

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Gilson Granja Ferreira Filho

Enumeração de superfícies em  $\mathbb{P}^3$   
singulares ao longo de curvas redutíveis

Belo Horizonte - MG  
2023

Gilson Granja Ferreira Filho

Enumeração de superfícies em  $\mathbb{P}^3$   
singulares ao longo de curvas redutíveis

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Algébrica

Orientador: Israel Vainsencher

**Belo Horizonte - MG**  
**2023**

2023, Gilson Granja Ferreira Filho.  
Todos os direitos reservados

	Ferreira Filho, Gilson Granja.
F383e	Enumeração de superfícies em $P^3$ singulares ao longo de curvas redutíveis [recurso eletrônico] / Gilson Granja Ferreira Filho. – 2023 1 recurso online (67 f. il.) : pdf.  Orientador: Israel Vainsencher.  Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 66-67.  1. Matemática - Teses. 2. Geometria algébrica - Teses. 3. Geometria enumerativa – Teses. 4. Singularidades (Matemática) – Teses. I. Vainsencher, Israel. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.  CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz  
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Enumeração de superfícies em  $P^3$  singulares ao longo de curvas redutíveis*

**GILSON GRANJA FERREIRA FILHO**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Israel Vainsencher  
UFMG

Profa. Aline Vilela Andrade  
UFMG

Prof. Charles Aparecido de Almeida  
UFMG

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior  
BARI, Itália

Prof. Nivaldo Nunes de Medeiros Júnior  
UFF

Belo Horizonte, 04 de agosto de 2023.

# Agradecimentos

A minha esposa Sara, por toda paciência, amor e por ter sido o meu colo nos momentos em que mais precisei.

Ao meu filho Davi, pela grata surpresa da alegria de sua chegada.

Aos meus pais, minha irmã (e as suas princesinhas) e a Dona Francisca, por todo cuidado, dedicação, carinho dados ao longo da vida.

Aos amigos de departamento Arthur, Weversson, Jhon Quispev, Emerson, Gilberto, Moacir, Sarah, Édson, Vinícius, Bruno, Naamã, Alexandre e Maxwel pelas conversas e gargalhadas que juntos trocamos pelos corredores do ICEX.

Aos meus “irmãos” de orientação Arthur Rossini e Weversson Sellin por me ensinarem e ajudarem com o *Macaulay 2*. Além disso, obrigado também pelas excelentes conversas matemáticas ao longo dessa jornada.

Aos professores que ajudaram na minha formação de pesquisador. Em especial, ao meu orientador Israel Vainsencher. Além de ter sido o mentor desta tese, e um exímio mentor, foi um ser humano extraordinário comigo desde o momento em que entrei na UFMG, sempre disponível e muito compreensivo (um paizão). Sem ele, certamente esta tese não teria sido produzida.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido.

# Resumo

Neste trabalho estudamos famílias de superfícies singulares ao longo de certas curvas redutíveis em  $\mathbb{P}^3$ . Sejam  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_l$  subvariedades fechadas e irredutíveis do esquema de Hilbert  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}_i}(t)}(\mathbb{P}^3)$  de curvas em  $\mathbb{P}^3$  com polinômio de Hilbert  $P_{\mathbb{W}_i}(t), i = 1, \dots, l$ . Considere a variedade  $\mathbb{W}'$  em  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'}(t)}(\mathbb{P}^3)$  obtida como fecho da família de subsquemas de  $\mathbb{P}^3$  definidos por feixes de ideais da forma  $\mathcal{I}_{\underline{W}} := (\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$ , onde  $W_i$  é um membro genérico de  $\mathbb{W}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ . Mostramos que, para  $d \gg 0$ , o membro geral de  $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_{\underline{W}}(d)))$  é uma superfície de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$  singular ao longo de  $W' := W_1 \cup \dots \cup W_l$ . Consideramos a subvariedade  $\Sigma(\mathbb{W}', d) \subset \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))$ , formada pelas superfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$ , que são singulares ao longo de algum  $W'$  como acima. Mostramos que o grau de  $\Sigma(\mathbb{W}', d)$  é dado por um polinômio  $p^{\mathbb{W}'}(d)$  para  $d \gg 0$ . Exibimos o polinômio  $p^{\mathbb{W}'}(d)$  para certas famílias  $\mathbb{W}'$ . Enunciamos uma conjectura sobre o grau de  $p^{\mathbb{W}'}(d)$ , verificada para as famílias aqui consideradas.

**Palavras-chave:** geometria enumerativa; fórmula de resíduos de Bott; singularidades.

# Abstract

This thesis investigates families of singular surfaces in  $\mathbb{P}^3$  along certain reducible curves. Let  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_l$  denote closed, irreducible subvarieties of a Hilbert scheme,  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}_i}(t)}(\mathbb{P}^3)$ , of curves in  $\mathbb{P}^3$  with Hilbert polynomial  $P_{\mathbb{W}_i}(t), i = 1, \dots, l$ . Let  $\mathbb{W}'$  be the closure in  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'}(t)}(\mathbb{P}^3)$  of the family of subschemes of  $\mathbb{P}^3$  defined by ideals of the form  $\mathcal{I}_{\underline{W}} := (\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$ , where  $W_i$  is a generic member of  $\mathbb{W}_i$ , for all  $i = 1, \dots, l$ . We show that for  $d \gg 0$  the general member of  $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{I}_{\underline{W}}(d)))$  is a surface of degree  $d$  in  $\mathbb{P}^3$  singular along  $W' := W_1 \cup \dots \cup W_l$ . We consider the subvariety  $\Sigma(\mathbb{W}', d) \subset \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))$ , formed by surfaces of degree  $d$  in  $\mathbb{P}^3$ , which are singular along some  $W'$  as above. We show that the degree of  $\Sigma(\mathbb{W}', d)$  is given by a polynomial  $p^{\mathbb{W}'}(d)$  for  $d \gg 0$ . We are able to compute explicitly  $p^{\mathbb{W}'}(d)$  for certain  $\mathbb{W}'$ . We state a conjecture about the degree of  $p^{\mathbb{W}'}(d)$ , verified for the families worked out here.

**Keywords:** enumerative geometry; Bott's residues formula; singularities.

# Notações

$K$  := corpo algebricamente fechado, em geral de característica zero.

$K[x_0, \dots, x_n]$  := anel de polinômios nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$ ;

$\mathcal{F}_d = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$  := fibrado vetorial trivial com fibra o espaço de polinômios homogêneos de grau  $d$  nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$ ;

$Sym_i(\_)$  :=  $i$ -ésima potência simétrica;

$Hilb_{p_W(t)}(\mathbb{P}^n)$  := o esquema de Hilbert de subesquemas de  $\mathbb{P}^n$  com polinômio de Hilbert fixado  $p_W(t)$ ;

$\mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)))$  := o espaço de parâmetros de superfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$ ;

$\mathcal{N}_{Y/X}$  := fibrado normal de  $Y$  em  $X$ ;

$\mathcal{T}X$  := fibrado tangente de  $X$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Potência simbólica . . . . .	12
1.2 Polinomialidade . . . . .	13
1.3 Fórmula de Bott . . . . .	17
<b>2 Superfícies singulares ao longo de duas retas</b>	<b>20</b>
2.1 Duas retas gerais . . . . .	20
2.2 Duas retas concorrentes . . . . .	29
<b>3 Superfícies singulares ao longo de três retas passando por um ponto</b>	<b>34</b>
3.1 Três retas concorrentes e não coplanares . . . . .	34
3.2 Espaço de parâmetros . . . . .	35
3.3 Fórmula de Bott . . . . .	41
<b>4 Superfícies singulares ao longo de uma configuração Z não-planar</b>	<b>47</b>
4.1 Configuração Z não-planar . . . . .	47
4.2 Espaço de parâmetros . . . . .	48
4.3 Fórmula de Bott . . . . .	54
<b>5 Superfícies singulares ao longo de uma cônica e uma reta incidente</b>	<b>59</b>
5.1 Configuração cônica e uma reta passando por um ponto da cônica . . . . .	59
5.2 Espaço de parâmetros . . . . .	60
5.3 Fórmula de Bott . . . . .	63
<b>Referências</b>	<b>66</b>

# Introdução

O famoso teorema de Noether-Lefschetz (NL), em (LEFSCHETZ, 1921), nos diz que uma superfície genérica em  $\mathbb{P}^3$  com grau pelo menos 4 não contém curvas que não sejam suas intersecções completas com outras superfícies. Isto leva assim ao estudo do chamado lugar de Noether-Lefschetz, que parametriza a família das superfícies que contêm curvas de um certo tipo (não esperado).

Na literatura há várias contribuições ao estudo enumerativo de famílias de variedades projetivas com singularidades (genéricas) isoladas.

Em (VAINSENCHE, 1981), comprovou a fórmula de Enriques para o grau do estrato das curvas cúspides ( $\mathcal{A}_2$ ). Mais recentemente, em (VAINSENCHE, 2003), ele calculou os graus dos estratos de hipersuperfície com no máximo 6 nós. Ran, em (RAN, 1989), conta curvas com um certo número de nós. Em (CAPORASO; HARRIS, 1996) e (CAPORASO; HARRIS, 1998), os autores fornecem um algoritmo para calcular o grau do estrato de curvas com qualquer número de nós. Em (ALUFFI, 1998), há uma enumeração de hipersuperfícies com nós ordinários, cúspides e tacnós. Mais recentemente, em (RENNEMO, 2017), foi mostrado que o grau da família de hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$  com um número finito de singularidades (de qualquer tipo pré-fixado) é polinomial. Mas as técnicas utilizadas não parecem produzir fórmula explícita para o grau.

No entanto, há poucas contribuições sobre a geometria enumerativa de famílias de variedades projetivas, cujos membros possuem singularidades não isoladas. Weversson Sellin e Vainsencher, em (SELLIN, 2018) e (SELLIN; VAINSENCHE, 2020), abordaram casos em que as singularidades são não isoladas, mas irredutíveis.

Meu interesse neste trabalho é construir espaços de parâmetros referentes a famílias de superfícies em  $\mathbb{P}^3$  com singularidades não isoladas e redutíveis.

Os dois tópicos mencionados, singularidades e lugar de NL, admitem abordagem comum: a condição imposta se traduz em pedir que a superfície contenha um tipo de subesquema não presente na superfície genérica. No caso NL, requeremos conter um membro de uma família de curvas pré-fixada. No caso de uma singularidade isolada, para fixar ideias, olhamos para a família de subesquemas definidos pelo quadrado do ideal de um ponto. Analogamente, uma superfície é singular ao longo de, digamos, uma reta, exatamente quando sua equação pertencer ao quadrado do ideal da reta. Mais adiante vamos contextualizar essa “quadratura” do ideal à luz do Teorema de Nagata-Zariski, 1.1.

Fruto de observação de alguns casos já conhecidos leva a uma fórmula conjectural para o grau deste polinômio e que aqui chamamos de conjectura do discriminante generalizado. Nesta tese, verifiquei vários casos explícitos, mas a questão geral permanece em aberto. A seguir, motivaremos e enunciaremos tal conjectura.

Expliquemos um pouco o porque do uso do termo discriminante generalizado. Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  um trinômio do segundo grau. Sabemos que  $f(x)$  tem uma raiz dupla se, e somente se,

$$f(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0,$$

ou seja, quando o discriminante do trinômio se anula.

Em geral, podemos considerar o espaço de parâmetros de hipersuperfícies de um dado grau (isto é, das equações que as definem) e perguntar “quantas” hipersuperfícies singulares existem. Mais precisamente, seja

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|i|=d} a_i x^i,$$

um polinômio homogêneo de um certo grau fixado. Queremos estudar a geometria do espaço dos coeficientes  $(a_i)$ , vistos como coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^N$ , imposta a condição da existência de um ponto que anule tanto  $f$  quanto todas as suas derivadas parciais de primeira ordem. Denotemos este lugar por  $\Sigma(1, n, d) \subset \mathbb{P}^N$ . Sabe-se que  $\Sigma(1, n, d)$  (o 1 anterior é de 1 ponto singular) é uma hipersuperfície, chamada hipersuperfície discriminante, de grau  $(n+1)(d-1)^n$ . Temos aqui um polinômio de grau  $n$  em  $d$ .

Podemos generalizar o problema acima e considerar a variedade  $\Sigma(m, n, d) \subset \mathbb{P}^N$  composta pelas hipersuperfícies de  $\mathbb{P}^n$  com  $m$  singularidades. É conhecido, veja (VAINSENCHER, 2015), que o grau de  $\Sigma(m, n, d)$  é polinomial de grau no máximo  $mn$ .

Seja  $\mathbb{W}$  uma família de dimensão  $m$  de subvariedades de dimensão  $k$  de  $\mathbb{P}^3$ . Definimos o discriminante generalizado  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  como a família de superfícies em  $\mathbb{P}^3$  singulares ao longo de algum membro de  $\mathbb{W}$ . Sob condições adequadas para o membro geral de  $\mathbb{W}$ , sabe-se que o grau de  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  é dado por um polinômio e a pergunta é qual é o grau deste polinômio? Em todos os exemplos na literatura, observou-se que o referido grau é igual a  $m(k+1)$ . O caso geral, ao que saibamos, resta conjectural. Isto é o que chamamos de conjectura do discriminante generalizado. Enunciemos e destaquesmos esta conjectura no texto:

**Conjectura 0.1.** *Seja  $\mathbb{W}$  uma família de dimensão  $m$  de subvariedades de dimensão  $k$  de  $\mathbb{P}^3$ . Sob condições adequadas para o membro geral de  $\mathbb{W}$  o grau de  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  é dado por um polinômio de grau igual a  $m(k+1)$ .*

Neste trabalho, abordamos os casos em que  $\mathbb{W}$  é uma das seguintes famílias de curvas:

1. Duas retas gerais em  $\mathbb{P}^3$

2. Duas retas concorrentes em  $\mathbb{P}^3$
3. Três retas não coplanares e concorrentes em um ponto em  $\mathbb{P}^3$
4. Configurações  $Z$ - não planar, isto é, três retas não coplanares, com uma delas encontrando as outras duas em um ponto em  $\mathbb{P}^3$ .
5. Configurações cônica  $\cup$  reta (em  $\mathbb{P}^3$ ), onde a reta intersecta a cônica em um ponto.

Nossa abordagem passa pela construção de cinco espaços de parâmetros para certos subesquemas “gordos” *i.e.*, não reduzidos, suportados em cada um dos tipos acima. Vamos descrever cinco variedades projetivas lisas, acaunidas de ações naturais do toro  $\mathbb{C}^*$  com um número finito de pontos fixos, para as quais a fórmula de resíduos de Bott se aplica para calcular os graus de discriminantes generalizados.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo discorreremos brevemente sobre alguns fatos que servirão de base para os principais resultados deste trabalho. Primeiramente faremos um cotejo entre potência ordinária e potência simbólica de um ideal e estabeleceremos uma abordagem para encararmos o problema de impor um local singular em uma superfície projetiva em  $\mathbb{P}^3$ .

### 1.1 Potência simbólica

Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $\mathfrak{a} \subset A$  um ideal e  $S$  o complemento em  $A$  da união de todos os primos associados de  $\mathfrak{a}$ , a  $n$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{a}$ , que denotaremos por  $\mathfrak{a}^{(n)}$ , é dada por:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = S^{-1}\mathfrak{a}^n \cap A = \{a \in A \mid sa \in \mathfrak{a}^n \text{ para algum } s \in S\}.$$

Quando  $\mathfrak{p}$  é um ideal primo, a  $n$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{p}$  é dada por

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{a \in A \mid sa \in \mathfrak{p}^n \text{ para algum } s \in A \setminus \mathfrak{p}\}$$

Equivalentemente, a  $n$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{p}$  é a única componente  $\mathfrak{p}$ -primária em uma decomposição primária irredundante de  $\mathfrak{p}^n$ .

No caso em que  $\mathfrak{p}$  é um ideal primo e  $A$  é o anel de polinômios sobre um corpo algebricamente fechado com característica 0, Nagata e Zariski nos deram uma interpretação geométrica para a  $n$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{p}$ , em (ZARISKI, 1949) e (NAGATA, 1962).

**Teorema 1.1** (Nagata, Zariski). *Sejam  $k$  um corpo algebricamente fechado com característica nula,  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  o anel de polinômios em  $n$  variáveis com coeficientes em  $k$*

e  $\mathfrak{p} \subset A$  um ideal primo. Então

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m} \in \text{MaxSpec}(A)}} \mathfrak{m}^n.$$

Uma boa referência introdutória é o terceiro capítulo de (EISENBUD, 2013). Ao leitor mais curioso, que queira estudar o assunto de forma mais detalhada e profunda, sugiro que leia (DAO et al., 2015).

Em outras palavras, Nagata e Zariski nos disseram que se pegarmos um ideal primo dentro do anel de polinômios sobre um corpo algebricamente fechado com característica 0 e olharmos para a variedade afim  $X$ , correspondente ao ideal primo  $\mathfrak{p}$ , podemos interpretar a  $n$ -ésima potência simbólica de  $\mathfrak{p}$  como o conjunto das funções regulares em  $X$  com ordem de anulamento pelo menos  $n$  em cada ponto de  $X$ . Como estamos supondo  $\text{char}(k) = 0$ , isto é equivalente a exigir o anulamento em conjunto das funções polinomiais e de suas derivadas parciais de ordem menor do que  $n$  em cada ponto de  $X$ .

Em geral, o problema de identificar quando a potência ordinária e a potência simbólica de um ideal coincidem não é fácil e está em aberto. Felizmente há condições favoráveis como em (HOCHSTER, 1973) que nos permite concluir que  $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$  no caso de interseção completa local. Em (LI; SWANSON, 2006), os autores generalizaram um pouco mais os resultados e mostraram que os mesmos são válidos exigindo apenas a condição de  $\mathfrak{a}$  ser um ideal radical. Outra condição suficiente interessante aparece em (DAO et al., 2017): se  $\mathfrak{a}$  é o ideal homogêneo saturado de uma variedade projetiva aritmeticamente Cohen-Macaulay, que é uma interseção completa local e com codimensão 2. Assim, para as configurações  $W = W_1 \cup \dots \cup W_l$  tratadas aqui, temos que uma superfície em  $\mathbb{P}^3$  dada por uma forma homogênea  $F$  de grau  $d$  é singular ao longo de  $W$  se, e só se,  $F \in H^0(\mathcal{I}_{W_1}^2 \cap \dots \cap \mathcal{I}_{W_l}^2)$ .

## 1.2 Polinomialidade

Neste trabalho estamos interessados em estudar problemas enumerativos relativos ao espaço de parâmetros das superfícies em  $\mathbb{P}^3$ , com um grau fixado, que são singulares ao longo de uma curva redutível. Nesta seção iremos mostrar que tal espaço de parâmetros é imagem de um fibrado projetivo e que a função que nos fornece o grau do referido espaço quando variamos o grau das superfícies, é polinomial.

Sejam  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_l$  subvariedades fechadas e irredutíveis do esquema de Hilbert  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}_i}(t)}(\mathbb{P}^3)$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ , de subesquemas em  $\mathbb{P}^3$  com polinômio de Hilbert  $P_{\mathbb{W}_i}(t)$ , cujo membro geral de cada  $\mathbb{W}_i$  é suave. Considere a variedade  $\mathbb{W}'$  em  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'}(t)}(\mathbb{P}^3)$  obtida como fecho da família de subesquemas de  $\mathbb{P}^3$  definidos por feixes de ideais da forma  $(\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$ , onde  $W_i$  é um membro genérico de  $\mathbb{W}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ . Em virtude da planitude genérica, surge um novo polinômio de Hilbert  $P_{\mathbb{W}'}(t)$ , veja teorema

9.9 de (HARTSHORNE, 1977). Alerto ao leitor que, em geral, a família de subesquemas de  $\mathbb{P}^3$  dada pelo feixe de ideais  $(\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \cdots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$  não é plana, como veremos nos próximos capítulos.

Lembramos que as superfícies de grau  $d$  podem ser identificadas como pontos do espaço projetivo  $\mathbb{P}^{N_d}$ ,  $N_d = \binom{3+d}{d} - 1$ . Pela discussão da seção anterior, pedir que uma superfície seja singular ao longo da união de membros gerais  $W_i \in \mathbb{W}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ , é equivalente a impor que o polinômio  $F$  que define a hipersuperfície pertença ao espaço vetorial das seções globais do feixe de ideais  $\mathcal{I}_{W'} = (\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \cdots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$ . Denotaremos o local singular da hipersuperfície dada pela forma homogênea  $F$  por  $Sing(F)$ . O seguinte lema vale para as configurações abordadas neste trabalho.

**Lema 1.2.** *Suponha que  $\mathcal{I}_d := (\mathcal{I}_{W_1})^2(d) \cap \cdots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2(d)$  seja globalmente gerado e seja  $F \in H^0(\mathcal{I}_d)$  uma seção genérica. Então,  $Sing(F) = W_1 \cup \cdots \cup W_l$  conjuntivamente.*

*Demonstração.* Pela discussão da seção inicial deste capítulo, dizer que  $F \in (\mathcal{I}_{W_i}^2)(d)$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ , é equivalente a afirmar que a hipersuperfície de grau  $d$  dada por  $F$  é singular ao longo de  $W_i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ .

Logo,  $\bigcup_{i=1}^l W_i \subset Sing(F)$ . Por outro lado, Bertini, veja teorema 8.18 de (HARTSHORNE, 1977) nos afirma que, sobre um corpo de característica nula, a hipersuperfície genérica de um sistema linear  $\Sigma$ , sem componentes fixas, não possui singularidades fora do local de base. Portanto, temos a inclusão reversa e, conseqüentemente, a igualdade conjuntiva.  $\square$

Em (CUKIERMAN; LOPEZ; VAINSENER, 2014), os autores calcularam o grau do *locus* de superfícies de grau  $d$ , com  $d \geq 4$ , que contêm alguma curva quártica elíptica. No mesmo trabalho eles também mostraram que a função que fornece o grau do *locus* de superfícies de grau  $d$  que contêm alguma quártica elíptica é polinomial. A mesma argumentação usada no artigo, com algumas pequenas adaptações, será usada para mostrarmos o comportamento polinomial da função que fornece o grau da variedade  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ , para cada  $d$  suficientemente grande, é polinomial.

Enunciaremos um lema, provado em (CUADRADO, 2010), que nos auxilia no cálculo do grau de variedades projetivas que são imagens de subfibrados do fibrado trivial.

**Lema 1.3.** *Sejam  $X$  uma variedade  $n$ -dimensional,  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $N + 1$  e  $\mathcal{K}$  um subfibrado do fibrado trivial  $X \times V$  sobre  $X$ . Considere também  $\mathbb{P}(\mathcal{K})$  o fibrado projetivo associado a  $\mathcal{K}$  e  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ . Temos os mapas induzidos por projeção,*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}(\mathcal{K}) \subset X \times \mathbb{P}^N & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ X & & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Denotemos por  $M := q_2(\mathbb{P}(\mathcal{K})) \subset \mathbb{P}^N$ . Se  $q_2$  é genericamente injetivo vale que

$$\deg(M) = \int s_n(\mathcal{K}) \cap [X],$$

onde  $s_n$  denota a  $n$ -ésima classe de Segre.

**Lema 1.4.** *Suponha que  $\mathcal{I}_d := (\mathcal{I}_{W_1})^2(d) \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2(d)$ . Para  $d \gg 0$ , vale que  $H^0(\mathcal{I}_d) = H^0(\mathcal{I}_{W_1})^2(d) \cap \dots \cap H^0(\mathcal{I}_{W_l})^2(d)$ .*

*Demonstração.* Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{W_1}^2 \cap \mathcal{I}_{W_2}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_{W_1}^2 \oplus \mathcal{I}_{W_2}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_{W_1}^2 + \mathcal{I}_{W_2}^2 \longrightarrow 0.$$

Esta sequência induz a sequência longa de cohomologia. Torcendo por  $\mathcal{O}(d)$ , para  $d \gg 0$ , pelo teorema de Serre, teorema 5.2 de (HARTSHORNE, 1977), vale que  $H^i$  dos feixes acima são nulos para  $i > 0$ . Daí, segue o resultado.  $\square$

Sejam  $\mathbb{W} = \{W_1 \cup \dots \cup W_l \mid W_i \in \mathbb{W}_i\}$  e  $\mathbb{W}'$  como definido anteriormente. Considere a seguinte variedade de incidência,

$$\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d) = \{(Z, F) \in \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \mid Z \subset F\}$$

enunciamos o seguinte:

**Teorema 1.5.**  $p_{2|\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d)} : \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \rightarrow \Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$  é genericamente injetivo para  $d \gg 0$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathbb{W}'_0$  o subconjunto de  $\mathbb{W}'$  composto por subesquemas  $W'$ , com  $\mathcal{I}_{W'} = (\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$  e  $W_i \in \mathbb{W}_i$  suave. Fixe  $W' \in \mathbb{W}'_0$  geral. Por planitude genérica, veja (HARTSHORNE, 1977), existe um aberto  $\mathbb{W}''_0 \subset \mathbb{W}'_0$  tal que vale a igualdade entre os polinômios de Hilbert,  $p_{W''}(t) = p_{W'}(t)$  para todo  $W'' \in \mathbb{W}''_0$ . Tome  $F$  de grau  $d$  geral de modo que  $W' \subset F$ . Assim,  $F$  é um membro geral em  $H^0(\mathcal{I}_{W'}(d)) = H^0((\mathcal{I}_{W_1})^2(d)) \cap \dots \cap H^0((\mathcal{I}_{W_l})^2(d))$  (a igualdade é válida por 1.4). Assim, pelo lema 1.2, temos que conjuntivamente  $Sing(F) = W_1 \cup \dots \cup W_l$ . Seja  $Z' \in \mathbb{W}''_0$  com  $Z' \subset F$ . Da construção de  $\mathbb{W}''_0$  temos que  $\mathcal{I}_{Z'} = (\mathcal{I}_{Z_1})^2 \cap \dots \cap (\mathcal{I}_{Z_l})^2$  com  $Z_i \in \mathbb{W}_i$ . Assim, novamente, pelo lema 1.2 vale que  $Sing(F) = Z_1 \cup \dots \cup Z_l$  como conjuntos. Ademais, como cada  $Z_i$  tem o mesmo polinômio de Hilbert que cada  $W_i$  e  $(Z_i)_{\text{red}} = (W_i)_{\text{red}}$ , a menos de reordenação. Portanto, denotando  $Z'_i$  e  $W'_i$  como as variedades dadas pelos feixes de ideais  $(\mathcal{I}_{Z'_i})^2$  e  $(\mathcal{I}_{W'_i})^2$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, l$ , segue-se que  $\mathcal{I}_{Z'_i} = (\mathcal{I}_{Z_{i, \text{red}}})^2 = (\mathcal{I}_{W_{i, \text{red}}})^2 = \mathcal{I}_{W'_i}$ . Daí, temos que  $Z'_i = W'_i$ , a menos de reordenação, para todo  $i = 1, 2, \dots, l$ , e, conseqüentemente,  $Z' = W'$ .  $\square$

**Teorema 1.6.** *Sejam  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_l$  subvariedades fechadas e irredutíveis do esquema de Hilbert  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}_i}(t)}(\mathbb{P}^3)$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ , de subesquemas em  $\mathbb{P}^3$  com polinômio de*

Hilbert  $P_{\mathbb{W}_i}(t)$ , cujo membro geral de cada  $\mathbb{W}_i$  estamos admitindo ser suave. Considere a variedade  $\mathbb{W}'$  em  $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'}(t)}(\mathbb{P}^3)$  obtida como fecho da família de subesquemas de  $\mathbb{P}^n$  definidos por ideais da forma  $(\mathcal{I}_{W_1})^2 \cap \cdots \cap (\mathcal{I}_{W_l})^2$ , onde  $W_i$  é um membro genérico de  $\mathbb{W}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ . Vale que:

1. Para  $d \gg 0$  existe um subfibrado vetorial  $\mathcal{D}_d \subset \mathbb{W}' \times \mathcal{F}_d$  tal que a fibra sobre um membro geral  $W' \in \mathbb{W}'$  é o subespaço das formas de grau  $d$  que se anulam sobre cada  $W_i$  para  $i = 1, \dots, l$ .
2. A função que associa para cada  $d$  o grau da variedade  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  é polinomial com grau no máximo  $3 \dim(\mathbb{W})$  para  $d$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Considere a variedade

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{W}' & & \mathbb{P}^{N_d} \end{array}$$

munida com as projeções. Mostraremos que, para  $d \gg 0$ , a coleção  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$  dos pares  $(Z, F) \in \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$  tais que  $Z \subset F$ , é um fibrado projetivo sobre  $\mathbb{W}'$  via a primeira projeção. Sejam  $\tilde{Z} \subset \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n$  o subesquema universal e  $\tilde{F} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^3$  a hipersuperfície universal. Tome as imagens recíprocas desses esquemas em  $Y := \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^3$  e as denote, respectivamente, por  $\hat{Z}$  e  $\hat{F}$ . Assim, surge naturalmente o diagrama induzido pelos homomorfismos de restrição

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(\hat{F}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{F}}(\hat{F}) \\ & \searrow \rho & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\hat{Z}}(\hat{F}) & & \end{array}$$

Pela própria construção do diagrama, um ponto  $(Z, F, x) \in \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^3$  anula  $\rho$ , se, e somente se,  $x \in Z \cap F$ . Se esta condição for válida para todo  $x \in Z$  teremos que  $Z \subset F$ . Daí, podemos concluir que  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$  coincide com o esquema de zeros de  $\rho$  ao longo das fibras da projeção  $p_{12} : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$ . Por (ALTMAN; KLEIMAN, 1977), isto coincide com os zeros da seção adjunta de  $p_{12*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(\hat{F}))$ . Usando fórmula de projeção e sabendo que  $\mathcal{O}(\hat{F}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)$ , é suficiente produzirmos uma seção de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(1) \otimes \mathcal{E}_d$ , onde  $\mathcal{E}_d = q_{1*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(d))$  e  $q_1 : \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{W}'$  é a projeção no primeiro fator. Ora, temos a seguinte sequência exata curta de fibrados vetoriais sobre  $\mathbb{W}'$  :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{I}_{\hat{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(d)) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathcal{D}_d & & \mathcal{F}_d & & \mathcal{E}_d \end{array}$$

Assim, projetivizando e aplicando a imagem inversa para  $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$ , obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(-1) & \\ & \downarrow & \searrow \bar{\rho} \\ \mathcal{D}_d & \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}_d & \xrightarrow{\quad} \mathcal{E}_d \end{array}$$

onde a sequência horizontal é exata. Portanto, pela construção feita temos que  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$  é igual ao esquema de zeros de  $\bar{\rho}$ , e conseqüentemente, por princípios gerais, segue-se que  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_d)$ . Além disso, pelo teorema de regularidade de Mumford-Castelnuovo e mudança de base, temos que  $\text{posto}(\mathcal{E}_d) = P_{\mathbb{W}'}(d) = \text{codim}(\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d))$ , para todo  $d$  maior ou igual a regularidade. Logo, temos que  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d) = c_{\text{top}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(1) \otimes \mathcal{E}_d)$ . Denotemos por  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  o subconjunto de  $\mathbb{P}^{N_d}$  composto pelas superfícies que contêm algum membro de  $\mathbb{W}'$ , ou equivalentemente,  $\Sigma(\mathbb{W}, d)$  representa a coleção das hipersuperfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$  que são singulares ao longo de algum membro de  $\mathbb{W}$ . Veja que  $\Sigma(\mathbb{W}, d) = p_2(\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d))$ . Como vimos no teorema 1.5,  $p_2$  é genericamente injetivo. Daí,

$$\deg(\Sigma(\mathbb{W}, d)) = \int_{\mathbb{W}'} \text{Segre}(\dim(\mathbb{W}), (\mathcal{D}_d)) \cap [\mathbb{W}'] = \int_{\mathbb{W}'} \text{Chern}(\dim(\mathbb{W}), (\mathcal{E}_d)) \cap [\mathbb{W}'].$$

A cereja do bolo surgirá neste momento. Como  $\mathcal{E}_d$  é imagem direta de um feixe, podemos aplicar o Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch para calcularmos o caracter de Chern de  $\mathcal{E}_d$ . De fato:

$$ch(\mathcal{E}_d) = ch(q_{1!}(\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(d))) = q_{1*}(ch(\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}})ch(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(d)\text{todd}(\mathbb{P}^3)).$$

Adicionalmente, note que o lado direito é um polinômio em  $d$  de grau  $\leq 3$ . Note também que como a classe de Chern de grau  $\dim(\mathbb{W})$  é um polinômio de grau  $\dim(\mathbb{W})$  sobre os coeficientes do caracter de Chern, nós podemos concluir que  $\text{Chern}(\dim(\mathbb{W}), (\mathcal{E}_d))$  é um polinômio em  $d$  de grau no máximo  $3 \cdot \dim(\mathbb{W})$ .  $\square$

### 1.3 Fórmula de Bott

Nesta seção apresentaremos a principal ferramenta que será utilizada no decorrer deste trabalho, a Fórmula de Resíduos de Bott. Em geral, quando queremos calcular as classes de Chern e Segre de um fibrado vetorial, nós tentamos encaixá-lo em uma sequência exata de fibrados cujas classes são conhecidas. No entanto, nem sempre isso é uma tarefa simples. A Fórmula de Resíduos de Bott nos fornece um método para calcularmos as classes de Chern e Segre de um fibrado se nós soubermos descrever esse fibrado apenas sobre os pontos fixos. Sugiro ler (ARAÚJO, 2009) e (ELLINGSRUD; STRØMME, 1996) para uma abordagem mais detalhada. Vamos nos limitar às definições básicas e estabelecer

notação.

Seja  $\mathbb{X}$  uma variedade suave e completa, com  $\dim(\mathbb{X}) = n$ , munida de uma ação do toro  $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$ . Denotemos por  $X^{\mathbb{T}}$  o local dos pontos fixos de  $X$  mediante a ação do toro. Considere  $E_1, \dots, E_k$  fibrados  $\mathbb{T}$ -equivariantes sobre  $\mathbb{X}$  e seja  $p(x_1^1, \dots, x_k^1, \dots, x_1^n, \dots, x_k^n)$  um polinômio homogêneo ponderado nas variáveis  $x_i^j$ , onde  $x_i^j$  tem grau  $j$ . Denotemos por  $p(E_1, \dots, E_k)$  o polinômio nas classes de Chern de  $E_1, \dots, E_k$  oriundo da substituição  $x_i^j = c_j(E_i)$ . Simplifiquemos a notação e usemos

$$p(E) := p(E_1, \dots, E_k) \text{ e } p^{\mathbb{T}}(E) = p(E_{1T}, \dots, E_{kT})$$

onde  $E_{1T}, \dots, E_{kT}$  representa a restrição dos fibrados  $E_i$  ao local  $X^{\mathbb{T}}$  de pontos fixos. Podemos enunciar o teorema de resíduos de Bott.

**Teorema 1.7** (Fórmula de resíduos de Bott). *Sejam  $E_1, \dots, E_k$  fibrados vetoriais  $\mathbb{T}$ -equivariantes sobre uma variedade lisa e completa  $\mathbb{X}$ . Vale:*

$$\int_X p(E) \cap [\mathbb{X}] = \sum_{F \subset \mathbb{X}} \pi_{F*} \left( \frac{p^{\mathbb{T}}(E|_F \cap [F]_{\mathbb{T}})}{c_{d_F}(\mathcal{N}_{F|\mathbb{X}})} \right)$$

onde  $d_F$  denota a codimensão da componente  $F$  em  $\mathbb{X}$  e  $\pi_F$  é o mapa  $\pi : \mathbb{X} \rightarrow pt$  restrito a componente  $F$  do local dos pontos fixos.

Se  $F$  é uma componente conexa de  $X^{\mathbb{T}}$  do lugar dos pontos fixos, nós podemos calcular as classes de Chern  $\mathbb{T}$ -equivariantes  $c_k^{\mathbb{T}}(E_{j_F})$  e  $c_d F^{\mathbb{T}}(\mathcal{N}_{F|X})$  no anel de Chow equivariante  $A^{\mathbb{T}}(F)$  em termos dos caracteres que comparecem na decomposição de  $E_{j_F}$  e  $\mathcal{N}_{F|X}$  em auto-subfibrados e das classes de Chern destes últimos.

Quando os pontos fixos da ação de  $\mathbb{T}$  sobre  $\mathbb{X}$  forem isolados, temos que as classes  $c_k^{\mathbb{T}}(E_{j_F})$  e  $c_{d_F}^{\mathbb{T}}(\mathcal{N}_{F|X})$  podem ser descritas apenas em função dos caracteres associados aos auto-fibrados. De fato, dada a decomposição  $E_{j_F} = \bigoplus_{\chi} E_{j_F}^{\chi}$  em autoespaços, temos que  $c_l^{\mathbb{T}}(E_{j_F}) = \binom{r}{l} \chi^l$ , onde  $l = (\text{rank})(E_{j_F}^{\chi})$ . Portanto, temos que a classe de Chern máxima dimensional equivariante é representada no anel de Chow equivariante do ponto fixo  $F$  pelo produto de todos os caracteres que aparecem na decomposição da fibra  $E_{j_F}$  em auto-espaços com as suas respectivas multiplicidades.

Neste trabalho, tomamos  $\mathbb{T}$  como o grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^*$  agindo sobre  $\mathbb{X}$  de modo que os pontos fixos sejam isolados. A ação é escolhida de maneira que cada caracter seja dado por  $\chi_i = t^{a_i}$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$ , e, portanto, o operador induzido no anel de Chow equivariante é  $a_i \cdot t$ , onde  $t$  indica a classe hiperplana. Cada  $a_i$  é chamado de peso da ação.

No lado direito da fórmula de resíduos de Bott, o numerador  $p^{\mathbb{T}}(E_{j_F})$  consiste em um polinômio homogêneo de grau  $n := \dim(X)$  nas variáveis que são os caracteres que ocorrem na decomposição em auto-subfibrados.

Para ficar mais claro, suponha que o polinômio em questão contenha um termo igual a  $c_1^{n-2} \cdot c_2$ , enquanto que,  $E_{j_F} = 2\chi_1 + \chi_2$ . Então,  $c_1^{\mathbb{T}}(E_{j_F}) = 2\chi_1 + \chi_2$  e  $c_2^{\mathbb{T}}(E_{j_F}) = \chi_1^2 + 2\chi_1 \cdot \chi_2$ .

Daí segue que o operador de grau  $n$  é dado por  $(2\chi_1 + \chi_2)^{n-2} \cdot (\chi_1^2 + 2\chi_1 \cdot \chi_2)$ , e o referido termo ganha a forma final  $(2a_1 + a_2)^{n-2} \cdot (a_1^2 + 2a_1 \cdot a_2) \cdot t^n$  sobre o anel de Chow equivariante. Daí, o numerador e o denominador no lado direito da Fórmula de Bott são múltiplos inteiros de  $t^n$ . Simplificando, temos um número racional e, portanto, o lado direito da fórmula de resíduos de Bott é formado por uma soma finita de números racionais oriundos dos pesos como descrito anteriormente.

Denote por  $\tau_1(E; F), \dots, \tau_k(E; F)$  os pesos que ocorrem na decomposição de  $E_{j_F}$  em auto-subfibrados. Então vale que:

**Corolário 1.8.** *Cada classe de Chern equivariante  $c_k^{\mathbb{T}}(E_{j_F})$  é representada no anel de Chow equivariante do ponto fixo  $F$  por  $\sigma_k(E; F)$ , onde  $\sigma_k(E; F)$  denota a  $k$ -ésima função simétrica elementar desses pesos para cada inteiro  $k \geq 0$*

## Capítulo 2

# Superfícies singulares ao longo de duas retas

Neste capítulo abordaremos o caso de superfícies de grau  $d$ , com  $d \gg 0$ , que são singulares ao longo de duas retas gerais e de duas retas concorrentes em  $\mathbb{P}^3$ .

### 2.1 Duas retas gerais

Se pegarmos duas retas em posição geral em  $\mathbb{P}^3$  veremos que a união dessas duas retas terá polinômio de Hilbert igual a  $p(t) = 2t + 2$ . Lembre, por (EISENBUD; HARRIS, 1982) que  $\text{Hilb}_{2t+2}(\mathbb{P}^3)$  possui uma componente de dimensão 11, cujo ponto geral corresponde a união de uma cônica com um ponto, mas nós focaremos na componente que possui membro geral correspondente à união de duas retas disjuntas.

Em sua tese de doutorado, Alberto, em (MAIA, 2010), mostrou que um espaço de parâmetros para a família plana de subesquemas de  $\mathbb{P}^3$ , cujo membro geral é a união de duas retas disjuntas, é a explosão de  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  ao longo da diagonal  $\Delta \subset \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Lembramos que nosso interesse é na família de pares de retas “gordas”, como dito na introdução.

A ideia central para calcular o grau desejado é usar fórmula de resíduos de Bott. No caso presente (bem como nos demais exemplos tratados nesta tese) a notícia boa é que conhecemos perfeitamente o fibrado relevante nas fibras sobre os pontos fixados pela ação do toro. No caso tratado nesta seção, construiremos um espaço de parâmetros a partir de  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Estamos numa situação ideal para o uso da fórmula de resíduos de Bott.

Iniciaremos a discussão com o fibrado de superfícies quárticas singulares ao longo de duas retas. Os casos de grau  $\geq 5$  são reduzidos a completar o grau do caso anterior. Tome duas retas gerais em  $\mathbb{P}^3$ , por exemplo,  $((x_0, x_1), (x_2, x_3))$ . Veja que o ideal homogêneo  $(x_0, x_1) \cap (x_2, x_3)$  da união dessas retas possui polinômio de Hilbert igual a  $2t + 2$ . Uma

superfície em  $\mathbb{P}^3$  é singular ao longo dessas duas retas, se e, só se, a equação dessa superfície pertence à intersecção dos quadrados dos ideais das duas retas, isto é,

$$\begin{aligned} (x_0, x_1)^2 \cap (x_2, x_3)^2 &= (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) \cap (x_2^2, x_2x_3, x_3^2) \\ &= (x_1^2x_3^2, x_0x_1x_3^2, x_0^2x_3^2, x_1^2x_2x_3, x_0x_1x_2x_3, x_0^2x_2x_3, x_1^2x_2^2, \\ &\quad x_0x_1x_2^2, x_0^2x_2^2) \end{aligned}$$

O ideal acima é gerado por 9 quárticas. Assim, a família de quárticas singulares ao longo das nossas duas retas é a projetivização de um espaço vetorial de posto igual a 9. Portanto, a família de quárticas singulares ao longo de duas retas é genericamente um fibrado de posto 9, com fibra sobre o ponto  $((x_0, x_1), (x_2, x_3))$  igual ao espaço gerado pelas 9 quárticas exibidas anteriormente. Porém, em alguns pontos sobre o limite das configurações possíveis entre duas retas em  $\mathbb{P}^3$ , mais especificamente, sobre os pontos da diagonal, a família de quárticas não tem o posto esperado. Para vermos isso, façamos o seguinte: pegue uma reta  $\ell_0 \in \mathbb{G}(1, 3)$ , por exemplo,  $\ell_0 = (x_0, x_1)$ . Tomemos a seguinte cobertura, por abertos afins, de  $\mathbb{G}(1, 3)$

$$U_{i_1i_2} = (x_{i_1} + a_1x_i + a_2x_j, x_{i_2} + a_3x_i + a_4x_j),$$

onde  $0 \leq i_1 < i_2 \leq 3$  e  $\{i, j\} \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{i_1, i_2\}$ .

Para fixarmos ideias, olhemos para o aberto  $U_{01}$ . Veja que  $\ell_0 \in U_{01}$  e é obtida exatamente quando fazemos  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ . Tome uma reta arbitrária  $\ell_1 \in U_{0,1}$ . Pedir que uma quártica genérica seja singular em  $\ell_0$  e  $\ell_1$  é equivalente a pedir que o polinômio que define a quártica pertença ao ideal

$$I = (x_0, x_1)^2 \cap (x_0 + a_1x_2 + a_2x_3, x_1 + a_3x_2 + a_4x_3)^2$$

O ideal acima é gerado por 9 quárticas (genericamente). Se criarmos a matriz em que cada coluna é formada pelos coeficientes de cada quártica teremos uma matriz de tamanho  $35 \times 9$ . Escalonemos essa matriz e analisemos a condição do posto dessa matriz ser menor do que 9. Esse local é justamente igual ao ideal  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Essas contas foram feitas com a ajuda do software de computação algébrica *Macaulay 2* e o arquivo com os códigos está disponível no link “ <https://shre.ink/MK2o>”. Uma observação pertinente é que este local encontrado é o mesmo local de indeterminação do mapa para obtermos quádricas contendo duas retas, como mostrado em (MAIA, 2010). Portanto, o mapa racional

$$\varphi : \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \dashrightarrow G(9, \mathcal{F}_4) \tag{2.1}$$

fatora-se pelo mapa

$$\psi : \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \dashrightarrow G(4, \mathcal{F}_2), \tag{2.2}$$

isto é, as quárticas procuradas podem ser encontradas da seguinte maneira: encontre o ideal gerado pelas 4 quádricas contendo as duas retas dadas e depois tome o quadrado do ideal das quádricas, obtendo-se assim o ideal das 9 quárticas.

Esta fatoração do mapa é importante, pois torna o trabalho mais viável computacionalmente. Sendo mais explícito, pedir que uma quádrica contenha duas retas é equivalente a pedir que o polinômio  $F$  de grau 2 que define a quádrica pertença a intersecção dos ideais dessas retas,

$$F \in J := (x_0, x_1) \cap (x_0 + a_1x_2 + a_2x_3, x_1 + a_3x_2 + a_4x_3) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

onde,

$$\begin{aligned} q_1 &= a_3x_0x_2 - a_1x_1x_2 + a_4x_0x_3 - a_2x_1x_3 \\ q_2 &= x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1x_3 \\ q_3 &= x_0x_1 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 \\ q_4 &= x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_0x_3 \end{aligned}$$

Isto nos permite definir um mapa racional  $\alpha : \mathbb{G} := \mathbb{G}(1, 3) \dashrightarrow G(4, \mathcal{F}_2)$ . Note que  $q_2, q_3$  e  $q_4$  estão bem definidas para quaisquer que sejam os valores  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$ , mas  $q_1$  deixa de ser bem definida justamente quando  $a_1 = \dots = a_4 = 0$ , isto é, justamente quando  $\ell_1 = \ell_0$ . O mesmo ocorre nas demais vizinhanças afins  $U_{ij}$ , com  $0 \leq i < j \leq 3$ , ou seja, temos quatro quádricas linearmente independentes contendo  $\ell_0$  e  $\ell_1$ , exceto quando  $\ell_1 = \ell_0$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $\alpha : \mathbb{G} \dashrightarrow G(4, \mathcal{F}_2)$  o mapa definido anteriormente. Denotemos por  $\mathcal{G}$  o tautológico de posto 2 em  $\mathbb{G}$  e por  $\mathcal{G}'$  o tautológico de posto 4 em  $G(4, \mathcal{F}_2)$ . Se  $\pi : \hat{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G}$  é o mapa de explosão, onde  $\hat{\mathbb{G}} := Bl_{\ell_0}(\mathbb{G})$ , então  $\pi^*\alpha^*\mathcal{G}'$  é um fibrado vetorial de posto 4 em  $\hat{\mathbb{G}}$  que coincide com o fibrado de quádricas contendo  $\ell_0$  e  $\ell \in \mathbb{G}$ .*

*Demonstração.* Pelo que foi comentado acima o local de base de  $\alpha$  é justamente o ponto  $\{\ell_0\}$ . Além disso, se  $U = \mathbb{G} \setminus \{\ell_0\}$ , temos que  $\alpha^*\mathcal{G}'|_U \simeq \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}|_U$ , onde  $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}|_{\ell_0}$ . Ademais, temos o mapa de multiplicação  $\mu : \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{F}_2$ , que tem posto genérico igual a 4. O posto do mapa cai justamente ao longo do ideal de Fitting dado pelo anulamento de todos os menores  $4 \times 4$  da matriz  $10 \times 4$  do mapa de multiplicação. Este local é justamente  $\{\ell_0\}$ . Ao explodirmos  $\mathbb{G}$  em  $\ell_0$ , ocorre uma magia: o excepcional principaliza. Denotemos por  $a$  a equação local do excepcional. Sejam  $\mathcal{M}$  o conúcleo de  $\mu$  e  $\mathcal{M}'$  o quociente de  $\mathcal{M}$  pelo subfeixe  $\mathcal{M}''$  onde  $\mathcal{M}''(U) := \{m \in \mathcal{M}(U) | am = 0\}$ . Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{M} \\ & & & & \downarrow \\ \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{M}' \end{array}$$

onde  $\mathcal{K}$  é o núcleo de  $\mathcal{F}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$ . Como os ideais de Fitting respeitam a functorialidade: o *pullback* de um Fitting é o Fitting do *pullback*, veja (Tag 07ZA) e (Tag 0C3D), temos que o excepcional é o ideal de Fitting do *pullback*. Portanto, por (Lemma 0F7M),  $\mathcal{M}'$  é localmente livre e com posto igual ao de  $\mathcal{M}$ . Daí,  $\mathcal{K}$  também é localmente livre (e com posto igual a 4) e a sequência *cinde*(*split*). Além disso,  $\mathcal{K}$  é o *pullback* (por meio do mapa de explosão) do feixe  $\alpha^*(\mathcal{G}')$ .  $\square$

**Observação 2.2.** *A honestidade em fixar  $\ell_0$  e tratarmos apenas com uma cópia de  $\mathbb{G}$  se dá pelo fato do mergulho diagonal ser normalmente plano, portanto tomar a fibra da explosão é a mesma coisa que explodir a fibra (veja cap. 08 de (FULTON, 1984)).*

Apenas com o intuito de elucidar, sejamos mais concretos. Seja  $\mu : \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}_2$ . Em uma fibra sobre  $\ell \in U_{0,1}$ , temos que  $\mathcal{G}_\ell$  representa o espaço vetorial das equações que definem esta reta. Para definirmos  $\mu$ , basta dizermos qual a imagem na base. Assim, se  $\ell$  tem equações  $f_0 = f_1 = 0$ , definamos  $\mu(x_i \otimes f_j) := x_i \cdot f_j$ . Portanto,  $N := \text{Im}(\mu) = \langle x_0 f_0, x_0 f_1, x_1 f_0, x_1 f_1 \rangle$  e podemos definir  $M := \frac{\mathcal{F}_2}{N}$  como o conúcleo de  $\mu$ . A matriz do mapa de multiplicação  $\mu$  é uma matriz  $10 \times 4$  e o posto de  $N$  genericamente é igual a 4, mas cai ao longo de  $\wedge^4 \mu = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Façamos a explosão  $\mathbb{G}(1, 3)$  em  $\ell_0$ . Novamente, para fixar ideias, olhemos na vizinhança afim de  $\text{Bl}_{\ell_0}(\mathbb{G}(1, 3))$  em que o divisor excepcional tem equação local  $a_1 = 0$ . Nesta carta, vale que

$$a_2 = b_2 a_1, \quad a_3 = b_3 a_1 \text{ e } a_4 = b_4 a_1, \quad (2.3)$$

onde cada  $b_i$  é uma coordenada na fibra. Definamos  $M'' = \{\bar{v} \in M \mid \bar{v} a_1 = 0\}$  e  $M' := \frac{M}{M''}$ . Note que  $M''$  é uma espécie de saturação do módulo da imagem de  $\mu$  pela equação local do divisor excepcional. Além disso, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{M} \\ & & & & \downarrow \\ \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \twoheadrightarrow & \mathcal{M}' \end{array}$$

onde  $\mathcal{K}$  é o núcleo de  $\mathcal{F}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$ . A vantagem de trabalharmos com a segunda sequência exata, ao invés da primeira, é que a segunda sequência *cinde*, isto é,  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}'$ .

Por princípios gerais sobre ideais de Fitting, veja (Lemma 0F7M), temos que  $M'$  é livre e tem posto igual ao de  $M$ . Além disso, em  $M'$  ao saturarmos pela equação do excepcional, ganhamos as 4 quárticas em  $\mathcal{K}$ . A saber, utilizando as relações em 2.3 e

saturando pela equação do excepcional, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= b_3 a_1 x_0 x_2 - a_1 x_1 x_2 + b_4 a_1 x_0 x_3 - b_2 a_1 x_1 x_3 \\
&= \underbrace{a_1}_{\text{excepcional}} \cdot \underbrace{(b_3 x_0 x_2 - x_1 x_2 + b_4 x_0 x_3 - b_2 x_1 x_3)}_{\text{transformado estrito } \tilde{q}_1} \\
\tilde{q}_2 &= x_1^2 + b_3 a_1 x_1 x_2 + b_4 a_1 x_1 x_3 \\
\tilde{q}_3 &= x_0 x_1 + a_1 x_1 x_2 + b_2 a_1 x_1 x_3 \\
\tilde{q}_4 &= x_0^2 + a_1 x_0 x_2 + b_2 a_1 x_0 x_3
\end{aligned}$$

Observe que nesta vizinhança da explosão, para quaisquer que sejam os valores de  $a_1, b_2, b_3$  e  $b_4$ , temos quatro quádricas linearmente independentes. Assim,

$$\pi^* \alpha^*(\mathcal{G})_{(\ell_0, \ell_0, a_1)} = \langle x_1 x_2, x_1^2, x_0 x_1, x_0^2 \rangle .$$

O mesmo acontece nas outras vizinhanças da explosão, isto é, temos expressões semelhantes à expressão acima nas demais vizinhanças. Continuando a discussão, pegando as quatro quádricas e quadrando o ideal gerado por elas, temos que

$$\mathcal{E}_{4(\ell_0, \ell_0, a_1)} = \langle x_1^2 x_2^2, x_1^3 x_2, x_0 x_1^2 x_2, x_0^2 x_1 x_2, x_1^4, x_0 x_1^3, x_0^2 x_1^2, x_0^3 x_1, x_0^4 \rangle .$$

Uma argumentação análoga a que foi exposta em 2.1, trocando  $\mathcal{G}_0$  por  $\mathcal{G}$ , nos permite liberar a primeira reta. Isto é, a explosão de  $\mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{G}(1,3)$  ao longo da diagonal resolve a indeterminação de  $\varphi$  (2.1), e que as fibras da família de quárticas sobre os pontos do divisor excepcional formam um espaço vetorial também de posto 9. Logo, a nossa família de quárticas é, na verdade, uma fibração sobre  $\mathbb{G}(2) := \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{G}(1,3))$ .

Veja ainda que como  $\dim(\mathbb{G}(2)) = 8$ , por 1.3, vale

$$\deg \Sigma(\mathbb{G}(2), d) \cdot \deg(\varphi) = \int_{\mathbb{G}(2)} s_8(\mathcal{E}_d),$$

para  $d \geq 4$ , onde  $\Sigma(\mathbb{G}(2), d)$ , a imagem de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$  em  $\mathbb{P}^{34}$ , é a família de superfícies de grau  $d$  singulares ao longo de duas retas em  $\mathbb{P}^3$ .

Veja ainda que como  $\mathcal{E}_d$  é um subfibrado do fibrado trivial das formas de grau  $d$ , temos a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \rightarrow \overline{\mathcal{E}_d} \rightarrow 0,$$

donde  $s_8(\mathcal{E}_d) = c_8(\overline{\mathcal{E}_d})$ . Salientamos que a escolha de usar a Chern do quociente ao invés da Segre do fibrado desejado se dá apenas pelo fato que computacionalmente é mais simples.

Pela fórmula de resíduos de Bott, temos ainda que

$$\int_{\mathbb{G}(2)} s_8(\mathcal{E}_d) = \sum_{f \in F} \frac{s_8^f(\mathcal{E}_d|F)}{c_8^f(\mathcal{T}(\mathbb{G}(2)))},$$

onde  $F$  é o local de pontos fixos da ação diagonal do toro. Note que como o grau  $\deg(\varphi) = 2$  (devido a permutação entre as duas retas) temos que

$$\deg \Sigma(\mathbb{G}(2), d) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{G}(2)} s_8(\mathcal{E}_d) = \frac{1}{2} \sum_{f \in F} \frac{s_8^f(\mathcal{E}_d|F)}{c_8^f(\mathcal{T}(\mathbb{G}(2)))}. \quad (2.4)$$

Explicitemos os detalhes mais íntimos do cálculo da soma acima. Considere a ação diagonal do toro  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$  sobre  $(\mathbb{C}^4)^\vee$  dada por

$$t \circ x_i := t^{w_i} x_i,$$

onde os pesos  $w_i$  devem ser escolhidos com o cuidado de não anularem os denominadores das contribuições na fórmula de Bott (2.4). Neste caso, uma escolha adequada de pesos é (por tentativa e erro)

$$w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 3 \text{ e } w_3 = 7.$$

A ação do toro  $\mathbb{T}$  sobre  $(\mathbb{C}^4)^\vee$  induz de modo canônico a ação de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{P}^3$  dada por

$$(t, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \mapsto (t^{w_0} x_0 : \dots : t^{w_3} x_3).$$

De modo similar,  $\mathbb{T}$  induz uma ação sobre  $\mathbb{G}(1, 3)$ . De fato, por meio do mergulho de Plücker,  $\mathbb{G}(1, 3)$  é mergulhada em  $\mathbb{P}^5$ . Em  $\mathbb{P}^5$  há apenas 6 pontos fixos na ação canônica induzida em  $\mathbb{C}^6 = \bigwedge^2(\mathbb{C}^4)^\vee$ , os “pontos fundamentais” (classe dos vetores da base canônica de  $\mathbb{C}^6$ ). Estes pontos estão na imagem do mergulho de Plücker e, vistos como pontos da Grassmanniana de retas, correspondem às retas  $\langle x_i, x_j \rangle$ , com  $0 \leq i < j \leq 3$ , eixos coordenados. Portanto, em  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , há 36 pontos fixados pela ação diagonal do toro. Isso permite descrever o local de pontos fixos  $F$  da ação do toro  $\mathbb{T}$  sobre  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Como vimos anteriormente, o fibrado vetorial  $\mathcal{E}_d$  está definido sobre  $\mathbb{G}(2)$ , e não sobre  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Sendo assim, precisamos saber calcular os espaços tangentes de  $\mathbb{G}(2)$  no local de pontos fixos.

Se tomarmos um ponto  $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  fora da diagonal, esse ponto “não mudará em  $\mathbb{G}(2)$ ”, pois há um isomorfismo entre os pontos da explosão que não estão no divisor excepcional e os pontos da base que não estão no centro de explosão. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(\ell_1, \ell_2)} \mathbb{G}(2) &= \mathcal{T}_{(\ell_1, \ell_2)} \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \\ &= \mathcal{T}_{\ell_1} \mathbb{G}(1, 3) \oplus \mathcal{T}_{\ell_2} \mathbb{G}(1, 3) \end{aligned}$$

Ora, em  $\mathbb{G}(1, 3)$  temos o subfibrado tautológico  $\mathcal{S}$ , que na fibra sobre uma reta  $\ell \in \mathbb{G}(1, 3)$  coincide com espaço vetorial bidimensional das equações da reta, e o fibrado quociente  $\mathcal{Q}$ . Sabemos também que  $\mathcal{T}\mathbb{G}(1, 3) = \text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{Q}) = \mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}$ . Para fixarmos ideias, por exemplo, temos que

$$\mathcal{T}_{\ell_0}\mathbb{G}(1, 3) = \text{Hom}(\mathcal{S}_{\ell_0}, \mathcal{Q}_{\ell_0}) = (\mathcal{S}_{\ell_0})^\vee \otimes \mathcal{Q} = \quad (2.5)$$

$$= \langle x_0, x_1 \rangle^\vee \otimes \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle = \quad (2.6)$$

$$= (x_0^\vee \otimes \bar{x}_2) \oplus (x_1^\vee \otimes \bar{x}_2) \oplus (x_0^\vee \otimes \bar{x}_3) \oplus (x_1^\vee \otimes \bar{x}_3) \quad (2.7)$$

$$= \frac{\bar{x}_2}{x_0} \oplus \frac{\bar{x}_2}{x_1} \oplus \frac{\bar{x}_3}{x_0} \oplus \frac{\bar{x}_3}{x_1} \quad (2.8)$$

Nesta última igualdade, estamos vendo  $\mathcal{T}_{\ell_0}\mathbb{G}(1, 3)$  decomposto em soma de  $\mathbb{T}$ -espaços unidimensionais de pesos  $w_2 - w_0, w_2 - w_1, w_3 - w_0$  e  $w_3 - w_1$ . Assim, uma parte da descrição do tangente a  $\mathbb{G}(2)$  nós já fizemos. Façamos a outra, agora sobre o divisor excepcional.

Tomemos um ponto sobre a diagonal  $\Delta$ , por exemplo,  $(\ell_0, \ell_0)$ . Da inclusão

$$\iota : \Delta \hookrightarrow \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$$

temos a sequência exata

$$\mathcal{T}\Delta \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))|_{\Delta} \longrightarrow \mathcal{N},$$

onde  $\mathcal{N}$  é o fibrado normal da inclusão  $\iota$ . Daí, por (2.8), a decomposição em soma de  $\mathbb{T}$ -espaços unidimensionais para  $\mathcal{N}$  sobre  $\ell_0$  é:

$$\mathcal{N} = \frac{x_2}{x_0} \oplus \frac{x_2}{x_1} \oplus \frac{x_3}{x_0} \oplus \frac{x_3}{x_1}.$$

Cada um dos  $\mathbb{T}$ -espaços unidimensionais corresponde a um dos pontos fixos da ação em  $\mathbb{G}(2)$  que “vivem” sobre  $(\ell_0, \ell_0)$ , ou seja, no divisor excepcional  $E = \mathbb{P}(\mathcal{N})$ , um  $\mathbb{P}^3$ -fibrado. Cada ponto fixo desse, será denotado naturalmente por  $(x, n)$ , onde  $x \in \Delta$  e  $n$  é uma direção normal. Cada espaço unidimensional da decomposição do fibrado normal é equivalente a “fazer uma escolha”. A reta  $l_1 = (x_0, x_1)$  é dada por equações  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ . Lembre do sistema de coordenadas que impusemos:

$$\ell_1 = (x_0 + a_1x_2 + a_2x_2, x_1 + a_2x_2 + a_4x_3).$$

Lembre também que dar uma reta é escolher duas formas de grau um independentes. Olhando para as coordenadas locais, vemos que poderíamos escolher  $\{x_0, x_2, x_3\}$  como uma das equações da reta e  $\{x_1, x_2, x_3\}$  como a outra equação que define a reta (são as únicas fixadas pela ação). Ao fazermos  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  nós escolhemos  $x_0$  e  $x_1$

como equações da reta. Além disso, quando fazemos  $a_1 = 0$ , nós “descartamos” a escolha de  $x_2$  como uma possível equação da reta. Assim, a escolha  $a_1 = 0$  corresponde ao espaço unidimensional  $\frac{x_2}{x_0}$ . De modo análogo, as escolhas  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$  e  $a_4 = 0$  correspondem, respectivamente, aos espaços unidimensionais  $\frac{x_3}{x_0}$ ,  $\frac{x_2}{x_1}$  e  $\frac{x_3}{x_1}$ .

Façamos uma breve pausa para relembrar alguns fatos sobre explosões. Para maiores detalhes, consulte o apêndice B6 de (FULTON, 1984).

**Observação 2.3.** *Seja  $\mathbb{X}$  um subesquema fechado de  $\mathbb{Y}$ , dado por um feixe de ideais  $\mathcal{I}$ . Então, podemos fazer a explosão de  $\mathbb{Y}$  ao longo de  $\mathbb{X}$ , que denotaremos por  $\widehat{\mathbb{Y}}$ . Sejam  $\pi : \widehat{\mathbb{Y}} \rightarrow \mathbb{Y}$  a projeção natural e  $E := \pi^{-1}(\mathbb{X})$  o divisor excepcional. Se  $\mathbb{X}$  mergulha em  $\mathbb{Y}$  regularmente (de codimensão  $d$ ) então  $E = \mathbb{P}(\mathcal{N})$ , onde  $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\mathbb{X}|\mathbb{Y}}$  é o fibrado normal de  $\mathbb{X}$  em  $\mathbb{Y}$ . Além disso, vale que*

$$\mathcal{N}_{E|\widehat{\mathbb{Y}}} = \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{Y}}}(E)|_E = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1).$$

Da sequência exata do fibrado tangente, veja cap.08, pág. 182, (HARTSHORNE, 1977) ou apêndice B7 de (FULTON, 1984), temos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}E \longrightarrow \mathcal{T}\widehat{\mathbb{Y}}|_E \longrightarrow \mathcal{N}_{E|\widehat{\mathbb{Y}}} \longrightarrow 0$$

Portanto, para todo  $y \in \widehat{\mathbb{Y}}$ , vale:

$$\mathcal{T}_y\widehat{\mathbb{Y}} = \mathcal{T}_yE \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1)_y.$$

A decomposição acima, em geral, não é única. Entretanto, se  $y \in \mathbb{Y}$  for um ponto fixo de alguma  $\mathbb{C}^*$ -ação que deixa  $\mathbb{X}$  invariante, a decomposição acima é única. Se  $y = (x, [n])$ , com  $x \in \mathbb{X}$  e  $n \in \mathcal{N}_x$ , temos que

$$\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1)_y = \mathbb{C} \cdot n.$$

Além disso, vale que:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_yE & = \mathcal{T}_x\mathbb{X} \oplus \mathcal{T}_{[n]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_x) \\ \mathcal{T}_{[n]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_x) & = \text{Hom}\left(\mathbb{C} \cdot n, \frac{\mathcal{N}_x}{\mathbb{C} \cdot n}\right). \end{cases}$$

Juntando todas essas informações, obtemos:

$$\mathcal{T}_y\widehat{\mathbb{Y}} = \mathcal{T}_x\mathbb{X} \oplus \text{Hom}\left(\mathbb{C} \cdot n, \frac{\mathcal{N}_x}{\mathbb{C} \cdot n}\right) \oplus \mathbb{C} \cdot n$$

Pela observação acima, podemos calcular o tangente dos pontos fixos que vivem sobre

o divisor excepcional.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\mathbb{G}(2)_{\left(\ell_0, \ell_0, \frac{x_2}{x_0}\right)} &= \overbrace{\frac{x_2}{x_0} \oplus \frac{x_2}{x_1} \oplus \frac{x_3}{x_0} \oplus \frac{x_3}{x_1}}^{\text{Tangente do centro}} \oplus \frac{x_2}{x_0} \oplus \overbrace{\left[ \left( \frac{x_2}{x_0} \right)^\vee \otimes \left( \frac{x_2}{x_1} \oplus \frac{x_3}{x_0} \oplus \frac{x_3}{x_1} \right) \right]}^{\mathbb{C} \cdot n \oplus \text{Hom} \left( \mathbb{C} \cdot n, \frac{\mathcal{N}_x}{\mathbb{C} \cdot n} \right)} \\
&= \overbrace{\frac{x_2}{x_0} \oplus \frac{x_2}{x_1} \oplus \frac{x_3}{x_0} \oplus \frac{x_3}{x_1}}^{\text{Tangente do centro}} \oplus \frac{x_2}{x_0} \oplus \frac{x_0}{x_1} \oplus \frac{x_3}{x_2} \oplus \frac{x_0 x_3}{x_1 x_2}
\end{aligned}$$

Em  $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$  há  $6 \times 6$  pontos fixos, dos quais 6 estão na diagonal. Para cada um dos 6 pontos da diagonal, temos 4 pontos fixos no divisor excepcional, totalizando assim 24 pontos fixos no divisor excepcional. Portanto, há  $30+24=54$  pontos fixos em  $\mathbb{G}(2)$  pela ação. Com isso, concluímos a obtenção dos dados necessários para computarmos os denominadores das contribuições em (2.4). Reunindo todas essas informações para o cálculo da fórmula de Bott temos o grau da família de superfícies quárticas em  $\mathbb{P}^3$  que são singulares ao longo de duas retas gerais:

$$\deg \Sigma(\mathbb{G}(2), 4) = \frac{1}{\deg(\varphi)} \cdot \int_{\mathbb{P}^{34}} s_8(\mathcal{E}_4) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathbb{P}^{34}} s_8(\mathcal{E}_4) = \frac{787830}{2} = 393915$$

Para encontrar as fibras de  $\mathcal{E}_d$ , para  $d \geq 5$  nos pontos fixos, basta completar o grau a partir de  $\mathcal{E}_4$ . Por exemplo, sabemos que

$$\mathcal{E}_{4(\ell_0, \ell_0, a_1)} = \langle x_1^2 x_2^2, x_1^3 x_2, x_0 x_1^2 x_2, x_0^2 x_1 x_2, x_1^4, x_0 x_1^3, x_0^2 x_1^2, x_0^3 x_1, x_0^4 \rangle.$$

Se quisermos encontrar as quárticas, por Mumford-Castelnuovo, veja cap. 04 de (EISENBUD, 2004), basta multiplicarmos por formas lineares, isto é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{4(\ell_0, \ell_0, a_1)} \cdot \langle x_0, \dots, x_3 \rangle &= \langle x_1^2 x_3^3, x_0 x_1 x_3^3, x_0^2 x_3^3, x_1^2 x_2 x_3^2, x_0 x_1 x_3^2, x_0^2 x_2 x_3^2, x_1^3 x_3^2, x_0 x_1^2 x_3^2, \\
&\quad x_0^2 x_1 x_3^2, x_0^3 x_3^2, x_1^2 x_2^2 x_3, x_0 x_1 x_2^2 x_3, x_0^2 x_2^2 x_3, x_1^3 x_2 x_3, x_0 x_1^2 x_2 x_3, \\
&\quad x_0^2 x_1 x_2 x_3, x_0^3 x_2 x_3, x_1^2 x_2^3, x_0 x_1 x_2^3, x_0^2 x_2^3, x_1^3 x_2^2, x_0 x_1^2 x_2^2, x_0^2 x_1 x_2^2, \\
&\quad x_0^3 x_2^2 \rangle
\end{aligned}$$

Além disso, como vimos anteriormente no Teorema. 1.6, a função que nos fornece o grau é polinomial de grau no máximo 24. Assim, para determinarmos o polinômio basta conhecermos 25 valores. A tabela abaixo mostra o grau de  $\Sigma(\mathbb{G}(2), d)$  em  $\mathbb{P}^{N_d}$ , para  $4 \leq d \leq 28$ .

$d$	grau	16	697059795307234814
4	393915	17	1955206882236640970
5	154063815	18	5146794419788641330
6	9183443459	19	12809848194172920600
7	217824858665	20	30332654678934237225
8	2934669305585	21	68691613448286232629
9	26847110671185	22	149434114108410896985
10	185027993370885	23	313471848731704090365
11	1026496486447674	24	636172467272835102995
12	4795407106902030	25	1252615334694092121995
13	19480109537667570	26	2398896264983417280119
14	70464679189212330	27	4478274072776614083450
15	231111609248163605	28	8165074058692242186300

Interpolando esses 25 valores, obtemos o polinômio:

$$\begin{aligned}
p^{\mathbb{G}(2)}(d) = & (729/8192)d^{16} - (243/256)d^{15} + (1647/2048)d^{14} + (31329/1024)d^{13} \\
& - (986161/4096)d^{12} + (2122673/1024)d^{11} - (119108353/6144)d^{10} \\
& + (1173948139/9216)d^9 - (4571440223/8192)d^8 + (5167093645/3072)d^7 \\
& - (32756731079/9216)d^6 + (2007081263/384)d^5 - (23516920483/4608)d^4 \\
& + (1649048177/576)d^3 - (55826093/144)d^2 - (12107669/24)d + 229020.
\end{aligned}$$

Observe que neste exemplo o polinômio tem grau igual a 16, em concordância com a conjectura do discriminante generalizado 0.1. Ela nos diz que  $\deg(p^{\mathbb{W}}(d)) = (1 + k) \cdot m$ , onde  $m = \dim(\mathbb{W})$  e  $k$  é a dimensão dos membros de  $\mathbb{W}$ . Neste caso particular, temos que  $k = 1$  (pares de retas) e  $m = 8 = \dim \mathbb{G}(2)$ , em consonância com o grau  $16 = (1+1) \times 8$  previsto na conjectura.

## 2.2 Duas retas concorrentes

Iniciaremos a discussão examinando o fibrado de quádricas singulares ao longo de duas retas concorrentes. Tomemos duas retas concorrentes em  $\mathbb{P}^3$ , por exemplo,  $((x_0, x_1), (x_0, x_2))$ . Veja que a união dessas retas, cujo ideal é  $(x_0, x_1) \cap (x_0, x_2)$ , possui polinômio de Hilbert  $2t + 1$ . Uma superfície geral em  $\mathbb{P}^3$  é singular ao longo das duas retas acima mencionadas, se e, só se, a equação dessa superfície pertence a intersecção dos quadrados dos ideais das duas retas, ou seja,

$$\begin{aligned}
I = (x_0, x_1)^2 \cap (x_0, x_2)^2 &= (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) \cap (x_0^2, x_0x_2, x_2^2) \\
&= (x_0^2, x_0x_1x_2, x_1^2x_2^2) \\
&= (x_0, x_1x_2)^2 \\
&= ((x_0, x_1) \cap (x_0, x_2))^2
\end{aligned}$$

O ideal acima é gerado por 1 quádrlica, 1 cúbica (mód. a quádrlica) e 1 quártica (mód. as anteriores). Precisamente, temos os espaços

$$\begin{aligned} I_2 &= \langle x_0^2 \rangle \\ I_3 &= \langle x_0^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0^2x_3, x_0x_1x_2 \rangle \\ I_4 &= \langle x_0^2x_3^2, x_0x_1x_2x_3, x_0^2x_2x_3, x_0^2x_1x_3, x_0^3x_3, x_1^2x_2^2, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, \\ &\quad x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4 \rangle \end{aligned}$$

Assim, a família de quádrlicas singulares ao longo das duas retas concorrentes é um espaço vetorial unidimensional gerado pelo quadrado da equação do plano que contém ambas as retas, ou seja, a família de quádrlicas singulares ao longo de duas retas concorrentes é genericamente um fibrado vetorial de posto 1, com fibra sobre o ponto  $((x_0, x_1), (x_0, x_2))$  igual à quádrlica  $\langle x_0^2 \rangle$ . No entanto, em alguns pontos sobre o limite das configurações possíveis entre duas retas concorrentes em  $\mathbb{P}^3$ , mais especificamente, sobre os pontos da diagonal, a família de quádrlicas não tem o posto esperado.

De fato, pegue uma reta  $\ell_0 \in \mathbb{G}(1, 3)$ , por exemplo,  $\ell_0 = (x_0, x_1)$ . Considere o  $\mathbb{P}^2$ -fibrado  $\mathbb{B} := \{(p, \ell) \in \ell_0 \times \mathbb{G}(1, 3) \mid p \in \ell\} \rightarrow \ell_0$  composto pelo conjunto de retas em  $\mathbb{P}^3$  concorrentes a  $\ell_0$  em um ponto marcado, variável em  $\ell_0$ . Note que  $\mathbb{B}$  tem dimensão 3 (1 do ponto que varia em  $\ell_0 + 2$  do  $\mathbb{P}^2$  de retas contendo o ponto). Assim, quando variarmos a reta  $\ell_0$  teremos obtido uma variedade de dimensão 7. Fixada a primeira reta  $\ell_0$  e o ponto  $p_0 := \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ , tomemos uma cobertura afim para a fibra  $\mathbb{B}_{p_0} \subset \mathbb{B}$  sobre  $p_0$ , por exemplo, da seguinte maneira:

$$U_{ij} = (x_i + a_1x_k, x_j + a_2x_k),$$

onde  $0 \leq i < j \leq 2$  e  $k \in \{x_0, x_1, x_2\} \setminus \{x_i, x_j\}$ .

Para fixarmos ideias, olhemos para o aberto  $U_{01}$ . Veja que  $\ell_0 \in U_{01}$ , a reta é obtida exatamente quando fazemos  $a_1 = a_2 = 0$ . Tome uma reta arbitrária  $\ell_1 \in U_{01}$ . Pedir que uma quádrlica genérica seja singular em  $\ell_0$  e  $\ell_1$  é equivalente a pedir que o polinômio que define a quádrlica pertença ao ideal

$$J = (x_0, x_1)^2 \cap (x_0 + a_1x_2, x_1 + a_2x_2)^2$$

Utilizando o *Macaulay 2*, vimos que o ideal acima possui uma quádrlica, 4 cúbicas (mód. a quádrlica) e 8 quárticas (mód. as anteriores) em seu conjunto de geradores, descritos abaixo:

$$\begin{aligned} \text{quádrlica} &:= -a_2^2x_0^2 + 2a_1a_2x_0x_1 - a_1^2x_1^2 \\ \text{cúbica}_1 &:= a_2^2x_0^2x_2 - 2a_1a_2x_0x_1x_2 + a_1^2x_1^2x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cúbica}_2 &:= a_2x_0x_1^2 - a_1x_1^3 + a_2^2x_0x_1x_2 - a_1a_2x_1^2x_2 \\
\text{cúbica}_3 &:= a_2x_0^2x_1 - a_1x_0x_1^2 + a_1a_2x_0x_1x_2 - a_1^2x_1^2x_2 \\
\text{cúbica}_4 &:= a_2x_0^3 - a_1x_0^2x_1 + a_1a_2x_0^2x_2 - a_1^2x_0x_1x_2 \\
\text{quártica}_1 &:= a_2x_0x_1^2x_2 - a_1x_1^3x_2 + a_2^2x_0x_1x_2^2 - a_1a_2x_1^2x_2^2 \\
\text{quártica}_2 &:= a_2x_0^2x_1x_2 - a_1x_0x_1^2x_2 + a_1a_2x_0x_1x_2^2 - a_1^2x_1^2x_2^2 \\
\text{quártica}_3 &:= a_2x_0^3x_2 - a_1x_0^2x_1x_2 + a_1a_2x_0^2x_2^2 - a_1^2x_0x_1x_2^2 \\
\text{quártica}_4 &:= x_1^4 + 2a_2x_1^3x_2 + a_2^2x_1^2x_2^2 \\
\text{quártica}_5 &:= x_0x_1^3 + 2a_1x_1^3x_2 - a_2^2x_0x_1x_2^2 + 2a_1a_2x_1^2x_2^2 \\
\text{quártica}_6 &:= 4x_0^2x_1^2 + 8a_1x_0x_1^2x_2 + a_2^2x_0^2x_2^2 - 2a_1a_2x_0x_1x_2^2 + 5a_1^2x_1^2x_2^2 \\
\text{quártica}_7 &:= x_0^3x_1 + 2a_1x_0^2x_1x_2 + a_1^2x_0x_1x_2^2 \\
\text{quártica}_8 &:= x_0^4 + 2a_1x_0^3x_2 + a_1^2x_0^2x_2^2
\end{aligned}$$

Veja que  $J_2$  deixa de ser bem definido exatamente quando tivermos  $a_1 = a_2 = 0$ . Se substituirmos esses valores nas coordenadas locais que impusemos em  $\mathbb{B}$ , temos que, geometricamente, uma quádriga singular ao longo de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  deixa de ser bem definida exatamente quando  $\ell_1 = \ell_0$ . O mesmo ocorre nas demais vizinhanças. Seja

$$\mathbb{Y} := \{(p, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}(1, 2) \times \mathbb{G}(1, 2) \mid p \in \ell_1 \cap \ell_2\}.$$

Observe que  $\mathbb{Y} = \mathbb{L} \times_{\mathbb{P}^3} \mathbb{L}$ , onde  $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{G}$  é a reta universal. Assim, temos um mapa racional

$$\mathbb{Y} \dashrightarrow G(1, \mathcal{F}_2)$$

com local de base  $\Delta_{\mathbb{L}}$ . Explodindo  $\mathbb{Y}$  ao longo de  $\Delta_{\mathbb{L}}$ , temos um  $\mathbb{P}^1$  sobre o ponto fixo  $(p_0, \ell_0)$ . Logo, temos dois pontos fixos no transformado  $\tilde{\mathbb{Y}}$  “vivendo” sobre o ponto  $(p_0, \ell_0)$ . Olhando nas cartas afins da explosão, por exemplo, na carta onde o excepcional tem equação local dada por  $a_1 = 0$  vale que  $a_2 = b_2a_1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\text{quádriga}_1 &:= -b_2^2a_1^2x_0^2 + 2a_1^2b_2x_0x_1 - a_1^2x_1^2 \\
&:= \underbrace{a_1^2}_{\text{Excepcional}} \underbrace{(-b_2^2x_0^2 + 2b_2x_0x_1 - x_1^2)}_{\widetilde{\text{quádriga}}_1}
\end{aligned}$$

Logo, a quádriga fixada, que é obtida justamente quando fazemos todas as coordenadas afins iguais a zero, é dada pela equação  $x_1^2$ . A boa notícia é que resolvendo a indeterminação da quádriga, resolve-se também a indeterminação das cúbicas e quárticas, e portanto temos de fato uma fibração sobre  $\tilde{\mathbb{Y}}$ . Só a título de sanar a curiosidade do leitor, sobre o ponto anteriormente mencionado, substituindo a relação  $a_2 = b_2a_1$  nas equações dos

geradores de  $J$  e depois avaliando na origem do sistema de coordenadas, temos que:

$$\begin{aligned} J_2 &= \langle x_1^2 \rangle \\ J_3 &= \langle x_1^2 x_3, x_1^2 x_2, x_1^3, x_0 x_1^2, x_0^2 x_1 \rangle \\ J_4 &= \langle x_1^2 x_3^2, x_1^2 x_2 x_3, x_1^3 x_3, x_0 x_1^2 x_3, x_0^2 x_1 x_3, x_1^2 x_2^2, x_1^3 x_2, x_0 x_1^2 x_2, x_0^2 x_1 x_2, x_1^4, x_0 x_1^3, x_0^2 x_1^2, \\ &\quad x_0^3 x_1, x_0^4 \rangle \end{aligned}$$

De grau 5 em diante, basta completar o grau, pois não temos geradores em  $J$  com grau maior do que 4. Por 1.6, como  $\tilde{Y}$  tem dimensão 7, o polinômio que fornece o grau tem grau no máximo 21. Assim, basta conhecermos 22 valores do polinômio. Computando o grau de  $\Sigma(\tilde{Y}, d)$ , para  $2 \leq d \leq 25$ , por meio da fórmula de resíduos de Bott, obtemos os seguintes valores:

$d$	grau	10	4614273109960	19	118022147643042295
2	0	11	22056532204260	20	257440097754115440
3	605	12	90129404475980	21	538876098658592780
4	231400	13	323904475990315	22	1086922429730257960
5	19829070	14	1045852264645980	23	2120042417194776900
6	625185200	15	3084487087852625	24	4011029492238200960
7	10233159490	16	8417527900531120	25	7380529800478698655
8	106333270960	17	21477393899561470		
9	793841292265	18	51669714674405920		

Uma breve pausa para chamar atenção a um detalhe: temos que calcular 22 valores do polinômio a partir da regularidade. No caso em análise, sabemos que para  $d = 4$  o ideal regulariza (no sentido que não temos formas de grau mais alto que não sejam obtidas por completar o grau). Por isso, avaliamos o polinômio de  $d = 4$  até  $d = 25$ . Os valores de  $d = 2$  e  $d = 3$  não entrarão na interpolação que fornecerá o polinômio do qual estamos interessados. Interpolando esses valores, obtemos o polinômio:

$$\begin{aligned} p^{\tilde{Y}}(d) &= (243/512)d^{14} - (2511/256)d^{13} + (44217/512)d^{12} - (91887/256)d^{11} \\ &\quad - (27605/512)d^{10} + (7668467/768)d^9 - (103644559/1536)d^8 + (619568375/2304)d^7 \\ &\quad - (1721286533/2304)d^6 + (1744786003/1152)d^5 - (1298326787/576)d^4 \\ &\quad + (695137591/288)d^3 - (127276039/72)d^2 + 794883d - 165920. \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, bem afortunado que é, o polinômio fornece o grau para  $d \geq 2$ .

Agora, fazemos um comentário para grau  $d = 3$ . A família das cúbicas singulares ao longo de duas retas concorrentes é um  $\mathbb{P}^4$ -fibrado sobre  $\tilde{Y}$ . Assim, a família tem dimensão 11. Note que uma cúbica singular ao longo de duas retas concorrentes é, por Bézout, união de uma quádrlica com um plano tangente. De fato, se o plano do par de retas não for componente da cúbica, a interseção teria grau 3, mas como a cúbica é singular ao longo das retas, estas contribuem cada com multiplicidade ao menos 2, passando da conta.

Assim, poderíamos primeiro definir a quádrlica (marcando 9 pontos) e depois olhar para o  $\mathbb{P}^1$  de planos tangentes (que passam pelos outros 2 pontos), ou então primeiro definir o plano (marcar 3 pontos) e depois olhar para o  $\mathbb{P}^1$  de quádrlicas contendo os outros 8 pontos. Assim, podemos obter o 605 da seguinte forma:

$$605 = \binom{11}{9} \cdot 2 + \binom{11}{8} \cdot 3$$

A expressão acima se relaciona com o cálculo do grau devido ao fato que podemos a condição de uma hipersuperfície de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$  passar por um ponto traduz-se como a classe hiperplana no correspondente espaço de parâmetros das hipersuperfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ .

## Capítulo 3

# Superfícies singulares ao longo de três retas passando por um ponto

Neste capítulo abordaremos o caso de superfícies de grau  $d$ , com  $d \gg 0$ , que são singulares ao longo de três retas concorrentes e não coplanares em  $\mathbb{P}^3$ .

### 3.1 Três retas concorrentes e não coplanares

Com o intuito de construir um bom espaço de parâmetros para a configuração desejada, iniciemos fixando uma bandeira completa  $\mathbb{B}_0$  em  $\mathbb{P}^3$ ,

$$\mathbb{B}_0 : \underbrace{\langle x_0, x_1, x_2 \rangle}_{\text{ponto } p_0} \supset \underbrace{\langle x_0, x_1 \rangle}_{\text{reta } \ell_0} \supset \underbrace{\langle x_0 \rangle}_{\text{plano } \pi_0}.$$

Considere a variedade  $\mathbb{B}_1 := \{\ell_1 \in \mathbb{G}(1, 3) \mid p_0 \in \ell_1 \subset \pi_0\}$ , ou seja,  $\mathbb{B}_1$  é o  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{G}(1, 3)$  correspondente às retas contidas em um plano e que passam por um ponto deste plano. Sobre a variedade  $\mathbb{B}_1$ , considere o  $\mathbb{P}^1$ -fibrado de planos dado por

$$\mathbb{B}_2 := \{(\ell_1, \pi_1) \in \mathbb{B}_1 \times (\mathbb{P}^3)^\vee \mid \pi_1 \supset \ell_1\}.$$

Além disso, sobre  $\mathbb{B}_2$ , considere o  $\mathbb{P}^1$ -fibrado dado por

$$\mathbb{B}_3 := \{(\ell_1, \pi_1, \ell_2) \in \mathbb{B}_1 \times (\mathbb{P}^3)^\vee \times \mathbb{G}(1, 3) \mid (\pi_1, \ell_1) \in \mathbb{B}_2 \text{ e } p_0 \in \ell_2 \subset \pi_1\}.$$

Com isto construímos uma torre de  $\mathbb{P}^1$ -fibrações. Logo,  $\mathbb{B}_3$  é uma variedade tridimensional e, conseqüentemente, quando estivermos variando a bandeira obteremos uma variedade de dimensão 9.

Observe que cada uma dessas variedades apresentadas na torre de fibrações é a projetivização de um fibrado vetorial. De fato, denotemos por  $\mathcal{F}_1^0$  o subespaço vetorial dos funcionais lineares que se anulam em  $p_0$ . Veja que tomar uma reta  $\ell_1 \in \mathbb{B}_1$  é equivalente

a escolher um funcional linear que se anula no ponto  $p_0$ , módulo a equação do plano, ou seja,

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{P} \left( \frac{\mathcal{F}_1^0}{\langle x_0 \rangle} \right).$$

Simplifiquemos a notação e denotemos  $\mathcal{A} := \frac{\mathcal{F}_1^0}{\langle x_0 \rangle}$ . Em  $\mathbb{P}(\mathcal{A})$  temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1^0 \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{A} = \frac{\mathcal{F}_1^0}{\langle x_0 \rangle}, \end{array}$$

onde  $\mathcal{E} := \pi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1))$ . Daí, temos que

$$\begin{cases} \mathbb{B}_2 = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ \mathbb{B}_3 = \mathbb{P} \left( \frac{\mathcal{F}_1^0}{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1)} \right) \end{cases}$$

## 3.2 Espaço de parâmetros

Exigir que uma superfície em  $\mathbb{P}^3$  seja singular ao longo de três retas concorrentes e não coplanares é equivalente a solicitar a pertinência do polinômio que define a superfície à intersecção dos quadrados dos ideais das retas. Para entendermos melhor o espaço de parâmetros, analisemos a condição acima anteriormente mencionada em uma configuração genérica particular. Sejam  $\ell_0 := (x_0, x_1)$ ,  $\ell_1 := (x_0, x_2)$  e  $\ell_2 := (x_1, x_2)$ . Assim, a superfície dada por  $F$  é singular ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$  se, e só se,  $F$  pertence ao ideal

$$I := (x_0, x_1)^2 \cap (x_0, x_2)^2 \cap (x_1, x_2)^2 = (x_0x_1x_2, x_1^2x_2^2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_1^2).$$

Observe que  $I$  é gerado por uma cúbica (a única cúbica singular ao longo da configuração imposta) e três quárticas (quadrado das três quádras independentes contendo esta configuração). Assim,

$$\begin{aligned} I_3 &= \langle x_0x_1x_2 \rangle \\ I_4 &= \langle x_0x_1x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_1x_2, x_0^2x_1^2 \rangle \end{aligned}$$

Veja que  $I_3$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial unidimensional e  $I_4$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão 7. Além disso, utilizando o *Macaulay 2*, vimos que como  $I$  tem polinômio de Hilbert  $p(t) = 9t - 8$  e  $\text{reg}(I) = 4$  deve-se esperar, por Mumford- Castelnuovo (EISENBUD, 2004), que  $I_d$  seja um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão  $\binom{3+d}{3} - (9d - 8)$ , para  $d \geq 4$ . A má notícia é que, assim como no capítulo anterior, a família de superfícies singulares ao longo de três retas concorrentes e não coplanares não é plana. Para vermos isso com mais

clareza, introduzamos as coordenadas locais.

Como na seção anterior, fixemos a bandeira  $\mathbb{B}_0$ , onde:

$$\mathbb{B}_0 : \underbrace{(x_0, x_1, x_2)}_{\text{ponto } p_0} \supset \underbrace{(x_0, x_1)}_{\text{reta } \ell_0} \supset \underbrace{(x_0)}_{\text{plano } \pi_0} .$$

Por definição,  $\mathbb{B}_1$  é o  $\mathbb{P}^1$  mergulhado em  $\mathbb{G}(1, 3)$  das retas que passam por  $p_0$  e estão contidas em  $\pi_0$ . Assim,

$$\ell_1 \in \mathbb{B}_1 \iff \exists b_1, b_2 \in \mathbb{C}; \ell_1 = (x_0, b_1x_1 + b_2x_2)$$

Ademais, por construção, na fibra  $\ell_1 \in \mathbb{B}_1$ , temos que  $(\mathbb{B}_2)_{\ell_1}$  corresponde ao  $\mathbb{P}^1$  de planos contendo a reta  $\ell_1$ . Assim,

$$(\ell_1, \pi_1) \in \mathbb{B}_2 \iff \exists b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{C}; \begin{cases} \ell_1 &= (x_0, b_1x_1 + b_2x_2) \\ \pi_1 &= (b_3x_0 + b_1b_4x_1 + b_2b_4x_2) \end{cases}$$

Adicionalmente, sobre uma fibra arbitrária  $(\ell_1, \pi_1) \in \mathbb{B}_2$ , vale que  $(\mathbb{B}_3)_{(\ell_1, \pi_1)}$  corresponde ao  $\mathbb{P}^1$  de retas contidas no plano  $\pi_1$  e que passam pelo ponto  $p_0$ .

Cada um dessas retas projetivas admite uma cobertura canônica por dois abertos afins. Olhemos no aberto afim  $b_1, b_3 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 &:= \{(x_0, x_1 + a_1x_2)\} \subset \mathbb{B}_1 \\ \mathcal{U}_{1,3} &:= \{((x_0, x_1 + a_1x_2), (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2))\} \subset \mathbb{B}_2 \end{cases}$$

Nesse aberto afim, temos que:

$$(\ell_1, \pi_1, \ell_2) \in \mathbb{B}_3 \iff \exists b_5, b_6 \in \mathbb{C}; \begin{cases} \ell_1 &= (x_0, x_1 + a_1x_2) \\ \pi_1 &= (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2) \\ \ell_2 &= (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2, b_5x_1 + b_6x_2) \end{cases}$$

Agora olhando para o aberto em que  $b_5 \neq 0$  obtemos a seguinte vizinhança afim  $\mathcal{U}_{1,3,5} \subset \mathbb{B}_3$ :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 &:= \{(x_0, x_1 + a_1x_2)\} \\ \mathcal{U}_{1,3} &:= \{((x_0, x_1 + a_1x_2), (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2))\} \\ \mathcal{U}_{1,3,5} &:= \{((x_0, x_1 + a_1x_2), (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2), (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2, x_1 + a_3x_2))\} \end{cases}$$

Lembre mais uma vez que pedir que uma superfície de grau  $d$ , dada por uma forma  $F$  em  $\mathbb{P}^3$ , seja singular ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$  é equivalente a exigir que  $F$  pertença ao ideal

$$J := (x_0, x_1)^2 \cap (x_0, x_1 + a_1x_2)^2 \cap (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2, x_1 + a_3x_2)^2.$$

Aqui vale lembrar que a afirmação acima vale pelo Teorema de Nagata-Zariski 1.1 e (DAO et al., 2017). Genericamente, o ideal acima é gerado por 13 formas: 1 cúbica, 6 quárticas, 4 quánticas, 1 sêxtica e 1 héptica. A única cúbica em  $J$  é

$$\text{cub} := a_3x_0^3 + (-a_1a_2 + 2a_2a_3)x_0^2x_1 + (-a_1a_2^2 + a_2^2a_3)x_0x_1^2 + a_1a_2a_3x_0^2x_2 + (-a_1^2a_2^2 + a_1a_2^2a_3)x_0x_1x_2$$

Essa cúbica deixa de ser bem definida ao longo do ideal  $(a_3, a_1a_2) = (a_3, a_1) \cap (a_3, a_2)$ . Se fizermos  $a_2 = a_3 = 0$  no sistema de coordenadas afim, temos:

$$\begin{cases} a_2 = 0 & \Rightarrow \pi_1 = \pi_0 \\ a_2 = a_3 = 0 & \Rightarrow \ell_2 = \ell_0 \end{cases}$$

Portanto, o ideal  $(a_2, a_3)$  corresponde geometricamente ao  $\mathbb{P}^1$  das retas passando por  $p_0$  e que estão contidas em  $\pi_0$ , que denotaremos por  $\mathbb{V}_1$ . Analogamente, fazendo  $a_1 = a_3 = 0$  no sistema de coordenadas afim que estamos trabalhando obtemos que:

$$\begin{cases} a_1 = 0 & \Rightarrow \ell_1 = \ell_0 \\ a_1 = a_3 = 0 & \Rightarrow \ell_2 = \ell_0 \end{cases}$$

Ou seja, o ideal  $(a_1, a_3)$  corresponde geometricamente ao  $\mathbb{P}^1$  de planos contendo a reta  $\ell_0$ . Denotemos este  $\mathbb{P}^1$  por  $\mathbb{V}_2$ . Daí, temos um mapa racional

$$\varphi : \mathbb{B}_3 \dashrightarrow G(1, \mathcal{F}_3)$$

com local de base igual a  $\mathbb{V} := \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2$ .

Se denotarmos por  $\pi_{ij}$  o único plano que contém as retas  $\ell_i$  e  $\ell_j$ , para  $0 \leq i < j \leq 2$ , temos que

$$\begin{cases} \pi_{01} & = \pi_0 \\ \pi_{02} & = a_3x_0 + (-a_1a_2 + a_2a_3)x_1 \\ \pi_{12} & = \pi_1 \end{cases}$$

Assim,  $\mathbb{V}$  também é o local de indeterminação do plano  $\pi_{02}$ . Esta observação pode ser encarada da seguinte maneira: tendo os três pares de planos suportes das retas  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ , nós podemos multiplicá-los e obter a única cúbica singular ao longo das três retas. A unicidade é consequência de Bézout. De fato, se uma cúbica  $F$  é singular ao longo de 2 retas concorrentes, o plano suporte corta  $F$  em uma curva com grau pelo menos  $2 + 2 = 4$ . Portanto, o plano suporte deve ser um fator de  $F$ .

Um fato que atçou-me a curiosidade foi que  $\mathbb{V}_1$  também é o local de indeterminação do sistema de três quádricas que contém as três retas. Para a obtenção da cúbica este comentário pode ser descartado, mas se estivermos interessados em encontrar superfícies de grau  $d$ , com  $d \geq 4$ , podemos usar o mapa  $\psi : \mathbb{B}_3 \dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2)$  como uma “rota” para obtermos o mapa  $\varphi$ . Mais adiante, voltaremos a este comentário com mais detalhes.

Façamos a explosão de  $\mathbb{B}_3$  ao longo de  $\mathbb{V}_1$ . Olhemos para o transformado estrito de cub em  $\mathbb{B}_3(1) := \text{Bl}_{\mathbb{V}_1}(\mathbb{B}_3)$ . Ora, o divisor excepcional de  $\mathbb{B}_3(1)$  é um  $\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre  $\mathbb{B}_3$  e, sendo

assim cada fibra pode ser coberta por dois abertos afins. Olhemos para o aberto afim  $\mathcal{V}_i$  onde a equação local do excepcional é  $a_{i+1} = 0$  para  $i = 1, 2$ . Assim, em cada  $\mathcal{V}_i$  vale  $a_j = b_j a_{i+1}$  para  $i, j \in \{1, 2\}$  e  $i \neq j$ . Portanto, em  $\mathcal{V}_1$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{cub}(1) &:= a_2 b_3 x_0^3 + (2a_2^2 b_3 - a_1 a_2) x_0^2 x_1 + (a_2^3 b_3 - a_1 a_2^2) x_0 x_1^2 + a_1 a_2^2 b_3 x_0^2 x_2 + \\ &\quad (a_1 a_2^3 b_3 - a_1^2 a_2^2) x_0 x_1 x_2 \\ &= \underbrace{a_2}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{cub}_{11}}_{\text{Transformado Estrito}}, \end{aligned}$$

$$\text{e } \text{cub}_{11} = (x_0)(x_0 + a_2 x_1 + a_1 a_2 x_2)(b_3 x_0 + (a_2 b_3 - a_1) x_1).$$

Note que  $\text{cub}_{11}$  deixa de ser bem definida ao longo do ideal  $(b_3, a_1)$ , que é o transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$ . Veja que, apesar de restar indeterminação no aberto  $\mathcal{V}_1$ , no aberto  $\mathcal{V}_2$  o transformado estrito da cúbica fica bem definido. De fato, em  $\mathcal{V}_2$  vale que:

$$\begin{aligned} \text{cub}(1) &:= a_3 x_0^3 + (-a_1 a_3 b_2 + 2a_3^2 b_2) x_0^2 x_1 + (-a_1 a_3^2 b_2^2 + a_3^3 b_2^2) x_0 x_1^2 + a_1 a_3^2 b_2 x_0^2 x_2 + \\ &\quad (-a_1^2 a_3^2 b_2^2 + a_1 a_3^3 b_2^2) x_0 x_1 x_2 \\ &= \underbrace{a_3}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{cub}_{12}}_{\text{Transformado estrito}} \end{aligned}$$

$$\text{e } \text{cub}_{12} = (x_0)(x_0 + a_3 b_2 x_1 + a_1 a_3 b_2 x_2)(x_0 + (-a_1 b_2 + a_3 b_2) x_1).$$

Para resolvermos a indeterminação que ainda permanece no aberto  $\mathcal{V}_1$ , façamos a explosão de  $\mathbb{B}_3(1)$  ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$ . De modo análogo ao que foi feito anteriormente, temos que  $\mathbb{B}_3(2) := \text{Bl}_{\widetilde{\mathbb{V}_2(1)}} \mathbb{B}_3(1)$ , onde  $\widetilde{\mathbb{V}_2(1)}$  é o transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$  em  $\mathbb{B}_3(1)$ . Além disso, o divisor excepcional de  $\mathbb{B}_3(2)$  é um  $\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre  $\mathbb{B}_3(1)$  e, portanto cada fibra pode ser coberta por dois abertos afins. Para fixarmos ideias, olhemos para o aberto onde o excepcional tem equação local dada por  $b_3 = 0$ . Neste aberto vale que  $a_1 = c_1 b_3$  e, conseqüentemente, temos que:

$$\begin{aligned} \text{cub}(2) &= b_3 x_0^3 + (2a_2 b_3 - b_3 c_1) x_0^2 x_1 + (a_2^2 b_3 - a_2 b_3 c_1) x_0 x_1^2 + a_2 b_3^2 c_1 x_0^2 x_2 + \\ &\quad (a_2^2 b_3^2 c_1 - a_2 b_3^2 c_1^2) x_0 x_1 x_2 \\ &= \underbrace{b_3}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{cub}_{21}}_{\text{Transformado estrito}} \end{aligned}$$

$$\text{e } \text{cub}_{21} = (x_0)(x_0 + a_2 x_1 + a_2 b_3 c_1 x_2)(x_0 + (a_2 - c_1) x_1).$$

Veja que a indeterminação do mapa desaparece neste aberto. Situação análoga acontece na outra vizinhança afim em que o excepcional tem equação local  $a_1 = 0$ . Portanto, a explosão resolve a indeterminação do mapa e, assim temos de fato uma fibração de cúbicas singulares ao longo de três retas concorrentes e não coplanares com posto 1 sobre  $\mathbb{B}_3(2)$ . Resolvendo a indeterminação da cúbica, temos todos os ingredientes necessários para obtermos o fibrado de superfícies de grau  $d$ , com  $d \geq 4$ , ao longo da configuração exigida. Vamos fazer a prometida ponte entre superfícies singulares e o sistema de quádricas contendo as três retas.

Seja

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{B}_3 &\dashrightarrow G(3, \mathcal{F}_2) \\ (\ell_1, \pi_1, \ell_2) &\mapsto (\ell_0 \cap \ell_1 \cap \ell_2)_2 \end{aligned}$$

Aqui estamos cometendo um abuso de notação: usando a mesma notação para a reta e o seu ideal. Genericamente,  $(\ell_0 \cap \ell_1 \cap \ell_2)_2$  é gerado por 3 quádricas (os produtos das equações dos pares de planos). Para sermos mais explícitos, na vizinhança trabalhada a anteriormente, em coordenadas locais onde:

$$\begin{cases} \ell_1 &= (x_0, x_1 + a_1x_2) \\ \ell_2 &= (x_0 + a_2x_1 + a_1a_2x_2, x_1 + a_3x_2) \end{cases}$$

temos que  $(\ell_0 \cap \ell_1 \cap \ell_2) = (\text{quadr}_1, \text{quadr}_2, \text{quadr}_3, \text{cubcont}_1)$ , onde:

$$\begin{cases} \text{quadr}_1 &= x_0x_1 + a_3x_0x_2 \\ \text{quadr}_2 &= a_2x_1^2 - a_3x_0x_2 + a_1a_2x_1x_2 \\ \text{quadr}_3 &= x_0^2 + (a_1a_2 - a_2a_3)x_0x_2 \\ \text{cubcont}_1 &= x_1^3 + (a_1 + a_3)x_1^2x_2 + a_1a_3x_1x_2^2 \end{cases}$$

Ou seja, sempre temos 3 quádricas, exceto quando  $\text{quadr}_2$  deixa de ficar bem definida, isto é, ao longo do ideal  $(a_2, a_3)$ . Equivalentemente,  $\mathbb{V}_1$  é o local de base do mapa  $\psi$ . Explodindo  $\mathbb{B}_3$  ao longo de  $\mathbb{V}_1$ , olhemos para o transformado estrito de  $\text{quadr}_2$  em  $\mathbb{B}_3(2)$ . Na vizinhança em que o excepcional é dado pela equação  $a_2 = 0$  vale que  $a_3 = b_3a_2$  e, assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{quadr}_2(1) &:= a_2x_1^2 - b_3a_2x_0x_2 + a_1a_2x_1x_2 \\ &= a_2 \cdot (x_1^2 - b_3x_0x_2 + a_1x_1x_2) \\ &= \underbrace{a_2}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{quadr}_{21}}_{\text{Transformado estrito}} \end{aligned}$$

Analogamente, na vizinhança em que o excepcional é dado pela equação  $a_3 = 0$  vale que  $a_2 = b_2a_3$  e, assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{quadr}_2(1) &:= b_2a_3x_1^2 - a_3x_0x_2 + a_1b_2a_3x_1x_2 \\ &= a_3 \cdot (b_2x_1^2 - x_0x_2 + a_1b_2x_1x_2) \\ &= \underbrace{a_3}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{quadr}_{22}}_{\text{Transformado estrito}} \end{aligned}$$

Portanto, agora depois da explosão temos um fibrado de posto 3 formado por quádricas contendo  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ , que denoteremos por  $\mathcal{G}$ . Não nos esqueçamos do único gerador cúbico do ideal  $\ell_0 \cap \ell_1 \cap \ell_2$ , módulo as quádricas. Como ele é único no anel quociente, é informal o usarmos para a realização de cálculos locais e explanação. Para contornarmos essa situação, usaremos o sistema de 10 cúbicas contendo  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .

Considere o mapa  $\mu : \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3$  de multiplicação. A boa notícia é que se pegarmos as três

quádricas independentes  $\text{quadr}_1, \text{quadr}_2$ , e  $\text{quadr}_3$  e completarmos o grau, teremos 12 cúbicas. Nós podemos formar a matriz dos coeficientes e realizar o processo de eliminação gaussiana. Ao fazermos isso, pode-se verificar que sempre teremos 10 cúbicas independentes. Portanto, temos assim um fibrado de posto 10, que denotaremos por  $\mathcal{H}$ . O procedimento acima foi realizado com a ajuda do *Macaulay 2* e o código está disponível em “<https://shre.ink/MK2o>”.

Lembremos também, pelo que já foi mencionado anteriormente, que a explosão acima não deixa o plano  $\pi_{02}$  bem definido. Explodindo  $\mathbb{B}_3(1)$  ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$ , tornamos  $\pi_{02}$  bem definido e, portanto, determinamos a única cúbica singular ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .

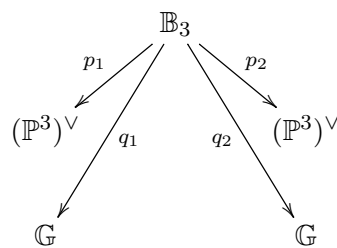
Agora, com todos os objetos necessários, explicitemos a fatoraçoão de modo concreto.

$$\begin{aligned} (\text{quárticas singulares}) &:= \text{Sym}_2(\mathcal{G}) \oplus ((\text{cub}) \otimes \mathcal{F}_1) \\ (\text{quínticas singulares}) &= (\text{quárticas singulares} \otimes \mathcal{F}_1) \oplus (\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) \\ (\text{sexticas singulares}) &= (\text{quínticas singulares} \otimes \mathcal{F}_1) \oplus (\text{Sym}_2(\mathcal{H})) \end{aligned}$$

Na notação acima, foi cometido um abuso de notação: as superfícies singulares são somas das imagens dos mapas de multiplicação. Para grau maior, basta completarmos o grau. Portanto, a explosão de  $\mathbb{B}_3$  ao longo de  $\mathbb{V}$  “planifica” a nossa família de superfícies singulares, de grau  $d$ , ao longo de três retas concorrentes e não-coplanares, fornecendo-nos assim uma fibração de posto  $\binom{3+d}{3} - (9d - 8)$ , para  $d \geq 3$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $\psi : \mathbb{B}_3 \dashrightarrow \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$  o mapa trabalhado anteriormente. Seja  $\mathcal{G}'$  o tautológico de posto 3 de  $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$  e  $\pi_1 : \mathbb{B}_3(1) \rightarrow \mathbb{B}_3$  o mapa da explosão. Então  $\pi_1^* \psi^* \mathcal{G}'$  é um fibrado vetorial de posto 3 em  $\mathbb{B}_3(1)$  que estende o fibrado de quádricas que contém  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .*

*Demonstração.* Temos os mapas de projeção



onde  $p_1$  é a primeira projeção para o plano da variedade bandeira,  $p_2$  é a projeção para o plano que nasce junto com a variedade  $\mathbb{B}_2$ ,  $q_1$  é a projeção para a reta da variedade bandeira e  $q_2$  é a projeção para a reta  $\ell_2$ . Por construção, a imagem de  $p_1$  nos fornece o plano que contém as retas  $\ell_0$  e  $\ell_1$ . Também, por construção, a imagem de  $p_2$  nos dá o plano que contém as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Seja  $\mathcal{S}$  o tautológico de posto 2 em  $\mathbb{G}$  (em uma fibra  $\mathcal{S}_\ell$  representa o espaço bidimensional formado pelas equações da reta). Temos um mapa natural

$$\alpha : (p_1^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes q_2^* \mathcal{S}) \oplus (p_2^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes q_1^* \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}_2$$

dado da seguinte maneira: Tome o plano da bandeira e multiplique pelas equações da reta  $\ell_2$ .

Isso nos dá duas quádricas contendo as retas  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ . Para obter mais duas, inverta o processo: tome o plano  $\pi_{12}$  e multiplique pelas equações da reta  $\ell_0$ . Isso nos dá 4 quádricas com posto genérico 3. O local de queda de posto é justamente ao longo de  $\mathbb{V}_1$  (que é dado por um ideal de Fitting). Repetindo a argumentação dada em 2.1, temos o resultado.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Seja  $\varphi : \mathbb{B}_3 \dashrightarrow \mathbb{G}(1, \mathcal{F}_3)$  o mapa que leva no produto dos três planos suportes dos pares de retas. Seja  $\mathcal{E}'_3$  o tautológico de posto 1 de  $\mathbb{G}(1, \mathcal{F}_3)$  e  $\pi : \mathbb{B}_3(2) \rightarrow \mathbb{B}$  o mapa da explosão. Então  $\pi^* \varphi^* \mathcal{G}'$  é um fibrado vetorial de posto 1 em  $\mathbb{B}_3(2)$  que coincide com o fibrado de cúbricas singulares ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .*

*Demonstração.* Como na prova do teorema anterior, considere os mapas:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{B}_3 & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ (\mathbb{P}^3)^\vee & & (\mathbb{P}^3)^\vee \end{array}$$

Como já vimos, estas projeções nos permitem obter os fibrados cujas seções são os planos suportes de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  e  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Falta fazermos a “cesárea” do plano suporte de  $\ell_0$  e  $\ell_2$ . Para isso, considere a variedade de incidência

$$\tilde{\mathbb{Y}} := \{(\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2) \mid \tilde{\ell}_1 \cap \tilde{\ell}_2 \neq \emptyset\}.$$

Temos um mapa racional  $\sigma : \tilde{\mathbb{Y}} \dashrightarrow (\mathbb{P}^3)^\vee$  dado pelo plano suporte de  $\tilde{\ell}_1$  e  $\tilde{\ell}_2$ . Este mapa deixa de ser bem definido justamente quando  $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}_2$ . Além disso, se  $q : \mathbb{B}_3 \rightarrow \tilde{\mathbb{Y}}$  é o mapa que projeta as retas  $\ell_0$  e  $\ell_2$  e  $p_3 = q \circ \sigma$ , temos que  $p$  deixa de ser bem definido justamente ao longo de  $\mathbb{V}$ . Agora, podemos definir o mapa racional

$$\mu : p_1^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes p_3^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \rightarrow \mathcal{F}_3$$

dado pelo produto dos três planos suportes. Este mapa tem posto genérico 1 e o posto cai justamente ao longo de  $\mathbb{V}$ . Novamente, repetindo os argumentos de 2.1, temos o resultado.  $\square$

### 3.3 Fórmula de Bott

Com isso em mãos, fica fácil usarmos Bott e calcularmos o grau desejado. Consideremos a mesma ação utilizada no caso anterior, isto é, a ação diagonal do toro  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$  sobre  $(\mathbb{C}^n)^\vee$  dada por

$$t \circ x_i := t^{w_i} x_i,$$

onde

$$w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 3 \text{ e } w_3 = 7.$$

Esta ação induz uma ação canônica sobre  $\mathbb{B}_3$  com pontos fixos isolados, de modo que o fibrado  $\mathcal{E}_d$  é  $\mathbb{T}$ -equivariante e para  $d \geq 3$ , onde  $\Sigma(\mathbb{B}(3), d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ . Com a bandeira  $\mathbb{B}_0$  fixada temos os seguintes 8 pontos fixos:

Pontos fixos	$\mathbb{B}_3$
$p_1$	$((x_0, x_1), x_0, (x_0, x_1))$
$p_2$	$((x_0, x_1), x_0, (x_0, x_2))$
$p_3$	$((x_0, x_1), x_1, (x_0, x_1))$
$p_4$	$((x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2))$
$p_5$	$((x_0, x_2), x_0, (x_0, x_1))$
$p_6$	$((x_0, x_2), x_0, (x_0, x_2))$
$p_7$	$((x_0, x_2), x_2, (x_0, x_2))$
$p_8$	$((x_0, x_2), x_2, (x_1, x_2))$

Para usar Bott, precisamos saber as superfícies em  $\Sigma(\mathbb{B}(3), d)$  que “vivem” sobre cada um desses 8 pontos e os respectivos espaços tangentes em  $\mathbb{B}_3$ .

Para descobrirmos as superfícies que vivem sobre cada um dos 8 pontos fixos, basta olharmos para cada ponto fixo e analisar em qual vizinhança aberta afim ele se encontra e depois descobrir as coordenadas locais. Neste caso, é fácil ver que cada tripla da tabela acima é obtida quando fazemos todas as coordenadas afins iguais a 0.

Segue abaixo a lista com a descrição da decomposição em auto-espacos dos espaços tangentes dos pontos fixos de  $\mathbb{B}_3$ .

Pontos fixos	Espaços tangentes
$p_1 : ((x_0, x_1), x_0, (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$
$p_2 : ((x_0, x_1), x_0, (x_0, x_2))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_2}$
$p_3 : ((x_0, x_1), x_1, (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_2}{x_0}$
$p_4 : ((x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_2}$
$p_5 : ((x_0, x_2), x_0, (x_0, x_1))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$
$p_6 : ((x_0, x_2), x_0, (x_0, x_2))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_1}{x_2}$
$p_7 : ((x_0, x_2), x_2, (x_0, x_2))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_0}{x_2} + \frac{x_1}{x_0}$
$p_8 : ((x_0, x_2), x_2, (x_1, x_2))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_0}{x_2} + \frac{x_0}{x_1}$

Para os pontos fora do centro de explosão, isto já é suficiente, pois o há um isomorfismo entre os pontos de  $\mathbb{B}_3(2)$  que não estão no divisor excepcional e os pontos de  $\mathbb{B}_3$  que não estão em  $\mathbb{V}$ . Agora, olhemos para os pontos da explosão que vivem sobre  $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2$ . Note que  $\mathbb{V}_1$  tem dois pontos fixos:  $p_1$  e  $p_5$ . Analogamente,  $\mathbb{V}_2$  também tem dois pontos fixos:  $p_1$  e  $p_3$ .

Uma coisa importante de salientar, neste momento, é que optamos explodir primeiro ao

longo de  $\mathbb{V}_1$  e depois ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$ . Isso se deve ao fato de que quando olhamos para os pontos fixos, é mais aconselhável (e confortável) explodir primeiramente ao longo de  $\mathbb{V}_1$  e depois ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$ , pois ficamos com todos os pontos fixos isolados. Caso, tivéssemos feito a escolha “reversa” teríamos um  $\mathbb{P}^1$  todo fixado. Isso não é um impedimento para continuarmos o processo, porém o torna mais dificultoso.

Passemos agora para as descrições dos pontos fixos e dos espaços tangentes em  $\mathbb{B}_3(1)$ . Faremos isso apenas para o ponto  $p_1$ , os demais são análogos. Ora,  $\mathbb{V}_1 \cong \mathbb{P}^1$  e a descrição do fibrado tangente de  $\mathbb{P}^1$  em um ponto é conhecida: é  $\text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$ , onde  $\mathcal{S}$  é o subfibrado tautológico e  $\mathcal{Q}$  é o fibrado quociente. Veja que a equação que define  $p_1$  em  $\mathbb{V}_1$  é  $a_1 = 0$ . Ao fazermos  $a_1 = 0$  marcamos a reta  $\ell_1$  (reta contida no plano da bandeira e que passa pelo ponto da bandeira). Ao fazermos  $a_1 = 0$ , escolhemos a segunda equação de  $\ell_1$ , a saber  $x_1 = 0$ . Assim,  $\mathcal{S}_{p_1} = x_1$ . Mas, lembre-se que como a reta passa pelo ponto da bandeira, só tínhamos duas opções (que são invariantes pela ação), a saber  $(x_0, x_1)$  e  $(x_0, x_2)$ . Portanto, temos que o fibrado trivial das formas lineares  $\mathcal{F}_{p_1}^0 = \langle x_1, x_2 \rangle$  de  $\mathbb{V}_1$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{Q}_{p_1} = x_2$ . Assim,

$$\mathcal{T}_{p_1}(\mathbb{V}_1) = \frac{x_2}{x_1}.$$

Portanto, utilizando a sequência dos tangentes relativos, temos que

$$(\mathcal{N}_{\mathbb{V}_1|\mathbb{B}_3})_{p_1} = \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}.$$

Duas direções normais distintas nos informam que sobre cada direção normal temos um ponto fixo distinto, pois isso nos diz que o divisor excepcional  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{V}_1|\mathbb{B}_3}) \cong \mathbb{P}^1$  tem dois pontos fixos. Sendo mais preciso, temos dois pontos fixos, que denotaremos, de modo natural, por  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)$  e  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)$ . Daí, por 2.3, temos:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)}(\mathbb{B}_3(1)) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2 x_0}{x_1^2} \\ \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)}(\mathbb{B}_3(1)) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_0 x_2} \end{cases}$$

Lembremos que

- o divisor excepcional é a projetivização do normal
- o fibrado tangente de uma grassmaniana é igual a  $\text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$ , onde  $\mathcal{S}$  é o subfibrado tautológico e  $\mathcal{Q}$  é o fibrado quociente.

Assim, a escolha da direção normal é equivalente a dar a equação local do excepcional. No caso acima, os pontos  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)$  e  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)$  são os pontos obtidos na explosão quando o excepcional tem equação local dada por  $a_2 = 0$  e  $a_3 = 0$ , respectivamente. De fato, recorde que  $p_1 = ((x_0, x_1), x_0, (x_0, x_1))$  e  $\mathcal{T}_{p_1}(\mathbb{B}_3) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$ . Ora,

$$\mathbb{B}_3 \rightarrow \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_1$$

é uma torre de  $\mathbb{P}^1$ -fibrações e cada parcela do cálculo do tangente  $\mathcal{T}_{p_1}(\mathbb{B}_3)$  é o tangente de um  $\mathbb{P}^1$  em um ponto. Sendo mais claro, a primeira parcela é a escolha da reta  $\ell_1$ , a segunda parcela nos fornece a escolha do plano  $\pi_{12}$  e a terceira parcela nos informa a escolha da reta  $\ell_2$ . Ou seja,  $x_1/x_0$  nos diz que dentro do  $\mathbb{P}^1$  de planos que contém a reta  $(x_0, x_1)$  o plano  $x_0$  foi o escolhido, e este é obtido fazendo  $a_2 = 0$ . De modo análogo, dentro do  $\mathbb{P}^1$  de retas contido no plano  $x_0 = 0$  e que passam pelo ponto  $(0 : 0 : 0 : 1)$  a reta  $\ell_2 = (x_0, x_1)$  foi escolhida e esta é obtida fazendo  $a_3 = 0$ .

Como já foi explicado anteriormente, na vizinhança em que o excepcional tem equação local dada por  $a_2 = 0$ , a cúbica continua com indeterminação ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$  enquanto que na outra vizinhança a cúbica fica bem resolvida. Isso nos diz que sobre o ponto  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)$  teremos dois pontos fixos em  $\mathbb{B}_3(2)$ , cada um correspondendo a uma escolha da direção normal (que por sua vez corresponde a tomar cada gerador do ideal do transformado estrito de  $\mathbb{V}_2$  em  $\mathbb{B}_3(1)$  como equação local).

Ora, temos que

$$\mathcal{T}_{p_1}(\mathbb{V}_2) = \frac{x_1}{x_0} \Rightarrow \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)}(\widetilde{\mathbb{V}_2(1)}) = \frac{x_1}{x_0}.$$

Portanto,

$$\left(\mathcal{N}_{\widetilde{\mathbb{V}_2(1)}|\mathbb{B}_3(2)}\right)_{\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_0 x_2}{x_1^2}.$$

A escolha da primeira direção normal é o que corresponde ao caso onde o excepcional é dado localmente por  $a_1 = 0$ . A escolha da segunda direção normal corresponde ao caso em que o excepcional é localmente dado por  $b_3 = 0$ .

De forma análoga ao caso do  $\mathbb{B}_3(1)$ , em  $\mathbb{B}_3(2)$  temos 2 pontos fixos, que denotaremos por  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_1}\right)$  e  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_0 x_2}{x_1^2}\right)$ . O cálculo dos espaços tangentes também é similar:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_1}\right)}(\mathbb{B}_3(2)) = \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_0}{x_1} \\ \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_0 x_2}{x_1^2}\right)}(\mathbb{B}_3(2)) = \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_0 x_2}{x_1^2} + \frac{x_1}{x_0} \end{cases}$$

Com a bandeira fixada, temos 12 pontos fixos em  $\mathbb{B}_3(2)$ . Além disso, temos a descrição dos espaços tangentes e também do fibrado  $\mathcal{E}_d$ , para  $d \geq 3$ , sobre cada um destes pontos fixos. Ademais, temos 24 bandeiras fixadas pela ação. Assim, ao aplicarmos permutações, que mandam a bandeira fixada inicialmente  $\mathbb{B}_0 \rightarrow \mathbb{B}$  em uma dessas 24 bandeiras equivariantes, sobre os dados desses 12 pontos teremos o roteiro de informações necessárias em cada uma das 24 bandeiras equivariantes. Assim, estamos prontos para aplicarmos os resíduos de Bott e calcularmos o grau desejado.

Por Cuadrado, em 1.3, como  $\dim(\mathbb{B}(3)) = 9$ , segue-se que

$$\deg \mathbb{W}(\mathbb{B}(3), d) \cdot \deg(\varphi) = \int_{\mathbb{B}^?} s_9(\mathcal{E}_d) \Rightarrow \deg \mathbb{W}(\mathbb{B}(3), d) = \frac{s_9(\mathcal{E}_d)}{6},$$

para  $d \geq 3$ .

Além disso, como já vimos em 1.6, a função que nos fornece o grau é polinomial de grau no máximo  $3 \cdot \dim(\mathbb{B}(3)) = 27$ . Logo, para determinarmos este polinômio basta conhecermos 28 valores a partir da regularidade ( $d = 6$ ). Usando Bott para calcularmos esses valores de  $d = 3$  até  $d = 33$  obtemos os seguintes valores:

$d$	grau	$d$	grau	$d$	grau
3	280	14	29234838799065500800	25	3303613930103957103273190
4	616260	15	122753594681031527330	26	7062782759868601402665552
5	485935975	16	462903044271757931212	27	14637589637000456637246480
6	75899658332	17	1591435295335793651505	28	29480561903708603680661760
7	4143416720710	18	5048683236345912171000	29	57825325301968985541906535
8	110996782281660	19	14925907683925877068980	30	110676757703830804021351200
9	1793925428386560	20	41458922102351226766300	31	207062554246787918953266582
10	19944009770239080	21	108935767399845222433287	32	379251552572754584218333660
11	166424801109532252	22	272331803884817087630220	33	680990336571274704594815735
12	1107332030531733960	23	650926444900882424917090		
13	6135516693855924015	24	1493829662363581343029100		

Interpolando esses valores, de  $d = 6$  até  $d = 33$  obtemos o polinômio:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}(\mathbb{B}(3), d)} &= (3159/4096)d^{18} - (159651/8192)d^{17} + (255717/2048)d^{16} + (848025/512)d^{15} \\
&= -(20225361/512)d^{14} + (7487749097/20480)d^{13} - (54467276827/30720)d^{12} \\
&= +(103878297671/53760)d^{11} + (50365938707851/1290240)d^{10} \\
&= -(2705792185558127/7741440)d^9 + (34768898790937/20160)d^8 \\
&= -(1911466320505117/322560)d^7 + (28850401785149/1920)d^6 \\
&= -(509845267050257/17920)d^5 + (799968513683909/20160)d^4 \\
&= -(592687334488283/15120)d^3 + (63806964982723/2520)d^2 \\
&= -(62986583315/7)d + 1053650940.
\end{aligned}$$

O polinômio, por sorte, nos fornece os valores corretos apenas para  $d \geq 4$ . Veja que para  $d = 3$  poderíamos ter usado um argumento mais simples. Com efeito, temos apenas uma única cúbica na configuração citada e esta se decompõe como união dos três planos suportes das retas  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ . Assim, temos um recobrimento racional finito de grau seis entre o espaço das cúbicas singulares ao longo de três retas concorrentes, e não coplanares, e  $(\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee$ . Portanto, este espaço de parâmetros deve possuir a mesma dimensão e o mesmo grau de Segre de  $(\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee$ . Como,  $(\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee \times (\mathbb{P}^3)^\vee$  tem dimensão 9, temos 9 graus de liberdade. Logo, temos  $\binom{9}{3}$  maneiras para definirmos o primeiro plano. Escolhido o primeiro plano, temos  $\binom{6}{3}$  modos de definirmos o segundo

plano e, escolhido os dois primeiros planos, o terceiro plano automaticamente fica bem definido. Logo, o grau do espaço de cúbicas singulares ao longo de três retas concorrentes, e não coplanares, é  $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{6} = \frac{1680}{6} = 280$ . Essa divisão por 6 se justifica justamente pelo fato de não ser importante a ordem de quem é o primeiro plano, o segundo e o terceiro, ou seja, podemos permutar os três planos que mesmo assim a única cúbica não se alterará.

## Capítulo 4

# Superfícies singulares ao longo de uma configuração $Z$ não-planar

Neste capítulo abordaremos o caso de superfícies de grau  $d$ , com  $d \gg 0$ , que são singulares ao longo de uma configuração  $Z$  não-planar em  $\mathbb{P}^3$ . Neste trabalho, chamamos de configuração  $Z$  não planar a seguinte situação: uma reta e outras duas retas concorrentes a esta primeira, não sendo necessariamente coplanares.

### 4.1 Configuração $Z$ não-planar

Iniciemos fixando uma bandeira completa  $\mathbb{B}_0$  em  $\mathbb{P}^3$

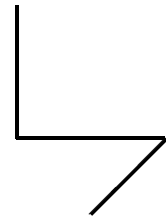
$$\mathbb{B}_0 : \underbrace{(x_0, x_1, x_2)}_{\text{ponto } p_0} \supset \underbrace{(x_0, x_1)}_{\text{reta } \ell_0} \supset \underbrace{(x_0)}_{\text{plano } \pi_0} .$$

Considere o  $\mathbb{P}^1$  definido por  $\mathbb{X}_1 := \{\ell_1 \in \mathbb{G}(1, 3) \mid p_0 \in \ell_1 \subset \pi_0\}$ . Ou seja,  $\mathbb{X}_1$  é o  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{G}(1, 3)$  correspondente às retas contidas no plano fixado e que passam pelo ponto fixado. Esta etapa nos diz como marcar a segunda reta.

Para exibirmos a terceira reta, comecemos marcando um ponto sobre  $\ell_0$ , que denotaremos por  $p_{02}$ . Agora, considere  $\mathbb{X}_2$  como sendo o  $\mathbb{P}^1$  de planos em  $\mathbb{P}^3$  que contêm a reta  $\ell_0$ . Sobre  $\ell_0 \times \mathbb{X}_2$ , considere o  $\mathbb{P}^1$ -fibrado dado por

$$\mathbb{X}_3 := \{(p_{02}, \pi_{02}, \ell_2) \mid p_{02} \subset \ell_2 \subset \pi_{02}\}.$$

Assim,  $\mathbb{X}_3$  é uma variedade tridimensional e, portanto,  $\mathbb{X} := \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_3$  é uma variedade 4-dimensional. Daí, quando dermos a liberdade para a escolha da bandeira completa teremos uma variedade 10-dimensional.



## 4.2 Espaço de parâmetros

Exigir que uma superfície em  $\mathbb{P}^3$  seja singular ao longo de uma configuração  $Z$  não-planar é equivalente a solicitar a pertinência do polinômio que define a superfície à intersecção dos quadrados dos ideais das retas da configuração  $Z$ , pelo teorema de Nagata-Zariski. Para entendermos melhor o espaço de parâmetros, analisemos a condição acima mencionada em uma configuração genérica particular. Sejam  $\ell_0 := (x_0, x_1)$ ,  $\ell_1 := (x_0, x_2)$  e  $\ell_2 := (x_1, x_3)$ . Logo, a superfície definida por  $F$  é singular ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$  se, e somente se,  $F$  pertence ao ideal

$$\begin{aligned} I &:= (x_0, x_1)^2 \cap (x_0, x_2)^2 \cap (x_1, x_3)^2 \\ &= (x_0^2 x_3^2, x_0 x_1 x_2 x_3, x_0^2 x_1 x_3, x_1^2 x_2^2, x_0 x_1^2 x_2, x_0^2 x_1^2) \end{aligned}$$

Veja que  $I$  é gerado por seis quárticas linearmente independentes. Logo,  $I_d$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial 6-dimensional. Além disso, utilizando o *Macaulay 2*, vemos que  $I$  tem polinômio de Hilbert igual a  $p(t) = 9t - 7$  e tem regularidade igual a 4. Assim, temos que  $I_d$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão  $\binom{d+3}{d} - (9d - 7)$ , para  $d \geq 4$ , por Mumford-Castelnuovo (EISENBUD, 2004). Novamente, como nos capítulos anteriores, a família de superfícies singulares ao longo de uma configuração  $Z$  não é plana. Podemos ver isso com mais clareza ao introduzirmos coordenadas locais.

Fixemos a bandeira completa  $\mathcal{B}_0$  em  $\mathbb{P}^3$

$$\mathbb{B}_0 : \underbrace{(x_0, x_1, x_2)}_{\text{ponto } p_0} \supset \underbrace{(x_0, x_1)}_{\text{reta } \ell_0} \supset \underbrace{(x_0)}_{\text{plano } \pi_0} .$$

Lembremos que  $\mathbb{X}_1$  é o  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{G}(1, 3)$  correspondente às retas contidas no plano da bandeira e que passam pelo ponto da bandeira. Veja que

$$\ell_1 \in \mathbb{X}_1 \iff \exists b_1, b_2 \in \mathbb{C} \text{ não se anulando simultaneamente; } \ell_1 = (x_0, b_1 x_1 + b_2 x_2).$$

Agora, introduzamos coordenadas em  $\mathbb{X}_3$ . Para marcarmos um ponto  $p_{02} \in \ell_0$ , temos que:

$$p_{02} \in \ell_0 \iff \exists b_3, b_4 \in \mathbb{C} \text{ não se anulando simultaneamente; } p_{02} = (x_0, x_1, b_3 x_2 + b_4 x_3).$$

Além disso, como  $\mathbb{X}_2$  é o  $\mathbb{P}^1$  de planos contendo  $\ell_0$ , devemos ter:

$$\pi_{02} \supset \ell_0 \iff \exists b_5, b_6 \in \mathbb{C} \text{ não se anulando simultaneamente; } \pi_{02} = (b_5 x_0 + b_6 x_1).$$

Olhando na vizinhança em que  $b_3, b_5 \neq 0$  temos:

$$\begin{cases} p_{02} &= (x_0, x_1, x_2 + a_2 x_3) \\ \pi_{02} &= (x_0 + a_3 x_1) \end{cases}$$

Portanto, em  $\mathbb{X}_3$ , na fibra sobre o par  $(p_{02}, \pi_{02})$  e na vizinhança afim mencionada, temos:

$$\ell_2 \in (\mathbb{X}_3)_{(p_{02}, \pi_{02})} \iff \exists b_7, b_8 \in \mathbb{C}; \ell_{02} = (x_0 + a_3x_1, b_7x_1 + b_8x_2 + a_2b_8x_3).$$

Olhando no aberto afim dado por  $b_1, b_7 \neq 0$  e na fibra sobre o ponto  $(p_{02}, \pi_{02})$  temos que:

$$(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{X} \iff \begin{cases} \ell_1 = (x_0, x_1 + a_1x_2) \\ \ell_2 = (x_0 + a_3x_1, x_1 + a_4x_2 + a_2a_4x_3) \end{cases}$$

Recordemos que exigir que uma superfície de grau  $d$ , dada por uma forma  $F$  em  $\mathbb{P}^3$ , seja singular ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$  é equivalente a exigir que  $F$  pertença ao ideal

$$J := (x_0, x_1)^2 \cap (x_0, x_1 + a_1x_2)^2 \cap (x_0 + a_3x_1, x_1 + a_4x_2 + a_2a_4x_3)^2.$$

por 1.1 e (DAO et al., 2017). Genericamente, o ideal acima é gerado por 14 formas: 6 quárticas, 5 quánticas e 3 sêxticas. Se criarmos a matriz dos coeficientes das 6 quárticas e coletarmos todos os determinantes dos menores  $6 \times 6$  desta matriz nós obtemos o ideal de Fitting

$$\begin{aligned} \text{indet} := & (a_1a_3^3 - a_3^3a_4, a_1^2a_3^2 - 2a_1a_3^2a_4 + a_3^2a_4^2, a_1^3a_3 - 3a_1^2a_3a_4 + 3a_1a_3a_4^2 - a_3a_4^3, \\ & a_1^4 - 4a_1^3a_4 + 6a_1^2a_4^2 - 4a_1a_4^3 + a_4^4, a_3^4a_4, a_2a_3^3a_4, a_1a_2a_3^2a_4 - a_2a_3^2a_4^2, \\ & a_1^2a_2a_3a_4 - 2a_1a_2a_3a_4^2 + a_2a_3a_4^3, a_1^3a_2a_4 - 3a_1^2a_2a_4^2 + 3a_1a_2a_4^3 - a_2a_4^4, a_2^2a_3^2a_4^2, \\ & a_1a_2^2a_3a_4^2 - a_2^2a_3a_4^3, a_1^2a_2^2a_4^2 - 2a_1a_2^2a_4^3 + a_2^2a_4^4, a_2^3a_3a_4^3, a_1a_2^3a_4^3 - a_2^3a_4^4, a_2^4a_4^4) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Apesar de sua aparência não muito agradável, quando calculamos a sua decomposição primária e olhamos para os seus primos associados, obtemos duas componentes irredutíveis:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 &= \mathbf{V}(a_4, a_1) \\ \mathbb{V}_2 &= \mathbf{V}(a_3, a_2, a_1 - a_4) \end{aligned}$$

e uma componente imersa  $\mathbb{V}_3$  (dada pelo ideal  $(a_4, a_3, a_1)$ ).

Vamos entender geometricamente cada uma dessas três variedades. Para isso, vamos fazer uma redução módulo a esses ideais no nosso sistema de coordenadas afins.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_0 \\ a_3 = 0 \Rightarrow \pi_{02} = \pi_0 \\ a_3 = a_4 = 0 \Rightarrow \ell_2 = \ell_0 \end{cases}$$

Portanto,  $\mathbb{V}_3$  é um  $\mathbb{P}^1 \cong \ell_0$  no qual o único grau de liberdade é sobre a escolha do ponto  $p_{02}$ .

Analogamente,

$$\begin{cases} a_2 = 0 \Rightarrow p_{02} = p_0 \\ a_3 = 0 \Rightarrow \pi_{02} = \pi_0 \\ a_1 = a_4 = 0 \Rightarrow \ell_2 = \ell_1 \end{cases}$$

Logo,  $\mathbb{V}_2$  também é um  $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{X}_1$ , no qual o único grau de liberdade consiste na escolha da reta  $\ell_1$  (reta contida em  $\pi_0$  passando por  $p_0$ ).

Além disso, similarmente, temos:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_0 \\ a_4 = 0 \Rightarrow \ell_2 = \ell_0 \end{cases}$$

Logo,  $\mathbb{V}_1$  é um  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong \ell_0 \times \mathbb{X}_2$  com dois graus de liberdade: um para a marcação do ponto sobre a reta  $\ell_0$  e outro para a escolha de um plano  $\pi_{02}$  contendo a reta  $\ell_0$ .

Em suma, temos um mapa racional da nossa variedade quadridimensional  $\mathbb{X}$  para a grassmanniana de 6 quárticas em  $\mathbb{P}^3$ , com local de base cujo ideal é o indet,(4.1). A saber:

$$\begin{aligned} \varphi_4 : \mathbb{X} &\dashrightarrow \mathbb{G}(6, 34) \\ (\ell_0, \ell_1, \ell_2) &\mapsto (\mathcal{I}_{\ell_0}^2 \cap \mathcal{I}_{\ell_1}^2 \cap \mathcal{I}_{\ell_2}^2)_4, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{I}_{\ell_i}$  é o ideal da reta  $\ell_i$ . Para entendermos melhor o que “ganhamos”, com as explosões, é mais conveniente explorarmos a geometria por trás do mapa  $\varphi_4$ . Para isso, observe o seguinte: quando intersectamos os ideais das três retas obtemos um ideal gerado por 3 quádricas e 2 cúbicas. O instinto imediato nos ordena a tomarmos todos os produtos 2 a 2 possíveis dentre as quádricas e cúbicas, e assim obtermos quárticas, quánticas e sêxticas. Essas três quádricas deixam de ser linearmente independentes ao longo de  $\mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3$ . Com a ajuda do *Macaulay 2*, vimos que ao quadrarmos o ideal de três quádricas L.I. sempre obteremos 6 quárticas L.I., a menos que o ideal gerado por estas quádricas já seja o quadrado do ideal de uma reta (por exemplo:  $(x_0^2, x_0x_1, x_1^2) = (x_0, x_1)^2$ ). A componente  $\mathbb{V}_1$  é justamente o local de base do mapa

$$\begin{aligned} \psi_4 : \mathbb{X} &\dashrightarrow \mathbb{G}(6, 34) \\ (\ell_0, \ell_1, \ell_2) &\mapsto ((\mathcal{I}_{\ell_0} \cap \mathcal{I}_{\ell_1} \cap \mathcal{I}_{\ell_2})_2)^2 \end{aligned}$$

Para elucidar o processo, esmiucemos os detalhes da obtenção do fibrado. Como dito, inicialmente vamos olhar para as superfícies contendo as três retas.

Note que se pegarmos um membro genérico em  $\mathbb{X}$ , como a tripla  $((x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_1, x_3))$ , nós veremos que a intersecção dos ideais dessas três retas é gerado por 3 quádricas. A saber,

$$(x_0, x_1) \cap (x_0, x_2) \cap (x_1, x_3) = (x_0x_3, x_1x_2, x_0x_1).$$

Portanto, em uma fibra genérica, a família das superfícies de grau  $d$  que contêm um

membro de  $\mathbb{X}$ , tem posto  $r_d := \binom{d+3}{3} - (3d+1)$  para  $d \geq 2$ .

Deste modo, como queremos construir uma família plana, queremos que todas as fibras tenham o mesmo tamanho, ou seja, teremos uma fibração.

Olhemos para os polinômios  $F \in I$ , onde

$$I := (x_0, x_1) \cap (x_0, x_1 + a_1x_2) \cap (x_0 + a_3x_1, x_1 + a_4x_2 + a_2a_4x_3)$$

Utilizando o *Macaulay 2* para o cálculo acima, vemos que o ideal acima é gerado, genericamente, por 3 quádricas e 2 cúbicas (módulo as quádricas) linearmente independentes.

$$\text{quadr}_1 := a_3x_1^2 + (a_1 - a_4)x_0x_2 + a_1a_3x_1x_2 - a_2a_4x_0x_3$$

$$\text{quadr}_2 := x_0x_1 + a_4x_0x_2 + a_2a_4x_0x_3$$

$$\text{quadr}_3 := x_0^2 - a_3a_4x_0x_2 - a_2a_3a_4x_0x_3$$

$$\text{cub}_1 := x_1^3 + (a_1 + a_4)x_1^2x_2 + a_1a_4x_1x_2^2 + a_2a_4x_1^2x_3 + a_1a_2a_4x_1x_2x_3$$

$$\text{cub}_2 := x_0x_1^2 + (a_1 + a_4)x_0x_1x_2 + a_1a_4x_0x_2^2 + a_2a_4x_0x_1x_3 + a_1a_2a_4x_0x_2x_3$$

Observe que deixamos de ter 3 quádricas linearmente independente justamente quando  $\text{quadr}_1 = 0$ , ou seja, ao longo do ideal  $(a_3, a_1 - a_4, a_2a_4) = (a_3, a_2, a_1 - a_4) \cap (a_4, a_3, a_1) = \mathcal{I}_{\mathbb{V}_2} \cap \mathcal{I}_{\mathbb{V}_3}$ .

Seja  $\mathbb{X}(1) := \text{Bl}_{\mathbb{V}_2}(\mathbb{X})$ . Vejamos o que acontece com  $\text{quadr}_1$  na cobertura canônica aberta afim de  $\mathbb{X}(1)$ . Denotemos por  $\text{quadr}_{1,f}$  a fibra de  $\text{quadr}_1$  em  $\mathbb{X}(1)$  obtida quando o excepcional é dado por  $f = 0$ . Temos que:

$$\text{quadr}_{1,a_3} := a_3x_1^2 + (b_1a_3)x_0x_2 + (b_1a_3 + a_4)a_3x_1x_2 - b_2a_3a_4x_0x_3 \quad (4.2)$$

$$= a_3(x_1^2 + b_1x_0x_2 + (b_1a_3 + a_4)x_1x_2 - b_2a_4x_0x_3) \quad (4.3)$$

$$= \underbrace{a_3}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\widetilde{\text{quadr}}_{1,a_3}}_{\text{Transformado Estrito}} \quad (4.4)$$

$$\text{quadr}_{1,a_2} := b_3a_2x_1^2 + b_1a_2x_0x_2 + (b_1a_2 + a_4)b_3a_2x_1x_2 - a_2a_4x_0x_3 \quad (4.5)$$

$$= a_2(b_3x_1^2 + b_1x_0x_2 + (b_1a_2 + a_4)b_3x_1x_2 - a_4x_0x_3) \quad (4.6)$$

$$= \underbrace{a_2}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\widetilde{\text{quadr}}_{1,a_2}}_{\text{Transformado Estrito}} \quad (4.7)$$

$$\text{quadr}_{1,a_1-a_4} := b_3(a_1 - a_4)x_1^2 + (a_1 - a_4)x_0x_2 + a_1b_3(a_1 - a_4)x_1x_2 - b_2(a_1 - a_4)a_4x_0x_3 \quad (4.8)$$

$$= (a_1 - a_4)(b_3x_1^2 + x_0x_2 + a_1b_3x_1x_2 - b_2a_4x_0x_3) \quad (4.9)$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_4)}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\widetilde{\text{quadr}}_{1,a_1-a_4}}_{\text{Transformado Estrito}} \quad (4.10)$$

No aberto em que o excepcional é dado por  $a_3 = 0$  temos 3 quádricas independentes. Atente-se ao fato que sobre a origem do sistema de coordenadas, isto é, quando as três quádricas são obtidas fazendo todos os coeficientes iguais a 0, as quádricas são  $(x_0^2, x_0x_1, x_1^2) = (x_0, x_1)^2$ . Isto nos diz que este ponto não está em  $\mathbb{V}_3$  (que é o nosso

segundo centro de explosão), só em  $\mathbb{V}_1$ .

No aberto em que o excepcional é dado por  $a_1 - a_4 = 0$  temos 3 quádricas independentes. Sobre a origem do sistema de coordenadas as três quádricas são  $(x_0x_2, x_0x_1, x_1^2)$  (não são o quadrado do ideal de uma reta) e as seis quárticas são  $(x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_1^2, x_0x_1^3, x_1^4)$ . Isto nos diz que este ponto não está em  $\mathbb{V}_3$  e nem em  $\mathbb{V}_1$ . Ou seja, sobre este ponto a indeterminação foi totalmente resolvida. Com a ajuda do *Macaulay 2*, vimos que para quaisquer valores dos coeficientes sempre teremos 03 quádricas e 06 quárticas independentes nesta vizinhança.

No aberto em que o excepcional é dado por  $a_2 = 0$  continuamos com 2 quádricas independentes. Isto deve-se ao fato  $\text{quadr}_{1,a_2}$  deixa de ser bem definida ao longo do ideal  $(b_1, b_3, a_4)$ , que é ideal do transformado estrito de  $\mathbb{V}_3$  em  $\mathbb{X}(1)$ . Seja  $\mathbb{X}(2)$  a explosão de  $\mathbb{X}(1)$  ao longo do transformado estrito  $\mathbb{V}_3$  em  $\mathbb{X}(1)$ . De forma análoga, podemos “repetir” o processo feito acima e obter as três quádricas.

$$\begin{aligned}
\text{quadr}_{1,a_2,b_1} &:= c_3b_1x_1^2 + b_1x_0x_2 + (b_1a_2 + c_4b_1)b_3x_1x_2 - c_4b_1x_0x_3 \\
&= b_1(c_3x_1^2 + x_0x_2 + (a_2 + c_4)b_3x_1x_2 - c_4x_0x_3) \\
&= \underbrace{b_1}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{quadr}_{1,a_2,b_1}}_{\text{Transformado Estrito}} \\
\text{quadr}_{1,a_2,b_3} &:= b_3x_1^2 + c_1b_3x_0x_2 + (c_1b_3a_2 + c_4b_3)b_3x_1x_2 - c_4b_3x_0x_3 \\
&= b_3(x_1^2 + c_1x_0x_2 + (c_1a_2 + c_4)b_3x_1x_2 - c_4x_0x_3) \\
&= \underbrace{b_3}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{quadr}_{1,a_2,b_3}}_{\text{Transformado Estrito}} \\
\text{quadr}_{1,a_2,a_4} &:= c_3a_4x_1^2 + c_1a_4x_0x_2 + (c_1a_4a_2 + a_4)c_3a_4x_1x_2 - a_4x_0x_3 \\
&= a_4(c_3x_1^2 + c_1x_0x_2 + (c_1a_2 + 1)c_3a_4x_1x_2 - x_0x_3) \\
&= \underbrace{a_4}_{\text{Excepcional}} \cdot \underbrace{\text{quadr}_{1,a_2,a_4}}_{\text{Transformado Estrito}}
\end{aligned}$$

Em todos os casos, agora, temos 3 quádricas linearmente independentes. Observe que no primeiro e último caso, o problema foi resolvido totalmente, ou seja, o ideal das 3 quádricas obtidas não é o quadrado do ideal de uma reta. No entanto, no segundo caso, a família de três quádricas, na origem, é o quadrado do ideal de uma reta. Com efeito, o ideal obtido pelas três quádricas é  $(x_1^2, x_0x_1, x_0^2) = (x_0, x_1)^2$ . Assim, precisaremos fazer uma explosão ao longo da componente imersa  $\mathbb{V}_1$  para resolvermos completamente o problema. Até o momento solucionamos apenas o problema das três quádricas. Agora, elucidemos o problema das 6 quárticas.

Seja  $\mathbb{X}(3)$  a explosão de  $\mathbb{X}(2)$  ao longo do transformado estrito de  $\mathbb{V}_1$  em  $\mathbb{X}(2)$ . Faremos a explicação apenas do caso  $\text{quadr}_{1,a_3}$ , pois a do caso  $\text{quadr}_{1,a_2,b_3}$  é análoga. Quadrando o

ideal das três quádricas obtidas, obtemos o ideal de seis quárticas

$$(\widetilde{\text{quadr}}_{1,a_3}, \text{quadr}_2, \text{quadr}_3)^2 = (\text{quart}_1, \text{quart}_2, \text{quart}_3, \text{quart}_4, \text{quart}_5, \text{quart}_6).$$

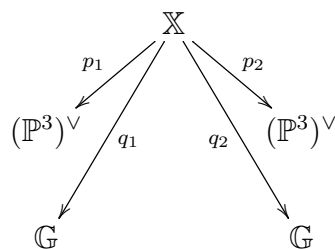
Com a ajuda do *Macaulay 2*, podemos formar a matriz dos coeficientes das 6 quárticas e encontrar o local onde o posto é menor do que 6. O ideal de Fitting encontrado foi  $(b_1, a_4)$ , que é justamente o transformado estrito do ideal de  $\mathbb{V}_1$ . Repetindo o argumento de olhar em cada aberto afim da explosão, podemos chegar à conclusão que, de fato, temos 6 quárticas L.I. Assim, nós obtemos um fibrado de quádricas *contendo* um membro de  $\mathbb{X}$  e um de quárticas *singulares* ao longo de um membro de  $\mathbb{X}$ , ambos com o posto esperado.

**Teorema 4.1.** *Seja*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{X} &\dashrightarrow \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2) \\ (\ell_0, \ell_1, \ell_2) &\mapsto (\mathcal{I}_{\ell_0} \cap \mathcal{I}_{\ell_1} \cap \mathcal{I}_{\ell_2})_2. \end{aligned}$$

Se  $\mathcal{G}$  é o tautológico de posto 3 em  $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$  e  $\pi_1 : \mathbb{X}(2) \rightarrow \mathbb{X}$  é a explosão, então  $\pi_1^* \psi^* \mathcal{G}$  é um fibrado de posto 3 em  $\mathbb{X}(2)$  que coincide com o fibrado de quádricas contendo  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .

*Demonstração.* Considere as projeções



onde  $p_1$  projeta o plano da bandeira,  $p_2$  projeta o plano suporte de  $\ell_0$  e  $\ell_2$ ,  $q_1$  projeta a reta  $\ell_1$  e  $q_2$  projeta a reta  $\ell_2$ . Seja  $\mathcal{S}$  o tautológico de posto 2 em  $\mathbb{G}$ . Similarmente ao caso de três retas incidentes em um ponto, para obtermos as 3 quádricas, faça o seguinte: pegue o plano da bandeira e multiplique pelas equações da reta  $\ell_2$ . Depois pegue a equação do plano suporte de  $\ell_0$  e  $\ell_2$  e multiplique pelas equações da reta  $\ell_1$ . Isto nos dá um conjunto com 4 quádricas, mas posto genérico 3, que cai justamente ao longo de  $\mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3$ . Ou seja, tomemos o mapa

$$\alpha : (p_1^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes q_2^* \mathcal{S}) \oplus (p_2^* \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^3)^\vee}(-1) \otimes q_1^* \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}_2$$

Repetindo o argumento de 2.1 temos o desejado. □

**Teorema 4.2.** *Seja*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{X}(2) &\dashrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4) \\ (\ell_0, \ell_1, \ell_2) &\mapsto ((\mathcal{I}_{\ell_0} \cap \mathcal{I}_{\ell_1} \cap \mathcal{I}_{\ell_2})_2)^2. \end{aligned}$$

Se  $\mathcal{G}$  é o tautológico de posto 6 em  $\mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$  e  $\pi_2 : \mathbb{X}(3) \rightarrow \mathbb{X}(2)$  é a explosão, então  $\pi_2^* \varphi^* \mathcal{G}$  é um fibrado de posto 6 em  $\mathbb{X}(2)$  que estende o fibrado de sêxticas singulares ao longo de  $\ell_0, \ell_1$  e  $\ell_2$ .

*Demonstração.* Denotemos por  $\mathcal{H}$  o fibrado de quádricas do teorema anterior. Considere o mapa de multiplicação  $\mu : \text{Sym}_2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_4$ . Note que  $\mu$  tem posto genérico 6 e o posto cai justamente ao longo de  $\mathbb{V}_1$ . Repetindo a argumentação em 2.1, temos o desejado.  $\square$

### 4.3 Fórmula de Bott

Tomemos a ação utilizada nos casos anteriores, isto é, considere a ação diagonal do toro  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$  sobre  $(\mathbb{C}^n)^\vee$  dada por

$$t \circ x_i := t^{w_i} x_i,$$

onde

$$w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 3 \text{ e } w_3 = 7.$$

Esta ação induz uma ação canônica sobre  $\mathbb{X}$  com pontos fixos isolados e de modo que o fibrado  $\mathcal{E}_d$  é  $\mathbb{T}$ -equivariante para  $d \geq 4$ , onde  $\tilde{\Sigma}(\mathbb{X}(3), d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ , onde  $\mathbb{X}(3)$  é variedade obtida depois de explodirmos  $\mathbb{X}$  ao longo de  $\mathbb{V} := \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \mathbb{V}_3$ . Com a bandeira  $\mathbb{B}_0$  fixada temos os seguintes 16 pontos fixos:

Pontos fixos	$\mathbb{X}$
$p_1$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_1))$
$p_2$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_2))$
$p_3$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_0, x_1))$
$p_4$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_1, x_2))$
$p_5$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_1))$
$p_6$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_3))$
$p_7$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_0, x_1))$
$p_8$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_1, x_3))$
$p_9$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_1))$
$p_{10}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_2))$
$p_{11}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_0, x_1))$
$p_{12}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_1, x_2))$
$p_{13}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_1))$
$p_{14}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_3))$
$p_{15}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_0, x_1))$
$p_{16}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_1, x_3))$

Precisamos conhecer os elementos que correspondem as superfícies em  $\Sigma(\mathbb{X}(3), d)$  que “vivem” sobre cada um desses 16 pontos, ou seja, as fibras de  $\mathcal{E}_d$ , e os respectivos espaços tangentes em  $\mathbb{X}$ . Note que  $\mathbb{V}_2$  e  $\mathbb{V}_3$  tem dois pontos fixos. Veja, também, que  $\mathbb{V}_1$  tem

3 pontos fixos. Além disso,  $p_1$  é um ponto fixo em comum às três variedades. É mais “educativo” começarmos pelos pontos fora dos centros de explosão e depois olharmos para os pontos dentro deles.

Para descobrirmos as superfícies que vivem sobre cada um dos 16 pontos fixos, basta olharmos para cada ponto fixo e analisar em qual vizinhança aberta afim ele se encontra e depois introduzirmos as coordenadas locais afins. Neste caso, todos os pontos fixos correspondem à origem dos seus respectivos abertos afins.

Para calcularmos a decomposição dos espaços tangentes em auto-espacos, basta notar que apesar do espaço tangente não cindir globalmente, em uma fibra ele cinde, isto é:

$$\mathcal{T}_{(\ell_1, p_{02}, \pi_{02}, \ell_2)}(\mathbb{X}) = \mathcal{T}_{\ell_1}(\mathbb{X}_1) \oplus \mathcal{T}_{p_{02}}(\ell_0) \oplus \mathcal{T}_{\pi_{02}}(\mathbb{X}_2) \oplus \mathcal{T}_{\ell_2}(\mathbb{X}_3)$$

Segue abaixo a lista com a descrição da decomposição em auto-espacos dos espaços tangentes dos pontos fixos de  $\mathbb{X}$ .

Pontos fixos.		Espaços tangentes	$p_8$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_1, x_3))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_0}{x_3}$
$p_1$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$	$p_9$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_1))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$
$p_2$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_2))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_2}$	$p_{10}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_0), (x_0, x_2))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_2}$
$p_3$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_2}{x_0}$	$p_{11}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_0, x_1))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_2}{x_0}$
$p_4$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_1, x_2))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_0}{x_2}$	$p_{12}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_2), (x_1), (x_1, x_2))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_0}{x_2}$
$p_5$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_3}{x_1}$	$p_{13}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_1))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_3}{x_1}$
$p_6$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_3))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_3}$	$p_{14}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_0), (x_0, x_3))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1}{x_3}$
$p_7$	$((x_0, x_1), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_0, x_1))$	$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_3}{x_0}$	$p_{15}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_0, x_1))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_3}{x_0}$
			$p_{16}$	$((x_0, x_2), (x_0, x_1, x_3), (x_1), (x_1, x_3))$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_0}{x_3}$

Explicamos um pouco melhor os cálculos exibidos na tabela acima. Como  $\mathbb{X}_1 \cong \mathbb{P}^1$ , para calcular a primeira parcela da decomposição do espaço tangente basta calcularmos o espaço tangente de  $\mathbb{P}^1$  em um ponto ( $Hom(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$ ). Os cálculos das demais parcelas são análogos.

Para os pontos fora do divisor excepcional isto já é suficiente. Agora, olhemos para o divisor excepcional: os pontos que vivem sobre o primeiro centro de explosão  $\mathbb{V}' = \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2$ . Note que, pela descrição geométrica de  $\mathbb{V}_1$  e  $\mathbb{V}_2$  fornecidas um pouco antes em 4.2,  $\mathbb{V}_1$  tem dois pontos fixos:  $p_1$  e  $p_5$ . Analogamente,  $\mathbb{V}_2$  também tem dois pontos fixos:  $p_1$  e  $p_3$ .

Os pontos fixos em  $\mathbb{X}$  estão exibidos. Vamos agora para os pontos fixos que vivem no divisor excepcional.

Passemos agora para as descrições dos pontos fixos e dos espaços tangentes em  $\mathbb{X}(1)$ .

Faremos isso apenas para o ponto  $p_1$ , os demais são análogos. Ora,

$$\mathcal{T}_{p_1}(\mathbb{V}_2) = \frac{x_2}{x_1}.$$

Portanto, utilizando a sequência dos tangentes relativos (cf. cap. 08, página 182 de (HARTSHORNE, 1977)), temos que

$$(\mathcal{N}_{\mathbb{V}_1|\mathbb{X}})_{p_1} = \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}.$$

As três direções normais distintas nos revelam que sobre cada direção normal temos um ponto fixo distinto, isto é, temos três pontos fixos, que denotaremos, de modo natural, por  $\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)$ ,  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)$  e  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)$ . Daí, pela observação 2.3, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)}(\mathbb{X}(1)) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_0x_3} + \frac{x_2^2}{x_1x_3} \\ \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)}(\mathbb{X}(1)) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_0x_3}{x_1x_2} + \frac{x_0x_1}{x_1^2} \\ \mathcal{T}_{\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)}(\mathbb{X}(1)) = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_0x_2} \end{array} \right.$$

Sabemos que a escolha da direção normal é equivalente a dar a equação local do excepcional. No caso acima, os pontos  $\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)$ ,  $\left(p_1, \frac{x_1}{x_0}\right)$  e  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)$  são os pontos obtidos na explosão quando o excepcional tem equação local dada por  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$  e  $a_1 - a_4 = 0$ , respectivamente.

Como já foi explicado anteriormente em 4.2, na vizinhança em que o excepcional tem equação local dado por  $a_1 - a_4 = 0$ , temos 3 quádricas e 6 quárticas L.I. Ou seja, sobre o ponto  $\left(p_1, \frac{x_2}{x_1}\right)$  o problema da obtenção do fibrado de quárticas acabou.

Na vizinhança em que o excepcional tem equação local  $a_3 = 0$  temos as 3 quádricas, cf. 4.2, mas não as 6 quárticas L.I. E deixamos de ter 6 quárticas L.I justamente sobre o transformado estrito de  $\mathbb{V}_1$ , que é  $(b_1, a_4)$ . Isto indica que sobre cada uma dessas direções normais nós teremos 1 ponto fixo, totalizando 2 ao fim. Ora,

$$\mathcal{T}(\widetilde{\mathbb{V}}_1)_{\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)} = \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_0x_3}.$$

Além disso,

$$\mathcal{T}(\widetilde{\mathbb{X}}(3))_{\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_0x_3} + \frac{x_2^2}{x_1x_3}.$$

Daí, pela seqüência do tangente, cf. cap. 08, pág. 182 (HARTSHORNE, 1977), temos:

$$(\mathcal{N}_{\widetilde{\mathbb{X}(3)}})_{\left(p_1, \frac{x_3}{x_2}\right)} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1 x_3}.$$

Na vizinhança em que o excepcional é dado por  $a_2 = 0$  continuamos com o problema da obtenção do fibrado de quádricas (de posto 3) contendo uma configuração  $Z$  não planar, e conseqüentemente do fibrado de 6 quárticas singulares ao longo de uma conf.  $Z$  não planar. Prosseguindo de modo análogo aos anteriores, podemos calcular os respectivos fibrados tangentes.

Com a bandeira fixada, temos 20 pontos fixos em  $\mathbb{X}(3)$ . Além disso, temos a descrição dos espaços tangentes e também do fibrado  $\mathcal{E}_d$ , para  $d \geq 4$ , sobre cada um destes pontos fixos. Assim, ao aplicarmos as permutações que levam a bandeira fixada em cada bandeira invariante pela ação diagonal do toro, obtemos os pontos fixos e os seus respectivos espaços tangentes e fibras de  $\mathcal{E}_d$ . Assim, estamos prontos para aplicarmos a fórmula dos resíduos de Bott e calcularmos o grau desejado.

Por Cuadrado, em 1.3, como  $\dim(\mathbb{X}(3)) = 10$ , segue-se que

$$\deg \Sigma(\mathbb{X}(3), d) \cdot \deg(\varphi) = \int_{\mathbb{X}(3)} s_{10}(\mathcal{E}_d) \Rightarrow \deg \Sigma(\mathbb{X}(3), d) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{X}(3)} s_{10}(\mathcal{E}_d),$$

para  $d \geq 4$ .

É válido fazermos uma observação do por que o  $\deg(\varphi) = 2$ . Escolhida a primeira reta ((o ‘pescoço’ da configuração  $Z$ ), podemos perfeitamente trocar os papéis de  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . No entanto, nenhuma das duas poderiam ocupar o papel de  $\ell_0$ , já que  $\ell_0$  intersecta as outras duas retas e as três retas não são coplanares.

Como já vimos em 1.6, a função que nos fornece o grau é polinomial de grau no máximo  $3 \cdot \dim(\mathbb{X}(3)) = 30$ . Logo, para determinarmos este polinômio basta conhecermos 31 valores (a partir de onde regulariza, que no caso é  $d=6$ ). Usando Bott para calcularmos esses valores de  $d = 4$  até  $d = 36$  obtemos os seguintes valores:

$d$	grau	$d$	grau	$d$	grau
4	1985340	15	22887480086186602338490	26	4666451611073020704649286336
5	4183542435	16	100541971209461320017276	27	10522340434016912555815592200
6	1230065529256	17	398473202728051866240455	28	22981219384244933833714845320
7	107596243502070	18	1444056634120161300980800	29	48732650369703458366693176190
8	4211451174320390	19	4837967675922080442661820	30	100551590839794044269580983260
9	93587003257817965	20	15120677865648707949404780	31	202262996847797314168390377006
10	1369774554353534000	21	44422233696058728842297901	32	397332030539062405243697495520
11	14563435429241618036	22	123461152881855183524140920	33	763443974381585962137301001215
12	120339318513596755080	23	326385142779817790030016690	34	1436809726154823576472236690240
13	811159526301180715500	24	824586619463468355168943450	35	2652009789259469210351275008200
14	4622785066683170729100	25	1998987172429753853782042245	36	9612583026731357679030550439672

Interpolando esses valores, de  $d = 6$  até  $d = 36$  obtemos o polinômio:

$$\begin{aligned}
p^{X(3)} = & (32805/32768)d^{20} - (70713/2048)d^{19} + (16690941/32768)d^{18} - (63179055/16384)d^{17} \\
& +(171041445/16384)d^{16} + (340464071/4096)d^{15} - (19016515479/16384)d^{14} \\
& +(489506566177/57344)d^{13} - (88131387221923/1474560)d^{12} \\
& +(38444983937263/86016)d^{11} - (6237575936529089/2064384)d^{10} \\
& +(50703028580607989/3096576)d^9 - (99216858926971/1440)d^8 \\
& +(28975766065397545/129024)d^7 - (10447218358379779/18432)d^6 \\
& +(23660045012232221/21504)d^5 - (130234823568440827/80640)d^4 \\
& +(5248282801642399/3024)d^3 - (185472445970471/144)d^2 \\
& +(16494974437019/28)d - 124769787080
\end{aligned}$$

O polinômio, por sorte, funciona para todos os valores  $d \geq 4$ .

## Capítulo 5

# Superfícies singulares ao longo de uma cônica e uma reta incidente

Neste capítulo abordaremos o caso de superfícies de grau  $d$ , com  $d \gg 0$ , que são singulares ao longo de uma cônica e uma reta passando por um ponto desta cônica em  $\mathbb{P}^3$ .

### 5.1 Configuração cônica e uma reta passando por um ponto da cônica

Inicialmente, veja que a família destas configurações tem dimensão 11. De fato, para escolhermos uma cônica temos que escolher um plano em  $\mathbb{P}^3$  e uma equação quadrática (módulo a equação deste plano). Isto pode ser traduzido formalmente do seguinte modo: sobre  $\mathbb{P}(\mathcal{F}_1)$ , onde  $\mathcal{F}_d$  é o fibrado trivial das formas de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$ , temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_1)}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

onde  $\mathcal{Q}$  é o fibrado quociente. Assim, a fibra  $\mathcal{Q}_f$  sobre um  $f \in \mathbb{P}(\mathcal{F}_1)$  coincide com o espaço vetorial  $\frac{\mathcal{F}_1}{\langle f \rangle}$ . Logo, a família das cônicas pode ser parametrizada por  $\mathbb{P}(\text{Sym}^2(\mathcal{Q}))$ , que é um  $\mathbb{P}^5$  – fibrado sobre  $\mathbb{P}(\mathcal{F}_1)$ . Portanto, a família das cônicas em  $\mathbb{P}^3$  tem dimensão 8. Como estamos sobre uma curva, temos mais um grau de liberdade a escolha de um ponto sobre ela. Além disso, a família das retas passando por um ponto tem dimensão 2. Daí, a família das configurações cônica e reta incidente em um ponto tem dimensão  $8+2+1=11$ .

Analogamente ao que fizemos nos capítulos anteriores, vamos introduzir coordenadas locais na família das configurações cônica e reta passando por um ponto desta cônica. Para isso, fixe uma bandeira incompleta  $\mathbb{B}_0$  em  $\mathbb{P}^3$

$$\mathbb{B}_0 : \underbrace{(x_0, x_1, x_2)}_{\text{ponto } p_0} \supset \underbrace{(x_0)}_{\text{plano } \pi_0} .$$

Considere  $\mathbb{B}_1$  como o  $\mathbb{P}^4$  dado pela família das cônicas em  $\pi_0$  que passam por  $p_0$  e  $\mathbb{B}_2$  como o  $\mathbb{P}^2$  das retas que passam por  $p_0$ . Assim temos que:

$$\mathbb{B}_1 = \{(x_0, a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3)\}$$

Já  $\mathbb{B}_2$  pode ser coberto por 3 abertos afins:

$$\mathcal{U}_{01} := \{(x_0 + a_5x_2, x_1 + a_6x_2)\}$$

$$\mathcal{U}_{02} := \{(x_0 + a_5x_1, x_2 + a_6x_1)\}$$

$$\mathcal{U}_{12} := \{(x_1 + a_5x_0, x_2 + a_6x_0)\}$$

## 5.2 Espaço de parâmetros

Exigir que uma superfície em  $\mathbb{P}^3$  seja singular ao longo de uma configuração cônica e reta passando por um ponto da cônica é equivalente a solicitar a pertinência do polinômio que define a superfície à intersecção dos quadrados dos ideais da cônica e da reta, por 1.1 e (DAO et al., 2017). Para entendermos melhor o espaço de parâmetros, analisemos a condição acima anteriormente mencionada em uma configuração particular. Sejam  $C := (x_0, x_1x_3 - x_2^2)$  a cônica e  $\ell := (x_1, x_2)$  a reta. Assim, uma superfície dada pelo anulamento de uma  $F$  forma de grau  $d$  é singular ao longo de  $C$  e  $\ell$  se, e só se,  $F$  pertence ao ideal

$$\begin{aligned} I &:= (x_0, x_1x_3 - x_2^2)^2 \cap (x_1, x_2)^2 \\ &= (x_2^4 - 2x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2, x_0x_2^3 - x_0x_1x_2x_3, x_0x_1x_2^2 - x_0x_1^2x_3, x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^2x_1^2) \end{aligned}$$

Veja que  $I$  é gerado por seis quárticas linearmente independentes. Logo,  $I_4$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial 6-dimensional. Além disso, como  $I$  tem polinômio de Hilbert igual a  $p(t) = 9t - 7$  e  $\text{reg}(I) = 4$  vale que  $I_d$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão  $\binom{d+3}{d} - (9d - 7)$ , para  $d \geq 4$ .

Passemos aos cálculos locais. Se olharmos no aberto afim, contido no  $\mathbb{P}^4$  das cônicas que passam por  $p_0$ , em que  $a_0 \neq 0$ , podemos escrever

$$C = (x_0, x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3)$$

Tomando o aberto  $U_{01}$  contido no  $\mathbb{P}^2$  das retas que passam por  $p_0$ , podemos escrever

$$\ell = (x_0 + a_5x_2, x_1 + a_6x_2)$$

Como já mencionado, uma superfície  $F$  é singular ao longo de  $C$  e  $\ell$  se, e só se,  $F$  pertence ao ideal

$$J := (x_0, x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3)^2 \cap (x_0 + a_5x_2, x_1 + a_6x_2)^2$$

O ideal acima é gerado por 7 quárticas, 2 quánticas e 1 sêxtica. Destas 7 quárticas, 3 já são L.I. Agora, formemos a matriz que coleta todos os coeficientes das 7 quárticas. Estudando o local de anulamento de todos os menores  $6 \times 6$  (mais uma vez está surgindo um ideal de Fitting) desta matriz, obtemos o local de queda do posto. Só que isto é um trabalho muito árduo, até mesmo no computador. Vamos buscar uma alternativa mais simples. Como já temos 3 quárticas independentes e estamos interessados em analisar quando o posto cai de 6, olhemos para a submatriz formada pelas linhas que não possuem pivô e calculemos o lugar de zeros dos menores  $3 \times 3$  dela. Então, tomando a decomposição primária deste ideal, obtemos as seguintes componentes irredutíveis:

$$\mathbb{Y}_1 := \mathbb{V}(a_5, a_2a_6 - a_4, a_1a_6 - a_6^2 - a_3)$$

$$\mathbb{Y}_2 := \mathbb{V}(a_5, a_4, a_2, a_1 - 2a_6, a_6^2 - a_3)$$

Vejamos uma descrição geométrica para essas duas variedades. Ao fazermos  $a_5 = 0$  temos que  $\ell \subset \pi_0$ . Além disso, fazendo

$$a_4 = a_2a_6 \text{ e } a_3 = a_1a_6 - a_6^2,$$

temos que:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3) \\ &= (x_0, x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + (a_1a_6 - a_6^2)x_2^2 + a_2a_6x_2x_3) \\ &= (x_0, (x_1 + (a_1 - a_6)x_2 + a_2x_3) \cdot (x_1 + a_6x_2)) \end{aligned}$$

Logo,  $\ell$  é uma componente de  $C$ . Temos ainda que  $\mathbb{Y}_1$  é isomorfo a um  $\mathbb{P}^2$ -fibrado sobre o  $\mathbb{P}^1$  das retas contidas no plano da bandeira passando pelo ponto fixado.

Analogamente, já sabemos que  $a_5 = 0$  traduz a relação de continência da reta no plano fixado da bandeira. Ademais, fazendo

$$a_2 = a_4 = a_5 = 0, a_1 = 2a_6 \text{ e } a_3 = a_6^2$$

temos que:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_3x_2^2 + a_4x_2x_3) \\ &= (x_0, x_1^2 + 2a_6x_1x_2 + a_6^2x_2^2) \\ &= (x_0, (x_1 + a_6x_2)^2) \end{aligned}$$

Portanto, a cônica se transforma na reta dupla no plano da bandeira fixada. Ou seja,  $\mathbb{Y}_2$  é isomorfo a um  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{Y}_2$ .

Assim, temos um mapa racional  $\varphi : \mathbb{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ , com local de base  $\mathbb{Y} := \mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2$ . De forma similar ao capítulo anterior, temos uma fatoração interessante. Para obtermos

o mapa  $\varphi$  poderíamos, inicialmente, ter passado pela Grassmanniana de 3 quádricas e só depois irmos para a Grassmanniana de 6 quárticas. Seja  $\theta : \mathbb{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$  o mapa dado por  $\theta(\ell, C) := (\ell \cap C)_2$ . Tendo as 3 quádricas oriundas da imagem de  $\theta$ , quadraríamos este ideal e cairíamos na Grassmanniana de 6 quárticas. Veja que

$$\ell \cap C = (\text{quad}_1, \text{quad}_2, \text{quad}_3, \text{cub}),$$

onde

$$\text{quad}_1 := x_0x_1 + a_6x_0x_2$$

$$\text{quad}_2 := x_0^2 + a_5x_0x_2$$

$$\begin{aligned} \text{quad}_3 := & a_5x_1^2 + (-a_1a_6 + a_6^2 + a_3)x_0x_2 + a_1a_5x_1x_2 + a_3a_5x_2^2 + (-a_2a_6 + a_4)x_0x_3 \\ & + a_2a_5x_1x_3 + a_4a_5x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cub} := & x_1^3 + (a_1 + a_6)x_1^2x_2 + (a_1a_6 + a_3)x_1x_2^2 + a_3a_6x_2^3 + a_2x_1^2x_3 \\ & + (a_2a_6 + a_4)x_1x_2x_3 + a_4a_6x_2^2x_3 \end{aligned}$$

Note que deixamos de ter 3 quádricas L.I justamente quando  $\text{quad}_3 = 0$ , ou seja, ao longo do ideal  $\text{indet}$ , onde agora

$$\begin{aligned} \text{indet} & := (a_5, -a_1a_6 + a_6^2 + a_3, a_1a_5, a_3a_5, -a_2a_6 + a_4, a_2a_5, a_4a_5) \\ & = (a_5, a_2a_6 - a_4, a_1a_6 - a_6^2 - a_3). \end{aligned}$$

Ou seja,  $\text{indet}$  é justamente o ideal de  $\mathbb{Y}_1$ . Seja  $\mathbb{X}(1)$  a explosão de  $\mathbb{X}$  ao longo de  $\mathbb{Y}_1$ . Denotemos por  $\text{quad}_{3,f}$  o transformado total de  $\text{quad}_3$  em  $\mathbb{X}(1)$ , onde  $f$  é uma das direções normais de  $\mathbb{Y}_1$ . Além disso, denotemos por  $\widetilde{\text{quad}}_{3,f}$  o seu transformado estrito. Apenas com o intuito de exemplificar, se olharmos na direção normal do  $a_5$ , ou seja, na vizinhança aberta afim em que o divisor excepcional é dado por  $a_5 = 0$ , vale que:

$$a_4 = a_2a_6 - b_4a_5 \quad \text{e} \quad a_3 = a_1a_6 - a_6^2 - b_3a_5$$

Substituindo essas relações na equação de  $\text{quad}_3$  e dividindo-a pela maior potência do excepcional, obtemos que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{quad}}_{3,a_5} & := x_1^2 - b_3x_0x_2 + a_1x_1x_2 + (a_1a_6 - a_6^2 - a_5b_3)x_2^2 - b_4x_0x_3 + a_2x_1x_3 \\ & \quad + (a_2a_6 - a_5b_4)x_2x_3 \end{aligned}$$

Veja que, na origem, o ideal das três quádricas é exatamente  $(x_0x_1, x_0^2, x_1^2)$ , que é o quadrado do ideal  $(x_0, x_1)$ . Tendo as três quádricas, basta quadrarmos o ideal gerado por estas três quádricas e, assim, obtermos as 6 quárticas. Novamente, como no capítulo passado, só teremos 6 quárticas se o ideal formado por estas quádricas não for o quadrado do ideal de uma reta.

Para pegarmos o embalo, no exemplo citado, ao quadrarmos o ideal  $(\text{quad}_1, \text{quad}_2, \widetilde{\text{quad}}_{3,a_5})$  veremos que deixamos de ter 6 quárticas L.I justamente ao longo do ideal

$$\text{indet2} := (b_4, b_3, a_5, a_2, a_1 - 2a_6).$$

Seja  $\mathbb{X}(2)$  explosão de  $\mathbb{X}(1)$  ao longo de  $\mathbb{Y}_3$ , onde  $\mathbb{Y}_3$  é a variedade determinada por  $\text{indet2}$ . Olhando nas 5 direções normais de  $\text{indet2}$  e efetuando os cálculos locais, não é difícil ver que a explosão nos fornece as prometidas 6 quárticas L.I em todas as direções normais. Isto termina a construção do fibrado de quárticas que são singulares ao longo da configuração cônica e reta (com a condição da reta passar por um ponto desta cônica). Para grau 5 e 6, basta fazermos o produto 2 a 2, das cônicas e cúbicas, e assim obter quárticas e sêxticas. Para  $d \geq 7$ , basta completarmos o grau.

### 5.3 Fórmula de Bott

Como nos casos anteriores, considere a ação diagonal do toro  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$  sobre  $(\mathbb{C}^n)^\vee$  dada por

$$t \circ x_i := t^{w_i} x_i,$$

onde

$$w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 3 \text{ e } w_3 = 7.$$

Esta ação induz uma ação canônica sobre o  $\mathbb{P}^4$  das cônicas passando por um ponto e sobre o  $\mathbb{P}^2$  das retas que passam pelo ponto. Portanto, induz uma ação sobre a família  $\mathbb{X}$  das configurações cônica e reta, com reta incidindo a cônica em um ponto. Daí, induz também uma ação sobre  $\mathbb{X}(2)$  com pontos fixos isolados, de modo que o fibrado  $\mathcal{E}_d$  é  $\mathbb{T}$ -equivariante, para  $d \geq 4$ , onde  $\widetilde{\Sigma}(\mathbb{X}(2), d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ .

Com a bandeira parcial  $\mathbb{B}_0$  fixada temos 15 pontos fixos:  $((x_0, x_{i_1} \cdot x_{i_2}), (x_{j_1}, x_{j_2}))$ , onde  $i_1 \in \{1, 2\}$ ,  $i_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j_1 \in \{0, 1\}$ ,  $j_2 \in \{1, 2\}$ ,  $i_1 \leq i_2$  e  $j_1 < j_2$ . Além disso:

- 6 destes pontos estão sobre  $\mathbb{Y}_1$ :  $((x_0, x_i x_j), (x_0, x_i))$ , com  $i \in \{1, 2\}$  e  $j \in \{1, 2, 3\}$ .
- 2 destes pontos estão sobre  $\mathbb{Y}_2$ :  $((x_0, x_i^2), (x_0, x_i))$ , com  $i \in \{1, 2\}$ .

Sendo assim, 9 pontos estão fora dos centros de explosão. Como já foi mencionado na seção anterior, é fácil descobrirmos as quárticas sobre os pontos fora do centro de explosão. Para aplicarmos a Fórmula de Bott, falta termos a representação do espaço tangente em função dos pesos. Isso também não é difícil. De fato, o espaço tangente no ponto fixo  $((x_0, x_{i_1} x_{i_2}), (x_{j_1}, x_{j_2}))$ , onde  $i_1 \in \{1, 2\}$ ,  $i_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j_1 \in \{0, 1\}$ ,  $j_2 \in \{1, 2\}$ ,  $i_1 \leq i_2$  e  $j_1 < j_2$ , é:

$$\frac{x_1^2}{x_{i_1} x_{i_2}} + \frac{x_1 x_2}{x_{i_1} x_{i_2}} + \cdots + \frac{\widehat{x_{i_1} x_{i_2}}}{x_{i_1} x_{i_2}} + \frac{x_2 x_3}{x_{i_1} x_{i_2}} + \frac{x_k}{x_{j_1}} + \frac{x_k}{x_{j_2}}$$

( $k \neq j_1, k \neq j_2$  e  $k \in 0, 1, 2$ ).

Agora vamos para a descrição dos espaços tangentes dos pontos fixos em  $\mathbb{X}(1)$ . Sobre cada um dos 6 pontos fixos em  $\mathbb{Y}_1$  aparecerão 3 pontos fixos em  $\mathbb{X}(1)$ , totalizando 18. No entanto, em apenas 2 deles o problema não ficará totalmente resolvido e precisaremos ir para  $\mathbb{X}(2)$ . Apenas com o intuito de exemplificar e elucidar o processo, chamemos de  $p_0 = ((x_0, x_1^2), (x_0, x_1))$ . Temos:

$$\mathcal{T}_{p_0}(\mathbb{X}) = \frac{x_1x_2}{x_1^2} + \frac{x_1x_3}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1}$$

Veja que em  $\mathbb{Y}_1$  as equações de  $p_0$  são  $a_1 = a_2 = a_6 = 0$ , donde:

$$\mathcal{T}_{p_0}(\mathbb{Y}_1) = \frac{x_1x_2}{x_1^2} + \frac{x_1x_3}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1}$$

Assim, utilizando a sequência exata do fibrado tangente, (HARTSHORNE, 1977), podemos concluir que

$$\mathcal{N}_{p_0}(\mathbb{Y}_1|\mathbb{X}) = \underbrace{\frac{x_2^2}{x_1^2}}_{a_3 - a_1a_6 + a_6^2} + \underbrace{\frac{x_2x_3}{x_1^2}}_{a_4 - a_2a_6} + \underbrace{\frac{x_2}{x_0}}_{a_5}.$$

Isso nos diz que a escolha da primeira direção normal é equivalente a olharmos para a vizinhança afim em que  $a_3 - a_1a_6 + a_6^2 = 0$  é a equação local do excepcional em  $\mathbb{X}(1)$ . A única vizinhança onde as três quádricas não são o quadrado do ideal de uma reta é naquela em que o excepcional tem equação local dada por  $a_5 = 0$ . Isto nos diz que sobre o ponto  $\left(p_0, \frac{x_2}{x_0}\right)$  teremos 5 pontos fixos em  $\mathbb{X}(2)$ , cada um correspondente a uma escolha da direção normal do ideal  $(b_4, b_3, a_5, a_2, a_1 - 2a_6)$ . Para descobriremos o tangente de  $\mathbb{X}(1)$  em  $\left(p_0, \frac{x_2}{x_0}\right)$  basta lembrarmos que o tangente da explosão é o tangente do centro de explosão em  $p_0$  somado com o tangente do excepcional e com  $\mathcal{L}\left(\frac{x_2}{x_0}\right)$ , onde  $\mathcal{L}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) \subset \mathcal{N}_{p_0}(\mathbb{Y}_1|\mathbb{X})$  denota o subespaço unidimensional representado pelo ponto, ou seja,  $\left\langle \frac{x_2}{x_0} \right\rangle$ . Além disso, lembre que o excepcional é a projetivização do normal. Assim, por 2.3, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\left(p_0, \frac{x_2}{x_0}\right)}(\mathbb{X}(1)) &= \frac{x_1x_2}{x_1^2} + \frac{x_1x_3}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{\frac{x_2^2}{x_1^2}}{\frac{x_2}{x_0}} + \frac{\frac{x_2x_3}{x_1^2}}{\frac{x_2}{x_0}} \\ &= \underbrace{\frac{x_1x_2}{x_1^2}}_{\mathcal{T}_{\left(p_0, \frac{x_2}{x_0}\right)}(\mathbb{Y}_3)} + \underbrace{\frac{x_1x_3}{x_1^2}}_{a_2} + \underbrace{\frac{x_2}{x_1}}_{a_6} + \underbrace{\frac{x_2}{x_0}}_{a_5} + \underbrace{\frac{x_0x_2}{x_1^2}}_{b_4} + \underbrace{\frac{x_0x_3}{x_1^2}}_{b_3}, \end{aligned}$$

onde a primeira parcela da decomposição coincide com o tangente do segundo centro de explosão e as demais parcelas compõem o normal. Repetindo o processo acima nas 5 direções normais mencionadas, obtemos os tangentes dos pontos fixos em  $\mathbb{X}(2)$ .

Assim, estamos prontos para aplicarmos a fórmula dos resíduos de Bott e calcularmos o grau desejado. Por Cuadrado, em 1.3, como  $\dim(\mathbb{X}(2)) = 11$ , segue-se que

$$\deg \Sigma(\mathbb{X}(2), d) \cdot \deg(\varphi) = \int_{\mathbb{X}(2)} s_{11}(\mathcal{E}_d) \Rightarrow \deg \Sigma(\mathbb{X}(2), d) = \int_{\mathbb{X}(2)} s_{11}(\mathcal{E}_d),$$

para  $d \geq 4$ , pois  $\deg(\varphi) = 1$ .

Já vimos, em 1.6, que a função que nos fornece o grau é polinomial de grau no máximo  $3 \cdot \dim(\mathbb{X}(2)) = 33$ . Logo, para determinarmos este polinômio basta conhecermos 34 valores. Usando Bott para calcularmos esses valores de  $d = 6$  até  $d = 39$  e depois interpolando-os obtemos o polinômio:

$$\begin{aligned} p^{\mathbb{X}(2)}(d) = & (150903/573440)d^{22} - (356481/32768)d^{21} + (58279419/286720)d^{20} \\ & - (2539565001/1146880)d^{19} + (244463967/16384)d^{18} - (33264249659/573440)d^{17} \\ & + (30523753733/430080)d^{16} + (905692649549/1720320)d^{15} \\ & - (464078845833/81920)d^{14} + (144390654783829/2064384)d^{13} \\ & - (2082086057151421/2580480)d^{12} + (2297992877337490019/340623360)d^{11} \\ & - (90862468619265953/2211840)d^{10} + (20899941386874785/110592)d^9 \\ & - (434593334348934133/645120)d^8 + (1215504437780120183/645120)d^7 \\ & - (29691103906966969/7168)d^6 + (858860401952961731/120960)d^5 \\ & - (80439457550353513/8640)d^4 + (272797278897422653/30240)d^3 \\ & - (15320758909072027/2520)d^2 + (195372422045898/77)d - 491256546000 \end{aligned}$$

Bem afortunado que é, o polinômio funciona para todos os valores  $d \geq 4$ .

## Referências

- ALTMAN, A. B.; KLEIMAN, S. L. Foundations of the theory of fano schemes. **Compositio Mathematica**, v. 34, n. 1, p. 3–47, 1977. 16
- ALUFFI, P. Characteristic classes of discriminants and enumerative geometry. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 26, n. 10, p. 3165–3193, 1998. 9
- ARAÚJO, A. L. M. **Aplicações da Fórmula de Bott a Geometria Enumerativa**. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. URL <http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Tese019.pdf>.63, 2009. 17
- CAPORASO, L.; HARRIS, J. Counting plane curves of any genus. **arXiv preprint alg-geom/9608025**, 1996. 9
- \_\_\_\_\_. Enumerating rational curves: the rational fibration method. **Compositio Mathematica**, London Mathematical Society, v. 113, n. 2, p. 209–237, 1998. 9
- CUADRADO, V. **Enumerative Aspects of Holomorphic Foliations**. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. URL <https://www.mat.ufmg.br/posgrad/wp-content/uploads/TesesDissertacoes/Tese024.pdf>, 2010. 14
- CUKIERMAN, F.; LOPEZ, A.; VAINSENCHE, I. Enumeration of surfaces containing an elliptic quartic curve. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 142, n. 10, p. 3305–3313, 2014. 14
- DAO, H.; STEFANI, A. D.; GRIFO, E.; HUNEKE, C.; NÚÑEZ-BETANCOURT, L. Symbolic powers of ideals. In: **Singularities and foliations. geometry, topology and applications**. [S.l.]: Springer, 2015. p. 387–432. 13
- DAO, H.; STEFANI, A. D.; GRIFO, E.; HUNEKE, C.; NÚÑEZ-BETANCOURT, L. Symbolic powers of ideals. **arXiv preprint arXiv:1708.03010**, 2017. 13, 37, 49, 60
- EISENBUD, D. **The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2004. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387222158; 0387222154; 0387222324; 9780387222325. 28, 35, 48
- \_\_\_\_\_. **Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 150. 13
- EISENBUD, D.; HARRIS, J. **Curves in Projective Space**, Les Presses de l'Université de Montreal. [S.l.]: Montreal, 1982. 20

ELLINGSRUD, G.; STRØMME, S. Bott's formula and enumerative geometry. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 9, n. 1, p. 175–193, 1996. 17

FULTON, W. **Intersection Theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984. ISBN 9783540121763. 23, 27

HARTSHORNE, R. **Algebraic geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1977. v. 52. 14, 15, 27, 56, 57, 64

HOCHSTER, M. Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 133, n. 1, p. 53–65, 1973. 13

LEFSCHETZ, S. On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties. **Transactions of the American mathematical Society**, JSTOR, v. 22, n. 3, p. 327–406, 1921. 9

LI, A.; SWANSON, I. Symbolic powers of radical ideals. **The Rocky Mountain Journal of Mathematics**, JSTOR, p. 997–1009, 2006. 13

MAIA, J. A. D. **Geometria enumerativa de variedades projetivas contendo retas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. URL <https://www.mat.ufmg.br/posgrad/wp-content/uploads/TesesDissertacoes/Tese026.pdf>, 2010. 20, 21

NAGATA, M. Local rings. **Interscience Tracts in Pure and Appl. Math.**, Wiley, 1962. 12

RAN, Z. Enumerative geometry of singular plane curves. **Inventiones mathematicae**, Springer-Verlag, v. 97, n. 3, p. 447–465, 1989. 9

RENNEMO, J. Universal polynomials for tautological integrals on hilbert schemes. **Geometry & Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 21, n. 1, p. 253–314, 2017. 9

SELLIN, W. D. **Enumeração de hipersuperfícies com subesquemas singulares**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. URL <https://www.mat.ufmg.br/posgrad/wp-content/uploads/TesesDissertacoes/Tese117.pdf>, 2018. 9

SELLIN, W. D.; VAINSENER, I. Enumeration of hypersurfaces with prescribed non isolated singular subschemes. **Matemática Contemporânea**, v. 47, p. 271–300, 2020. 9

VAINSENER, I. Counting divisors with prescribed singularities. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 267, n. 2, p. 399–422, 1981. 9

\_\_\_\_\_. Hypersurfaces with up to six double points. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 31, n. 8, p. 4107–4129, 2003. 9

\_\_\_\_\_. Foliations singular along a curve. **Transactions of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 80–92, 2015. 10

ZARISKI, O. A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Springer, v. 29, n. 1, p. 187–198, 1949. 12