

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



MESTRADO EM MATEMÁTICA

Espaçamento de autovalores e limites superiores para a dinâmica associada a operadores de Schrödinger discretos unidimensionais

Farlei Ferreira Silva

Belo Horizonte - MG

2018

Farlei Ferreira Silva

Espaçamento de autovalores e limites superiores para a dinâmica associada a operadores de Schrödinger discretos unidimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho

Universidade Federal de Minas Gerais

09 de Março de 2017

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar limitantes dinâmicos superiores para operadores de Schrödinger discretos unidimensionais limitados, a partir de propriedades de aglomeração dos autovalores associados aos aproximantes de volume finito. Discutimos uma aplicação dessas técnicas ao Hamiltoniano de Fibonacci. Tais resultados foram originalmente apresentados em [4]. Discutimos também a possibilidade de estendê-los a classes mais gerais de operadores de Schrödinger (como por exemplo, operadores de Dirac discretos limitados).

Abstract

The goal of this work is to present dynamic upper bounds for bounded discrete one-dimensional Schrödinger operators in terms of agglomeration properties of the eigenvalues of finite volume approximations. We discuss an application of these techniques to the Fibonacci Hamiltonian. Such results were originally presented in [4]. We also discuss the possibility of extending them to more general classes of Schrödinger operators (such as bounded discrete Dirac operators).

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente por todas as conquistas.

Aos meus pais e meus irmãos pelo incentivo e apoio durante toda a minha trajetória. A minha namorada pelo apoio e compreensão.

Ao meu orientador Silas Luiz por assumir a responsabilidade pela orientação.

Às secretárias Andreia e Eliane Kelli, profissionais que conciliam o trabalho tão bem.

Aos professores da Unimontes, não podendo deixar de citar, Narciso, Warley, Juliana, Rosina, Rosivaldo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Em fim, a todos que contribuíram para esse propósito, muito OBRIGADO!

[...] quando tudo nos parece dar errado, acontecem coisas boas, que não teriam acontecido, se tudo tivesse dado certo. [...]

Renato Russo.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Limitantes Superiores: Resultado Central	6
1.1 O Teorema Central	6
2 Limitantes inferiores mais refinados	19
2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central	19
2.2 Um Refinamento do Teorema Central	30
3 Uma Análise do Hamiltoniano de Fibonacci	43
3.1 Uma aplicação dos Teoremas	44
4 Projetos Futuros	54
A Propriedades gerais	56
A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades	56
A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos	61
A.2.1 Teoria de Floquet	61
A.2.2 Conexão com o espectro de operadores de Schrödinger discretos e finitos	66

Introdução

A Mecânica Quântica propõe estudos sobre evoluções temporais de partículas atômicas interagentes. Para uma abordagem das motivações envolvidas no seu desenvolvimento, vide [19].

O objeto matemático que descreve o “estado quântico” de uma partícula é usualmente chamado de função de onda, ψ , e é dado por um elemento de um espaço de Hilbert. Observe que ψ deve depender do tempo t . A equação que descreve como o estado quântico desta partícula muda com o tempo (isto é, como ψ evolui com t) é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi,$$

em que H é um operador auto-adjunto (que representa a “energia” da partícula) e \hbar é a constante de Plank, cuja solução é $\psi(t) = e^{-\frac{itH}{\hbar}} \psi(0)$. Note que para que a equação faça sentido, $\psi(t) \in \text{dom}(H)$ para $t \in (0, t_0)$. Se considerarmos uma partícula de massa m sob uma energia potencial $V(x)$, o operador de Schrödinger (Hamiltoniano) para o sistema será da forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x), \tag{1}$$

em que $\Delta : \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é o Laplaciano.

Em muitos casos, em vez de se considerar o Hamiltoniano definido por (1), chamado de modelo contínuo, opta-se por considerar aquilo que é comumente chamado de Hamiltoniano discreto, definido pela lei

$$(H\psi)(n) = -(\Delta\psi)(n) + V(n)\psi(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n),$$

em que ψ é uma sequência bilateral tal que $\sum_n V(n)^2 |\psi(n)|^2 < \infty$, e $V = (V(n))$ definido em R^n (ou subconjunto) e será discutido apenas para $n = 1$ que é o potencial discreto. Uma justificativa física para se estudar tal tipo de modelo pode ser encontrada no Capítulo 1 de [38].

O nosso interesse será, portanto, na evolução unitária, e^{-itH} , gerada por H . O pacote de ondas, $\psi(t) = e^{-itH}\psi$, que porventura pode ser inicialmente localizado no espaço (tome por exemplo, $\psi = \delta_1$), tende a se espalhar à medida que o tempo cresce.

Uma grandeza particularmente útil é dada por

$$P_\psi(q, T) \equiv \sum_{|n|>q} \frac{2}{T} \int_0^\infty |\langle \delta_n, e^{-itH}\psi \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt, \quad (2)$$

que representa a probabilidade média (no tempo T) de se encontrar a partícula de estado inicial ψ fora da bola $\bar{B}(0; q)$. Com efeito, o número $|\langle \delta_n, \psi(t) \rangle|^2$ é interpretado como sendo a probabilidade de se encontrar, no tempo t , a partícula no estado δ_n , o auto-estado (autofunção) associado ao autovalor n do operador de posição X : $X\delta_n = n\delta_n$. Além disso, como $\psi = \delta_1$ é um candidato ideal para um pacote de ondas que está localizado na origem, restringiremos nossa atenção a este caso e denotaremos $P(q, T) \equiv P_{\delta_1}(q, T)$.

As próximas definições, que apresentam os chamados expoentes de transporte α_l^\pm e α_u^\pm , estão associados as taxas de crescimento polinomial (em função de T) de $P(T^\alpha, T)$, para um dado $\alpha > 0$.

Definição 1. *As taxas superiores e inferiores de propagação da parte “lenta” do pacote de onda são definidas, respectivamente por:*

$$\begin{aligned} \alpha_l^+ &= \sup\{\alpha > 0 \mid \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha, T)}{\log T} = 0\} \\ \alpha_l^- &= \sup\{\alpha > 0 \mid \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha, T)}{\log T} = 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

Definição 2. *As taxas superiores e inferiores de propagação da parte “rápida”*

do pacote de onda são definidas, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\alpha_u^+ &= \sup\{\alpha > 0 \mid \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha, T)}{\log T} > -\infty\} \\ \alpha_u^- &= \sup\{\alpha > 0 \mid \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha, T)}{\log T} > -\infty\}\end{aligned}\tag{4}$$

Tais objetos foram pela primeira vez apresentados em [24]; em [7], Carvalho e Oliveira demonstraram, para certas classes de operadores, que tipicamente (no sentido de Baire) $\alpha_l^+ = 0$ e $\alpha_u^- = 1$.

Enquanto α_l^\pm estão associadas às taxas (inferior e superior) de propagação da parte principal de $\psi(t)$, α_u^\pm , por outro lado, estão associados às taxas de propagação dos modos de Fourier mais rápidos do pacote de onda.

Outras grandezas dinâmicas importantes são os chamados momentos médios de ordem $p > 0$ do operador de posição, definidos como

$$\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T = \sum_n \frac{2}{T} \int_0^\infty |n|^p |\langle \delta_n, \psi(t) \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt.$$

É possível mostrar que $P(T^\alpha, T)$ e $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T$ estão relacionados (para detalhes, vide [21]). Em particular, uma vez que para qualquer V limitado, o limite superior balístico, $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T \leq C_p T^p$, segue-se de resultados presentes em [21] que se $P(T^\alpha, T) = O(T^{-k})$ com $T \rightarrow \infty$ para todo $k > 0$, então $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T \leq C_p T^{\alpha p}$ para todo $p > 0$.

A maioria dos trabalhos nesta área de pesquisa tem por objetivo buscar limitantes inferiores e superiores tanto para $P_\psi(q, T)$ como para os expoentes dinâmicos. Uma abordagem típica envolve o uso de propriedades locais de μ_ψ , a medida espectral de ψ . Nesta direção, um resultado básico, comumente chamado de *limitante de Guarneri–Combes–Last* [9, 27, 26, 33], diz que se μ_ψ não é singular com respeito a medida de Hausdorff α -dimensional, então $P_\psi(T^\alpha, T)$ é limitado inferiormente por uma constante positiva, para todo T . Grosso modo, a ideia é que um “maior grau de continuidade” da medida espectral implica transporte mais rápido. Em [21] (vide [2] para detalhes), são apresentados limitantes inferiores para os expoentes de transporte em termos

das chamadas dimensões fractais generalizadas das medidas espectrais. Em particular, para operadores de Schrödinger discretos definidos em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, tais dimensões são relacionadas ao comportamento das matrizes de transferência (vide Apêndice para definição do conceito de matriz de transferência).

Enquanto, como discutimos, há uma série de resultados que se referem a limitantes inferiores para $P_\psi(q, T)$, há poucos trabalhos que discutem limitantes superiores desta grandeza. Em particular, [30, 5, 17] mostram que mesmo que a medida espectral seja bastante singular (até mesmo atômica), é possível ocorrer transporte quase-balístico. Isso mostra que, para medidas contínuas, não é possível obter limitantes superiores significativos apenas em termos das propriedades de continuidade da medida espectral. Além do mais, obter limitantes superiores para $P_\psi(q, T)$ que possam gerar limitantes significativos para as taxas de crescimento de $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T$, parece envolver um controle preciso de todo o pacote de onda (diferentemente do que ocorre na determinação de limitantes inferiores para $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T$, em que basta controlar uma porção do mesmo).

Os poucos casos em que os limitantes superiores foram obtidos para medidas singular-contínuas são discutidos em [25], em que se estudaram matrizes de Jacobi com espectros auto-semelhantes, e em [13], em que foram obtidos limitantes dinâmicos superiores a partir de propriedades das matrizes de transferência (vale destacar que nesse trabalho, os autores foram capazes de controlar todo o pacote de onda, obtendo assim limites superiores para $P(q, T)$ que são “suficientemente bons” para produzir limitantes significativos nas taxas de crescimento de $\langle\langle |X|^p \rangle\rangle_T$).

O objetivo desta dissertação é estudar em detalhes o trabalho [4], que representa mais um passo na direção de se determinarem limitantes superiores para $P_\psi(q, T)$. Mais precisamente, os limitantes obtidos em [4] são descritos puramente em termo espectrais. Como as propriedades locais da medida espectral não são suficientes para este fim (assim como discutido anteriormente), o trabalho propõe que sejam consideradas as propriedades espectrais

das aproximações de volume finito de H . A ideia é comparar as funções de Green de H e de H_{per}^q , este último sendo um aproximante periódico de H (o potencial de H_{per}^q é obtido a partir do truncamento de V após o sítio q).

A dissertação se organiza da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos o resultado principal do artigo [4] (Teorema 1.1), bem como sua consequência direta sobre os expoentes dinâmicos α_l^\pm e α_u^\pm . No Capítulo 2, apresentamos os resultados que refinam o Teorema 1.1, em termos de uma análise detalhada envolvendo a distribuição dos zeros do discriminante da matriz de monodromia (Teoremas 2.8 e 2.13). No Capítulo 3, apresentamos a aplicação discutida em [4] ao Hamiltoniano de Fibonacci. No Capítulo 4, apresentamos algumas ideias que envolvem a possível implementação das técnicas discutidas nos capítulos anteriores para outras classes de operadores (operadores de Schrödinger a valores matriciais). Por fim, no Apêndice, apresentamos alguns pré-requisitos básicos empregados no desenvolvimento do trabalho; em particular, discutimos a Teoria de Floquet para operadores periódicos. Vale destacar que não discutimos conceitos e resultados básicos da teoria espectral; para tanto, sugerimos [36] como referência básica ao assunto.

Capítulo 1

Limitantes Superiores:

Resultado Central

Neste capítulo, apresentaremos o principal resultado discutido em [4]. Muitos dos pré-requisitos empregados neste estudo se encontram no Apêndice.

1.1 O Teorema Central

Definiremos alguns conceitos que serão empregados nas demonstrações de dois lemas importantes para o Teorema 1.2 de [4].

Definição 1.1 (Definição 1.1 em [4]). *Dizemos que uma sequência de números não negativos, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, é exponencialmente crescente se $\sup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < \infty$ e $\inf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.*

Aqui, discutimos resultados para H definido em $\ell^2(\mathbb{N})$ (com a condição de contorno $\psi(0) = 0$), uma vez que o caso $\ell^2(\mathbb{Z})$ será reduzido a este (vide Proposição 2.15). Para $q > 1$, $q \in \mathbb{N}$, $k \in [0, \pi]$, seja $H^q(k)$ a restrição de H

1.1 O Teorema Central

a $\{1, \dots, q\}$, com condições de contorno $\psi(q+1) = e^{ik}\psi(1)$, ou seja,

$$H^q(k) = \begin{pmatrix} V_1 & 1 & 0 & \dots & e^{-ik} \\ 1 & V_2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ e^{ik} & 0 & \dots & 1 & V_q \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

(vide A.2.2).

Como é bem conhecido (vide Seção A.2), para qualquer $k \in (0, \pi)$, $H^q(k)$ admite q autovalores simples, $E_{q,1}(k) < E_{q,2}(k) < \dots < E_{q,q}(k)$ sendo estas funções monótonas contínuas de k . Uma idéia é usar o comprimento dos intervalos, $b_{q,j} \equiv |E_{q,j}(\pi) - E_{q,j}(0)|$, como medida da sensibilidade do sistema a uma variação das condições de fronteira. O espalhamento mais rápido do pacote de ondas está associado intuitivamente a um maior grau de extensão das autofunções de H e, portanto, a uma sensibilidade maior a uma mudança em k . O Teorema 1.2 de [4] é motivado por essa imagem intuitiva.

Os intervalos traçados por $E_{q,j}(k)$ compõem, à medida que k varia em $[0, \pi]$, o espectro operador definido em $\ell^2(\mathbb{N})$ com potencial q -periódico, V^{per} , dado por $V^{per}(nq+j) = V(j)$ para $1 \leq j \leq q$ e $n \geq 0$ (vide a Seção A.2 para maiores detalhes); denotaremos tal operador por H_{per}^q .

Sejam $G(z, k, n) = \langle \delta_n, (H - z)^{-1} \delta_k \rangle$ e $G_{per}^q(z, k, n) = \langle \delta_n, (H_{per}^q - z)^{-1} \delta_k \rangle$, respectivamente, as funções de Green para H e H_{per}^q . Seja $\mathcal{D}^q(z)$ o discriminante de H_{per}^q , definido como o traço da matriz de monodromia (A.28) (trata-se um polinômio mônico de grau q). Segue-se do item 5 da Proposição A.2 que

$$\mathcal{D}^q(z) = G_{per}^q(z, 1, q) + \frac{1}{G_{per}^q(z, 1, q)}. \quad (1.2)$$

O próximo resultado é fundamental para todo o trabalho.

Lema 1.2 (Lema 2.1 em [4]). *Dados $q > 1$ e para algum T positivo, temos*

$$P(q, T) \equiv P_{\delta_1}(q, T) \leq 4T^4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \left(\inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q \left(E + \frac{i}{T} \right) \right| \right)^{-2} \quad (1.3)$$

1.1 O Teorema Central

Demonstração. Começemos relembrando a seguinte relação (Lema 3.2 em [29]), válida para todo $T > 0$:

$$\int_0^\infty |\langle \delta_n, e^{-itH} \delta_k \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\langle \delta_n, (H - E - \frac{i}{T})^{-1} \delta_k \rangle|^2 dE \quad (1.4)$$

Assim,

$$\sum_{n>q} \frac{2}{T} \int_0^\infty |\langle \delta_n, e^{-itH} \delta_1 \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n>q} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^\infty |\langle \delta_n, (H - (E + \frac{i}{T}))^{-1} \delta_1 \rangle|^2 dE,$$

e portanto

$$P(q, T) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dE \sum_{n>q} \varepsilon |G(E + i\varepsilon, 1, n)|^2, \quad (1.5)$$

onde $\varepsilon = \frac{1}{T}$

Agora, faremos uma análise da soma em (1.5). Sejam $\tilde{H}^q = H - \langle \delta_{q+1}, \cdot \rangle \delta_q - \langle \delta_q, \cdot \rangle \delta_{q+1}$ e $\tilde{G}^q(z, k, n) = \langle \delta_n, (\tilde{H}^q - z)^{-1} \delta_k \rangle$. Então, pela segunda fórmula do resolvente (vide [36]), temos

$$\begin{aligned} G(z, 1, n) &= \tilde{G}^q(z, 1, n) - G(z, 1, n) \tilde{G}^q(z, q+1, n) - G(z, 1, q+1) \tilde{G}^q(z, q, n) \\ &= -G(z, 1, q) \tilde{G}^q(z, q+1, n), \end{aligned} \quad (1.6)$$

se $n > q$, já que \tilde{G} é uma soma direta.

Além disso, note que $\varepsilon \sum_{n>q} |\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q+1, n)|^2 = \Im \tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q+1, q+1)$.

Observação 1. *Com efeito, como $f(n) \equiv \tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q+1, n)$ satisfaz $f(n+1) + f(n-1) + V(n)f(n) = (E + i\varepsilon)f(n)$ para todo $n > q$, basta multiplicar ambos os membros por $\overline{f(n)}$, somar e tomar as partes imaginárias, a fim de se obter a identidade:*

$$\begin{aligned} \sum_{n>q} \overline{f(n)} f(n+1) + \sum_{n>q} \overline{f(n)} f(n-1) + \sum_{n>q} (V(n) - (E + i\varepsilon)) |f(n)|^2 &= 0 \Rightarrow \\ \sum_{n>q} \overline{f(n)} f(n+1) + \sum_{n+1>q} \overline{f(n+1)} f(n) + \sum_{n>q} (V(n) - (E + i\varepsilon)) |f(n)|^2 &= 0 \Rightarrow \\ \sum_{n>q} \overline{f(n)} f(n+1) + \sum_{n>q} \overline{f(n+1)} f(n) + \overline{f(q+1)} f(q) + \sum_{n>q} (V(n) - (E + i\varepsilon)) |f(n)|^2 &= 0. \end{aligned}$$

1.1 O Teorema Central

Isso implica em,

$$\Im \left(\overline{f(q+1)}f(q) + \sum_{n>q} (V(n) - (E + i\varepsilon))|f(n)|^2 \right) = \Im \left(\overline{f(q+1)}f(q) \right) - \varepsilon \sum_{n>q} |f(n)|^2 = 0,$$

e portanto

$$\varepsilon \sum_{n>q} |\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, n)|^2 = \Im(\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, q + 1)).$$

(note que de (1.6)), $f(q) = \tilde{G}^q(z, q + 1, q) = -1$).

Assim, das equações (1.5) e (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} P(q, T) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dE \sum_{n>q} \varepsilon |G(E + i\varepsilon, 1, q)|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dE \sum_{n>q} \varepsilon |G(z, 1, q) \tilde{G}^q(z, q + 1, n)|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dE |G(z, 1, q)|^2 \varepsilon \sum_{n>q} |\tilde{G}^q(z, q + 1, n)|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dE |G(z, 1, q)|^2 \Im(\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, q + 1)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, como $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Im \tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, q + 1) dE = 1$ (vide [6], Apêndice C, Lema C5), segue-se que

$$P(q, T) \leq \sup_{E \in \mathbb{R}} |G(E + i\varepsilon, 1, q)|^2. \quad (1.8)$$

O próximo passo é aproximar G por G_{per}^q . Sejam $\tilde{H}_{per}^q = H_{per}^q - \langle \delta_{q+1}, \cdot \rangle \delta_q - \langle \delta_q, \cdot \rangle \delta_{q+1}$ e $\tilde{G}_{per}^q(z, k, n) = \langle \delta_n, (\tilde{H}_{per}^q - z)^{-1} \delta_k \rangle$.

Note que a equação (1.6) continua válida se substituirmos G por G_{per}^q e \tilde{G}^q por \tilde{G}_{per}^q :

$$G_{per}^q(z, 1, n) = -G_{per}^q(z, 1, q) \tilde{G}_{per}^q(z, q + 1, n).$$

Novamente, pela identidade do resolvente (tomando-se $z = E + i\varepsilon$),

1.1 O Teorema Central

$$\begin{aligned}
|G_{per}^q(z, 1, q) - G(z, 1, q)| &= |\langle \delta_q, (H - z)^{-1}(V_{per}^q - V)(H_{per}^q - z)^{-1}\delta_1 \rangle| \\
&= \left| \langle \delta_q, (H - z)^{-1}(V_{per}^q - V) \sum_{n \geq 1} G_{per}^q(z, 1, n)\delta_1 \rangle \right| \\
&= \left| \langle \delta_q, (H - z)^{-1} \sum_{n > q} (V_{per}^q(n) - V(n))G_{per}^q(z, 1, n)\delta_1 \rangle \right| \\
&= \left| \sum_{n > q} G_{per}^q(z, 1, n)(V_{per}^q(n) - V(n))G(z, n, q) \right| \\
&= |G_{per}^q(z, 1, q)| \\
&\times \left| \sum_{n > q} \tilde{G}_{per}^q(z, q + 1, n) (V_{per}^q(n) - V(n)) G(z, n, q) \right| \\
&\leq |G_{per}^q(z, 1, q)| 2\|V\|_\infty \left| \sum_{n > q} \tilde{G}_{per}^q(z, q + 1, n)G(z, n, q) \right|
\end{aligned}$$

(já que $((V_{per}^q(n) - V(n)) \leq 2\|V\|_\infty \forall n > q)$. Utilizando Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
&|G_{per}^q(z, 1, q) - G(z, 1, q)| \\
&\leq |G_{per}^q(z, 1, q)| 2\|V\|_\infty \left(\sum_{n > q} |\tilde{G}_{per}^q(z, q + 1, n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n > q} |G(z, n, q)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

e como $\varepsilon \sum_{n > q} |\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, n)|^2 = \Im(\tilde{G}^q(E + i\varepsilon, q + 1, q + 1))$, segue-se que

$$\begin{aligned}
&|G_{per}^q(z, 1, q) - G(z, 1, q)| \\
&\leq |G_{per}^q(z, 1, q)| 2\|V\|_\infty \sqrt{\frac{\Im(\tilde{G}_{per}^q(z, q + 1, q + 1))}{\varepsilon} \frac{\Im(G(z, q, q))}{\varepsilon}} \\
&\leq \frac{2\|V\|_\infty}{\varepsilon^2} |G_{per}^q(z, 1, q)|, \tag{1.9}
\end{aligned}$$

já que $|G(z, k, l)| \leq \frac{1}{\Im(z)}$ (vide Capítulo 1 de [38]).

Logo,

$$|G(z, 1, q)| \leq \left(\frac{1 + 2\|V\|_\infty}{\varepsilon^2} \right) |G_{per}^q(E + i\varepsilon, 1, q)|. \tag{1.10}$$

1.1 O Teorema Central

Agora, como $G_{per}^q(z, 1, q)$ é uma solução de $\psi(n+1) + \psi(n-1) + V_{per}^q(n)\psi(n) = z\psi(n)$ (para $n > 2$) que decai exponencialmente (vide [38]), segue-se que $|G_{per}^q(z, 1, q)| < 1$, e assim pela equação (1.2), que $2|G_{per}^q(z, 1, q)|^{-1} \geq |\mathcal{D}^q(z)|$. Logo,

$$|G_{per}^q(z, 1, q)| \leq \frac{2}{|\mathcal{D}^q(z)|}. \quad (1.11)$$

Combinando-se as equações (1.8), (1.10) e (1.11), tem-se

$$|G(E + i\varepsilon, 1, q)| \leq \left(1 + \frac{2\|V\|_\infty}{\varepsilon^2}\right) |G_{per}^q(E + i\varepsilon, 1, q)| \leq \left(\frac{1 + 2\|V\|_\infty}{\varepsilon^2}\right) \frac{2}{|\mathcal{D}^q(z)|},$$

donde se segue que

$$\begin{aligned} P(q, T) &\leq \sup_{E \in \mathbb{R}} |G(E + i\varepsilon, 1, q)|^2 \leq \sup_{E \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{1 + 2\|V\|_\infty}{\varepsilon^2} \right) \frac{2}{|\mathcal{D}^q(z)|} \right|^2 \\ &\leq \sup_{E \in \mathbb{R}} \left| \frac{(1 + 2\|V\|_\infty)^2}{\varepsilon^4} \frac{4}{|\mathcal{D}^q(z)|^2} \right| \leq 4T^4 (1 + 2\|V\|_\infty)^2 \left(\frac{1}{\inf_{E \in \mathbb{R}} |\mathcal{D}^q(z)|^2} \right). \end{aligned}$$

□

Esse primeiro resultado nos permite reduzir a análise de $P(q, T)$ ao estudo do traço da matriz de monodromia do operador q -periódico. Recordemo-nos de que como \mathcal{D}^q é mônico, (vide Apêndice) podemos reescrevê-lo como

$$\mathcal{D}^q(z) = \prod_{j=1}^q (z - \tilde{E}_{q,j}). \quad (1.12)$$

Além disso, como os zeros de $(\mathcal{D}^q)'$ são simples, cada $E \in \mathbb{R}$ está em $[x(E), y(E))$, $[x(E), \infty)$, ou $(-\infty, y(E))$, em que $x(E)$, $y(E)$ são dois pontos extremos consecutivos de \mathcal{D}^q . Qualquer intervalo desse tipo contém um único zero de \mathcal{D}^q (vide Apêndice). Desta forma, associamos a cada $E \in \mathbb{R}$ um único zero $\tilde{E}_{q,j(E)}$ de \mathcal{D}^q . Logo, temos que para cada $E \in \mathbb{R}$,

$$|\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)|^2 = \prod_{j=1}^q |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j}|^2 = |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2 \prod_{j \neq j(E)} |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j}|^2$$

1.1 O Teorema Central

$$\begin{aligned}
&= |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2 \prod_{j \neq j(E)} |E - \tilde{E}_{q,j}|^{2j \neq j(E)} \frac{\prod_{j \neq j(E)} |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j}|^2}{\prod_{j \neq j(E)} |E - \tilde{E}_{q,j}|^2} \\
&\geq \varepsilon^2 \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right|^2 \frac{\prod_{j \neq j(E)} |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j}|^2}{\prod_{j \neq j(E)} |E - \tilde{E}_{q,j}|^2}, \tag{1.13}
\end{aligned}$$

já que $|E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2 \geq \varepsilon^2$; segue-se, portanto, do Lema 1.2 e de (1.13) que todos os teoremas de [4] são obtidos ao se determinarem limitantes inferiores para (1.13).

Os resultados serão tão mais precisos quanto mais precisas forem as estimativas inferiores de $\frac{\prod_{j \neq j(E)} |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j}|^2}{\prod_{j \neq j(E)} |E - \tilde{E}_{q,j}|^2}$. Antes, no entanto, deve-se

estabelecer um limitante inferior para o fator $\left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right|$.

Lema 1.3 (Lema 2.2 em [4]). *Seja $E \in [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]$. Então,*

$$e \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right| \geq |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j(E)})| \geq \frac{\sqrt{5} + 1}{b_{q,j}} \tag{1.14}$$

(onde, para $E = \tilde{E}_{q,j}$, o lado esquerdo deve ser interpretado como derivada e $b_{q,j} = |E_{q,j}(\pi) - E_{q,j}(0)|$.)

Demonstração. Começemos demonstrando a primeira desigualdade. Para tanto, é suficiente demonstrar que para $E \in [\tilde{E}_{q,j}, \tilde{E}_{q,j+1}]$, $1 \leq j \leq (q-1)$,

$$e \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j}} \right| \geq |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j(E)})|. \tag{1.15}$$

Sejam $E_{q,1}^0, \dots, E_{q,q-1}^0$ os zeros de $(\mathcal{D}^q)'$. Claramente, $\tilde{E}_{q,j} < E_{q,j}^0 < \tilde{E}_{q,j+1}$ para qualquer $(1 \leq j \leq (q-1))$, e todo $E \in [\tilde{E}_{q,j}, \tilde{E}_{q,j+1}]$ está contido em $[\tilde{E}_{q,j}, E_{q,j}^0]$ ou em $[E_{q,j}^0, \tilde{E}_{q,j+1}]$. Como os zeros de $(\mathcal{D}^q)'$ são simples, $E_{q,j}^0$ é

1.1 O Teorema Central

um máximo local ou um mínimo local de \mathcal{D}^q . Demonstraremos (1.15) para $E \in [\tilde{E}_{q,j}, E_{q,j}^0]$ com $E_{q,j}^0$ um máximo local; os demais casos são análogos.

Seja $f(E) = \frac{d}{dE} \log \mathcal{D}^q(E) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{|E - \tilde{E}_{q,j}|}$; então,

$$f'(E) = - \sum_{j=1}^q \frac{1}{(E - \tilde{E}_{q,j})^2} < \frac{-1}{(E - \tilde{E}_{q,j})^2},$$

e assim,

$$f(E) = - \int_E^{E_{q,j}^0} f'(x) dx > \left(\frac{1}{E - \tilde{E}_{q,j}} - \frac{1}{E_{q,j}^0 - \tilde{E}_{q,j}} \right) \quad (1.16)$$

(note que $f(E_{q,j}^0) = 0$). Fixe $E' \in (\tilde{E}_{q,j}, E)$; segue-se que

$$\log \frac{\mathcal{D}^q(E)}{\mathcal{D}^q(E')} = \log \mathcal{D}^q(E) - \log \mathcal{D}^q(E') = \int_{E'}^E f(x) dx > \log \frac{E - \tilde{E}_{q,j}}{E' - \tilde{E}_{q,j}} - 1.$$

Assim,

$$\frac{\mathcal{D}^q(E)}{\mathcal{D}^q(E')} > \frac{1}{e} \frac{E - \tilde{E}_{q,j}}{E' - \tilde{E}_{q,j}} \Rightarrow e \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j}} > \frac{\mathcal{D}^q(E')}{E' - \tilde{E}_{q,j}} = \frac{\mathcal{D}^q(E') - \mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j})}{E' - \tilde{E}_{q,j}},$$

e portanto

$$e \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j}} \right| > \left| \frac{\mathcal{D}^q(E') - \mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j})}{E' - \tilde{E}_{q,j}} \right|.$$

A estimativa (1.15) se segue tomando-se o limite $E \rightarrow \tilde{E}_{q,j}$ em ambos os membros da última desigualdade:

$$\lim_{E' \rightarrow \tilde{E}_{q,j}} \left| \frac{\mathcal{D}^q(E') - \mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j})}{E' - \tilde{E}_{q,j}} \right| = |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})| \Rightarrow e \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j}} \right| \geq |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})|.$$

Voltemo-nos agora à demonstração da segunda desigualdade. Para tanto, definiremos os intervalos

$$B_{q,j} = [\tilde{E}_{q,j}^\ell, \tilde{E}_{q,j}^r] = \begin{cases} [E_{q,j}(0), E_{q,j}(\pi)], & \text{se } E_{q,j}(0) < E_{q,j}(\pi) \\ (E_{q,j}(\pi), E_{q,j}(0)), & \text{se } E_{q,j}(\pi) < E_{q,j}(0), \end{cases} \quad (1.17)$$

1.1 O Teorema Central

de modo que $b_{q,j} \equiv |E_{q,j}(\pi) - E_{q,j}(0)| = |B_{q,j}|$; esses $B_{q,j}$ são chamados de “bandas”. Sejam $B_{q,j}^\ell = [\tilde{E}_{q,j}^\ell, \tilde{E}_{q,j}^\ell]$ e $B_{q,j}^r = [\tilde{E}_{q,j}^r, \tilde{E}_{q,j}^r]$ as partes de $B_{q,j}$, e seja $b_{q,j}^i = |B_{q,j}^i|$ ($i = \ell, r$).

Notemos que, como $(\mathcal{D}^q)'$ é um polinômio de grau $(q-1)$ com zeros simples, $|(\mathcal{D}^q)'|$ tem um único máximo em cada intervalo $[E_{q,j}^0, E_{q,j+1}^0]$ ($1 \leq j \leq q-2$). Uma vez que, para $1 \leq j \leq q-2$, $B_{q,j+1} \subseteq [E_{q,j}^0, E_{q,j+1}^0]$, segue-se que $|(\mathcal{D}^q)'|$ tem um único máximo em cada intervalo $B_{q,j}$ ($1 \leq j \leq q$). Se este máximo estiver em $B_{q,j}^\ell$, então, por monotonicidade, $|(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j}^\ell)| \geq |(\mathcal{D}^q)'(E)|$ para todo $E \in B_{q,j}^r$. Como $\mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j}^\ell) = 0$ e $\mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j}^r) = \pm 2$ (pelo item 3 da Proposição A.2),

$$\frac{2}{b_{q,j}^r} = \frac{|\mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j}^\ell) - \mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,j}^r)|}{|\tilde{E}_{q,j}^\ell - \tilde{E}_{q,j}^r|} \leq |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j}^\ell)|,$$

pela desigualdade do valor médio.

Caso contrário, o máximo está em $B_{q,j}^r$, e assim temos

$$\frac{2}{b_{q,j}^\ell} \leq |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j}^r)|.$$

Suponha agora que $2 \leq j \leq (q-1)$, que \mathcal{D}^q seja crescente em $B_{q,j}$ e considere o polinômio $h(E) = \mathcal{D}^q(E) - 2$. Fazendo-se uma análise similar em (1.16), tem-se que para cada $E \in (E_{q,j}^0, \tilde{E}_{q,j}^r)$,

$$\frac{h'(E)}{h(E)} = \frac{d}{dE} \log(h(E)) > \frac{1}{\tilde{E}_{q,j}^r - E} - \frac{1}{\tilde{E}_{q,j}^r - E_{q,j}^0}$$

já que $h(E)$ é a translação de $\mathcal{D}^q(E)$ por -2 unidades. (tome $E = \tilde{E}_{q,j}$).

Assim,

$$\frac{(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})}{2} = \frac{h'(\tilde{E}_{q,j})}{h(\tilde{E}_{q,j})} > \frac{1}{\tilde{E}_{q,j}^r - \tilde{E}_{q,j}} - \frac{1}{E_{q,j}^r - \tilde{E}_{q,j}^0} = \frac{b_{q,j}^\ell}{b_{q,j}^r(b_{q,j}^r + b_{q,j}^\ell)}.$$

Tomando-se $t_{q,j} = \frac{2}{|(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})|}$, segue-se que

$$b_{q,j}^r > \frac{t_{q,j} b_{q,j}^\ell}{b_{q,j}^\ell + b_{q,j}^r}. \quad (1.18)$$

1.1 O Teorema Central

Considerando-se a função $\mathcal{D}^q(E) + 2$ e efetuando-se uma análise semelhante, pode-se obter a mesma desigualdade com ℓ e r permutados:

$$b_{q,j}^\ell > \frac{t_{q,j} b_{q,j}^r}{b_{q,j}^\ell + b_{q,j}^r} \quad (1.19)$$

Assim, $b_{q,j}^r \geq t_{q,j}$, ou $b_{q,j}^\ell \geq t_{q,j}$. Assuma que $b_{q,j}^r \geq t_{q,j}$. Logo, por (1.19),

$$b_{q,j}^\ell \geq \frac{t_{q,j} t_{q,j}}{t_{q,j} + b_{q,j}^\ell} \Rightarrow (b_{q,j}^\ell)^2 + b_{q,j}^\ell t_{q,j} - (t_{q,j})^2 \geq 0 \Rightarrow b_{q,j}^\ell \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} t_{q,j}.$$

Assuma agora que $b_{q,j}^\ell \geq t_{q,j}$. Efetuando-se a mesma análise, obtém-se $b_{q,j}^r \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} t_{q,j}$. Em ambos os casos,

$$b_{q,j} = b_{q,j}^\ell + b_{q,j}^r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} t_{q,j} + t_{q,j} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} t_{q,j},$$

de modo que

$$b_{q,j} \geq \frac{\sqrt{5}+1}{|(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})|} \Rightarrow |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})| \geq \frac{\sqrt{5}+1}{b_{q,j}} \quad (1.20)$$

para $2 \leq j \leq (q-1)$. Para $j \in \{1, q\}$, apenas uma das desigualdades (1.18) ou (1.19) pode ser obtida, mas por monotonicidade se segue que $b_{q,j}^r \geq t_{q,j}$ corresponde ao caso em que (1.18) é válido e vice-versa, e assim, obtém-se (1.20) para $1 \leq j \leq q$. \square

Teorema Central 1.1 (Teorema 1.2 em [4]). *Para $1 \leq j \leq q$, seja $b_{q,j} \equiv |E_{q,j}(\pi) - E_{q,j}(0)|$. Então,*

$$P(q, T) \leq \frac{4e^2}{(\sqrt{5}+1)^2} (1 + 2 \|V\|_\infty)^2 T^6 \left(\sup_{1 \leq j \leq q} b_{q,j} \right)^2.$$

Demonstração. Para iniciarmos a demonstração, note primeiramente que, por (1.13),

$$|\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right|^2 \frac{\prod_{j \neq j(E)}^q |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2}{\prod_{j \neq j(E)}^q |E - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2},$$

1.1 O Teorema Central

bem como $\inf_{E \in \mathbb{R}} |\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)|^2 = \inf_{E \in [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]} |\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)|^2$ (com efeito, se $E \notin [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]$, então $|\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)| > |\mathcal{D}^q(\tilde{E}_{q,s} + i\varepsilon)|$, $s \in \{1, q\}$).

Agora, pelo Lema 1.3, se $E \in [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]$, então

$$\left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right|^2 \geq \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{e b_{q,j(E)}} \right)^2. \quad (1.21)$$

Combinando (1.13) com $\frac{\prod_{j \neq j(E)}^q |E + i\varepsilon - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2}{\prod_{j \neq j(E)}^q |E - \tilde{E}_{q,j(E)}|^2} \geq 1$, temos

$$|\mathcal{D}^q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{\mathcal{D}^q(E)}{E - \tilde{E}_{q,j(E)}} \right|^2. \quad (1.22)$$

Logo, por (1.21), (1.22),

$$\left| \mathcal{D}^q\left(E + \frac{i}{T}\right) \right|^2 \geq \left(\frac{1}{T}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{e}\right)^2 \left(\frac{1}{b_{q,j(E)}}\right)^2,$$

e portanto

$$\left| \mathcal{D}^q\left(E + \frac{i}{T}\right) \right|^{-2} \leq T^2 \frac{e^2}{(\sqrt{5} + 1)^2} (b_{q,j})^2,$$

para todo $E \in [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]$.

Agora, pelo Lema 1.2,

$$\begin{aligned} P(q, T) &\equiv P_{\delta_1}(q, T) \leq 4T^4 (1 + 2 \|V\|_\infty)^2 \left(\inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q\left(E + \frac{i}{T}\right) \right| \right)^{-2} \\ &\leq \frac{4e^2}{(\sqrt{5} + 1)^2} T^6 (1 + 2 \|V\|_\infty)^2 \sup_{E \in [\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,q}]} (b_{q,j(E)})^2 \\ &= \frac{4e^2}{(\sqrt{5} + 1)^2} T^6 (1 + 2 \|V\|_\infty)^2 (\sup_j b_{q,j})^2. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.4 (Proposição 4.1 em [4]). *Seja $\alpha > 0$. Então,*

1.1 O Teorema Central

1. Se existirem uma seqüência crescente $\{q_\ell\}_\ell^\infty$, uma constante $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $P(q_\ell, q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}) \leq Cq_\ell^{-\varepsilon}$, então $\alpha_l^- \leq \alpha$. Além disso, se $\{q_\ell\}_\ell^\infty$ for exponencialmente crescente e $P(q_\ell, T) = Cq_\ell^{-\varepsilon}$ para todo $T \leq q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}$, então $\alpha_l^+ \leq \alpha$.
2. Se existir uma seqüência crescente $\{q_\ell\}_\ell^\infty$ tal que $P(q_\ell, q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}) = O(q_\ell^{-m})$ para todo m , então $\alpha_u^- \leq \alpha$. Além disso, se $\{q_\ell\}_\ell^\infty$ for exponencialmente crescente e $P(q_\ell, q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}) = O(q_\ell^{-m})$ para todo m uniformemente em $T \leq q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}$, então $\alpha_u^- \leq \alpha$.

Demonstração. As demonstrações dos itens 1 e 2 são quase idênticas, de modo que apresentaremos apenas a do item 1.

Seja $T = q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}$. Então,

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^\alpha, T)}{\log T} &\leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log P(T_\ell^\alpha, T_\ell)}{\log T_\ell} \leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log CT_\ell^{-\varepsilon\alpha}}{\log T_\ell} \\ &\leq -\varepsilon\alpha \left(\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log C}{\log T_\ell} + \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log T_\ell}{\log T_\ell} \right) = -\varepsilon\alpha < 0, \end{aligned}$$

e assim, $\alpha_l^- \leq \alpha$, pela Definição 1.1.

Agora, suponha que $\{q_\ell\}_\ell^\infty$ cresça exponencialmente. Devemos mostrar que $\alpha' > \alpha_l^+$ para todo $\alpha' > \alpha$. Fixe, portanto, $\alpha' > \alpha$. Sejam $\bar{q} = \sup_\ell \frac{q_{\ell+1}}{q_\ell}$, $\underline{q} = \inf_\ell \frac{q_{\ell+1}}{q_\ell}$ e $r = \frac{\log \bar{q}}{\log \underline{q}}$. Finalmente, para cada T grande, seja $\ell(T)$ o único índice tal que

$$q_{\ell(T)} \leq T^\alpha < q_{\ell(T)+1},$$

e seja $q(T) = q_{\ell(T) + \lfloor \sqrt{\ell(T)} \rfloor}$, onde $\lfloor \sqrt{\ell(T)} \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \sqrt{\ell(T)}\}$.

Note que $\frac{q(T)}{q_{\ell(T)}} \leq \prod_{j=\ell(T)}^{\ell(T) + \lfloor \sqrt{\ell(T)} \rfloor - 1} \frac{q_{j+1}}{q_j} \leq \bar{q}^{\sqrt{\ell(T)}} \leq \underline{q}^r \sqrt{\ell(T)}$ e que $\underline{q}^{\ell(T)} \leq \tilde{C}q_{\ell(T)} \leq \tilde{C}T^\alpha$ para alguma constante $\tilde{C} > 0$ (já que (q_ℓ) é exponencialmente crescente), e assim $q(T) \leq \tilde{C}q_{\ell(T)}T^{\frac{\alpha r}{\sqrt{\ell(T)}}} \leq \tilde{C}T^\alpha T^{\frac{\alpha r}{\sqrt{\ell(T)}}}$. Uma vez

1.1 O Teorema Central

que $\ell(T) \rightarrow \infty$, segue-se que dado $\delta > 0$, existe uma constante C_δ tal que $q(T) \leq C_\delta T^{\alpha+\delta}$.

Tome δ de modo que $\alpha + \delta < \alpha'$. Assim, para T grande, $P(T^{\alpha'}, T) \leq P(C_\delta T^{\alpha+\delta}, T) \leq P(q(T), T) \leq P(q_{\ell(T)_1}, T)$ e portanto (relembrando que $q_{\ell(T)}^{\frac{1}{\alpha}} \leq T < q_{\ell(T)+1}^{\frac{1}{\alpha}}$)

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log P(T^{\alpha'})}{\log T} \leq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{-\varepsilon \alpha \log q_{\ell(T)+1}}{\log q_{\ell(T)}} \leq -\varepsilon \alpha < 0. \text{ Logo, } \alpha' > \alpha_l^+.$$

□

Corolário 1.5 (Corolário 1.3 em [4]). *Suponha que existam $\beta > 3$ e uma seqüência, $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, de modo que $\sup_{1 \leq j \leq q_\ell} b_{q_\ell, j} < q_\ell^{-\beta}$. Então $\alpha_l^- \leq \frac{3}{\beta}$. Se, além disso, a seqüência $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ crescer exponencialmente, então $\alpha_l^+ \leq \frac{3}{\beta}$.*

Demonstração. Seja $\alpha > \frac{3}{\beta}$. Pelo Teorema 1.1, para todo $T \leq q_\ell^{\frac{1}{\alpha}}$, $P(q_\ell, T) \leq C(V) q_\ell^{\frac{6}{\alpha} - 2\beta}$, em que $C(V) = \frac{4e^2}{(\sqrt{5} + 1)^2} (1 + 2 \|V\|_\infty)^2$ dependente do potencial V . Por hipótese, $\frac{6}{\alpha} - 2\beta < 0$, e assim pelo item (1) da Proposição 1.4, $\alpha_l^- \leq \alpha$; portanto, $\alpha_l^- \leq \frac{3}{\beta}$. Agora, se $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ cresce exponencialmente, tem-se que $\alpha_l^+ \leq \alpha$, o que resulta em $\alpha_l^+ \leq \frac{3}{\beta}$. □

O fator $(1 + 2\|V\|_\infty)^2 T^6$ no Teorema 1.1 é em parte devido à aproximação efetiva de V por V_{per} . Como no Corolário anterior, o fator $O(T^6)$ implica que, para o Teorema 1.1, $(\sup_j b_{q,j})^2$ deve decair bastante rápido. Se considerarmos $\tilde{E}_{q,j} = E_{q,j}(\frac{\pi}{2})$, deveremos mostrar que o controle das propriedades de agrupamento dos $\tilde{E}_{q,j}$ leva a limites exponenciais em $P(q, T)$. Tal análise será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 2

Limitantes inferiores mais refinados

Neste capítulo, apresentaremos limites inferiores mais refinados para os polinômios \mathcal{D}^q avaliados à distância $\frac{1}{T}$ da semirreta positiva. Em particular, avaliaremos as consequências do agrupamento dos zeros desses polinômios.

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

Os limites discutidos aqui são para polinômios bastante gerais, e acredita-se que eles também possam ser interessantes em outros contextos. Desse modo, mudaremos a notação de \mathcal{D} para Q , apenas por conveniência.

Definição 2.1. *Seja Q um polinômio mônico de grau q com zeros reais e simples. O conjunto dos zeros de Q será denotado por $Z(Q) = \{z_1, \dots, z_q\}$.*

Como no Capítulo 1, qualquer ponto $E \in \mathbb{R}$ situa-se entre dois pontos extremos de Q ou entre um ponto extremo e $\pm\infty$. Qualquer intervalo desse

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

tipo contém um zero único de Q . Desta forma, associamos a cada ponto $E \in \mathbb{R}$ um zero exclusivo $z(E)$ de Q .

Definição 2.2. *Seja Q um polinômio de grau q e seja $\varepsilon > 0$. Dizemos que Q é ε -coberto se Q é mônico com zeros reais e simples e $Z(Q)$ é coberto por uma coleção finita $U_\varepsilon(Q) = \{I_j\}_{j=1}^k$ ($k \leq q$) de intervalos fechados disjuntos de tamanho que não exceda ε tal que cada I_j contém, além de pelo menos um ponto de $Z(Q)$, um ponto x para o qual $|Q(x)| = 2$. Quando queremos ser explícitos sobre a família dos intervalos da cobertura, devemos dizer que Q é ε -coberto por $U_\varepsilon(Q) = \{I_j\}_{j=1}^k$.*

Observação 2. *Na análise abaixo, $|Q(x)| = 2$ não é essencial. Com modificações óbvias, isso também pode ser feito com qualquer outra constante. Uma vez que a constante relevante para as aplicações é de 2, este será o valor adotado aqui.*

Cabe ainda notar que, fixado Q , existirá $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, então Q não é ε -coberto.

Definição 2.3. *Seja Q um polinômio ε -coberto e seja $\{x_j\}$ o conjunto dos pontos onde $|Q(x)| = 2$ (extremos das bandas espectrais caso $Q = \mathcal{D}^q$). Sejam $\tilde{b}_{Q,j} = |x_j - z(x_j)|$ e $\tilde{b}_Q = \sup_j \{\tilde{b}_{Q,j}\}$. Para $E \in \mathbb{R}$, seja I_E um elemento de $U_\varepsilon(Q)$ contendo $z(E)$. Defina também $d(E) = |E - z(E)|$.*

Neste primeiro Lema, será feita uma análise dos zeros em uma ε -cobertura. Nele, veremos como é possível explorar o agrupamento de zeros na determinação de limites inferiores mais precisos para \mathcal{D}^q .

Lema 2.4 (Lema 3.2 em [4]). *Seja $\varepsilon > 0$ e suponha que Q seja um polinômio ε -coberto. Sejam*

$A^\varepsilon = \{E \in \mathbb{R} \mid d(E) \leq 8\varepsilon\}$ e $B^\varepsilon = \mathbb{R} \setminus A^\varepsilon$. Então, para $E \in A^\varepsilon$, temos

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left| \frac{\varepsilon Q'(z(E))}{e} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{81} \right)^{\#(Z(Q) \cap I_E)}, \quad (2.1)$$

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

e para $E \in B^\varepsilon$, temos

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{b}_Q}\right)^2 9^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \left(\frac{1}{4}\right)^q. \quad (2.2)$$

Demonstração. Demonstraremos primeiramente (2.1). Seja Q um polinômio ε -coberto (e assim, mônico com zeros reais simples, e $Z(Q)$ é coberto por uma coleção finita $U_\varepsilon(Q) = \{I_j\}_{j=1}^k$ de intervalos disjuntos). Sejam $E \in A^\varepsilon = \{E \in \mathbb{R} \mid d(E) \leq 8\varepsilon\}$ e $z(E)$ um zero de Q . Então, como em (1.13), temos a relação

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{Q(E)}{E - z(E)} \right|^2 \frac{\prod_{z_j \neq z(E)} |E + i\varepsilon - z_j|^2}{\prod_{z_j \neq z(E)} |E - z_j|^2}.$$

O argumento para o limite superior em (1.14) se estende a esta situação mais geral, e assim obtemos

$$\begin{aligned} |Q(E + i\varepsilon)|^2 &\geq \frac{\varepsilon^2}{e^2} |Q'(z(E))|^2 \prod_{z_j \neq z(E)} \frac{(E - z_j)^2 + \varepsilon^2}{(E - z_j)^2} \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{e^2} |Q'(z(E))|^2 \prod_{z_j \neq z(E), z_j \in I_E} \frac{(E - z_j)^2 + \varepsilon^2}{(E - z_j)^2} \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{e^2} |Q'(z(E))|^2 \prod_{z_j \neq z(E), z_j \in I_E} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(E - z_j)^2}\right) \\ &\geq \left|\frac{\varepsilon}{e} Q'(z(E))\right|^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(9\varepsilon)^2}\right)^{\#Z(Q) \cap I_E}, \end{aligned}$$

com $\#Z(Q) \cap I_E$ o número de zeros de $Z(Q) \cap I_E$. Portanto,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left|\frac{\varepsilon}{e} Q'(z(E))\right|^2 \left(\frac{82}{81}\right)^{\#Z(Q) \cap I_E}.$$

Para (2.2), fixamos $E \in B^\varepsilon$, e assumimos $E > z(E)$. Uma vez que $Z(Q) \subseteq \mathbb{R}$, $|Q(E + i\varepsilon)| \geq |Q(E)|$ (já que $|Q(E + i\varepsilon)| = \prod_j |z_j - E - i\varepsilon| \geq$

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

$\prod_j |z_j - E| = Q(E)$). Segue-se da definição de $z(E)$ que para qualquer $z(E) < y < E$, $|Q(y)| \leq |Q(E)|$ ($|Q|$ é monótona no intervalo $[z(E), E]$). Seja $\hat{E} \in I_E$ um ponto para o qual $|Q(\hat{E})| = 2$. Temos, $|\hat{E} - z(E)| < \varepsilon$ e $|E - z(E)| > 8\varepsilon$, donde se segue que $z(E) < \hat{E} + 4\varepsilon < E$. Portanto,

$$|Q(E + i\varepsilon)| \geq |Q(E)| \geq |Q(\hat{E} + 4\varepsilon)|.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |Q(\hat{E} + 4\varepsilon)| &\geq \frac{|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)|}{|Q(\hat{E})|} \\ &= \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z(\hat{E})}{\hat{E} - z(\hat{E})} \right| \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z_j}{\hat{E} - z_j} \right| \prod_{z_j \notin I_E} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z_j}{\hat{E} - z_j} \right|. \end{aligned}$$

Uma vez que $|\hat{E} - z(\hat{E})| < \varepsilon$, temos

$$\frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z(\hat{E})|}{|\hat{E} - z(\hat{E})|} \geq \frac{4\varepsilon - \varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} = \frac{3\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}}.$$

Também temos, pelo mesmo motivo (isto é, $|z_j - \hat{E}| < \varepsilon$, $\forall z_j \in I_E$), que

$$\begin{aligned} \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z_j}{\hat{E} - z_j} \right| &= \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \\ &\geq \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} \frac{4\varepsilon - |\hat{E} - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \geq \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} \frac{4\varepsilon - \varepsilon}{\varepsilon} \\ &= \prod_{z_j \in I_E, z_j \neq z(\hat{E})} 3 \geq 3^{\#(Z(Q) \cap I_E) - 1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)| \geq \frac{3\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{\#(Z(Q) \cap I_E) - 1} \prod_{z_j \notin I_E} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z_j}{\hat{E} - z_j} \right|.$$

Quanto aos demais elementos de $Z(Q)$, é claro que aqueles que estão localizados à esquerda de \hat{E} contribuem com um fator superior a 1 no lado

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

direito. Portanto, assumiremos que eles estão todos localizados à direita de \hat{E} .

Apenas nos resta estimar o produtório com $z_j \notin I_E$; podemos assumir que $z_j > E$, e portanto que $|z_j - \hat{E}| > 8\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \prod_{z_j \notin I_E} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon - z_j}{\hat{E} - z_j} \right| &= \prod_{z_j \notin I_E} \left| 1 + \frac{4\varepsilon}{\hat{E} - z_j} \right| \geq \prod_{z_j \notin I_E} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{|\hat{E} - z_j|} \right) \\ &\geq \prod_{z_j \notin I_E} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{8\varepsilon} \right) = \prod_{z_j \notin I_E} \left(\frac{1}{2} \right) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{\#Z(Q) - \#(Z(Q) \cap I_E)}; \end{aligned}$$

combinando as estimativas, obtemos

$$\begin{aligned} |Q(\hat{E} + 4\varepsilon)| &\geq \frac{3\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{\#(Z(Q) \cap I_E) - 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\#Z(Q) - \#(Z(Q) \cap I_E)} \\ &= \frac{\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\#Z(Q)} 2^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\#Z(Q)}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{(\tilde{b}_{Q,j})^2} 9^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \left(\frac{1}{4} \right)^q.$$

□

A estimativa (2.1) implica que a aglomeração de muitos zeros de Q em I_E leva a um limite inferior exponencial em $|Q(E + i\varepsilon)|$ para um E apropriado. Se nem todos os zeros são cobertos por um único intervalo de tamanho ε , essa estimativa (2.2) pode não ser útil; com efeito, pode ocorrer que $9^{\#(Z(Q) \cap I_E)} \left(\frac{1}{4} \right)^q < 1$ se $\#(Z(Q) \cap I_E) \ll q$.

O seguinte resultado é uma modificação do anterior e tem como objetivo lidar com o problema de nem todos os zeros serem cobertos por um único intervalo de tamanho ε .

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

Lema 2.5 (Lema 3.3 em [4]). *Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$. Suponha que Q seja um polinômio ε -coberto e seja $0 < \varphi < 1$ tal que $\varepsilon^{\varphi-1} > 5$. Sejam $A^\varphi = \{E \in \mathbb{R} \mid d(E) \leq \varepsilon^\varphi\}$ e $B^\varphi = \mathbb{R} \setminus A^\varphi$. Então, para $E \in A^\varphi$, tem-se que*

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left| \frac{\varepsilon Q'(z(E))}{e} \right|^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^{2-2\varphi}}{4} \right)^{\#(Z(Q) \cap I_E)}, \quad (2.3)$$

e para $E \in B^\varphi$,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{b}_Q} \right)^2 9^{\#(Z(Q) \cap I_E)} (1 - 4\varepsilon^{1-\varphi})^{2q}. \quad (2.4)$$

Demonstração. Demonstraremos primeiramente (2.3). Para tanto, repetindo o início da demonstração de (2.1), obtemos para $E \in A^\varphi$,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{Q'(z(E))}{e} \right|^2 \prod_{z_j \neq z(E)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(E - z_j)^2} \right)$$

Agora, como $|E - z_j| \leq |E - z(E)| + |z(E) - z_j| \leq \varepsilon^\varphi + \varepsilon$, segue-se que

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{Q'(z(E))}{e} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon^{\varphi-1})^2} \right)^{\#Z(Q) \cap I_E}.$$

Por fim, como

$$1 + \frac{1}{(1 + \varepsilon^{\varphi-1})^2} = 1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon^{\varphi-1} + \varepsilon^{2\varphi-2}} \geq 1 + \frac{1}{4\varepsilon^{2\varphi-2}},$$

obtemos,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \varepsilon^2 \left| \frac{Q'(z(E))}{e} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{4\varepsilon^{2\varphi-2}} \right)^{\#Z(Q) \cap I_E}.$$

Para (2.4), fixe $E \in B^\varphi$ e assumamos $E > z(E)$ (novamente, a demonstração para o caso em que $E < z(E)$ é análoga). Como antes, seja $\hat{E} \in I_E$ um ponto para o qual $|Q(\hat{E})| = 2$. Como $\varepsilon^\varphi > 5\varepsilon$, $z(E) < \hat{E} + 4\varepsilon < E$ (com efeito, $|\hat{E} - z(E)| < \varepsilon$ e $E - z(E) > 5\varepsilon$ resulta em $z(E) < \hat{E} + 4\varepsilon < E$). Assim,

$$|Q(E + i\varepsilon)| \geq |Q(E)| \geq |Q(\hat{E} + 4\varepsilon)|,$$

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

(lembre-se que $|Q|$ é monótona no intervalo $[z(E), E]$).

Logo,

$$\begin{aligned}
|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)| &\geq \left| \frac{Q(\hat{E} + 4\varepsilon)}{Q(\hat{E})} \right| = \prod_{z_j} \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \\
&= \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z(\hat{E})|}{|\hat{E} - z(\hat{E})|} \prod_{z_j \neq z(\hat{E}), z_j \in I_E} \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \prod_{z_j \notin I_E} \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{(\#Z(Q) \cap I_E)} \prod_{z_j \notin I_E} \frac{|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j|}{|\hat{E} - z_j|} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{(\#Z(Q) \cap I_E)} \prod_{z_j \notin I_E} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{|\hat{E} - z_j|} \right),
\end{aligned}$$

em que usamos $|\hat{E} + 4\varepsilon - z_j| \geq 3|\hat{E} - z_j|$ na primeira desigualdade.

Como $z_j \notin I_E$ e $z_j > E$ implicam em $|z_j - \hat{E}| > |z_j - E| > \varepsilon^\varphi$, segue-se que

$$|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)| \geq \frac{\varepsilon}{\tilde{b}_{Q,j}} 3^{(\#Z(Q) \cap I_E)} (1 - 4\varepsilon^{1-\varphi})^{\#Z(Q)},$$

e assim,

$$|Q(\hat{E} + 4\varepsilon)|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{(\tilde{b}_{Q,j})^2} 9^{(\#Z(Q) \cap I_E)} (1 - 4\varepsilon^{1-\varphi})^{2q},$$

já que $\#Z(Q) = q$. □

Definição 2.6 (Definição 3.4 em [4]). *Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $0 < \xi \leq 1$. Dizemos que o polinômio Q é (ε, ξ) -aglomerado se Q é ε -coberto por algum $U_\varepsilon(Q) = \{I_j\}_{j=1}^k$, de modo que para qualquer $I_j \in U_\varepsilon(Q)$, $\#(Z(Q) \cap I_j) \geq q^\xi$. Quando queremos ser explícitos sobre a cobertura, dizemos que Q é (ε, ξ) -agrupado por $U = \{I_j\}_{j=1}^k$.*

Lema 2.7 (Lema 3.5 em [4]). *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $\frac{2}{3} < \xi \leq 1$. Então, existem $\delta = \delta(\alpha, \xi) > 0$, $q_0 = q_0(\alpha, \xi, \delta) > 0$ e uma constante universal $C > 0$ tais que qualquer polinômio Q $(q^{\frac{-1}{\alpha}}, \xi)$ -agrupado com $q \equiv \deg(Q) \geq q_0$ satisfaz*

$$\inf_{E \in \mathbb{R}} |Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 \geq \frac{1}{e^2} \left(\min \left\{ \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|, (\tilde{b}_Q)^{-1} \right\} \right)^2 e^{Cq^\delta} \quad (2.5)$$

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

Demonstração. Se $\xi = 1$ então, por hipótese, existe um único intervalo de tamanho $q^{\frac{-1}{\alpha}}$ contendo todos os zeros de Q , (vide Definição 2.6). Segue-se do Lema 2.4 que para $\varepsilon = q^{\frac{-1}{\alpha}}$ e $E \in A^\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 &\geq \frac{q^{\frac{-2}{\alpha}}}{e^2} |Q'(z(E))|^2 \left(\frac{82}{81}\right)^{\#Z(Q) \cap I_E} \\ &= \frac{q^{\frac{-2}{\alpha}}}{e^2} |Q'(z(E))|^2 \left(\frac{82}{81}\right)^q, \end{aligned}$$

uma vez que $\#Z(Q) \cap I_E = q^\xi = q$, e para $E \in B^\varepsilon = \mathbb{R} \setminus A^\varepsilon$,

$$|Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_{Q,j}}\right)^2 9^q \left(\frac{1}{4}\right)^q.$$

Logo,

$$|Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 \geq \min \left(\left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}} \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|}{e} \right)^2 \left(\frac{82}{81}\right)^q, \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_Q}\right)^2 \left(\frac{9}{4}\right)^q \right),$$

donde se segue que (2.5) é válida para todo $\delta < 1$ e para q suficientemente grande.

Assumamos agora que $\frac{2}{3} < \xi < 1$, e seja novamente $\varepsilon \equiv q^{\frac{-1}{\alpha}}$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\delta = \min(\frac{3}{2}\xi - 1, 1 - \xi)$. Segue-se então que

$$0 < \frac{3\xi}{2} - 1 < \frac{\xi}{2} - \delta < 1.$$

Seja $\varphi = 1 - \frac{\alpha\xi}{2} + \alpha\delta$. Então, $0 < \varphi < 1$, e para q suficientemente grande, $\varepsilon^{\varphi-1} = q^{-\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}} = q^{\frac{\xi}{2} - \delta} > q^{\frac{3\xi}{2} - 1} > 5$, uma vez que $\frac{\xi}{2} - \delta > \frac{3\xi}{2} - 1$.

Pelo Lema 2.5 temos, para $E \in A^\varphi$,

$$|Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}} \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|}{e} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}}} \right)^{q^\xi},$$

já que $\#Z(Q) \cap I_E \geq q^\xi$, por hipótese.

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

Uma vez que $\left(1 + \frac{1}{4q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}}}\right) < 2$, pois $0 < \varphi, \alpha < 1$, usamos o fato de que $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ e assim obtemos

$$1 + \frac{1}{4q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}}} \geq \exp\left\{-\left(1 + 4q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}}\right)\right\} \geq \exp\left\{-8q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}}\right\},$$

dado que $4q^{\frac{(2-2\varphi)}{\alpha}} \geq 1$. Logo,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left| \frac{q^{\frac{-1}{\alpha}} \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|}{e} \right|^2 \left(e^{\frac{q^\xi + \frac{2\varphi}{8} - \frac{2}{\alpha}}{8}} \right)$$

Como $\varphi = 1 - \frac{\alpha\xi}{2} + \alpha\delta$ resulta em $2\delta = \frac{2\varphi}{\alpha} + \xi - \frac{2}{\alpha}$, obtemos

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}} \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|}{e} \right)^2 \left(e^{\frac{q^{2\delta}}{8}} \right).$$

Agora, caso $E \in B^\varphi$, temos do Lema 2.5 que

$$|Q(E + iq^{\frac{-1}{\alpha}})|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_Q} \right)^2 9^{q^\xi} \left(1 - 4q^{\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}}\right)^{2q} = \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_Q} \right)^2 9^{q^\xi} \left(1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}\right)^{2q}.$$

Novamente, como $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$, temos que $1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}} \geq \exp\left\{\frac{-4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}}{1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}}\right\}$. Assim,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_Q} \right)^2 9^{q^\xi} \exp\left(\frac{-8q^{1+\delta - \frac{\xi}{2}}}{1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}}\right),$$

e já que para q suficientemente grande, $\frac{-8q^{1+\delta - \frac{\xi}{2}}}{1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}} \geq -16q^{1+\delta - \frac{\xi}{2}}$ (pois $-1 < \delta - \frac{\xi}{2} < 0$; basta tomar q de modo que $1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{1 - 4q^{\delta - \frac{\xi}{2}}} > -2$), obtemos

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{q^{\frac{-1}{\alpha}}}{\tilde{b}_{Q,j}} \right)^2 e^{q^\xi} \left(e^{-16q^{1+\delta - \frac{\xi}{2}}} \right)$$

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

$$\geq \left(\frac{q^{-\frac{1}{\alpha}}}{\tilde{b}_{Q,j}} \right)^2 e^{q^\xi - 16q^{1+\delta} - \frac{\xi}{2}} = \left(\frac{q^{-\frac{1}{\alpha}}}{\tilde{b}_{Q,j}} \right)^2 e^{q^\xi \left(1 - 16q^{1+\delta} - \frac{3\xi}{2} \right)}.$$

Por fim, como $1 + \delta - \frac{3\xi}{2} < 0$, tome q de modo que $1 - 16q^{1+\delta} - \frac{3\xi}{2} \geq \frac{1}{2}$, o que resulta em

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \left(\frac{q^{-\frac{1}{\alpha}}}{\tilde{b}_{Q,j}} \right)^2 e^{\frac{q^\xi}{2}}.$$

Assim, uma vez que $\delta < \xi$, vemos que para q suficientemente grande,

$$|Q(E + i\varepsilon)|^2 \geq \frac{1}{e^2} \left(\min \left\{ \min_{z \in Z(Q)} |Q'(z)|, (\tilde{b}_Q)^{-1} \right\} \right)^2 e^{\frac{q^\delta}{8}}.$$

□

Teorema 2.8 ([4]). *Seja $b_{q,j} \equiv |E_{q,j}(\pi) - E_{q,j}(0)|$, $1 \leq j \leq q$. Dado $\frac{2}{3} < \xi \leq 1$ e $0 < \alpha < 1$, existem constantes $\delta > 0$ e $q_0 > 0$ tais que, se $q \geq q_0$ e o conjunto $\mathfrak{C} \equiv \tilde{E}_{q,1} < \tilde{E}_{q,2} < \dots < \tilde{E}_{q,q}$ é $(q^{-\frac{1}{\alpha}}, \xi)$ -agrupado, então, para $T \leq q^{\frac{1}{\alpha}}$,*

$$P(q, T) \leq 4e^2(1 + 2 \|V\|_\infty)^2 T^4 \left(\sup_{1 \leq j \leq q} b_{q,j} \right)^2 e^{-Cq^\delta}, \quad (2.6)$$

em que C é uma constante universal. Em particular,

$$P(q, q^{\frac{1}{\alpha}}) \leq 4e^2(1 + 2 \|V\|_\infty)^2 q^{\frac{4}{\alpha}} \left(\sup_{1 \leq j \leq q} b_{q,j} \right)^2 e^{-Cq^\delta}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Pelo Lema 1.2,

$$P(q, T) \leq 4T^4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q \left(E + \frac{i}{T} \right) \right|^{-2}.$$

Uma vez que $T^{-1} \geq q^{-\frac{1}{\alpha}}$, $\left| \mathcal{D}^q \left(E + \frac{i}{T} \right) \right| = \prod_j |E + \frac{i}{T} - z_j| \geq \prod_j |E + iq^{-\frac{1}{\alpha}} - z_j| = \left| \mathcal{D}^q \left(E + iq^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \right|.$

Por hipótese, que existe uma coleção $U(\mathcal{D}^q) = \{I_1, \dots, I_k\}$ de intervalos disjuntos, cada um de tamanho que não excede $q^{-\frac{1}{\alpha}}$, de modo que cada um desses intervalos contém pelo menos q^ξ zeros de \mathcal{D}^q . Como $q^\xi \geq 2$ para

2.1 Uma análise criteriosa do Teorema Central

q grande o suficiente, vemos da Proposição A.2 que \mathcal{D}^q é $(q^{-\frac{1}{\alpha}}, \xi)$ -agrupado (disso se segue a existência, $\forall j \in \{1, \dots, k\}$, de $E \in I$ tal que $|\mathcal{D}^q(E)| = 2$, logo, $Z(\mathcal{D}^q)$ é $q^{-\frac{1}{\alpha}}$ -coberto).

Portanto, pelo Lema 2.7,

$$\inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q(E + iq^{-\frac{1}{\alpha}}) \right|^2 \geq \frac{1}{e^2} \left(\min \left\{ \min_j |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})|, (\tilde{b}_{\mathcal{D}^q})^{-1} \right\} \right)^2 e^{Cq^\delta}, \quad (2.8)$$

em que C é universal e δ depende de α e ξ .

Agora, como $\tilde{b}_{\mathcal{D}^q,j}$ é a distância entre um ponto extremo da j -ésima da banda espectral e o ponto em que o discriminante se anula, e $b_{q,j}$ a distância entre os extremos da banda, claramente $\tilde{b}_{\mathcal{D}^q,j} \leq b_{q,j}$, e portanto, $\tilde{b}_Q \leq \sup_{1 \leq j \leq q} b_{q,j}$.

Segue-se do Lema 1.3 que

$$\begin{aligned} P(q, T) &\leq 4T^4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q(E + iq^{-\frac{1}{\alpha}}) \right|^{-2} \\ &\leq 4T^4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 e^2 \left(\min \left\{ \min_j |(\mathcal{D}^q)'(\tilde{E}_{q,j})|, (\tilde{b}_{\mathcal{D}^q}) \right\} \right)^2 e^{-Cq^\delta} \\ &\leq 4e^2 T^4 (1 + 2\|V\|_\infty)^2 \sup_{1 \leq j \leq q} (b_{q,j})^2 e^{-Cq^\delta}. \end{aligned}$$

□

Uma séria limitação do Teorema 2.8 é o limite inferior assumido na intensidade do agrupamento dos zeros, ou seja, a exigência de que $\xi > \frac{2}{3}$. A razão para este requisito é o fato de que é necessário superar um fator exponencialmente decrescente na estimativa de $|Q(E + i\varepsilon)|$ para $E \in B^\varphi$ (ver (2.2), (2.4) e comentário após o Lema 1.3). O problema aqui é a ausência de um limite inferior na distância dos zeros de Q que estão à direita de E . Esse limite inferior, no entanto, poderia ser obtido assumindo-se um limite superior na força de agrupamento e um limite inferior nos tamanhos do agrupamento. As definições precisas e os resultados obtidos a partir de tais hipóteses serão discutidos na próxima subseção.

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

Corolário 2.9 (Corolário 1.9 em [4]). *Suponha que existam $\frac{2}{3} < \xi \leq 1$, $0 < \alpha < 1$ e uma sequência $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, de modo que o conjunto \mathfrak{C}_{q_ℓ} seja $(q_\ell^{-\frac{1}{\alpha}}, \xi)$ -agrupado para todos $\ell \in \mathbb{N}$. Então $\alpha_u^- \leq \alpha$. Se, além disso, a sequência $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ cresce exponencialmente, então $\alpha_u^+ \leq \alpha$.*

Demonstração. Segue-se diretamente da Proposição 1.4 e do Teorema 2.8 \square

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

Nesta seção discutiremos o último teorema da análise dinâmica presente em [4]. Este teorema é um refinamento do Teorema 1.1, e um caso muito específico do Teorema 2.8.

Definição 2.10 (Definição 1.8 em [4]). *Seja $\left\{U_\ell = \{I_j^\ell\}_{j=1}^{k_\ell}\right\}_{\ell=1}^\infty$ uma sequência de conjuntos de intervalos tais que $C\varepsilon_\ell^\mu \leq |I_j^\ell| \leq \varepsilon_\ell$ para uma sequência monotônica decrescente $\{\varepsilon_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ e constantes $C > 0$ e $\mu \geq 1$. Seja $0 < \omega < 1$. Dizemos que $\{U_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ escala bem com os expoentes μ e ω se, para qualquer $0 < \varepsilon < 1$, existe um conjunto de intervalos $U_\varepsilon = \{I_j^\varepsilon\}_{j=1}^{k_\varepsilon}$, de comprimento no máximo ε e não inferior a $C\varepsilon^\mu$, tal que $U_{\varepsilon_\ell} = U_\ell$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Se $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, então para todo $1 \leq j \leq k_{\varepsilon_2}$ existe um $1 \leq m \leq k_{\varepsilon_1}$ tal que $I_j^{\varepsilon_2} \subseteq I_m^{\varepsilon_1}$ (isso nos diz que todo intervalo de escala superior está contido em um de escala inferior).*

(ii) *Existe uma constante $C_3 > 0$ tal que se $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ então para todo $1 \leq m \leq k_{\varepsilon_1}$, $\#\{j | I_j^{\varepsilon_2} \cap I_m^{\varepsilon_1} \neq \emptyset\} \leq C_3 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^\omega$.*

Em outras palavras, $\{U_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ escala bem se a sequência puder ser estendida a uma família “contínua” (parametrizada pelos comprimentos de intervalo) de tal forma que os intervalos de uma escala de comprimento estejam contidos ((i) da Definição 2.10) e, de certa maneira, bem distribuídos entre os intervalos de uma escala maior ((ii) da Definição 2.10). Vale ainda observar que a família U_ε não é necessariamente disjunta.

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

Observação 3. *Um exemplo de uma seqüência que escala bem é dada pela seqüência $\{U_l\}_{l=1}^\infty$ onde $U_1 = \{[0, 1/3], [2/3, 1]\}$, $U_2 = \{[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]\}$ e assim por diante (U_l é o conjunto de intervalos obtidos pela remoção dos terços médios dos intervalos compreendendo U_{l-1}). Não é difícil ver que esta seqüência escala bem com expoentes $\mu = 1$ e $\omega = \frac{\log 2}{\log 3}$ (colocando 2 como o valor de C_3 na Definição 2.10).*

Definição 2.11 (Definição 3.6 em [4]). *Dizemos que uma seqüência de polinômios, $\{Q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, com $\deg(Q_\ell) \equiv q_\ell \rightarrow \infty$, quando $\ell \rightarrow \infty$, é uniformemente agrupada se Q_ℓ é $\{q_\ell^{\frac{-1}{\alpha_\ell}}, \xi_\ell\}$ -agrupado por $U_\ell = \{I_j^\ell\}_{j=1}^{k_\ell}$ e além disso:*

(i) *Se $\ell_1 < \ell_2$, então $q_{\ell_1}^{\frac{-1}{\alpha_{\ell_1}}} > q_{\ell_2}^{\frac{-1}{\alpha_{\ell_2}}}$.*

(ii) *Existem $\mu \geq 1$ e uma constante $C_1 > 0$ tais que*

$$\inf_{1 \leq j \leq k_\ell} |I_j^\ell| \geq C_1 q_\ell^{\frac{-\mu}{\alpha_\ell}},$$

(isso nos diz que todas as bandas associadas a uma dada escala tem comprimentos limitados inferiormente por parâmetros uniformes).

(iii) *Existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \xi_\ell < (1 - \delta)$, e $\delta < \alpha_\ell < 1$, $\forall \ell$ (o número de zeros de Q_ℓ em cada elemento de U_ℓ é uniformemente limitado, tanto superiormente quanto inferiormente).*

(iv) *Se definimos $\bar{\xi}_\ell := \sup_{1 \leq j \leq k_\ell} \#(Z(Q_\ell) \cap I_j^\ell) \leq q_\ell^{\bar{\xi}_\ell}$, então existe uma constante C_2 tal que*

$$\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell \leq \frac{C_2}{\log q_\ell}$$

(a diferença entre a quantidade máxima de zeros de Q_ℓ em um intervalo de U_ℓ e a quantidade de zeros nos demais intervalos decai logaritmicamente com q_ℓ ; isso indica uma homogeneidade na distribuição destes zeros ao longo dos intervalos de U_ℓ).

Como acima, quando quisermos ser explícitos sobre a cobertura e os expoentes relevantes, deveremos dizer que $\{Q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ é uniformemente agrupado por $U_\ell = \{I_j^\ell\}_{j=1}^{k_\ell}$ com expoentes $\{\alpha_\ell, \xi_\ell, \mu\}$.

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

O seguinte resultado nos mostra que a existência de tais limites simultaneamente em diferentes escalas nos permite considerar qualquer $\xi > 0$, e assim aprimorar o resultado enunciado no Teorema 2.8.

Lema 2.12 (Lema 3.7 em [4]). *Seja $\{Q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ uma sequência de polinômios com $\deg(Q_\ell) \equiv q_\ell \rightarrow \infty$ quando $\ell \rightarrow \infty$, que é uniformemente agrupada por $U_\ell = \{I_j^\ell\}_{j=1}^{k_\ell}$, com expoentes $\{\alpha_\ell, \xi_\ell, \mu\}$. Suponha, além disso, que $\{U_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ escala bem com expoentes μ e ω para $0 < \omega < 1$. Assuma também que, para algum $\zeta > 0$,*

$$2\omega \left(\frac{\mu - 1}{\mu - \omega} \right) + \zeta < \xi_\ell \alpha_\ell. \quad (2.9)$$

Finalmente, suponha que $\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \left(\inf_{z \in Z(Q_\ell)} |Q'_\ell(z)| \right) > 0$ e que \tilde{b}_{Q_ℓ} é limitado superiormente. Então, para todo $m > 0$,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\inf_{E \in \mathbb{R}} |Q_\ell(E + iq_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}})| q_\ell^{-\frac{m}{\alpha_\ell}} \right) = \infty. \quad (2.10)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon_\ell = q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}}$. Escolha $\delta > 0$ de modo que $\liminf_{\ell} \frac{\xi_\ell}{2} - \delta > 0$ (e portanto, que $\frac{\xi_\ell \alpha_\ell}{2} > \delta \alpha_\ell$ para ℓ suficientemente grande), e $\frac{\zeta}{2\alpha_\ell} > \delta$ para todo ℓ , e seja $\varphi_\ell = 1 - \frac{\alpha_\ell \xi_\ell}{2} + \alpha_\ell \delta$; como, por hipótese $0 < \delta < \alpha_\ell < 1$ segue-se que $0 < \varphi_\ell < 1 - \frac{\alpha_\ell \xi_\ell}{2} + \frac{\alpha_\ell \xi_\ell}{2} = 1$.

Como no Lema 2.5, sejam

$$A^{\varphi_\ell} = \{E \in \mathbb{R} \mid d(E) \leq \varepsilon_\ell^{\varphi_\ell}\}$$

e

$$B^{\varphi_\ell} = (\mathbb{R} \setminus A^{\varphi_\ell}) = \{E \in \mathbb{R} \mid d(E) > \varepsilon_\ell^{\varphi_\ell}\}.$$

Então, para ℓ suficientemente grande e para $E \in A^{\varphi_\ell}$, segue-se como na demonstração do Lema 2.7 que

$$|Q_\ell(E + i\varepsilon_\ell)|^2 \geq \left(\frac{q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}} \min_{z \in Z(Q_\ell)} |Q'_\ell(z)|}{e} \right)^2 e^{\frac{q_\ell^{2\delta}}{8}}.$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

Uma vez que α_ℓ e $\min_{z \in Z(Q_\ell)} |Q'_\ell(z)|$ são estritamente positivos, basta obter um limite inferior envolvendo $|Q_\ell(E + iq_\ell^{\frac{-1}{\alpha_\ell}})|$ para $E \in B^{\varphi_\ell}$ e para ℓ suficientemente grande (com efeito, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{q_\ell^{2\delta}/8} q_\ell^{-m/\alpha_\ell} = \infty$ para todo $m > 0$).

Seja, portanto $E \in B^{\varphi_\ell}$. Como antes, uma vez que $0 < \varphi_\ell < 1$ caso ℓ seja suficientemente grande, teremos então $\varepsilon_\ell^{\varphi_\ell} > 5\varepsilon_\ell$. Sejam $\{z_\ell^j\}_{j=1}^{q_\ell}$ os zeros de Q_ℓ e seja $z^\ell(E)$ o único zero associado a E como de acordo com a discussão do início desta seção. Assuma que $z^\ell(E) < E$ e seja $\hat{E} \in I_E^\ell$ tal que $|Q_\ell(\hat{E})| = 2$. Como antes,

$$\begin{aligned} |Q_\ell(E + i\varepsilon_\ell)| &\geq |Q_\ell(\hat{E} + 4\varepsilon_\ell)| \geq \frac{q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}}}{\tilde{b}_{Q_\ell}} 3^{\#\{Z(Q_\ell) \cap I_E^\ell\}} \prod_{z_j^\ell \notin I_E^\ell} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon_\ell - z_j^\ell}{\hat{E} - z_j^\ell} \right| \\ &\geq \frac{q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}}}{\tilde{b}_{Q_\ell}} e^{q_\ell^{\xi_\ell}} \prod_{z_j^\ell \notin I_E^\ell} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon_\ell - z_j^\ell}{\hat{E} - z_j^\ell} \right| \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usaremos agora o fato de $\{Q_\ell\}$ ser uniformemente agrupado por uma cobertura que escala bem a fim de obtermos limites inferiores para $\prod_{z_j^\ell \notin I_E^\ell} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon_\ell - z_j^\ell}{\hat{E} - z_j^\ell} \right|$. Como na demonstração do Lema 2.5, suponha que $z_j^\ell \notin I_E^\ell$ esteja à direita de \hat{E} .

Dado $\eta > 0$, seja M um número inteiro tal que $\frac{\varphi_\ell}{\alpha_\ell M} < \xi_\ell + \frac{1}{\alpha_\ell} - 1 - \eta$ para todo ℓ (tal M existe, uma vez que $\delta < \alpha_\ell < 1$, $\delta < \xi_\ell < 1 - \delta$ e $0 < \varphi_\ell < 1$). Seja $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\ell) = \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M\mu}}$. Então, uma vez que, por hipótese, $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon=1}^\infty$ escala bem com os expoentes μ e ω , existe uma coleção de intervalos U_ε de comprimento no máximo $\hat{\varepsilon}$ e pelo menos $C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M}}$ (com C_1 uma constante positiva) cobrindo os elementos de U_ℓ como na Definição 2.10. Note que $0 < \hat{\varepsilon} < 1$, pois $0 < \varepsilon_\ell < 1$ e $\mu \geq 1$ com $C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M\mu}} \leq |I_j^\ell| \leq \hat{\varepsilon}$. Em particular, é possível cobrir $J \equiv \cup_{j=1}^{k_\ell} I_j^\ell \cap [E, E + C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M}}]$ usando não mais do que dois elementos de U_ε (já que os intervalos I_j^ℓ são disjuntos e cada um tem comprimento maior ou igual do que $C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M}}$).

Analisaremos agora a possível distribuição de zeros de Q_ℓ em J . Seja $1 \leq$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$r < M$. Segue-se do item (ii) da Definição 2.10 que existe $C_3 > 0$ tal que todo elemento de $U_{\hat{\varepsilon}^r}$ não contém mais do que $C_3 \left(\frac{\hat{\varepsilon}^r}{\varepsilon_\ell} \right)^\omega = C_3 \left(\left(\frac{\varphi_\ell}{\varepsilon_\ell^{M\mu}} \right)^r \varepsilon_\ell^{-1} \right)^\omega = C_3 \varepsilon_\ell^{\omega \left(\frac{r\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}$ elementos de U_{ε_ℓ} (claramente, $\hat{\varepsilon}^r > \varepsilon_\ell$, uma vez que da definição de r se segue que $\frac{\varphi_\ell r}{M\mu} < 1$). Pela hipótese de agrupamento uniforme, cada conjunto em U_{ε_ℓ} não contém mais do que $q_\ell^{\bar{\xi}_\ell}$ zeros de Q_ℓ . Portanto, cada intervalo de $U_{\hat{\varepsilon}^r}$ não contém mais do que $C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell} \varepsilon_\ell^{\omega \left(\frac{r\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} = C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell} \left(q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}} \right)^{\omega \left(\frac{r\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} = C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{r\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}$ zeros de Q_ℓ .

Agora, não há mais do que $C_3 \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}^2} \right)^\omega = C_3 \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \right)^\omega = C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}}$ elementos de $U_{\hat{\varepsilon}^2}$ em cada intervalo de $U_{\hat{\varepsilon}}$. Portanto, $2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}}$ elementos de $U_{\hat{\varepsilon}^2}$ são suficientes para cobrir J . Cada um deles tem comprimento pelo menos igual a $C_1 \hat{\varepsilon}^{2\mu} = C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{2\varphi_\ell}{M}}$ e não possui mais do que $C_3 \left(\frac{\hat{\varepsilon}^2}{\varepsilon_\ell} \right)^\omega q_\ell^{\bar{\xi}_\ell} = C_3 \varepsilon_\ell^{\omega \left(\frac{2\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell} = C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{2\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}$ zeros de Q_ℓ . Escolha os dois intervalos de $U_{\hat{\varepsilon}^2}$ mais próximos de E (de modo que pelo menos um deles esteja completamente à direita de E).

Cada um desses intervalos não contém mais do que $C_3 \left(\frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{\varepsilon}^3} \right)^\omega = C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}}$ elementos de $U_{\hat{\varepsilon}^3}$, cada um deles de comprimento pelo menos igual $C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{3\varphi_\ell}{M}}$ e contendo, no máximo, $C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{3\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}$ zeros de Q_ℓ . Dos elementos de $U_{\hat{\varepsilon}^3}$ (contidos nos dois intervalos acima), tomaremos os dois mais próximos de E (novamente, de modo que pelo menos um esteja completamente à direita de E) e os decomporremos como acima em elementos de $U_{\hat{\varepsilon}^4}$. Prosseguimos deste modo até $U_{\hat{\varepsilon}^M}$. Deste procedimento, obtemos

$$\prod_{z_j^\ell \notin I_E^\ell} \left| \frac{\hat{E} + 4\varepsilon_\ell - z_j^\ell}{\hat{E} - z_j^\ell} \right| \geq \Theta_1(\ell) \Theta_2(\ell), \quad (2.12)$$

em que, tomando $\tilde{C}_1 = \min(1, C_1)$,

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\ell) &= \left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1} \prod_{i=1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\varphi_\ell}} \right)^{2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{\varphi_\ell}{\mu} - 1 \right)}} \\
&\cdot \left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1} \prod_{i=1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\frac{M-1}{M}\varphi_\ell}} \right)^{2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-1)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}} \\
&\cdot \left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1} \prod_{i=1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\frac{M-2}{M}\varphi_\ell}} \right)^{2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-2)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}} \\
&\dots \left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1} \prod_{i=1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\frac{2}{M}\varphi_\ell}} \right)^{2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{2\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}},
\end{aligned}$$

e

$$\Theta_2(\ell) = \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M}}} \right)^{q_\ell}.$$

O termo $\Theta_2(\ell)$ vem dos zeros de Q_ℓ fora de J . O termo $\Theta_1(\ell)$ vem da contribuição dos zeros dentro de J . O primeiro termo no produto que define

$$\Theta_1(\ell), \text{ isto é, } \left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1} \prod_{i=1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{\varphi_\ell}} \right)^{2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{\varphi_\ell}{\mu} - 1 \right)}}, \text{ vem da contribuição}$$

dos zeros dentro dos dois intervalos de $U_{\hat{\varepsilon}M-1}$ que são mais próximos de E à direita (um deles pode conter E e também se estender à esquerda). Os zeros

dentro de cada um desses intervalos devem estar distribuídos no máximo entre $\left[2C_3\varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]_{+1}$ dos elementos de $U_{\hat{\varepsilon}M}$ com no máximo $C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{\varphi_\ell}{\mu} - 1 \right)}$ em cada elemento. Do mesmo modo, o segundo termo no produto vem da estimativa

da contribuição dos zeros dentro dos dois intervalos de $U_{\hat{\varepsilon}M-2}$ que são mais próximos de E à direita. Prosseguindo desta maneira, obtemos $\Theta_1(\ell)$. O fator

2 no expoente $2C_3q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{\varphi_\ell}{\mu} - 1 \right)}$ vem do fato de que os intervalos nos vários

U_ε podem se cruzar. Mais uma vez, lembramos que assumimos que todos os zeros fora do I_E^ℓ estão à direita de E . Por fim, como $|\hat{E} - z_j^\ell| \geq i\tilde{C}_1\varepsilon_\ell^{k\frac{\varphi_\ell}{M}}$ se z_i^ℓ

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

pertencer a algum elemento de U_{ε^k} que não seja um dos dois mais próximos de E , segue-se (2.12).

Por (2.11), basta mostrar $\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq 0$, $\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \Theta_2(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq 0$. Verifiquemos inicialmente a desigualdade para $\Theta_2(\ell)$:

$$\begin{aligned} \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \Theta_2(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} &= \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \log \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{C_1 \varepsilon_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M}}} \right)^{q_\ell} \\ &= \liminf_{\ell \rightarrow \infty} q_\ell^{1-\xi_\ell} \log \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell^{1-\frac{\varphi_\ell}{M}}}{C_1} \right) \geq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} q_\ell^{1-\delta} \log \left(1 - \frac{4q_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{\alpha_\ell M} - \frac{1}{\alpha_\ell}}}{C_1} \right) \\ &\geq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} q_\ell^{1-\delta} \log \left(1 - \frac{4q_\ell^{1-\frac{1}{M}}}{C_1} \right), \end{aligned}$$

pois temos que $\frac{1}{\alpha_\ell} \left(1 - \frac{\varphi_\ell}{M} \right) > \frac{1}{\alpha_\ell} \left(1 - \frac{1}{M} \right) > \left(1 - \frac{1}{M} \right)$

Assim,

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} q_\ell^{1-\delta} \log \left(1 - \frac{4q_\ell^{1-\frac{1}{M}}}{C_1} \right) \rightarrow 0$$

uma vez que $1 - \delta < 1$.

Agora, demonstremos que $\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} &= \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \log \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i \tilde{C}_1 \varepsilon_\ell^{\varphi_\ell}} \right)^{2C_3 q_\ell^{\xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{\varphi_\ell}{\mu} - 1 \right)}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \log \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i \tilde{C}_1 \varepsilon_\ell^{\frac{M-1}{M} \varphi_\ell}} \right)^{2C_3 q_\ell^{\xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{M-1}{M\mu} \varphi_\ell - 1 \right)}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \log \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i \tilde{C}_1 \varepsilon_\ell^{\frac{M-2}{M} \varphi_\ell}} \right)^{2C_3 q_\ell^{\xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{M-2}{M\mu} \varphi_\ell - 1 \right)}} \right) \end{aligned}$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \log \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell}{i \tilde{C}_1 \varepsilon_\ell^{\frac{2}{M} \varphi_\ell}} \right)^{2C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{2\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}} \right) \\
& \geq \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \sum_{s=0}^{M-2} \log \left(\prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1} \right)^{2C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-s)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)}} \right) \\
& \geq \frac{1}{q_\ell^{\xi_\ell}} \sum_{s=0}^{M-2} 2C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-s)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} \log \prod_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1} \right) \\
& \geq \sum_{s=0}^{M-2} 2C_3 q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-s)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} \sum_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \log \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1} \right)
\end{aligned}$$

Temos que

$$\log \left(1 - \frac{4\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1} \right) \geq -\frac{8\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1},$$

desde que $\frac{\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1}$ seja pequeno. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} & \geq -16C_3 \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-s)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} \sum_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \frac{\varepsilon_\ell^{1 - \frac{M-s}{M} \varphi_\ell}}{i \tilde{C}_1} \\
& \geq \frac{-16C_3}{\tilde{C}_1} \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell - \frac{\omega}{\alpha_\ell} \left(\frac{(M-s)\varphi_\ell}{M\mu} - 1 \right)} \frac{\varepsilon_\ell^{\frac{M-s}{M\alpha_\ell} \varphi_\ell - \frac{1}{\alpha_\ell}}}{q_\ell^{\frac{M-s}{M\alpha_\ell} \varphi_\ell - \frac{1}{\alpha_\ell}}} \sum_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \frac{1}{i} \\
& \geq \frac{-16C_3}{\tilde{C}_1} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell - \frac{1}{\alpha_\ell} + \frac{\omega}{\alpha_\ell} - \frac{\omega \varphi_\ell}{\alpha_\ell \mu} + \frac{\varphi_\ell}{\alpha_\ell}} \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\left(\frac{\omega \varphi_\ell}{M\alpha_\ell \mu} - \frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell} \right) s} \sum_{i=1}^{\left\lfloor 2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell \omega}{M\mu}} \right\rfloor + 1} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$$\geq -C q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell} q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1 - \frac{\omega}{\mu}) + \omega - 1)} \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\left(\frac{\omega\varphi_\ell}{M\alpha_\ell\mu} - \frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}\right)s} \left[2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]^{+1} \sum_{i=1} \frac{1}{i},$$

com $C = \frac{16C_3}{\tilde{C}_1}$. Agora, como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} \left[2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right]^{+1} \frac{1}{i} &\geq \int_1 \left[2C_3 \varepsilon_\ell^{-\frac{\varphi_\ell\omega}{M\mu}} \right] \frac{1}{x} dx = \int_1 \left[2C_3 q_\ell^{\frac{\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu}} \right] \frac{1}{x} dx \\ &= \log \left(2C_3 q_\ell^{\frac{\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu}} \right) = \log(2C_3) + \frac{\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu} \log q_\ell \geq \frac{\hat{C}\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu} \log q_\ell. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} &\geq -C \hat{C} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell} \frac{\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu} \log(q_\ell) q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1 - \frac{\omega}{\mu}) + \omega - 1)} \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\left(\frac{\omega\varphi_\ell}{M\alpha_\ell\mu} - \frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}\right)s} \\ &\geq -\tilde{C} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell} \log(q_\ell) q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1 - \frac{\omega}{\mu}) + \omega - 1)} \sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\left(\frac{\omega\varphi_\ell}{M\alpha_\ell\mu} - \frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}\right)s}, \end{aligned}$$

com $\tilde{C} = C \frac{\hat{C}\varphi_\ell\omega}{M\alpha_\ell\mu}$. Por fim, de

$$\sum_{s=0}^{M-2} q_\ell^{\left(\frac{\omega\varphi_\ell}{M\alpha_\ell\mu} - \frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}\right)s} \leq \frac{1}{1 - q_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}(\frac{\omega}{\mu} - 1)}},$$

temos

$$\frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq -\tilde{C} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell} \log(q_\ell) q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1 - \frac{\omega}{\mu}) + \omega - 1)} \frac{1}{1 - q_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}(\frac{\omega}{\mu} - 1)}},$$

em que $\tilde{C} := \frac{\tilde{C}}{1 - q_\ell^{\frac{\varphi_\ell}{M\alpha_\ell}(\frac{\omega}{\mu} - 1)}}$, e portanto,

$$\frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq -\tilde{C} q_\ell^{\bar{\xi}_\ell - \xi_\ell} \log(q_\ell) q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1 - \frac{\omega}{\mu}) + \omega - 1)}$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$$\geq -\tilde{C}\hat{C}q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}(\varphi_\ell(1-\frac{\omega}{\mu})+\omega-1)}\log(q_\ell). \quad (2.13)$$

Segue-se do item (iv) da Definição 2.11 que $q_\ell^{\tilde{\xi}_\ell-\xi_\ell} \leq \hat{C}$ para algum $\hat{C} > 0$. Agora, de $2\omega\left(\frac{\mu-1}{\mu-\omega}\right) + \zeta < \xi_\ell \alpha_\ell$, $\varphi_\ell = 1 - \frac{\alpha_\ell \xi_\ell}{2} + \alpha_\ell \delta$ e $\frac{\zeta}{2\alpha_\ell} > \delta$, esta última desigualdade válida para ℓ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_\ell} \left(\varphi_\ell \left(1 - \frac{\omega}{\mu} \right) + \omega - 1 \right) &= \frac{\mu - \omega}{\alpha_\ell \mu} \left(\varphi_\ell + \frac{1}{2} \frac{2\mu(\omega - 1)}{\mu - \omega} \right) \\ &= \frac{\mu - \omega}{\alpha_\ell \mu} \left(\varphi_\ell + \frac{1}{2} \frac{2\omega(\mu - 1)}{\mu - \omega} - 1 \right) < \frac{\mu - \omega}{\alpha_\ell \mu} \left(\delta - \frac{\zeta}{2\alpha_\ell} \right) < 0, \end{aligned}$$

para ℓ suficientemente grande, e portanto,

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_\ell} \left(\varphi_\ell \left(1 - \frac{\omega}{\mu} \right) + \omega - 1 \right) < 0.$$

Disto e de (2.13), concluímos que

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \Theta_1(\ell)}{q_\ell^{\xi_\ell}} \geq 0.$$

□

Teorema 2.13 (Teorema 1.9 em [4]). *Suponha que $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ seja uma sequência tal que $\{\mathfrak{C}_{q_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ seja uniformemente agrupada por $\{U_\ell = \{I_j^\ell\}_{j=1}^{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ com expoentes $\{\alpha_\ell, \xi_\ell, \mu\}$. Suponha, além disso, que $\{U_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ escala bem com expoentes μ e ω para algum $0 < \omega < 1$. Assuma também que existe $\zeta > 0$ tal que*

$$2\omega\left(\frac{\mu-1}{\mu-\omega}\right) + \zeta < \xi_\ell \alpha_\ell. \quad (2.14)$$

Então, para todo $m > 2$, existe $C_m > 0$ tal que

$$P(q_\ell, T) \leq C_m q_\ell^{-m} \quad (2.15)$$

para todos $\ell \in \mathbb{N}$ e $T \leq q_\ell^{\frac{1}{\alpha_\ell}}$.

Demonstração. Pelo Lema 1.2,

$$P(q, T) \leq 4T^4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \left(\inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^q \left(E + \frac{i}{T} \right) \right| \right)^{-2}.$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

Como vimos, se $T^{-1} \geq q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}}$, então $\left| \mathcal{D}^{q_\ell} \left(E + \frac{i}{T} \right) \right| \geq \left| \mathcal{D}^{q_\ell} \left(E + i q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}} \right) \right|$. Logo, basta verificar que \mathcal{D}^{q_ℓ} satisfaz as hipóteses de Lema 2.12. Como as demais propriedades se seguem das hipóteses do teorema, podemos afirmar que, para todo $m > 0$,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\inf_{E \in \mathbb{R}} |\mathcal{D}^{q_\ell}(E + i q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}})| q_\ell^{-\frac{m}{\alpha_\ell}} \right) = \infty.$$

Sabemos que $\sup_{1 \leq j \leq q_\ell} b_{q_\ell, j} \leq \frac{2\pi}{q_\ell}$ (vide Teorema 1.4 em [16]), o que pelo Lema 1.3 implica em

$$\min_{1 \leq j \leq q_\ell} \left| (\mathcal{D}^{q_\ell})' \left(\tilde{E}_{q_\ell, j} \right) \right|^{-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5} + 1} \sup_{1 \leq j \leq q_\ell} b_{q_\ell, j} \leq \frac{2\pi}{(\sqrt{5} + 1)q_\ell}.$$

Portanto, para todo $m > 2$, existe \tilde{C}_m tal que,

$$\inf_{E \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{D}^{q_\ell} \left(E + i q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}} \right) \right|^{-2} < \tilde{C}_m^2 q_\ell^{-2m},$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Combinando os resultados anteriores, temos

$$\begin{aligned} P(q_\ell, T) &\leq 4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \tilde{C}_m^2 q_\ell^{-2m} q_\ell^{\frac{4}{\alpha_\ell} - \frac{m}{\alpha_\ell}}, \\ &\leq 4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \tilde{C}_m^2 q_\ell^{\frac{4}{\alpha_\ell} - \frac{m}{\alpha_\ell} - 2m}, \\ &\leq C_m q_\ell^{-m}, \end{aligned}$$

para todo $m > 2$, em que $C_m := 4(1 + 2\|V\|_\infty)^2 \tilde{C}_m^2$ (note que se $m > 2$, então $\frac{4}{\alpha_\ell} - \frac{m}{\alpha_\ell} - 2m < -m$). \square

Observe que a relação (2.14) nos diz que podemos trocar agrupamento forte por maior grau de uniformidade em diferentes escalas de comprimento: quando $\mu = 1$ (caso em que os tamanhos de agrupamento são muito uniformes), (2.14) nos diz que o parâmetro de “força do agrupamento”, ξ_ℓ , apenas tem que ser positivo. Por outro lado, quando “ $\mu = \infty$ ”, a relação (2.14) nos diz que $\xi_\ell \alpha_\ell > 2\omega$. Agora note que uma vez que existem pelo menos q^ξ autovalores em cada intervalo, há no máximo $q^{1-\xi_\ell} = \varepsilon^{-\alpha_\ell(1-\xi_\ell)}$ intervalos, o

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

que mostra que a suposição $\omega \sim \alpha_\ell(1 - \xi_\ell)$ é natural. Este fato, combinado com $\xi_\ell \alpha_\ell > 2\omega$, implica imediatamente $\xi_\ell > \frac{2}{3}$, que é a condição do Teorema 2.8.

Corolário 2.14 (Corolário 1.10 em [4]). *Sob os hipóteses do Teorema 2.13, $\alpha_u^- \leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell$. Se, além disso, a sequência $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ no teorema cresce exponencialmente, então $\alpha_u^+ \leq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell$.*

Demonstração. Segue-se diretamente de 1.4 e de 2.13 □

Agora, seja $H = \Delta + V$ um operador Schrödinger definido em $\ell^2(\mathbb{Z})$. Devemos tratar o problema reduzindo a análise para os dois casos correspondentes nas semirretas positiva e negativa. Seja H^\pm uma restrição de H a $\ell^2(\mathbb{N})$ e $\ell^2(\mathbb{Z}_-)$ (note que V_0 não está em H^+ ou H^-). Além disso, sejam

$$P_{\delta_0}(q, T) = \sum_{|n| > q} \frac{2}{T} \int_0^\infty |\langle \delta_n, e^{-itH} \delta_0 \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt,$$

e

$$P_{\delta_1}^\pm(q, T) = \sum_{n > q} \frac{2}{T} \int_0^\infty |\langle \delta_n, e^{-itH^\pm} \delta_1 \rangle|^2 e^{-\frac{2t}{T}} dt,$$

de modo que a soma na segunda fórmula seja restrita a \mathbb{N} . Então,

Proposição 2.15 (Proposição 1.11 em [4]). *Para todos $q > 1$ e $T > 0$,*

$$P_{\delta_0}(q, T) \leq T^2(P_{\delta_1}^+(q, T) + P_{\delta_1}^-(q, T)) \quad (2.16)$$

Demonstração. Sejam $R^\pm = \langle \delta_{\pm 1}, \cdot \rangle \delta_0 + \langle \delta_0, \cdot \rangle \delta_{\pm 1}$ e $H_\pm = H - R^\pm$. Aplicando a segunda identidade do resolvente para $(H - z)^{-1}$, com $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, temos para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \langle \delta_{\pm n}, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle - \langle \delta_{\pm n}, (H_\pm - z)^{-1} \delta_0 \rangle \\ &= -\langle \delta_{\pm n}, (H_\pm - z)^{-1} \delta_0 \rangle \langle \delta_{\pm 1}, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle - \langle \delta_{\pm n}, (H_\pm - z)^{-1} \delta_{\pm 1} \rangle \langle \delta_0, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle \\ &= -\langle \delta_{\pm n}, (H_\pm - z)^{-1} \delta_{\pm 1} \rangle \langle \delta_0, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle \end{aligned}$$

2.2 Um Refinamento do Teorema Central

$$= -\langle \delta_{\pm n}, (H^\pm - z)^{-1} \delta_{\pm 1} \rangle \langle \delta_0, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle,$$

uma vez que $\langle \delta_{\pm 1}, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle = \psi_\pm(z, 0) = 1$ (vide Seção A.2) e que H_\pm é uma soma direta. Sabemos também que $|\langle \delta_0, (H - E - i/T)^{-1} \delta_0 \rangle|^2 \leq \frac{1}{(\frac{1}{T})^2} = T^2$. Logo,

$$\begin{aligned} |\langle \delta_{\pm n}, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle|^2 &\leq |\langle \delta_n, (H^\pm - E - i/T)^{-1} \delta_1 \rangle|^2 |\langle \delta_0, (H - E - i/T)^{-1} \delta_0 \rangle|^2 \\ &\leq T^2 |\langle \delta_n, (H^\pm - E - i/T)^{-1} \delta_1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \delta_{\pm n}, (H - z)^{-1} \delta_0 \rangle|^2 dE \leq T^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \delta_n, (H^\pm - E - i/T)^{-1} \delta_1 \rangle|^2 dE,$$

e como

$$\int_0^{\infty} |\langle \delta_n, e^{-itH} \delta_k \rangle|^2 e^{\frac{-2t}{T}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \delta_n, (H - E - \frac{i}{T})^{-1} \delta_k \rangle|^2 dE$$

(vide a demonstração no Lema 1.2),

$$\int_0^{\infty} |\langle \delta_{\pm n}, e^{-itH} \delta_0 \rangle|^2 e^{\frac{-2t}{T}} dt \leq T^2 \int_0^{\infty} |\langle \delta_n, e^{-itH^\pm} \delta_1 \rangle|^2 e^{\frac{-2t}{T}} dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P_{\delta_0}(q, T) &\leq \sum_{|n|>q} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |\langle \delta_{\pm n}, e^{-itH} \delta_0 \rangle|^2 e^{\frac{-2t}{T}} dt \\ &\leq T^2 \sum_{|n|>q} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |\langle \delta_n, e^{-itH^\pm} \delta_1 \rangle|^2 e^{\frac{-2t}{T}} dt \\ &\leq T^2 P_{\delta_1}^\pm(q, T). \end{aligned}$$

□

Como observado acima, o problema do operador definido na semirreta positiva pode ser reduzido a dois problemas na semirreta (embora com um fator extra T^2). Consequentemente, os Teoremas 1.1, 2.8 e 2.13, bem como os Corolários 1.5, 2.9 e 2.14, admitem resultados análogos para um operador definido na semirreta positiva. Observamos que, no caso da aplicação dos Teoremas 2.8 e 2.13 e dos corolários correspondentes, o fator T^2 é de menor importância devido à existência de limites exponenciais. Na aplicação do Teorema 1.1, no entanto, esse fator é claramente significativo.

Capítulo 3

Uma Análise do Hamiltoniano de Fibonacci

Nesta seção, aplicaremos os resultados anteriores para Hamiltoniano de Fibonacci, H_F . Este é o operador de Schrödinger definido em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com potencial dado por

$$V_{Fib;n}^\lambda = \lambda \chi_{[1-\theta,1)}(n\theta \pmod{1}), \quad (3.1)$$

em que $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\lambda > 0$, a chamada constante de acoplamento. Mais especificamente, concentrar-nos-emos na aplicação do Teorema 2.13 a H_F .

As propriedades espectrais únicas de H_F o tornam um candidato ideal para estudar a relação entre propriedades espectrais e dinâmicas. Em particular, para todo λ , o espectro de H_F é um conjunto de Cantor e a medida espectral sempre é puramente contínua [21]. Transporte anômalo foi sugerido por vários trabalhos numéricos desde o final da década de 1980 (veja, por exemplo, [1, 20, 28]). Em particular, o trabalho de Abe e Hiramoto [1, 28] sugeriu que α_l^\pm e α_u^\pm se comportam como $\frac{1}{\log \lambda}$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ (lembrando que λ é a constante de acoplamento em (3.1)).

Um limite superior sub-balístico (vide Introdução) para a parte rápida do pacote de onda sob a dinâmica gerada pelo H_F foi recentemente obtido por

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

Damanik e Tcheremchantsev em [13, 11]; mais precisamente, eles utilizaram limites inferiores para a norma das matrizes de transferência da reta a fim de obter um limite superior para α_u^+ . Em particular, os resultados confirmaram a dependência assintótica $\alpha_u^+ \sim \frac{1}{\log \lambda}$ (com $\lambda \rightarrow \infty$) do expoente de transporte na constante de acoplamento. Em [29], Killip, Kiselev e Last provaram tanto um limite inferior quanto um limite superior na parte de movimento lento do pacote de ondas cujo comportamento assintótico concorda com esta previsão.

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

Voltando aos resultados de Damanik e Tcheremchantsev, temos precisamente que, para $\lambda \geq 8$, $\alpha_u^+ \leq \frac{2 \log \eta}{\log \zeta(\lambda)}$, onde $\eta = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $\zeta(\lambda) = \frac{\lambda - 4 + \sqrt{(\lambda - 4)^2 - 12}}{2}$ e $r(\lambda) = 2\lambda + 22$.

Fixe $\lambda > 8$. Pela Proposição 2.15 e pela simetria de H_F ($V_{Fib; -n}^\lambda = V_{Fib; n-1}^\lambda$ para $n \geq 2$), basta considerar o operador H_F^+ , que é a restrição de H_F para $\ell^2(\mathbb{N})$. Para que possamos aplicar o Teorema 2.13, precisamos escolher uma sequência $\{q_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, que tomaremos como sendo a de Fibonacci: $q_\ell = q_{\ell-1} + q_{\ell-2}$, $q_0 = q_1 = 1$. Recordemos que existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que $C_\eta^{-1} \eta^\ell \leq q_\ell \leq C_\eta \eta^\ell$, de modo que q_ℓ cresce exponencialmente.

Precisamos mostrar que $\mathfrak{C}_{q_\ell} \equiv \{\tilde{E}_{q_\ell, j}\}_{j=1}^{q_\ell}$ é uniformemente agrupada por uma sequência de famílias de intervalos, $\{U_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, que escala bem. Os expoentes relevantes determinarão $\alpha(\lambda)$. Seja H_ℓ^{per} o operador definido em $\ell^2(\mathbb{Z})$ com potencial $V_{q_\ell}^{per}$ dado por $V_{q_\ell, nq_\ell + j}^{per} = V_{Fib; j}^\lambda$ $1 \leq j \leq q_\ell$; $V_{q_\ell}^{per}$ é o potencial q_ℓ -periódico cujas primeiras entradas de q_ℓ coincidem com as de V_{Fib}^λ . O espectro de H_ℓ^{per} , σ_ℓ , é um conjunto de intervalos (vide Apêndice). Mostraremos que uma cobertura natural para \mathfrak{C}_{q_ℓ} é fornecida pelas bandas em $\sigma_{m(\ell)}$ e $\sigma_{m(\ell)+1}$, para algum $m(\ell)$ a ser determinado adiante.

Começamos discutindo algumas propriedades espectrais de $(H_\ell^{per})_\ell$ presentes em [29], necessárias para os resultados que se seguirão.

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

Proposição 3.1. *Seja $x_\ell(E)$ o traço da matriz de transferência avaliada em E (vide (A.2) para a definição de matriz de transferência). Assim, para todo $\ell \geq 2$,*

$$x_{\ell+1} = x_\ell x_{\ell-1} - x_{\ell-2} \quad (3.2)$$

$$x_{\ell+1}^2 + x_\ell^2 + x_{\ell-1}^2 - x_{\ell+1} x_\ell x_{\ell-1} = 4 + \lambda^2. \quad (3.3)$$

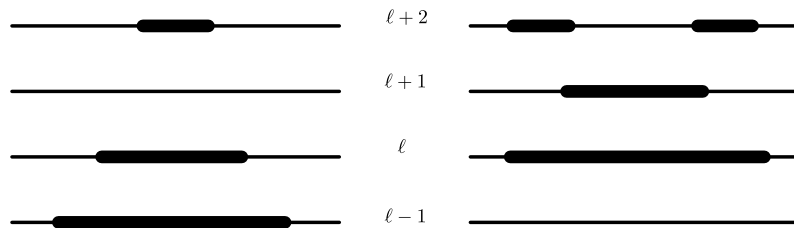
Aqui, σ_ℓ é o espectro do operador periódico com o período q_ℓ . Assim, σ_ℓ é o conjunto de bandas para os quais $x_\ell(E) \in [-2, 2]$ (vide Apêndice). Além disso, em cada banda, $x_\ell(E)$ varia monotonicamente em $[-2, 2]$ e assume os valores ± 2 nas extremidades.

Proposição 3.2 (Proposição 5.1 em [29]). *(i) O espectro de H_λ , $\sigma(H_\lambda)$, coincide com o conjunto das energias E para as quais a sequência $x_\ell(E)$ é limitada.*

(ii) Se $|x_\ell(E)| > 2$ e $|x_{\ell+1}(E)| > 2$ para algum ℓ , então a sequência $x_\ell(E)$ é ilimitada.

(iii) Se $\lambda > 4$, não podem existir E e ℓ tais que $x_\ell(E) \leq 2$, $x_{\ell+1}(E) \leq 2$ e $x_{\ell+2}(E) \leq 2$.

Definição 3.3 (Definição em [29]). *Dizemos que $I_\ell \subseteq \sigma_\ell$ é uma banda do tipo A se $I_\ell \subseteq \sigma_{\ell-1}$ (de modo que $I_\ell \cap (\sigma_{\ell+1} \cup \sigma_{\ell-2}) = \emptyset$). Dizemos que $I_\ell \subseteq \sigma_\ell$ é uma banda do tipo B se $I_\ell \subseteq \sigma_{\ell-2}$ (e assim, $I_\ell \cap \sigma_{\ell-1} = \emptyset$).*



Tipos de bandas em σ_ℓ : à esquerda, uma banda de tipo A;
à direita, uma banda tipo B.

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

A figura acima mostra os intervalos das bandas espectrais. Observe que, $\sigma_{-1} = \mathbb{R}$, $\sigma_0 = [-2, 2]$ e $\sigma_1 = [\lambda - 2, \lambda + 2]$. Portanto, se $\lambda > 4$, σ_0 consiste em uma banda de tipo A e σ_1 em uma banda de tipo B.

A estrutura do espectro do Hamiltoniano de Fibonacci H_F pode ser deduzida a partir do seguinte

Lema 3.4 (Lema 5.2 em [29]). *Fixe $\lambda > 4$. Então, para todo $\ell > 0$:*

1. *Toda banda do tipo A, $I_\ell \subseteq \sigma_\ell$, contém exatamente uma banda do tipo B, $I_{\ell+2} \subseteq \sigma_{\ell+2}$, e nenhuma outra banda de $\sigma_{\ell+1}$ ou $\sigma_{\ell+2}$.*
2. *Toda banda do tipo B, $I_\ell \subseteq \sigma_\ell$, contém exatamente uma banda do tipo A, $I_{\ell+1} \subseteq \sigma_{\ell+1}$, e duas bandas do tipo B, $I_{\ell+2,1} \subseteq \sigma_{\ell+2}$ e $I_{\ell+2,2} \subseteq \sigma_{\ell+2}$, localizadas em cada lado de I_ℓ .*

Demonstração. 1. Considere uma banda tipo A, $I_\ell \subseteq \sigma_\ell$. Por definição, $I_\ell \subseteq \sigma_{\ell-1}$, e assim $|x_\ell(E)| > 2$ para $E \in I_\ell$, pelo item (iii) da Proposição 3.2. Logo, $I_\ell \cap \sigma_{\ell+1} \neq \emptyset$. Como x_ℓ varia monotonicamente de -2 a 2 , em I_ℓ , existe um único $E_1 \in I_\ell$ tal que $x_\ell(E_1) = 0$. Uma vez que $x_{\ell+1} = x_\ell x_{\ell-1} + x_{\ell-2}$, temos $|x_{\ell+2}(E_1)| = |x_{\ell-1}(E_1)| \leq 2$, pela Proposição 3.2, e assim $I_\ell \cap \sigma_{\ell+2} \neq \emptyset$. Note também que quando $x_\ell = \pm 2$, $|x_{\ell+2}| \geq 2|x_{\ell+1}| - |x_{\ell-1}| > 2$; portanto, todas as bandas possíveis de $\sigma_{\ell+2}$ que interseptom I_ℓ estão contidas em I_ℓ e não tocam a fronteira de I_ℓ . Além disso, em cada banda $I_{\ell+2} \subset I_\ell$ de $\sigma_{\ell+2}$, $x_{\ell+2}$ varia entre -2 e 2 , e assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $E_2 \in I_{\ell+2}$ tal que $x_{\ell+2}(E_2) = -x_{\ell-1}(E_2)$, pois $I_\ell \subset \sigma_{\ell-1}$ ($(x_{\ell+2} + x_{\ell-1})(E)$ é uma função contínua que assume valores em um intervalo ao qual zero pertence). Então, por (3.2), $x_\ell(E_2)x_{\ell+1}(E_2) = 0$, e uma vez que $|x_{\ell+1}(E)| > 2$ em I_ℓ , $x_\ell(E_2) = 0$. Consequentemente, cada banda $I_{\ell+2} \subset I_\ell$ contém uma energia onde $x_\ell = 0$; por monotonicidade de x_ℓ , existe apenas uma dessas bandas.

2. Considere uma banda do tipo B, $I_\ell \subset \sigma_{\ell-2}$. Quando $x_\ell(E) = 0$, temos $|x_{\ell+1}| = |x_{\ell-2}| \leq 2$, e assim $I_\ell \cap \sigma_{\ell+1} \neq \emptyset$. Como no argumento acima,

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

$|x_{\ell+1}| > 2$ quando $|x_\ell| = 2$ (pela Proposição 3.2), de modo que todas as bandas de $\sigma_{\ell+1}$ que interceptam I_ℓ ficam estritamente dentro de I_ℓ . Além disso, pelo mesmo argumento acima, qualquer banda $I_{\ell+1} \subset \sigma_{\ell+1}$ dentro de I_ℓ deve conter uma energia E onde $x_\ell(E) = 0$. Consequentemente, existe uma única banda $I_{\ell+1} \subset I_\ell$. Em seguida considere $\sigma_{\ell+2}$. Iterando a aplicação traço, encontramos $x_{\ell+2} = (x_\ell^2 - 1)x_{\ell-1} - x_{\ell-2}x_\ell$. Quando $x_\ell = \pm 1$, $|x_{\ell+2}| \leq 2$. Também, se $x_\ell = \pm 2$, $|x_{\ell+2}| \geq 3|x_{\ell-1}| - 2|x_{\ell-2}| > 2$. Portanto, há pelo menos duas bandas de $\sigma_{\ell+2}$ que ficam estritamente dentro de I_ℓ , à direita e à esquerda de $I_{\ell+1}$ (bandas de $\sigma_{\ell+2} \subset I_\ell$ não pode interceptar $I_{\ell+1}$ pelo item (iii) da Proposição 3.2).

Resta-nos mostrar que existem apenas duas dessas bandas. Pela equação (3.2), temos

$$(*) \quad (x_\ell \pm 1)(x_{\ell+2} \pm x_{\ell-2}) = (x_\ell^2 - 1)(x_{\ell+1} \pm x_{\ell-1}).$$

Considere uma banda $I_{\ell+2} \subset \sigma_{\ell+2}$ em I_ℓ . Para $E \in I_{\ell+2}$, $x_{\ell+1}(E)$, $x_{\ell-1}(E)$ tem sinais fixos (ambas satisfzendo $|x_{\ell\pm 1}(E)| > 2$). Escolhemos um sinal em (*) de modo que $x_{\ell+1} \pm x_{\ell-1} \neq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $E \in I_{\ell+2}$ tal que $x_{\ell+2} \pm x_{\ell-2} = 0$. Nesta energia, devemos ter $x_\ell^2 - 1 = 0$, mas existem somente duas energias em I_ℓ onde $x_\ell(E) = \pm 1$, de modo que existem no máximo duas bandas de $\sigma_{\ell+2}$ em I_ℓ . \square

Observação 4. *Seja I_k^B uma banda do tipo B em σ_k . Usando-se o Lema 3.4 pode-se construir, para $m > k$, uma classe $S_{k,m}^B$ de bandas, pertencentes a σ_m , as quais estão contidas em I_k^B , isto é, se $I_m \subseteq \sigma_m$ e $I_m \in S_{k,m}^B$, então $I_m \subseteq I_k^B$. O mesmo pode ser feito para uma banda de tipo A, $I_k^A \subseteq \sigma_k$, isto é, pode-se construir, por um uso repetido do Lema 3.4, uma classe $S_{k,m}^A$ de bandas em σ_m tal que se $I_m \in S_{k,m}^A$, então $I_m \subseteq I_k^A$ (note que pelo Lema 3.4, para $m = k + 1$, $S_{k,k+1}^B = \emptyset$).*

A análise prossegue através do seguinte

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

Lema 3.5 (Lema 5.3 em [4]). *Seja $I_k^B \subseteq \sigma_k$ uma banda do tipo B. Então, para $m \geq k \geq 1$, temos $\#S_{k,m}^B = F_{m-k}$. Seja $I_k^A \subseteq \sigma_k$ uma banda do tipo A. Então, para $k \geq 0$ e $m \geq k + 2$, temos $\#S_{k,m}^A = \#S_{k+2,m}^B = F_{m-k-2}$.*

Demonstração. Observamos que o procedimento para a construção das classes de intervalos $S_{k,m}^B$ e $S_{k,m}^A$ é tal que para $l \in \mathbb{Z}$ com $k+l \geq 1$ (em σ_0 não há bandas do tipo B), temos $\#S_{k+l,m+l}^B = \#S_{k,m}^B$, e para $k+l \geq 0$, temos $\#S_{k+l,m+l}^A = \#S_{k,m}^A$.

Pelo Lema 3.4, também temos que $\#S_{k,m}^A = \#S_{k+2,m}^B$ para $m \geq k + 2$. Com efeito, seja I_k^A . Pelo item (1) do Lema 3.4, I_k^A contém uma única banda do tipo B de σ_{k+2} , que denotaremos por I_{k+2}^B . Logo, toda banda de σ_m , $m \geq k+2$, contida em I_{k+2}^B , estará contida em I_k^A , e assim, $\#S_{k+2,m}^B \leq \#S_{k,m}^A$. Por outro lado, como toda banda de σ_m contida em I_k^A também está contida em I_{k+2}^B , segue-se que $\#S_{k,m}^A \leq \#S_{k+2,m}^B$.

Portanto, concluímos da discussão anterior que $\#S_{k,m}^B = \#S_{1,m-k+1}^B$ e $\#S_{k,m}^A = \#S_{0,m-k}^B = \#S_{2,m-k}^B = \#S_{1,m-k-1}^B$.

A prova do Lema 3.5 se dá por indução. Note primeiramente que $\#S_{m,m+1}^B = 1 = F_1$ e $\#S_{m,m+2}^B = 2 = F_2$. Assuma que $\#S_{m,m+l}^B = F_l$ para $l = 0, 1, \dots, k \geq 2$ e considere $\#S_{m,m+k+1}^B$. Seja $I_m^B \subseteq \sigma_m$ uma banda do tipo B em σ_m . Pelo Lema 3.4, existe uma banda do tipo A, $I_{m+1}^A \subseteq \sigma_{m+1}$ com $I_{m+1}^A \subseteq I_m^B$, e duas bandas do tipo B, $I_{m+2,j}^B \subseteq \sigma_{m+2}$, $j = 1, 2$ com $I_{m+2,j}^A \subseteq I_m^B$. Portanto, para $k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \#S_{m,m+k+1}^B &= \#S_{m+1,m+k+1}^A + 2\#S_{m+2,m+k+1}^B = \#S_{m,m+k}^A + 2\#S_{m,m+k+1}^B = \\ &= \#S_{m+2,m+k}^B + 2\#S_{m,m+k-1}^B = \#S_{m,m+k-2}^B + 2\#S_{m,m+k-1}^B = F_{k-2} + 2F_{k-1} = \\ &= F_{k+1}. \end{aligned} \quad \square$$

O conjunto σ_m é composto de F_m bandas disjuntas, $I_m^1, I_m^2, \dots, I_m^{F_m}$. Essas bandas são todas disjuntas em relação às bandas de tipo B de σ_{m+1} , $I_{m+1}^{B,1}, I_{m+1}^{B,2}, \dots, I_{m+2}^{B,l(m)}$ (pelo item 1 do Lema 3.4, se I_m^j for do tipo A, então I_m^j não contém bandas de σ_{m+1} ; caso contrário, o mesmo se segue), enquanto que as bandas do tipo A de σ_{m+1} estão todas contidas em σ_m (pela Definição

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

3.3). Assim, pelo Lema 3.4, a família

$$\tilde{U}_m = \left\{ I_m^1, I_m^2, \dots, I_m^{F_m}, I_{m+1}^{B,1}, I_{m+1}^{B,2}, \dots, I_{m+2}^{B,l(m)} \right\}$$

é uma cobertura para σ_k para todo $k \geq m$. Como $\mathfrak{C}_{q_\ell} \subseteq \sigma_\ell$ (mais precisamente, cada elemento de \mathfrak{C}_{q_ℓ} está contido em uma única banda de σ_ℓ), podemos usar U_ℓ para uma função $m(\ell) \leq \ell$ a ser definida posteriormente.

Necessitamos de dois resultados preliminares adicionais.

Lema 3.6 (Proposição 5.2 em [29]). *Sejam $\lambda > 8$ e $k \geq 3$. Então, para cada $E \in \sigma_k$, tem-se*

$$|(x^{q_k})'(E)| \geq \zeta(\lambda)^{\frac{k}{2}}, \quad (3.4)$$

em que $\zeta(\lambda) = \frac{\lambda - 4 + \sqrt{(\lambda - 4)^2 - 12}}{2}$.

Lema 3.7 (Equação 57 em [10]). *Se $\lambda > 4$ e $k \geq 1$. Então, para cada $E \in \sigma_k$, tem-se*

$$|(\mathcal{D}^{q_k})'(E)| \leq C(2\lambda + 22)^k, \quad (3.5)$$

em que C é alguma constante positiva.

Podemos agora demonstrar a

Proposição 3.8 (Proposição 5.6 em [4]). *Sejam $\mu'(\lambda) = \frac{2 \log(2\lambda + 22)}{\log \zeta(\lambda)}$ e $\omega(\lambda) = \frac{2 \log \eta}{\log \zeta(\lambda)}$ (recorde que $\eta = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$). Então, para qualquer $\mu(\lambda) > \mu'(\lambda)$, $\{\tilde{U}_m\}_{m=1}^\infty$ escala bem com expoentes $\mu(\lambda)$ e $\omega(\lambda)$.*

Demonstração. Fixe $\nu > 0$. Seja $\mu(\lambda) = \mu'(\lambda) + \nu$. Note que pelo lado esquerdo de (1.14), para cada $I \in \tilde{U}_m$ que satisfaz $I \subset \sigma_m$,

$$\frac{4e}{|(\mathcal{D}^{q_m})'(\tilde{E}_{q_m,I})|} \geq |E - \tilde{E}_{q_m,I}| \geq |I|,$$

em que $\tilde{E}_{q_m,I}$ é o único zero de \mathcal{D}^{q_m} em I (tome $E \in [\tilde{E}_{q_m,I}, \tilde{E}_{q_m,q_m}]$ tal que $|\mathcal{D}^{q_m}(E)| < 4$ e $|E - \tilde{E}_{q_m,I}| \geq |I|$). Do mesmo modo, se $I \in \tilde{U}_m$ satisfizer

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

$I \subseteq \sigma_{m+1}$,

$$\left| \frac{4e}{(\mathcal{D}^{q_{m+1}})'(\tilde{E}_{q_{m+1},I})} \right| \geq |I|;$$

assim, pelo Lema 3.6, segue-se que para cada $I \in \tilde{U}_m$, $|(\mathcal{D}^{q_m})'(E)| \geq \zeta(\lambda)^{\frac{m}{2}}$, e daí que

$$|I| \leq \left| \frac{4e}{(\mathcal{D}^{q_m})'(E)} \right| \leq 4e\zeta(\lambda)^{-\frac{m}{2}} =: \varepsilon_m. \quad (3.6)$$

Por outro lado, pelo lado direito de (1.14), para cada $I \in \tilde{U}_m$ satisfazendo $I \subset \sigma_m$, tem-se

$$|I| \geq \frac{\sqrt{5} + 1}{|(\mathcal{D}^{q_m})'(\tilde{E}_{q_m,I})|},$$

e para $I \in \tilde{U}_m$ satisfazendo $I \subseteq \sigma_{m+1}$ tem-se

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{|(\mathcal{D}^{q_{m+1}})'(\tilde{E}_{q_{m+1},I})|} \geq |I|.$$

Logo, pelo Lema 3.7,

$$\frac{1}{|(\mathcal{D}^{q_{m+1}})'(E)|} \geq C(2\lambda + 22)^{-(m+1)} = C\zeta(\lambda)^{\frac{\mu'(\lambda)}{2}},$$

e como $\zeta(\lambda) = \left(\frac{\varepsilon_m}{4e}\right)^{-\frac{2}{m}}$, segue-se que para todo $I \in \tilde{U}_m$,

$$\begin{aligned} |I| &\geq C(2\lambda + 22)^{-(m+1)} = C \left(\left(\frac{\varepsilon_m}{4e}\right)^{-\frac{2}{m}} \right)^{-\frac{\mu'(\lambda)}{2}(m+1)} \\ &= C \left(\frac{\varepsilon_m}{4e}\right)^{\mu'(\lambda) + \frac{\mu'(\lambda)}{m}} \geq C(\varepsilon_m)^{\mu'(\lambda) + O(\frac{1}{m})} \geq \tilde{C}\varepsilon_m^{\mu(\lambda)}, \end{aligned}$$

para algumas constante $C, \tilde{C} > 0$.

Pelo Lema 3.5, se $k > m$, então todo $I \in \tilde{U}_m$ contém no máximo $F_{k+1-m} \leq C_\eta \eta^{k+1-m}$ elementos de \tilde{U}_m .

Note também que

$$\eta^{k+1-m} = \eta \left(\zeta(\lambda)^{\frac{k-m}{2}} \right)^\omega = \eta \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_k} \right)^\omega.$$

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

Resumindo-se o que foi obtido anteriormente, mostrou-se que qualquer $I \in \tilde{U}_m$ satisfaz

$$\tilde{C}\varepsilon_m^\mu \leq |I| \leq \varepsilon_m,$$

para alguma constante $\tilde{C} > 0$, e que para cada $k \geq m$, cada elemento de \tilde{U}_k está contido em algum elemento de \tilde{U}_m de tal forma que não há mais do que $C_\eta \eta \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_k} \right)^\omega$ elementos de \tilde{U}_k em cada elemento de \tilde{U}_m .

Para concluir a demonstração, basta mostrar que se pode estender a sequência $\{\tilde{U}_m\}_{m=1}^\infty$ de intervalos de modo que, para qualquer ε , tenha-se um conjunto U_ε de intervalos tais que a família $\{\tilde{U}_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_1}$ também satisfaça essas propriedades (talvez com C_η substituído por uma outra constante).

Seja $\varepsilon \in (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1})$ para algum m . Agora, considere os elementos de \tilde{U}_{m+1} . Como cada um está contido em um elemento de \tilde{U}_m que tem comprimento $\geq \tilde{C}\varepsilon_m^{\mu(\lambda)}$, todos podem ser estendidos para que estejam ainda dentro do intervalo correspondente de \tilde{U}_m e que seu comprimento esteja entre ε e $\tilde{C}\varepsilon^\mu$ (eles podem se interceptar). Tomemos esses intervalos estendidos como os elementos de \tilde{U}_ε . Agora, é fácil verificar se a família $\{\tilde{U}_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_1}$ satisfaz as propriedades necessárias. \square

Proposição 3.9 (Proposição 5.7 em [4]). *Fixe $\lambda > 8$ (note que $\omega(\lambda) \equiv \frac{2 \log \eta}{\log \zeta(\lambda)} < 1$) e escolha $t \in (\omega(\lambda), 1)$. Seja $m(\ell) = [t \cdot \ell]$ e escolha $\mu(\lambda) > \frac{2 \log(2\lambda + 22)}{\log \zeta(\lambda)}$. Então, existe $L > 0$ tal que a sequência $\{\mathfrak{C}\}_{\ell=L}^\infty$ é uniformemente agrupada por $\tilde{U}_{m(\ell)}$ com expoentes $\{\alpha_\ell, \xi_\ell, \mu(\lambda)\}$, em que $\alpha_\ell \equiv \frac{-\log(q_\ell)}{\log(\varepsilon_{m(\ell)})}$ (com ε_m definido em (3.6)) e $\xi_\ell \equiv \frac{\log F_{\ell-m(\ell)-2}}{\log F_\ell}$, (recorde que F_m é o m -ésimo número de Fibonacci).*

Demonstração. Claramente, $q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}} = \varepsilon_{m(\ell)}$ e $q_\ell^{\xi_\ell} = F_{\ell-m(\ell)-2}$ o que, pela Proposição 3.8 e pelo Lema 3.6, nos dizem que \mathfrak{C}_{q_ℓ} é de fato $\{q_\ell^{-\frac{1}{\alpha_\ell}}, \xi_\ell\}$ -agrupado por $\tilde{U}_{m(\ell)}$. Agora, as condições (i) e (ii) da Definição 2.11 são óbvias a partir da Proposição 3.8, bem como a condição (iv), pelo Lema 3.6. Temos apenas que verificar que $\delta < \xi_\ell < 1 - \delta$ e que $\delta < \alpha_\ell < 1$ para algum $\delta > 0$. Todavia,

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \xi_\ell = 1 - t$ e $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell = \frac{1}{t} \omega(\lambda)$, o que, pelas suposições em t , implicam que isso é verdade para ℓ suficientemente grande. \square

Teorema 3.10 (Teorema 5.1 em [4]). *Sejam $\lambda > 8$ e $\alpha(\lambda) = \frac{3 \log r(\lambda) - \log(\zeta(\lambda)\eta)}{\log(r(\lambda)\eta)}$. $\frac{2 \log \eta}{\log(\zeta(\lambda))}$. Então, $\alpha_u^+ \leq \alpha(\lambda)$.*

Observação 5. *Note que para $\lambda \leq 17$, $\alpha(\lambda) < 1$, de modo que o limitante superior é não-trivial. Também, para $\lambda \geq 8$, $\frac{3 \log r(\lambda) - \log(\zeta(\lambda)\eta)}{\log(r(\lambda)\eta)} \leq 3$ e $\frac{3 \log r(\lambda) - \log(\zeta(\lambda)\eta)}{\log(r(\lambda)\eta)} \cdot \frac{2 \log \eta}{\log(\zeta(\lambda))} \rightarrow 2$ quando $\lambda \rightarrow \infty$*

Demonstração. Pela observação feita no início do capítulo, basta demonstrar o limite superior para α_u^+ associado a H_F^+ . Mostraremos que para qualquer $\delta > 0$, $\alpha_u^+ \leq \alpha(\lambda) + \delta$. Pela Proposição 3.9, desde que $\omega(\lambda) < t < 1$ e $m(\ell) = [t \cdot \ell]$, \mathfrak{C}_{q_ℓ} é uniformemente agrupada por $\tilde{U}_{m(\ell)}$ com expoentes $\{\alpha_\ell, \xi_\ell, \mu\}$ como definidos acima. Pela Proposição 3.8, $\{\tilde{U}_{m(\ell)}\}_{\ell=1}^\infty$ escala bem com expoentes $\mu(\lambda)$ e $\omega(\lambda)$. Assim, para que possa aplicar o Corolário 2.14, é suficiente encontrar t tal que (2.14) seja válido para ℓ suficientemente grande.

Uma vez que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \xi_\ell = 1 - t$ e $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell = \frac{1}{t} \omega(\lambda)$, isso é garantido se

$$2\omega \left(\frac{\mu(\lambda) - 1}{\mu(\lambda) - \omega(\lambda)} \right) < (1 - t) \frac{1}{t} \omega(\lambda),$$

ou seja, enquanto

$$t < \frac{\mu(\lambda) - \omega(\lambda)}{3\mu(\lambda) - 2 - \omega(\lambda)}. \quad (3.7)$$

Recorde que $\mu(\lambda) = \mu_\nu(\lambda) = \mu'(\lambda) + \nu$, para algum ν . Assim, desde que

$$t < \frac{\mu'(\lambda) - \omega(\lambda)}{3\mu'(\lambda) - 2 - \omega(\lambda)},$$

a desigualdade (3.7) está garantida para algum $\nu > 0$ suficientemente pequeno. Isso é obtido para tal t , as hipóteses do Corolário 2.14, se seguem, e obtemos

$$\alpha_u^+ \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell \leq \frac{1}{t} \omega(\lambda) \leq \frac{3\mu'(\lambda) - 2 - \omega(\lambda)}{\mu'(\lambda) - \omega(\lambda)} \omega(\lambda) + \delta$$

3.1 Uma aplicação dos Teoremas

o que implica, para cada $\delta > 0$, em

$$\alpha_u^+ \leq \alpha(\lambda) + \delta.$$

□

Capítulo 4

Projetos Futuros

Buscaremos estender os resultados obtidos em [4] para classes mais gerais de operadores auto-adjuntos. Talvez a mais importante delas sejam os chamados operadores de Jacobi (Schrödinger) a valores matriciais, da forma

$$(H\psi)_n = \mathcal{D}_{n-1}^* \psi_{n-1} + \mathcal{D}_n \psi_{n+1} + V_n \psi_n,$$

em que $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ e $\mathcal{D}_n \in \mathbb{M}_{\ell \times \ell}(\mathbb{C})$, $V_n \in \mathbb{M}_{\ell \times \ell}(\mathbb{R})$ definem sequências de matrizes $\ell \times \ell$ (para as principais motivações para o estudo de tais operadores, vide [35]).

Seguindo-se o roteiro apresentado por [4], acreditamos que os principais pontos que exigirão uma adaptação não-trivial dos argumentos são:

- A relação entre o Discriminante \mathcal{D}^q e a função de Green de H_{per}^q , e por conseguinte uma caracterização de espectro deste operador em termos de \mathcal{D}^q (Teoria de Floquet). Neste sentido, vale destacar que a Teoria de Floquet para operadores auto-adjuntos a valores matriciais vem sendo desenvolvida nos últimos anos, de modo que devemos avaliar a compatibilidade dos resultados obtidos com o item 5 da Proposição A.2.

-
- O Lema 1.2, que fornece um limitante superior para $P(q, T)$ em termos de $\mathcal{D}^q(E + i/T)$.

Uma vez que, a partir do Lema 1.2, o trabalho consiste em obter estimativas para o polinômio $\mathcal{D}^q(E + i/T)$, acreditamos que os demais resultados se seguirão em total analogia.

Vale ainda destacar, como exemplo importante de operador de Jacobi a valores matriciais, o chamado operador de Dirac discreto unidimensional, definido em $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ pela lei

$$(H_D(m, c)\Psi)_n = \begin{pmatrix} mc^2 + V_n & cd^* \\ cd & -mc^2 + V_n \end{pmatrix} \Psi_n,$$

em que $m \geq 0$, $c > 0$, $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência bilateral de números reais, e d, d^* são os operadores de diferença finita:

$$\begin{aligned} (d\Psi)(n) &= \Psi(n+1) - \Psi(n), \\ (d^*\Psi)(n) &= \Psi(n-1) - \Psi(n). \end{aligned}$$

Acreditamos que a relação entre o discriminante \mathcal{D}^q e a função de Green de operadores de Dirac é bastante semelhante à relação entre essas grandezas para operadores de Schrödinger (vide [8]); portanto, a adaptação dos resultados de [4] parece ser imediata neste contexto.

Apêndice A

Propriedades gerais

Neste Apêndice, discutiremos alguns pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. O material que se segue foi extraído dos Capítulos 1 e 7 de [38].

A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades

O principal objetivo desta seção é introduzir a notação a ser empregada na seção seguinte e estabelecer algumas propriedades relevantes das soluções de equações de diferença finita.

Sejam b uma sequência bilateral de números reais e a expressão de diferença finita de segunda ordem, simétrica, dada por

$$\begin{aligned} \tau : \ell(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell(\mathbb{Z}) \\ f(n) &\mapsto f(n+1) + f(n-1) + b(n)f(n). \end{aligned}, \quad (\text{A.1})$$

($\ell(\mathbb{Z})$ é o espaço das sequências bilaterais de números complexos). Tal ex-

A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades

pressão está associada à matriz tridiagonal infinita

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & 1 & b(n-1) & 1 & \\ & & 1 & b(n) & 1 \\ & & & 1 & b(n+1) & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Também associamos a τ o problema de autovalor $\tau u = zu$. O cenário apropriado para este problema é o espaço Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. No entanto, antes de prosseguirmos nesta direção, precisamos considerar a equação de diferença finita

$$(\tau u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + b_n u(n) = zu(n), \quad u \in \ell(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.3})$$

É simples notar que uma solução u é unicamente determinada pelos valores $u(n_0)$ e $u(n_0 + 1)$ em dois pontos consecutivos $n_0, n_0 + 1$. Segue-se que existem exatamente duas soluções linearmente independentes. Combinando-se (A.3) à fórmula de soma por partes, tem-se a fórmula de Green

$$\sum_{j=m}^n (f(\tau g) - (\tau f)g)(j) = W_n(f, g) - W_{m-1}(f, g) \quad (\text{A.4})$$

para $f, g \in \ell(\mathbb{Z})$, em que

$$W_n(f, g) = (f(n)g(n+1) - g(n)f(n+1)), \quad (\text{A.5})$$

é o chamado Wronskiano de f e g .

A fórmula de Green desempenha um papel importante na obtenção da propriedade auto-adjunta do operador associado a τ no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. Avaliando (A.4) no caso especial onde f e g resolvem (A.3), com o mesmo parâmetro z , observamos que o Wronskiano é constante (isto é, não depende de n) neste caso. Além disso, é diferente de zero se, e somente se, f e g são linearmente independentes. Uma vez que o espaço (linear)

A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades

das soluções é bidimensional, podemos escolher duas que sejam linearmente independentes, c e s , de (A.3) e assim escrever qualquer solução u de (A.3) como

$$u(n) = \frac{W(u, s)}{W(c, s)}c(n) - \frac{W(u, c)}{W(c, s)}s(n). \quad (\text{A.6})$$

Para tanto, é conveniente apresentar as seguintes soluções fundamentais, $c, s \in \ell(\mathbb{Z})$, satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{aligned} c(z, n_0, n_0) &= 1, & c(z, n_0 + 1, n_0) &= 0, \\ s(z, n_0, n_0) &= 0, & s(z, n_0 + 1, n_0) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Uma vez que o Wronskiano de $c(z, \cdot, n_0)$ e $s(z, \cdot, n_0)$ não depende de n , podemos avaliá-lo em n_0 , e assim obter

$$W(c(z, \cdot, n_0), s(z, \cdot, n_0)) = 1; \quad (\text{A.8})$$

consequentemente, de (A.6), temos que

$$u(n) = u(n_0)c(z, n, n_0) + u(n_0 + 1)s(z, n, n_0). \quad (\text{A.9})$$

Por vezes, muitas coisas ficam mais claras quando tratamos (A.3) do ponto de vista de sistemas dinâmicos. Se introduzirmos $\underline{u} = (u, u^+) \in \ell(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, então (A.3) é equivalente a

$$\underline{u}(n+1) = U(z, n+1)\underline{u}(n), \quad \underline{u}(n-1) = U(z, n)^{-1}\underline{u}(n), \quad (\text{A.10})$$

em que $U(z, \cdot)$ é dada por

$$\begin{aligned} U(z, n) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z - b(n) \end{pmatrix}, \\ U^{-1}(z, n) &= \begin{pmatrix} z - b(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades

A matriz $U(z, n)$ é chamada de matriz de transferência. O fluxo (não-autônomo) correspondente em $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ é dado pela matriz fundamental

$$\begin{aligned} \Phi(z, n, n_0) &= \begin{pmatrix} c(z, n, n_0) & c(z, n, n_0) \\ s(z, n+1, n_0) & s(z, n+1, n_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} U(z, n) \dots U(z, n_0+1) & n > n_0 \\ \mathbb{I} & n = n_0 \\ U(z, n+1) \dots U(z, n_0) & n < n_0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

também chamada de matriz de transferência. Mais explicitamente, a equação (A.9) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} u(n) \\ u(n+1) \end{pmatrix} = \Phi(z, n, n_0) \begin{pmatrix} u(n_0) \\ u(n_0+1) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Usando (A.13), vemos que $\Phi(z, n, n_0)$ satisfaz a lei usual de semigrupo

$$\Phi(z, n, n_0) = \Phi(z, n, n_1) \Phi(z, n_1, n_0), \quad \Phi(z, n_0, n_0) = \mathbb{I}. \quad (\text{A.14})$$

Ainda, por (A.6) e (A.8), temos

$$\begin{aligned} \det \Phi(z, n, n_0) &= c(z, n, n_0) s(z, n+1, n_0) - c(z, n, n_0) s(z, n+1, n_0) \\ &= W(c, s) = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Nós não apenas consideraremos H , como também as seguintes restrições, de H_{\pm, n_0} , de H aos subespaços $\ell^2(n_0, \pm\infty)$:

$$(H_{\pm, n_0} \psi)(n) = \begin{cases} \psi(n_0 \pm 2) + b(n_0 \pm 1) \psi(n_0 \pm 1), & n = \pm n_0 \pm 1, \\ (\tau \psi)(n), & n \gtrless n_0 \pm 1. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

(vale destacar que $\text{dom}(H_{\pm, n_0}) = \{\psi \in \ell^2(n_0, \pm\infty) \mid \psi(n_0) = 0\}$).

Um dos objetos mais importantes na teoria espectral é o resolvente $(H - z)^{-1}$, $z \in \rho(H)$, de H . Aqui, $\rho(H) = \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ é o conjunto resolvente de H ,

A.1 Operadores de Schrödinger discretos: Propriedades

definido como conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tal que $(H - z)^{-1}$ é limitado. A matriz dos elementos de $(H - z)^{-1}$ é chamada de função de Green:

$$G(z, m, n) = \langle \delta_m, (H - z)^{-1} \delta_n \rangle, \quad z \in \rho(H). \quad (\text{A.17})$$

Claramente,

$$(\tau - z)G(z, m, \cdot) = \delta_m(\cdot), \quad G(z, m, n) = G(z, n, m), \quad (\text{A.18})$$

e

$$((H - z)^{-1}f)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(z, m, n)f(m), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad z \in \rho(H). \quad (\text{A.19})$$

Antes de obtermos uma fórmula explícita para $G(z, m, n)$, precisamos construir soluções $u_{\pm}(z)$ de (A.3) que sejam quadrado-somáveis em $\pm\infty$, respectivamente.

Seja

$$u(z, \cdot) = (H - z)^{-1} \delta_0(\cdot) = G(z, 0, \cdot), \quad z \in \rho(H). \quad (\text{A.20})$$

Por construção, u cumpre (A.3) apenas para $n > 0$ e $n < 0$. No entanto, se tomarmos $u(z, -2)$, $u(z, -1)$ como condição inicial, podemos obter uma solução $u_-(z, n)$ de (A.3), definida em $\ell(\mathbb{Z})$, que coincide com $u(z, n)$ em $n < 0$. Portanto, $u_-(z)$ satisfaz $u_-(z) \in \ell_-^2(\mathbb{Z})$, como desejado. Uma solução $u_+(z) \in \ell_+^2(\mathbb{Z})$ é construída de forma semelhante. Essas soluções nos permitem escrever a função Green de forma mais explícita:

$$G(z, m, n) = \frac{1}{W(u_+(z), u_-(z))} = \begin{cases} u_+(z, n)u_-(z, m), & m \leq n \\ u_+(z, m)u_-(z, n), & n \leq m \end{cases}, \quad (\text{A.21})$$

$z \in \rho(H)$. Com efeito, uma vez que o lado direito de (A.21) satisfaz (A.18) e é quadrado-somável em relação a n , esta deve ser a função de Green de H .

Resultados análogos se seguem para as restrições. Com efeito, vale, para todo $z \in \rho(H_{\pm, n_0})$

$$((H_{\pm, n_0} - z)^{-1}f)(n) = \sum_{m \geq n_0} G_{\pm, n_0}(z, m, n)f(m), \quad (\text{A.22})$$

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

em que

$$G_{\pm, n_0}(z, m, n) = \frac{\pm 1}{W(u_{\pm}(z), s(z))} = \begin{cases} s(z, n)u_{\pm}(z, m), & m \leq n \\ s(z, m)u_{\pm}(z, n), & n \leq m \end{cases}. \quad (\text{A.23})$$

É conveniente introduzirmos a notação

$$g_{\pm}(z, n, n_0) = G_{\pm, n_0}(z, n, n) = \frac{s(z, n)u_{\pm}(z, m)}{W(u_{\pm}(z), s(z))}. \quad (\text{A.24})$$

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

Alguns dos mais interessantes operadores de Schrödinger discretos são aqueles com coeficientes (b_n) periódicos. Nesta seção, discutiremos alguns aspectos da teoria Floquet com o intuito de investigar este caso. Isso nos permitirá apresentar uma caracterização completa do comportamento qualitativo das soluções e, portanto, também uma caracterização espectral completa. Destacamos ainda que a discussão a seguir se concentrará no operador H_{+, n_0} ; considerações análogas se seguem para H_{-, n_0} .

A.2.1 Teoria de Floquet

Assimiremos, a partir daqui, que (b_n) é periódica com período $N \geq 1$ (para $N = 1$ vide Seções A.1 e A.2.2).

Hipótese 1. Suponha a existência de $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$b(n + N) = b(n) \quad (\text{A.25})$$

Além disso, defina

$$B = \sum_{j=1}^N b(n_0 + j) = \sum_{j=1}^N b(j) \quad (\text{A.26})$$

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

É natural no presente contexto avaliar a matriz de transferência $\Phi(z, n, n_0)$ quando $n = n_0 + N$, a qual chamaremos de *matriz de monodromia*

$$M(z, n_0) = \Phi(z, n_0 + N, n_0). \quad (\text{A.27})$$

Uma vez que não importa se iniciamos as N etapas em n_0 , em $n_0 + N$ ou mesmo em $n_0 + \ell N$, $\ell \in \mathbb{N}$, inferimos que $M(z; n_0)$ é periódico, isto é, $M(z; n_0 + N) = M(z; n_0)$, $n_0 \in \mathbb{Z}$. Além disso, ainda temos que $\Phi(z; n_0 + \ell N; n_0) = M(z; n_0)^\ell$. Assim, $\Phi(z; n; n_0)$ exibe um comportamento exponencial se nos movemos N pontos em cada etapa. Se considerarmos esse termo exponencial, o restante deve ser periódico.

A fim de justificarmos tal descrição heurística, devemos reescrever $M(z; n_0)$. Usando a periodicidade de (b_n) , obtemos de (A.15)

$$\det M(z, n_0) = \det \Phi(z, n_0 + N, n_0) = \det \Phi(z, n_0, n_0) = 1, \quad (\text{A.28})$$

e portanto, podemos encontrar uma matriz periódica $Q(z, n_0)$ tal que

$$M(z, n_0) = \exp(iNQ(z, n_0)), \quad \text{tr}Q(z, n_0) = 0. \quad (\text{A.29})$$

Agora, podemos escrever

$$\Phi(z, n, n_0) = P(z, n, n_0) \exp(i(n - n_0)Q(z, n)), \quad P(z, n_0, n_0) = \mathbb{I}. \quad (\text{A.30})$$

Um cálculo simples nos mostra que $P(z, n, n_0)$ é de fato periódica:

$$\begin{aligned} P(z; n + N, n_0) &= \Phi(z, n + N, n_0)M(z, n_0)^{-1} \exp(-i(n - n_0)Q(z, n_0)) \\ &= \Phi(z, n + N, n_0 + N) \exp(-i(n - n_0)Q(z, n_0)) \\ &= \Phi(z, n, n_0) \exp(-i(n - n_0)Q(z, n_0)) = P(z, n, n_0). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Desejamos, naturalmente, transformar esse resultado em um resultado correspondente às soluções de $\tau u = zu$. O ponto é investigar a forma canônica da Jordan de $M(z, n_0)$ (resp. $Q(z, n_0)$).

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

De (A.14) vemos que

$$\begin{aligned} M(z, n_1) &= \Phi(z, n_1 + N, n_0 + N)M(z, n_0)\Phi(z, n_0, n_1) \\ &= \Phi(z, n_1, n_0)M(z, n_0)\Phi(z, n_1, n_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

e conseqüentemente o discriminante

$$\Delta(z) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M(z, n_0) = \frac{1}{2} (c(z, n_0 + N, n_0) + s(z, n_0 + N + 1, n_0)) \quad (\text{A.33})$$

e os autovalores $m^\pm(z)$ (resp. $\pm q(z)$) de $M(z, n_0)$ (resp. $Q(z, n_0)$),

$$m^\pm(z) = \exp(\pm iNq(z)) = \Delta(z) \pm \sqrt{(\Delta(z))^2 - 1}, \quad m^+(z)m^-(z) = 1, \quad (\text{A.34})$$

são independentes de n_0 . O ramo tomado na raiz acima é definido como

$$\sqrt{(\Delta(z))^2 - 1} = \frac{-1}{2} \prod_{j=0}^{2N-1} \sqrt{z - E_j}, \quad (\text{A.35})$$

em que $(E_j)_{j=0}^{2N-1}$ são os zeros de $\Delta(z)^2 - 1$.

Os autovalores de $m^\pm(z)$ são chamados de *multiplicadores de Floquet*, e $q(z)$ é chamado de *momento de Floquet*.

Agora, podemos computar a forma canônica de Jordan de $M(z, n_0)$. Distinguiremos três casos.

Caso 1. $\Delta(z)^2 \neq 1$ (e conseqüentemente $m^+(z) \neq m^-(z)$). Se $s(z, n_0 + N, n_0) \neq 0$, estabelecemos

$$e^\pm(z, n_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_\pm(z, n_0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

onde

$$\phi_\pm(z, n_0) = \frac{m^\pm(z) - c(z, n_0 + N, n_0)}{s(z, n_0 + N, n_0)} = \frac{c(z, n_0 + N + 1, n_0)}{m^\pm(z) - s(z, n_0 + N + 1, n_0)}. \quad (\text{A.37})$$

Se $s(\mu, n_0 + N, n_0) = 0$, então $s(\mu, n, n_0)$ é periódico com respeito a n (isso porque $s(\mu, n_0, n_0) = 0$) e $s(\mu, n_0 + N + 1, n_0) = m^\sigma(\mu)$ para algum $\sigma \in \{\pm\}$.

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

Além disso, $\det M(\mu, n_0) = 1$ nos diz que $c(\mu, n_0 + N, n_0) = s(\mu, n_0 + N + 1, n_0)^{-1} = m^{-\sigma}(\mu)$, e conseqüentemente $\phi_{-\sigma}(z, n_0)$ tende a um limite finito, $\phi_{-\sigma}(\mu, n_0)$, quando $z \rightarrow \mu$. Assim, podemos definir $e^\sigma(\mu, n_0) = (0, 1)$ e $e^{-\sigma}(\mu, n_0) = (1, \phi_{-\sigma}(\mu, n_0))$.

Agora, a matriz

$$U(z, n_0) = (e^+(z, n_0), e^-(z, n_0)) \quad (\text{A.38})$$

transformará $M(z, n_0)$ em

$$U(z, n_0)^{-1}M(z, n_0)U(z, n_0) = \begin{pmatrix} m^+(z) & 0 \\ 0 & m^-(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Além disso, temos duas soluções correspondentes (soluções de *Floquet*)

$$u_\pm(n, z) = e_1^\pm(z, n_0)c(z, n, n_0) + e_2^\pm(z, n_0)s(z, n, n_0), \quad (\text{A.40})$$

satisfazendo

$$u_\pm(z, n + N) = m^\pm(z)u_\pm(z, n). \quad (\text{A.41})$$

Tratam-se de funções L.I. e únicas (a menos de constantes).

Caso 2: $\Delta(z) = \pm 1$ (e conseqüentemente $m^+(z) = m^-(z) = \pm 1$) e $M(z, n_0)$ possui dois autovetores L.I.. Necessariamente temos,

$$M(z, n_0) = \pm \mathbf{I} \quad (\text{A.42})$$

e não há nada a ser feito. Todas as soluções satisfazem

$$u(z, n + N) = \pm u(z, n). \quad (\text{A.43})$$

Caso 3: $\Delta(z) = \pm 1$ (e conseqüentemente $m^+(z) = m^-(z) = \pm 1$) e $M(z, n_0)$ tem somente um autovetor. Se $s(z, n_0 + N, n_0) \neq 0$, tomamos

$$e(z, n_0) = \begin{pmatrix} s(z, n_0 + N, n_0) \\ \frac{s(z, n_0 + N + 1, n_0) - c(z, n_0 + N, n_0)}{2} \end{pmatrix}, \hat{e}(z, n_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

ou, se $c(z, n_0 + N + 1, n_0) \neq 0$, tomamos

$$e(z, n_0) = \begin{pmatrix} \frac{c(z, n_0 + N, n_0) - s(z, n_0 + N + 1, n_0)}{2} \\ -c(z, n_0 + N + 1, n_0) \end{pmatrix}, \quad \hat{e}(z, n_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Se ambos são iguais zero, temos o **Caso 2**. Então, $U(z, n_0) = (e(z, n_0), \hat{e}(z, n_0))$ transformará $M(z, n_0)$ em

$$U(z, n_0)^{-1} M(z, n_0) U(z, n_0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

Além disso, existem soluções $u(z)$, $\hat{u}(z)$ tais que

$$u(z, n + N) = \pm u(z, n), \quad \hat{u}(z, n + N) = \pm \hat{u}(z, n) + u(z, n). \quad (\text{A.47})$$

Resumindo esses resultados, obtemos o Teorema de Floquet.

Teorema A.1. *As soluções de $\tau u = zu$ podem ser caracterizadas da seguinte forma.*

(i) *Se $\Delta(z)^2 \neq 1$, existem duas soluções satisfazendo*

$$u_{\pm}(z, n) = p_{\pm}(z, n) e^{iq(z)n}, \quad p_{\pm}(z, n + N) = p_{\pm}(z, n). \quad (\text{A.48})$$

(ii) *Se $\Delta(z) = \pm 1$, então todas as soluções satisfazem*

$$u(z, n + N) = \pm u(z, n), \quad (\text{A.49})$$

ou existem soluções satisfazendo

$$u(z, n) = p(z, n), \quad \hat{u}(z, n) = \hat{p}(z, n) + np(z, n) \quad (\text{A.50})$$

com $p(z, n + N) = \pm p(z, n)$, $\hat{p}(z, n + N) = \pm \hat{p}(z, n)$.

Se normalizarmos as soluções *Floquet* por $u_{\pm}(z, n_0) = 1$, elas serão chamadas funções de *Floquet*, $\psi_{\pm}(z, n, n_0)$, e um cálculo direto, nos leva a

$$\psi_{\pm}(z, n, n_0) = c(z, n, n_0) + \phi_{\pm}(z, n_0) s(z, n, n_0),$$

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

$$\phi_{\pm}(z, n) = \frac{\psi_{\pm}(z, n+1, n_0)}{\psi_{\pm}(z, n, n_0)}. \quad (\text{A.51})$$

Note que $\phi_{\pm}(z, n)$ é periódica, $\phi_{\pm}(z, n+N) = \phi_{\pm}(z, n)$, e satisfaz a seguinte equação de Riccati:

$$\phi_{\pm}(z, n) = \frac{1}{\phi_{\pm}(z, n+1)} = z - b(n),$$

em que $\phi_{\pm}(z, n) = \frac{\psi_{\pm}(z, n+1)}{\psi_{\pm}(z, n)}$, $\psi_{\pm}(z, n) \neq 0$.

A.2.2 Conexão com o espectro de operadores de Schrödinger discretos e finitos

Nesta seção, desejamos obter mais informações sobre H_{+,n_0} ao considerarmos operadores de Schrödinger discretos e finitos. Para tanto, consideraremos os operadores

$$\tilde{H}_{n_0}^{\beta} = \begin{pmatrix} b_{n_0+1} & 1 & & & e^{-i\theta} \\ 1 & b_{n_0+2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n_0+N-1} & 1 \\ e^{i\theta} & & & 1 & b_{n_0+N} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.52})$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. Estes estão associados às condições de contorno

$$\begin{aligned} u(n_0) \exp(i\theta) - u(n_0 + N) &= 0, \\ u(n_0 + 1) \exp(i\theta) - u(n_0 + 1 + N) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

O espectro de $\tilde{H}_{n_0}^{\theta}$ é dado pelos zeros, $\{E_j^{\theta}\}_{j=1}^N$, da equação característica

$$\det(z - \tilde{H}_{n_0}^{\theta}) = \prod_{j=1}^N (z - E_j^{\theta}). \quad (\text{A.54})$$

Agora, estendendo as autofunções de $\tilde{H}_{n_0}^{\theta}$ para uma solução de (A.3) em $\ell(n_0, +\infty)$, obtemos uma solução com a propriedade $u(n+N) = e^{i\theta}u(n)$. Por

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

outro lado, qualquer solução deste tipo dá origem a uma autofunção de $\tilde{H}_{n_0}^\theta$. Em outras palavras,

$$\sigma(\tilde{H}_{n_0}^\theta) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (m^+(\lambda) - e^{i\theta})(m^-(\lambda) - e^{i\theta}) = 0 \Leftrightarrow \Delta(\lambda) = \cos(\theta)\}. \quad (\text{A.55})$$

Além disso, temos $\sigma(\tilde{H}_{n_0}^\theta) = \sigma(\tilde{H}_{n_0}^{-\theta})$ (θ deve ser entendido como $\text{mod } 2\pi$), uma vez que os operadores correspondentes são anti-unitariamente equivalentes.

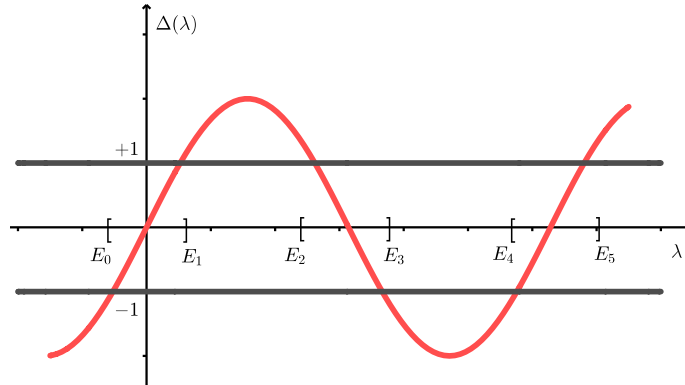
Para os casos $\theta \in \{0, \pi\}$, definimos $\tilde{H}_{n_0}^0 = \tilde{H}_{n_0}^+$, $\tilde{H}_{n_0}^\pi = \tilde{H}_{n_0}^-$ e $E_j^0 = E_j^+$, $E_j^\pi = E_j^-$. Pela análise acima, E_j^\pm são os zeros de $\Delta(z) \mp 1$, e podemos escrever

$$\Delta(z) \mp 1 = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^N (z - E_j^\pm). \quad (\text{A.56})$$

Uma vez que os $N - 1$ zeros de $\frac{d\Delta(z)}{dz}$ devem entrelaçar os N zeros de ambos $\Delta(z) \pm 1$, deduzimos que

$$E_1^\pm < E_1^\mp \leq E_2^\mp < E_2^\pm \leq E_3^\pm < \dots \leq E_N^{\pm(-1)^{N-1}} < E_N^{\pm(-1)^N} \quad (\text{A.57})$$

Os números na sequência acima serão denotados por E_j , $0 \leq j \leq 2N - 1$. Um discriminante típico é ilustrado abaixo.



Por fim, usemos estas informações para investigar $\sigma(H)$. Nossa escolha para o ramo em (A.35) implica $|m^+(z)| < 1$ para $|z|$ grande (já que $\psi_+(z, n, n_0)$ é proporcional a $(m^+(z)^n)$). Assim, ψ_+ é quadrado-somável em

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

$+\infty$ para $|z|$ grande. Mas como ψ_+ é holomorfa para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, é quadrado-somável para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Portanto, devemos ter $|m^+(z)| < 1$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e, portanto, por continuidade, $|m^+(z)| \leq 1$ para $z \in \mathbb{C}$.

Em particular, podemos usar ψ_+ para calcular $g_+(z, n, n_0)$. Tomando $m = n = n_0 + N$ em (A.23), obtemos

$$g_+(z, n_0 + N, n_0) = s(z, n_0 + N, n_0)\psi_+(z, n_0 + N, n_0) = s(z, n_0 + N, n_0)m^+(z), \quad (\text{A.58})$$

uma vez que $W(\psi_+, s) = 1$.

Por (A.58), (A.34) e (A.35), $\sigma(H)$ é dado por

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\Delta(\lambda)| \leq 1\} = \bigcup_{j=1}^{N-1} [E_{2j}, E_{2j+1}] \quad (\text{A.59})$$

e é puramente absolutamente contínuo ($\sigma_p(H) = \sigma_{sc}(H) = \emptyset$). Com efeito, por tais relações, $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\Delta(\lambda)| \leq 1\}$ é o fecho do conjunto de pontos em que $0 < \lim_{\eta \downarrow 0} \Im g_+(\lambda + i\eta, n_0 + N, n_0) < \infty$, sendo este último um suporte minimal para a parte absolutamente contínua da medida espectral (vide [38]).

A partir de agora, usaremos a notação empregada nos capítulos anteriores; tomando $N = q$, $n_0 = 0$, chamaremos o traço da matriz de monodromia $M(z) = \Phi(z, q, 0)$ de discriminante de $H_{+,n_0} \equiv H_{per}^q$, e o denotaremos por $\mathcal{D}^q(z)$. Note que, de acordo com a definição (A.33), $\mathcal{D}^q(z) = 2\Delta(z)$. Reunimos, a seguir, algumas propriedades importantes de \mathcal{D}^q que são empregadas ao longo do trabalho.

Proposição A.2. *Seja \mathcal{D}^q como definido anteriormente. Valem as seguintes propriedades:*

1. Os zeros de \mathcal{D}^q , isto é, $\{\tilde{E}_{q,1}, \tilde{E}_{q,2}, \dots, \tilde{E}_{q,q}\}$, são precisamente os q autovalores reais distintos de $H^q(\frac{\pi}{2}) \equiv \tilde{H}_0^{\frac{\pi}{2}}$.
2. O espectro essencial de H_{per}^q é a imagem inversa por \mathcal{D}^q de $[-2, 2]$.

A.2 Operadores de Schrödinger discretos com coeficientes periódicos

3. \mathcal{D}^q leva o conjunto $\{2, -2\}$ precisamente aos autovalores de $H^q(0)$ e de $H^q(\pi)$. Além disso, para todo $1 \leq j \leq q$, $|\mathcal{D}^q(E_{q,j}(\pi)) - \mathcal{D}^q(E_{q,j}(0))| = 4$, em que $E_{q,j}(\theta) \equiv E_j^\theta$.

4. Se $(\mathcal{D}^q)'(E) = 0$, então $E \in \mathbb{R}$ e $|\mathcal{D}^q(E)| \geq 2$.

5. $\mathcal{D}^q(z) = G_{per}^q(z, 1, q) + \frac{1}{G_{per}^q(z, 1, q)}$, em que $G_{per}^q(z, 1, q) \equiv G_{+,0}(z, 1, q)$.

Demonstração. 1. Segue-se diretamente de (A.55).

2. Isso é a relação (A.59).

3. Segue-se diretamente de (A.56).

4. Segue-se de (A.56) que os $q - 1$ zeros de $\frac{d\mathcal{D}^q(z)}{dz}$ devem entrelaçar os q zeros de ambos $\mathcal{D}^q(z) \pm 2$. Logo, se $(\mathcal{D}^q)'(E) = 0$, então $|\mathcal{D}^q(E)| \geq 2$. Naturalmente, tais pontos são números reais.

5. Por (A.34), basta mostrar que $G_{per}^q(z, 1, q) = m^+(z)$. Segue-se de (A.16) que $G_{per}^q(z, 1, q) = \psi_+(z, q) = m^+(z)$ (lembre-se que $\psi_+(z, 0) = 1$).

□

Referências Bibliográficas

- [1] S. Abe and H. Hiramoto, *Fractal dynamics of electron wave packets in one-dimensional quasiperiodic systems*, Phys. Rev. A 36 (1987), 5349-5352.
- [2] M. Aloisio, *Dimensões fractais generalizadas e o seu papel na dinâmica quântica*, Universidade Federal de Minas Gerais - Brasil, 2015.
- [3] J. M. Barbaroux, F. Germinet, and S. Tcheremchantsev, *Fractal dimensions and the phenomenon of intermittency in quantum dynamics*, Duke.Math. J. 110 (2001), 161-193.
- [4] J. Breuer, Y. Last, Y. Strauss, *Eigenvalue Spacings and Dynamical Upper Bounds for Discrete One-Dimensional Schroedinger Operators*, Duke.Math. J. November/2009. vol 157, (2011) 425-460.
- [5] J. Breuer, *Spectral and dynamical properties of certain random Jacobi matrices with growing weights*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
- [6] S. L. Carvalho, *Espectro e dimensão Hausdorff de operadores bloco-Jacobi com perturbações esparsas distribuídas aleatoriamente*, Universidade de São Paulo - Brasil, 2010.
- [7] S. L. Carvalho, C.R. de Oliveira, *Generic quasilocalized and quasiballistic discrete Schrödinger operators*, Proceedings of American Mathematical Society 144, (2016) 129-141.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [8] S. L. Carvalho, C.R. de Oliveira, R. A. Prado, *Sparse one-dimensional discrete Dirac operators II: Spectral properties*, Journal of Mathematical Physics 52, 073501 (2011).
- [9] J. M. Combes, *Connections between quantum dynamics and spectral properties of time-evolution operators*, In Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, 59-68, Academic Press, Boston (1993).
- [10] D. Damanik and S. Tcheremchantsev, *Power-Law bounds on transfer matrices and quantum dynamics in one dimension*, Commun. Math. Phys. 236 (2003), 513-534.
- [11] D. Damanik and S. Tcheremchantsev, *Quantum dynamics via complex analysis methods: general upper bounds without time-averaging and tight lower bounds for the strongly coupled Fibonacci Hamiltonian*, J. Funct. Anal. 255 (2008), 2872-2887.
- [12] D. Damanik and S. Tcheremchantsev, *Scaling estimates for solutions and dynamical lower bounds on wavepacket spreading*, J. d'Analyse Math. 97 (2005), 103-131.
- [13] D. Damanik and S. Tcheremchantsev, *Upper bounds in quantum dynamics*, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), 799-827.
- [14] D. Damanik, *Dynamical upper bounds for one-dimensional quasicrystals*, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 327-341.
- [15] D. Damanik, *Strictly ergodic subshifts and associated operators*, In Spectral Theory and Mathematical Physics: A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday, 505-538, Proc. Sympos. Pure Math. 76 American Math. Soc. Providence, RI, (2007).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [16] P. Deift and B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operators, III. The absolutely continuous spectrum in one dimension*, Commun. Math. Phys. 90 (1983), 389-411.
- [17] R. Del-Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon, *Operators with singular continuous spectrum, IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization*, J. d'Analyse Math. 69 (1996), 153-200.
- [18] J. T. Edwards and D. J. Thouless, *Numerical studies of localization in disordered systems*, J. Phys. C 5 (1972), 807-820.
- [19] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Lições de física de Feynman vol. 3: tradução Antônio José Roque da Silva, Sylvio Roberto Accioly Canuto*. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [20] T. Geisel, R. Ketzmerick, and G. Petschel, *Unbounded quantum diffusion and a new class of level statistics*, In Quantum Chaos-Quantum Measurement, (Copenhagen, 1991), 43-59, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 358, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [21] F. Germinet, A. Kiselev, and S. Tcheremchantsev, *Transfer matrices and transport for Schrödinger operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54 (2004), 787-830.
- [22] F. Gesztesy, L. A. Sakhnovich, *A Class of Matrix-valued Schrödinger Operators with Prescribed Finite-band Spectra*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54 (2004), 787-830.
- [23] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, *Intermittent lower bounds on quantum diffusion*, Lett. Math. Phys. 49 (1999), 317-324.
- [24] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, *Lower bounds on wave packet propagation by packing dimensions of spectral measures*, Math. Phys. Electron. J. 5 (1999), Paper 1, 16 pp.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [25] I. Guarneri and H. Schulz-Baldes, *Upper bounds for quantum dynamics governed by Jacobi matrices with self-similar spectra*, Rev. Math. Phys. 11 (1999), 1249-1268.
- [26] I. Guarneri, *On an estimate concerning quantum diffusion in the presence of a fractal spectrum*, Europhys. Lett. 21 (1993), 729-733.
- [27] I. Guarneri, *Spectral properties of quantum diffusion on discrete lattices*, Europhys. Lett. 10 (1989), 95-100.
- [28] H. Hiramoto and S. Abe, *Dynamics of an electron in quasiperiodic systems. I. Fibonacci model*, J. Phys. Soc. Japan 57 (1988), 230-240.
- [29] R. Killip, A. Kiselev and Y. Last, *Dynamical upper bounds on wavepacket spreading*, Amer. J. Math. 125 (2003), 1165-1198.
- [30] A. Kiselev, Y. Last, *Solutions, spectrum and dynamics for Schrodinger operators on infinite domains*, Duke Math. J. 102 (2000), 125-150.
- [31] H. Kunz and B. Souillard, *Sur le spectre des operateurs aux differences finies aleatoires*, Commun. Math. Phys. 78 (1980), 201-246.
- [32] Y. Last and B. Simon, *Fine structure of the zeros of orthogonal polynomials. IV. A priori bounds and clock behavior*, Comm. Pure Appl. Math. 61 (2008), 486-538.
- [33] Y. Last, *Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra*, J. Funct. Anal. 142 (1996), 406-445.
- [34] Y. Last, *Zero measure spectrum for the almost Mathieu operator*, Commun. Math. Phys. 164 (1994), 421-432.
- [35] C. A. Marx, S. Jitomirskaya *Dynamics and spectral theory of quasi-periodic Schrodinger-type operators* Submitted on 19 Mar 2015 (v1), last revised 31 Jan 2016 (this version, v2)).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [36] C. R. de Oliveira, *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, Birkhäuser, November/2008.
- [37] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, III. Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.
- [38] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [39] D. J. Thouless, *Electrons in disordered systems and the theory of localization*, Phys. Rep. 13 (1974), 93-142.