, para os quais podemos obter relações de dualidade entre essas quantidades a partir dos resultados das medições.

Em sua forma primitiva, a complementaridade aparecia como um princípio que res-

¹Enfatizamos a diferença entre observável físico, que supõe-se (via princípios filosóficos e modelagem típica do método científico) existir na natureza, e sua descrição por meio de operadores lineares: incompatibilidade é uma propriedade matemática associada a alguns operadores; Observável físico é qualquer quantidade mensurável que carrega a pretensão teórica de representar propriedades da natureza. Curiosamente, em nível quântico, alguns observáveis físicos são bem representados por operadores incompatíveis. Por motivos de economia, durante o texto não vamos explicitar essa diferença, mas esta nota pretende deixar claro que as duas coisas não são sinônimas. Além disso, ressaltamos apenas aqui, e brevemente, que o termo “observável físico” também será empregado com certo abuso de linguagem, uma vez que é passível de discussão até que ponto uma teoria científica (tal como a teoria quântica), com todo seu conjunto de suposições filosóficas, representa a natureza, de fato. Essa discussão, porém, não foi ignorada com espírito de inocência neste trabalho, embora tenha sido evitada com certa despreocupação.

tabelecia a consistência lógica das observações experimentais: por exemplo, em experimentos de interferometria, fótons constroem um padrão de interferência, que é uma característica comum a ondas. Já em experimentos envolvendo absorção, fótons são absorvidos pontualmente, característica comum a partículas. Segundo a argumentação de Bohr, esses experimentos não são contraditórios, nem revelam uma inconsistência na interpretação dos experimentos, mas evidenciam propriedades complementares dos fótons. Aparatos experimentais mutuamente excludentes permitem a observação de propriedades mutuamente excludentes, mas que são igualmente reais, não permitindo uma visão objetiva dessas propriedades². Para entender esse argumento de consistência lógica, em [9] Bohr propõe uma analogia com a teoria da relatividade especial. Um aspecto curioso dessa analogia é que, nos anos de construção da teoria quântica, alguns acreditavam que ela era totalmente incompatível com a teoria da relatividade especial. Embora a teoria da relatividade especial já esteve no centro de uma tensão entre “apologistas” e “relutantes” da teoria quântica³, o que mais tarde motivou novos conceitos da teoria quântica, um dos postulados da teoria da relatividade especial possui aspectos em comum com o ponto de vista que define a complementaridade. Conforme o argumento de Bohr, de acordo com a teoria da relatividade especial, as leis que se manifestam de diferentes formas, dependendo do referencial escolhido (consequência da velocidade da luz ser finita), são leis equivalentes. Enquanto isso, resultados aparentemente contraditórios, cuja manifestação depende da escolha do aparato experimental (consequência da constante de Planck ser finita⁴), são logicamente compatíveis [9]. Por exemplo, num laboratório em que um experimento registra a chegada de elétrons numa tela através de cliques individuais, um por um, sem a formação de qualquer padrão de interferência, um “experimentalista clássico”⁵ gostaria de inferir que elétrons possuem um caráter tipicamente corpuscular. Num outro laboratório, ao observar que os cliques individuais que registram a chegada de elétrons numa tela formaram um padrão de interferência, um segundo “experimentalista clássico” gostaria de inferir que elétrons possuem um caráter tipicamente ondulatório. Se ambos os experimentalistas forem convidados à mesma conferência, certamente vão enfrentar um grande dilema. Do ponto de vista da complementaridade de Bohr, os resultados dos experimentos não são contraditórios, mas logicamente compatíveis, uma vez que ambas as propriedades observadas são complementares na descrição da natureza dos elétrons. Isto é, seu caráter não é

²Isto é, ao medir propriedades mutuamente excludentes, não podemos associar o comportamento do sistema quântico a apenas uma dessas propriedades. Um único resultado experimental não nos permite definir o caráter dos fótons.

³Importante enfatizar que a tensão era apenas entre esses indivíduos que interpretavam as duas teorias, mas não entre as teorias em si.

⁴Caso a constante de Planck fosse nula, vários operadores incompatíveis descrevendo observáveis físicos passariam, agora, a ser compatíveis, deixando a complementaridade fora de cena. O limite em que a constante de Planck tende a zero, e situações envolvendo o chamado teorema de Ehrenfest, são frequentemente referenciados como limite clássico da mequântica quântica. Uma discussão interessante sobre o assunto pode ser encontrada em [1].

⁵Isto é, um experimentalista que ainda não tomou conhecimento, ou é relutante com a validade da teoria quântica.

bem definido por apenas um dos dois experimentos; A descrição clássica dos resultados (com a inferência de caráter corpuscular ou caráter ondulatório) é imprecisa. Não é possível descrever a natureza de objetos quânticos, cujas propriedades observáveis são complementares, assinalando figuras clássicas de forma estritamente objetiva. Portanto, o termo comumente empregado para essas situações, “dualidade onda-partícula”, parece ir contra o espírito original da complementaridade: os objetos quânticos não se comportam ora como onda, ora como partícula. Esse efeito aparente é consequência das conclusões que podem ser tiradas de experimentos mutuamente excludentes⁶.

Em vista dessas considerações, vamos revisar o conceito de complementaridade em experimentos interferométricos, lidando apenas com um elétron (ou fóton, ou nêutron, ou átomo, etc.) entrando no interferômetro por vez. Nesse caso, a função de onda dos graus de liberdade de caminho é análoga a uma onda no espaço ordinário [1]. Como Ballentine argumenta em [1], essa analogia é uma particularidade da descrição individual de um objeto quântico, não havendo análogo ondulatório quando existem mais objetos quânticos no interferômetro (isto é, muitos fótons, nêutrons, elétrons, etc.). Como essa não é uma propriedade geral, então deveríamos abandonar o termo “dualidade onda-partícula”. Dessa forma, neste trabalho vamos evitar a atribuição excessiva de caracteres clássicos, tais como o termo “onda-partícula”, em favor da menção explícita aos eventos importantes para a discussão da complementaridade em interferômetros: produção de interferência e disponibilização de informação de caminho.

Tendo em vista a relação entre informação de caminho e visibilidade de interferência, o foco deste trabalho está nas dualidades interferométricas que decorrem do estudo quantitativo da complementaridade em domínios intermediários, isto é, domínios onde cada uma dessas quantidades possui um valor diferente dos seus valores extremos. Nesses domínios, vamos procurar dar atenção às estratégias de quantificação do conhecimento disponível sobre os caminhos no interferômetro. Com essa abordagem, somos levados a diferenciar dois regimes da complementaridade. No primeiro regime, a informação de caminho é disponibilizada apenas por assimetrias na preparação do interferômetro. As estratégias empregadas na quantificação dessa informação são de caráter exclusivamente preditivo. Isto é, nenhuma medição é feita diretamente, apenas apostamos no caminho mais provável. Já no segundo, a informação de caminho é extraída através da medição de graus de liberdade de sistemas quânticos auxiliares, os *marcadores de caminho*. Nesse caso, as estratégias são de caráter retroditivo. A retrodição é o ato de inferir um evento passado a partir de uma informação obtida no presente. Dessa forma, no contexto desta dissertação, uma retrodição vai se referir ao ato de inferir o caminho de um sistema quântico num interferômetro a partir do resultado de uma medição sobre os graus de liberdade do sistema auxiliar, os quais atuam como marcadores (ou detectores) de caminho. Veremos que esse problema está intimamente relacionado ao problema de discriminação de estados quânticos, uma vez que a tarefa de retrodizer os caminhos se

⁶É possível encontrar na literatura propostas de construção de experimentos sem essa restrição de exclusividade, sugerindo a possibilidade de observar esses “comportamentos” simultaneamente [10, 11].

mostrará equivalente à tarefa de identificação dos estados que descrevem os marcadores de caminho.

Em domínios intermediários, a essência dessa relação surge do fato de que os marcadores de caminho são descritos por estados não ortogonais, para os quais não existe medição possível capaz de distingui-los perfeitamente (em drástica oposição ao caso ortogonal). Nesse caso, a distinguibilidade dos caminhos no interferômetro depende do emprego de estratégias ótimas de discriminação de estados quânticos não ortogonais, as quais foram derivadas independentemente do contexto de complementaridade. Em particular, a primeira estratégia de discriminação conhecida, derivada por Carl Helstrom [12], surgiu da aplicação de ferramentas de comunicação de sinais ópticos ao formalismo da mecânica quântica. Essa e outras duas estratégias que estudaremos neste trabalho nos permitem extrair a informação dos marcadores (e, portanto, retrodizer o caminho de um objeto quântico no interferômetro) “apenas” de forma ótima. Como veremos, esse é um ingrediente fundamental na derivação da dualidade interferométrica associada ao regime retroditivo baseado em medições. Até o ano de 2014, essas últimas afirmações eram feitas na literatura apenas de forma muito sutil. Recentemente, porém, alguns trabalhos [13–16] procuraram explorar a relação entre esses dois tópicos, dando passos importantes na generalização das dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos.

A fim de favorecer o estudo da relação entre a complementaridade e as estratégias de discriminação de estados quânticos, o qual é o principal objetivo deste trabalho, esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 1 nos preocupamos com os fundamentos da complementaridade, diferenciando os domínios extremos e intermediários. No capítulo 2, estudamos os principais trabalhos que permitiram a divisão do estudo da complementaridade em dois regimes (preditivo e retroditivo baseado em medições) e a obtenção das respectivas dualidades interferométricas. Nesses dois primeiros capítulos a discussão é inteiramente baseada em interferômetros de dois caminhos. Com um dos regimes relacionado ao problema de discriminação de estados, o capítulo 3 se dedica ao estudo de estratégias de discriminação, tendo em vista a descrição de protocolos de extração de informação dos estados dos marcadores de caminho. No capítulo 4, estudamos recentes trabalhos que exploram a relação das estratégias de discriminação com um quantificador de coerência introduzido no contexto de teoria de recursos. Esses trabalhos dão passos importantes em direção à solução do prolongado problema da complementaridade em cenários de múltiplos caminhos. Finalmente, o capítulo 5 apresenta conclusões e perspectivas.

Capítulo 1

Complementaridade em mecânica quântica: os fundamentos

1.1 O debate Einstein-Bohr: domínios extremos

Um dos episódios mais marcantes do início da teoria quântica foi, sem dúvida, as discussões entre Einstein e Bohr. Existem registros de cartas e de conferências em que ambos estavam presentes [17–19]. Na realidade, havia grande expectativa em encontrar Einstein nas conferências. Sua posição rigidamente opositora à teoria quântica era bastante conhecida e deu origem a vários experimentos mentais cujo objetivo era realizar ataques contra os fundamentos da teoria. Embora opositor, graças à sua intuição física e compreensão sólida do mundo clássico, suas contestações à teoria quântica prestaram grande serviço em demonstrar que ela inaugurava um novo arcabouço para as explicações dos fenômenos físicos.

Einstein propôs uma modificação no experimento de fenda dupla, comumente atribuído a Thomas Young¹, com a intenção de demonstrar a inconsistência da teoria quântica [22]. Esse experimento mental ficou conhecido como “o problema da fenda dupla com recuo”. A figura 1.1 é um desenho hiper-realista, “semi-sério”² [19], como dito por Bohr, da proposta original de Einstein. Aqui, vamos considerar uma versão modificada desse experimento [17], mas que preserva todas as implicações importantes da discussão. A figura 1.2 representa a versão modificada de um experimento com fótons, em que frentes de onda plana incidem sobre uma fenda dupla. Num experimento típico, um padrão de interferência como o da figura 1.1 é registrado no plano distante. Nesse tipo de experimento, ainda, consideramos que a placa na qual se encontram as fendas possui dimensões tão maiores que o resto do sistema analisado, que ela funciona como

¹O experimento apresentado por Thomas Young descreve um feixe de luz solar incidindo sobre a lateral de uma carta (*slit of card*), demonstrando o efeito de difração por uma linha. Não era um experimento de fenda dupla [20, 21].

²Os desenhos não tinham intenção de descrever a realidade de forma profunda, mas de oferecer uma visualização mais simples do aparato, permitindo uma intuição física maior sobre o problema. Bohr produziu desenhos realmente artísticos!

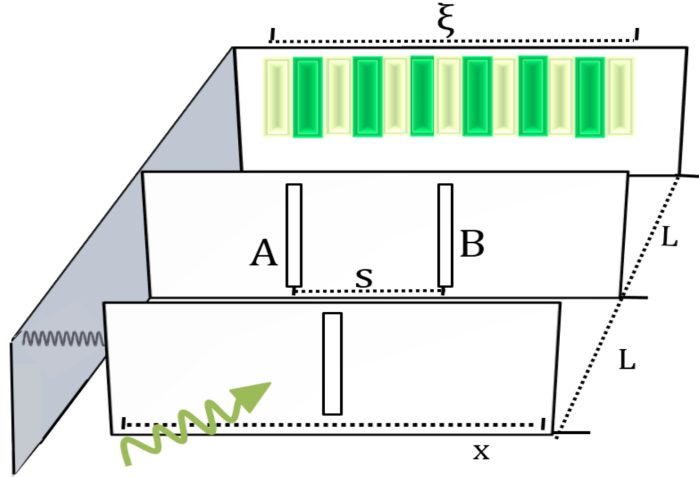


Figura 1.1: Desenho hiper-realista da modificação de Einstein do experimento de fenda dupla. Um fóton entrando no aparato é difratado pela fenda única móvel, causando nessa um recuo que pode ser medido. Subsequentemente, o fóton atinge uma fenda dupla. Por fim, o fóton atinge uma tela fotográfica, onde é registrado. Einstein acreditava que o recuo poderia ser medido sem causar perturbações no caminho dos fótons. Dessa forma, fótons passando por fendas diferentes causariam recuos diferentes na fenda móvel, permitindo a retrodição de seus caminhos, sem afetar o padrão de interferência na tela fotográfica.

um aparato clássico, fixo na montagem experimental. A proposta de Einstein, porém, é de que a placa seja capaz de sofrer recuos que são, em princípio, mensuráveis. Nesse caso, a placa é sensível ao momento transferido pelo fóton que o carrega. Levando em

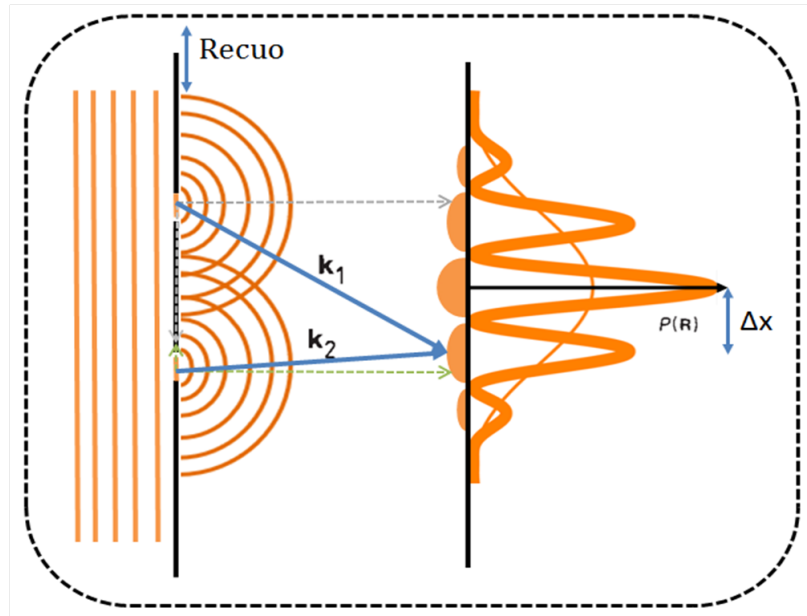


Figura 1.2: Esboço do experimento da fenda dupla com recuo ligeiramente modificado. Agora, as fendas se encontram na mesma placa que permite os recuos.

conta o raciocínio de Einstein, esse experimento registraria o padrão de interferência da figura 1.2, mas ainda disponibilizaria informação de caminho. Segundo Einstein,

isso representava uma violação da complementaridade de Bohr, em que o estudo de fenômenos complementares exigiria experimentos mutuamente excludentes [18, 23].

A figura 1.2 exibe vários máximos de interferência. Estamos interessados em observar o que acontece em um deles, a uma distância — digamos — Δx do máximo central. Um fóton detectado na tela no ponto especificado na figura 1.2, que está a uma distância Δx do máximo central, carregará momentos diferentes dependendo de qual fenda ele tenha passado, o que é representado pelos vetores de onda k_1 e k_2 . Em nosso caso, apenas a componente x dos vetores de onda são relevantes, uma vez que apenas essa componente contribui para o recuo. A relação entre vetor de onda $\mathbf{k}$ e o momento linear $\mathbf{p}$ é dada pela relação de De Broglie [24]:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck. Dessa forma, assim que um fóton atinge a tela, e gera um dos pontos que construirá um padrão de interferência, podemos imediatamente medir o recuo da placa e, assim, calcular o momento do fóton que interagiu com ela. Com isso em mãos, inferimos por qual fenda o fóton passou. Com várias repetições do experimento, vamos observar um padrão de interferência, ao mesmo tempo em que temos informação de caminho. Como a medição do recuo da placa acontece após o fóton ser detectado na tela (e, portanto, destruído), então nenhuma alteração devido à medição do momento poderia destruir a interferência (construída por fótons que já foram detectados). A estratégia de Einstein era impedir que relações de incerteza fossem invocadas no problema: a medição do momento acontece depois do registro dos fótons e, assim, não poderia implicar em perturbações na posição desses fótons, os quais já foram destruídos. Estaríamos, portanto, obtendo informação de caminho sem acrescentar fatores incontrolláveis (no sentido de relações de incerteza) ao sistema.

Parece um argumento bastante convincente, sem realizações mirabolantes. Mas, seguindo a resposta de Bohr, parte de um pressuposto insustentável: a medição arbitrariamente precisa do momento da placa. Alguns pontos essenciais sobre essa medição do momento estabelecem a falha do argumento de Einstein: a diferença do momento final e inicial da placa deve ser, no mínimo, aproximadamente igual à diferença de momento entre fótons vindo de fendas diferentes (e chegando no mesmo ponto):

$$\Delta p_x \approx \hbar \Delta k_x, \quad (1.2)$$

em que $\Delta k_x = k_{1x} - k_{2x}$. Esse é um requerimento mínimo que precisa ser satisfeito para que a placa forneça informação de caminho. Afinal, se a variação no momento da placa for menor que isso, então a medição do recuo não é capaz de distinguir entre os dois caminhos. O passo adiante é o ponto central da contra-argumentação de Bohr: se o aparato de medição (a placa) é suficientemente pesado, nenhuma alteração em seu momento é notável. No entanto, estamos assumindo (como Einstein) que o aparato é suficientemente sensível tal que sua interação com um único fóton produz alterações mensuráveis. Além disso, colocando a restrição expressa na equação (1.2) em outras

palavras, só existe ganho de informação de caminho após a interação, se conhecemos o momento inicial da placa com precisão comparável ao momento dos fótons. Isso quer dizer que estamos, essencialmente, no domínio em que o formalismo quântico é aplicável. E sendo assim, a medição do momento inicial da placa não pode ser arbitrária, senão limitada pelas relações de incerteza de Heisenberg. Em suma, ambos os elementos do problema (placa e fótons) estão sujeitos ao mesmo regime (quântico); o aparato passa a fazer parte do sistema quântico total e precisa ser analisado conjuntamente ao fóton. Encontramos uma impossibilidade de delimitar uma separação precisa entre o comportamento do objeto e a interação com o instrumento de medição. Portanto, a relação de incerteza entre a posição e o momento da placa é dada por

$$\delta p_x \approx \hbar/\delta x. \quad (1.3)$$

Um outro ponto é que a variação do momento da placa Δp_x precisa ser consideravelmente maior do que a incerteza δp_x em seu momento, caso contrário a variação do momento da placa não nos informa nada. Isso significa que, dada a equação (1.3) e em virtude de (1.2), a diferença de momento entre fótons vindo de fendas diferentes $\hbar\Delta k_x$ precisa ser consideravelmente maior que a incerteza no momento da placa. O que implica em

$$\Delta k_x > 1/\delta x. \quad (1.4)$$

Como Δx é a distância entre dois máximos consecutivos (ver figura 1.2), a diferença entre os números de onda é bem aproximada pela expressão

$$\Delta k_x \approx 2\pi/\Delta x. \quad (1.5)$$

Assim, relacionamos (1.4) e (1.5):

$$\delta x \geq \Delta x. \quad (1.6)$$

A incerteza em localizar a placa com as fendas, e portanto as franjas de interferência, é maior que o espaçamento entre as franjas do padrão. Isso quer dizer que temos uma figura borrada na tela. Em outras palavras, não existe padrão de interferência nítido! O argumento de que a placa que possui as fendas precisa ser tratada quanticamente é o ingrediente fatal³ contra o registro do padrão de interferência. Ele não sobrevive quando a informação de caminho está disponível. Nesse tempo, essa foi a demonstração mais forte da incompatibilidade entre informação de caminho e interferência. Na presença do primeiro, não temos o segundo. Na aquisição do segundo, não temos o primeiro.

Embora há quem argumente que Bohr não ofereceu uma definição formal de complementaridade [19], ela não é uma espécie de doutrina ou artifício. Complementaridade é um conceito amparado pelo formalismo da teoria quântica, o qual admite observá-

³De acordo com o formalismo introduzido por Wootters e Zurek em [25], o qual discutiremos na seção 1.2, esse ingrediente não é tão fatal assim. Na realidade, o experimento proposto por Einstein ainda exibe algum padrão de interferência. A ausência de um tratamento quântico completamente quantitativo não poderia permitir que Bohr chegasse a essa conclusão.

veis incompatíveis. Ela aponta na direção de que a natureza quântica está além da validade dos conceitos clássicos. O objetivo principal deste capítulo é estender a noção de complementaridade de Bohr a outros contextos, outros sistemas físicos e condições experimentais, sempre revisitando os aspectos chave desta seção.

1.2 Fenda dupla com recuo: domínios intermediários

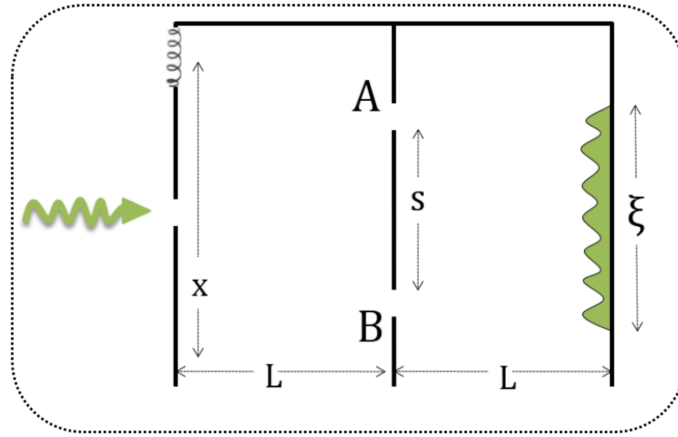


Figura 1.3: Esboço 2D do experimento da fenda dupla com recuo da figura 1.1.

Cerca de cinco décadas após a solução de Bohr para o experimento de Einstein da fenda dupla com recuo, Wootters e Zurek [25] propuseram uma investigação mais profunda de sua resposta. Para capturarmos a essência dessa investigação, introduzimos a figura 1.3. Ela é uma versão 2D da figura 1.1. Na figura 1.3 vemos três telas: a primeira, com uma única fenda, a segunda, com duas fendas e a terceira tela é um filme fotográfico. Um feixe de fótons sofre difração na primeira tela e atinge a segunda. A difração na segunda tela, com duas fendas, permite a produção de interferência cujo padrão pode ser registrado na terceira tela. Como sugeriu Einstein, a tela 1 não está fixa e pode sofrer recuos devido à interação com os fótons. Segundo os desenhos “semi-sérios” de Bohr, é como se ela estivesse suspensa por uma mola [22]. Um fóton com momento nulo na direção x se propaga na direção da abertura na primeira tela, interage com ela e sofre difração. Essa interação é tal que um fóton difratado na direção da fenda superior (inferior) da segunda tela, por conservação de momento, pode causar um recuo na direção $-x(+x)$ na tela 1 (ver figura 1.3). Ao contrário da seção anterior, o aparato experimental segue próximo da proposta original. Lá fizemos as modificações por motivos de simplificação. Aqui, porém, vamos estudar a proposta de Wootters e Zurek, a qual envolve atacar o problema da fenda dupla com recuo de forma plena.

1.2.1 Formalização do problema físico

Para explorar a resposta de Bohr além de seu próprio tratamento, começamos com algumas considerações presentes em [25].

- i. Partimos do ponto em que Bohr parou: consideramos que a tela 1 está sujeita à incerteza.
- ii. Uma vez que a tela 1 deve ser tratada quanticamente, representamos sua função de onda por osciladores harmônicos quânticos. Essa é a consideração essencial de Wootters e Zurek. Dessa forma, a função de onda associada à tela 1 na representação de posição e momento, respectivamente, é dada por

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \pi^{-1/4} a^{-1/2} \exp\{-x^2/2a^2\}, \\ \varphi(\kappa) &= \pi^{-1/4} a^{-1/2} \exp\{-a^2\kappa^2/2\},\end{aligned}\tag{1.7}$$

onde $\kappa = p/\hbar$ é a componente x do vetor de onda inicial da tela e a está relacionado à largura à meia altura da gaussiana.

Com essas considerações somos capazes de calcular exatamente o padrão de interferência na tela 3, o que Bohr não fez. Dessa forma, a tela 1 nos deixa duas opções: ela pode ser parada e sua posição medida ou pode ser solta e seu momento medido. Vamos separar essas opções em dois experimentos distintos.

Experimento 1: medição da posição

Apenas por enquanto, vamos analisar o padrão de interferência obtido se escolhermos fazer uma medição da posição da tela 1. Se o resultado da medição nos diz que a posição da tela 1 é x , então todos os fótons que passaram pela tela 1 nessa posição e foram detectados na tela 3, contribuem para a construção de um padrão de interferência dado por

$$I_x(\xi) = 1 + \cos\{2k(\xi + x)\},\tag{1.8}$$

onde $k = \pi s/L\lambda$. L e s estão definidos na figura 1.3, e λ é o comprimento de onda dos fótons. Em outras palavras, esse é o padrão de interferência formado pelo subconjunto de fótons associados a uma posição x da tela 1. O número (nesse caso, 1) multiplicando o cosseno indica a qualidade do padrão de interferência. Ele é um padrão perfeito, porém deslocado do centro por uma quantidade $-x$. O padrão total de interferência $\mathcal{F}(\xi)$ registrado na tela 3 é a soma de todas as contribuições dos subconjuntos de fótons associados a todas as posições da tela 1. O número de fótons em cada subconjunto caracterizado por uma posição x qualquer é proporcional a $|\psi(x)|^2$. Assim, usando (1.7) e (1.8), temos

$$\mathcal{F}(\xi) \propto \int dx |\psi(x)|^2 I_x(\xi) = 1 + \exp\{-k^2 a^2\} \cos 2k\xi.\tag{1.9}$$

Como o termo multiplicando o cosseno indica, esse padrão não é perfeito. E por isso, definimos um parâmetro $u = ak$, chamado de parâmetro de “manchamento”, cujo valor está associado a quão próximo o padrão de interferência está de ser uma mancha⁴ na tela 3. Assim, nos referimos ao padrão total como um padrão manchado.

Experimento 2: medição do momento

Agora podemos voltar nossa atenção à medição do momento da tela 1. Observando a figura 1.3, notamos que fótons carregando diferentes momentos, em decorrência da interação com a tela 1, podem chegar à tela 2, mas apenas fótons carregando momento⁵ $\pm k = \pm \pi s / L\lambda$ são capazes de também passar pelas fendas dessa tela e, então, atingir a tela 3 [25]. Os fótons com momento diferente de $\pm k$ atingirão regiões acima ou abaixo das fendas na tela 2, mas nunca precisamente as fendas. Dessa forma, se o momento inicial da tela 1 tiver um valor bem definido κ , por conservação de momento, seu momento final será $\kappa' = \kappa \pm k$. Porém, como a tela 1 é descrita por um oscilador harmônico quântico, existe uma incerteza na determinação de seu momento inicial, o qual consiste numa distribuição de valores dada por $|\varphi(\kappa)|^2$, com $\varphi(\kappa)$ definido em (1.7). Assim, sua distribuição de momento final $D_\kappa(\kappa')$ para cada um dos possíveis valores κ da distribuição inicial será dada por

$$D_\kappa(\kappa') = \frac{1}{2}[\delta(\kappa' - (\kappa - k)) + \delta(\kappa' - (\kappa + k))]. \quad (1.10)$$

Em outras palavras, se o momento inicial da tela 1 é dado por uma distribuição de valores, seu momento final também será. Caso o momento inicial da tela 1 fosse bem definido, poderíamos invocar a conservação de momento e utilizar os valores dos momentos dos fótons para dizer por qual fenda eles vieram. Estaríamos reproduzindo o argumento de Einstein.

De forma semelhante à posição, aqui existe um subconjunto de distribuições de momento definido pelo mesmo momento inicial. Isso define a distribuição parcial de momentos finais $D_\kappa(\kappa')$ na equação (1.10). Analogamente à construção da intensidade total em (1.9), a distribuição total de momento $\mathcal{D}(\kappa')$ é soma sobre todos os valores de momento inicial κ das contribuições parciais $D_\kappa(\kappa')$ multiplicado pela densidade de probabilidade $|\varphi(\kappa)|^2$ de ocorrência de cada valor inicial κ da distribuição. Utilizando as equações (1.7) e (1.10), teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\kappa') &= \int d\kappa |\varphi(\kappa)|^2 D_\kappa(\kappa') \\ &= \frac{a}{2\pi^{1/2}} \{ \exp \{ -a^2(\kappa' + k)^2 \} + \exp \{ -a^2(\kappa' - k)^2 \} \}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Assim, vemos que o “parâmetro de manchamento” também está presente na expressão

⁴Isto é, um padrão sem franjas de interferência.

⁵O número de onda e o momento estão sendo tomados como sinônimos por motivos econômicos. Naturalmente, ambos estão relacionados pela equação (1.1).

para a distribuição do momento. Aqui, porém, ele está ligado à incerteza que temos sobre o caminho dos fótons. As exponenciais em (1.11) estão relacionadas à probabilidade dos fótons passarem pela fenda A ou B .

Análise dos experimentos

Suponhamos que o parâmetro de manchamento seja $u = 0,4769$. Substituindo na expressão (1.9) para o padrão total de interferência, é possível construir a figura 1.4. Wootters e Zurek [25] propuseram a *razão crista-vale* como quantificador da qualidade do padrão de interferência. A razão crista-vale é um número entre 1 ($a \rightarrow \infty$) e infinito ($a \rightarrow 0$), contabilizando um padrão sem interferência e com máxima interferência, respectivamente. Para $u = 0,4769$ essa razão é dada por

$$R(u) = \frac{1 + \exp\{-u^2\}}{1 - \exp\{-u^2\}} = 8,8. \quad (1.12)$$

Segundo Wootters e Zurek, essa razão representa um padrão de interferência muito pronunciado, o que significa que o parâmetro de manchamento com valor $u = 0,4769$ é responsável por uma baixa atenuação da amplitude do cosseno na equação (1.9). Similarmente, substituindo o mesmo valor do parâmetro u na expressão (1.11) da distribuição total de momento da tela 1, é possível construir a figura 1.5. Para relacionar

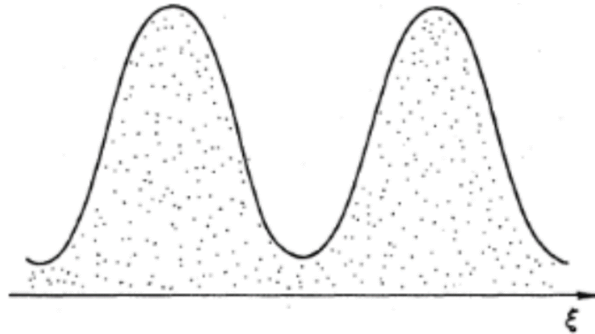


Figura 1.4: Padrão de interferência total $\mathcal{F}(\xi)$ obtido quando substituímos o “parâmetro de manchamento” com valor $u = 0,4769$ na expressão (1.9). *Figura retirada da referência [25].*

esse parâmetro ao caminho dos fótons, precisamos de uma estratégia que relacione o momento final da tela 1 às alternativas do experimento. Wootters e Zurek propuseram uma estratégia em que o caminho escolhido é aquele que mais contribui para a ocorrência do valor medido do momento final da tela 1. Se a medição do momento final da tela 1 resultou num valor negativo, então vamos apostar que o fóton veio pela fenda A (ver figura 1.3), a atingindo com momento $+k$ devido à interação com a tela 1 [26]. Se resultou num valor positivo, apostamos que o fóton veio pela fenda B , a atingindo com um momento $-k$. Essa aposta não é perfeita: existem valores negativos (positivos) para o momento final da tela 1 que não necessariamente estão associados a fótons vindo da fenda A (B). Em outras palavras, é perfeitamente possível que um momento final

negativo (positivo) da tela 1 tenha sido medido, mesmo que o fóton que interagiu com a tela 1 tenha passado pela fenda B (A). Para ver isso, podemos olhar para os casos em que $|\kappa'| > k$. Como exemplo meramente ilustrativo, consideremos duas situações (I) e (II). Nas duas situações vamos supor que o valor final do momento da tela 1 tenha sido $\kappa' = -4k$. Se esse resultado foi obtido na situação (I) em que a tela 1 transferiu um momento $+k$ a um fóton e esse passou pela fenda A , o momento inicial da tela 1 foi $\kappa = -3k$. Porém, existe uma situação (II) na qual o mesmo momento final de $\kappa' = -4k$ foi medido, mas a tela 1 transferiu um momento $-k$ a um fóton e esse passou pela fenda B . Nessa situação (II), o momento inicial da tela 1 foi $\kappa = -5k$. Em princípio, quando medimos um momento final de $\kappa' = -4k$, qualquer das duas situações (I) e (II) podem ter ocorrido. Dessa forma, por que vamos apostar na fenda A quando o momento final medido é negativo? O que torna a situação (I) preferível? A resposta reside no fato de que o comportamento inicial da tela 1 é descrito por uma função de onda de oscilador harmônico quântico, representado pelas funções gaussianas centradas em zero na equação (1.7). Essa descrição implica que, embora valores grandes de (momento inicial) κ sejam possíveis, eles são menos prováveis que valores menores. Como a distribuição de momento final $\mathcal{D}(\kappa')$ é uma soma das contribuições parciais $D_\kappa(\kappa')$ ponderadas pela densidade de probabilidade $|\varphi(\kappa)|^2$, os valores mais prováveis de κ são aqueles que mais contribuem para $\mathcal{D}(\kappa')$, e portanto, para o valor medido do momento final da tela 1. Isso mostra porquê a situação (I) é preferível. A figura 1.5 nos mostra duas curvas representando a densidade de probabilidade do fóton ter passado pelas fendas A e B em função dos valores medidos do momento final da tela 1. Vemos que para a fenda A , temos uma gaussiana centrada em $-k$, enquanto para a fenda B , temos outra gaussiana centrada em $+k$. Dessa forma, essa estratégia nos permite retrodizer o caminho dos fótons baseado no resultado da medição do momento final da tela 1. Um caso interessante de ser notado é a interseção das curvas em $\kappa' = 0$. Nessa situação, fótons atingindo a fenda dupla com momentos $+k$ ou $-k$ contribuem igualmente para o resultado da medição do momento. Em casos desse tipo, seríamos incapazes de retrodizer o caminho dos fótons.

Como dito anteriormente, as exponenciais da equação (1.11) estão relacionadas à probabilidade dos fótons terem passado pelas fendas A e B . Conforme pode ser visto em [26], a probabilidade p_A de que um fóton tenha passado pela fenda A quando o valor medido do momento final da tela 1 foi negativo é a área abaixo da gaussiana com centro em $-k$, avaliada de $-\infty$ até 0, a qual é dada por

$$p_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(u). \quad (1.13)$$

Similarmente, com a integral da gaussiana centrada em $+k$ avaliada nos mesmos intervalos, a probabilidade p_B de que um fóton tenha passado pela fenda B quando o valor

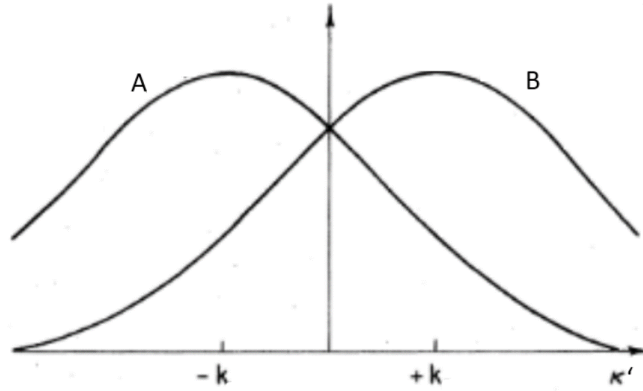


Figura 1.5: Curvas da distribuição de momento $D_{\kappa}(\kappa')$ na expressão (1.11) em função do valor medido do momento final da tela 1. A área abaixo da curva A pode ser associada à probabilidade dos fótons terem passado pela fenda A , enquanto a área abaixo da curva B , à probabilidade dos fótons terem passado pela fenda B . Em média, fótons passando pela fenda B (A) contribuem mais para valores positivos (negativos) do momento final κ' da tela 1. As regiões de superposição estão relacionadas à incerteza em retrodizer o caminho dos fótons. *Figura retirada da referência [25].*

medido do momento final da tela 1 foi negativo é [26]:

$$p_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}(u). \quad (1.14)$$

Podemos ver dessas expressões que $p_A + p_B = 1$. Para $u = 0,4769$, o valor do parâmetro de manchamento escolhido por Wootters e Zurek, foi mostrado [26] que ao apostar que um valor negativo na medição do momento final sempre ocorre quando um fóton passou pela fenda A , 25% das vezes representariam retrodições erradas. Como enfatizado por Wootters e Zurek, apostar dessa forma implica que estaremos errados uma vez a cada quatro rodadas. Essa é uma aposta bem razoável. Significa que não temos um conhecimento perfeito do caminho dos fótons, mas podemos fazer um bom trabalho. Se compararmos com o padrão de interferência obtido, somos levados a concluir que é possível obter uma quantidade razoável de informação de caminho e ainda observar um padrão de interferência significativo. Isso certamente representa um acréscimo ao debate Einstein-Bohr! Na realidade, esse é um resultado tão impressionante que cabe uma objeção: o sucesso em obter algum grau de informação de caminho e, ainda, algum grau de interferência não seria devido aos valores de posição e momento terem sido obtidos em experimentos separados? Esse resultado ainda seria possível ao se elaborar um experimento capaz de obter simultaneamente dados de posição e momento?

1.2.2 Obtenção simultânea da posição e do momento

Para responder a pergunta anterior, Wootters e Zurek propuseram o seguinte procedimento experimental:

- Fótons entram no aparato experimental da figura 1.3, transferem momento à tela

1, passam pelas fendas da tela 2 e são registrados na tela 3. A chegada de cada fóton é percebida por um flash na tela 3.

- Assim que o flash é visto, registramos sua posição na tela 3 e imediatamente medimos o momento da tela 1.
- O experimento é realizado com apenas um fóton a cada rodada.
- Construimos o padrão de interferência total contando todos os fótons que chegaram na tela num intervalo de tempo definido. Analogamente, construimos a distribuição total de momento.

Uma vez que o experimento nos oferece dois dados para cada fóton (a posição na tela 3 e o momento final da tela 1), na tabela de resultados do experimento vamos escolher um valor de momento medido κ' e olhar apenas para a distribuição de posição gerada na tela 3 quando o valor κ' foi obtido. Em outras palavras, estamos subselecionando o conjunto de posições na tela 3 correlacionado⁶ ao mesmo valor de momento medido κ' . Que tipo de padrão de interferência podemos observar?

Uma vez que estamos olhando para um padrão de interferência formado por subconjuntos de fótons, a expressão que precisamos para descrever o padrão do experimento dessa subseção é a análoga à expressão do padrão de interferência parcial na equação (1.8). Assim, como mostrado por Wootters e Zurek em [25], o padrão de interferência produzido por esses fótons é dado pela expressão

$$i_{\kappa'}(\xi) = 1 + 2p_A^{1/2}(\kappa')p_B^{1/2}(\kappa')\cos\{2k(\xi + x)\}, \quad (1.15)$$

onde $p_A(\kappa')$ e $p_B(\kappa')$ representam a probabilidade de passar pela fenda A e B , respectivamente, dado um valor de momento κ' . Seja a razão entre essas probabilidades dada por $p_A(\kappa')/p_B(\kappa') \equiv f(\kappa')$. Suponhamos que essa razão seja 99/1. À luz do debate Einstein-Bohr na seção 1.1, nós esperaríamos que uma precisão desse tipo sobre o caminho dos fótons seja capaz de destruir qualquer tipo de interferência. A razão crista-vale, nesse caso, é

$$R(u) = \frac{1 + 2p_A^{1/2}(\kappa')p_B^{1/2}(\kappa')}{1 - 2p_A^{1/2}(\kappa')p_B^{1/2}(\kappa')} = \frac{3}{2}. \quad (1.16)$$

Segundo Wootters e Zurek, isso continua sendo um padrão de interferência considerável. Dessa forma, não deixa qualquer espaço para a objeção levantada no final da seção da 1.2.1. No mesmo experimento somos capazes de obter uma grande quantidade de informação de caminho e ao mesmo tempo observar um padrão de interferência com alguma nitidez!

Para garantir a consistência do resultado, precisamos obter o padrão de interferência total e verificar que não existe qualquer diferença entre as análises feitas separadamente

⁶De fato, Wootters e Zurek afirmam implicitamente que havia uma correlação quântica entre a tela 1 e o fóton. Eles afirmam que encontraram o “Paradoxo EPR” (Einstein-Podolsky-Rosen, [2]) na fenda dupla.

e simultaneamente. Assim, somamos todas as contribuições de interferência (1.15) para cada valor de momento κ' ponderado pela distribuição de momento final $\mathcal{D}(\kappa')$ [equação (1.11)] da tela 1:

$$\mathcal{F}(\xi) = \int d\kappa' \mathcal{D}(\kappa') i_{\kappa'}(\xi) = 1 + \exp\{-ka^2\} \cos\{2k\xi\}. \quad (1.17)$$

Essa é exatamente a mesma expressão do padrão de interferência total obtida em (1.9), quando os experimentos foram feitos separadamente.

1.2.3 Informação e complementaridade

Além de estender a discussão da complementaridade para um domínio intermediário, em que se poderia obter alguma informação de caminho quando não insistimos num padrão de interferência 100% nítido, Wootters e Zurek foram além. Eles introduziram uma medida de informação para possibilitar o tratamento mais formal de um domínio difícil de colocar em palavras.

Para quantificar a informação sobre os caminhos, Wootters e Zurek utilizaram a Entropia de Shannon H [27]. A definição de H em [25] é: se um sistema pode estar em um de N estados possíveis, mas conhecemos apenas a probabilidade p_i de ele estar em cada estado, a informação ausente sobre o sistema é dada por

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (1.18)$$

Wootters e Zurek empregam a Entropia de Shannon como quantificador da informação que *não temos* sobre os caminhos. Por exemplo, se a medição do recuo da tela 1 revela um momento final nulo, somos incapazes de retrodizer o caminho do fóton. Nesse caso, a probabilidade de que o fóton tenha passado pela fenda A é a mesma de que tenha passado pela fenda B , isto é, $p_A = p_B = \frac{1}{2}$. Dessa forma, a quantidade de informação ausente sobre o caminho dos fótons é dada por

$$H_0 = - \left(\frac{1}{2} \ln\{1/2\} + \frac{1}{2} \ln\{1/2\} \right) = \ln\{2\}. \quad (1.19)$$

Para simplificar a notação, podemos escrever p_A e p_B com um único parâmetro γ tal que se $p_A = \gamma$, então $p_B = 1 - \gamma$. Assim, de forma genérica, a quantidade de informação ausente pode ser escrita como

$$H(\gamma) = -(p_A \ln\{p_A\} + p_B \ln\{p_B\}) = -(\gamma \ln\{\gamma\} + (1 - \gamma) \ln\{1 - \gamma\}). \quad (1.20)$$

Também de forma genérica, o padrão de interferência pode ser escrito como

$$\mathcal{F}(\xi) = 1 + S \cos\{2k\xi\}, \quad (1.21)$$

em que S é a nitidez do padrão.

Wootters e Zurek mostraram que a relação de S com a probabilidade de passar por uma das fendas num experimento com fótons num estado puro é dada por $S = 2\gamma^{1/2}(1 - \gamma)^{1/2}$. Resolvendo a equação para γ , temos

$$\gamma = \frac{1}{2} (1 \pm (1 - S^2)^{1/2}). \quad (1.22)$$

Isso nos permite obter $H(S)$ a partir de $H(\gamma)$, bastando substituir γ da expressão (1.22) na expressão (1.20). O principal resultado segue dessa substituição:

$$H \geq H(S), \quad (1.23)$$

onde H é uma quantidade de informação genérica dada pela Entropia de Shannon e $H(S)$ é a quantidade de informação de caminho ausente necessária para se obter um padrão de interferência com uma qualidade S . A expressão (1.23) representa uma declaração quantitativa da complementaridade: consideramos a preparação de um experimento cujo objetivo seja a obtenção de um padrão de interferência de qualidade S . Nesse experimento, a informação ausente sobre o caminho dos fótons é sempre maior ou igual a $H(S)$. Em outras palavras, na preparação do experimento, a menor quantidade de informação de caminho H que devemos abrir mão para obter um padrão de interferência com nitidez S é $H(S)$. Insistir num determinado padrão de interferência necessariamente implica ter que abrir mão de uma determinada quantidade de informação de caminho. Em vista da discussão entre Einstein e Bohr, a ausência desse formalismo impedia uma discussão num domínio intermediário, e apenas poderiam falar sobre o caso extremo em que abrimos mão de toda informação a fim de obter um padrão de interferência 100% nítido. Com a aplicação desse formalismo, Wootters e Zurek afirmaram que, embora a resposta de Bohr foi na direção de demonstrar que a disponibilização da informação de caminho através da medição do recuo da tela 1 era o elemento fatal contra a exibição de um padrão de interferência, o experimento da fenda dupla com recuo proposto por Einstein não elimina completamente a interferência. Numa tradução livre de suas palavras, “o experimento de Einstein disponibiliza *quase* toda informação de caminho” [25]. Nesse caso, um padrão de interferência com alguma nitidez estará presente.

A conclusão desta subseção é também a conclusão de toda a seção: munidos de um formalismo comum à teoria da informação, somos capazes de fazer afirmações claras e quantitativas sobre a complementaridade. Ela não apenas está presente nos casos extremos, mas é ainda mais contundente nos casos intermediários. Um formalismo preciso do problema foi a chave para essa investigação: não apenas propondo uma quantificação da informação de caminho, que nos oferece uma maneira de lidar com a linguagem, mas principalmente com o tratamento quântico da tela 1 [figura 1.3], que nos permite ver o efeito da aquisição de informação sobre a interferência.

1.3 Absorção e informação de caminho na interferometria de nêutrons

Após a introdução de ferramental de teoria da informação em física quântica, notadamente o trabalho de Wootters e Zurek [25], parecia uma idéia frutífera explicar alguns fenômenos através do ganho de informação no experimento. A interferometria de nêutrons foi o terreno fértil [28–30]. Parte das subseqüentes descobertas sobre a complementaridade foram baseadas em resultados que já eram conhecidos na literatura de interferometria, mas sem a perspectiva informacional introduzida por Wootters e Zurek. Essa perspectiva trouxe à tona explicações que corroboravam a noção de complementaridade, além de desenvolvê-la. Nesta seção vamos explorar a análise de Rauch e Summhammer [31] no contexto de interferometria de nêutrons. Suas observações, que discutiremos aqui, constituíram o primeiro passo experimental em direção às *relações de dualidade interferométricas* que serão discutidas em seções posteriores. A figura 1.6

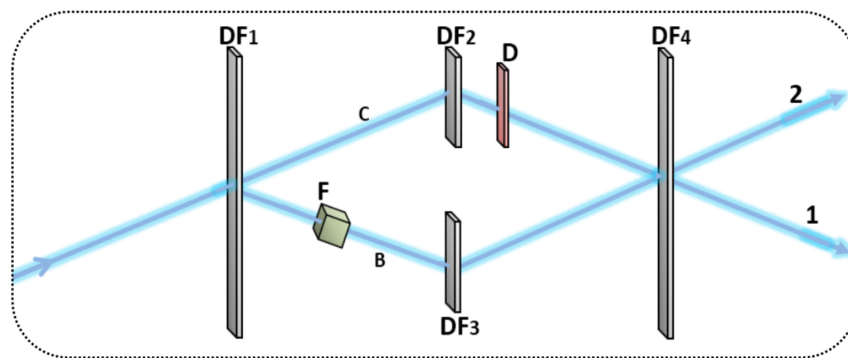


Figura 1.6: Esboço da montagem experimental de um interferômetro de nêutrons que opera com dois tipos de absorvedor F : estático ou dinâmico. Um feixe atinge um divisor de feixes DF_1 , dividindo-se em componentes de cima (C) e de baixo (B). O feixe C atravessa um deslocador de fase D e ambas as componentes são recombinadas em DF_4 . Quando o absorvedor F está presente, sua função é atenuar a população de nêutrons no feixe B . O padrão de interferência pode ser estudado nas saídas 1 e 2.

esboça um interferômetro com feixes de nêutrons térmicos monocromáticos⁷. O feixe inicial incide sobre um divisor de feixes, sendo separado em duas componentes coerentes. Em um dos feixes é introduzido um absorvedor F , atenuando a população de nêutrons naquele caminho. O absorvedor F pode assumir uma de duas operações, estática ou dinâmica, segundo nossa escolha. Os feixes são, depois, recombinados e podem apresentar interferência. Um deslocador de fase D colocado num dos caminhos modula o padrão. Analisamos a intensidade dos feixes em duas saídas, 1 e 2, como mostra a figura 1.6.

⁷O “nome” desses nêutrons pode parecer pomposo, mas não representa grandes motivos de distração. O termo térmico indica o valor da energia cinética de nêutrons livres. Como energia cinética e temperatura podem ser relacionadas, a temperatura do nêutron indica a faixa de energia em que ele se encontra. Já o uso do termo “monocromaticidade” é devido aos nêutrons possuírem o mesmo comprimento de onda de De Broglie, numa analogia ao comprimento de onda da luz.

A função de onda de um nêutron na saída 1 pode ser escrita como a superposição das funções de onda de nêutrons que viajam pelos caminhos B e C :

$$\psi = \psi_B + \psi_C e^{i\varphi}, \quad (1.24)$$

onde φ é a fase introduzida pelo deslocador de fase D . Nosso interesse é estudar a diferença nos resultados quando operamos com dois tipos de absorvedores, o que foi experimentalmente verificado no trabalho de Rauch e Summhammer [31]. Vamos separar a análise em duas abordagens: (I) utilizando um absorvedor parcial estático; e (II) utilizando um absorvedor dependente do tempo.

1.3.1 Abordagem I: absorção parcial estática

Introduzimos o absorvedor parcial estático em um dos feixes. Vamos escolher o feixe B . Ele reduzirá a intensidade do feixe por um fator de a , o qual está associado a propriedades do material e dos nêutrons, como espessura do material, índice de refração, seção de choque para absorção e espalhamento, entre outros. Para nós, é de maior importância que vejamos esse fator como a probabilidade dos nêutrons no feixe B passarem pela região de absorção. Certamente será um número entre 0 e 1.

Incluindo o deslocamento de fase causado pelo absorvedor F , chamamos a diferença total de fase entre os feixes de χ . Portanto, a função de onda na saída 1 é dada por

$$\psi = \sqrt{a}\psi_B + \psi_C e^{i\chi}. \quad (1.25)$$

Assim, a intensidade I nessa saída será

$$I = |\psi|^2 = a|\psi_B|^2 + |\psi_C|^2 + 2\sqrt{a}|\psi_B||\psi_C|\cos\{\chi\}. \quad (1.26)$$

A quantidade multiplicando o cosseno na (1.26) é a que mais nos interessa. Ela representa a amplitude das franjas de interferência (dadas pelo termo $\cos\{\chi\}$). Essa amplitude não é proporcional à probabilidade a do nêutron passar pela região de absorção, mas à sua raiz quadrada.

1.3.2 Abordagem II: absorção dinâmica

Substituindo o absorvedor estático por um absorvedor dinâmico, isto é, dependente do tempo, precisamos fazer algumas considerações. Em primeiro lugar, para facilitar a visualização do experimento, podemos pensar no absorvedor dependente do tempo como um tipo de modulador mecânico, um obstrutor rotatório (hélice ou *chopper* periódicos). Em segundo lugar, e mais importante, esse absorvedor atua deixando o feixe intacto quando está ausente, mas absorvendo o feixe com eficiência ideal (100%) quando presente. Ou seja, o absorvedor funciona como um obstrutor de caminho: existem dois caminhos para o feixe se dividir (caso ausente) ou apenas o caminho C (caso presente).

Finalmente, podemos escolher a razão entre a presença e ausência da obstrução de tal modo que a probabilidade média de um nêutron passar pela região de absorção seja também a , como na abordagem (I). Com essas condições, Rauch e Summhammer calcularam a intensidade do feixe na saída 1. Essa intensidade é uma soma ponderada pelas condições impostas pelo absorvedor:

$$I = a |\psi_B + \psi_C e^{i\chi}|^2 + (1 - a) |\psi_C|^2 = a |\psi_B|^2 + |\psi_C|^2 + 2a |\psi_B| |\psi_C| \cos\{\chi\}. \quad (1.27)$$

Analogamente à equação (1.26), a quantidade mais interessante é aquela multiplicando o cosseno na equação (1.27), representando a amplitude das franjas de interferência. Essa amplitude é agora proporcional à probabilidade de um nêutron passar pela região de absorção. Isso significa que a amplitude das franjas agora é menor que no caso anterior. É importante observar que a intensidade média nas duas saídas, determinada pela taxa de absorção média, é a mesma para ambos os casos [31]. Isto é, em média, o mesmo número de nêutrons é absorvido em ambas as abordagens. O que muda é o padrão de interferência analisado na saída 1. Chegamos ao ponto de nos perguntarmos: esses experimentos representam as mesmas condições? Se, em média, os experimentos possuem os mesmos resultados para as absorções, existe algo errado em alguma abordagem?

1.3.3 Interferência e o conteúdo informacional das abordagens

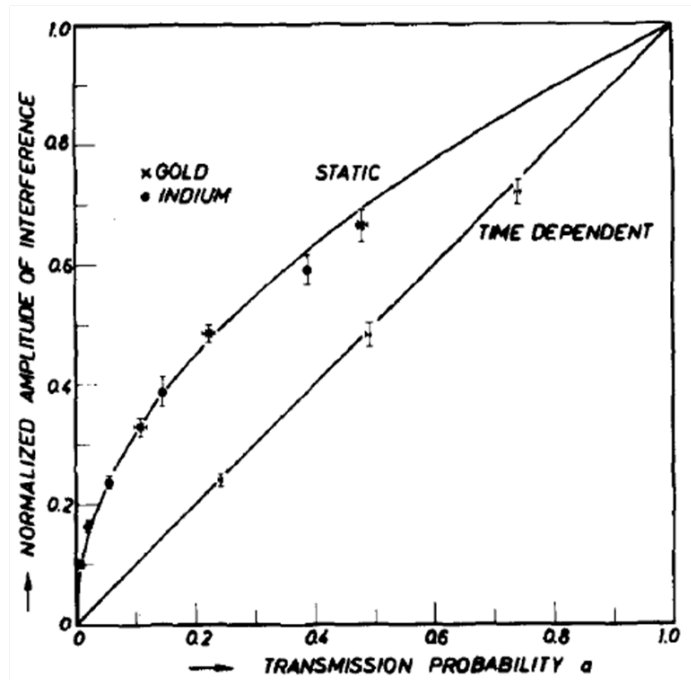


Figura 1.7: Amplitude da interferência *versus* probabilidade média de transmissão de um nêutron. Os pontos da figura representam dados experimentais, enquanto as curvas são previsões teóricas. *Figura retirada da referência [31].*

Embora os experimentos pareçam reproduzir as mesmas condições, o trabalho de Rauch e Summhammer nos permite notar que eles exibem quantidades de informação diferentes sobre os caminhos dos feixes. Na abordagem (II) podemos ter certeza de que:

- 1) a função de onda dos nêutrons se propaga por ambos os caminhos, ou
- 2) a função de onda se propaga apenas pelo caminho C .

Na abordagem (I), por outro lado, não podemos dizer quando um nêutron será absorvido. O melhor que podemos dizer é que a função de onda dos nêutrons se propaga por ambos os caminhos com amplitudes diferentes. Atribuímos a diminuição da amplitude de interferência na abordagem (II) em relação à (I) ao conhecimento de caminho adicional que temos com a inserção de um absorvedor dependente do tempo. Seguindo Rauch e Summhammer, essa é a conclusão do trabalho [31].

Um experimento real foi realizado no Instituto Laue-Langevin, demonstrando que os dados experimentais concordam com a predição das equações (1.26) e (1.27). O gráfico da figura 1.7 ilustra o comportamento da interferência em função da probabilidade de transmissão pela região de absorção nas duas abordagens. A adequação da teoria aos dados experimentais mostra o sucesso preditivo da física quântica. Paralelamente, temos uma ilustração do poder da representação da informação como agente físico.

Capítulo 2

Dualidades interferométricas em cenários de dois caminhos

2.1 Dualidade interferométrica: Greenberger e Yasin

Uma vez que a discussão da complementaridade saiu de um contexto “tudo ou nada” para um contexto de fenômenos intermediários, novas motivações aparecem. Torna-se relevante procurar por outras manifestações nesse novo domínio, além de explorar novas maneiras de quantificá-las. Vamos reproduzir aqui a proposta de Greenberger e Yasin que estabelece uma relação quantitativa elegante entre interferência e conhecimento *preditivo* sobre os caminhos [32]. Para tanto, vamos nos manter próximo à “Abordagem I” do experimento de Rauch e Summhammer discutido na seção 1.3.

Mais uma vez, analisamos a figura 1.6. Como fizeram Greenberger e Yasin, começamos com a suposição de que divisor de feixes DF_1 separa o feixe em duas componentes coerentes. No que concerne a discussão da complementaridade, estamos interessados em estudar como o conhecimento sobre os caminhos afeta o padrão de interferência. Neste caso particular, queremos estudar como o conhecimento sobre a população dos feixes de cada caminho modifica o padrão de interferência em relação ao padrão que seria construído caso esse conhecimento fosse nulo [32]. Isso está implícito no trabalho de Rauch e Summhammer [31], de modo que a contribuição de Greenberger e Yasin é estudar essa relação de troca, quantificando a informação de caminho e comparando esse quantificador à Visibilidade do padrão de interferência.

A função de onda de um nêutron na saída 1 do interferômetro da figura 1.6 é dada por

$$\psi = a\psi_B + b\psi_C e^{i\chi}, \quad (2.1)$$

onde a e b são números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, e χ representa a diferença de fase entre os feixes. Por enquanto, não fazemos menção explícita ao absorvedor F , de modo que não definimos qual amplitude a ou b contabiliza a absorção. Ao contrário da equação (1.25), onde já decidimos em que feixe acontece a absorção, na (2.1) representamos genericamente a função de onda na saída 1. O motivo disso ficará mais claro adiante.

Analogamente à equação (1.26), a intensidade na saída 1 será dada por

$$I = |\psi|^2 = a^2 |\psi_B|^2 + b^2 |\psi_C|^2 + 2ab |\psi_B| |\psi_C| \cos \chi. \quad (2.2)$$

Greenberger e Yasin utilizaram a Visibilidade do padrão de interferência como quantificador da qualidade do padrão:

$$V_0 = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.3)$$

onde $I_{\max}$ refere-se à intensidade quando $\cos \chi = 1$ e $I_{\min}$ quando $\cos \chi = -1$. Dessa forma, assumindo que $|\psi_B| = |\psi_C|$, temos

$$V_0 = 2ab. \quad (2.4)$$

Com a parametrização $a = \cos \beta$ e $b = \sin \beta$ utilizada¹ em [32], escrevemos a equação anterior simplesmente como

$$V_0 = \sin\{2\beta\}. \quad (2.5)$$

Notemos que o ângulo β é o parâmetro que modula a probabilidade de um dos caminhos ser mais populado. É interessante comentar sobre dois casos particulares. Quando $\beta = \pi/4$, que fisicamente representa a ausência de absorção, os caminhos são identicamente populados e o padrão de interferência tem sua Visibilidade máxima. Quando $\beta = \pi/2$, sabemos que todos os nêutrons estarão no feixe C , que fisicamente representa um absorvedor ideal no caminho do feixe B . Nesse caso, não existe qualquer interferência.

2.1.1 Estratégia de aposta: predição

Como notado por Greenberger e Yasin, com um marcador no caminho de cada feixe, poderíamos medir exatamente a qual feixe pertence um dado nêutron detectado. Não teríamos dúvida. Por outro lado, ao invés de medir, podemos simplesmente tentar adivinhar em qual feixe (B ou C) um nêutron estará [32]. Jogamos uma moeda: se der “cara”, dizemos que ele estará em B . Se der “coroa”, em C . Claro, estaremos certos 50% das vezes e errados também 50% das vezes, isto é, uma aposta cega. Com esse tipo de estratégia, mesmo quando o feixe C é populado por 90% dos nêutrons (mas nós não sabemos disso), ainda assim só vamos prever corretamente 50% dos casos. Se não vamos medir cada nêutron em cada feixe, apenas detectá-los no final, na saída 1, precisamos de algo melhor que mera adivinhação.

Neste momento, fazemos menção explícita ao absorvedor F . Vamos considerar que ele é colocado no caminho do feixe B no interferômetro da figura 1.6 e introduz uma

¹Existe uma suposição adicional sendo feita nesta seção. Em [32], antes de entrar no interferômetro, os nêutrons são espalhados por um obstáculo. Naturalmente, nem todos os nêutrons são espalhados coerentemente. Dessa forma, a amplitude dos feixes em cada caminho não soma para a amplitude inicial, apenas para amplitude coerente R . Assim, $a^2 + b^2 = R$. Por simplicidade, consideramos que todo o espalhamento é coerente ($R = 1$).

assimetria na população de nêutrons ($\beta \neq \pi/4$), atenuando arbitrariamente a população nesse caminho. De posse dessa informação, uma estratégia esperta seria apostar que todos os nêutrons estarão no feixe mais intenso C . Nesse caso, como $b^2 > a^2$, estaremos certos uma fração $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ de vezes². Podemos comparar esse valor à aposta cega e com isso construir um quantificador de informação de caminho. Conforme proposto por Greenberger e Yasin:

$$P = \frac{|b|^2 / (|a|^2 + |b|^2) - 1/2}{1/2} = \frac{|b|^2 - |a|^2}{|a|^2 + |b|^2} = b^2 - a^2, \quad (2.6)$$

onde esse último passo segue da simplificação que temos nesta seção (ver notas 1 e 2). Esse quantificador de caminho P é uma medida do conhecimento disponibilizado pela assimetria ocasionada pelo absorvedor F (isto é, $\beta \neq \pi/4$) comparado à situação simétrica ($\beta = \pi/4$). Em outras palavras, P é uma medida da informação disponível *a priori* sobre a população dos feixes relativa a uma situação de completa ignorância, em que nenhuma informação sobre a população dos feixes está disponível. A expressão *a priori* é muito importante aqui. Não fizemos qualquer medição ao fazer essa aposta. Estamos apenas explorando nosso conhecimento prévio sobre as condições do interferômetro. Nós estamos prevendo, dadas as condições iniciais, que a maioria dos nêutrons estarão no feixe mais intenso. Se, mais uma vez, $a = \cos \beta$ e $b = \sin \beta$, temos

$$P = \cos\{2\beta\}. \quad (2.7)$$

Olhando para as equações (2.5) e (2.7) podemos notar o caráter complementar entre os quantificadores: quando os feixes são igualmente populados, $\beta = \pi/4$ e temos $P = 0$. Nenhuma informação *a priori* está disponível. Jogar uma moeda é o melhor que podemos fazer. Nessa mesma situação, o padrão de interferência tem visibilidade máxima, $V_0 = 1$. Quando apenas um dos feixes está populado, $\beta = 0$ ou $\pi/2$ e $P = \pm 1$. Nessa situação, $V_0 = 0$. Naturalmente, nenhuma interferência é exibida na saída 1. Isso nos coloca em condições de fazer a seguinte afirmação: de maneira geral, quanto mais certos estamos sobre a população de um dos feixes, menor é a visibilidade do padrão de interferência. Essa afirmação pode ser sumarizada na expressão principal do trabalho de Greenberger e Yasin:

$$V_0^2 + P^2 = 1. \quad (2.8)$$

Com uma escolha particular dos parâmetros, podemos construir um absorvedor F que atenua o feixe B em 99%. Podemos prever quase perfeitamente em que feixe os nêutrons estarão. Como vimos na seção 1.2, Wootters e Zurek demonstraram que nessa situação ainda existiria alguma interferência [25]. Com o auxílio das equações (2.6) e (2.8),

²Isto é, b^2 representa os casos favoráveis sobre todos os casos possíveis $a^2 + b^2$. Isso segue de acordo com a notação em [32]; como mencionado antes, aqui fazemos $a^2 + b^2 = 1$, com a e b reais. Esse é o mesmo caso na equação (2.6): primeiro apresentamos a notação de Greenberger e Yasin, depois fazemos a simplificação.

podemos mostrar que mesmo com 99% de certeza sobre os caminhos, ainda é possível observar uma interferência com 20% da visibilidade máxima! Isto é, com apenas 1% de intensidade em um dos feixes (o que nos permite fazer uma excelente aposta), ainda teremos um padrão com 20% da qualidade total. Isso testifica a robustez da visibilidade e o *incrível poder do princípio de superposição*³.

Como mencionado no início da seção, para deduzir a dualidade interferométrica (2.8) assumimos feixes coerentes, representados por estados puros. Porém, quando os feixes de nêutrons são descritos por estados parcialmente coerentes⁴, a visibilidade do padrão de interferência é reduzida, enquanto P continua o mesmo [32]. Para essas condições, Greenberger e Yasin mostraram que:

$$V_0^2 + P^2 < 1. \quad (2.9)$$

Essa expressão mostra que, mesmo no caso em que não podemos dizer absolutamente nada sobre o caminho dos nêutrons, $P = 0$, o padrão de interferência nunca atinge visibilidade igual a 1. Os detalhes da demonstração podem ser vistos em [32].

Finalmente, juntando as duas peças, a forma mais geral da *dualidade Greenberger-Yasin* que quantifica a complementaridade num regime preditivo, é dada pela expressão

$$V_0^2 + P^2 \leq 1, \quad (2.10)$$

onde a igualdade só é atingida para estados puros, com feixes completamente coerentes. É possível encontrar na literatura a afirmação de que essa é a primeira expressão quantitativa da complementaridade [33]. Vimos, porém, que Wootters e Zurek também fizeram uma expressão quantitativa [25]. É verdade que ela não dispõe da mesma elegância visual e simplicidade conceitual. Lá, a expressão quantitativa da complementaridade aparecia de maneira implícita. Por outro lado, começamos a seção falando sobre a busca de novas manifestações da complementaridade. Nesse sentido, a relação de dualidade (2.10) é a primeira expressão quantitativa de uma manifestação da complementaridade que não envolve medições diretas de sistemas auxiliares⁵, mas análises preditivas baseadas em informação a priori [34].

Podemos concluir esta seção salientando a ocorrência da complementaridade mesmo na ausência de medições diretas. Greenberger e Yasin estabeleceram o quantificador P , que nos informa a probabilidade a priori, em regime preditivo, de um nêutron estar num determinado feixe⁶. Enquanto isso, eles usaram visibilidade como quantificador da qualidade do padrão de interferência. Vimos que ambos os quantificadores são complementares. Além disso, uma nova manifestação da complementaridade aparece aqui,

³Tradução livre de [32].

⁴Isto é, estados mistos descritos por matrizes densidade com elementos fora da diagonal não nulos.

⁵Como a medição do momento da tela 1 em Wootters e Zurek [25].

⁶Mais tarde chamaremos esse quantificador de *preditibilidade*, uma vez que ele é um quantificador de informação de caminho que pressupõe uma estratégia de predição, não de retrodição baseada em medição de um observável.

preservando a essência do debate Einstein-Bohr, mas ainda demonstrando a extensão introduzida por Wootters e Zurek⁷ num novo regime.

2.2 Marcadores de caminho e o apagador quântico: o papel das correlações

Embora soframos o risco de incorrer na tediosa contravenção da repetitividade, algumas coisas precisam ser reforçadas antes de prosseguirmos. Em primeiro lugar, o debate Einstein-Bohr: o cenário principal é o experimento da fenda dupla com recuo. Einstein advogava que era possível saber por qual fenda um fóton passou, contudo, sem que a medição causasse eventos incontrolláveis sobre eles, como espalhamento. Com isso, ele esperava mostrar a possibilidade de adquirir informação de caminho sem destruir o padrão de interferência. Bohr invocou um tratamento semi-clássico sobre o problema, de modo que a obtenção de informação de caminho impedia a visualização de um padrão de interferência. O debate Einstein-Bohr é sobre interferência e informação de caminho adquirida na medição. Em segundo lugar, a quantificação do debate Einstein-Bohr feita por Wootters e Zurek [25]: com a proposição de uma função de onda de oscilador harmônico quântico para a fenda com recuo (aparato marcador do caminho dos fótons), eles exploraram a defesa de Bohr através de um tratamento mais profundo. O trabalho de Wootters e Zurek também é sobre interferência e informação de caminho adquirida na medição. Em terceiro lugar, notamos mais uma vez que a complementaridade nesses dois trabalhos não tem a mesma natureza daquela discutida por Greenberger e Yasin [32] e pelos trabalhos com interferometria de nêutrons [28, 29, 31]. Enquanto nesses a complementaridade era observada entre informação de caminho a priori e interferência, naqueles era observada entre informação de caminho obtida através da medição e interferência: **predição** *versus* interferência e **medição** *versus* interferência⁸. Em quarto, e último, lugar, é importante ressaltar uma característica omitida até então. Em algumas análises que precedem a discussão a seguir, a complementaridade aparecia devido a perturbações na função de onda: a aquisição de informação sobre a posição aumentava a incerteza no momento, destruindo a interferência. Como exemplos, temos o experimento da fenda dupla com elétrons de Richard Feynman [36] e o microscópio de Heisenberg [6]. Por conta disso, não é incomum observar na literatura autores defendendo o “princípio da incerteza” como mecanismo geral por trás da complementaridade. Mesmo Greenberger faz uma afirmação desse tipo [37], embora seu trabalho posterior com Yasin tenha sido derivado de forma independente de relações de incerteza, como os próprios observaram em [32].

Com essas considerações em mente, vamos reproduzir a proposta de Scully, Englert e Walther (SEW) [17] que utiliza um átomo de Rydberg [38] e duas cavidades para ilustrar

⁷Isto é, a complementaridade em domínios intermediários.

⁸A referência [35] adota uma nomenclatura parecida para esses dois ramos, separando-os em “predição” e “retrodição”. Essa diferença também já foi mencionada em [34].

a complementaridade em mecânica quântica, destacando a operação de um marcador de caminho. Em suma, a proposta encontra lugar nas quatro observações feitas nesta seção:

- 1) É uma extensão do debate Einstein-Bohr;
- 2) Explora a figura do marcador de caminho já presente em Wootters e Zurek [25], mas com um formalismo mais intuitivo;
- 3) Como se trata de medição e interferência, não exibe o mesmo tipo de complementaridade descrita pela relação de dualidade Greenberger-Yasin [32];
- 4) Contempla o objetivo de Einstein, já que a obtenção de informação não implica em alteração espacial significativa na função de onda. Ao mesmo tempo, também contempla a defesa de Bohr de que a interferência é destruída assim que se torna possível medir por qual caminho o átomo passou. Nesse sentido, parece desnecessário apelar para relações de incerteza como mecanismo por trás da complementaridade.

Uma vez que o experimento mental de SEW possui vários eventos importantes, vamos separá-lo em estágios e estudá-lo passo a passo, assim como fizeram os autores.

2.2.1 Fenda dupla com átomos de Rydberg

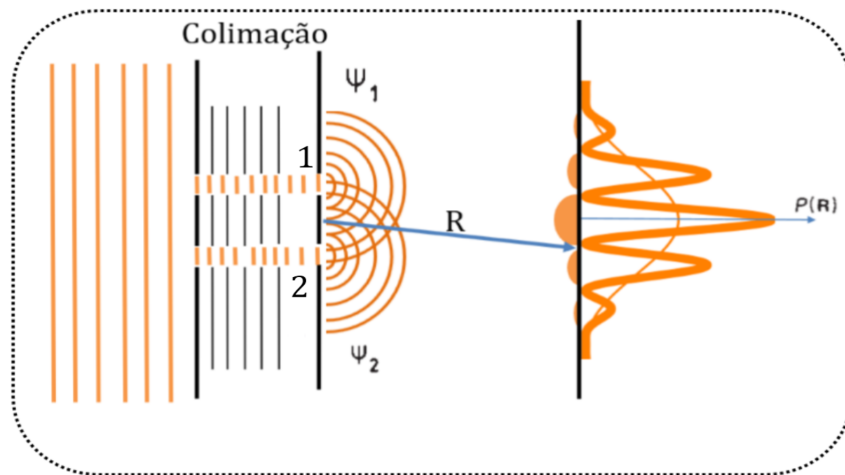


Figura 2.1: Fenda dupla com átomos de Rydberg.

A figura 2.1 ilustra a passagem de um átomo de Rydberg⁹ através de duas fendas, 1 e 2. A função de onda que descreve a propagação do átomo nas coordenadas de posição

⁹Embora não nos interesse conhecer toda a física do átomo de Rydberg, vale mencionar que ele apresenta propriedades que permitem um ótimo controle experimental, e por essa razão é utilizado em diversas aplicações [39–43].

de seu centro de massa após passar pelas fendas é dada por

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})\}. \quad (2.11)$$

A probabilidade de detectar os átomos numa posição $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ na tela é dado pelo módulo ao quadrado da expressão acima. Isto é,

$$P(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\{|\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2 + \psi_1^*(\mathbf{R})\psi_2(\mathbf{R}) + \psi_1(\mathbf{R})\psi_2^*(\mathbf{R})\}. \quad (2.12)$$

Naturalmente, a interferência é contabilizada pelos termos cruzados na expressão.

2.2.2 Explorando graus de liberdade adicionais

Uma grande vantagem de se usar átomos para estudar mecânica quântica é a exploração de seus graus de liberdade internos, como seus estados de energia. Assim, ao invés de enviar simples feixes atômicos, enviaremos feixes atômicos excitados. Pode parecer pouco, por enquanto, mas esse é o ingrediente essencial da proposta de SEW. Dessa forma, adicionando esse novo grau de liberdade, o estado de um átomo que passou por uma fenda dupla é dado por

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})\} |i\rangle, \quad (2.13)$$

onde o vetor de estado $|i\rangle$ representa um estado de energia qualquer do átomo. Como foi observado por SEW [17], apenas a inclusão desse grau de liberdade não representa alguma mudança prática, ainda. Por exemplo, assim como na equação (2.12), podemos calcular a probabilidade de encontrar um átomo numa posição $\mathbf{R}$ da tela:

$$P(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\{|\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2 + \psi_1^*(\mathbf{R})\psi_2(\mathbf{R}) + \psi_1(\mathbf{R})\psi_2^*(\mathbf{R})\} \langle i|i\rangle. \quad (2.14)$$

Vemos que o resultado (2.14) concorda com (2.12) como se nenhuma alteração tivesse sido feita. Naturalmente, significa que não estamos utilizando o grau de liberdade disponível. Para explorar esse grau de liberdade, SEW propuseram a utilização de cavidades supercondutoras. Essas cavidades são formadas por espelhos (planos, esféricos, etc.) em posições opostas com vácuo entre eles. Experimentos com cavidades apareceram na década de 70, num contexto da óptica quântica conhecido como *eletrodinâmica quântica de cavidades*. Um experimento típico no domínio de microondas [44] é ilustrado na figura 2.2. Átomos de Rydberg saem de um forno O e interagem com um laser L numa câmara B , absorvendo energia e sendo deixados num estado excitado. Os átomos entram numa cavidade C e interagem com o campo eletromagnético lá dentro, inicialmente num estado de vácuo. Dentro da cavidade, os átomos podem sofrer uma transição para o estado fundamental, deixando um fóton na cavidade. Eles saem da cavidade e são detectados em D . O fóton deixado na cavidade, construída de maneira

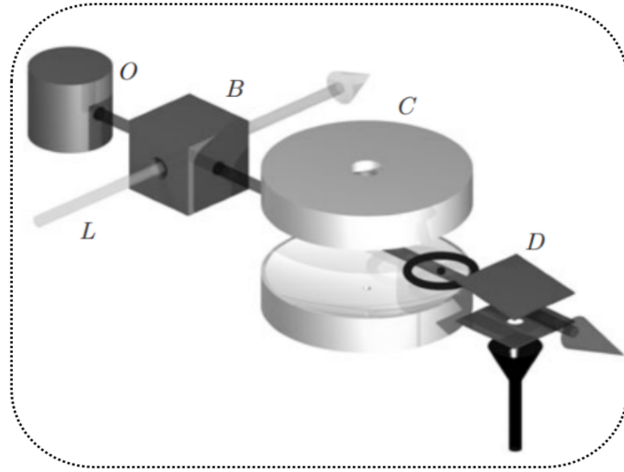


Figura 2.2: Ilustração de um experimento típico de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (ver detalhes no texto). *Figura retirada da referência [44].*

a ser ressonante com a transição eletrônica dos átomos, fica confinado ao ser múltiplamente refletido pelos espelhos. Como a cavidade não é perfeita, mas possui um fator de qualidade, eventualmente essa radiação será emitida para fora (orifício da figura 2.2), podendo ser detectada.

A figura 2.3 é uma versão simplificada objetiva de duas cavidades atrás de duas fendas. Feixes de átomos excitados por um feixe de laser são colimados na direção dessas cavidades. Os modos de vácuo do campo eletromagnético dentro de cada cavidade permitem um acoplamento forte o suficiente entre o átomo e a cavidade, tal que o átomo possa emitir um fóton enquanto viaja dentro dela, mas não quando está fora. Sabemos

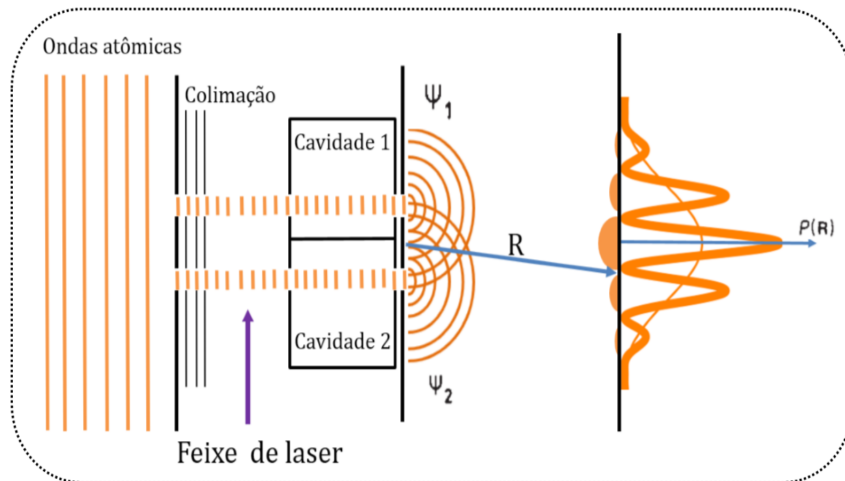


Figura 2.3: Experimento da fenda dupla com duas cavidades utilizando átomos de Rydberg em estados excitados.

que a função de onda de um átomo depois de passar pela fenda dupla é dada pela equação (2.11). Agora, se um átomo sai de uma das cavidades, emite um fóton e passa pela fenda dupla, seria razoável pensar que essa interação afetaria a função de onda do átomo, fazendo-se necessário uma nova descrição para $\psi_1(\mathbf{r})$ e $\psi_2(\mathbf{r})$. Por exemplo,

algum momento poderia ser transferido ao átomo durante a interação, transformando as coordenadas do centro de massa e alterando a probabilidade de detecção na tela. A referência [45] demonstra que isso não é verdade. Como observado por SEW [17], o momento do átomo antes de entrar e depois de sair das cavidades é o mesmo. Nenhum momento resultante é transferido ao átomo, e portanto, nenhuma alteração espacial afeta a função de onda.

2.2.3 Marcador de caminho

Pela estrutura da montagem 2.3, ao detectarmos um átomo na tela, podemos dizer que quando sabemos que o átomo passou pela cavidade 1 (2), ele também passou pela fenda 1 (2). Isso significa que as cavidades funcionam como um marcador de caminho: se um fóton está em uma das cavidades, então sabemos que o átomo passou por lá e sabemos também por qual fenda ele passou. Chamando $|a\rangle$ de estado excitado e $|b\rangle$ de fundamental, o estado total do sistema átomo-cavidades após o átomo efetuar a transição $a \rightarrow b$ e passar pelas fendas é dado por

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(\mathbf{r}) |1_1 0_2\rangle + \psi_2(\mathbf{r}) |0_1 1_2\rangle \} |b\rangle, \quad (2.15)$$

onde $|1_1 0_2\rangle$ ($|0_1 1_2\rangle$) representa o estado no qual existe um fóton na cavidade 1 (2) e nenhum fóton na cavidade 2 (1). A expressão (2.15) representa a superposição de encontrar um fóton na cavidade 1 e nenhum na cavidade 2, com o átomo atravessando a fenda 1 no estado fundamental $|b\rangle$, e de encontrar um fóton na cavidade 2 e nenhum fóton na cavidade 1, com o átomo atravessando a fenda 2 no estado fundamental $|b\rangle$.

Como evidenciado em [17], embora a interação não produza perturbações do tipo posição-momento na função de onda, ela produz um estado maximamente emaranhado entre átomo e cavidades (2.15). Isso implica na alteração dos estados de cada parte do sistema. Calculando a probabilidade de encontrar o átomo numa posição $\mathbf{R}$ na tela, temos

$$\begin{aligned} P(\mathbf{R}) = & \frac{1}{2} \{ |\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2 + \psi_1^*(\mathbf{R})\psi_2(\mathbf{R}) \langle 1_1 0_2 | 0_1 1_2 \rangle \\ & + \psi_1(\mathbf{R})\psi_2^*(\mathbf{R}) \langle 0_1 1_2 | 1_1 0_2 \rangle \} \langle b | b \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como os estados que representam a aquisição de informação de caminho são ortogonais, isto é, $\langle 1_1 0_2 | 0_1 1_2 \rangle = 0$, temos

$$P(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \{ |\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2 \}. \quad (2.17)$$

Isso quer dizer que o estado (2.15) não produz qualquer interferência! As cavidades, de fato, fazem o papel de marcador de caminho, o qual tem como principal tarefa disponibilizar esse tipo de informação. Além disso, estamos certos de que essa informação foi adquirida sem nenhum mecanismo que “ativasse” a incerteza posição-momento e in-

introduzisse fatores incontrolláveis na função de onda. A diferença física entre (2.13) e (2.15) é a interação entre os graus de liberdade do átomo e as cavidades, produzindo uma forte correlação quântica. Essa correlação torna disponível a informação inequívoca sobre o caminho do átomo, destruindo a interferência na tela, como vemos em (2.17). O efeito dramático do aparato marcador de caminho (algumas vezes chamado de medidor ou detector de caminho) é contabilizado pela correlação entre o átomo e marcador. Segundo SEW, essas conclusões satisfariam ambos os critérios de Einstein e Bohr, e, ainda assim, surpreenderia a ambos: podemos extrair a informação de caminho através da medição de um observável sem perturbações incontrolláveis na função de onda dos átomos (Einstein), mas a disponibilidade de informação de caminho impede a exibição de um padrão de interferência (Bohr). Ainda com a vantagem de que não precisamos invocar relações de incerteza para “defender” a mecânica quântica. Tudo o que foi proposto por SEW está de acordo com o formalismo da teoria. Isso nos coloca dentro da observação (4) no início da seção. Wootters e Zurek [25] também notaram a presença de uma correlação do tipo EPR [2] entre o medidor (tela 1 na figura 1.3) e os fótons, mas lá eles trabalharam explicitamente com posição e momento e, por isso, seria difícil dizer que o emaranhamento desempenhava um papel mais importante que as relações de incerteza, como fizeram SEW.

É interessante ressaltar que a palavra chave para o fenômeno aqui é a disponibilidade da informação de caminho. Não é necessário que uma medição identifique a presença de um fóton em uma das cavidades. A garantia de que a presença do fóton altera o estado da cavidade de forma mensurável já é suficiente para destruir o padrão de interferência. Se a cavidade fosse clássica, contendo um número muito grande de fótons, e a dispersão do número médio de fótons na cavidade fosse muito maior do que 1, a emissão de um único fóton pelo átomo não seria mensurável. Nessa situação, o átomo ainda seria capaz de produzir interferência depois de passar pelas fendas [17]. Isso nos leva à seguinte questão: a interferência é perdida quando a alteração no estado do marcador é mensurável, uma vez que esse disponibiliza a informação de caminho. Se o estado do marcador for alterado de maneira que a informação é, agora, imensurável, a interferência poderia ser recuperada?

2.2.4 Apagador quântico

A investigação da pergunta anterior, que leva à discussão do *apagamento quântico* proposto em [46], é inspirada em um problema conhecido como escolha atrasada, proposto por John Wheeler [47], o qual, em linhas gerais, aborda a seguinte questão: seja um experimento cuja configuração da montagem nos permite obter resultados mutuamente excludentes (ver seção 1.1). Por exemplo, ora podemos obter 100% da informação de caminho, ora interferência com 100% de visibilidade. Suponhamos que inicialmente o experimento esteja operando com uma montagem que disponibiliza toda a informação de caminho, mas *durante* a realização modificamos a configuração para permitir a observação de interferência com máxima visibilidade. Durante esse processo, o objeto

quântico mudaria seu comportamento? Em outras palavras, se a escolha da configuração experimental for deixada para um estágio atrasado (por exemplo, depois que átomo já passou pelas fendas no experimento de SEW), essa escolha influenciaria nos resultados?¹⁰ Um bom artigo de revisão do assunto pode ser encontrado em [48]. Destaque também para o experimento realizado em [49]. Podemos refazer a pergunta do final da seção anterior tendo em mente os experimentos de escolha atrasada. Nesse caso: se apagarmos a informação de caminho depois que o átomo passou pelas cavidades e, ainda, depois que já passou pelas fendas, recuperamos a interferência? Para responder

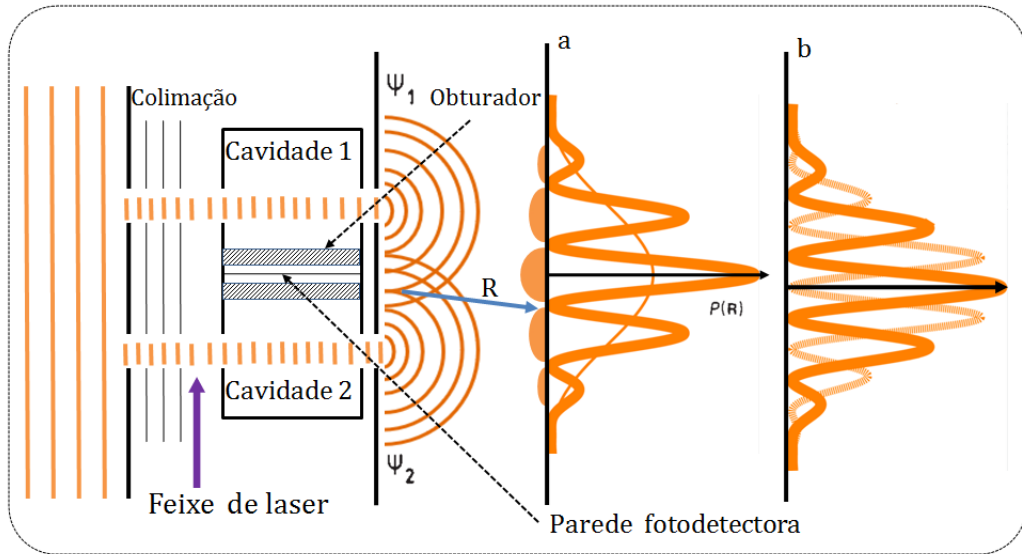


Figura 2.4: Esboço do Apagador Quântico discutido em [17]. A tela (a) e a tela (b) representam a detecção do átomo quando esse passou pela fenda no estado $|a\rangle$ e $|b\rangle$, respectivamente. Na tela (b), ainda, temos o efeito do “apagador quântico”, o qual divide o padrão sem franjas exibido na tela (b) em subconjuntos de franjas (linhas escuras) e de anti-franjas (linhas claras).

a essa pergunta à luz do trabalho de SEW, consideremos a figura 2.4. Ela é exatamente a figura 2.3, com uma pequena diferença: a parede entre as cavidades é uma parede fotodetectora capaz de absorver fótons. Próximo a ela existem dois obturadores (um em cada cavidade) que podem ambos estarem abertos ou fechados de forma controlável (ver figura 2.4). Se os obturadores estão fechados, o fóton está condenado a ficar na cavidade em que foi deixado, disponibilizando a informação sobre o caminho do átomo. Se estão abertos, o fóton pode interagir com a parede e ser absorvido, não deixando qualquer rastro de sua presença. Sem acesso à informação de caminho agora, recuperamos a interferência? Caso a resposta seja positiva, isso parece nos colocar em apuros. Afinal de contas, como uma interação entre o fóton e a parede fotodetectora, efetuada

¹⁰No contexto original da proposta, a questão era ainda mais desconcertante. Para alguém que insiste em assinalar objetivamente um caráter corpuscular ao objeto quântico ao obter toda informação de caminho, e um caráter ondulatório ao observar interferência com máxima visibilidade, a escolha atrasada do experimentalista, o qual efetua a mudança de configuração, *decide* se o objeto era uma partícula ou uma onda. Sem uma noção adequada da complementaridade, é muito fácil interpretar erroneamente experimentos com escolha atrasada.

depois que o átomo já passou pela fenda dupla, poderia influenciar no padrão de interferência? A lógica parece simples: com informação de caminho disponível, podemos concluir que o átomo passou por uma das fendas. Se não existem outras fendas após a fenda dupla, como o átomo poderia voltar a interferir? Curiosamente, o padrão é restaurado ao apagar a informação. Isso sugere que, de fato, existe uma influência da interação entre o fóton e a parede fotodetectora que transforma o comportamento do átomo na fenda dupla, mesmo depois que esse já passou por ela. Para entendermos esse estranho resultado, vamos reproduzir a solução proposta por SEW passo a passo.

O conjunto parede fotodetectora e obturadores, chamado daqui em diante apenas de detector, será tratado como um átomo de dois níveis. Assim, $|d\rangle$ é o estado inicial desse detector. O estado do sistema total após o átomo deixar um fóton numa das cavidades e passar pelas fendas será

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(\mathbf{r}) |1_1 0_2\rangle + \psi_2(\mathbf{r}) |0_1 1_2\rangle \} |b\rangle |d\rangle. \quad (2.18)$$

Se o detector absorve um fóton, ele é excitado para um estado $|e\rangle$. Conforme argumentado por SEW, é conveniente introduzir estados atômicos simétricos ψ_+ e antissimétricos ψ_- definidos por

$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(\mathbf{r}) \pm \psi_2(\mathbf{r}) \}. \quad (2.19)$$

Assim também fazemos para os estados da cavidade:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1_1 0_2\rangle \pm |0_1 1_2\rangle \}. \quad (2.20)$$

Reescrevendo (2.18) através de (2.19) e (2.20), temos

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_+(\mathbf{r}) |+\rangle + \psi_-(\mathbf{r}) |-\rangle \} |b\rangle |d\rangle. \quad (2.21)$$

Os operadores de campo associados ao detector são, também, uma combinação simétrica de operadores de criação ou aniquilação de um fóton nas cavidades¹¹ 1 e 2, assim, a detecção de um fóton só ocorrerá para o estado simétrico. Dessa forma, o acoplamento entre os estados da cavidade e do detector depende apenas das componentes simétricas do campo na cavidade, como observado em [17]. Portanto, a interação global entre os graus de liberdade espaciais e os estados de energia do átomo, e entre os graus de liberdade da cavidade e os estados de energia do detector, produz o estado

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_+(\mathbf{r}) |0_1 0_2\rangle |e\rangle + \psi_-(\mathbf{r}) |-\rangle |d\rangle \} |b\rangle. \quad (2.22)$$

A probabilidade de encontrar o átomo numa posição $\mathbf{R}$ da tela e o detector num estado

¹¹Esses operadores são responsáveis por, respectivamente, aumentar e diminuir o número de fótons nas cavidades.

excitado é

$$P_e(\mathbf{R}) = |\psi_+(\mathbf{R})|^2 = \frac{1}{2}\{|\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2\} + \text{Re}\{\psi_1^*(\mathbf{R})\psi_2(\mathbf{R})\}. \quad (2.23)$$

É o mesmo padrão exibido em (2.12)! Vemos que a interferência é recuperada, afinal. Estamos agora numa situação interessante. Começamos dizendo que essa não parecia ser uma boa coisa. Se terminarmos assim, acabaremos por concordar com Einstein quando disse que a mecânica quântica é cálculo com magia negra [50] ou com Edwin Jaynes ao dizer que *interpretar esses resultados como realidade física dá à mecânica quântica um caráter mais de necromancia medieval do que ciência*¹². Conforme SEW, vamos fazer algumas colocações sobre os resultados.

Calculando a probabilidade de encontrar o átomo numa posição $\mathbf{R}$ da tela e o detector no estado fundamental, temos

$$P_d(\mathbf{R}) = |\psi_-(\mathbf{R})|^2 = \frac{1}{2}\{|\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2\} - \text{Re}\{\psi_1^*(\mathbf{R})\psi_2(\mathbf{R})\}. \quad (2.24)$$

O sinal negativo no termo de interferência representa um padrão de anti-franjas com a mesma intensidade que o padrão de franjas da equação (2.12). Agora, esse é o ponto fundamental do apagador quântico de SEW. O que está subentendido nesse processo de apagamento quântico é como analisamos os dados. Ao calcularmos as probabilidades, impomos restrições que dividem os resultados em subconjuntos. Olhamos para os dados que registraram átomos na posição $\mathbf{R}$ quando o detector tinha um estado particular. Estamos subselecionando esses registros de acordo com o estado do detector. Na equação (2.23), olhamos apenas para os dados que correspondem conjuntamente ao registro do átomo na posição $\mathbf{R}$ e o detector no estado excitado. Um gráfico com esses dados construirá um padrão de interferência idêntico ao da equação (2.12). Na figura 2.4, onde a marcação b na tela da direita refere-se ao átomo no estado fundamental (ver subseção 2.2.3), vemos o padrão de franjas representado pela curva de coloração mais intensa. Analogamente a essa análise, na equação (2.24) olhamos apenas para os dados que correspondem conjuntamente ao registro do átomo na posição $\mathbf{R}$ e o detector no estado fundamental. A figura 2.4 também mostra o padrão de anti-franjas, na coloração menos intensa, na tela b .

Agora, a questão que reconcilia os resultados com nossa intuição: com todos os dados para o detector no estado excitado representados na figura 2.4, podemos ter uma idéia visual do efeito de “apagamento”. Cada subconjunto de dados fornece um padrão de interferência com máxima visibilidade: um de franjas, outro de anti-franjas. Naturalmente, a soma de padrões de franjas e anti-franjas de mesma intensidade é um padrão sem qualquer interferência. Olhar para todos os dados é equivalente a olhar para o estado total na equação (2.22) e se perguntar qual a probabilidade de encontrar o átomo numa posição $\mathbf{R}$ da tela sem correlacionar com qualquer estado do detector. É

¹²Tradução livre da citação presente em [17].

simplesmente o módulo ao quadrado da equação (2.22):

$$P(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\{\psi_+^*(\mathbf{R})\psi_+(\mathbf{R}) + \psi_-^*(\mathbf{R})\psi_-(\mathbf{R})\} = \frac{1}{2}\{|\psi_1(\mathbf{R})|^2 + |\psi_2(\mathbf{R})|^2\}, \quad (2.25)$$

que não exibe qualquer interferência. Podemos somar as equações (2.23) e (2.24) à revelia do contexto físico e sempre verificar a equação (2.25). Dando um passo para trás, vamos olhar para as duas telas da figura 2.4: a tela a (onde a faz referência ao estado excitado do átomo) representa todas as situações em que o átomo passou pelas cavidades sem deixar um fóton e, ao atingir a tela, teve sua posição final registrada. Naturalmente, não existe qualquer informação de caminho disponível e, portanto, a tela exibe interferência. A tela b representa todas as situações em que o átomo deixou um fóton numa das cavidades e, ao atingir a tela, teve sua posição final registrada. Sabemos das equações (2.17) e (2.25) que a tela não exibe qualquer interferência. Essas duas situações já foram tratadas na subseção 2.2.3. A subseção 2.2.4 é um tipo de “zoom” na tela b : já sabemos que o átomo no estado $|b\rangle$ não produz interferência. A história acaba aí. Se agora quisermos ver “mais de perto” a dinâmica que gera a ausência de interferência na tela b quando colocamos os obturadores e a parede fotodetectora, eles vão apenas nos informar de que maneira esse padrão sem franjas é construído: já sabemos, com subconjuntos de franjas e anti-franjas. A “recuperação” de franjas (ou “apagamento” da informação de caminho) é apenas uma seleção de um desses subconjuntos depois que todos os dados já foram obtidos. Com isso em mente, e tendo em vista a citação de Jaynes em [17], vemos que correlações e medições em mecânica quântica nos permitem fazer mais do que o mundo clássico permitiria, mas certamente não nos permitem subverter a realidade (como o problema poderia sugerir à primeira vista). Talvez o nome mais apropriado para o efeito de “apagador quântico” seja *selecionador quântico*: um aparato que nos permite selecionar subconjuntos de dados com alta visibilidade. Esse nome, porém, não teria um apelo tão interessante e, talvez por isso, não receberia a mesma atenção que o “apagador quântico” recebeu nos últimos anos [51–60]. Como curiosidade, o leitor pode encontrar uma excelente discussão sobre “o que um apagador quântico apaga” na referência [61], a qual é baseada no apagador quântico proposto em [51]. A discussão encontrada nessas referências elimina qualquer chance do apagador quântico “apagar” informação de caminho.

Complementaridade no apagador quântico de SEW

Finalmente, é importante observar o papel da complementaridade em todo o processo discutido nesta seção. Por mais engenhoso que tenha sido o experimento proposto por SEW, a aquisição de informação de caminho continua impedindo a construção de um padrão de interferência. Agora, porém, não precisamos de relações de incerteza para explicar o fenômeno, o que vai na contramão da resposta de Bohr em defesa da complementaridade. Apesar disso, a complementaridade não apenas sobrevive, mas é ainda mais intensificada: a mera disponibilidade da informação já é suficiente para impedir a

exibição de interferência. Além disso, na presença de marcadores de caminho, a natureza complementar entre informação de caminho e interferência é reforçada pelas correlações quânticas. Nesse sentido, observamos um papel ainda mais ativo do marcador, e de forma mais clara do que em Wootters e Zurek [25]. Embora a proposta de SEW não pretende se dirigir essa questão, uma diferença que podemos salientar entre Wootters e Zurek e SEW é que esses não abordaram situações que nos permitem observar a complementaridade em domínios intermediários. Uma extensão completa do trabalho de Wootters e Zurek, no mesmo espírito de simplificação e elegância do formalismo do marcador de SEW, envolveria situações em que pudéssemos observar algum grau de visibilidade de interferência e ainda ter certa quantidade de informação disponibilizada por marcadores de caminho. Essa é precisamente a situação que veremos a seguir.

2.3 Dualidade interferométrica: Englert

De forma implícita, estamos construindo um tipo de mapa conceitual do conhecimento sobre a complementaridade. Neste capítulo, esse mapa possui dois ramos principais: um representado por predições e outro por medições. Ambos estão baseados no debate Einstein-Bohr, que é precursor de toda discussão sobre complementaridade. Ambos estão também baseados no trabalho de Wootters e Zurek [25], no sentido de que investigam um domínio intermediário entre informação de caminho e interferência perfeitas. Apesar disso, constituem manifestações diferentes da complementaridade.

O primeiro ramo (das predições) está baseado na noção de usar assimetrias na montagem para disponibilizar (previamente a qualquer medição) a informação de caminho. Por exemplo, originalmente Wheeler [47], e posteriormente Greenberger [37], propuseram absorção como forma de identificar o caminho em experimentos de interferometria, tanto no contexto de fótons, como no de nêutrons. Mais tarde, Mandel [62] utilizou o que chamou de *grau de indistinguibilidade intrínseca*, que é uma medida da ausência de informação a priori sobre a população de feixes de fótons, para relacionar ao grau de coerência mútua [63], que é uma quantidade bem definida no eletromagnetismo clássico. Já o segundo ramo (das medições) tem o marcador (ou detector) de caminho como protagonista da complementaridade. Ele está baseado firmemente na noção de usar um sistema auxiliar para armazenar informação de caminho. A exploração desse contexto levou a experimentos frutíferos utilizando eletrodinâmica quântica de cavidades [17, 40] e ao surgimento do apagador quântico [46], inspirado pelo problema de escolha atrasada [47]. Os dois ramos juntos nos permitem obter uma conclusão geral sobre a complementaridade: independente da natureza da informação de caminho que nos permite distinguir entre alternativas, informação de caminho e visibilidade de interferência são quantidades mutuamente excludentes. A observação conjunta dos dois necessariamente implica em observação imperfeita de cada um. A fim de visualizar a diferença entre os dois ramos, e principalmente notar que são partes da mesma estrutura, vamos revisar nesta seção o trabalho de Englert [64], considerado um dos maiores

resultados sobre complementaridade [15]. Os dois primeiros capítulos desta dissertação foram construídos de maneira que a discussão fluísse até o trabalho de Englert e, por isso, vamos reproduzi-lo procurando aproveitar o máximo das seções anteriores.

2.3.1 O ramo das predições

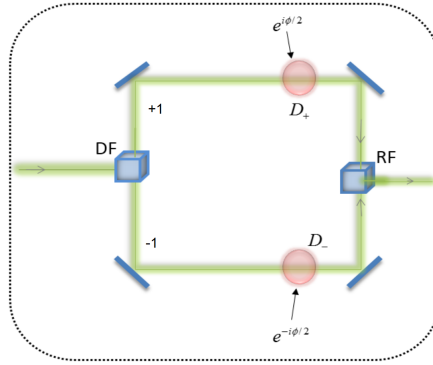


Figura 2.5: Interferômetro de dois caminhos genérico. Um feixe de entrada é dividido em dois caminhos, +1 e -1, pelo divisor de feixes DF, que são recombinadas pelo recombinaor de feixes RF. Defasadores D_+ e D_- acrescentam fases em cada caminho.

Assim como Englert, comecemos considerando o interferômetro de dois caminhos da figura 2.5. Um feixe entrando no interferômetro encontra um primeiro divisor de feixes (DF). Ele é responsável por separar as componentes do estado de entrada em dois caminhos, +1 e -1 (superior e inferior, respectivamente). Espelhos redirecionam os feixes após o primeiro divisor para um recombinaor de feixes (RF). Defasadores (D_+ e D_-) ao longo de cada caminho introduzem fases relativas entre os estados em braços diferentes do interferômetro. Após o recombinaor, os feixes são detectados, podendo exibir interferência.

Em um espaço de Hilbert bidimensional podemos escrever qualquer estado de um sistema através da parametrização do vetor de Bloch, onde usam-se as matrizes de Pauli¹³ $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ e a identidade $\hat{I}$. Dessa forma, o estado inicial do sistema quântico de entrada (SQE)¹⁴ pode ser representado pela matriz densidade

$$\hat{\rho}_{\text{SQE}}^{(i)} = \frac{\hat{I} + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \hat{\sigma}}{2}, \quad (2.26)$$

onde $s_x^{(i)}$, $s_y^{(i)}$ e $s_z^{(i)}$ são as componentes do vetor de Bloch inicial $\mathbf{s}^{(i)}$. O estado inicial do SQE é transformado pela ação do divisor e recombinaor de feixes. Como proposto

¹³Onde $\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, e a identidade $\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

¹⁴O nome original, *quanton*, não foi bem preservado na literatura, havendo poucas ocorrências [61, 64, 65]. A intenção original, e a atual com SQE, é evitar associar figuras clássicas corpusculares e ondulatórias a um sistema que não se comporta exatamente assim, de forma geral.

por Englert [64], a transformação implementada por eles é representada por

$$\hat{\rho}_{\text{SQE}} \longrightarrow \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \hat{\sigma}_y \right\} \hat{\rho}_{\text{SQE}} \exp \left\{ i \frac{\pi}{4} \hat{\sigma}_y \right\}. \quad (2.27)$$

Enquanto isso, a transformação implementada pelos defasadores é representada por

$$\hat{\rho}_{\text{SQE}} \longrightarrow \exp \left\{ -i \frac{\phi}{2} \hat{\sigma}_z \right\} \hat{\rho}_{\text{SQE}} \exp \left\{ i \frac{\phi}{2} \hat{\sigma}_z \right\}. \quad (2.28)$$

A ação total sobre o SQE é tal que leva o estado inicial para o estado final

$$\hat{\rho}_{\text{SQE}}^{(f)} = \frac{\hat{I} + \mathbf{s}^{(f)} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}, \quad (2.29)$$

onde $s_x^{(f)} = -s_x^{(i)}$, $s_y^{(f)} = s_y^{(i)} \cos \phi + s_z^{(i)} \sin \phi$ e $s_z^{(f)} = s_y^{(i)} \sin \phi - s_z^{(i)} \cos \phi$. Esse é o estado do SQE na saída do interferômetro da figura 2.5. A presença do SQE nesse estágio pode ser anunciada por um sistema de detecção depois do RF. Se esse sistema implementa medições do observável $\hat{\sigma}_z$, por exemplo, pode se computar a frequência relativa com que seu autovalor -1 é encontrado. Com o operador associado a esse autovalor dado por $\frac{1}{2}(\hat{I} - \hat{\sigma}_z)$ e o estado na saída do interferômetro dado em (2.29), a probabilidade de encontrar o autovalor -1 será

$$\begin{aligned} p_\phi &= \text{tr} \left\{ \left(\frac{\hat{I} - \hat{\sigma}_z}{2} \right) \hat{\rho}_{\text{SQE}}^{(f)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (1 - s_y^{(i)} \sin \phi + s_z^{(i)} \cos \phi). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Devido à escolha de Englert em utilizar $\hat{\sigma}_y$ para descrever as atuações de DF e RF, essa medição de $\hat{\sigma}_z$ corresponde a uma projeção do SQE em uma superposição dos caminhos ± 1 no interferômetro. Podemos pensar que o registro das contagens de SQE no sistema de detecção implementando essa projeção é feito para cada valor do ângulo dos defasadores. Nesse caso, a expressão (2.30) demonstra que vamos observar uma variação no número de contagens em função da variação do ângulo ϕ dos defasadores. Essa dependência do número de contagens com o ângulo ϕ é uma manifestação da interferência de eventos possíveis no interferômetro (isto é, a propagação do SQE pelos caminhos ± 1). Podemos utilizar a visibilidade definida em (2.3) como quantificador da qualidade dessa interferência. Se derivarmos a expressão (2.30) em relação a ϕ , encontraremos $s_y^{(i)}/s_z^{(i)} = -\tan \phi$. Substituindo os valores extremos na expressão (2.30), podemos calcular a probabilidade de detecção máxima $p_\phi^{\max}$ e mínima $p_\phi^{\min}$:

$$\begin{aligned} p_\phi^{\max} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2}, \\ p_\phi^{\min} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dessa forma, encontramos o mesmo valor presente em [64] para a visibilidade *a priori*:

$$V_0 = \sqrt{\left(s_y^{(i)}\right)^2 + \left(s_z^{(i)}\right)^2}. \quad (2.32)$$

O termo *a priori* é empregado aqui no mesmo sentido da seção 2.1: a visibilidade da interferência aqui depende apenas de condições iniciais do estado do SQE e do interferômetro.

Por outro lado, dado que conhecemos as transformações implementadas sobre qualquer estado de um SQE [equações (2.27) e (2.28)], podemos também nos perguntar qual a probabilidade $w_{\pm}$ de que um sistema quântico na entrada do interferômetro passará pelo caminho ± 1 . Com os projetores $\frac{1}{2}(\hat{I} \pm \hat{\sigma}_z)$ associados a cada caminho e usando a expressão (2.29), essa probabilidade será dada por

$$w_{\pm} = \text{tr} \left\{ \left(\frac{\hat{I} \pm \hat{\sigma}_x}{2} \right) \hat{\rho}_{\text{SQE}}^{(f)} \right\} = \frac{1}{2} (1 \mp s_x^{(i)}). \quad (2.33)$$

Isso significa que se um SQE é preparado num autoestado de $\hat{\sigma}_x$ com autovalor -1 ($+1$), por exemplo, ele terá probabilidade 1 de passar pelo caminho $+1$ (-1). No entanto, se o SQE é preparado num autoestado de $\hat{\sigma}_z$ (isto é, $s_x^{(i)} = 0$), a probabilidade é a mesma, $w_+ = w_- = \frac{1}{2}$, de que ele passará por $+1$ ou -1 , nos deixando sem qualquer informação de caminho. O módulo da diferença entre a probabilidade de passar por cada caminho nos dá a *predictibilidade* P :

$$P = |w_+ - w_-| = |s_x^{(i)}|. \quad (2.34)$$

A escolha da letra P para a quantidade (2.34) não foi feita de forma ingênua, uma vez que P representa a quantificação do mesmo tipo de informação de caminho presente no trabalho de Greenberger e Yasin [32], discutido na seção 2.1. Aqui, também, nenhum marcador de caminho nos braços do interferômetro disponibilizou informação de caminho por meio de graus de liberdade auxiliares que poderiam ser medidos, temos apenas a detecção final. A informação de caminho é oferecida apenas pelas condições *a priori* do interferômetro e do estado preparado (2.26). Se $P = 0$, nenhum tipo de assimetria influencia a taxa de detecção e, portanto, nada podemos predizer sobre os caminhos. Os caminhos do interferômetro são igualmente populados pelos estados de entrada, não permitindo qualquer aposta melhor que jogar uma moeda. Englert chama essa situação de “interferômetro simétrico” (essa situação também foi discutida na seção 2.1, com o interferômetro sem absorvedor). Para qualquer interferômetro implementando as transformações propostas por Englert em (2.27) e (2.28), a preparação de um SQE num estado puro com $s_x^{(i)} = 0$ vai exibir esse comportamento, como pode ser visto na equação (2.34). Por outro lado, para um SQE num estado puro, $P = 1$ representa a certeza de (e, por isso, podemos predizer) que o SQE vai passar pelo caminho $+1$ ou -1 , o que significa que temos condições de apostar em um deles e sempre acertar. Com o interferômetro implementando as transformações (2.27) e (2.28), esse comportamento

é exibido por um SQE preparado num estado puro com $|s_x^{(i)}| = 1$ [equação (2.34)].

É válido comentar que o interferômetro de dois caminhos considerado por Englert descreve vários experimentos de interferometria [com pequenas diferenças, como a escolha de observáveis nas equações (2.27) e (2.28)] e, por isso, a análise proposta por ele é bastante geral. Apesar disso, se um experimento implementa transformações diferentes daquelas descritas nas equações (2.27) e (2.28), a preditibilidade continua sendo o módulo da diferença das probabilidades de passar por cada caminho, definida no centro de (2.34). O lado direito, porém, pode não exibir uma forma tão simples. Sendo assim, sempre que somos capazes de contabilizar a preditibilidade P , se apostarmos no caminho mais provável, nossa probabilidade de prever o caminho corretamente é¹⁵ $(1 + P)/2$. Fica claro que estamos no mesmo regime de previsões de Greenberger e Yasin, Mandel¹⁶ e outros. Em resumo, a preditibilidade é um quantificador do nosso conhecimento a priori, nos permitindo fazer previsões sobre qual dos caminhos o SQE tomará no interferômetro (ver seção 2.1). Quando elevamos V_0 ao quadrado, dado na equação (2.32), e somamos com P^2 , dado na equação (2.34), encontramos a expressão

$$V_0^2 + P^2 = (s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2 + (s_x^{(i)})^2. \quad (2.35)$$

Uma vez que o módulo do vetor de Bloch não pode exceder a unidade, temos

$$V_0^2 + P^2 \leq 1. \quad (2.36)$$

Essa é precisamente a dualidade Greenberger-Yasin [32] que discutimos na seção 2.1. O subíndice para a visibilidade é para ressaltar que essa é também uma quantidade a priori, anterior a qualquer medição.

2.3.2 O ramo das medições

Para mostrar a diferença dramática entre os dois ramos desse mapa conceitual, ou seja, das duas manifestações da complementaridade, Englert utiliza um caso extremo de forma instrutiva. Ele propõe começar com a situação em que o interferômetro é totalmente simétrico: nenhum dos braços possui qualquer diferença capaz de disponibilizar informação de caminho a priori. Nesse caso, a preditibilidade é nula, isto é, $P = 0$. Já a visibilidade a priori é máxima, ou seja, $V_0 = 1$. Em termos das componentes do vetor de Bloch inicial, temos

$$s_x^{(i)} = 0, \quad s_z^{(i)} + i s_y^{(i)} = e^{-i\theta}. \quad (2.37)$$

¹⁵Mais tarde identificaremos essa quantidade como a verossimilhança a priori para apostar corretamente no caminho.

¹⁶Englert acrescentou que o *grau de indistinguibilidade intrínseca* de Mandel [62] é igual a $V_0/\sqrt{1-P}$. Isso corrobora a classificação do trabalho de Mandel como uma forma de complementaridade no regime preditivo.

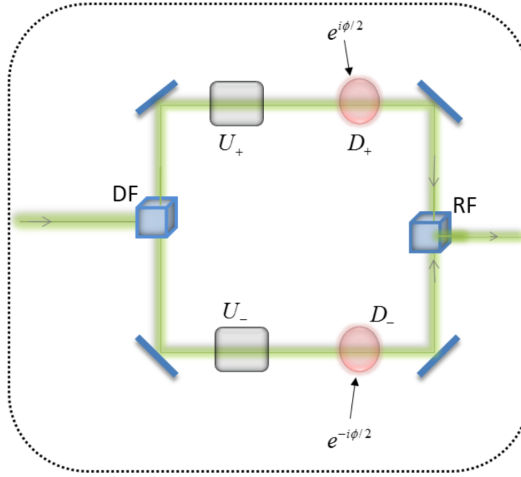


Figura 2.6: Interferômetro de dois caminhos genérico com os mesmos elementos da figura 2.5 e com marcadores de caminho (caixas cinzas) em cada braço.

Conforme discutido anteriormente, preparar um estado com $s_x^{(i)} = 0$ garante que nenhuma informação de caminho a priori esteja disponível [equação (2.34)]. Por outro lado, conforme a equação (2.32), a segunda definição em (2.37) garante que a visibilidade a priori seja máxima, isto é, $V_0 = |s_z^{(i)} + is_y^{(i)}| = |e^{-i\theta}| = 1$. Mais uma vez, o superíndice nas componentes é para evidenciar que são condições iniciais. Em seguida, acoplamos o SQE a um sistema quântico auxiliar que fará o papel de marcador de caminho. O sistema auxiliar consiste em dois objetos, um em cada braço do interferômetro, como mostra a figura 2.6, capazes de armazenar informação sobre o caminho do SQE depois que uma interação condicional à passagem pelo caminho ± 1 ($\hat{U}_{\pm}$) emaranha os dois sistemas. Os marcadores são inicialmente representados pelo estado inicial $\hat{\rho}_D^{(i)}$. O sistema total, portanto, encontra-se no estado produto

$$\hat{\rho}^{(i)} = \hat{\rho}_{\text{SQE}}^{(i)} \otimes \hat{\rho}_D^{(i)}. \quad (2.38)$$

Como resultado da interação entre o SQE e os marcadores, o estado inicial dos marcadores é transformado segundo a expressão

$$\hat{\rho}_D^{(i)} \longrightarrow \hat{U}_{\pm}^{\dagger} \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_{\pm}, \quad (2.39)$$

onde as unitárias $\hat{U}_+$ e $\hat{U}_-$ afetam apenas os graus de liberdade do marcador. Dessa forma, a evolução do sistema total no interferômetro, entre o divisor e o recombinador de feixes, é dada pela unitária

$$\frac{\hat{I} + \hat{\sigma}_z}{2} e^{i\phi/2} \hat{U}_+ + \frac{\hat{I} - \hat{\sigma}_z}{2} e^{-i\phi/2} \hat{U}_-. \quad (2.40)$$

Com isso, é possível calcular como o estado inicial (2.38) do sistema total é transformado até a saída do interferômetro. O estado final do sistema total será

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(f)} = & \frac{\hat{I} + \hat{\sigma}_x}{4} \hat{U}_+^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_+ + \frac{\hat{I} - \hat{\sigma}_x}{4} \hat{U}_-^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_- \\ & - \frac{\hat{\sigma}_z - i\hat{\sigma}_y}{4} e^{-i(\phi-\theta)} \hat{U}_+^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_- \\ & - \frac{\hat{\sigma}_z + i\hat{\sigma}_y}{4} e^{-i(\phi-\theta)} \hat{U}_-^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_+.\end{aligned}\quad (2.41)$$

Esse é um estado em que o SQE e os marcadores estão emaranhados entre si. O que não representa novidades, afinal já mencionamos esse tipo de correlação nas seções 1.2 e 2.2, ao discutir os trabalhos [25] e [17]. Tomando o traço parcial sobre os graus de liberdade do marcador na expressão (2.41), podemos escrever o estado final do SQE apenas. Com alguns passos de álgebra podemos mostrar que esse estado pode ser escrito na mesma forma da equação (2.29), com as componentes do vetor de Bloch dadas por

$$s_x^{(f)} = 0, \quad s_z^{(f)} + i s_y^{(f)} = -e^{-i(\phi-\theta)} C, \quad (2.42)$$

onde a quantidade C é dada por

$$C = \text{Tr}_D \{ \hat{U}_+^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_- \}. \quad (2.43)$$

Como as componentes do vetor de Bloch final em (2.42) sugerem, o módulo de C contabiliza a visibilidade final da interferência após a interação:

$$V = |C|. \quad (2.44)$$

É curioso notar que não temos mais permissão para predizer que a visibilidade será máxima. Antes, ela depende de como a evolução unitária condicional afeta o estado inicial dos marcadores. Isso certamente não está presente no regime preditivo quantificado pela dualidade Greenberger-Yasin.

Uma vez que nos interessa descobrir como a visibilidade é afetada pelos marcadores, tomamos o traço parcial sobre os graus de liberdade do SQE na expressão (2.41), lembrando que as matrizes de Pauli tem traço nulo. Isso nos possibilita escrever o estado final apenas do marcador de caminho $\hat{\rho}_D^{(f)}$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_D^{(f)} &= \text{Tr}_{\text{SQE}} \{ \hat{\rho}^{(f)} \} \\ &= \frac{1}{2} \hat{U}_+^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_+ + \frac{1}{2} \hat{U}_-^\dagger \hat{\rho}_D^{(i)} \hat{U}_- \\ &\equiv \frac{1}{2} \hat{\rho}_D^{(+)} + \frac{1}{2} \hat{\rho}_D^{(-)}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Como observado em [64], a equação acima representa a informação armazenada no marcador. Os estados finais de cada marcador, $\hat{\rho}_D^{(+)}$ e $\hat{\rho}_D^{(-)}$, são ponderados pela pro-

bilidade a priori de que o SQE passe por cada caminho. Como os caminhos são equiprováveis (interferômetro simétrico), isso justifica o fator $1/2$. Se tentarmos implementar a mesma estratégia de aposta de Greenberger e Yasin, que não leva em conta a extração de informação contida nos estados dos marcadores, não ganhamos qualquer informação de caminho. Isso nos leva a adotar uma estratégia diferente para a obtenção de dessa informação.

Estratégia de aposta: medições

Se apostar no caminho mais provável para o SQE passar não vai nos ajudar muito, precisamos de um método mais ativo, que leve em conta a extração de informação contida nos estados do marcador. Isso requer a medição de um observável. Esse é o ponto crucial do trabalho de Englert.

Suponhamos que o observável $\hat{O}$, associado à informação de caminho, possua autovalores O' e autovetores $|O'\rangle$. Se o medirmos, um autovalor particular O' é encontrado com frequência relativa dada por

$$\langle O' | \hat{\rho}_D^{(f)} | O' \rangle = \frac{1}{2} \langle O' | \hat{\rho}_D^{(+)} | O' \rangle + \frac{1}{2} \langle O' | \hat{\rho}_D^{(-)} | O' \rangle. \quad (2.46)$$

A estratégia adotada por Englert, que no próximo capítulo será estudada com maiores detalhes, é simples de por em palavras: a melhor aposta é escolher o caminho que mais contribui para a frequência relativa de resultados obtidos, no lado esquerdo da equação (2.46). Se fizermos um experimento que repete essas medições muitas vezes, os resultados nos permitem construir a verossimilhança¹⁷ para apostar no caminho correto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{O}) &= \sum_{O'} \max \left\{ \frac{1}{2} \langle O' | \hat{\rho}_D^{(+)} | O' \rangle, \frac{1}{2} \langle O' | \hat{\rho}_D^{(-)} | O' \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{O'} \left| \langle O' | (\hat{\rho}_D^{(+)} - \hat{\rho}_D^{(-)}) | O' \rangle \right|. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Notemos que essa verossimilhança não é uma quantidade a priori. Ela depende da escolha do observável a ser medido. A situação a priori é contabilizada apenas pelo primeiro termo em (2.47), que em nosso caso é $\frac{1}{2}$, porque o interferômetro é simétrico. O segundo termo de (2.47) contabiliza o ganho de informação de caminho devido à medição dos estados dos marcadores. Caso não sejamos capazes de extrair essa informação (por exemplo, por ocasião de uma escolha inadequada de observáveis) ou os estados sejam indistinguíveis ($\hat{\rho}_D^{(+)} = \hat{\rho}_D^{(-)}$), o segundo termo é nulo e, portanto, apenas nos resta jogar uma moeda: cara é o caminho $+1$, coroa é o caminho -1 , digamos. Nem mesmo a estratégia de Greenberger e Yasin é eficiente aqui. A verossimilhança ótima, porém, é obtida quando os autoestados do observável $\hat{O}$ são autoestados da diferença

¹⁷Em inglês, Likelihood.

$\hat{\rho}_D^{(+)} - \hat{\rho}_D^{(-)}$ [64]. Dessa forma, podemos encontrar um valor *ótimo*. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ótima}}(\hat{O}) &= \frac{1}{2}(1 + D) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \text{tr}_D \left\{ \left| \hat{\rho}_D^{(+)} - \hat{\rho}_D^{(-)} \right| \right\} \right).\end{aligned}\quad (2.48)$$

Além da quantidade D compreender o intervalo $[0, 1]$, ela tem uma característica importante: ela é uma norma do traço¹⁸. Ela nos dá a distância entre os estados $\hat{\rho}_D^{(+)}$ e $\hat{\rho}_D^{(-)}$. Em outras palavras, fisicamente a quantidade D é uma medida de quão distinguível (por medição)¹⁹ um estado é do outro. Em nosso caso, como esses estados carregam a informação de caminho, a distância entre eles é uma medida do quão distinguível um caminho é do outro. Assim, D representa o quanto de informação de caminho podemos adquirir numa medição. Por exemplo, $D = 0$ significa que nenhuma informação de caminho está disponível, enquanto $D = 1$ significa que os caminhos são completamente distinguíveis, e uma medição ótima pode dizer precisamente por qual caminho o SQE veio. Assim, sempre que a verossimilhança for ótima, D é a distinguibilidade dos caminhos [equação (2.48)]. A palavra *sempre* é muito importante aqui. Se a verossimilhança não for ótima (por exemplo, no caso em que não temos acesso ao observável que permite a extração ótima de informação), os caminhos podem ser fisicamente mais distinguíveis do que nossas medições nos permitem dizer. Colocando em poucas palavras, o que determina, fisicamente, quão distinguíveis são os caminhos é a interação do SQE com os marcadores de caminho. Porém, o que determina o quanto dessa distinguibilidade podemos acessar é a escolha dos observáveis de medição dos estados dos marcadores de caminho. Quando a escolha de observáveis é a melhor possível, a informação de caminho acessível por medições coincide com o que a teoria quântica admite ser acessível por ocasião da interação [equação (2.41)].

Seguindo os passos de Englert, suponhamos que os marcadores comecem num estado puro dado por

$$\hat{\rho}_D = |d\rangle \langle d|. \quad (2.49)$$

A definição da visibilidade da interferência dada nas equações (2.44) e (2.43), a qual depende do estado dos marcadores, implica que

$$\begin{aligned}V &= \left| \langle d | \hat{U}_- \hat{U}_+^\dagger | d \rangle \right| \\ &\equiv \left| \langle d_- | d_+ \rangle \right|.\end{aligned}\quad (2.50)$$

¹⁸Trace-class norm [64].

¹⁹Não confundir com a “indistinguibilidade intrínseca” de Mandel.

Da equação (2.48), a distinguibilidade dos caminhos é dada por²⁰

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{1 - |\langle d | \hat{U}_- \hat{U}_+^\dagger | d \rangle|^2} \\ &\equiv \sqrt{1 - |\langle d_- | d_+ \rangle|^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Na situação em que a interação entre o SQE e os marcadores leva os estados dos marcadores, os quais armazenam a informação de caminho, para estados completamente ortogonais, $\langle d_- | d_+ \rangle = 0$, a distinguibilidade atinge seu máximo, 1. Nessa mesma situação, uma visibilidade nula é registrada. Isso significa que quando os marcadores disponibilizam toda informação de caminho, não existe qualquer interferência. A preditibilidade como medida de informação de caminho *a priori* toma ainda mais sentido: começamos com uma situação de visibilidade *a priori* máxima. Não podíamos prever nada sobre a população dos caminhos. Ao acrescentar marcadores num estado puro, somos capazes de reverter dramaticamente a situação inicial. Com estados ortogonais dos marcadores tornando os caminhos maximamente distinguíveis, reduzimos a visibilidade a zero e, através da medição ótima, extraímos toda informação de caminho. Começamos com nenhuma informação de caminho *a priori*, e visibilidade *a priori* máxima. Terminamos com máxima informação de caminho e visibilidade nula. Esse comportamento nos leva a uma advertência sobre o funcionamento da complementaridade. O fato de não acessarmos a informação de caminho, por si só não garante uma alta visibilidade; tampouco uma visibilidade nula garante que informação de caminho se tornou disponível. A implicação funciona apenas na direção oposta: 100% de visibilidade impede qualquer aquisição de informação de caminho; aquisição de 100% da informação de caminho reforça o desaparecimento das franjas de interferência.

O ponto culminante ainda nos resta. Como observado por Englert, se olharmos para a forma das equações (2.50) e (2.51), vemos que a soma delas estabelece uma nova relação de dualidade entre informação de caminho (distinguibilidade) e visibilidade de interferência:

$$V^2 + D^2 = 1. \quad (2.52)$$

A forma geral dessa dualidade, estendida para incluir estados mistos, pode ser escrita como

$$V^2 + D^2 \leq 1, \quad (2.53)$$

onde a igualdade só é atingida com estados puros²¹. Essa desigualdade completa a extensão do trabalho de Wootters e Zurek [25]. Lá, a tela 1 na figura 1.3 era o sistema

²⁰Esse passo não é tão direto assim. Precisamos saber como calcular a norma do traço na equação (2.48) para chegar à equação (2.51). Essa norma pode ser definida como o traço do módulo de um operador, esse último definido por $|\hat{M}| = \sqrt{\hat{M}^\dagger \hat{M}}$, onde $\hat{M}$ é um operador linear no espaço de Hilbert.

Para estados puros quaisquer $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$, a norma do traço é dada por $\sqrt{1 - |\langle \psi | \varphi \rangle|^2}$ [50]. Dessa forma, a substituição apropriada nos permite chegar à expressão (2.51).

²¹Os detalhes da demonstração podem ser vistos em [64].

auxiliar fazendo o papel de marcador de caminho. A partir da medição de graus de liberdade da tela 1 (seu momento final), adotamos uma estratégia para retrodizer o caminho (fenda A ou B) dos fótons. A estratégia de Wootters e Zurek era escolher o caminho dos fótons (na fenda dupla) que mais contribuía para os resultados da medição do momento final da tela 1, como discutido na seção 1.2. De forma análoga, Englert opta pelo caminho que mais contribui para os resultados da medição do observável que disponibiliza a informação de caminho [equação (2.46)], nos permitindo retrodizer o caminho do SQE no interferômetro. Uma outra analogia aparece quando notamos que o tratamento de Wootters e Zurek, ao se basear na resposta de Bohr, estende o debate Einstein-Bohr, que lida com domínios extremos da complementaridade (ver seção 1.1). Enquanto isso, o trabalho de Englert, ao se basear no tratamento de SEW para marcadores de caminho [17], estende o trabalho desses, que também lida com domínios extremos da complementaridade. Além disso, à luz de SEW, discutido na seção 2.2, Englert lida com marcadores de caminho num formalismo mais intuitivo do que Wootters e Zurek em [25]. E, de novo, sem qualquer menção explícita a argumentos de incerteza [64]. Finalmente, o conteúdo geral da complementaridade em domínios intermediários é apresentado na forma de dualidade interferométrica, assim como a dualidade Greenberger-Yasin estudada na seção 2.1. Agora, porém, com a informação de caminho sendo disponibilizada por marcadores. Essa nova dualidade interferométrica [equação (2.53)] é encontrada na literatura sob o nome de “dualidade Englert-Greenberger-Yasin” (EGY) ou variações [11, 16, 66, 67]. Ainda seria possível incluir o nome de Jaeger, Shimony e Vaidman (JSV) [34], embora a quantidade de nomes torne a estética desagradável. A inclusão de JVS é devido ao fato de vários trabalhos [11, 35, 61, 68, 69] reconhecerem que eles deram um passo extremamente importante, senão uma derivação independente, que aponta para a desigualdade (2.53). Nas palavras do próprio Englert, *eles perderam a prova completa da relação de dualidade por um fio de cabelo*²² [70].

2.3.3 Hierarquia do conhecimento de caminho

A situação derivada por Englert levanta uma questão interessante: apesar de sermos capazes de quantificar a informação de caminho antes de qualquer medição (preditibilidade P), essa quantificação não representa todo o conhecimento que podemos adquirir sobre os caminhos. Por outro lado, a visibilidade final V estabelece um limite para a quantidade de informação de caminho que pode ser armazenada nos marcadores. Podemos ter certeza de que o registro de um padrão de interferência, ainda que com visibilidade parcial, é uma marca de que a quantidade de informação de caminho que está nos marcadores não é a mesma que estaria se essa visibilidade fosse nula. Isso significa que existe uma hierarquia em nosso conhecimento sobre os caminhos. Podemos resumir essa hierarquia da seguinte forma. Se $K(\hat{O})$ representa o conhecimento que podemos ter sobre o caminho de um SQE num interferômetro quando fazemos uma medição, que

²²Tradução livre.

depende do observável $\hat{O}$, então $K(\hat{O})$ está sujeito à hierarquia dada por [70]:

$$P \leq K(\hat{O}) \leq D. \quad (2.54)$$

A preditibilidade, que representa a quantidade de informação disponível a priori, é o menor conteúdo informacional que podemos ter. É um limite inferior, uma vez que não podemos perder informação a priori [64]. Já a distinguibilidade é uma forma de imposição da teoria quântica²³ sobre todo conhecimento acessível dos caminhos [70]. Num experimento com marcadores, nenhuma informação a priori ou escolha esperta de observável pode implicar num ganho de informação melhor do que o quantificado pela distinguibilidade. Isso é tudo que a teoria quântica nos permite conhecer sobre o sistema. O conhecimento de caminho K , portanto, representa o que sabemos sobre os caminhos de modo que possamos apostar no mais provável. Isso inclui tanto o que podemos conhecer a priori (quantificado pela preditibilidade P), quanto o que podemos conhecer a posteriori (quantificado pela distinguibilidade D). Nesse sentido, o conhecimento de caminho K se relaciona à verossimilhança, a qual nos informa como apostar num dos caminhos, através da expressão [51]:

$$K = 2\mathcal{L} - 1, \quad (2.55)$$

onde $0 \leq K \leq 1$. Quando não existem marcadores no experimento, a única forma presente de informação de caminho é a priori. Nesse caso,

$$\begin{aligned} K &= 2\mathcal{L}_{\text{a priori}} - 1 = 2 \left[\frac{1}{2}(1 + P) \right] - 1 \\ &= P. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Por outro lado, se não temos qualquer informação a priori, mas existem marcadores no experimento e podemos extrair informação de caminho deles de forma ótima, nosso conhecimento de caminho [ver equação (2.48)] é dado por

$$\begin{aligned} K &= 2\mathcal{L}_{\text{ótima}} - 1 = 2 \left[\frac{1}{2}(1 + D) \right] - 1 \\ &= D. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Motivado por essa quantificação do conhecimento dos caminhos, é interessante também observar o caso geral em que todas as formas de informação de caminho e de visibilidade (a priori e a posteriori) estão disponíveis parcialmente no experimento. Considerando valores arbitrários P e V_0 para as condições a priori²⁴, Englert mostra que a equação (2.44) torna-se:

$$V = |C| V_0. \quad (2.58)$$

²³No sentido de que, assumindo os postulados da teoria, não é possível extrair mais informação do que a distinguibilidade.

²⁴Ao contrário da seção anterior, em que $P = 0$ e $V_0 = 1$.

A verossimilhança ótima definida na equação (2.48) é substituída por uma expressão que agora leva em conta a assimetria inicial do interferômetro, contabilizada por $P \neq 0$, de modo que os braços não são mais equiprováveis:

$$\mathcal{L}_{\text{ótima}}(\hat{O}) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{tr}_D \left\{ \left| w_+ \hat{\rho}_D^{(+)} - w_- \hat{\rho}_D^{(-)} \right| \right\} \right). \quad (2.59)$$

A diferença entre a expressão (2.59) e (2.48) está na equação (2.34). Na seção anterior, quando $P = 0$, w_+ e w_- assumiram um valor particular: $w_+ = w_- = 1/2$. Agora, porém, como a preditibilidade assume um valor genérico P , não podemos impor nada sobre os valores de w_+ e w_- . Como consequência, as probabilidades w_+ e w_- aparecem explicitamente na expressão (2.59). Dessa forma, com o intuito de formalizar a discussão sobre a hierarquia do nosso conhecimento sobre os caminhos, chegamos numa expressão que quantifica a hierarquia da melhor aposta que podemos fazer sobre eles, pressupondo todas as formas de informação de caminho e visibilidade de interferência:

$$\frac{1}{2}(1 + P) \leq \mathcal{L}_{\text{ótima}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - (1 + P^2)(V/V_0)^2}. \quad (2.60)$$

Essa expressão representa uma generalização do conceito presente na expressão (2.48). Se exigirmos as condições da subseção 2.3.2, $P = 0$, $V_0 = 1$, e utilizarmos a relação de dualidade (2.52), a equação (2.60) se reduz a:

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{L}_{\text{ótima}} \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - V^2}) = \frac{1}{2}(1 + D). \quad (2.61)$$

A presença da visibilidade a posteriori representa o limite superior do nosso conhecimento sobre os caminhos: se existe um padrão de interferência, a informação de caminho disponível não pode ser total. Tendo em vista esse conhecimento, nós podemos ou jogar uma moeda (limite inferior) ou utilizar a informação de caminho contida nos marcadores para apostar no caminho correto. Dessa forma, nosso conhecimento de caminho K é bem representado pela distinguibilidade [ver expressão (2.57)]. Com isso em mente, a expressão (2.60), que também pode ser encontrada em [64], nos mostra que enquanto a preditibilidade é uma quantidade que favorece o experimentalista que deseja distinguir entre dois caminhos²⁵, a visibilidade final representa uma restrição sobre a informação que pode ser encontrada nos marcadores. Substituindo o limite superior de $\mathcal{L}_{\text{ótima}}$ da expressão (2.60) na equação (2.48), podemos chegar na relação de dualidade abaixo com um pequeno passo de álgebra:

$$\frac{(1 - P^2)}{V_0^2} V^2 + D^2 \leq 1. \quad (2.62)$$

Essa expressão generaliza a desigualdade (2.53) para um contexto em que todas as formas de informação de caminho e visibilidade (a priori e a posteriori) estão presentes.

²⁵Pois ele pode fazer uso do conhecimento a priori como “chute inicial”.

A expressão (2.62) representa a unificação dos ramos de predição e medição, explícitos na elegante forma de dualidade interferométrica. Isso mostra que, embora possamos diferenciar os cenários da complementaridade, e derivar relações quantitativas para cada um, o mesmo aspecto da relação entre o conhecimento que pode ser adquirido e a exibição de um padrão de interferência é evidenciado em todos os casos.

2.4 Teste da dualidade Englert-Greenberger-Yasin

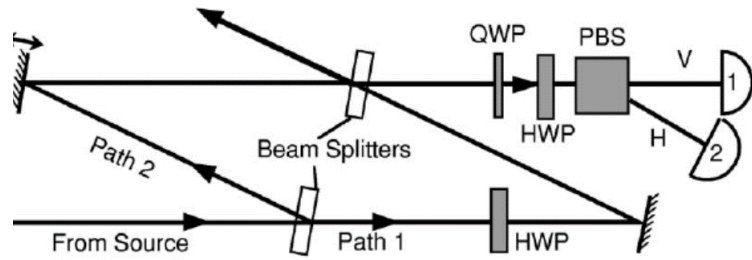


Figura 2.7: Montagem experimental para realização do teste da dualidade EGY (2.53). Os detalhes do experimento estão no texto. *Figura retirada da referência [51].*

Para finalizar o capítulo, é importante ressaltar o sucesso experimental da dualidade EGY. Uma realização óptica da expressão (2.53) é apresentada em [51]. Os autores utilizam a montagem experimental da figura 2.7, em que fótons são enviados para um interferômetro de Mach-Zehnder e detectores registram o número de fótons nas saídas. A polarização dos fótons faz o papel dos marcadores de caminho. A placa de meia onda (HWP) no caminho 1 é responsável por emaranhar o grau de liberdade espacial (caminhos) e a polarização dos fótons através da variação do ângulo θ de seu eixo óptico. Ela atua girando o estado de polarização linear inicial em um ângulo definido (duas vezes o ângulo θ entre o eixo óptico e a vertical). A variação desse ângulo θ permite que o estado de polarização de um fóton no caminho 1 possa ser “rodado” em relação à polarização de um fóton no caminho 2, que não sofre alteração. Dessa forma, a transformação implementada pela placa de meia onda controla o produto interno entre os marcadores de caminho. Quanto menor o produto interno entre eles, mais distinguíveis os caminhos se tornam, e mais informação de caminho fica acessível [ver equação (2.51)]. No limite em que esse produto interno é nulo, e portanto, os marcadores são ortogonais, toda a informação de caminho está disponível, como discutido na subseção 2.3.2. A placa de meia onda, portanto, faz o papel das transformações $\hat{U}_{\pm}$ na figura 2.6. Após o segundo divisor de feixes, o qual faz o papel do recombinador de feixes na figura 2.6, encontramos o conjunto de placas de quarto de onda (QWP) e meia onda, juntamente a um divisor de feixes polarizado (PBS). Esses elementos possibilitam a medição da polarização em qualquer base. Isso é importante, porque, como discutimos na seção anterior, a extração de informação de caminho depende de como podemos medir os estados dos marcadores.

Finalmente, a chegada dos fótons é anunciada pelo registro de contagens nos detectores 1 ou 2.

É necessário dizer que a informação de caminho nesse experimento é quantificada não pela distinguibilidade, mas pelo conhecimento de caminho K , introduzido na subseção 2.3.3. Como discutimos lá, na ocasião em que os marcadores disponibilizam alguma informação de caminho, podemos extrair o máximo do conhecimento disponível, quando a medição adotada para obter essa informação é ótima [equação (2.54)]. Nessa situação, adquirimos o conhecimento real da distinguibilidade dos estados do marcador. Esse conhecimento, porém, pode nem sempre estar acessível ao experimentalista, uma vez que a medição ótima pode ser difícil de se conseguir experimentalmente. Por outro lado, o experimentalista sempre pode medir a verossimilhança dos fótons terem passado por um caminho ou outro. Por exemplo, olhando para a figura 2.7, um procedimento que nos permitiria construir a verossimilhança é bloquear o caminho 2 e contar quantos fótons chegam nos detectores 1 e 2. O conjunto de placas e o PBS, na saída do interferômetro, determinam a análise da polarização de modo que enquanto o detector 1 fica associado à polarização λ , o detector 2 fica associado à polarização ortogonal $\lambda^\perp$. Analogamente, bloqueamos o caminho 1 e contamos quantos fótons chegam nos detectores 1 e 2. Adotando a estratégia de apostar no caminho que mais contribui para a probabilidade de clicar no detector que, de fato, clicou²⁶, esse procedimento, descrito em [51], nos permite construir a verossimilhança $\mathcal{L}$. Dessa forma, com a verossimilhança “em mãos”, o conhecimento de caminho é dado pela equação (2.55). Na situação em que o fóton entra no interferômetro com polarização vertical, e a placa de meia onda está alinhada nessa direção, o estado de polarização é o mesmo em ambos os caminhos. Isto é, ambos os marcadores são idênticos. Nesse caso, o procedimento descrito nesta seção, e presente em [51], construirá uma verossimilhança $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$. Como podemos concluir da equação (2.55), o conhecimento de caminho K é nulo. Tendo em mente as restrições experimentais, a dualidade acessível a esse teste experimental é dada por

$$V^2 + K^2 \leq 1. \quad (2.63)$$

A figura 2.8 mostra o comportamento da visibilidade e do conhecimento de caminho K para diferentes ângulos da placa de meia onda no caminho 1, quando o estado de polarização na entrada do interferômetro é vertical. Percebemos a incrível correspondência com a teoria. Como podemos notar da figura 2.8, o experimento foi realizado para dois conjunto de medições: um conjunto na base $\{H, V\}$, cujos resultados constroem a curva pontilhada, representando as medições na base sub-ótima; e outro conjunto na base $\{\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{4}\}$, onde φ_1 e φ_2 representam os ângulos de polarização da luz nos caminhos 1 e 2, respectivamente. Os resultados das medições nessa base constroem a curva contínua, representando a base ótima. Os casos extremos podem ser notados: para $\theta = 0$, alinhado com a vertical, a placa de meia onda (HWP) não implementa

²⁶Que é, essencialmente, a estratégia adotada na construção da verossimilhança na equação (2.47), e por Wootters e Zurek [25], como discutido na subseção 1.2.1.

alteração no estado de polarização. Nesse caso, nenhuma informação de caminho está disponível. Vemos que tanto medições na base sub-ótima $\{H, V\}$, quanto na base ótima $\{+\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$, são incapazes de nos fornecer algum conhecimento K de caminho. O gráfico nos mostra uma visibilidade essencialmente 1. Para $\theta = \pi/4$, os marcadores de caminho são ortogonais, tornando os caminhos completamente distinguíveis. Agora, nesse caso, o conhecimento de caminho K adquirido no experimento é máximo independente da escolha de base. Do gráfico, vemos que o conhecimento de caminho é essencialmente 1 e a visibilidade é nula. Isso nos permite concluir que a “sub-otimalidade” e “otimalidade” das medições são conceitos aplicáveis apenas no domínio intermediário, quando os marcadores de caminho são não ortogonais. Essa é uma questão de fundamental relevância no estudo da complementaridade. Afinal, os casos extremos, os quais independem da escolha de base, representam o domínio discutido por Einstein e Bohr (seção 1.1), além do experimento proposto por SEW (seção 2.2) e o exemplo dramático de Englert (sub-seção 2.3.2). Esses exemplos, porém, correspondem a apenas dois pontos no gráfico da figura 2.8. A conclusão que se segue é a de que, no que se refere à complementaridade em domínios intermediários, os casos que mais contribuem para a compreensão do problema são aqueles em que os marcadores de caminho são não ortogonais. Dessa forma, esse é certamente um tema que merece maior atenção. Por esse motivo, vamos dedicar o próximo capítulo para abordá-lo.

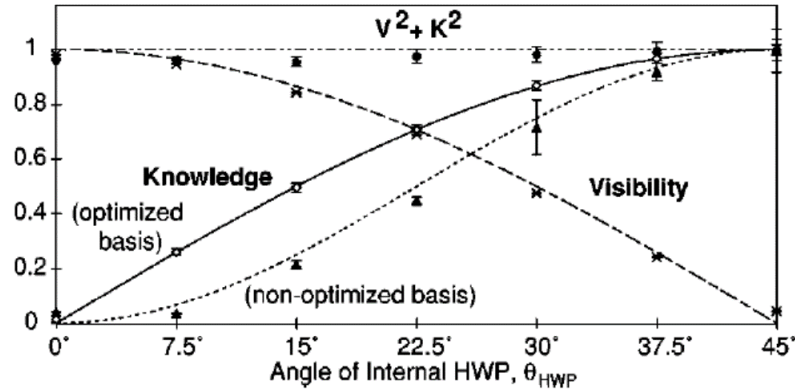


Figura 2.8: Curvas teóricas e dados experimentais para o comportamento da visibilidade e do conhecimento de caminho K como função do ângulo da placa de meia onda HWP no caminho 1. O sistema de detecção foi selecionado na base ótima (linha contínua) e sub-ótima (linha pontilhada). *Figura retirada da referência [51].*

2.5 Considerações finais

Como conclusão de toda essa revisão do conceito de complementaridade ao longo de cerca de setenta anos, apresentada nos dois primeiros capítulos deste trabalho, vemos que os dois ramos discutidos anteriormente são parte de um sistema central. Por mais que as figuras de predição e medição foram tomadas, desde o início, como manifestações diferentes de um mesmo conceito, ao final deste capítulo podemos colocá-las na

mesma expressão [equação (2.62)] e evidenciar que formam um fenômeno único. É possível, ainda, chamar atenção para o desenvolvimento da discussão sem a insistência de atribuir uma semântica típica de conceitos clássicos aos objetos quânticos, como no termo “dualidade onda-partícula”. Destacamos, também, que a forma quantitativa da complementaridade nos permite ver, de maneira elegante, como é o intercâmbio entre observáveis incompatíveis. Isso certamente representa um grande progresso tendo em vista que o início da discussão se deu em torno do debate Einstein-Bohr. Finalmente, observamos que o estudo da complementaridade quando os estados dos marcadores de caminho são não ortogonais é o aspecto central na derivação de relações quantitativas. Por causa disso, no capítulo a seguir vamos explorar esse aspecto, procurando entender como uma medição que permite distinguir entre estados não ortogonais de forma ótima se relaciona à distinguibilidade de Englert.

Capítulo 3

Marcadores de caminho e estados quânticos não ortogonais

No capítulo anterior, estudamos vários experimentos interferométricos, alguns mentais, outros reais, que contribuíram para a representação quantitativa da complementaridade entre informação de caminho e visibilidade de interferência em domínios intermediários. Durante o processo, evidenciamos dois ramos dessa representação: um baseado em predições, caracterizado pela preditibilidade P , e outro baseado em medições, caracterizado pela distinguibilidade D . A discussão dessa representação quantitativa levou à expressão dos conceitos na forma elegante de dualidades interferométricas, presentes nas equações (2.10) e (2.53). Em todos os casos, para atingir uma compreensão mais precisa da informação de caminho, foi crucial a definição de estratégias de aposta nos caminhos para construir os quantificadores P e D . Para obter esse segundo, porém, nos envolvemos com um sistema físico adicional: os marcadores de caminho. Enquanto no trabalho de Greenberger e Yasin [32], discutido na seção 2.1, a estratégia de predição parece ser mais clara, o trabalho de Englert [64], discutido na seção 2.3, parece omitir alguns passos que definem sua estratégia de retrodição, a qual é baseada na medição dos estados dos marcadores. Além disso, embora a distinguibilidade de Englert na equação (2.51) seja válida para estados puros não ortogonais dos marcadores, o exemplo proposto para demonstrar a diferença dramática entre informação de caminho a priori e informação de caminho adquirida na medição, exige que a interação entre o SQE (sistema quântico na entrada do interferômetro, podendo ser um fóton, elétron, átomo, etc.) e os marcadores produza estados finais ortogonais dos marcadores, permitindo uma distinção total dos caminhos ($D = 1$). Embora esse seja o caso mais instrutivo para evidenciar o poder dos marcadores de caminho, ele se situa nos extremos da complementaridade ($V = 0$, $D = 1$). Dessa forma, o estudo da complementaridade em domínios intermediários só está completo quando estudamos também os casos em que os estados finais dos marcadores são não ortogonais, correspondendo a valores arbitrários de V e D . Sendo esse o ponto central na representação quantitativa da complementaridade baseada em medições, vamos dedicar todo esse capítulo para entender como a informação de caminho armazenada em estados puros não ortogonais dos marcadores pode ser extraída

de modo que nosso conhecimento sobre os caminhos seja o maior possível. Ao analisarmos diferentes protocolos de medição que realizam essa tarefa, poderemos entender precisamente a estratégia utilizada por Englert em [64], relacioná-la ao trabalho experimental [51] discutido na seção 2.4 e capturar melhor o conceito de “distinguibilidade” empregado por Englert.

3.1 O problema da não ortogonalidade

Se olharmos para o trabalho de Englert, discutido na seção 2.3, com uma “visão aérea”, vamos encontrar vários paralelos com o fenômeno do apagador quântico, introduzido na seção 2.2. Nesse último, o interferômetro discutido na subseção 2.2.1 é análogo ao interferômetro simétrico de Englert, representado pelas equações (2.37). Em ambos os casos, nenhuma informação de caminho a priori está disponível e a visibilidade a priori é máxima. Na subseção 2.2.3, em analogia à discussão do exemplo de Englert [logo após a equação (2.51)], a interação entre o átomo e os marcadores de caminho (cavidades) produziu o estado emaranhado (2.15), com estados ortogonais desses marcadores. A disponibilidade total da informação de caminho, ocasionada pela distinguibilidade máxima dos estados dos marcadores, reverte completamente a situação inicial (visibilidade a priori máxima) e anula toda a interferência, como mostra a equação (2.17). Como dito no final da seção 2.2, o trabalho de SEW [17] lida com domínios extremos da complementaridade. E assim, vemos que o exemplo de Englert também. A retrodição perfeita do caminho dos átomos em [17] e do SQE no exemplo de Englert [64] só é possível porque os estados dos marcadores, que carregam a informação de caminho, são ortogonais.

Nesse estágio introdutório pode parecer que, se os estados dos marcadores fossem não ortogonais, isso não representaria maiores desafios na identificação dos caminhos. Talvez bastasse alguma pequena mudança na estratégia de aposta, ou — quem sabe? — escolher um observável mais esperto, mas ainda associado à informação de caminho, que realizasse a tarefa. Tendo isso em mente, para começar a ilustração do problema, vamos continuar aproveitando os exemplos do capítulo 2. Consideremos, mais uma vez, as figuras 2.7 e 2.8. Para fótons verticalmente polarizados entrando no interferômetro, a orientação θ do eixo da placa de meia onda (HWP) no caminho 1 produz diferentes marcações de caminho. Para $\theta = \pi/4$, o estado desses fótons após a HWP pode ser escrito como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |H\rangle + |2\rangle |V\rangle), \quad (3.1)$$

onde $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ e $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ representam os seus estados de caminho e de polarização, respectivamente. Nessa situação, a informação de caminho está armazenada em estados ortogonais de polarização. Toda informação está disponível e medições na base $\{H, V\}$ identificam perfeitamente por qual caminho os fótons vieram. Na figura 2.8, a linha pontilhada corresponde a medições nessa base. Podemos ver que o conhecimento de

caminho K é máximo para $\theta = \pi/4$. Por outro lado, se $\theta = \pi/8$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle | +45^\circ \rangle + |2\rangle | V \rangle), \quad (3.2)$$

onde $| +45^\circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle)$, o que implica que $\langle V | +45^\circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Com estados não ortogonais carregando a informação de caminho, medições na base $\{H, V\}$ nos levam a retrodições erradas em 25% dos casos. Para todos os outros ângulos da placa de meia onda a mesma situação se repete, mas com diferentes taxas de retrodições erradas. Isso apenas não acontece no limite em que os marcadores são ortogonais, isto é, $\theta = \pi/4$. Olhando para a figura 2.8, vemos que o conhecimento que pode ser adquirido sobre os caminhos, nos permitindo fazer retrodições, aumenta à medida que o produto interno entre estados marcadores de caminho diminui, sugerindo uma relação mais profunda entre não ortogonalidade e a distinguibilidade de Englert.

Ainda na figura 2.8, vemos que a base $\{H, V\}$ é chamada de “sub-ótima”, deixando claro que existem medições mais espertas. Como discutimos na seção 2.4, embora a disponibilização da informação de caminho seja consequência da interação entre o SQE e os marcadores, a extração da informação disponível depende da escolha da medição [51]. Para todos os ângulos, exceto $\theta = \pi/4$, uma medição na base $\{H, V\}$ nunca extrai toda informação disponível, e por isso a desigualdade (2.63) nunca é saturada, mesmo para estados puros (ver figura 2.8). Já que existem medições mais informativas do que a “sub-ótima”, poderia se pensar que tudo isso é um tipo de dificuldade técnica, e com um protocolo de medições engenhoso, essa dificuldade poderia ser contornada. Um passo natural seria insistir em medições que permitam identificar perfeitamente, sem qualquer ambiguidade, por qual caminho um SQE passou.

Suponhamos que num interferômetro de dois caminhos, como proposto por Englert, os caminhos sejam marcados pelos estados $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$. Gostaríamos que uma medição associada ao operador¹ $\hat{\Pi}_+$ ($\hat{\Pi}_-$) identificasse o estado $|d_+\rangle$ ($|d_-\rangle$) sem ambiguidade, e portanto nos permitisse retrodizer perfeitamente o caminho do SQE. Essa exigência pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_+ |d_-\rangle &= 0, \\ \hat{\Pi}_- |d_+\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde os operadores $\hat{\Pi}_+$ e $\hat{\Pi}_-$ geram o espaço de Hilbert dos dois estados, o que significa que

$$\hat{\Pi}_+ + \hat{\Pi}_- = \hat{I}. \quad (3.4)$$

Como mostrado por Bergou [71], se multiplicarmos ambos os membros da equação (3.4)

¹Esses operadores podem ser tanto projetores ortogonais, quanto elementos de um POVM. Estudaremos a diferença entre esses tipos de medição na seção 3.2.

por $\langle d_+ |$ à esquerda e $|d_+\rangle$ à direita, em vista das condições (3.3), teremos

$$\overbrace{\langle d_+ | \hat{\Pi}_+ | d_+ \rangle}^{p_+} + \underbrace{\langle d_+ | \hat{\Pi}_- | d_+ \rangle}_0 = \langle d_+ | \hat{I} | d_+ \rangle = 1, \quad (3.5)$$

onde o termo p_+ é a probabilidade de identificarmos o caminho $|d_+\rangle$ numa medição associada ao operador $\hat{\Pi}_+$. Nesse caso, a probabilidade de executar essa tarefa é 1, o que parece satisfazer nossa exigência de retrodição perfeita. Fazendo o mesmo para $|d_-\rangle$ e $\hat{\Pi}_-$, encontraremos $p_- = 1$. Parar por aí nos levaria à conclusão de que é possível identificar cada um dos estados com probabilidade 1, o que significa que encontramos uma medição capaz de identificar os estados $\{|d_+\rangle, |d_-\rangle\}$ sem qualquer ambiguidade, nos permitindo retrodizer o caminho perfeitamente, independente da não ortogonalidade desses estados. Nessa situação, independente da condição em que os estados dos marcadores se encontram após a interação com o SQE (isto é, se são descritos por estados ortogonais ou não), parece ser possível retrodizer o caminho do SQE perfeitamente. Se agora, porém, multiplicarmos ambos os membros da equação (3.4) por $\langle d_+ |$ à esquerda e $|d_-\rangle$ à direita, satisfazendo as condições (3.3), teremos

$$\overbrace{\langle d_+ | \hat{\Pi}_+ | d_-\rangle}^0 + \underbrace{\langle d_+ | \hat{\Pi}_- | d_-\rangle}_0 = \langle d_+ | \hat{I} | d_-\rangle = \langle d_+ | d_-\rangle$$

$$\therefore \langle d_+ | d_-\rangle = 0. \quad (3.6)$$

Uma vez que os estados $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$ representam os estados dos marcadores de caminho, o conteúdo do resultado (3.6) expressa que a tarefa de identificar os caminhos quando a informação é armazenada em estados não ortogonais dos marcadores não é apenas uma dificuldade técnica, mas uma *impossibilidade*. Em outras palavras, ao tentar construir um protocolo de medição com dois operadores quaisquer $\hat{\Pi}_+$ e $\hat{\Pi}_-$ satisfazendo a condição (3.4), vemos que a exigência de não ambiguidade (3.3) é satisfeita somente se os estados dos marcadores são ortogonais.

3.2 Medições projetivas *versus* medições generalizadas

Motivado pelo conteúdo da equação (3.6), é conveniente entender como as propriedades de uma medição em mecânica quântica impõem restrições sobre os resultados que podemos obter. Aqui vamos discutir dois tipos de medições: as projetivas e as generalizadas.

3.2.1 Medições projetivas

Medição projetiva é o tipo de medição mais presente em livros-texto de mecânica quântica e está associada ao postulado da teoria no qual para cada observável (no nosso caso, um observável que carrega a informação de caminho) existe um operador hermitiano $\hat{O}$ cujos autovalores λ_j são os possíveis valores desse observável [1]. Devido à hermiticidade do operador $\hat{O}$, ele admite a decomposição espectral dada por

$$\hat{O} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \hat{\pi}_j, \quad (3.7)$$

onde o operador $\hat{\pi}_j$ é um projetor sobre o subespaço de $\hat{O}$ associado ao autovalor λ_j . As propriedades de medições utilizando esses operadores estão sumarizadas na caixa 3.2.1. Para um estado qualquer $\hat{\rho}$, a probabilidade de se obter λ_j como resultado dessa medição é dada pela regra de Born:

$$p_j = \text{tr}(\hat{\pi}_j \hat{\rho}). \quad (3.8)$$

Propriedades de medições projetivas

De modo geral, o conjunto de operadores $\{\hat{\pi}_j\}$ implementa medições projetivas quando esses exibem as seguintes propriedades^a

$$\sum_{j=1}^N \hat{\pi}_j = \hat{I}, \quad (3.9a)$$

$$\hat{\pi}_j \geq 0, \quad (3.9b)$$

$$\hat{\pi}_j = \hat{\pi}_j^\dagger, \quad (3.9c)$$

$$\hat{\pi}_i \hat{\pi}_j = \delta_{ij} \hat{\pi}_j. \quad (3.9d)$$

^aA condição de hermiticidade (3.9c) é, na verdade, redundante na presença da condição de semi-positividade (3.9b). Evidenciar a hermiticidade dos projetores, porém, é comum à literatura de mecânica quântica. Em [72], no entanto, Watrous argumenta que exigir semi-positividade de um operador é equivalente a exigir sua hermiticidade com autovalores não negativos.

As três primeiras propriedades da caixa 3.2.1 dizem respeito às condições necessárias para que o número p_j em (3.8) possa ser interpretado, de fato, como probabilidade: a soma de todos os p_j deve ser igual a 1 [equação (3.9a)], ser não negativo [equação (3.9b)] e pertencer ao conjunto dos números reais [equação (3.9c)]. A propriedade (3.9d) quando $i = j$, chamada de *indepotência*, é a que define o operador $\hat{\pi}_j$ como um projetor no sentido usual em álgebra linear [73]. Quando $i \neq j$, a propriedade (3.9d) declara a ortogonalidade entre os elementos do conjunto $\{\hat{\pi}_j\}$ de operadores de medição. Uma das consequências dessa ortogonalidade é que o número de elementos em $\{\hat{\pi}_j\}$ implementando medições projetivas está restrito à dimensão N do espaço de Hilbert

gerado pelos estados, dessa forma, restringindo também a N o número de resultados possíveis.

Um caso de medição projetiva que ilustra o efeito dessa restrição é o experimento da figura 2.7, discutido nas seções 2.4 e 3.1. A medição projetiva “sub-ótima” é implementada pelos projetores ortogonais dados por

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_H &= |H\rangle\langle H|, \\ \hat{\pi}_V &= |V\rangle\langle V|.\end{aligned}\tag{3.10}$$

A informação de caminho é disponibilizada pelos estados de polarização do fóton, os quais marcam seu caminho no interferômetro. Quando o estado preparado pelo interferômetro é aquele na equação (3.2), podemos ver na figura 3.1 a ambiguidade na identificação do estado de polarização (e, portanto, dos caminhos) quando implementamos medições projetivas através dos operadores em (3.10). O resultado da medição implementada por $\hat{\pi}_V$ (isto é, um clique no detector associado a $\hat{\pi}_V$) não pode ser inequivocamente associado ao estado $|V\rangle$. De fato, nenhuma medição projetiva, não apenas a medição em (3.10), é capaz de identificar os estados não ortogonais dos marcadores de caminho inequivocamente, como vimos na seção 3.1. Essa limitação decorre do fato de tais medições admitirem um número de resultados possíveis restrito à dimensão do espaço de Hilbert gerado pelos estados. A seguir, veremos um formalismo que nos permite contornar essa restrição.

3.2.2 Medições generalizadas e o formalismo POVM

Como o nome *generalizada* sugere, medições generalizadas são construídas relaxando restrições sobre os operadores de medição. Uma vez que as três primeiras propriedades na caixa 3.2.1 estão ligadas ao conceito de probabilidade, não é interessante mudá-las. Por outro lado, se desistirmos da propriedade (3.9d), os operadores de medição não mais serão ortogonais entre si e não serão identificados como elementos de uma medição projetiva (descrita através de projetores ortogonais). Quando uma medição é implementada pelo conjunto de operadores de medição $\{\hat{\Pi}_j\}$ que *satisfazem* as condições (3.9a), (3.9b), (3.9c), mas *não satisfazem* a condição (3.9d), dizemos que foi implementada uma *medição generalizada*. Para diferenciar do caso anterior, vamos representar esses operadores como $\hat{\Pi}_j$. Naturalmente, quando os operadores do conjunto $\{\hat{\Pi}_j\}$ são ortogonais entre si, eles são equivalentes ao conjunto de elementos da medição projetiva $\{\hat{\pi}_j\}$. Além de não podermos identificar os operadores $\hat{\Pi}_j$ como projetores ortogonais (exceto no caso citado), existem algumas consequências de abandonar a propriedade (3.9d). A que mais nos interessa aqui, e é a justificativa do código de cores utilizado nesta seção (e que não será utilizado nas demais), é que agora o número de resultados possíveis $\bar{N}$ não está mais restrito à dimensão N do espaço de Hilbert gerado pelos estados. O conjunto de operadores de medição $\{\hat{\Pi}_j\}$ pode conter um número arbitrário de elementos, desde que

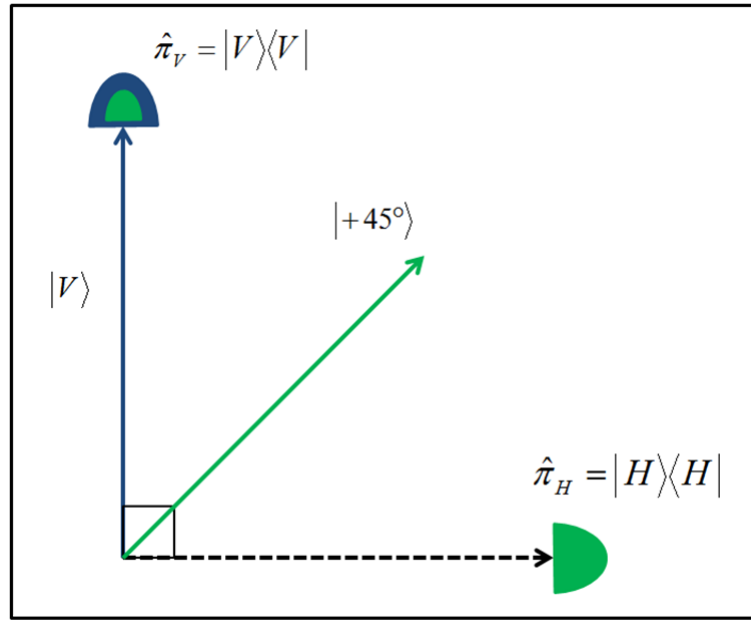


Figura 3.1: Ilustração da identificação dos estados de polarização em (3.2) através da medição projetiva (3.10). A retrodição do caminho depende da identificação dos marcadores de caminho $\{|V\rangle, |45^\circ\rangle\}$. A ilustração mostra que a medição projetiva (3.10) não pode realizar essa tarefa sem ambiguidade: a projeção em $|H\rangle$ sempre identifica o estado de polarização $|45^\circ\rangle$ e, portanto, a passagem do fóton pelo caminho 2. Porém, a projeção em $|V\rangle$ não nos permite assegurar por qual caminho o fóton passou já que o estado $|45^\circ\rangle$ também possui componente nessa direção.

esses somem para a identidade:

$$\sum_{j=1}^{\bar{N}} \hat{\Pi}_j = \hat{I}. \quad (3.9a')$$

No que se refere às medições generalizadas, o que mais nos interessa neste capítulo é obter a probabilidade de ocorrência de um dado resultado, já que nossa principal tarefa aqui é utilizar os resultados das medições para retrodizer o caminho de um SQE num interferômetro. Assim, em nosso caso, não é interessante estudar todas as suas propriedades, como, por exemplo, a forma de obtenção do estado após a medição². Sendo assim, nos é suficiente apenas utilizar o conjunto de elementos $\{\hat{\Pi}_j\}_{j=1}^{\bar{N}}$ como forma de computar as probabilidades de obtenção de resultados de medições generalizadas. Nesse caso, essas medições são tratadas pelo formalismo de *medida com valores em operadores positivo* e o conjunto de elementos de medição $\{\hat{\Pi}_j\}_{j=1}^{\bar{N}}$ é conhecido como um conjunto POVM³. Um POVM é definido como o conjunto de operadores satisfazendo

²Ao abandonar a condição (3.9d), o estado após a medição é fornecido pelos operadores de Kraus $\hat{A}_j$, onde $\hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \geq 0$, os quais são uma generalização dos projetores ortogonais $\hat{\pi}_j$ e estão relacionado aos elementos de POVM $\hat{\Pi}_j$ (ver nota 3 para definição do termo POVM) através da decomposição $\hat{\Pi}_j \equiv \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j$ [74].

³Do inglês, *positive-operator valued measure*. Também é possível encontrar a sigla POM (*probability-operator measure*) como sinônimo de POVM.

as propriedades de completeza [equação (3.9a')], hermiticidade [equação (3.9b)] e semi-positividade [equação (3.9c)], mas não necessariamente a propriedade de ortogonalidade [equação (3.9d)], e cada operador do conjunto é comumente chamado de *elemento de POVM* [74]. Esses operadores são responsáveis apenas por nos fornecer a probabilidade com que um dado resultado ocorre.

Recapitulando as questões levantadas na seção 3.1 à luz da discussão sobre medições, podemos ponderar algumas coisas. Levando em conta a última frase da seção 3.1, quando utilizamos dois operadores somos proibidos de identificar os caminhos sem qualquer ambiguidade quando os estados dos marcadores são não ortogonais. Quando esses operadores implementam medições projetivas a figura 3.1 ilustra essa impossibilidade. Porém, diante do formalismo POVM, podemos nos fazer uma pergunta: o que ganharíamos nesse mesmo problema ao usar esse protocolo de medições?

3.2.3 Discriminação de estados quânticos

O problema de retrodizer o caminho de um SQE quando essa informação está armazenada em estados não ortogonais de marcadores faz parte de uma classe mais geral de problemas conhecida como *discriminação de estados quânticos não ortogonais*. Num problema típico de discriminação de estados, existem duas partes envolvidas: uma parte A prepara um estado de um conjunto de estados $\{\hat{\rho}\}_{j=1}^N$ com probabilidades a priori $\{\eta\}_{j=1}^N$ ($\sum_j \eta_j = 1$) e o envia para a parte B . A parte B tem total conhecimento sobre quais são os estados desse conjunto e com qual probabilidade cada estado é preparado. Usando esse conhecimento, a tarefa da parte B é discriminar (isto é, identificar) o estado recebido. Esse é exatamente o cenário em que estamos envolvidos: os estados $\hat{\rho}_j$ representam os caminhos possíveis, populados com probabilidade a priori η_j . Nossa tarefa é utilizar estratégias de discriminação, as quais se baseiam em protocolos de medição generalizada ou projetiva, para retrodizer o caminho do SQE no interferômetro. O conteúdo da distinguibilidade de Englert compartilha o mesmo arcabouço das estratégias de discriminação, revelando uma relação muito mais próxima entre complementaridade e discriminação de estados quânticos. Embora o desenvolvimento desses tópicos tenha ocorrido separadamente, um dos intuitos deste capítulo, e deste trabalho como um todo, é fazer um estudo conjunto dos dois.

3.3 Discriminação sem ambiguidade

Vamos voltar ao problema original do capítulo. Agora, porém, sabemos duas coisas:

- i. É impossível realizar medições que identifiquem estados não ortogonais sem ambiguidade [ver equações (3.3), (3.4) e (3.6)] quando o número de operadores (e, portanto, o número de resultados) desta medição é igual ao número de estados que queremos discriminar.

- ii. Existe um formalismo que nos permite implementar medições com um número arbitrário de resultados, desde que os operadores associados a cada resultado (elementos de POVM) satisfaçam as condições (3.9a'), (3.9b) e (3.9c).

Num caso geral para estados puros, queremos discriminar N estados $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^N$ sem ambiguidade. Assim, a condição (3.3) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\langle\psi_i|\hat{\Pi}_j|\psi_i\rangle = p_j\delta_{ij}, \quad (3.11)$$

onde $0 \leq p_j \leq 1$. O lado direito da equação é nulo sempre que tentarmos relacionar o resultado ω_j (associado ao elemento de POVM $\hat{\Pi}_j$) a um estado $|\psi_i\rangle$. Em outras palavras, a probabilidade p_j de um detector associado ao resultado ω_j clicar quando o estado preparado foi $|\psi_i\rangle$ é nula. Quando, porém, o resultado ω_j é obtido, o elemento de POVM $\hat{\Pi}_j$ nos informa que esse evento acontece com uma probabilidade p_j sempre que o estado preparado foi $|\psi_j\rangle$. A forma explícita dos elementos de POVM satisfazendo essas condições pode ser expressada introduzindo os estados recíprocos $|\psi_j^\perp\rangle$ [75]. Um estado recíproco é ortogonal a todos os outros estados a serem discriminados, exceto $|\psi_j\rangle$:

$$\langle\psi_i|\psi_j^\perp\rangle = \langle\psi_j|\psi_j^\perp\rangle\delta_{ij}. \quad (3.12)$$

Assim, escrevemos os elementos de POVM $\hat{\Pi}_j$ como

$$\hat{\Pi}_j = \frac{p_j}{|\langle\psi_j|\psi_j^\perp\rangle|^2} |\psi_j^\perp\rangle\langle\psi_j^\perp|, \quad (3.13)$$

para $j = 1, \dots, N$. Esses operadores satisfazem nosso requerimento de discriminação sem ambiguidade (3.11). Em analogia à nossa tentativa anterior, discutida no final da seção 3.1, a implementação desse conjunto de operadores nos permite identificar cada estado $|\psi_j\rangle$ sem cometer qualquer erro.

Num interferômetro de dois caminhos, onde $N = 2$, a implementação das operações (3.13) nos permitiria discriminar os caminhos sem a ambiguidade vista na figura 3.1, mesmo quando eles são marcados por estados não ortogonais, como em (3.2). Nesse sentido, *parece* que nosso objetivo inicial foi alcançado. E, em vista da equação (3.13), os operadores que satisfazem as condições (3.3) serão dados por

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_+ &= \frac{p_+}{|\langle d_+|d_+^\perp\rangle|^2} |d_+^\perp\rangle\langle d_+^\perp|, \\ \hat{\Pi}_- &= \frac{p_-}{|\langle d_-|d_-^\perp\rangle|^2} |d_-^\perp\rangle\langle d_-^\perp|, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $|d_+^\perp\rangle$ ($|d_-^\perp\rangle$) é ortogonal a $|d_- \rangle$ ($|d_+ \rangle$). Embora os dois operadores não ortogonais da equação (3.14) satisfaçam a exigência de não ambiguidade (3.3), eles não satisfazem a relação de completeza (3.4), também expressa em (3.9a) e, portanto, não representam uma medição fisicamente realizável. Isso demonstra a extensão da derivação que leva à expressão (3.6): com a exigência (3.4), não existe uma medição de dois resultados capaz

de nos oferecer confiança total de que um dado resultado está inequivocamente associado a um dos estados quando esses não são ortogonais. Mesmo se os operadores associados à identificação dos estados são não ortogonais. A única forma possível de implementar uma medição utilizando os operadores (3.13), os quais nos permitem alcançar nosso objetivo de retrodição sem erros, é admitindo um número de operadores não ortogonais maior que a dimensão N do espaço de Hilbert gerado pelos estados [ver item (ii) no início desta seção]. Isto é, implementando as medições generalizadas discutidas na subseção 3.2.2. Esse recurso, porém, não vem sem algum custo, como poderia se esperar.

3.3.1 Custo da exigência de discriminação sem ambiguidade

Resultados inconclusivos

Para que o conjunto de N operadores em (3.13) defina uma medição fisicamente realizável, é estritamente necessário que eles somem para a identidade. Esses operadores não satisfazem essa condição. Isso significa que precisamos introduzir um operador adicional de modo que a condição (3.9a') seja satisfeita. Esse operador será dado por:

$$\hat{\Pi}_? = \hat{I} - \sum_{j=1}^N \hat{\Pi}_j \geq 0. \quad (3.15)$$

Isto é, $\hat{\Pi}_?$ é um operador semi-positivo. Com essa introdução, todo o conjunto de elementos, agora, forma um POVM capaz de discriminar os estados sem ambiguidade. Se cada elemento de POVM (3.13) identifica cada estado $|\psi_j\rangle$ sem erro, o elemento $\hat{\Pi}_?$ não identifica nenhum deles. A condição de não ambiguidade, porém, não permite que existam erros nas medições [ver equações (3.13) e (3.3)]. Um resultado associado a esse operador, então, não pode ser nem um erro, nem uma identificação. Logo, o resultado é uma resposta inconclusiva. Quando um detector associado a esse elemento de POVM clica, a única resposta plausível para a pergunta “qual foi o estado?” é simplesmente “não sei”. Um protocolo de identificação de estados que implementa medições com essas características é conhecido na literatura como “discriminação sem ambiguidade”.

Levando essa discussão para o nosso contexto de identificação de dois caminhos num interferômetro, comentado no início da seção 3.1, é interessante contrastar o status da discussão até agora com a noção ingênua de que poderíamos exigir a discriminação sem ambiguidade de estados não ortogonais (representando os marcadores de caminho) de maneira trivial: saímos de medições projetivas para medições generalizadas; para realizar essas medições, precisamos de pelo menos $\bar{N} = 3$ operadores de medição, em vez de apenas $N = 2$; dos três resultados possíveis na implementação desses operadores, apenas dois resultados estão associados à identificação dos caminhos, enquanto um corresponde a uma resposta inconclusiva. Ademais, a implementação experimental da tarefa de identificar os dois caminhos sem ambiguidade quando os marcadores são não ortogonais vai além da simplicidade do conjunto de placas de onda e um divisor de

feixes, como mostrado no interferômetro da figura 2.7 (análogo ao interferômetro da figura 2.6). Um experimento capaz de discriminar estados como o da equação (3.2) pode ser visto em [76].

Otimização da discriminação sem ambiguidade

Uma vez que não é possível escapar da ocorrência de resultados inconclusivos, quase sempre estamos interessados não apenas em conhecer a probabilidade de obter esses resultados (também chamada “probabilidade de falha”), mas também em determinar qual é seu menor valor. Assim, queremos otimizar o problema, minimizando a probabilidade de falha, a fim de encontrar a maior probabilidade de discriminar os estados (também chamada de “probabilidade de sucesso” em oposição à falha). Sejam N estados puros $|\psi_j\rangle$, cada qual preparado com uma probabilidade a priori η_j . A discriminação sem ambiguidade ótima é possível quando o POVM $\{\hat{\Pi}_j, \hat{\Pi}_?\}_{j=1}^N$ nos permite minimizar a probabilidade média de falha dada por:

$$\begin{aligned} p_? &= 1 - \sum_{j=1}^N \eta_j \langle \psi_j | \hat{\Pi}_j | \psi_j \rangle \\ &= 1 - \sum_{j=1}^N \eta_j p_j, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde o segundo termo do lado direito corresponde à probabilidade média de sucesso. Tudo isso nos permite enunciar a seguinte característica sobre a discriminação sem ambiguidade: o custo de exigir uma condição de discriminação de estados não ortogonais sem qualquer ambiguidade, é abrir mão de sempre (deterministicamente) obter resultados conclusivos [77]. Portanto, a discriminação sem ambiguidade é um protocolo de discriminação probabilístico que envolve resultados inconclusivos. No melhor caso, podemos obter resultados inconclusivos com a menor taxa possível.

Independência linear dos estados

Ainda existem custos adicionais quando insistimos em discriminação sem ambiguidade. Chefles [78] demonstrou que esta só se aplica quando os estados a serem discriminados são linearmente independentes. Os detalhes dessa demonstração não nos interessa neste trabalho, mas podem ser vistos [78]. Apenas nos interessa conhecer o alto custo que a exigência (3.11) nos impõe, ressaltando a grande diferença entre estados ortogonais e não ortogonais quando desejamos realizar a mesma tarefa: discriminá-los sem ambiguidade. Dessa forma, mais uma vez temos uma implicação decorrente da exigência de ausência de ambiguidade: além da probabilidade não nula de resultados inconclusivos, temos a exigência da independência linear dos estados a se discriminar.

Além disso, não existem apenas custos dificultando a tarefa de discriminação sem ambiguidade, alguns problemas são de ordem prática. Por exemplo, a probabilidade

ótima de discriminação sem ambiguidade, que envolve a minimização da probabilidade de falha, não é conhecida para um grande número de casos. Na realidade, a literatura só oferece solução geral analítica para $N = 2$ estados e para $N > 2$ estados simétricos equiprováveis⁴ [79]. No primeiro caso, Ivanovic [80], Dieks [81] e Peres [82] foram responsáveis pela solução analítica para dois estados puros não ortogonais com a mesma probabilidade a priori $\eta_j = 1/2$. Mais tarde, Jaeger e Shimony apresentaram a solução para probabilidades a priori arbitrárias [83].

É interessante ressaltar que, embora um dos propósitos deste trabalho seja relacionar complementaridade e Discriminação de estados, as estratégias de discriminação, tal como a discriminação sem ambiguidade, foram derivadas num contexto completamente independente de relações de complementaridade.

3.3.2 O limite Ivanovic-Dieks-Peres e o teorema de Naimark

Uma maneira interessante de realizar medições generalizadas e observar fisicamente a implementação da tarefa de discriminação sem ambiguidade é através do *Teorema de Naimark*. O teorema permite que a realização de um POVM num espaço de Hilbert $\mathcal{H}_s$ seja equivalente à realização de uma medição projetiva no espaço estendido $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_a$ sobre os graus de liberdade do espaço $\mathcal{H}_a$ [84]. Seja $\{|\psi_j\rangle\}$ um conjunto de estados puros não ortogonais entre si num espaço de Hilbert $\mathcal{H}_s$. Seja também um sistema auxiliar em $\mathcal{H}_a$, cujo estado inicial é dado por

$$|a\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (3.17)$$

onde $\langle 0|1\rangle = 0$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. A essência do procedimento é ilustrada na caixa 3.3.2: uma operação unitária $\hat{U}$, atuando em $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_a$, é construída de modo que seja possível transformar os estados iniciais $\{|\psi_j\rangle\}$ em estados ortogonais, com uma certa probabilidade de sucesso. Essa operação unitária atua no estado inicial $|\psi_j\rangle |a\rangle$, produzindo o estado emaranhado (3.18). Em seguida, uma medição projetiva é realizada sobre o sistema auxiliar na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. A projeção em $|0\rangle$ ($|1\rangle$) com probabilidade de sucesso p_j (de falha $1 - p_j$) transforma o estado $|\psi_j\rangle$ em $|\varsigma_j\rangle$ ($|\phi_j\rangle$). Os estados $\{|\varsigma_j\rangle\}$ são ortogonais entre si e podem ser perfeitamente discriminados através de uma medição projetiva. Já os estados $\{|\phi_j\rangle\}$ são linearmente dependentes, ainda mais não ortogonais que os iniciais, e como visto na subseção 3.3.1, não podem ser discriminados sem ambiguidade.

⁴Um conjunto de estados simétricos $\{|d_j\rangle\}_{j=1}^N$ gerando um espaço de Hilbert D -dimensional $\mathcal{H}_D$ é aquele que satisfaz a seguinte propriedade: $|d_j\rangle = \hat{U} |d_{j-1}\rangle = \hat{U}^{j-1} |d_1\rangle$, onde $|d_1\rangle = \hat{U} |d_N\rangle$ e $\hat{U} = \sum_{l=1}^D \exp(2\pi i l/N) |l\rangle \langle l|$.

Discriminação sem ambiguidade através do teorema de Naimark

Implementação física do protocolo de discriminação sem ambiguidade discutido na seção 3.3:

$$\hat{U} |\psi_j\rangle |a\rangle = \sqrt{p_j} |\varsigma_j\rangle |0\rangle + \sqrt{1-p_j} |\phi_j\rangle |1\rangle \quad (3.18)$$

Sucesso (projeção em $|0\rangle$)

$$\{|\psi_j\rangle\} \xrightarrow{p_j} \{|\varsigma_j\rangle\}$$

$$\langle \varsigma_i | \varsigma_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

Falha (projeção em $|1\rangle$)

$$\{|\psi_j\rangle\} \xrightarrow{1-p_j} \{|\phi_j\rangle\}$$

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle \neq \delta_{ij}$$

Um caso particularmente instrutivo é o de dois estados equiprováveis, para o qual Ivanovic, Dieks e Peres [80–82] produziram uma solução analítica. Sejam $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$ não ortogonais entre si, gerando o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_s$, e preparados com probabilidade $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$. A otimização do problema (ver subseção 3.3.1) consiste na minimização da probabilidade de falha $p_?$. A menor probabilidade de falha define a maior probabilidade de sucesso que é conhecida como o *limite Ivanovic-Dieks-Peres* (IDP), dada por:

$$\begin{aligned} p_s &= 1 - p_? \\ &= 1 - |\langle d_+ | d_- \rangle|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Essa é a maior probabilidade com que vamos conseguir identificar os estados $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$. É interessante notar que para estados ortogonais $p_s = 1$ e para estados idênticos $p_s = 0$, o que é esperado. A figura 3.2 é uma representação da transformação (3.18) para os estados $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$. Se esses estados representam os marcadores de caminho de um interferômetro, a equação (3.19) representa a probabilidade com que será possível distinguir os dois caminhos sem qualquer erro. Dessa forma, a probabilidade ótima de sucesso é também uma medida de distinguibilidade dos caminhos. Nesse sentido, em analogia à distinguibilidade de Englert [equação (2.51)], vamos definir a distinguibilidade IDP D_{IDP} exatamente como na equação (3.19). Como mostra a equação (2.50), a visibilidade é dada pelo módulo do produto interno entre os estados dos marcadores, $|\langle d_- | d_+ \rangle|$, e é independente da estratégia de identificação dos caminhos. Dessa forma, apenas realizando uma soma linear desses quantificadores, vemos que

$$V + D_{\text{IDP}} = |\langle d_+ | d_- \rangle| + 1 - |\langle d_+ | d_- \rangle| = 1. \quad (3.20)$$

Isso mostra que nossa capacidade de discriminar sem ambiguidade entre estados não ortogonais dos marcadores é complementar à visualização de interferência. É possível notar que embora a relação de dualidade (3.20) não exiba a mesma forma quadrática da Dualidade Englert-Greenberger-Yasin, as duas expressões parecem compartilhar os mesmos conceitos fundamentais.

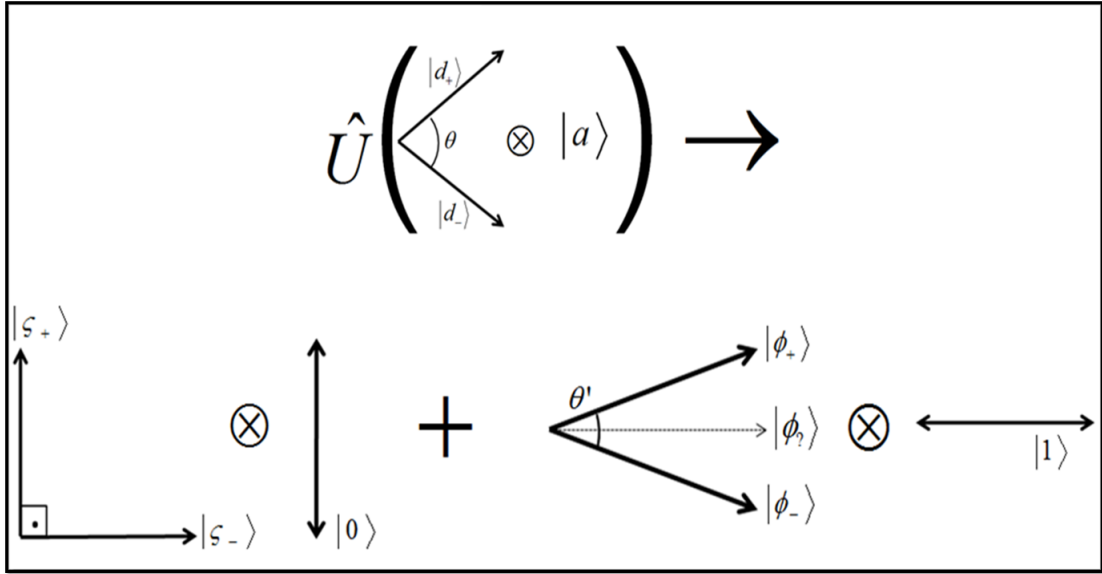


Figura 3.2: Representação do procedimento sumarizado na caixa 3.3.2 para o cenário IDP. Os estados não ortogonais $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$ são mapeados probabilisticamente num conjunto ortogonal $\{|zeta_+\rangle, |zeta_-\rangle\}$ ou num conjunto ainda mais não ortogonal $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle\}$. Na transformação ótima, representando o limite IDP, o caso de falha implica em ambos os estados $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle\}$ sendo transformados em $|\phi_?\rangle$.

3.4 Discriminação com erro mínimo

Em vista do preço que devemos pagar para realizar a tarefa de discriminação sem ambiguidade (ver subseção 3.3.1), é interessante buscar estratégias diferentes. Além disso, existem aplicações que exigem respostas conclusivas sempre [84], o que motiva essa busca. Se vamos rejeitar a ocorrência de resultados inconclusivos, consequentemente caímos na impossibilidade de não cometer erros quando os estados são não ortogonais. Para cada resultado, não existe a resposta “não sei”. Precisamos sempre tomar uma decisão quanto ao estado que gerou o resultado. Nesse sentido, surge uma pergunta: como decidir se um resultado é devido à detecção do estado que esperávamos?

3.4.1 Teste de hipóteses

O primeiro a responder essa pergunta foi Carl W. Helstrom [12] na década de 70. Seu trabalho pretendia aplicar à mecânica quântica algumas ferramentas comuns em teoria da comunicação de sinais. Em particular, ele pretendia mostrar como poderia ser frutífero considerar medições quânticas como um processo de decisão entre alternativas de estados. Esse processo de decisão é conhecido como *teste de hipóteses* e se refere a um procedimento estatístico que procura escolher uma alternativa dentre várias outras [85]. De forma geral, formulamos hipóteses sobre a presença de um fenômeno e, baseado num conjunto de resultados, decidimos se uma hipótese é verdadeira. Existem vários exemplos da aplicação de um teste de hipóteses, dos mais variados tipos: podemos submeter a teste uma pessoa que diz ter habilidades telecinéticas, e definir uma regra de decisão que

confirma ou não a hipótese de que a pessoa tem essa habilidade⁵. Analogamente, uma equipe médica pode formular um teste de hipóteses sobre a presença de uma doença. E o exemplo que nos interessa aqui: podemos formular hipóteses sobre estados quânticos baseado nos resultados de medições. Definindo uma regra de decisão, optamos por um dos estados. Esse último exemplo será o assunto desta seção, tanto no contexto de duas hipóteses (ou dois estados), quanto de múltiplas hipóteses, e principalmente como esse procedimento se relaciona ao problema de extrair informação de caminho dos estados de marcadores quando esses não são perfeitamente distinguíveis.

3.4.2 Estrutura de um teste de hipóteses binário

A estrutura de um teste de hipóteses, com duas ou mais hipóteses, pode ser descrita em linhas gerais da seguinte forma:

- Formulam-se hipóteses sobre a solução de um problema.
- Utiliza-se uma regra de decisão que determina qual das hipóteses deve ser escolhida para um conjunto de resultados.
- Otimiza-se uma figura de mérito da regra de decisão para obter o maior número de escolhas corretas.

Num teste de hipóteses binário, formulam-se duas hipóteses⁶: H_0 e H_1 . Como indicado em [86], o objetivo é encontrar uma regra de decisão que relaciona os resultados dos testes com as hipóteses H_0 e H_1 . No caso de nosso interesse, os resultados são ocasionados por processos probabilísticos. Assim, é importante definir três tipos de probabilidade: $P(H_0|H_1)$, a probabilidade de decidir pela hipótese H_0 quando a hipótese H_1 é verdadeira; $P(H_1|H_0)$, a probabilidade de decidir pela hipótese H_1 quando a hipótese H_0 é verdadeira; $P(H_j|H_j)$ com $j = 0, 1$, isto é, a probabilidade de decidir por H_j quando H_j é verdadeira. As probabilidades $P(H_0|H_1)$ e $P(H_1|H_0)$ representam erros, enquanto a probabilidade $P(H_j|H_j)$ representa acertos [86].

No contexto do teste de hipóteses, existem várias regras de decisão, algumas presentes em [12, 85]. Aqui, porém, vamos destacar uma regra presente em [12] que seguiu da proposta do matemático e pastor presbiteriano Thomas Bayes [87]: assinalamos um número, chamado de *custo*, à cada decisão errada. Com isso, adotamos uma estratégia em que a hipótese escolhida (H_0 ou H_1 , no caso binário) é aquela que minimiza o custo médio C_B [75], levando em conta que a probabilidade a priori de ocorrência de cada hipótese é η_j . Em vista da pergunta inicial da seção, estamos, agora, em condições de relacionar o teste de hipóteses ao problema de discriminação de estados quânticos.

⁵Embora esse exemplo acrescente um pequeno alívio cômico ao texto, existem nomes mundialmente conhecidos de pessoas que dedicaram grande parte de sua vida na investigação desse tipo de alegação.

⁶Em estatística, elas são chamadas de hipótese nula e hipótese alternativa, respectivamente [12, 85, 86].

3.4.3 Teste de hipóteses quântico

Seguindo a revisão de Chefles [75] da solução proposta por Helstrom [12] para o problema de discriminação de estados quânticos não ortogonais quando rejeitamos resultados inconclusivos, vamos considerar um conjunto de N estados $\{\hat{\rho}_j\}_{j=1}^N$. Nossa tarefa é identificar qual estado foi preparado a partir de um resultado obtido. De acordo com o procedimento listado na subseção 3.4.2, dado um resultado ω_j , vamos fazer a hipótese de que a ocorrência foi devido à detecção do estado $\hat{\rho}_j$, o qual foi preparado com probabilidade a priori η_j . Conforme discutido na seção 3.1, se os estados são não ortogonais é impossível identificá-los sem cometer alguns erros⁷. Em analogia às probabilidades sobre as hipóteses na subseção 3.4.2, definimos $P(\omega_k|\hat{\rho}_j)$ como a probabilidade de que o resultado ω_k tenha sido obtido quando o estado preparado foi $\hat{\rho}_j$, enquanto $P(\omega_j|\hat{\rho}_j)$ é a probabilidade de que ω_j tenha sido obtido quando o estado preparado foi $\hat{\rho}_j$. Naturalmente, identificamos $P(\omega_k|\hat{\rho}_j)$ como probabilidade de erro, enquanto $P(\omega_j|\hat{\rho}_j)$ é a probabilidade de acerto. Importante mencionar que, para cada estado $\hat{\rho}_j$, as probabilidades obedecem a relação de completeza

$$\sum_{k=1}^N P(\omega_k|\hat{\rho}_j) = 1, \quad (3.21)$$

que nos diz que cada estado preparado irá produzir algum resultado com probabilidade 1. A probabilidade média de acerto P_A é dada por

$$P_A = \sum_{j=1}^N \eta_j P(\omega_j|\hat{\rho}_j). \quad (3.22)$$

Assim, a probabilidade média de erro será

$$P_E = 1 - P_A = 1 - \sum_{j=1}^N \eta_j P(\omega_j|\hat{\rho}_j). \quad (3.23)$$

Aplicando a regra de decisão destacada na subseção 3.4.2, podemos construir o teste de hipóteses quântico. Como mencionado em [12] e também em [75], dado o resultado ω_k , o custo de fazer a hipótese de que o estado preparado foi $\hat{\rho}_k$, quando, na verdade, o estado preparado⁸ foi $\hat{\rho}_j$ é C_{kj} , enquanto o custo de uma hipótese correta C_{jj} é nulo. Portanto, o custo médio C_B de optar por hipóteses erradas é dado por

$$C_B = \sum_{j,k=1}^N \eta_j C_{kj} P(\omega_k|\hat{\rho}_j). \quad (3.24)$$

Na subseção 3.4.2, vimos que uma estratégia para otimizar o número de hipóteses cor-

⁷Isto é, já que vamos exigir que toda medição seja conclusiva.

⁸Situação essa que ocorre com probabilidade $P(\omega_k|\hat{\rho}_j)$, como definido anteriormente.

retas é escolher as hipóteses que minimizam o custo médio [12, 75]. Levando em conta a relação de completeza (3.21), quando o custo C_{kj} de cada hipótese errada em (3.24) for o mesmo e igual a 1, $C_B = P_E$, e, portanto, a estratégia de minimização do custo médio em (3.24) é equivalente à minimização da probabilidade média de erro (3.23), como notado em [75]. Com as probabilidades sendo fornecidas pela regra de Born [equação (3.8)] em mecânica quântica, reescrevemos a equação (3.23) como

$$P_E = 1 - \sum_{j=1}^N \eta_j \operatorname{tr}(\hat{\Pi}_j \hat{\rho}_j). \quad (3.25)$$

Holevo [88] e Yuen [89] demonstraram que, para minimizar a probabilidade média de erro, uma medição de N resultados definida pelos elementos de POVM $\{\hat{\Pi}_j\}_{j=1}^N$ precisa satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_j [\eta_j \hat{\rho}_j - \eta_k \hat{\rho}_k] \hat{\Pi}_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^N \eta_k \hat{\Pi}_k \hat{\rho}_k - \eta_j \hat{\rho}_j &\geq 0, \quad \forall j, k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nesse caso, o teste de hipóteses quântico implementa um processo conhecido na literatura como *discriminação com erro mínimo* [77]. Assim como outras estratégias de discriminação, a discriminação com erro mínimo também esbarra na dificuldade de se obter soluções analíticas. Apenas alguns casos são conhecidos, como o de dois estados (puros ou mistos) com probabilidades a priori arbitrárias [12] e o de N estados simétricos equiprováveis [90, 91]. Também como no caso sem ambiguidade, a estratégia de discriminação com erro mínimo foi derivada independentemente do contexto de complementaridade.

3.4.4 O limite de Helstrom e a distinguibilidade de Englert

Quando nos restringimos a apenas duas hipóteses, representando a identificação de dois estados puros não ortogonais $|d_+\rangle$ e $|d_-\rangle$, preparados com probabilidades η_+ e η_- , a probabilidade média de erro mínima P_{EM} é dada por [12]:

$$P_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta_+\eta_- |\langle d_+ | d_- \rangle|^2} \right). \quad (3.27)$$

A probabilidade média de acerto ótima $P_{A(\text{ótima})}$, portanto, será

$$P_{A(\text{ótima})} = 1 - P_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_+\eta_- |\langle d_+ | d_- \rangle|^2} \right). \quad (3.28)$$

Esse valor ótimo para discriminação dos estados é conhecido como *limite de Helstrom*. Para preparações equiprováveis ($\eta_+ = \eta_- = \frac{1}{2}$), teremos

$$P_{A(\text{ótima})} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - |\langle d_+ | d_- \rangle|^2} \right). \quad (3.29)$$

Olhando para o segundo termo entre parênteses, reconhecemos nele a distinguibilidade de Englert para estados puros do marcador, como mostrado na expressão (2.51). De fato, com o auxílio da equação (2.51), temos

$$P_{A(\text{ótima})} = \frac{1}{2}(1 + D). \quad (3.30)$$

Fazendo também uma analogia entre o limite de Helstrom e a verossimilhança máxima dada na equação (2.48), consideremos o caso em que os marcadores são descritos por estados puros não ortogonais $\hat{\rho}_D^{(+)} = |d_+\rangle \langle d_+|$ e $\hat{\rho}_D^{(-)} = |d_-\rangle \langle d_-|$. Nessa situação, a verossimilhança máxima é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ótima}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \text{tr}_D \left\{ \left| \hat{\rho}_D^{(+)} - \hat{\rho}_D^{(-)} \right| \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - |\langle d_- | d_+ \rangle|^2} \right) \\ &= P_{A(\text{ótima})}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dessa forma, vemos que Englert implementou um processo de discriminação com erro mínimo. A aplicação do formalismo proposto por Helstrom nos permite formular a hipótese de que um clique no detector foi devido a um estado particular (associado a um dos caminhos no interferômetro) e chegar exatamente às mesmas conclusões de Englert em [64]. Conforme discutido na subseção 2.3.2, a retrodição dos caminhos é feita escolhendo-se o caminho que mais contribui para a detecção do SQE. Por exemplo, vamos considerar que o estado (3.2) é produzido pelo interferômetro da figura 2.7. Com o sistema de detecção implementando medições na base $\{H, V\}$, um clique no detector 1 pode ser devido a um SQE vindo tanto do caminho 1, quanto 2. Apesar disso, um SQE vindo pelo caminho 2 com polarização vertical é o que mais contribui para a frequência de cliques. Nessa situação, faz-se a hipótese de que um clique no detector 1 é devido a um SQE vindo pelo caminho 2. Estaremos errados 25% das vezes. Como demonstrado experimentalmente em [51], essa contribuição para os cliques depende da base de medição, e a base que consideramos até aqui, $\{H, V\}$, é sub-ótima para a tarefa de identificar o caminho do SQE (linha pontilhada na figura 2.8). Por outro lado, a estratégia de Englert consiste em maximizar a verossimilhança em (2.47), o que é equivalente a maximizar a probabilidade de acerto P_A [ver equações (3.30) e (3.31)]. Para isso, deve-se encontrar uma medição que otimize o processo. Em [51], essas medições ótimas, cujos resultados estão na figura 2.8 (linha contínua), são realizadas pelo sistema de detecção implementando medições projetivas na base $\left\{ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{4} \right\}$,

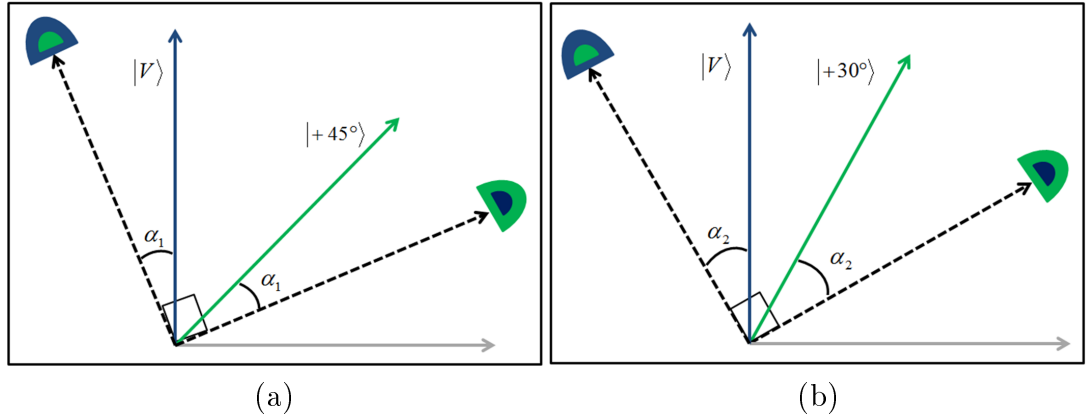


Figura 3.3: Bases ótimas fornecidas pela estratégia de discriminação com erro mínimo. Essas bases foram usadas no teste experimental da dualidade Englert-Greenberger-Yasin [51] para fornecer os dados da curva contínua na figura 2.8. Na figura (a), projeções na base $\{\sin(3\pi/8)|H\rangle + \cos(3\pi/8)|V\rangle, \sin(-\pi/8)|H\rangle + \cos(-\pi/8)|V\rangle\}$ discriminam entre $|V\rangle$ e $|+45^\circ\rangle$ de forma ótima. Enquanto na figura (b), projeções na base $\{\sin(\pi/3)|H\rangle + \cos(\pi/3)|V\rangle, \sin(-\pi/6)|H\rangle + \cos(-\pi/6)|V\rangle\}$ discriminam entre os estados $|V\rangle$ e $|+30^\circ\rangle$ de forma ótima.

onde φ_1 e φ_2 representam os ângulos de polarização da luz nos caminhos 1 e 2, respectivamente. Notando que a maximização de P_A (que é equivalente à maximização da verossimilhança) é equivalente à minimização da probabilidade de erro P_E em (3.23), reiteramos que a estratégia de Englert é equivalente à estratégia de discriminação com erro mínimo, a qual fornece exatamente a mesma medição ótima: projeções em estados ortogonais localizados simetricamente ao redor dos estados de polarização φ_1 e φ_2 [74]. Isso é ilustrado na figura 3.3.

As equações (3.30) e (3.31) também confirmam uma nota de rodapé em [92] sobre a relação entre o custo médio C_B mínimo e a verossimilhança ótima no trabalho de Englert⁹. Em [92] é afirmado que, usando a notação adotada neste trabalho, $\mathcal{L}_{\text{ótima}} = 1 - C_{B(\text{mínimo})}$. Uma vez que $C_B = P_E$ na derivação das equações (3.30) e (3.31), então $C_{B(\text{mínimo})} = P_{\text{EM}}$. Dessa forma, $1 - C_{B(\text{mínimo})} = P_{A(\text{ótima})} = \mathcal{L}_{\text{ótima}}$, conforme a equação (3.30), confirmando a relação apresentada¹⁰. Para completar a analogia, Englert obteve a expressão ótima para a verossimilhança (2.48) de forma geral (isto é, estados puros e mistos com probabilidades a priori arbitrárias) em termos da distância do traço [ver equação (2.59)]. As referências [12, 94, 95] oferecem uma relação entre essa última e a discriminação com erro mínimo, derivando uma expressão idêntica à $1 - \mathcal{L}_{\text{ótima}}(\hat{O})$, com essa última dada na equação (2.59). Mais uma vez, corroborando a relação entre a

⁹O processo de minimização do custo médio C_B no teste de hipóteses binário quando as probabilidades a priori são iguais também é chamado de teste da verossimilhança máxima [86], o que pode explicar o uso do termo por Englert.

¹⁰Apenas como forma de curiosidade e de corroborar a relação entre a distinguibilidade e a discriminação com erro mínimo, uma estratégia em que um custo negativo igual a -1 é assinalado para hipóteses corretas, usado para recompensar essas hipóteses, e nulo para hipóteses erradas, também é uma estratégia equivalente à discriminação com erro mínimo, e é discutida em [12, 93].

distinguiabilidade de Englert e essa estratégia de discriminação de estados não ortogonais. Além disso, o uso do termo *distinguiabilidade* já reflete essa relação, uma vez que a tarefa de discriminação também é referida na literatura como *distinção* e *distinguiabilidade* de estados [81, 83, 96].

3.5 Discriminação com confiança máxima

3.5.1 Uma família de estratégias

A essa altura é desnecessário dizer como a discriminação de estados não ortogonais não é algo tão trivial quanto poderia parecer à primeira vista. Apesar disso, é uma tarefa de grande importância para nós, uma vez que a interação entre o marcadores de caminho e o SQE pode codificar a informação de caminho em estados não ortogonais. Até agora, abordamos o problema de duas formas: nós exigimos que a extração de informação a partir dos estados do marcador fosse sem ambiguidade (3.11), isto é, não cometemos nenhum erro ($P_E = 0$). Vimos, porém, que isso é possível somente se os estados são linearmente independentes e se implementamos medições generalizadas que admitem resultados inconclusivos, os quais ocorrem com probabilidade $p_?$. Em caso de sucesso (ver caixa 3.3.2), estaremos plenamente confiantes de que identificamos o estado corretamente. Por outro lado, se rejeitarmos a ocorrência de resultados inconclusivos, isto é, $p_? = 0$, não podemos escapar de cometer alguns erros, e o melhor que podemos fazer é construir uma medição obedecendo as condições (3.26), a qual identifica os estados com probabilidade média de erro mínima. Croke *et al* [97] propuseram uma estratégia de discriminação que tem $p_? = 0$ e $P_E = 0$ como casos particulares, mas com a vantagem de que os estados a serem discriminados podem ser linearmente dependentes. Isso quer dizer que ao identificar um estado, não estaremos plenamente confiantes de que acertamos ($P_E \neq 0$) e ainda há uma probabilidade não nula de obter resultados inconclusivos ($p_? \neq 0$). Isso motiva a pergunta: qual é a máxima confiança possível em identificar um estado corretamente?

Para responder à pergunta levantada, consideremos N estados não ortogonais $\{\hat{\rho}_j\}_{j=1}^N$ preparados com probabilidade $\{\eta_j\}_{j=1}^N$. Podemos quantificar a confiança através da probabilidade condicional $P(\hat{\rho}_j|\omega_j)$. Usando a regra de Bayes e as probabilidades dadas pela regra de Born (3.8), teremos:

$$P(\hat{\rho}_j|\omega_j) = \frac{P(\hat{\rho}_j)P(\omega_j|\hat{\rho}_j)}{P(\omega_j)} = \frac{\eta_j \text{tr}(\hat{\Pi}_j \hat{\rho}_j)}{\text{tr}(\hat{\Pi}_j \hat{\rho})}, \quad (3.32)$$

onde $\hat{\rho} = \sum_i \eta_i \hat{\rho}_i$ é a matriz densidade a priori do sistema. A expressão (3.32) representa a probabilidade $P(\hat{\rho}_j|\omega_j)$ de que dado o resultado ω_j , o estado preparado foi $\hat{\rho}_j$. Se $P(\hat{\rho}_j|\omega_j) = 1 \ \forall \ j = 1, \dots, N$, estamos plenamente confiantes de que o resultado ω_j foi devido à detecção do estado $\hat{\rho}_j$, o que representa o cenário de discriminação sem ambiguidade. Fora desse caso particular, nosso interesse aqui é maximizar $P(\hat{\rho}_j|\omega_j)$,

isto é, encontrar o operador $\hat{\Pi}_j$ que maximize essa probabilidade (confiança) para cada estado do conjunto individualmente. Para estados puros, essa tarefa é facilitada com o *ansatz* [97]:

$$\hat{\Pi}_j = c_j \hat{\rho}^{-1} \hat{\rho}_j \hat{\rho}^{-1}. \quad (3.33)$$

Quando os operadores da equação (3.33) são implementados de modo que a confiança, quantificada pela equação (3.32), é maximizada para cada elemento $\hat{\Pi}_j$ do conjunto POVM, implementamos um protocolo conhecido na literatura como *discriminação com confiança máxima*. É interessante notar a liberdade existente na escolha das constantes c_j : uma vez que essa escolha não tem efeito sobre a equação (3.32), existe uma família de estratégias, cada uma determinada pela escolha de c_j , que discriminam os estados $\hat{\rho}_j$ com confiança máxima. Assim como a discriminação sem ambiguidade é um caso particular das estratégias com confiança máxima [$P(\hat{\rho}_j|\omega_j) = 1 \ \forall \ j$], quando as constantes c_j que definem os elementos de POVM $\hat{\Pi}_j$ na expressão (3.33) são escolhidas de maneira que a confiança (3.32) é a mesma para todos os estados $\hat{\rho}_j$ e, além disso, $\sum_{j=1}^N \hat{\Pi}_j = \hat{I}$, estamos num cenário de discriminação com erro mínimo. Dessa forma, os cenários conhecidos, discriminação sem ambiguidade e com erro mínimo, ficam bem estabelecidos como casos particulares da estratégia introduzida em [97].

3.5.2 Otimização da discriminação com confiança máxima

Fora dos cenários particulares discutidos acima, nosso interesse é não apenas maximizar a confiança $P(\hat{\rho}_j|\omega_j)$ em (3.32), mas também minimizar $p_?$, que é obtida através de $\hat{\Pi}_?$ dado pela equação (3.15), com os elementos de POVM $\hat{\Pi}_j$ dado pelo *ansatz* (3.33). Nesse caso, da família de estratégias que definem medições com confiança máxima, vamos escolher aquela que também oferece a menor probabilidade de resultados inconclusivos. Como observado em [97], nossa tarefa é escolher as constantes que definem os elementos da expressão (3.33) de maneira a minimizar a probabilidade de resultados inconclusivos $p_?$:

$$\min \{p_? = \text{tr}(\hat{\Pi}_? \hat{\rho})\}, \quad \text{sujeito a} \quad \hat{\Pi}_? \geq 0. \quad (3.34)$$

Se $p_?$ é a menor probabilidade de resultados inconclusivos possível e os elementos de POVM são dados por (3.33), implementamos um protocolo ótimo de discriminação com confiança máxima. Dessa forma, podemos também entender esse protocolo como uma generalização da discriminação sem ambiguidade para estados linearmente dependentes. Mais uma vez, esse protocolo também foi desenvolvido independentemente do contexto de complementaridade.

3.6 Considerações finais

Como conclusão deste capítulo, notamos como a discriminação de estados quânticos não ortogonais não é um termo acessório no estudo da complementaridade entre informação

de caminho e visibilidade de interferência. Antes, ela é um dos aspectos essenciais no estabelecimento de relações quantitativas, bem como na compreensão do significado físico da distinguibilidade dos caminhos. Nesse sentido, podemos notar também como o formalismo do teste de hipóteses é fundamental nesse papel: ele nos permite visualizar a equivalência entre a distinguibilidade de Englert e o limite de Helstrom. Essa equivalência, explorada aqui explicitamente e também de forma associativa, aparece na literatura em afirmações bastante modestas, geralmente em notas de rodapé ou de forma implícita no texto de alguns trabalhos [51,92,94,98]. Tendo isso em mente, olhar para o trabalho de Englert à luz do limite de Helstrom nos oferece um terreno sólido para interpretar o significado da distinguibilidade: ela é um quantificador da capacidade que temos de discriminar estados quânticos não ortogonais. Como essa tarefa (de discriminar estados não ortogonais) depende da estratégia empregada, essa interpretação nos convida a entender o conceito da distinguibilidade de Englert a outros protocolos de discriminação. Isso também torna mais claro a complementaridade entre a distinguibilidade IDP D_{IDP} na equação (3.20) e a visibilidade (2.50). O conteúdo físico da distinguibilidade IDP é o mesmo empregado na distinguibilidade de Englert, diferindo apenas pela estratégia adotada. Nesse caso, não é surpresa que D_{IDP} e V estivessem amarrados por uma relação de dualidade, embora essa dualidade não esteja numa forma quadrática como a dualidade Englert-Greenberger-Yasin. Apesar disso, a equação (3.20) nos motiva a investigar formas de distinguibilidade baseada em outras estratégias, como a descrita na seção 3.5.

Capítulo 4

Dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos

4.1 Problemas não solucionados em complementaridade

Uma breve retrospectiva

Antes de entrarmos no assunto deste capítulo, cabe uma pequena retrospectiva para situar nossa próxima discussão neste trabalho como um todo. Olhando para os dois primeiros capítulos, vimos que, entre o debate Einstein-Bohr (seção 1.1) e o trabalho de Wootters e Zurek (seção 1.2), a discussão da complementaridade em interferômetros de dois caminhos saiu de domínios extremos para domínios intermediários. A preocupação não era mais se a obtenção de informação de caminho impedia a produção de um padrão de interferência, mas sim qual quantidade dessa informação estava associada a qual visibilidade do padrão de interferência. Duas formas distintas de disponibilização da informação de caminho determinaram os dois ramos da complementaridade estudados. Assimetrias no experimento nos permitiam prever qual caminho seria mais populado (seção 2.1), enquanto marcadores de caminho, os quais foram essenciais no problema do apagador quântico (seção 2.2), nos permitiam retrodizer o caminho do SQE¹ no interferômetro baseado no resultado de uma medição (seção 2.3). O primeiro ramo, das predições, deu origem à dualidade Greenberger-Yasin entre a preditibilidade e a visibilidade a priori [equação (2.10)], enquanto o segundo ramo, das medições, deu origem à dualidade Englert-Greenberger-Yasin entre a distinguibilidade e a visibilidade a posteriori [(2.53)]. Dessa forma, para interferômetros de dois caminhos, esses trabalhos foram os principais responsáveis pela análise quantitativa da complementaridade.

Embora essa retrospectiva tenha um tom de “fechamento”, podemos citar pelo menos dois problemas conceituais em complementaridade que até hoje não são completamente

¹Relembrando, um sistema quântico (elétron, fóton, nêutron, átomo, etc.) entrando num interferômetro.

compreendidos.

Mecanismos por trás da Complementaridade

Bohr, e mais tarde Feynman, entendiam que, no contexto do experimento de fenda dupla, os fatores incontrolláveis que impediam medições arbitrariamente precisas de posição e momento, o que é descrito pelas relações de incerteza de Heisenberg, eram o mecanismo que gera a observação da complementaridade. Por esse motivo, Einstein propôs o experimento de fenda dupla com recuo, estudado na seção 1.1, tendo em mente a eliminação desses fatores (e, conseqüentemente, a participação das relações de incerteza), permitindo que informação de caminho estivesse disponível sem o custo do desaparecimento da interferência, dessa forma, frustrando a observação da complementaridade. Como foi discutido, Bohr consegue recuperar a participação das relações de incerteza nesse problema, permitindo que a complementaridade entre informação de caminho e visibilidade de interferência fosse observada. Já em alguns trabalhos do capítulo 2, é possível notar a intenção de se compreender a complementaridade independentemente das relações de incerteza. De fato, o apagador quântico de SEW [17], discutido na seção 2.2, aborda o emaranhamento entre o SQE e os marcadores (ou detectores) de caminho como o papel fundamental na observação da complementaridade, sem a necessidade de recorrer às relações de incerteza. Isso levantou um grande debate sobre o mecanismo fundamental por trás da relação de troca entre informação de caminho e visibilidade de interferência: quem é mais fundamental, a complementaridade ou as relações de incerteza? Alguns trabalhos que tomam uma posição quanto a essa pergunta podem ser vistos em [99–103]. Recentemente, uma nova contribuição foi dada a esse debate. Coles, Kaniewski e Wehner demonstraram a equivalência entre dualidades interferométricas (representação quantitativa da complementaridade) e relações de incerteza, quando essas são formuladas em termos de relações de incerteza entrópicas [35]. Isso talvez não encerre o debate, mas é uma contribuição relevante em prol da unificação das duas abordagens. Embora esse seja um tópico muito interessante, não é o foco deste trabalho. Dessa forma, não vamos investigar esse debate mais a fundo do que esta breve apresentação do estado do problema.

Tentativas de generalização de dualidades interferométricas

O segundo problema que permanece sem uma solução definitiva é o da generalização das dualidades interferométricas para interferômetros de múltiplos caminhos. Um dos fatores complicadores é a dificuldade de se obter soluções analíticas para a distinguibilidade ou mesmo uma definição plausível para a visibilidade nesse cenário. Conforme estudado no capítulo 3, se interpretarmos a distinguibilidade como a capacidade de discriminar (através de uma determinada estratégia) os estados quânticos que disponibilizam a informação de caminho, a inexistência de soluções analíticas gerais para os casos em que o número de estados é $N > 2$ explica a ausência de uma distinguibilidade generali-

zada. De maneira semelhante, a generalização da visibilidade para interferômetros de múltiplos caminhos também aguarda soluções.

Vários trabalhos manifestaram a intenção de produzir dualidades interferométricas nesse contexto. Já no período entre a dualidade Greenberger-Yasin [32] e a dualidade Englert-Greenberger-Yasin [64], Jaeger *et al* [34] tentaram propor uma forma para a distinguibilidade em interferômetro de múltiplos caminhos, mas reconheceram que não tinham idéia de como obter soluções para a visibilidade em cenários mais gerais. Talvez a tentativa mais importante, e uma das mais citadas na literatura, seja a de Dürr [104]. Ele propôs uma generalização para a complementaridade num regime preditivo (isto é, generalizações da preditibilidade P e da visibilidade a priori V_0), assim como também uma generalização do trabalho de Englert [64]. Em ambos os casos, Dürr derivou dualidades interferométricas. Pouco tempo depois, Bimonte e Musto [105] aplicaram a generalização de Dürr para a distinguibilidade e a visibilidade num interferômetro de três caminhos, onde os estados tanto do SQE quanto dos marcadores são puros. O problema proposto por Bimonte e Musto mostrou que a generalização de Dürr permitia que a aquisição de informação de caminho e a visibilidade aumentassem ou diminuíssem simultaneamente. Isso representava uma séria dificuldade para a validade da proposta de Dürr para a distinguibilidade e a visibilidade generalizadas, uma vez que esse comportamento violava a noção intuitiva de complementaridade, onde o aumento de uma das quantidades implica em diminuição da outra, quando os estados são puros [como observado pela relação (2.52) no caso de interferômetros de dois caminhos].

Outros autores também ofereceram candidatos para a distinguibilidade e a visibilidade em interferômetros de múltiplos caminhos [70, 92, 106, 107], embora nenhuma resposta definitiva tenha sido dada. Uma das principais dificuldades de todos esses trabalhos era encontrar um quantificador análogo à visibilidade, e que ainda estivesse relacionado à interferência de forma intuitiva. Nesse sentido, este capítulo procura começar apresentando uma recente proposta de quantificação da coerência de estados quânticos no contexto de teoria de recursos [108]. Em seguida, veremos como o recurso coerência se relaciona às estratégias de discriminação de estados não ortogonais definidas no capítulo 3, apresentando alguns passos em direção à obtenção de dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos. Finalmente, no mesmo espírito de Bimonte e Musto, olhamos particularmente para um interferômetro de três caminhos a fim de obter alguns *insights* sobre o problema de generalização das dualidades interferométricas.

4.2 Coerência como recurso: uma generalização da visibilidade?

Tentar definir o papel da coerência na física (ou mesmo em outras ciências) é certamente uma tarefa difícil, uma vez que ela é uma propriedade que permeia diversos campos

de estudo. Apesar disso, podemos destacar seu aspecto “subversivo” de protagonizar revoluções e inovações nesses campos. Podemos citar sua atuação na discussão sobre a natureza da luz, levando à teoria ondulatória do eletromagnetismo. Nos primeiros passos da teoria quântica, a coerência liderou também a discussão sobre a natureza da matéria e, mais uma vez, da luz, levando à ruptura dos conceitos clássicos de onda e partícula. Mais tarde, ela também se mostrou uma poderosa ferramenta para explorar novas tecnologias e aplicações inovadoras, como em computação quântica, circuitos fotônicos, metrologia, fenômenos de transporte em biologia molecular, etc. Ainda hoje é tema de pesquisa científica, por exemplo, o papel da coerência no entendimento do limite clássico da física quântica. A lista de presença da coerência em diversos temas parece interminável, e neste capítulo ainda vamos estudar uma nova e recente abordagem da coerência, tendo em vista o progresso que foi feito nos últimos anos ao abordar o emaranhamento da mesma forma.

Tentando nos aproximar de uma visão de teoria de recursos, podemos definir coerência como a propriedade física que, quando presente, nos permite explicar o aumento ou a supressão de eventos através de interferência entre alternativas [109]. Recentemente, Baumgratz, Cramer e Plenio [108] propuseram uma abordagem de teoria de recursos para a coerência que os permitiu quantificá-la de maneira rigorosa e fisicamente motivada. O propósito geral desta seção é apresentar os resultados de Baumgratz *et al* de modo que, mais à frente no capítulo, possamos estudar a relação entre o recurso coerência e as estratégias de discriminação de estados não ortogonais, da mesma forma que estudamos a relação entre a visibilidade e a distinguibilidade de Englert. Dessa forma, assim como fizemos com o teste de hipóteses na seção 3.4.2, aqui também é conveniente descrever de forma simples a estrutura geral de uma teoria de recursos quântica para que possamos compreender a definição de Baumgratz *et al* para a coerência.

4.2.1 Estrutura de uma teoria de recursos

Começando por definir os termos e conceitos essenciais, os recursos são propriedades físicas que permitem a execução de tarefas que, em sua ausência, não seriam possíveis. Dessa forma, uma abordagem de teoria de recursos é composta, principalmente, de três ingredientes: estados que contêm os recursos, os estados livres (que não contêm os recursos) e as operações livres (que executam transformações sem a necessidade do recurso) [110]. Adicionalmente, uma preocupação comum nesse contexto é encontrar uma medida que informe a quantidade do recurso que está presente num dado sistema, permitindo definir uma eficiência para as tarefas a serem executadas quando o recurso for consumido. Nesse sentido, podemos estruturar a abordagem em três etapas:

- i. *Caracterização*: definem-se os estados com recurso e sem recurso.
- ii. *Manipulação*: definem-se as operações livres.
- iii. *Quantificação*: define-se uma medida do recurso.

A consequência mais frutífera da abordagem de teoria de recursos em informação quântica é a teoria do emaranhamento. Os estados são caracterizados em estados emaranhados (com recurso) e estados separáveis (sem recurso). A manipulação desses estados é feita através de LOCC² (operações livres). E a quantificação é feita por várias medidas, tais como a entropia de von Neumann e a concorrência [74]. Um exemplo de tarefa que só pode ser realizada através do consumo de emaranhamento é o teletransporte quântico [111].

4.2.2 Coerência quântica

Caracterização

De maneira análoga aos estados maximamente emaranhados e aos estados separáveis, Baumgratz *et al* caracterizam os estados relacionados à coerência em estados maximamente coerentes e estados incoerentes. Como eles observam [108], o primeiro passo para o desenvolvimento de uma teoria de recursos para a coerência é concordar quais são os estados que não possuem o recurso. Como vimos na seção 2.3, estados analisados em bases diferentes apresentavam padrões de interferência diferentes. Nesse sentido, vamos aqui fixar uma base para introduzir os estados incoerentes e maximamente coerentes.

Seja uma base ortonormal de referência $\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ gerando um espaço de Hilbert N -dimensional $\mathcal{H}$, onde os estados da base representam possíveis alternativas em que um sistema quântico pode se encontrar (como possíveis caminhos num interferômetro). Baumgratz *et al* [108] definem o conjunto incoerente $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}$ como sendo o conjunto de todas as matrizes densidade $\hat{\delta}$ diagonais nessa base. Dessa forma, os estados incoerentes são dados por

$$\hat{\delta} = \sum_{i=1}^N \delta_i |i\rangle \langle i|, \quad (4.1)$$

onde δ_i são seus autovalores. Em contrapartida, os estados maximamente coerentes são definidos por

$$|\psi_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle, \quad (4.2)$$

os quais correspondem a uma superposição igualmente ponderada entre todas as alternativas. Com essas definições, qualquer estado que na base $\{|i\rangle\}$ não possa ser escrito como (4.1), nem como (4.2), será um estado parcialmente coerente.

Manipulação

Definidos os estados, nosso próximo passo é definir as operações sobre eles. Em mecânica quântica, as operações são representadas pelos operadores de Kraus $\hat{A}_j$ (ver nota 2 no capítulo 3), os quais satisfazem a relação de completeza $\sum_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j = \hat{I}$, e atuam sobre os estados de modo que $\hat{\rho} \rightarrow \sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger$ [50, 74, 94]. As operações livres propostas

²Do inglês, *local operations and classical communication*: operações locais e comunicação clássica.

pelos autores foram chamadas de *operações incoerentes*, que são aquelas que não geram o recurso coerência³. Eles distinguem duas classes de operações incoerentes: (I) as operações completamente positivas e que preservam traço $\Phi_{\text{CPPT}}(\hat{\rho}) = \sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger$. E (II) as operações que admitem subseleção de resultados de medições. Nesse caso, cada resultado acontece com probabilidade $p_j = \text{tr}(\hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger)$ e o estado associado a esse resultado é $\hat{\rho}_j = \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger / p_j$ [108]. Isso quer dizer que, conhecendo individualmente cada resultado, podemos obter conhecimento sobre a coerência em cada medição. A característica mais importante dessas duas classes de operações é dada por

$$\hat{A}_j \mathcal{I} \hat{A}_j^\dagger \subset \mathcal{I} \quad \forall j. \quad (4.3)$$

Esse é um requerimento fundamental dessa abordagem. Ele garante que, tendo ou não acesso a cada resultado j , não seria possível concluir que alguma coerência tenha sido gerada numa transformação global do tipo $\hat{\rho} \rightarrow \sum_j \hat{A}_j \hat{\rho} \hat{A}_j^\dagger$ satisfazendo (4.3), caso o estado inicial seja incoerente [equação (4.1)].

Quantificação

Finalmente, a etapa da estrutura que mais nos importa, uma vez que a abordagem de Baumgratz *et al* pode contribuir significativamente com toda a discussão deste trabalho sobre dualidades interferométricas. Os autores propõem medidas de coerência de modo que possamos identificar a quantidade desse recurso que está presente num estado quântico. Para tal, eles exigem que qualquer medida válida de coerência obedeça a algumas condições. Seja C , o qual identificamos como um quantificador de coerência, um funcional mapeando estados em números não negativos. Nesse caso,

1. $C(\hat{\delta}) = 0$ se, e somente se, $\hat{\delta} \in \mathcal{I}$ [ver equação (4.1)]. Isso implica que $C(\hat{\rho}) \neq 0$ sempre que $\hat{\rho}$ contém alguma coerência.
2. C não deve aumentar sob operações incoerentes [ver equação (4.3)].
 - (a) Monotonicidade sob operações incoerentes completamente positivas e que preservam traço: $C(\hat{\rho}) \geq C(\Phi_{\text{CPPT}}(\hat{\rho})) \quad \forall \Phi_{\text{CPPT}}$. Isto é, qualquer que seja a operação incoerente implementada sobre o estado, após essa transformação Φ_{CPPT} , o novo estado $\hat{\rho}'$ possui uma quantidade de coerência menor, ou no máximo igual, à quantidade de coerência do estado inicial $\hat{\rho}$.
 - (b) Monotonicidade em média sob medições seletivas: $C(\hat{\rho}) \geq \sum_j p_j C(\hat{\rho}_j)$ $\forall \{\hat{A}_j\}$ satisfazendo a condição (4.3). Isto é, em medições implementadas por operações incoerentes, em que somos capazes de conhecer resultados individuais e subseleccioná-los, a coerência média é sempre menor, ou no máximo igual à coerência inicial.

³Assim como as LOCC são as operações livres que não geram o recurso emaranhamento.

3. C não deve aumentar sob mistura de estados quânticos: $\sum_j p_j C(\hat{\rho}_j) \geq C(\sum_j p_j \hat{\rho}_j)$ $\forall \{\hat{\rho}_j\}$ e $p_j \geq 0$ tal que $\sum_j p_j = 1$. Isto é, nenhuma operação que leva o estado inicial para um estado mais misto deve aumentar a coerência.

Todas essas condições, presentes em [108], permitiram que os autores determinassem duas medidas válidas de coerência baseadas em medidas de distância. A idéia é que uma medida apropriada de coerência deveria ser associada à menor distância entre um estado $\hat{\rho}$ e o conjunto dos estados incoerentes $\mathcal{I}$:

$$C_{\mathcal{D}}(\hat{\rho}) = \min_{\hat{\delta} \in \mathcal{I}} \mathcal{D}(\hat{\rho}, \hat{\delta}), \quad (4.4)$$

onde $\mathcal{D}$ representa uma medida de distância. Como ponto mais importante desta seção, destacamos aqui apenas o resultado de Baumgratz *et al* de um quantificador da coerência presente num estado quântico baseado na norma⁴ l_1 , a qual satisfaz as condições (1–3). Conforme apresentado em [108], e levando em conta a expressão (4.4), esse quantificador é dado por

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \min_{\hat{\delta} \in \mathcal{I}} \left\| \hat{\rho} - \hat{\delta} \right\|_{l_1}. \quad (4.5)$$

Notamos que a minimização dessa expressão é alcançada para $\hat{\delta} = \sum_{i=1}^N \langle i | \hat{\rho} | i \rangle | i \rangle \langle i |$ [ver (4.1)], o que nulifica os termos na diagonal de $\hat{\rho}$ em (4.5) [16]. Dessa forma, a coerência baseada na norma l_1 é dada por

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N |\rho_{ij}|. \quad (4.6)$$

Assim como foi o caso das estratégias de discriminação de estados não ortogonais, a quantificação da coerência através da expressão (4.6) foi também derivada num contexto bem diferente da complementaridade.

4.2.3 Coerência e interferômetros de múltiplos caminhos

Ao contrário dos capítulos 1 e 2, em que todos os interferômetros eram de dois caminhos [fenda dupla (figuras 1.1, 1.2, 1.3, 2.3) e interferômetros de Mach-Zehnder (figuras 1.6, 2.5, 2.6, 2.7)], neste capítulo estamos preocupados com a situação geral em que um interferômetro possui um número arbitrário de caminhos. As figuras 4.1 e 4.2 mostram generalizações dos interferômetros estudados nos capítulos 1 e 2. Como vimos ao longo deste trabalho, um experimento interferométrico típico consiste numa disposição de caminhos por onde um SQE (sistema quântico de entrada, podendo ser fótons, elétrons, nêutrons, átomos, etc.) pode passar antes de atingir um sistema de detecção (como uma tela) na saída do interferômetro. Nessa saída, os caminhos se interceptam, permitindo que o sistema de detecção registre interferência. No capítulo 2 fizemos uso, princi-

⁴A norma l_1 de uma matriz $\hat{M}$ é definida por $\|\hat{M}\|_{l_1} = \sum_{i,j} |M_{ij}|$ [112].

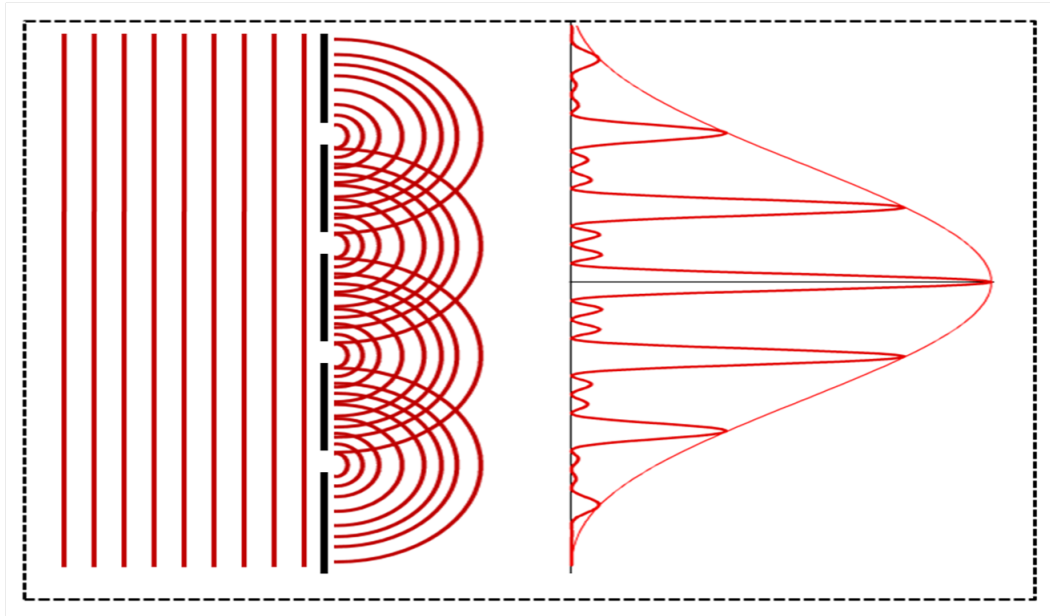


Figura 4.1: Ilustração de um interferômetro de fenda quádrupla exibindo um padrão de interferência característico.

palmente, da visibilidade para quantificar a qualidade do padrão de interferência. Em interferômetros de $N = 2$ caminhos, esse quantificador pode ser empregado conhecendo-se as intensidades máxima e mínima na saída do interferômetro. Para $N > 2$ caminhos, porém, não existe uma forma analítica bem definida para visibilidade. Como discutimos no início do capítulo, uma definição isenta de problemas para um análogo da visibilidade em interferômetros de múltiplos caminhos ainda permanece como questão aberta. Sabemos, no entanto, que o efeito de interferência está associado ao SQE poder ser escrito num estado de superposição dos caminhos, o que está intimamente relacionado à presença de termos não nulos fora da diagonal da matriz densidade do SQE⁵. Nesse sentido, o quantificador coerência de Baumgratz *et al* [108], definido em (4.6), parece bastante promissor.

Na seção seguinte, procuramos entender trabalhos que reportam os primeiros passos em direção à solução do prolongado problema da complementaridade entre informação de caminho e interferência num cenário de múltiplos caminhos. Nesse sentido, a quantificação da coerência definida na equação (4.6), juntamente das estratégias de discriminação, adquirem um papel central.

4.3 Coerência e discriminação sem ambiguidade

Vamos começar o estudo desses primeiros passos na determinação de relações de dualidades em interferômetros de muitos caminhos considerando o trabalho de Bera, Qureshi, Siddiqui e Pati [16]. Na figura 2.6, o divisor de feixes é responsável por separar o caminho dos feixes em dois, possibilitando que o SQE seja descrito por um estado de

⁵Não é coincidência que os termos fora da diagonal da matriz densidade são chamados de coerência.

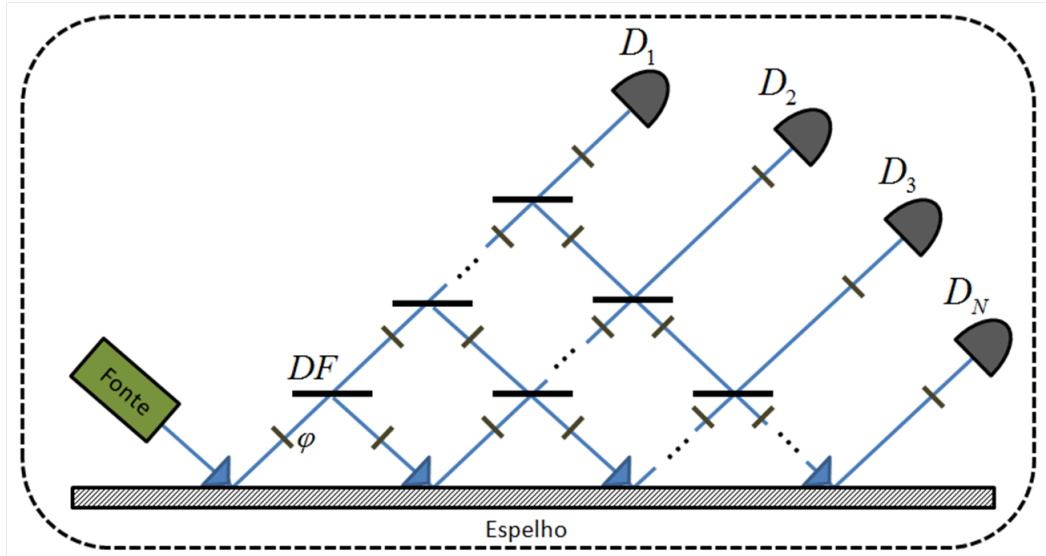


Figura 4.2: Ilustração de um interferômetro do tipo Mach-Zehnder com múltiplos caminhos. O SQE sai de uma fonte e encontra um conjunto de desafadores φ e divisores de feixe DF.

superposição dos dois caminhos, $+1$ e -1 . De forma semelhante, Bera *et al* [16] consideram um divisor de feixes, na entrada de um interferômetro, capaz de separar as componentes do feixe inicial em N caminhos, como ilustrado na figura 4.3.

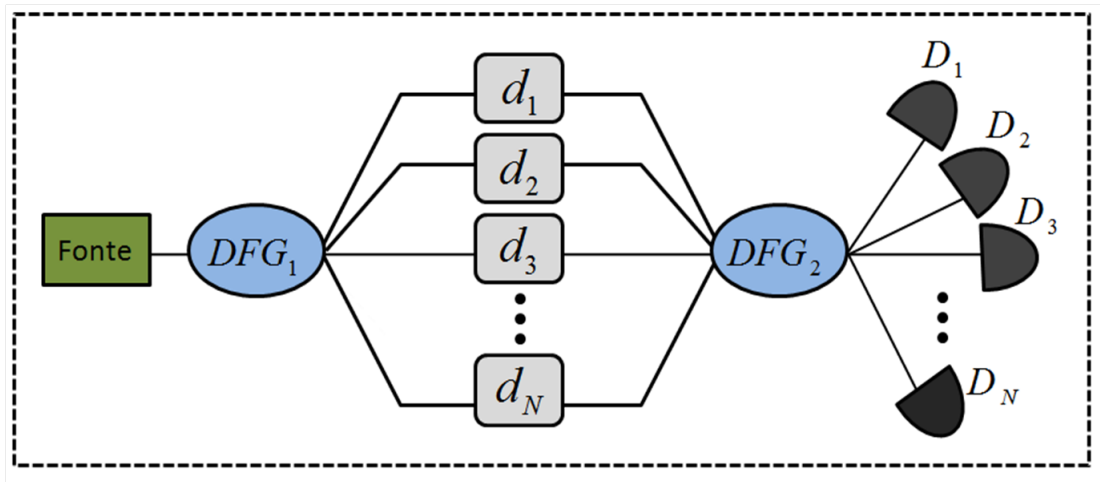


Figura 4.3: Ilustração de um interferômetro genérico de múltiplos caminhos. O SQE sai de uma fonte, encontra um divisor de feixes generalizado (DFG_1) capaz de preparar o SQE numa superposição de N caminhos. Marcadores em cada braço do interferômetro permitem a disponibilização de informação de caminho. Em seguida, um segundo divisor de feixes generalizado (DFG_2) recombina os caminhos, permitindo que o SQE possa exibir interferência. Nas N saídas do interferômetro são implementados N sistemas de detecção, os quais registram a presença do SQE na saída do interferômetro.

Assim, após o divisor de feixes, o SQE é descrito por um estado de superposição de

todos os N caminhos, dado por:

$$|\Psi_{\text{SQE}}\rangle = \sqrt{p_1}|1\rangle + \sqrt{p_2}|2\rangle + \dots + \sqrt{p_N}|N\rangle, \quad (4.7)$$

onde os estados $\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert N -dimensional e $\{p_i\}_{i=1}^N$ representa as probabilidades a priori de tomar um dos N caminhos. Dessa forma, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Especialmente nas subseções 2.2.3 e 2.3.2, estudamos como obter informação de caminho num experimento envolvendo medições sobre graus de liberdade de marcadores. Sem intenção de ser repetitivo, vamos trabalhar apenas em linhas gerais neste capítulo. A fim de extrair a informação de caminho, acoplamos ao interferômetro um sistema auxiliar, o qual faz o papel de marcador de caminho (ver figura 4.3). Inicialmente, os marcadores são preparados no estado $|d_0\rangle$. Após a interação entre o SQE e os marcadores, o sistema total é descrito por um estado emaranhado entre os graus de liberdade do SQE e os graus de liberdade do marcador:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_1}|1\rangle|d_1\rangle + \sqrt{p_2}|2\rangle|d_2\rangle + \dots + \sqrt{p_N}|N\rangle|d_N\rangle. \quad (4.8)$$

onde os estados do marcador $\{|d_i\rangle\}_{i=1}^N$ formam um conjunto sob o qual não há nenhuma restrição: esses estados podem ser ortogonais ou não e podem ser linearmente independentes ou dependentes. Esse é um ponto em que cabe uma observação: nos trabalhos discutidos nas seções 2.2, 2.3 e 2.4, demos total ênfase ao papel ativo dos marcadores de caminho. Porém, no tratamento da complementaridade em domínios intermediários, o qual é a motivação por trás da derivação de dualidades interferométricas, o armazenamento de informação de caminho em estados não ortogonais dos marcadores é o aspecto essencial. Esses trabalhos, porém, fazem pouca menção a essa condição, o que motivou a discussão do capítulo 3. Lá, vimos que o conceito implícito na distinguibilidade de Englert é a capacidade de distinguir os caminhos do interferômetro através de estratégias de discriminação de estados quânticos não ortogonais (os quais descrevem os marcadores). Dessa forma, assim como foi considerado em [16], vamos enfatizar que os estados dos marcadores na equação (4.8) são, em geral, não ortogonais entre si. A ortogonalidade é simplesmente um caso particular.

4.3.1 Norma l_1 da coerência como generalização da visibilidade

O trabalho de Bera *et al* [16] foi o primeiro no qual empregou-se a quantificação da coerência através da norma l_1 , dada na equação (4.6), no mesmo sentido em que se emprega a visibilidade. Como vimos no capítulo 2, num interferômetro de dois caminhos a visibilidade quantifica a qualidade do padrão de interferência, o qual é uma marca de que o SQE pode ser descrito num estado de superposição dos caminhos (e, portanto, a informação sobre um caminho particular está pouco ou nada disponível). Dessa forma, para contabilizar a exibição de interferência, é necessário que a matriz

densidade descrevendo o SQE tenha termos fora da diagonal não nulos⁶. De fato, um SQE num estado misto em que todos os termos fora da diagonal da matriz densidade são nulos não exibe qualquer interferência [51, 61]. Nesse sentido, é importante ressaltar que essa relação entre um quantificador da qualidade do padrão de interferência e os termos fora da diagonal do estado do SQE não é algo particular do trabalho de Bera *et al.* A grande maioria das tentativas de generalizar as dualidades interferométricas se baseiam numa relação desse tipo e, de modo geral, essa tem sido feito através da norma de Hilbert-Schmidt (ou norma l_2). Nesse caso, a coerência *seria* dada por

$$C_{l_2}(\hat{\rho}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N |\rho_{ij}|^2. \quad (4.9)$$

Como demonstrado em [108], essa *não* é uma medida válida de coerência. A norma de Hilbert-Schmidt não satisfaz a condição de monotonicidade sob operações incoerentes com medições seletivas (ver seção 4.2.2). Todas as medidas usadas como visibilidade generalizada em [70, 92, 106, 107] fizeram uso dessa norma, e portanto não representam generalizações válidas [15]. Nesse sentido, fazemos aqui uma distinção clara entre o trabalho de Bera *et al* e essas tentativas de generalização.

De forma análoga ao caso bidimensional (dois caminhos), conforme discutido na subseção 2.3.2, tomamos o traço parcial sobre os graus de liberdade dos marcadores no estado emaranhado (4.8) e obtemos

$$\hat{\rho}_{\text{SQE}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sqrt{p_i p_j} \langle d_j | d_i \rangle |i\rangle \langle j|, \quad (4.10)$$

o qual representa o estado do SQE apenas. Na abordagem de Englert, o traço parcial sobre os graus de liberdade dos marcadores na equação nos permitiu identificar a visibilidade [equações (2.42), (2.43) e (2.44)]. Num interferômetro de muitos caminhos, porém, identificar um termo semelhante à visibilidade não é uma tarefa trivial. Como vimos, não foi por falta de tentativas que uma generalização da visibilidade ficou desconhecida por muito tempo. Porém, como discutido na seção 4.2, recentemente Baumgratz *et al* [108] propuseram a norma l_1 como medida confiável do recurso coerência, a qual é definida na equação (4.6), onde onde $\rho_{ij} = \langle i | \hat{\rho} | j \rangle$ com $i \neq j$ são os elementos fora da diagonal de $\hat{\rho}$. Em [16] Bera *et al* utilizam uma versão normalizada dessa quantidade, dada por

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N |\rho_{ij}|, \quad (4.11)$$

a qual se encontra no intervalo $[0,1]$. Dessa forma, a partir de agora, *nesta seção*, quando nos referirmos à coerência, deve ser entendido como a coerência normalizada (4.11). A

⁶Para uma certa base representando os caminhos.

quantidade de coerência restante no estado reduzido do SQE após a interação com os marcadores de caminho [equação (4.10)] é dada por

$$\begin{aligned} C_{l_1} &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N |\langle i | \hat{\rho}_{\text{SQE}} | j \rangle| \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{p_i p_j} |\langle d_j | d_i \rangle|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De fato, vemos que a coerência só é nula quando todos os estados dos marcadores são ortogonais entre si. Após a interação, tanto o SQE, quanto os marcadores são partes não separáveis de um sistema total [equação (4.8)]. O estado reduzido da equação (4.10) não admite uma quantidade de coerência que seja independente dos estados dos marcadores. Esse comportamento não é uma surpresa: isso é exatamente o que acontece num interferômetro de dois caminhos. Na equação (2.50) também vemos que a visibilidade só é nula quando os estados dos marcadores são ortogonais.

É interessante ressaltar que os contextos das abordagens (coerência e complementaridade) são diferentes: de um lado, temos uma abordagem de teoria da informação para a coerência. Comumente, preocupa-se com o tipo de tarefa que pode ser executada sob o custo de consumir um recurso (no caso, a coerência). Do outro lado, preocupa-se em ganhar novos *insights* sobre os fundamentos da física quântica.

4.3.2 Um limite superior como distinguibilidade dos caminhos

Seguindo o mesmo raciocínio da subseção 3.2.3, cada estado $|d_i\rangle$ representando cada marcadores está associado a um dos N caminhos do interferômetro. Obter informação de caminho está associado à nossa capacidade de extrair informação desses estados. Em outras palavras, dizer por qual caminho um SQE passou é equivalente a executar uma tarefa de discriminação dos estados dos marcadores. Bera *et al* [16] propuseram utilizar o protocolo de discriminação sem ambiguidade para os N estados dos marcadores. Como vimos na seção 3.3, a principal característica desse protocolo probabilístico é que ele é dividido em dois passos: ou ele funciona, e podemos discriminar os estados sem erros; ou ele falha, e não podemos dizer nada. Como vimos também nessa mesma seção, mesmo para estados puros (descrevendo os marcadores) não existe uma solução analítica geral para esse problema, senão quando $N = 2$. Para contornar isso, Bera *et al* utilizaram um *limite superior* para a probabilidade de sucesso do protocolo, o qual é dado por [113]:

$$P_N^{(S)} \leq 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{p_i p_j} |\langle d_i | d_j \rangle|. \quad (4.13)$$

É importante notar que esse limite significa que, caso encontremos uma forma de discriminar entre N estados sem ambiguidade, para qualquer valor de N , a probabilidade de sucesso do protocolo não assume um valor superior àquele dado na equação (4.13). Por exemplo, quando $N = 2$ e $p_i = p_j = 1/2$, $P_N^{(S)}$ se reduz ao limite IDP [ver equação (3.19)], o qual é o limite superior para a discriminação sem ambiguidade de $N = 2$ estados. Isso não significa, porém, que o limite (4.13) possa ser alcançado para qualquer N ou qualquer conjunto de estados $\{|d_i\rangle\}$. Tudo o que a equação (4.13) diz é que esse limite não pode ser excedido. No entanto, como foi feito em [16], vamos assumir que, de fato, existe uma estratégia ótima que permite a igualdade em (4.13) ser alcançada. Dessa forma, a distinguibilidade generalizada D_{SA} quando adotamos o protocolo de discriminação sem ambiguidade para retrodizer o caminho do SQE no interferômetro de múltiplos caminhos será definida como:

$$D_{SA} \equiv 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{p_i p_j} |\langle d_i | d_j \rangle|. \quad (4.14)$$

4.3.3 Montando o quebra-cabeça

Estamos, agora, em posição de juntar todas as peças. A coerência C_{l_1} em (4.12) faz o papel de visibilidade generalizada, enquanto o limite superior (4.13) faz o papel de distinguibilidade generalizada D_{SA} , definida em (4.14). O principal resultado de Bera *et al* em [16] vem da comparação entre as equações (4.12) e (4.14): somando essas expressões, chegamos a uma relação de complementaridade entre essas duas quantidades definidas para estados puros:

$$C_{l_1} + D_{SA} = 1. \quad (4.15)$$

Esse é um resultado interessante de várias formas. O limite superior para a probabilidade de sucesso do protocolo de discriminação sem ambiguidade [equação (4.13)] foi demonstrado num contexto completamente diferente da definição de coerência como recurso. Além disso, esses dois resultados estão separados em cerca de treze anos. Do ponto de vista da complementaridade, a equação (4.15) captura o essencial: um aumento da coerência, implica numa redução da distinguibilidade, demonstrando a incompatibilidade entre a capacidade de um SQE exibir interferência e disponibilizar informação de caminho. A equação (4.15) ainda pode ser generalizada para estados mistos, como foi demonstrado em [16], levando à sua forma mais geral:

$$C_{l_1} + D_{SA} \leq 1. \quad (4.16)$$

Como podemos ver, Bera *et al* chegam a uma relação de dualidade linear, ao contrário da relação quadrática obtida por Englert (que, como já vimos, está relacionada a outra estratégia de discriminação) num interferômetro de dois caminhos.

Um caso conhecido

Quando $N = 2$ e os caminhos são equiprováveis ($p_i = p_j = 1/2$), sabemos que o limite superior (4.13) se reduz ao limite IDP [equação (3.19)]. Nesse caso, a distinguibilidade generalizada (4.14) se reduz ao que definimos na subseção (3.3.2) como distinguibilidade IDP D_{IDP} :

$$\begin{aligned} D_{\text{SA}} &= 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N=2} \sqrt{p_i p_j} |\langle d_i | d_j \rangle| \\ &= 1 - |\langle d_1 | d_2 \rangle| \\ &= D_{\text{IDP}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nesse cenário, a coerência (4.12) também se reduz à visibilidade [equação (2.50)]:

$$\begin{aligned} C_{l_1} &= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N=2} \sqrt{p_i p_j} |\langle d_j | d_i \rangle| \\ &= |\langle d_1 | d_2 \rangle| \\ &= V. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dessa forma, a equação (4.15) se torna

$$V + D_{\text{IDP}} = 1, \quad (4.19)$$

que é exatamente o que tínhamos encontrado na equação (3.20).

Finalmente, notamos que, dado que o limite empregado na equação (4.14) não representa a probabilidade ótima de discriminação sem ambiguidade para qualquer caso, é interessante fazer a investigação apresentada aqui, e originalmente proposta em [16], para estados simétricos equiprováveis, já que é um dos poucos casos com $N > 2$ que possui solução analítica [79]. Além disso, o protocolo empregado aqui só pode ser executado quando os estados são linearmente independentes [ver subseção 3.3.1], o que impõe algumas restrições sobre sistemas físicos que podem ser utilizados numa verificação experimental da dualidade⁷ (4.16). Isso sugere dois próximos passos: definir a distinguibilidade generalizada usando a estratégia de discriminação com confiança máxima (seção 3.5), que é válida para estados linearmente dependentes, e também a estratégia de discriminação com erro mínimo (seção 3.4). Embora essa última necessariamente implique em cometer alguns erros, ela é também válida para estados linearmente dependentes e oferece a melhor taxa média de acertos.

⁷Por exemplo, com um átomo de N níveis de energia fazendo o papel de marcador de caminho, podemos implementar o protocolo de discriminação sem ambiguidade sobre os estados do marcador. Isso não seria possível com polarização, a qual nos permitiria implementar apenas dois marcadores linearmente independentes (que é uma condição necessária para a aplicação desse protocolo).

4.4 Coerência e discriminação com erro mínimo

Como vimos na subseção 3.4.4, Englert [64] utilizou (sem mencionar explicitamente) o protocolo de discriminação com erro mínimo para derivar a forma da distinguibilidade para um interferômetro de dois caminhos. O uso desse protocolo, portanto, motiva a generalização de seu trabalho, tendo em vista as ferramentas desenvolvidas no contexto de discriminação de estados quânticos, o qual discutimos em parte no capítulo 3. Nesta seção, portanto, vamos discutir uma proposta de generalização das relações de dualidade para interferômetros de muitos caminhos feita por Bagan, Bergou, Cottrell e Hillery [15], a qual é inspirada no trabalho de Bera *et al* [16].

Uma vez que esta seção é completamente análoga à seção 4.3, vamos começar do ponto em que o SQE, permitido passar por N caminhos no interferômetro, interage com marcadores de caminho, e ambos são encontrados no estado emaranhado da equação (4.8). Tomando o traço parcial sobre os graus de liberdade do marcador na equação (4.8), obtemos o estado reduzido do SQE após a interação, o qual é dado pela equação (4.10).

Bagan *et al* [15] introduziram a coerência normalizada de uma forma ligeiramente diferente daquela presente na equação (4.11). Aqui, e ao longo desta seção, ela é dada por

$$X = \frac{1}{N} C_{l_1}(\hat{\rho}), \quad (4.20)$$

onde $C_{l_1}(\hat{\rho})$ é pela na equação (4.6). Isso não representa nenhuma alteração, senão no fato de que a coerência normalizada X se encontra no intervalo $[0, \frac{N-1}{N}]$. Calculando a coerência X restante no estado (4.10), temos

$$X = \frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \sqrt{p_i p_j} |\langle d_j | d_i \rangle|. \quad (4.21)$$

Mais uma vez notamos que a não ortogonalidade dos estados do marcador implica numa coerência não nula restante no estado reduzido do SQE. Tomando o traço parcial sobre os graus de liberdade do SQE na equação (4.8), obtemos o estado reduzido dos marcadores:

$$\hat{\rho}_D = \sum_{i=1}^N p_i \hat{\rho}_i, \quad (4.22)$$

onde $\hat{\rho}_i = |d_i\rangle \langle d_i|$. Em [64], Englert utilizou esses estados (para o caso de dois marcadores em estados equiprováveis) para, através da estratégia de discriminação com erro mínimo, obter a distinguibilidade. Como vimos, para o caso de Englert, esse é um problema com solução analítica geral. Isso, porém, não é possível aqui, em que estamos interessados em N estados com probabilidades a priori arbitrárias. Dessa forma, precisamos de outra abordagem para obter a distinguibilidade.

4.4.1 Outro limite superior como distinguibilidade dos caminhos

Como discutimos nas subseções 2.3.2 e 3.4.4, Englert notou que a extração da informação de caminho armazenada nos marcadores dependia da estratégia de discriminação adotada. Quando essa estratégia é ótima, ela representa a distinguibilidade dos caminhos. Bagan *et al* [15], a fim de estender a distinguibilidade de Englert para o caso de um interferômetro de N caminhos, utilizam também o protocolo de discriminação com erro mínimo (ver seção 3.4). Nesse protocolo, não existe a resposta “não sei”. Sempre que um detector clica, nós decidimos por qual caminho o SQE passou. Como vimos, devido à não ortogonalidade dos estados dos marcadores, vamos cometer alguns erros nessa estratégia. Num caso geral, incluindo N estados mistos, a probabilidade média de erro é oferecida pela equação (3.23). A otimização dessa quantidade nos permite discriminar entre os estados com uma probabilidade média de erro mínima. Como também vimos na subseção 3.4.3, o caso de dois estados com probabilidades a priori arbitrárias é o único que possui solução analítica geral [12], tendo sido implementada por Englert (ainda que de maneira implícita) no interferômetro de dois caminhos, como dissemos na subseção anterior. De maneira análoga à seção 4.3, Bagan *et al* [15] propuseram a utilização de um limite superior para a probabilidade média de acerto fornecida pelo protocolo de discriminação com erro mínimo. Até o ano de 2010, existiam oito derivações de limites superiores, dois dos mais recentes, os quais fazem referência aos demais, podem ser vistos em [114, 115]. Apesar disso, os autores ainda derivam um novo limite, o qual seria mais útil (para fins de comparação com a coerência) que os demais [15]. Assim, como derivado em [15], a probabilidade de identificarmos os estados dos marcadores corretamente é limitada por

$$P_{\text{EM}}^{(\text{A})} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \left\| \hat{\Lambda}_{ij} \right\|_{\text{Tr}}, \quad (4.23)$$

onde $\hat{\Lambda}_{ij} = p_i \hat{\rho}_i - p_j \hat{\rho}_j$ é conhecido como matriz de Helstrom e a norma $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$ é a norma do traço (ver nota 20). Para estados puros, esse termo é dado por [15]:

$$\left\| \hat{\Lambda}_{ij} \right\|_{\text{Tr}} = 2 \sqrt{\left(\frac{p_i + p_j}{2} \right)^2 - p_i p_j |\langle d_i | d_j \rangle|^2}. \quad (4.24)$$

Não nos interessa aqui entrar em detalhes sobre a prova desse novo limite superior, a qual pode ser encontrada em [15]. Olhando para a equação (4.23), é interessante notar que o primeiro termo representa uma aposta cega. Se somos incapazes de extrair qualquer informação de caminho, o melhor que podemos fazer é uma adivinhação. Nesse caso, estaremos certos $1/N$ vezes. Já o segundo termo representa exclusivamente o que podemos dizer sobre os caminhos quando fazemos medições. Dessa forma, a quantidade $P_{\text{EM}}^{(\text{A})} - 1/N$ é uma medida do limite superior do ganho de informação de caminho obtido através de medições, comparado a uma aposta cega. Além disso, se $N = 2$ e os caminhos

são equiprováveis ($p_i = p_j = 1/2$), a norma do traço da matriz de Helstrom $\|\hat{\Lambda}_{ij}\|_{Tr}$ dada para estados puros na equação (4.24) é igual à distinguibilidade de Englert para estados puros dos marcadores de caminho [equação (2.51)]. Nesse cenário, $P_{EM}^{(A)}$ na equação (4.23) se reduz ao limite de Helstrom dado na equação (3.30), que é um limite superior para $N = 2$, e também representa a verossimilhança máxima [equação (2.48)] calculada por Englert, que para estados puros é dada pela equação (3.31).

Conforme presente no trabalho de Bagan *et al*, é possível mostrar através das equações (4.21) e (4.23) que a relação entre $P_{EM}^{(A)} - 1/N$ e a coerência normalizada X é dada por

$$X^2 + \left(P_{EM}^{(A)} - \frac{1}{N}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2. \quad (4.25)$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade pelo termo do lado direito, temos

$$\left(\frac{X}{1 - 1/N}\right)^2 + \left(\frac{P_{EM}^{(A)} - 1/N}{1 - 1/N}\right)^2 \leq 1. \quad (4.26)$$

O primeiro termo do lado esquerdo dessa equação é exatamente igual ao quadrado da coerência normalizada C_{l_1} de Bera *et al* [16] definida na equação (4.11). O principal resultado de Bagan *et al* aparece quando definimos segundo termo do lado esquerdo de (4.26) como o quadrado de uma distinguibilidade generalizada. Se essa for definida como $D_{EM} \equiv \left(\frac{P_{EM}^{(A)} - 1/N}{1 - 1/N}\right)$, temos

$$C_{l_1}^2 + D_{EM}^2 \leq 1. \quad (4.27)$$

Esse resultado representa a proposta de Bagan *et al* para a generalização da quantificação da complementaridade em interferômetros de múltiplos caminhos. De forma similar à seção 4.3, para estados equiprováveis e $N = 2$, a coerência C_{l_1} se reduz à visibilidade, enquanto a distinguibilidade generalizada D_{EM} se reduz à distinguibilidade de Englert, como já comentamos. Dessa forma, a expressão (4.27) se reduz à familiar dualidade Englert-Greenberger-Yasin [equação (2.53)]. De fato, essa redução deveria ser uma condição necessária nesta seção, afinal Englert implementou um protocolo de discriminação com erro mínimo.

Como comentário final, notamos, mais uma vez, a complementaridade entre coerência e discriminação de estados quânticos não ortogonais. Tal como na seção 4.3, o limite superior empregado aqui não representa a probabilidade ótima de discriminação com erro mínimo para todos os casos. Representa somente a impossibilidade da existência de casos que excedam esse limite. Isso representa uma mudança curiosa em relação à dualidade EGY. Num interferômetro de dois caminhos, estados puros sempre saturam a desigualdade (2.53). Aqui, porém, podem existir estados puros que são discriminados com probabilidade média de acerto (probabilidade de sucesso) menor que o limite superior oferecido em (4.23) [em (4.13)]. Um conjunto de $N > 2$ estados puros pode

ser fisicamente menos distinguível do que o que é quantificado por D_{EM} (D_{SA}). Isso acontece porque a relação de dualidade se dá entre a coerência e os limites superiores, os quais não representam, necessariamente, a distinguibilidade física dos estados. Eles apenas nos dizem que essa distinguibilidade física não pode ser maior que esse limite. Isso certamente não acontece quando $N = 2$, porque o limite superior para esse caso (limite de Helstrom) é a solução analítica ótima para $N = 2$.

4.5 Coerência e discriminação de estados linearmente dependentes

Como última aplicação das estratégias de discriminação de estados quânticos não ortogonais, vamos utilizar os conceitos estudados até agora para o caso em que os estados dos marcadores de caminho são linearmente dependentes. Como já discutimos na seção 3.3, a estratégia de discriminação sem ambiguidade não é aplicável nesse caso. Isso nos deixa com a estratégia de erro mínimo (seção 3.4) e com a estratégia de confiança máxima (seção 3.5). Dessa forma, vamos procurar uma relação entre coerência e distinguibilidade generalizada quando essa está relacionada a cada uma dessas estratégias de discriminação. Para simplificar a análise e mostrar um exemplo concreto, vamos considerar um interferômetro de $N = 3$ caminhos equiprováveis cujos marcadores são descritos por estados simétricos. Tanto a estratégia de erro mínimo quanto de confiança máxima possuem soluções conhecidas nesse caso [97].

4.5.1 Um interferômetro de três caminhos com marcadores simétricos

Em um interferômetro de três caminhos, suponhamos que o estado do SQE e dos marcadores após a interação entre eles seja dado por

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_1} |1\rangle |d_1\rangle + \sqrt{p_2} |2\rangle |d_2\rangle + \sqrt{p_3} |3\rangle |d_3\rangle. \quad (4.28)$$

Vamos considerar aqui uma situação em que os três caminhos são equiprováveis ($p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$) e os estados marcadores dos caminhos, $|d_1\rangle$, $|d_2\rangle$ e $|d_3\rangle$, geram um espaço de Hilbert bidimensional. Em outras palavras, são estados linearmente dependentes. Essa situação representaria, por exemplo, o emprego de estados de polarização de um fóton como marcadores num interferômetro de três caminhos. Consideraremos também que os estados $\{|d_j\rangle\}$ são simétricos (ver nota 4 no capítulo 3) parametrizados por um

ângulo $\theta \in [0, \pi/4]$. Dessa forma

$$\begin{aligned} |d_1\rangle &= \cos(\theta) |\psi_1\rangle + \sin(\theta) |\psi_2\rangle, \\ |d_2\rangle &= \cos(\theta) |\psi_1\rangle + \exp(2i\pi/3) \sin(\theta) |\psi_2\rangle, \\ |d_3\rangle &= \cos(\theta) |\psi_1\rangle + \exp(-2i\pi/3) \sin(\theta) |\psi_2\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde os estados $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert bidimensional.

Após a interação entre o SQE e os marcadores de caminho, a coerência restante no SQE, calculada através das expressões (4.12), (4.28) e (4.29), será dada por

$$\begin{aligned} C_{l_1} &= \frac{1}{2} (|\cos^2(\theta) + \exp(-2i\pi/3) \sin^2(\theta)| \\ &\quad + |\cos^2(\theta) + \exp(2i\pi/3) \sin^2(\theta)|). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Com a coerência dada pela expressão acima, vamos analisar duas estratégias de discriminação dos estados dos marcadores de caminho [dados em (4.29)], enfatizando o papel dessas como distinguibilidade generalizada.

4.5.2 Distinguibilidade com erro mínimo

Como já foi comentado no início da seção, a estratégia de discriminação com erro mínimo é aplicável no contexto de estados linearmente dependentes. Para três estados simétricos [ver equações em (4.29)] e igualmente prováveis, a probabilidade média ótima de identificá-los corretamente é dada por $P_{\text{EM}}^{(A)} = \frac{1}{3}(1 + \sin(2\theta))$ [97]. Utilizando a definição de distinguibilidade com erro mínimo de Bagan *et al* [15], temos

$$D_{\text{EM}} \equiv \left(\frac{P_{\text{EM}}^{(A)} - 1/N}{1 - 1/N} \right) \xrightarrow{N=3} D_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \sin(2\theta). \quad (4.31)$$

Fazendo um gráfico das formas quadráticas, $C_{l_1}^2$ e D_{EM}^2 , das expressões (4.30) e (4.31), podemos analisar algumas características da relação de dualidade entre a coerência e a distinguibilidade com erro mínimo. Como podemos ver no gráfico 4.4, quando os marcadores são idênticos ($\theta = 0$), a coerência exibe seu valor máximo, 1. Quando, porém, os marcadores são maximamente distinguíveis ($\theta = \pi/4$), ainda existe coerência no sistema. Isso acontece devido ao fato dos marcadores serem não ortogonais. Embora sejam maximamente distinguíveis, isso não significa que a marcação do caminho é perfeita. Isso quer dizer que, com o emprego dos marcadores linearmente dependentes dados por (4.29), não existe uma interação entre o SQE e esses marcadores capaz disponibilizar toda a informação de caminho e, assim, reduzir a zero a coerência restante no SQE. Mesmo com uma estratégia ótima de extração da informação disponibilizada pelos marcadores, estaremos limitados a uma quantidade de informação compatível com uma

coerência não nula⁸ (e, portanto, veremos interferência). Também é possível notar que, mesmo utilizando um SQE e marcadores de caminho em estados puros, a relação (4.27) não é saturada nesse interferômetro de três caminhos. Como foi dito antes, a relação de dualidade (4.27) descreve a relação entre um limite superior e a coerência. O limite superior não representa a solução ótima de cada caso, apenas representa um valor que não pode ser ultrapassado. Quando olhamos para casos particulares (por exemplo, os três estados analisados aqui), esse limite pode não ser atingido. Aqui, resolvemos um caso particular de forma exata e verificamos a não saturação da desigualdade (4.27).

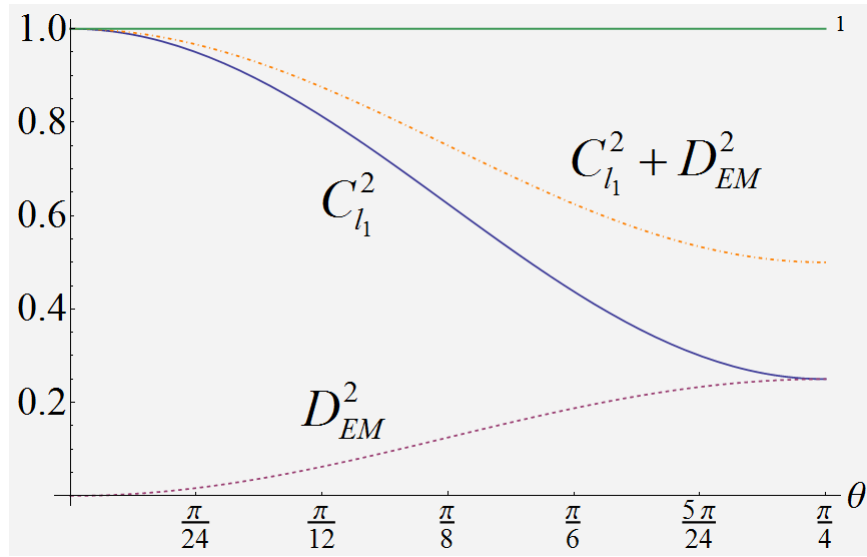


Figura 4.4: Relação quadrática entre a coerência $C_{l_1}^2$ (curva contínua na cor azul escuro) e a distinguibilidade com erro mínimo D_{EM}^2 (curva tracejada na cor roxo). A curva pontilhado-tracejada na cor laranja representa a soma desses quantificadores. Observamos que, mesmo com marcadores de caminho em estados puros, a soma não atinge 1.

4.5.3 Distinguibilidade com confiança máxima: uma tentativa

Tendo em vista os estados linearmente dependentes em (4.29), vamos também utilizar a estratégia de discriminação com confiança máxima estudado na seção 3.5. O primeiro passo desse protocolo é encontrar a confiança máxima com que podemos identificar os estados dos marcadores (4.29). Isto é, a probabilidade máxima $P(\hat{\rho}_j|\omega_j)$ [equação (3.32)] de que o estado era $\hat{\rho}_j$ quando uma medição com objetivo de identificá-lo entregou o resultado ω_j . Para estados simétricos equiprováveis, a confiança máxima é um valor calculável sem dificuldades a partir das equações (3.32) e (3.33), usando os estados $\hat{\rho}_j = |d_j\rangle\langle d_j|$ dados por (4.29). Nesse caso, teremos [97]

$$P_{\max}(\hat{\rho}_1|\omega_1) = P_{\max}(\hat{\rho}_2|\omega_2) = P_{\max}(\hat{\rho}_3|\omega_3) = \frac{2}{3}. \quad (4.32)$$

⁸Isto é, o máximo que uma estratégia ótima é capaz de fazer é nos dar acesso ao que está disponível. Ela não reduz a coerência.

Lembrando que o protocolo de discriminação com confiança máxima também pode ser dividido em sucesso e falha, na implementação dessa estratégia alguns resultados podem ser inconclusivos. Dessa forma, queremos não apenas identificar os marcadores com confiança máxima, mas queremos também obter o menor número possível de resultados inconclusivos. A menor probabilidade de falha na identificação dos marcadores equiprováveis (4.29), a qual pode ser obtida da expressão (3.34), será

$$p_? = \cos(2\theta). \quad (4.33)$$

Assim, com os marcadores podendo ser discriminados com confiança máxima e o número de resultados inconclusivos sendo o menor possível, somos capazes de implementar um protocolo ótimo de discriminação com confiança máxima.

A probabilidade média ótima de se identificar corretamente os estados dos marcadores de caminho nesse protocolo será dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{CM}}^{(A_{\text{ótima}})} &= \sum_{j=1}^3 p_j (1 - p_?) P_{\text{max}}(\hat{\rho}_j | \omega_j) \\ &= \frac{2}{3} (1 - \cos(2\theta)), \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde, nessa dedução, usamos as expressões (4.32) e (4.33), além de $p_j = 1/3 \forall j$. A expressão (4.34) é o limite superior para a probabilidade de acerto quando empregamos a estratégia de discriminação com confiança máxima para os estados em (4.29). Analogamente ao procedimento das seções 4.3 e 4.4, vamos definir a distinguibilidade dos caminhos como esse limite superior. Dessa forma,

$$D_{\text{CM}} \equiv P_{\text{CM}}^{(A_{\text{ótima}})} = \frac{2}{3} (1 - \cos(2\theta)). \quad (4.35)$$

Embora não tenha sido possível encontrar uma relação tão interessante quanto as expressões (4.16) e (4.27), o gráfico na figura 4.5 mostra como a coerência C_{l_1} restante no SQE [equação (4.30)] se relaciona à distinguibilidade D_{CM} [equação (4.35)]. O comportamento complementar entre a coerência C_{l_1} restante no SQE e a distinguibilidade com confiança máxima é quase perfeito. Para qualquer ângulo, observamos um aumento na aquisição de informação de caminho acompanhado de uma redução de coerência. Além disso, a soma da coerência e a distinguibilidade com confiança máxima está muito próximo de 1, o que é esperado para marcadores de caminho descritos por estados puros. De fato, esse comportamento de não saturação também está presente nas dualidades (4.16) e (4.27), e vemos também no gráfico 4.4. Há, porém, uma dificuldade de interpretar o problema a partir de $\theta = \pi/6$, em que as curvas apresentam formatos visivelmente diferentes. Nesse regime aparece a objeção mais séria ao emprego da definição (4.35): o fato da soma $C_{l_1} + D_{\text{CM}}$ superar o valor 1. Se queremos quantificadores que realmente fazem o papel de visibilidade e distinguibilidade, o esperado é que houvesse uma

anti-correlação perfeita entre eles quando os marcadores de caminho são descritos por estados puros. Isto é, gostaríamos de observar o aumento de um sempre acompanhado da identicamente balanceada diminuição do outro, e vice-versa. A violação desse comportamento não captura a noção intuitiva de uma dualidade interferométrica. Dessa forma, isso nos impede de seguir em frente com essa definição, sendo necessária uma modificação adequada.

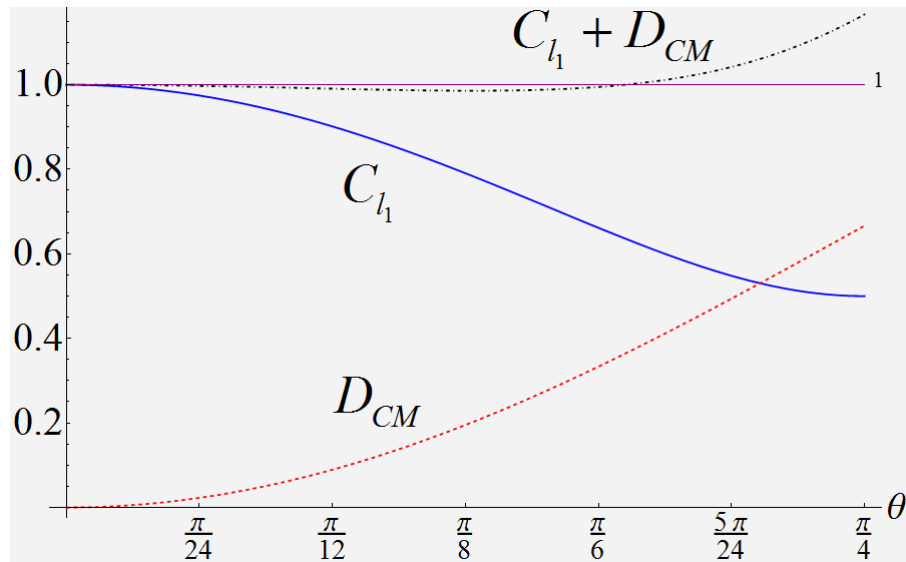


Figura 4.5: Relação entre a coerência C_{l_1} (curva contínua na cor azul) e a distinguibilidade com confiança máxima D_{CM} (curva tracejada na cor vermelho). A curva pontilhado-tracejada na cor preto representa a soma das duas quantidades. O comportamento complementar entre as duas quantidades não é rigorosamente satisfeito, a soma das quantidades exibe valores abaixo e acima de 1 (linha contínua na cor roxo). Ainda assim, existe uma forte correlação entre as quantidades, de modo que uma redução na coerência C_{l_1} é quase perfeitamente acompanhado de um aumento na distinguibilidade D_{CM} .

Como forma de concluir esta seção, notamos que embora o gráfico da figura 4.5 apresente comportamentos indesejáveis, ele também aponta para uma possível generalização do trabalho de Bera *et al* [16] para estados linearmente dependentes dos marcadores de caminho. A solução analítica deste problema também pode lançar uma luz mais clara sobre o fato das expressões (4.16) e (4.27) não serem saturadas para alguns estados puros. Isso também nos permite ter uma visão mais crítica a respeito da quantificação da coerência como visibilidade, uma vez que, com soluções analíticas, podemos ter uma idéia mais clara do papel exato de cada quantificador. Nesse sentido, podemos ver se a coerência exibe, de fato, as características desejáveis de uma visibilidade generalizada. Dessa forma, mais uma vez ressaltamos a importância de aplicar os resultados apresentados neste capítulo para estados simétricos equiprováveis.

4.6 Considerações finais

Finalmente, vemos neste capítulo como o problema de discriminação de estados quânticos não ortogonais é, mais uma vez, fundamental na discussão sobre complementaridade. No final do capítulo 2 levantamos a questão de que estados não ortogonais eram o aspecto essencial na derivação de dualidades interferométricas. Por conta disso, dedicamos a eles o capítulo 3, de modo que pudéssemos explorar as estratégias envolvidas na aquisição de informação quando os marcadores de caminho são descritos através desses estados. Neste capítulo, então, vemos que essas estratégias não apenas participaram de maneira essencial no desenvolvimento das dualidades interferométricas, mas ainda podem oferecer novos passos na compreensão de cenários mais gerais. Paralelamente, vemos também a importância da quantificação da coerência através da norma l_1 , permitindo a observação da relação entre a coerência e o limite superior da discriminação sem ambiguidade, abrindo caminho para novas propostas de generalização das dualidades interferométricas, como foi o caso de Bagan *et al* [15] com a estratégia de discriminação erro mínimo, e nossa análise da estratégia de discriminação com máxima confiança num interferômetro de três caminhos.

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas

Podemos ver, depois de tantas páginas, que complementaridade parece ser um assunto inesgotável. É realmente surpreendente a atenção em torno do assunto desde os seus primórdios, levando a uma literatura notadamente extensa. As referências que utilizamos aqui certamente não atingem todos os desdobramentos da complementaridade. Dessa forma, este trabalho não é uma revisão completa, nem definitiva, mas consiste numa abordagem que localiza o papel das estratégias de discriminação de estados quânticos não ortogonais no desenvolvimento de dualidades interferométrica. Como vimos no capítulo 2, a derivação da dualidade Englert-Greenberger-Yasin só é possível se os marcadores de caminho são descritos por estados não ortogonais. De fato, a descrição desses marcadores através de estados ortogonais é apenas um caso particular. Nesse sentido, embora esse último caso seja o mais drástico, a essência da complementridade em domínios intermediários introduzida no capítulo 1, caracterizada pela presença parcial de informação de caminho e interferência, é capturada apenas com marcadores em estados não ortogonais. Explorando essa idéia a fundo no capítulo 3, vimos que a distinguibilidade de Englert está intimamente relacionada ao limite de Helstrom. Dessa forma, relacionando a estratégia de Englert para apostar no caminho mais provável e o teste de hipóteses quântico, vimos que sua estratégia é equivalente à implementação do protocolo de discriminação de estados não ortogonais com erro mínimo, o que é mencionado na literatura apenas de forma sutil. Motivados por essa relação, estudamos diferentes estratégias de discriminação com o intuito de aplicá-las ao contexto de complementaridade. No capítulo 4, essa relação aparece de forma explícita e promissora. Com a introdução do recurso coerência, estudamos recentes trabalhos que se dirigem à obtenção de dualidades interferométricas em cenários de múltiplos caminhos. É interessante ressaltar, mais uma vez, como áreas que se desenvolveram de forma indiferente à complementaridade, agora contribuem com passos importantes na solução de um problema aberto há tanto tempo. Finalmente, no final do capítulo 4 discutimos a utilização do protocolo de discriminação com confiança máxima como distinguibilidade num interferômetro de três caminhos marcado por estados linearmente dependentes. Como vimos, embora a distinguibilidade com confiança máxima empregada nesse interferôme-

tro apresente comportamentos insatisfatórios, com as modificações adequadas pode ser possível transformar esse caso numa generalização do trabalho de Bera *et al* [16]. Mais uma vez, um passo natural parece ser aplicar todas as idéias do capítulo 4 ao caso de estados simétricos equiprováveis, o qual possui solução analítica. Como já foi dito, a obtenção de dualidades interferométricas nesse caso pode nos oferecer uma noção mais crítica dos quantificadores propostos. Além disso, um outro passo interessante seria buscar uma definição de distinguibilidade baseada em protocolos de discriminação entre conjuntos de estados quânticos. Nessa abordagem, aplicada ao interferômetro de N caminhos, poderíamos não ter informação sobre cada caminho individualmente, mas poderíamos ter alguma informação sobre um conjunto de caminhos. De que maneira a coerência responderia a esse tipo de informação? Uma definição geral de distinguibilidade para $N > 2$ caminhos não deveria incluir a noção de discriminação entre conjuntos de caminhos? Num tom de conclusão, a expectativa é a de que não apenas essas perguntas, mas a dissertação apresentada aqui, seja motivação para investigações que levem à realização de novos trabalhos.

Referências Bibliográficas

- [1] L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific (2014).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** *Physical Review* **47**, 777 (1935).
- [3] J. S. Bell. **On the Einstein Podolsky Rosen paradox.** *Physics* **1**, 195 (1964).
- [4] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. **Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories.** *Physical Review Letters* **23**, 880 (1969).
- [5] Y.-C. Liang, R. W. Spekkens e H. M. Wiseman. **Specker’s parable of the overprotective seer: A road to contextuality, nonlocality and complementarity.** *Physics Reports* **506**, 1 (2011).
- [6] W. Heisenberg, C. Eckart e F. C. Hoyt. *The physical principles of the quantum theory*. Chicago III, The University of Chicago Press (1930).
- [7] N. Bohr. **The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory.** *Nature* **121**, 580 (1928).
- [8] A. Luis. **Complementarity for Generalized Observables.** *Physical Review Letters* **88**, 230401 (2002).
- [9] N. Bohr. **Causality and Complementarity.** *Philosophy of Science* **4**, 289 (1937).
- [10] R. Ionicioiu, T. Jennewein, R. B. Mann e D. R. Terno. **Is wave–particle objectivity compatible with determinism and locality?** *Nature Communications* **5**, 3997 (2014).
- [11] J.-S. Tang, Y.-L. Li, C.-F. Li e G.-C. Guo. **Revisiting Bohr’s principle of complementarity with a quantum device.** *Physical Review A* **88**, 014103 (2013).

- [12] C. W. Helstrom. *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press (1976).
- [13] K. M. Fonseca-Romero, J. G. G de Oliveira, J. G. Peixoto de Faria e M. C. Nemes. Interference and which-state information for nonorthogonal states. *Physical Review A* **90**, 062102 (2014).
- [14] T. Qureshi, M. A. Siddiqui. Wave-particle duality in n-path interference. *arXiv:1605.02849*, 2016.
- [15] E. Bagan, J. A. Bergou, S. S. Cottrell e M. Hillery. **Relations between Coherence and Path Information**. *Physical Review Letters* **116**, 160406 (2016).
- [16] M. N. Bera, T. Qureshi, M. A. Siddiqui, A. K. Pati. **Duality of quantum coherence and path distinguishability**. *Physical Review A* **92**, 012118 (2015).
- [17] M. O. Scully, B. G. Englert e Herbert Walther. **Quantum optical tests of complementarity**. *Nature* **351**, 111 (1991).
- [18] P. A. Schilpp e A. Einstein. *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. Cambridge University Press (1949).
- [19] J. A. Wheeler e W. H. Zurek. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press (1983).
- [20] T. Young. **The Bakerian Lecture: Experiments and Calculations Relative to Physical Optics**. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **94**, 1 (1804).
- [21] W. Scheider. **Bringing one of the great moments of science to the classroom**. *The Physics Teacher* **24**, 217 (1986).
- [22] F. J. Belinfante. *Measurement and Time Reversal in Objective Quantum Theory*. American Physical Society (1975).
- [23] S. Dürr, T. Nonn e G. Rempe. **Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a ‘which-way’ experiment in an atom interferometer**. *Nature* **395**, 33 (1998).
- [24] C. Cohen-Tanoudji, B. Diu e F. Laloë. *Quantum Mechanics*. John Wiley (1977).
- [25] W. K. Wootters e W. H. Zurek. **Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr’s principle**. *Physical Review D* **19**, 473 (1979).
- [26] P. N. Kaloyerou. **On the Wootters-Zurek development of Einstein’s two-slit experiment**. *Foundations of Physics* **22**, 1345 (1992).

- [27] C. E. Shannon. **A Mathematical Theory of Communication**. *Bell System Technical Journal* **27**, 379 (1948).
- [28] A. Zeilinger. **Complementarity in neutron interferometry**. *Physica B+C* **137**, 235 (1986).
- [29] J. Summhammer, H. Rauch e D. Tuppinger. **Stochastic and deterministic absorption in neutron-interference experiments**. *Physical Review A* **36**, 4447 (1987).
- [30] D. M. Greenberger e A. W. Overhauser. **Coherence effects in neutron diffraction and gravity experiments**. *Reviews of Modern Physics* **51**, 43 (1979).
- [31] H. Rauch e J. Summhammer. **Static versus time-dependent absorption in neutron interferometry**. *Physics Letters A* **104**, 44 (1984).
- [32] D. M. Greenberger e A. Yasin. **Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer**. *Physics Letters A* **128**, 391 (1988).
- [33] A. Bramon, G. Garbarino e B. C. Hiesmayr. **Quantitative complementarity in two-path interferometry**. *Physical Review A* **69**, 022112 (2004).
- [34] G. Jaeger, A. Shimony e L. Vaidman. **Two interferometric complementarities**. *Physical Review A* **51**, 54 (1995).
- [35] P. J. Coles, J. Kaniewski e S. Wehner. **Equivalence of wave–particle duality to entropic uncertainty**. *Nature Communications* **5**, 5814 (2014).
- [36] R. Feynman, R. Leighton e M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics Vol III*. Addison Wesley, Reading (1965).
- [37] D. M. Greenberger. **The neutron interferometer as a device for illustrating the strange behavior of quantum systems**. *Reviews of Modern Physics* **55**, 875 (1983).
- [38] T. F. Gallagher. *Rydberg Atoms*. Cambridge University Press (1994).
- [39] D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté e M. D. Lukin. **Fast Quantum Gates for Neutral Atoms**. *Physical Review Letters* **85**, 2208 (2000).
- [40] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche. **A complementarity experiment with an interferometer at the quantum-classical boundary**. *Nature* **411**, 166 (2001).
- [41] T. Wilk, A. Gaëtan, C. Evellin, J. Wolters, Y. Miroshnychenko, P. Grangier e A. Browaeys. **Entanglement of Two Individual Neutral Atoms Using Rydberg Blockade**. *Physical Review Letters* **104**, 010502 (2010).

- [42] L. Isenhowe, E. Urban, X. L. Zhang, A. T. Gil, T. Henage, T. A. Johnson, T. G. Walker e M. Saffman. **Demonstration of a Neutral Atom Controlled-NOT Quantum Gate.** *Physical Review Letters* **104**, 010503 (2010).
- [43] H. Walther, B. T. H. Varcoe, B.-G. Englert e T. Becker. **Cavity quantum electrodynamics.** *Reports on Progress in Physics* **69**, 5 (2006).
- [44] S. Haroche e J.-M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons.* Oxford Graduate Texts (2006).
- [45] B. G. Englert, J. Schwinger e M. O. Scully. *New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics.* Barut, A. O. (1990).
- [46] M. O. Scully e Kai Drühl. **Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics.** *Physical Review A* **25**, 2208 (1982).
- [47] J. Wheeler. *Mathematical Foundations of Quantum Theory.* Academic Press (1978).
- [48] X.-S. Ma, J. Kofler e A. Zeilinger. **Delayed-choice gedanken experiments and their realizations.** *Reviews of Modern Physics* **88**, 015005 (2016).
- [49] V. Jacques, E. Wu, F. Grosshans, F. Treussart, P. Grangier, A. Aspect e J.-F. Roch. **Experimental Realization of Wheeler's Delayed-Choice Gedanken Experiment.** *Science* **315**, 966 (2007).
- [50] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge (2010).
- [51] P. D. D. Schwindt, P. G. Kwiat e B.-G. Englert. **Quantitative wave-particle duality and nonerasing quantum erasure.** *Physical Review A* **60**, 4285 (1999).
- [52] S. P. Walborn, M. O. T. Cunha, S. Pádua e C. H. Monken. **Double-slit quantum eraser.** *Physical Review. A* **65**, 033818 (2002).
- [53] R. Garisto e L. Hardy. **Entanglement of projection and a new class of quantum erasers.** *Physical Review A* **60**, 827 (1999).
- [54] G. Teklemariam, E. M. Fortunato, M. A. Pravia, T. F. Havel e D. G. Cory. **NMR Analog of the Quantum Disentanglement Eraser.** *Physical Review Letters* **86**, 5845 (2001).
- [55] M. S. Zubairy, G. S. Agarwal e M. O. Scully. **Quantum disentanglement eraser: A cavity QED implementation.** *Physical Review A* **70**, 012316 (2004).

- [56] T. Tsegaye, G. Björk, M. Atatüre, A. V. Sergienko, B. E. A. Saleh e M. C. Teich. **Complementarity and quantum erasure with entangled-photon states.** *Physical Review A* **62**, 032106 (2000).
- [57] L. Neves, G. Lima, J. Aguirre, F. A. Torres-Ruiz, C. Saavedra e A. Delgado. **Control of quantum interference in the quantum eraser.** *New Journal of Physics* **11**, 073035 (2009).
- [58] K. Kang. **Electronic Mach-Zehnder quantum eraser.** *Physical Review B* **75**, 125326 (2007).
- [59] A. Bramon, G. Garbarino e B. C. Hiesmayr. **Quantum Marking and Quantum Erasure for Neutral Kaons.** *Physical Review Letters* **92**, 020405 (2004).
- [60] Y. Aharonov e M. S. Zubairy. **Time and the Quantum: Erasing the Past and Impacting the Future.** *Science* **307**, 875 (2005).
- [61] B.-G. Englert. **Remarks on Some Basic Issues in Quantum Mechanics.** *Zeitschrift für Naturforschung A* **54**, 11 (2014).
- [62] L. Mandel. **Coherence and indistinguishability.** *Optics Letters* **16**, 1882 (1991).
- [63] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover Pubns (1989).
- [64] B. G. Englert. **Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality.** *Physical Review Letters* **77**, 2154 (1996).
- [65] J. Martinez-Linares e D. A. Harmin. **‘Quality’ of a which-way detector.** *Physical Review A* **69**, 062109 (2004).
- [66] V. Michálek e J. Soubusta M. Bula, K. Bartkiewicz, A. Černoch, D. Javůrek, K. Lemr. **Measuring evolution of a photon in an interferometer with spectrally resolved modes.** *Physical Review A* **94**, 052106 (2016).
- [67] T. Qureshi e R. Vathsan. **Einstein’s Recoiling Slit Experiment, Complementarity and Uncertainty.** *Quanta* **2**, 58 (2013).
- [68] A.-A. Jia, J.-H. Huang, T.-C. Zhang e S.-Y. Zhu. **Influence of losses on the wave-particle duality.** *Physical Review A* **89**, 042103 (2014).
- [69] N.-L. Liu, L. Li, S. Yu e Z.-B. Chen. **Duality relation and joint measurement in a Mach-Zehnder interferometer.** *Physical Review A* **79**, 052108 (2009).
- [70] B.-G. Englert e J. A. Bergou. **Quantitative quantum erasure.** *Optics Communications* **179**, 337 (2000).

- [71] J. A. Bergou. **Discrimination of quantum states.** *Journal of Modern Optics* **57**, 160 (2010).
- [72] J. Watrous. *Theory of quantum information.* University of Waterloo (2016).
- [73] S. Lang. *Álgebra Linear.* Graduate Texts in Physics (1987).
- [74] J. A. Bergou e M. Hillery. *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing.* Graduate Texts in Physics (2013).
- [75] A. Chefles. **Quantum state discrimination.** *Contemporary Physics* **41**, 401 (2000).
- [76] R. B. M. Clarke, A. Chefles, S. M. Barnett e E. Riis. **Experimental demonstration of optimal unambiguous state discrimination.** *Physical Review* **63**, 040305 (2001).
- [77] S. M. Barnett and S. Croke. **Quantum state discrimination.** *Advances in Optics and Photonics* **1**, 238 (2009).
- [78] A. Chefles. **Unambiguous discrimination between linearly independent quantum states.** *Physics Letters A* **239**, 339 (1998).
- [79] A. Chefles e S. M. Barnett. **Optimum unambiguous discrimination between linearly independent symmetric states.** *Physics Letters A* **223**, 339 (1998).
- [80] I.D. Ivanovic. **How to differentiate between non-orthogonal states.** *Physics Letters A* **123**, 257 (1987).
- [81] D. Dieks. **Overlap and distinguishability of quantum states.** *Physics Letters A* **126**, 303 (1988).
- [82] A. Peres. **How to differentiate between non-orthogonal states.** *Physics Letters A* **128**, 19 (1988).
- [83] G. Jaeger e A. Shimony. **Optimal distinction between two non-orthogonal quantum states.** *Physics Letters A* **197**, 83 (1995).
- [84] J. A. Bergou. **Quantum state discrimination and selected applications.** *Journal of Physics: Conference Series* **84**, 012001 (2007).
- [85] R. G. Gallager. *Stochastic Processes Theory for Applications.* Massachusetts Institute of Technology (2013).
- [86] A. Garzelli. **Material do curso Elaborazione Numerica dei Segnali II.** Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena.

- [87] Mr. Bayes e Mr. Price. **An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. .** *Philosophical Transactions* **53**, 370 (1773).
- [88] A. S. Holevo. **Statistical decision theory for quantum systems.** *Journal of Multivariate Analysis* **3**, 337 (1973).
- [89] H. Yuen, R. Kennedy, M. Lax. **Optimum testing of multiple hypotheses in quantum detection theory.** *IEEE Transactions on Information Theory* **21**, 125 (1975).
- [90] S. M. Barnett. **Minimum-error discrimination between multiply symmetric states.** *Physical Review A* **64**, 030303 (2001).
- [91] M. Ban. **Optimum measurements for discrimination among symmetric quantum states and parameter estimation.** *International Journal of Theoretical Physics* **36**, 1269 (1997).
- [92] G. Bimonte e R. Musto. **On interferometric duality in multibeam experiments.** *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 11481 (2003).
- [93] E. Andersson. **Optimal minimum-cost quantum measurements for imperfect detection.** *Physical Review A* **86**, 012120 (2012).
- [94] S. Barnett. *Quantum Information*. Oxford Master Series in Physics (2009).
- [95] D. Qiu. **Minimum-error discrimination between mixed quantum states.** *Physical Review A* **77**, 012328 (2008).
- [96] U. Herzog e J. A. Bergou. **Distinguishing mixed quantum states: Minimum-error discrimination versus optimum unambiguous discrimination.** *Physical Review A* **70**, 022302 (2004).
- [97] S. Croke, E. Andersson, S. M. Barnett, C. R. Gilson e J. Jeffers. **Maximum Confidence Quantum Measurements.** *Physical Review Letters* **96**, 070401 (2006).
- [98] G. Bimonte e R. Musto. **Complementarity, measurement and information in interference experiments.** *arXiv*, (2002).
- [99] P. Storey, S. Tan, M. Collett, D. Walls. **Path detection and the uncertainty principle.** *Nature* **367**, 626 (1994).
- [100] B.-G. Englert, M. O. Scully, H. Walther. **Complementarity and uncertainty.** *Nature* **375**, 6530 (1995).

-
- [101] E. P. Storey, S. M. Tan, M. J. Collett, D. F. Walls. **Complementarity and uncertainty.** *Nature* **375**, 368 (1995).
- [102] H. Wiseman, F. Harrison. **Uncertainty over complementarity?** *Nature* **377**, 584 (1995).
- [103] H. M. Wiseman, F. E. Harrison, M. J. Collett, S. M. Tan, D. F. Walls e R. B. Killip. **Nonlocal momentum transfer in welcher Weg measurements.** *Physical Review A* **56**, 55 (1997).
- [104] S. Dürr. **Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers.** *Physical Review A* **64**, 042113 (2001).
- [105] G. Bimonte e R. Musto. **Comment on “Quantitative wave-particle duality in multibeam interferometers”.** *Physical Review A* **67**, 066101 (2003).
- [106] M. Jakob e J. A. Bergou. **Complementarity and entanglement in bipartite qudit systems.** *Physical Review A* **76**, 052107 (2007).
- [107] B.-G. Englert, L. C. Kwek e W. Chee. **Wave-particle duality in multi-path interferometers: General concepts and three-path interferometers.** *International Journal of Quantum Information* **06**, 129 (2008).
- [108] T. Baumgratz, M. Cramer e M. B. Plenio. **Quantifying Coherence.** *Physical Review Letters* **113**, 140401 (2014).
- [109] F. Levi and F. Mintert. **A quantitative theory of coherent delocalization.** *New Journal of Physics* **16**, 033007 (2014).
- [110] F. G. S. L. Brandão e G. Gour. **Reversible Framework for Quantum Resource Theories.** *Physical Review Letters* **115**, 070503 (2015).
- [111] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters. **Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels.** *Physical Review Letters* **70**, 1895 (1993).
- [112] R. A. Horn e C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press (2013).
- [113] S. Zhang, Y. Feng, X. Sun e M. Ying. **Upper bound for the success probability of unambiguous discrimination among quantum states.** *Physical Review A* **64**, 062103 (2001).
- [114] D. Qiu e L. Li. **Minimum-error discrimination of quantum states: Bounds and comparisons.** *Physical Review A* **81**, 042329 (2010).

-
- [115] W.-Y. Hwang e J. Bae. **Minimum-error state discrimination constrained by the no-signaling principle.** *Journal of Mathematical Physics* **51**, 022202 (2010).