

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Alan Augusto Silva Sousa

**SEGREGAÇÃO ESPACIAL E FORMAÇÃO DE DISTRITOS
COMERCIAIS: Um modelo baseado em agentes**

Belo Horizonte
2025

Alan Augusto Silva Sousa

**SEGREGAÇÃO ESPACIAL E FORMAÇÃO DE DISTRITOS
COMERCIAIS: Um modelo baseado em agentes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Lucas Lages Wardil

Belo Horizonte

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S725s Sousa, Alan Augusto Silva.
Segregação espacial e formação de distritos comerciais: um modelo baseado em agentes / Alan Augusto Silva Sousa. – 2025.
68 f. : il.

Orientador: Lucas Lages Wardil.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 60-63.

1. Sistemas complexos. 2. Centros urbanos. 3. Modelagem computacional.
I. Título. II. Wardil, Lucas Lages. III. Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

CDU – 519.713 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada "**Organização espacial e a formação de distritos comerciais: um modelo baseado em agentes**" de autoria de **ALAN AUGUSTO SILVA SOUSA** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA, área de concentração Física**, em 14 de março de 2025.

Belo Horizonte, 14 de março de 2025.

Prof. Lucas Lages Wardil

Orientador do Estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Emmanuel Araújo Pereira
Departamento de Física/UFMG

Prof. Júlio Cesar Siqueira Rocha
Departamento de Física/UFOP



Documento assinado eletronicamente por **Júlio Cesar Siqueira Rocha, Usuário Externo**, em 19/03/2025, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lucas Lages Wardil, Professor do Magistério Superior**, em 19/03/2025, às 12:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Emmanuel Araujo Pereira, Membro de comissão**, em 19/03/2025, às 14:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4039445** e o código CRC **9FC692D8**.

Agradecimentos

Sou infinitamente grato à minha mãe Joana D'arc, ao meu pai Wicente de Paulo e à minha irmã Ana Paula. Sem o suporte e cuidado da minha família, toda a minha jornada seria impossível. Foi graças às suas influências que me tornei quem sou hoje.

Também sou grato ao meu orientador Lucas Wardil, que sempre foi muito prestativo e dedicado. Agradeço por todas as dúvidas tiradas, o conhecimento compartilhado e as conversas sobre temas que vão além do nosso trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos, que tornaram minha trajetória muito mais rica, completa e feliz. O carinho de todos me marcou profundamente. Em especial, quero agradecer: Bela, Bernardo, Daniel Aguiar, Daniel Mayer, Erik, Felipe, Gustavo, Helena, Ítalo, João Antonio, João Felipe, Lucas Liberal, Lucca, Maria Júlia, Marina, Melissa, Rafael, Sângela, Thaiza e Weder. Estes que me ajudaram, mesmo sem saber, a superar inúmeros desafios durante minha caminhada. Espero mantê-los sempre comigo.

Agradeço também a todos os meus professores, que tornaram possível a minha formação, me ensinaram sobre diversos temas e me mostraram a beleza da complexidade da realidade.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Esta dissertação investiga a organização espacial de agentes (comerciantes e residentes) em cidades utilizando modelagem baseada em agentes, inspirada na Teoria do Lugar Central de Christaller e nos modelos de Schelling e de Grauwin et al. O objetivo principal é analisar como a busca por maximização da utilidade individual dos agentes pode gerar padrões espaciais semelhantes aos observados em centros urbanos reais, como a formação de distritos comerciais (Central Business District — CBD). Para isso, a cidade foi representada por uma rede bidimensional dividida em blocos, onde os agentes se movem conforme regras probabilísticas que dependem de funções utilidade individuais. O modelo simula dinâmicas como a migração de residentes para evitar aglomerações e a concentração de comerciantes em áreas com densidade mínima de agentes. Analisamos como essas interações levam à formação de padrões espaciais organizados. Os resultados mostram que, mesmo com regras simples, o modelo reproduz características qualitativas da segregação espacial e da formação de aglomerações comerciais observadas em cidades reais, contribuindo para a compreensão das dinâmicas urbanas sob a perspectiva de sistemas complexos.

Palavras-chave: Sistemas complexos, dinâmica urbana, modelagem baseada em agentes.

Abstract

This dissertation investigates the spatial organization of agents (merchants and residents) in cities using agent-based modeling, inspired by Christaller's Central Place Theory and the models of Schelling and Grauwil et al. The main objective is to analyze how agents' pursuit of individual utility maximization can generate spatial patterns similar to those observed in real urban centers, such as the formation of Central Business Districts (CBDs). For this purpose, the city was represented as a two-dimensional grid divided into blocks, where agents move according to probabilistic rules based on individual utility functions. The model simulates dynamics such as residents migrating to avoid overcrowding and merchants concentrating in areas with a minimum density of agents. We analyze how these interactions lead to the formation of organized spatial patterns. The results show that, even with simple rules, the model reproduces qualitative characteristics of spatial segregation and the formation of commercial clusters observed in real cities, contributing to the understanding of urban dynamics from a complex systems perspective.

Keywords: Complex systems, urban dynamics, agent-based modeling.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	O PROBLEMA DA GEOGRAFIA: DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL DE COMÉRCIO	12
3	REVISÃO DA LITERATURA	16
3.1	Modelos físicos em ciências das cidades	16
3.2	Modelo de Schelling	20
3.3	Modelo de Grauwin et al.	23
3.3.1	Análise matemática do modelo de Grauwin	25
4	SEGREGAÇÃO ESPACIAL DE COMERCIANTES	29
4.1	Definição do modelo	29
4.1.1	Algoritmo de evolução do sistema	32
4.2	Resultados	33
4.2.1	Modelo com residentes com função degrau	33
4.2.1.1	Segregação espacial	33
4.2.1.2	Medida de heterogeneidade	37
4.2.1.3	Análise do Δ	42
4.2.1.4	Satisfação dos agentes	44
4.2.2	Variação: residente intolerante a extremos	46
4.2.3	Variação: comerciante não é cliente	49
5	DISCUSSÃO	52
5.1	Impossibilidade da criação de uma função $V(x)$	52
5.2	Espacialidade do modelo	54
5.3	Aspectos da modelagem	56
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA FUNÇÃO LIGAÇÃO	64
	APÊNDICE B – MAPAS DE CALOR DO ÍNDICE DE HETEROGENEIDADE	66

APÊNDICE C – ENTROPIA	67
---------------------------------	----

1 Introdução

Sistemas complexos representam um campo do conhecimento interdisciplinar que tem como objetivo o estudo de como interações locais geram padrões coletivos emergentes, que são difíceis de prever pela análise das partes. Emergência se refere ao aparecimento de padrões ou certas características de um sistema conforme seus componentes interagem. Exemplos incluem ecossistemas, sistemas biológicos, o clima terrestre, sistemas de infraestrutura e transporte, redes sociais, mercados financeiros, entre outros. Em especial, podemos destacar a cidade como um sistema complexo, definida por Jane Jacobs em sua clássica obra “Morte e Vida de Grandes Cidades” como um problema de complexidade organizada [1].

Sistemas complexos podem ser analisados com ferramentas da física estatística, como modelagem por processos estocásticos, autômatos celulares e modelos baseados em agentes, sendo este último especialmente adequado para análises estatísticas por meio de métodos de Monte Carlo. Um exemplo clássico é o modelo de segregação de Schelling [2], que mostra como uma população com estrutura espacial, composta por dois tipos de indivíduos, pode se segregar quando os indivíduos são intolerantes ao tipo diferente até mesmo quando a tolerância não é baixa. Esse tipo de abordagem permite o estudo de outros tópicos sobre organização e dinâmica urbana. Neste trabalho, investigaremos a organização espacial do comércio por meio dessa metodologia.

Nosso trabalho utiliza conceitos da geografia urbana a fim de construir um modelo que, através de regras simples fundamentadas na Teoria do Lugar Central de Christaller, é capaz de demonstrar a formação de centros comerciais que se assemelham qualitativamente ao distrito financeiro das cidades — em inglês, a região é denominada *Central Business District* (CBD). O sistema de Christaller assume que o espaço em que estão os lugares centrais, que são pontos onde são fornecidos bens e serviços, é homogêneo e isotrópico e que as cidades neles localizadas possuem um alcance para os bens que fornecem, isto é, uma zona de mercado que é suprida pela cidade, e um limiar, um número mínimo de clientes para se sustentar economicamente. Esses conceitos podem ser também associados a estabelecimentos comerciais. Adaptando esses conceitos para nosso modelo, investigamos como eles são capazes de gerar uma configuração espacial de aglomeração de comerciantes.

Utilizando um modelo baseado em agentes, dividimos uma cidade em blocos, que podem ser ocupados por agentes, estes que podem ser de dois tipos: comerciantes e residentes. Cada um dos agentes sabe qual é a densidade do bloco em que está. A depender dessa propriedade do bloco, o agente estabelece seu nível de satisfação, que determina se

ele permanecerá ou mudará de bloco. A dinâmica de mudança é determinada pela diferença entre a satisfação obtida no bloco atual e a que ele obteria caso se mudasse para um novo bloco. Se a mudança for positiva, o agente se muda para o novo bloco. O trabalho também explora como alterações na função que descreve a satisfação dos agentes como função da densidade dos blocos podem modificar a organização final dos agentes na cidade e a dinâmica do sistema. Um problema interessante que surge na análise da segregação entre os tipos de agentes que surge no sistema é a definição de medidas para quantificar o grau de segregação da população. Neste trabalho analisamos algumas medidas.

Este trabalho é dividido em seis capítulos, incluindo esta introdução. O capítulo 2 expõe o problema da organização espacial do comércio e descreve conceitos da geografia urbana pertinentes para a elaboração do nosso modelo e para a interpretação dos seus resultados. No capítulo 3, fazemos uma revisão da literatura sobre modelos da chamada “ciência das cidades” e descrevemos com maior profundidade os modelos que serviram como base para o nosso trabalho: o modelo de Schelling e o de Grauwin et al. No capítulo 4, descrevemos o nosso modelo, suas variações e principais resultados. O capítulo 5 é dedicado a discussões importantes sobre algumas características do nosso modelo e termina com uma discussão sobre o processo da própria modelagem. O capítulo final exprime as principais conclusões do trabalho e as perspectivas futuras que ele oferece.

2 O problema da geografia: distribuição espacial de comércio

A organização espacial das atividades comerciais em uma cidade é um tema central na geografia urbana, pois afeta diretamente a dinâmica das cidades, a acessibilidade dos consumidores e a eficiência econômica. Compreender como o comércio se distribui no espaço é fundamental para o planejamento das cidades.

Uma das abordagens desse campo é a Teoria do Lugar Central (*Central Place Theory*), desenvolvida na década de 1930 pelo geógrafo alemão Walter Christaller e, posteriormente, refinada por August Lösch, economista alemão. A teoria trata do número, tamanho, características funcionais e espaçamento entre pontos de distribuição de bens e serviços para áreas próximas, como cidades e estabelecimentos comerciais.

A Teoria de Lugar Central Clássica se baseia em várias simplificações. Ela assume que uma dada região seja homogênea e isotrópica, isto é, o custo de transporte entre dois pontos distintos depende apenas da distância entre eles. Além disso, a população e a renda são igualmente distribuídas na região. A partir dessas hipóteses, a teoria de Christaller introduz dois conceitos associados aos lugares centrais: o alcance e o limiar. O alcance refere-se à distância máxima que um consumidor está disposto a percorrer para acessar determinado produto ou serviço; o limiar refere-se ao número mínimo necessário de clientes para sustentar sua atividade comercial [3]. A figura 1 ilustra esses dois conceitos.

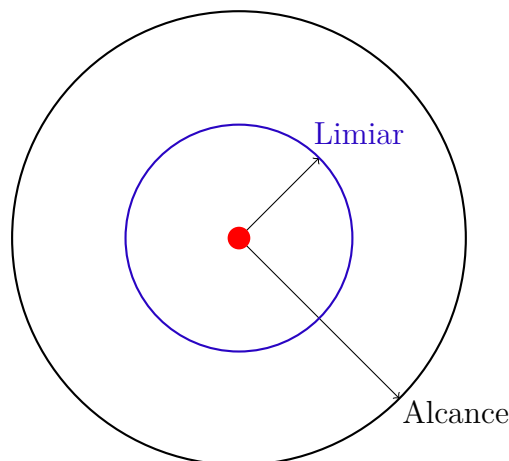


Figura 1 – Esquema das duas variáveis econômicas de um lugar central. O seu alcance engloba todos os seus possíveis consumidores, o limiar mostra a quantidade mínima necessária para se sustentar economicamente.

O sistema de Christaller assume que existe uma hierarquia de N diferentes bens $g = (1, 2, \dots, N)$ e de N níveis de área de mercado $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$. A cada bem está associada uma área de mercado, que é o espaço abrangido pelo alcance do bem, e,

por consequência, pelo estabelecimento que o comercializa, que é maior quanto mais alta é a classificação do bem na hierarquia. O bem de nível n possui área de mercado m_n . O modelo de Christaller também assume que a razão entre a área de mercado, m_n , de um produto de nível n e a área de mercado m_{n-1} do produto imediatamente abaixo na hierarquia, com nível $n - 1$, é constante:

$$\frac{m_n}{m_{n-1}} = k. \quad (2.1)$$

Essa razão é válida para todos os níveis da hierarquia, com exceção do nível $n = 1$, por ser o nível mais baixo.

Christaller então propôs que cada lugar central teria uma classificação $u = (1, 2, \dots, N)$. Caso um lugar central fosse de classificação 3, então este seria capaz de fornecer bens de nível 1, 2 e 3. De fato, o trabalho de Christaller foi mais baseado em observações da realidade do que em uma construção teórica segundo primeiros princípios. De modo que o padrão final de seu modelo, redes hexagonais regulares, que podem formar padrões hierárquicos entre si, surgiu por meio de suas observações e com o objetivo de construir um padrão espacial de lugares centrais que pudesse fornecer todos os bens para todos os pontos e que minimizasse o número de pontos de fornecimento [4].

O sistema urbano de Christaller se configura como a superposição de diversas redes hexagonais regulares de diferentes tamanhos. As redes maiores possuem menor concentração de pontos no espaço, elas representam lugares centrais que fornecem bens de maior ordem, ou seja, possuem maior alcance e são menos numerosos. As redes menores indicam lugares centrais de pequeno alcance, com bens e serviços mais comuns, de baixa ordem. O padrão final se configura como uma hierarquia de redes hexagonais aninhadas. A figura 2 ilustra esse resultado.

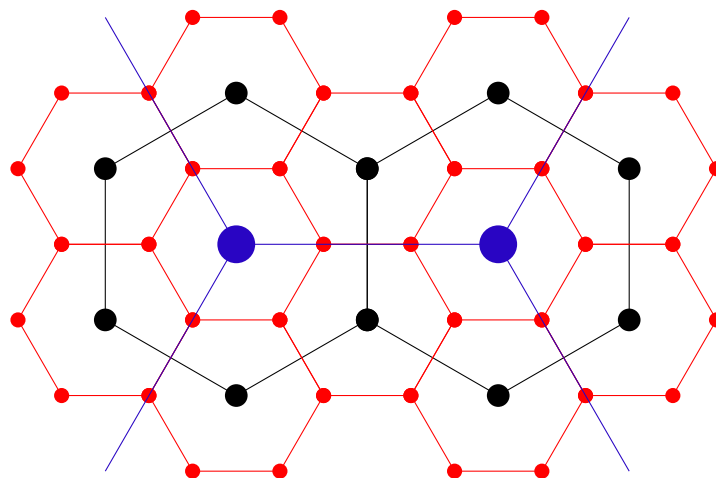


Figura 2 – Esquema da configuração final do sistema urbano de Christaller. Os pontos vermelhos, pretos e azuis representam lugares centrais em ordem crescente de alcance. Essa estrutura mostra uma hierarquia entre os níveis de lugares centrais.

Essa configuração serve todos os consumidores com o menor número de centros, denominado princípio de mercado. Cada lugar central de dado grau abrange um espaço delimitado pelos seus seis vizinhos de grau imediatamente inferior (por exemplo, o alcance do lugar central azul, na figura 2, é delimitado pelo hexágono preto que o circunda, que tem como vértices os lugares centrais de grau imediatamente inferior ao seu, os lugares centrais pretos). De modo que o lugar central azul abrange com seu alcance uma região três vezes maior do que aquela alcançada pelos lugares centrais pretos, que, por sua vez, possuem o alcance delimitado pelos seus vizinhos de grau imediatamente inferior, os lugares centrais vermelhos. Assim, o valor da razão da equação 2.1 da configuração, que se dá segundo o princípio de mercado, é $k = 3$. Para outros princípios, a saber, o princípio de transporte — minimização da distância entre os vários centros — e o princípio administrativo — minimização do número de centros de ordem superior que administram os de ordem inferior — o valor da razão das áreas atingidas pelos lugares centrais, para o princípio de transporte, é $k = 4$ e para o princípio administrativo, é $k = 7$. O arranjo dos locais centrais para esses dois outros sistemas é ilustrado na figura 3. Todos esses padrões podem, inclusive, se sobrepor, formando um emaranhado de redes que descrevem as posições de diferentes tipos de estabelecimentos, seguindo distintos princípios.

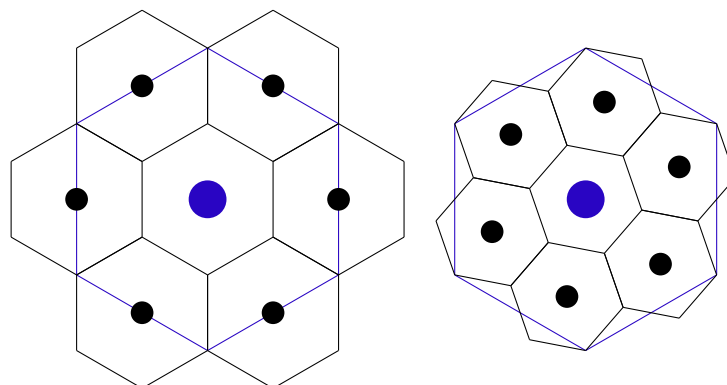


Figura 3 – Arranjo dos lugares centrais segundo a teoria de Christaller para o princípio de transporte, esquema à esquerda, e para o princípio administrativo, esquema à direita. Os círculos pretos e azuis representam lugares centrais em ordem crescente de hierarquia. Os lugares centrais azuis e pretos têm como alcance os hexágonos de cor azul e preta, respectivamente.

Por ser um modelo determinista, obtém-se um resultado estático baseado em suposições rígidas e constantes, o que o torna limitado, impossibilitando a descrição da dinâmica do espaço urbano. Além disso, a teoria é voltada para a descrição dos padrões e não para sua explicação. Para solucionar essas limitações, adaptações para incluir fatores como densidade de população não uniforme, variações de renda, custos de transporte e comportamentos de consumidores e empresas foram propostas e analisadas. Em suma, a utilidade de modelos de lugar central se dá no sucesso da aplicação dos mesmos na análise dos padrões espaciais de serviços do setor público e privado no ambiente intra-citadino, sendo o mais comum e talvez o mais bem-sucedido o setor de varejo [3].

Outro conceito importante para compreender a organização espacial do comércio é o distrito financeiro — em inglês, a região é denominada *Central Business District* (CBD). Apesar de nuances na sua definição e das variações morfológicas entre diferentes CBDs, é geralmente aceito que o CBD é caracterizado pela alta concentração de serviços de alta ordem, como varejo, escritórios e funções municipais. É nessa região que estão as ruas de comércio e prédios públicos principais.

A literatura sugere que os principais motivos do agrupamento dessas atividades em um só lugar são a acessibilidade única da região, que fica no centro da rede de transporte, e as vantagens econômicas inerentes ao agrupamento de diversos serviços, que se complementam [5]. A concentração dos serviços de alta ordem eleva o preço dos aluguéis da localidade, o que também influencia a organização da cidade.

A evolução espacial do CBD depende da economia espacial da cidade e do seu planejamento urbano. A descentralização econômica, que na América do Norte e na Europa gerou um movimento de pessoas e capital para fora dos CBDs, também tem papel importante na formatação e análise dos CBDs, mas a literatura difere nas maneiras como esse processo deve ser investigado e entendido. Apesar desse fator relevante, desde a década de 1980, existem políticas governamentais de diversos países que incentivam o retorno ao CBD. O padrão espacial do CBD também é provável de continuar no Sul Global, onde a crescente população se concentra em megacidades [6].

A compreensão da organização espacial do comércio fornece uma base teórica importante para a análise de fenômenos urbanos. Os padrões detectados no arranjo espacial de estabelecimentos comerciais convidam à realização de estudos do tema sob a perspectiva de sistemas complexos. Utilizando métodos da física, é possível traduzir relações locais e configurações espaciais em modelos quantitativos que permitem uma melhor compreensão dos eventos, inclusive permite a criação de modelos dinâmicos, o que soluciona uma das críticas aos modelos clássicos de organização espacial. No próximo capítulo, iremos revisar modelos da literatura que capturam dinâmicas urbanas sob perspectivas matemáticas e físicas, criando uma conexão entre os padrões detectados no espaço urbano e análises quantitativas.

3 Revisão da literatura

A análise de fenômenos urbanos através de métodos da física tem como objetivo traduzir questões complexas em modelos que revelam padrões e dinâmicas essenciais. Em geral, foca-se em problemas específicos, que sejam compatíveis com essa abordagem. Neste capítulo, iremos apresentar uma revisão de alguns modelos da chamada “ciência das cidades” [7], seguindo os tópicos da revisão de Marc Barthelemy [8]. Em seguida, discutiremos dois trabalhos que serviram de base para a elaboração do modelo que utilizaremos para analisar a distribuição espacial do comércio.

3.1 Modelos físicos em ciências das cidades

Modelos físicos e modelos econômicos possuem em comum a dinâmica emergente de fenômenos coletivos que se originam de interações locais. Essa característica de sistemas complexos permite a utilização do ferramental matemático da física estatística para analisar modelos que descrevem fenômenos não restritos à física. Dessa forma, é possível formular uma “ciência das cidades”, que utiliza esse ramo da física para unir a teoria e as regularidades empíricas apresentadas nas sociedades humanas. Formação de opinião, inclusive em redes sociais, evolução de línguas e comportamento de manada são alguns exemplos de temas que podem ser tratados através dessa abordagem [9].

Uma abordagem familiar muito utilizada pelos físicos para entender sistemas complexos, como as cidades, é a construção de modelos microscópicos. Esses modelos geram previsões que podem ser testadas usando o crescente volume de dados empíricos obtidos por sistemas de geolocalização, telefones celulares, pesquisas e censos [8].

Um exemplo desse tipo de abordagem é o estudo das leis de escala, que oferecem uma estrutura poderosa para entender como propriedades macroscópicas de cidades, como tamanho, infraestrutura e PIB, variam com sua população. Leis de escala mostram como variáveis urbanas se relacionam com a população, revelando regularidades matemáticas que refletem princípios subjacentes de organização. Nesses modelos, propõem-se que quantidades relacionadas ao meio urbano, Y , seguem regras do tipo

$$Y = Y_0 N^\beta, \quad (3.1)$$

sendo Y_0 e β constantes e N a população da cidade. O expoente β indica o tipo de crescimento da quantidade Y . Para explicar esses padrões, foram propostos mecanismos que se fundamentam nas interações entre indivíduos e em como a geometria e a distribuição espacial das cidades as afetam. Modelos de gravidade e de colaboração necessária são

alguns exemplos de modelos que visam justificar o surgimento dos padrões de escala nas cidades [10].

O modelo de gravidade ilustra de forma interessante a abordagem física de fenômenos observados em cidades. Nesse tipo de modelo, supõe-se que certa variável T que caracteriza o fenômeno em análise, por exemplo, a probabilidade de interação entre duas pessoas ou o número de viagens entre dois pontos, segue a regra

$$T \propto 1/d^\gamma, \quad (3.2)$$

sendo d a variável independente, como a distância entre as pessoas ou pontos da cidade, a depender do modelo, e γ é o expoente de decaimento. Esse tipo de abordagem, inspirada na lei da gravitação universal de Newton, é também fundamentada na lei de Tobler: “Todas as coisas estão relacionadas com todas as outras, mas coisas próximas estão mais relacionadas entre si do que aquelas distantes.” [7].

Outro modelo que trata de padrões de mobilidade é o modelo de radiação. Ele descreve o fluxo migratório médio do ponto i ao ponto j como sendo

$$\langle T_{ij} \rangle = T_i \frac{p_i p_j}{(p_i + s_{ij})(p_i + p_j + s_{ij})}, \quad (3.3)$$

sendo p_i e p_j as populações do ponto i e do ponto j , respectivamente, s_{ij} a população total da região interna à circunferência de raio r_{ij} , a distância entre os pontos i e j , centrada no ponto i e $T_i = \sum_{i \neq j} T_{ij}$ o número total de pessoas que saem do ponto i . A figura 4 ilustra o modelo e suas variáveis. Este modelo se baseia na ideia de que regiões mais populosas possuem mais vagas de emprego e que os indivíduos buscam seu trabalho levando em consideração sua qualidade e sua distância [11].

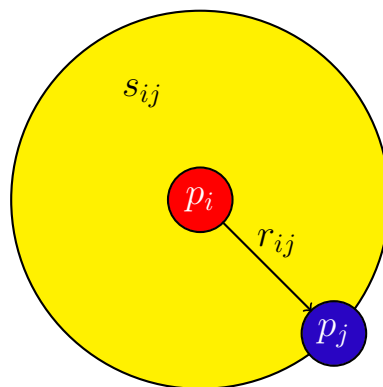


Figura 4 – Esquema das variáveis utilizadas no modelo de radiação. Sendo p_i a população do ponto i , de onde sai o indivíduo, p_j a população do ponto j , seu possível destino, r_{ij} a distância entre esses dois pontos e s_{ij} a população total da região inscrita no círculo de raio r_{ij} centrado no ponto i .

Um exemplo interessante de lei de escala envolve o padrão que segue a distribuição da população entre as cidades de alguns países, conhecido como lei de Zipf:

$$P(r) \approx r^{-v}, \quad (3.4)$$

sendo P a população de uma cidade, r o seu ranking (a posição que ela ocupa na lista de cidades, em ordem decrescente de tamanho populacional) e v uma constante de valor 1.

Um tipo de modelo que gera uma distribuição de população que segue a lei de Zipf utiliza a equação de difusão com ruído, que no limite de tempo contínuo se torna

$$\frac{dP_i}{dt} = (\eta_i(t) - 1) P_i(t) + \sum_{j \neq i} [J_{ij} P_j(t) - J_{ji} P_i(t)], \quad (3.5)$$

sendo P_i a população da cidade i , η_i os fatores de crescimento aleatório que seguem uma distribuição gaussiana, com a mesma média e com desvio padrão dado por $2\sigma^2$, e J_{ij} a taxa de migração de pessoas da cidade i para a cidade j . Não há solução exata conhecida para o caso geral, mas no limite de campo médio, em que $J_{ij} = J/N \forall i \neq j$, (sendo N o número de cidades analisadas e J uma constante associada à migração das pessoas entre as cidades), a distribuição estacionária da densidade de população das cidades descreve uma curva log-normal, que, para $J \neq 0$ e pequeno, se aproxima de uma lei de potência, assim como a lei de Zipf.

É válido destacar que existem trabalhos [8] que, após uma análise estatística realizada em vários conjuntos de dados de diversos países, mostram que a lei de Zipf deve ser rejeitada. As distribuições das populações mostram que as cidades, principalmente aquelas de maior posição hierárquica, são, frequentemente, grandes ou pequenas demais para se encaixarem no padrão da lei de Zipf [4]. Além disso, o artigo [12] destaca a relevância de fatores políticos e econômicos para a organização das cidades, que parecem ser os fatores mais determinantes para a distribuição de tamanho dos centros urbanos. Ademais, o trabalho [13] destaca a importância da amostragem (e, conseqüentemente, definição dos objetos que serão analisados) para determinar se um conjunto de dados segue a lei de Zipf.

Uma outra abordagem que utiliza métodos da física é o estudo de padrões de segregação espacial. Nesses estudos, emprega-se com frequência simulações de Monte Carlo, que nada mais são que modelos em que os movimentos dos agentes de uma população são modelados probabilisticamente através de simulação computacional, método conhecido como *agent based modeling*. Esse tipo de modelo baseado em agentes sobre comportamento coletivo iniciou-se com o trabalho de James Sakoda — mais conhecido pelo seu trabalho com *origamis* — e, mais tarde, foi amplamente difundido através da produção de Thomas Schelling¹. O trabalho de Schelling tinha como objetivo estudar a dinâmica social de formação de segregação espacial espontânea entre indivíduos. Um dos seus modelos propostos é construído em uma rede quadrada, semelhante ao modelo de Ising, o que é atraente para os físicos. O modelo de Schelling propõe um sistema em que existem dois tipos de agente e cada agente possui um certo número de vizinhos. O agente está satisfeito se a fração dos seus vizinhos que são de tipo diferente do seu não for maior do

¹ Para conhecer mais sobre a história e trabalho desses pesquisadores, ver o excelente artigo [14].

que um certo valor, que caracteriza a sua tolerância. Caso contrário, o agente fica insatisfeito e muda de posição na rede. Schelling mostrou que mesmo os agentes tendo tolerância relativamente alta, um padrão de segregação espacial entre os agentes de diferentes tipos se desenvolve no espaço, ou seja, o resultado final macroscópico não é tão homogêneo quanto a tolerância dos indivíduos pode indicar.

Inúmeras variações ao modelo de Schelling foram propostas, tanto no comportamento dos agentes [15, 16], quanto nas propriedades do sistema [17, 18]. Nestas variações, foram investigadas diferentes funções que definem a satisfação dos agentes, a probabilidade dos mesmos se moverem no sistema, a depender do tempo de simulação, da distância da nova posição, da “qualidade” da nova posição. Além disso, o modelo original teve sua robustez investigada [19] e uma análise foi feita sobre suas generalizações sob uma única estrutura matemática [20]. Ademais, o modelo pode ser associado a modelos físicos, em que a satisfação de um agente é correlacionada à sua “energia interna”, onde as interações entre os agentes (pensados como partículas) produzem forças que geram a dinâmica do sistema; de modo que é possível construir um modelo físico análogo ao de Schelling [21].

O trabalho de Schelling é um dos mais influentes nas pesquisas que envolvem simulação de comportamento humano e modelagem baseada em agentes, sendo citado também por autores da ciência da computação, da sociologia, da economia, das ciências naturais, dentre outros [22]. Além disso, o modelo de Schelling é emblemático no debate da filosofia da ciência a respeito da função da modelagem [23].

Um dos modelos que se inspiraram no modelo de Schelling, o modelo de Grauwin et al. [24], é bastante adequado para nossa modelagem da dinâmica de formação de centros comerciais. Nesse modelo, a cidade é dividida em blocos, cada um comportando uma quantidade limitada de agentes. Os agentes, por sua vez, possuem uma satisfação determinada pela densidade de outros agentes no mesmo bloco. A dinâmica do modelo determina como os agentes trocam de bloco na tentativa de maximizar a satisfação. Com isso, foi possível analisar a diferença entre interesses individuais e coletivos na segregação espacial [24, 25]. Curiosamente, o comportamento desses agentes neste modelo é contraintuitivo, pois o desejo individual dos mesmos não condiz com a situação final do sistema: mesmo cada agente buscando maximizar sua própria satisfação, a satisfação média dos agentes, ao fim, é baixa.

Como o modelo de Schelling e o de Grauwin são base para o modelo que iremos estudar nessa dissertação, iremos apresentá-los em detalhes nas sessões 3.2 e 3.3, respectivamente.

3.2 Modelo de Schelling

O economista Thomas Schelling, em seu artigo “Models of Segregation” [2], descreveu três modelos distintos sobre segregação social, porém é aquele em que os agentes se movem em uma rede bidimensional que é conhecido como “modelo de Schelling”.

O modelo de Schelling foi publicado no final da década de 1960, em um contexto de movimentos pelos direitos civis nos Estados Unidos e em outros países, quando temas como segregação espacial de pessoas e leis segregacionistas estavam sendo amplamente debatidos. Diante dessa conjuntura, o autor propôs um sistema em que o comportamento discriminatório era o fundamento da movimentação dos indivíduos, com o intuito de verificar a influência de ações individuais na configuração espacial das cidades [26].

O modelo é definido em uma rede quadrada de lado com comprimento L , ou seja, a rede possui L^2 células, cada uma delas podendo ser ocupada por, no máximo, um agente. Na rede, são distribuídos N agentes, dentre eles, N_A são agentes do tipo A e N_B são do tipo B . A densidade de agentes na rede é, portanto, $\rho = N/L^2$. O modelo pode descrever o comportamento de qualquer par de tipos de agentes, porém, dado o contexto da época, Schelling descreveu um sistema em que os agentes eram divididos pela cor: pretos e brancos. Cada um dos agentes possui uma vizinhança ego-centrada, que são as oito células que estão em volta da célula que ocupa, conhecida como vizinhança de Moore, conforme ilustra a figura 5. A satisfação de um agente de dado tipo pode ser definida como uma função da razão entre o número de agentes presentes em sua vizinhança — seus vizinhos — que são de tipo diferente do seu, N_d , e o número total de vizinhos, N_v , isto é, a satisfação de um agente é uma função de $r = N_d/N_v$.

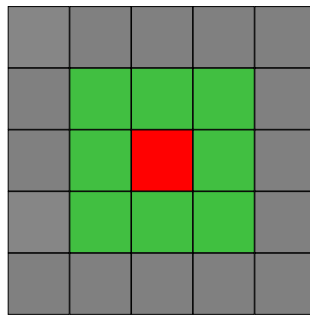


Figura 5 – As oito células (em verde) em torno de um agente (em vermelho) formam sua vizinhança de Moore.

Schelling definiu a seguinte função satisfação: um agente i fica satisfeito se a sua fração de vizinhos de tipo diferente, r_i , for menor ou igual a um certo valor de tolerância T e se torna insatisfeito caso contrário. A figura 6 ilustra as possíveis interações entre agentes sob essa regra. A condição de satisfação do agente é dada por

$$N_d - T(N_d + N_s) \leq 0. \quad (3.6)$$

Sendo N_d e N_s o número de vizinhos de um agente de tipo diferente e do mesmo tipo, respectivamente.

O movimento do agente se dá quando ele se encontra insatisfeito. A regra que define para qual célula o agente se move não foi definida com rigor por Schelling no seu artigo original, mas outros trabalhos demonstraram a robustez dos resultados diante de regras distintas [20].

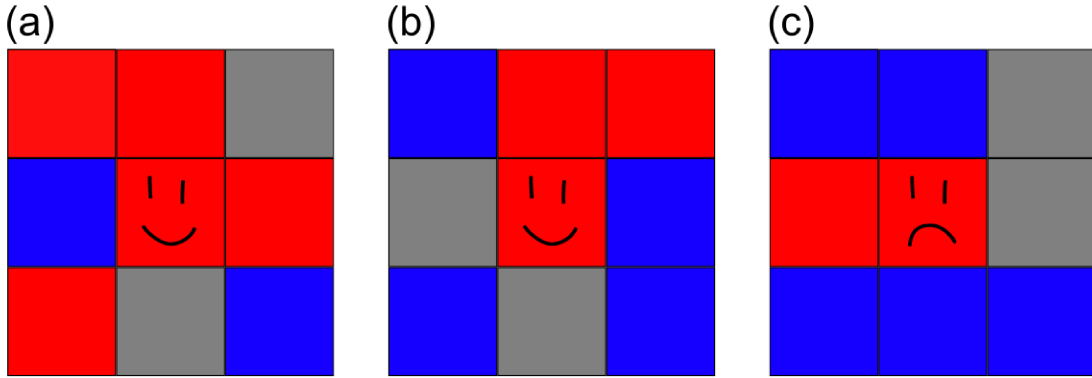


Figura 6 – Um agente está satisfeito se o fração dos seus vizinhos de tipo diferente do seu é menor ou igual a T , neste exemplo $T = 2/3$. O agente vermelho no centro das imagens é o agente analisado, em todos os casos, ele tem seis vizinhos. Na imagem (a), a fração de vizinhos diferentes é $r = 2/6 < T$, logo o agente está satisfeito; na imagem (b), a fração é $r = 4/6 = T$, então o agente também está satisfeito; na imagem (c), a fração é $r = 5/6 > T$, portanto o agente está insatisfeito e deseja mudar de célula.

O modelo de Schelling possui uma interessante correspondência com o modelo Blume-Emery-Griffiths (BEG), um modelo de Ising com partículas de spin 1 [27], que consiste em uma rede quadrada de lado L onde, para cada célula i , há uma variável de spin discreta s_i que pode assumir os valores 0, 1, -1 . Esses valores correspondem, no modelo de Schelling, a uma célula vazia, um agente do tipo A e um agente do tipo B , respectivamente. A condição de satisfação do agente i , expressa na equação (3.6), pode ser reescrita como:

$$-s_i \sum_{\langle j \rangle} s_j - (2T - 1) s_i^2 \sum_{\langle j \rangle} s_j^2 \leq 0. \quad (3.7)$$

As somas são feitas sobre os oito vizinhos do agente i . É possível construir uma função análoga à energia do sistema para esse modelo, que é a soma sobre todas as células das quantidades expressas na equação (3.7):

$$E_S = - \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^2 s_j^2, \quad (3.8)$$

onde $K = 2T - 1$ e as somas são feitas sobre todos os pares de vizinhos.

A função E_S , descrita na equação (3.8), é equivalente à energia E_{BEG} do modelo BEG [28], utilizado originalmente para estudar separação de fase e superfluidez em misturas de He^3 e He^4 líquidos, sob a condição de que o número de células de cada tipo

permaneça constante. A energia do modelo BEG é

$$E_{\text{BEG}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^2 s_j^2 + D \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^2. \quad (3.9)$$

Para um sistema com o número de células de cada tipo fixo, $D = 0$, então, caso $J = 1$ e $K = 2T - 1$, os modelos se tornam equivalentes. Caso $D \neq 0$, o sistema é aberto, isto é, o número de células de cada tipo não é constante. Esta condição seria correspondente ao modelo de Schelling em uma cidade aberta, isto é, agentes podem sair e entrar no sistema; esse caso é discutido no artigo [27], em que o fator D é uma medida de atratividade do sistema.

Os resultados do modelo de Schelling mostram que, dado que todos os agentes possuem a mesma tolerância, uma tolerância relativamente alta, como $T = 2/3$, pode gerar uma rede com populações segregadas. A figura 7 ilustra os resultados para o modelo de Schelling com diferentes valores de tolerância T . Uma análise mais aprofundada dos resultados para diferentes valores de tolerância e densidade de agentes foi feita por Gauvin et al. [29].

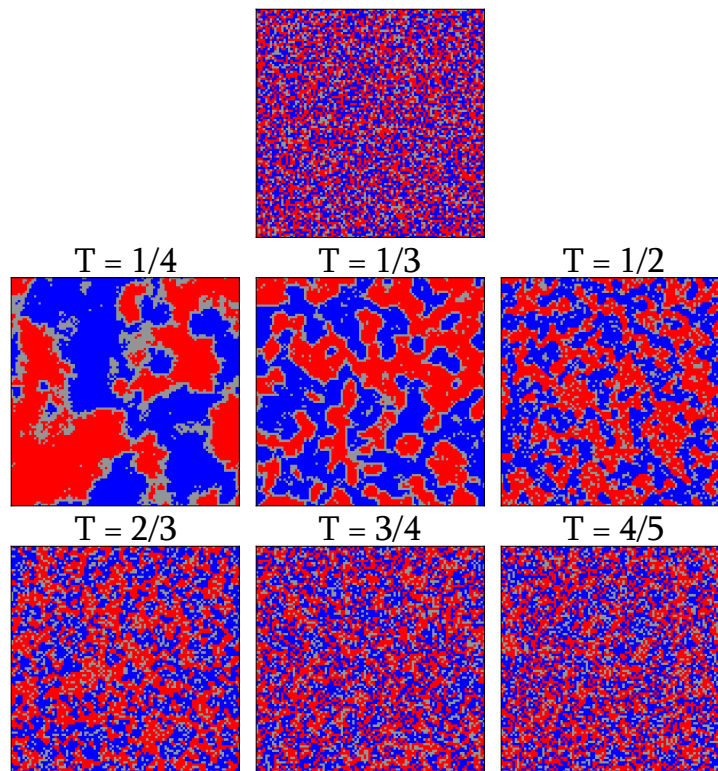


Figura 7 – A rede no topo da figura mostra uma configuração inicial do sistema, em que os agentes são distribuídos de forma aleatória. Nas simulações mostradas, a concentração de agentes é de $\rho = 0.8$ e as frações de cada tipo de agentes são iguais. As demais redes mostram configurações finais para simulações com diferentes valores de tolerância T . O aumento da tolerância T torna as populações dos dois tipos de agentes menos segregadas.

Schelling, em seu artigo original, formula um modelo que não leva em consideração

políticas segregacionistas, nem questões econômicas, como renda dos indivíduos e preço de imóveis. Outros autores implementaram variáveis econômicas em modelos semelhantes ao de Schelling a fim de torná-los mais verossímeis com fenômenos reais [30, 31].

3.3 Modelo de Grauwin et al.

Inspirado no modelo de Schelling, Grauwin et al. elaboraram um modelo de segregação social de uma população de um único tipo [24]. A população possui estrutura espacial, na qual os agentes se movem a fim de maximizar uma função utilidade — termo comum em modelos econômicos, que pode ser sinônimo de satisfação — cujo valor depende da densidade local de agentes.

O modelo de Grauwin et al. consiste em um sistema composto por Q blocos, cada um sendo uma rede quadrada bidimensionais com H sítios cada. Os Q representam uma cidade. Cada sítio pode conter no máximo um agente. Neste sistema são distribuídos N agentes, de modo que cada bloco q ($q = 1, 2, \dots, Q$) possui n_q agentes ($0 \leq n_q \leq H$) e a sua densidade é $\rho_q = n_q/H$. Cada um dos agentes possui uma satisfação que depende da densidade do bloco em que se encontra, dada pela função utilidade $u(\rho_q)$, que é idêntica para todos os agentes. A partir disso, é possível calcular a utilidade global do sistema: $U(x) = \sum_q n_q u(\rho_q) = H \sum_q \rho_q u(\rho_q)$, sendo $x = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q\}$ o conjunto das densidades de cada bloco do sistema.

A dinâmica do sistema é definida através da seguinte regra: em cada passo temporal, são escolhidos um agente e um sítio vago quaisquer da cidade. O agente mudará da sua posição atual para o sítio vazio com probabilidade

$$P_{xy} = \frac{1}{1 + e^{\frac{-G}{T}}}, \quad (3.10)$$

sendo x e y as configurações do sistema antes e depois do possível movimento, respectivamente, e T a “temperatura” do sistema, que visa criar um ruído nas decisões tomadas pelos agentes. Esse ruído pode ser interpretado como fatores que não são levados em consideração no modelo proposto, como preço dos imóveis e outros motivos que podem interferir na escolha de realizar a mudança. O ganho G obtido com o movimento proposto é dado por

$$G = \Delta u + \alpha (\Delta U - \Delta u), \quad (3.11)$$

sendo Δu a variação da utilidade do agente ao se mudar e ΔU a variação da utilidade total do sistema. O fator α , que pode assumir valores de 0 a 1, pode ser interpretado como o nível de altruísmo dos agentes. Caso $\alpha = 0$, o ganho do indivíduo se baseia inteiramente na alteração da sua utilidade pessoal; caso $\alpha = 1$, o ganho depende unicamente da variação da utilidade geral da população, assim como em modelos físicos, nos quais alguma função global é minimizada. A figura 8 ilustra as configurações finais do sistema com densidade

total de agentes $\rho_0 = 0.5$ para valores distintos de α . A função utilidade do artigo de Grauwin et al. é mostrada na figura 9. Essa função será discutida nas próximas seções.

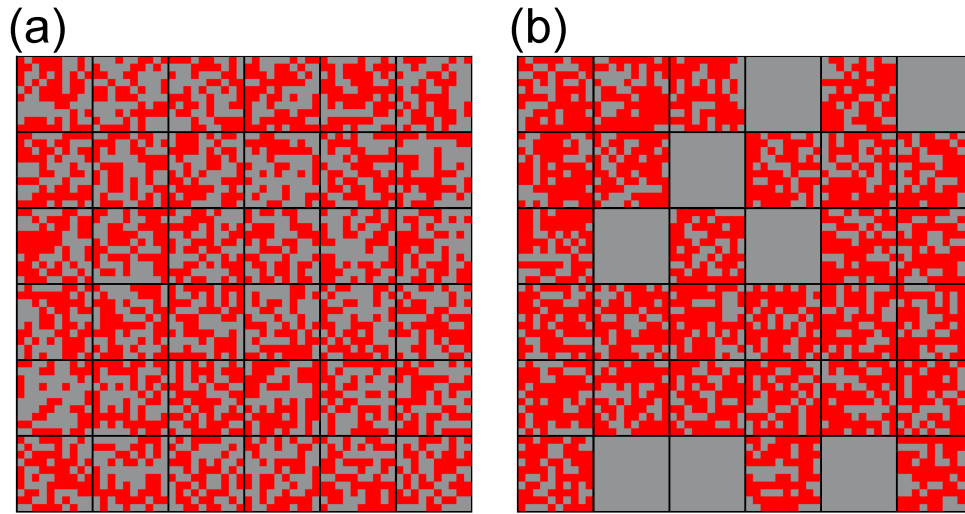


Figura 8 – Configurações finais para cidades com $Q = 36$ blocos, $H = 100$ células e densidade de agente $\rho_0 = 0.5$. A imagem (a) possui agentes com $\alpha = 1$, por sua vez, a imagem (b) possui agentes com $\alpha = 0$. A utilidade média do sistema (a) é maior que a do sistema (b).

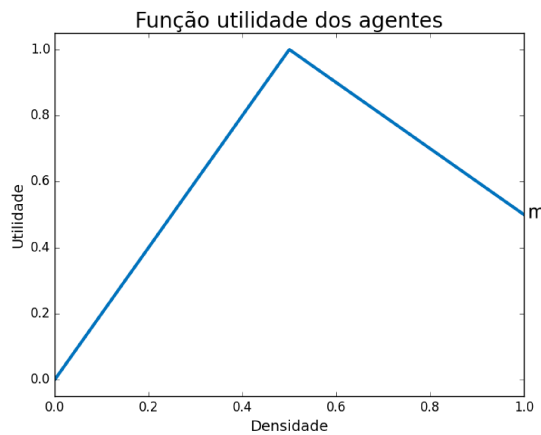


Figura 9 – Função utilidade dos agentes do modelo de Grauwin et al. A função tem pico em $\rho = 0.5$ e não é simétrica, sendo a utilidade $u = m$ quando $\rho = 1$. No gráfico, $m = 0.5$.

O modelo de Grauwin é passível de uma formalização matemática usando técnicas de mecânica estatística. Antes de mostrar essa análise, que faremos na próxima subseção, vale mencionar que esse modelo foi usado para investigar uma população em que dois tipos de agentes coexistem: egoístas ($\alpha = 0$) e altruístas ($\alpha = 1$) [25]. Os primeiros buscam, a cada passo, aumentar sua utilidade individual, enquanto os últimos procuram aumentar a utilidade global do sistema. Os resultados do artigo mostram que um sistema composto majoritariamente por agentes egoístas pode aumentar drasticamente — de forma não linear — a sua utilidade média por meio da adição de uma pequena quantidade de agentes altruístas no sistema.

3.3.1 Análise matemática do modelo de Grauwin

A cidade é representada pelo vetor $x = (\rho_1, \dots, \rho_Q)$. Quando um agente muda de bloco, a cidade passa para uma nova configuração y . A dinâmica desse sistema é um processo estocástico markoviano, que satisfaz uma equação mestra. Portanto, uma condição suficiente de equilíbrio é o balanço detalhado [32]:

$$\frac{P_{xy}}{P_{yx}} = \frac{P(y)}{P(x)}, \quad (3.12)$$

em que P_{xy} é a probabilidade do sistema ir da configuração x para a y e $P(x)$ é a probabilidade, no equilíbrio, de encontramos uma cidade na configuração x . Substituindo a expressão dada na equação 3.10:

$$\frac{P_{xy}}{P_{yx}} = \frac{P(y)}{P(x)} = \frac{\frac{1}{1+e^{-G/T}}}{\frac{1}{1+e^{G/T}}} = e^{G/T}. \quad (3.13)$$

Caso seja possível atribuir uma função $V(x)$ ao sistema, que depende apenas da configuração x , de maneira tal que o ganho G possa ser escrito na forma $G = \Delta V = V(y) - V(x)$, então

$$\frac{P(y)}{P(x)} = e^{\frac{V(y)-V(x)}{T}} = \frac{e^{\frac{V(y)}{T}}}{e^{\frac{V(x)}{T}}}. \quad (3.14)$$

Essa equação sugere a seguinte atribuição:

$$P(x) \propto e^{\frac{V(x)}{T}}. \quad (3.15)$$

Essa solução é a única expressão para $P(x)$ que satisfaz a equação (3.14). Para ver isso, suponhamos que exista uma outra função $Q(x)$ que também satisfaça à equação (3.14), isto é,

$$\frac{Q(y)}{Q(x)} = \frac{P(y)}{P(x)} = e^{\frac{V(y)-V(x)}{T}}. \quad (3.16)$$

Portanto, é possível afirmar que:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q(y)}{P(y)}. \quad (3.17)$$

O lado esquerdo da equação (3.17) depende apenas da configuração x , já o lado direito depende apenas da configuração y . Escolhendo uma configuração y fixa, a razão $Q(y)/P(y)$ se torna constante, que denotaremos como λ . Podemos concluir que a razão $Q(x)/P(x) = \lambda$ é independente da configuração x escolhida. Portanto

$$Q(x) = \lambda P(x), \quad (3.18)$$

para todo x possível. Ou seja, qualquer outra função Q que também satisfaça a equação (3.14) será igual à função P a menos de uma constante multiplicativa. Como essas funções

descrevem a probabilidade de encontrar o sistema em dada configuração, elas devem assumir valores entre 0 e 1; logo, devem ser multiplicadas por uma constante de normalização, de modo que a constante λ não fará diferença no resultado final.

A distribuição de probabilidade no equilíbrio $P(x)$ se assemelha à distribuição de Boltzmann com $k = 1$ e $V(x) = -\mathcal{H}(x)$, sendo \mathcal{H} a hamiltoniana do sistema. Essa equivalência de formalismo nos permite associar o sistema discutido ao arcabouço teórico da física estatística, em especial ao ensemble canônico.

Para cada conjunto de densidades x , existem diversas maneiras de se distribuir os agentes no sistema. Caso haja $\rho_q H$ agentes em um bloco q , existem

$$\Omega(\rho_q) = \binom{H}{\rho_q H} = \frac{H!}{(\rho_q H)! (H(1 - \rho_q))!}$$

possíveis configurações para o bloco, que assumimos que são igualmente prováveis de ocorrer e não alteram o valor da função V . Portanto, é possível associar ao bloco uma função entropia usual [33] do tipo:

$$\begin{aligned} s(\rho_q) &= \ln \Omega(\rho_q) \\ &= \ln \left(\frac{H!}{(\rho_q H)! (H(1 - \rho_q))!} \right) \\ &= \ln H! - \ln (\rho_q H)! - \ln (H(1 - \rho_q))!. \end{aligned}$$

Utilizando a aproximação de Stirling², $\ln x! = x \ln x - x + \mathcal{O}(\ln x) \approx x \ln x - x$,

$$s(\rho_q) \approx -H [\rho_q \ln \rho_q + (1 - \rho_q) \ln (1 - \rho_q)].$$

A quantidade de estados acessíveis para a cidade é igual ao produto dos números de estados acessíveis de cada bloco, portanto, a entropia total da cidade é igual à soma das entropias de cada bloco. Somando essas quantias, obtém-se a entropia total do sistema:

$$S(x) = \sum_q s(\rho_q) = -H \sum_q \rho_q \ln \rho_q + (1 - \rho_q) \ln (1 - \rho_q). \quad (3.19)$$

Portanto, a distribuição de probabilidades para as diferentes configurações do sistema é dada por:

$$\Pi(x) = \frac{\Omega(x) e^{\frac{V(x)}{T}}}{Z} = \frac{e^{\frac{1}{T}(V(x)+S(x)T)}}{Z} = \frac{e^{\frac{F(x)}{T}}}{Z}, \quad (3.20)$$

sendo $Z = \sum_x \exp(F(x)/T)$ a constante de normalização. A quantidade $F(x) \equiv V(x) + S(x)T$ se assemelha à energia livre de Helmholtz.

² A aproximação de Stirling é melhor quanto maior o valor de $x!$. Como $\rho_q H$ pode ter valores pequenos, é razoável analisar essa aproximação com mais detalhe a fim de verificar sua qualidade. Como $H \gg 1$, o termo $\ln H!$ é bem aproximado; já os termos $\ln (\rho_q H)!$ e $\ln (H(1 - \rho_q))!$ possuem aproximações não muito boas para valores de ρ muito baixos ou muito altos, respectivamente. Para todos os casos, a aproximação utilizada fornece um limite superior para a entropia, que se aproxima do valor real para H grande e ρ distante dos casos limite, a saber, $\rho = 0$ e $\rho = 1$.

Portanto, precisamos buscar uma função V para o sistema, que cumpra os requisitos exigidos, a fim de associá-lo aos modelos da física estatística já conhecidos. Pela definição, $G = \alpha\Delta U + (1 - \alpha)\Delta u$, em que U é um valor global, que depende de toda a configuração x do sistema, e u é um valor local, que depende apenas das densidades dos dois blocos envolvidos na movimentação do agente. Como V também deve depender da configuração x do sistema, é preciso fazer uma ligação entre a variação local u e a variação global U . Para tal, introduz-se uma função ligação $L = L(x)$, cuja variação após um agente mudar de posição deve ser igual a sua mudança de satisfação, isto é, $\Delta L = \Delta u$. Uma função que cumpre esse papel é a seguinte:

$$L(x) = H \sum_q l(\rho_q), \text{ com } l(\rho) = \int_0^\rho u(\rho') d\rho'. \quad (3.21)$$

O processo de definição dessa quantidade está mostrado no apêndice A.

De posse da função ligação L , pode-se definir o potencial $V(x)$ como função da configuração x ,

$$V(x) = (1 - \alpha)L(x) + \alpha U(x).$$

Conforme deveria ser, a variação de V corresponde ao ganho do movimento:

$$\Delta V = G = \Delta u + \alpha(\Delta U - \Delta u). \quad (3.22)$$

Finalmente, podemos escrever a “energia livre” em termos de L :

$$F(x) = (1 - \alpha)L(x) + \alpha U(x) + S(x)T.$$

Esta função pode ser escrita na forma $F(x) = H \sum_q f(\rho_q)$, com

$$f(\rho) = -T(\rho \ln \rho + (1 - \rho) \ln (1 - \rho)) + \alpha \rho u(\rho) + (1 - \alpha) \int_0^\rho u(\rho') d\rho'.$$

A fim de ilustrar a influência do fator de cooperação α e determinar explicitamente as configurações de equilíbrio do sistema, os autores usaram a função utilidade ilustrada na figura 9, que é assimétrica com pico em $\rho = 1/2$ e com $u(\rho = 1) = m$, m pode assumir valores entre 0 e 1. Tal função pode ser escrita como:

$$u(\rho) = \begin{cases} 2\rho, & \text{se } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \\ 2 - m - 2(1 - m)\rho, & \text{se } \frac{1}{2} < \rho < 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Para determinar qual é a configuração estacionária do sistema, é preciso calcular o valor da função $F(x)$ para uma cidade homogênea e para uma cidade segregada. Agentes bem distribuídos entre os blocos da cidade configuram uma cidade homogênea. Por sua vez, cidades com blocos vazios são cidades segregadas. Essas configurações estão ilustradas pela figura 8. Como $F(x) = H \sum_q f(\rho_q)$, o sistema homogêneo, em que todos os blocos

possuem densidade ρ_0 , é instável contra uma separação de fase se existem duas densidades ρ_1 e ρ_2 tais que

$$\gamma f(\rho_1) + (1 - \gamma) f(\rho_2) > f(\rho_0), \quad (3.24)$$

sendo γ a fração de blocos do sistema que possuem densidade ρ_1 na configuração segregada, enquanto $(1 - \gamma)$ representa a fração de blocos com densidade ρ_2 . Essa condição indica que a cidade segregada possui um valor maior de $F(x)$, logo é mais provável que ocorra. Essa condição corresponde a exigir que $f(\rho)$ seja uma função não côncava de ρ .

Os valores de ρ_1 e ρ_2 que maximizam a função $F(x)$ são obtidos ao maximizar a função $\Gamma(\rho_1, \rho_2) = \gamma f(\rho_1) + (1 - \gamma) f(\rho_2)$, sob a restrição $\gamma\rho_1 + (1 - \gamma)\rho_2 = \rho_0$. Escrito de outra forma:

$$\gamma = \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (3.25)$$

assumindo $\rho_1 > \rho_2$. Assim, desejamos maximizar a função

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} f(\rho_1) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} f(\rho_2). \quad (3.26)$$

Fazendo $\vec{\nabla}\Gamma = 0$, obtemos:

$$f'(\rho_1) = \frac{f(\rho_1) - f(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} \quad (3.27)$$

$$f'(\rho_2) = \frac{f(\rho_1) - f(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (3.28)$$

A partir dessa análise, determinando os valores de ρ_1 e ρ_2 , é possível indicar a configuração final da cidade, os valores das densidades dos blocos e a utilidade média dos agentes.

4 Segregação espacial de comerciantes

O nosso modelo tem por objetivo representar a movimentação de agentes, residentes e comerciantes, em uma cidade e verificar como se dá a distribuição dos mesmos no espaço simulado. Através de funções utilidade simples, buscamos verificar se o movimento dos agentes, desejando maximizar suas próprias utilidades, reproduzem padrões observados nas cidades reais.

Nossa modelagem se baseia principalmente no trabalho de Grauwin et al., tendo o mesmo ambiente de simulação, uma rede quadrada dividida em blocos, e a mesma regra para a dinâmica dos agentes, isto é, a mesma função que descreve a probabilidade de um agente se mover.

4.1 Definição do modelo

O modelo representa uma cidade subdividida em Q blocos de mesmo tamanho, cada um com H células. Cada célula pode ser ocupada por, no máximo, um agente, que pode ser um residente ou um comerciante. Cada bloco q da cidade possui n_q agentes, sendo $0 \leq n_q \leq H$, de modo que é possível definir a densidade de agentes de cada bloco como $\rho_q = n_q/H$. Cada bloco q , dentre seus n_q agentes, possui n_q^R residentes e n_q^C comerciantes, sendo $0 \leq n_q^R, n_q^C \leq H$ com o vínculo $n_q^R + n_q^C = n_q$. De forma análoga, é possível também determinar as densidades de residentes e comerciantes em um bloco, são elas, respectivamente: $\rho_q^R = n_q^R/H$ e $\rho_q^C = n_q^C/H$. De fato, uma configuração da cidade simulada é equivalente ao conjunto de todas as quantidades de agentes do sistema $\sigma = \{(n_1^R, n_1^C), (n_2^R, n_2^C), \dots, (n_Q^R, n_Q^C)\}$, sendo $p_q = (n_q^R, n_q^C)$ o par ordenado associado ao bloco q contendo as quantidades de agentes presentes no mesmo. A figura 10 representa uma cidade do modelo.

Cada agente da cidade possui uma função utilidade, que quantifica a sua satisfação com relação ao bloco onde está. As funções utilidade dos residentes, $u_R(\rho_q)$, e dos comerciantes, $u_C(\rho_q)$, dependem apenas da densidade de agentes no bloco em que se encontram, ρ_q . Todos os agentes do mesmo tipo possuem a mesma função utilidade.

A função utilidade dos comerciantes captura o fato de que estes preferem estar localizados em regiões com pelo menos uma certa quantidade de agentes, pois, se a região for muito vazia, o comércio não consegue se manter. Essa premissa se baseia na Teoria do Lugar Central Clássica [3], mais precisamente no seu conceito de limiar. Um comércio necessita de uma base mínima de clientes para se manter, este é seu limiar. Então, o comerciante estará insatisfeito se aquele não for atingido e estará satisfeito caso contrário.

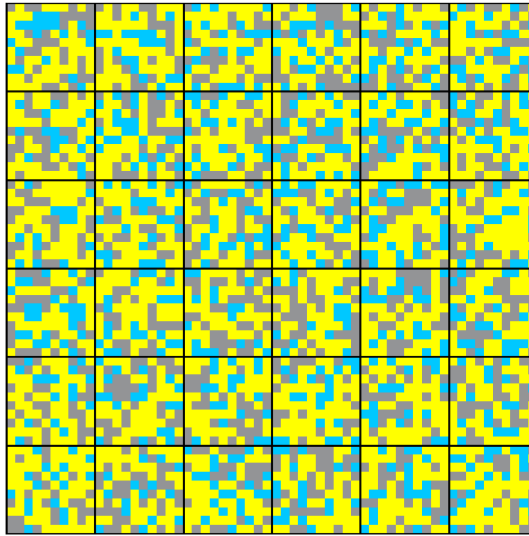


Figura 10 – Cidade composta por $Q = 36$ blocos com $H = 100$ células. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios.

Em vez de definir uma função degrau, do tipo $u_C(\rho) = 0$ se $\rho < L_C$ e $u_C(\rho) = 1$ caso contrário, definiremos uma função semelhante, mas com uma “rampa” ligando o 0 e o 1:

$$u_C(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq \rho < L_C - \Delta \\ \frac{1}{\Delta}(\rho + \Delta - L_C), & \text{se } L_C - \Delta \leq \rho < L_C \\ 1, & \text{se } L_C \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

O parâmetro L_C é o limiar de satisfação dos comerciantes e Δ , que pode assumir valores positivos, um termo que suaviza a transição da satisfação do agente entre completamente insatisfeito, $u_C(\rho) = 0$, e inteiramente satisfeito, $u_C(\rho) = 1$. A figura 11 mostra o gráfico da utilidade dos comerciantes. Caso $\Delta = 0$, a função utilidade u_C se torna uma função degrau.

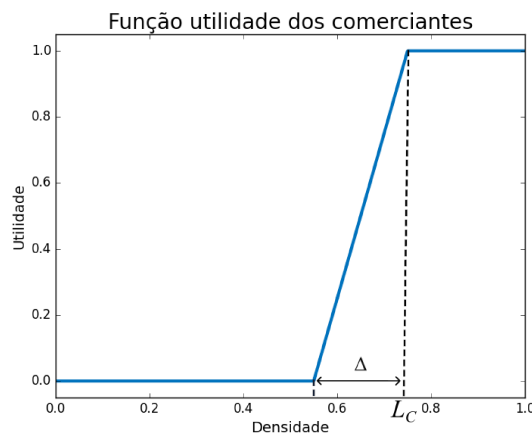


Figura 11 – Função utilidade dos comerciantes com $L_C = 0.75$ e $\Delta = 0.2$.

Foram usadas duas funções utilidade para os residentes. A primeira, que chamaremos de função descontínua, construída sob a suposição simples de que os residentes não gostam de regiões densamente povoadas, é definida como:

$$u_R(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \rho \leq L_R \\ 0, & \text{se } L_R < \rho < 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo L_R a máxima tolerância de aglomeração do residente, que se torna insatisfeito em ambientes muito povoados, isto é, quando $\rho > L_R$.

A segunda função utilidade dos residentes, que chamaremos de função contínua, é definida da seguinte forma:

$$u_R(\rho) = \begin{cases} 2\rho, & \text{se } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - \rho), & \text{se } \frac{1}{2} < \rho \leq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Essa segunda função utilidade supõe que os residentes não gostam de viver em regiões pouco povoadas, nem em regiões muito aglomeradas. As duas funções utilidade dos residentes são ilustradas na figura 12 ¹.

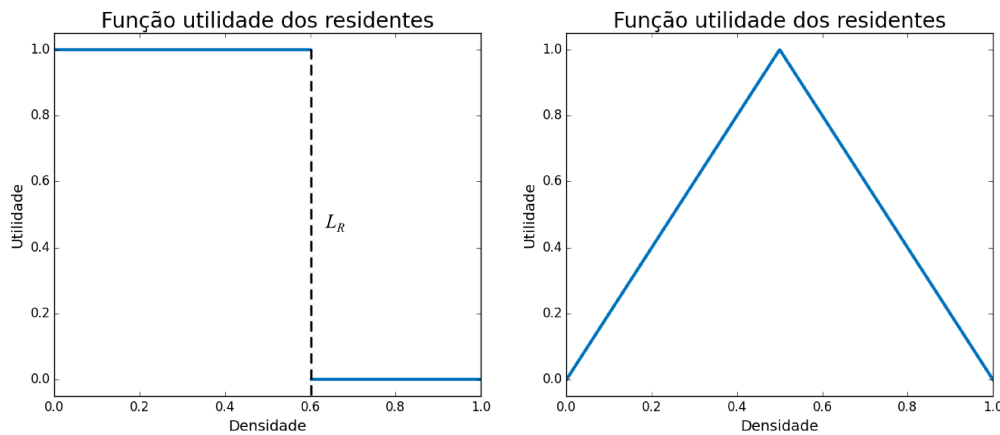


Figura 12 – Funções utilidade dos residentes. O gráfico à esquerda da figura representa a função utilidade descontínua, definida na equação (4.2), com $L_R = 0.6$; o gráfico à direita da figura representa a função utilidade contínua, definida na equação (4.3).

¹ Grauwin, em seu trabalho, apesar de relatar que a função utilidade dos agentes pode ser postulada através de princípios fenomenológicos ou se basear em alguma teoria de interação entre agentes, não justifica a utilização dessa função triangular. A fonte para a função, segundo a referência dos autores, foi o artigo de Romans Pancs et al. [19], que analisa várias funções utilidade a fim de verificar a robustez dos resultados do modelo de Schelling, mesmo quando os agentes têm preferência por vizinhanças mais inclusivas. As funções testadas por Pancs dizem respeito às especificidades do modelo de Schelling, isto é, não tratam da densidade de vizinhos na vizinhança dos agentes, como faz Grauwin. A função triangular possui justificativas intuitivas para ser utilizada, mas é, portanto, apenas inspirada no trabalho de Pancs.

4.1.1 Algoritmo de evolução do sistema

A dinâmica do sistema é definida da mesma forma que no modelo de Grauwijn: são escolhidos aleatoriamente um agente do sistema e uma célula vazia. Em sua posição inicial, a utilidade do agente escolhido é u_I e a utilidade do mesmo, caso ele saia dessa posição e se mova para a célula vazia escolhida, é u_F . Portanto, a variação da utilidade do agente, caso ele se mova, é $\Delta u = u_F - u_I$. Assim, é possível definir a probabilidade de movimentação do agente escolhido, P , que é dada por

$$P(\Delta u) = \frac{1}{1 + e^{-\Delta u/T}}, \quad (4.4)$$

em que T é um termo análogo à temperatura do sistema, que representa ruído nas decisões tomadas pelos agentes. A ação da temperatura pode ser interpretada como a ação de fatores aleatórios que não são levados em consideração no modelo proposto. Para $T = 0$, a probabilidade se torna uma função degrau:

$$P(\Delta u) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta u < 0 \\ 1/2, & \text{se } \Delta u = 0 \\ 1, & \text{se } \Delta u > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Neste caso, o agente sempre se movimentará para uma posição de maior utilidade, e não o fará se sua utilidade diminuir no processo. A função 4.4 para $T = 0.2$ é ilustrada na figura 13.

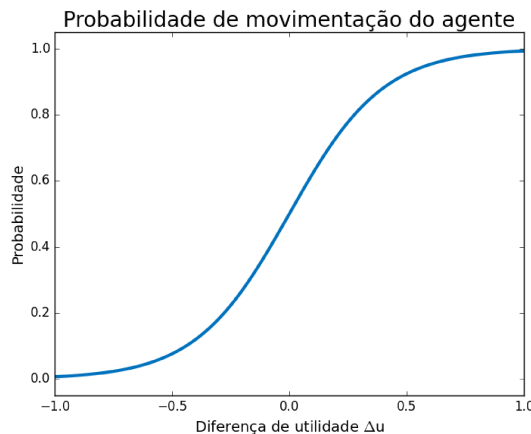


Figura 13 – Função probabilidade de movimentação de um agente para um sistema com temperatura $T = 0.2$.

A caixa de texto seguinte mostra como a definição do sistema e sua dinâmica se dão na forma de um pseudocódigo. Os dois métodos de distribuição de agentes nos blocos definidos no algoritmo 1 produzem resultados semelhantes.

Algoritmo 1 Pseudocódigo da definição e dinâmica do sistema

-
- 1: Inicializar um conjunto de Q blocos com H células cada;
 - 2: Determinar a densidade de agentes no sistema, ρ_0 , e a densidade relativa de residentes, ρ_R ;
 - 3: Escolher um método para distribuir os agentes;
 - 4: **if** método = fixo **then**
 - 5: Coloque em cada bloco $H\rho_0$ agentes, sendo $H\rho_0\rho_R$ residentes e $H\rho_0(1 - \rho_R)$ comerciantes;
 - 6: **else**
 - 7: Em cada bloco, para cada célula H , com probabilidade ρ_0 coloque um agente no bloco, ele será, com probabilidade ρ_R , um residente, caso contrário será um comerciante;
 - 8: **end if**
 - 9: **loop**
 - 10: A cada passo de tempo, selecionar de maneira aleatória um agente A e uma célula vazia V ;
 - 11: Calcular $\Delta u = u_F - u_I$;
 - 12: Calcular $P(\Delta u) = 1/(1 + \exp(-\Delta u/T))$;
 - 13: **if** rand() $\leq P(\Delta u)$ **then**
 - 14: Mover A para V ;
 - 15: **end if**
 - 16: **end loop**
-

4.2 Resultados

Os resultados que se seguem foram obtidos para $H = 100$ e $Q = 36$. A variação desses parâmetros não influencia de forma significativa os resultados obtidos, a menos que H ou Q sejam muito pequenos.

Para analisar e apresentar as simulações de forma conveniente, definimos a densidade total de agentes no sistema $\rho_0 = N/HQ$, sendo N o número total de agentes, e a densidade relativa de residentes $\rho_R = N_R/N$. Estes valores foram variados para compreender sua influência na dinâmica do sistema.

4.2.1 Modelo com residentes com função degrau

A função utilidade dos comerciantes é aquela descrita na equação 4.1 com $\Delta = 0$ e a função utilidade dos residentes é a função descontínua 4.2. As funções são ilustradas na figura 14.

4.2.1.1 Segregação espacial

Realizamos várias simulações para esse sistema. A configuração inicial da cidade é uma distribuição aleatória de residentes e comerciantes em cada um dos blocos, segundo dados parâmetros ρ_0 e ρ_R . A figura 10 ilustra uma cidade em sua configuração inicial.

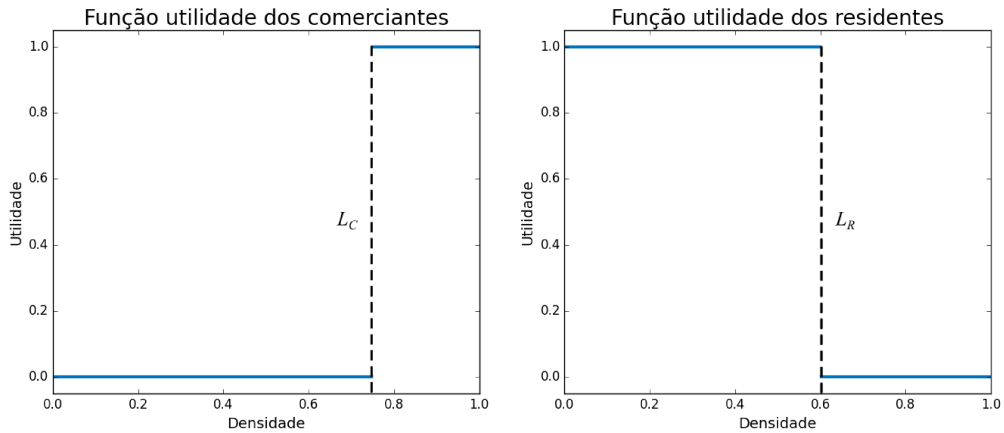


Figura 14 – Funções utilidades dos agentes. O gráfico à esquerda da figura mostra a função utilidade dos comerciantes com $L_C = 0.75$ e $\Delta = 0$; o gráfico à direita da figura mostra a função utilidade dos residentes com $L_R = 0.6$.

As simulações foram realizadas com 10^6 passos, sendo cada passo definido como uma escolha aleatória de um agente e uma célula para a possível mudança de posição do agente, conforme descrito no algoritmo 1. Os resultados de uma simulação para 25 pares (ρ_0, ρ_R) distintos estão dispostos na figura 15. Pela imagem, é possível verificar que os comerciantes podem se aglomerar em determinados blocos a depender dos valores de ρ_0 e ρ_R da simulação. Para entender este processo, podemos estudar a dinâmica dos residentes e dos comerciantes na cidade.

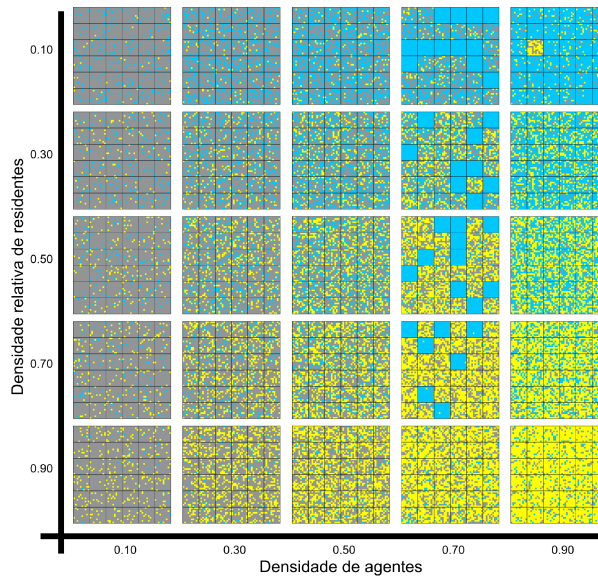


Figura 15 – Configurações finais para sistemas com valores $\rho_0, \rho_R \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$, $T = 0$ e $\Delta = 0$. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios.

Os residentes só ficam satisfeitos em blocos com densidade menor ou igual à sua tolerância L_R . Portanto, caso um bloco atinja uma densidade $\rho > L_R$, os residentes ali presentes se moverão para outro bloco. Como a probabilidade de movimentação de um

agente quando $\Delta u = 0$ é $P(0) = 1/(1 + \exp(0/T)) = 1/2$ para todo valor de T ², os residentes se movem erratically entre blocos com densidade $\rho < L_R$. Portanto, os residentes tendem a se espalhar uniformemente entre os blocos com densidade $\rho < L_R$. Os comerciantes, por sua vez, movem-se aleatoriamente pelos blocos até encontrarem aqueles com densidade $\rho \geq L_C$. Uma vez dentro de um bloco com densidade maior que seu limiar, o comerciante move-se entre os blocos que satisfazem essa condição. Portanto, os comerciantes tendem a se aglomerar quando possível, causando ou não a segregação entre os diferentes tipos de agentes, de modo que o sistema se afasta da sua configuração homogênea inicial.

Para o sistema simulado, o encontro de comerciantes suficientes para atingir o limiar dos mesmos em um único bloco é sempre possível, desde que haja o número de comerciantes mínimo necessário para tal, ou seja, $N_C \geq HL_C$. O encontro de vários comerciantes em um mesmo bloco, de maneira a formar um bloco estável, demora para acontecer, de modo que o sistema permanece com a mesma quantidade de blocos aglomerados de comerciantes durante muito tempo, como mostrado na figura 16.

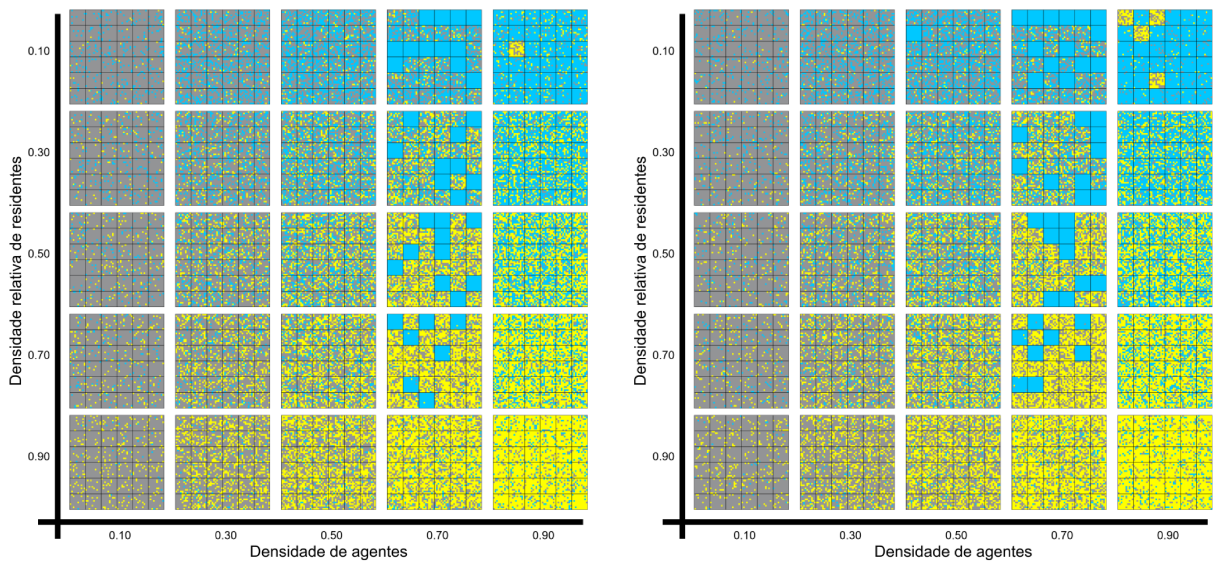


Figura 16 – Configurações finais para sistemas com valores $\rho_0, \rho_R \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. As imagens à esquerda e à direita mostram os resultados para 10^6 e 10^9 passos de tempo, respectivamente. Nota-se que os sistemas são quase idênticos; as diferenças são o aparecimento de um bloco cheio de comerciantes para a configuração $\rho_0 = 0.5$ e $\rho_R = 0.1$ e o aumento do número de blocos povoados apenas por residentes na configuração $\rho_0 = 0.9$ e $\rho_R = 0.1$ para o sistema que foi simulado por mais tempo. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios.

A aglomeração dos comerciantes em blocos é um fenômeno que leva tempo para ser observado, pois depende de eventos raros, que são aqueles em que vários comerciantes se movem para um mesmo bloco em tempos próximos. Uma vez que um bloco atinge

² Para $T = 0$, a função probabilidade P é definida pela equação (4.5) e também segue a regra $P(0) = 1/2$.

HL_C comerciantes, ele se torna estável para esses agentes e se torna um atrator de outros comerciantes.

Podemos mostrar a raridade do encontro de muitos comerciantes em um mesmo bloco simulando uma cidade composta apenas por comerciantes e medindo o maior número de comerciantes em um único bloco ao longo do tempo. A figura 17 mostra esse fenômeno. Esse gráfico mostra que quanto maior o tempo de simulação maior a chance de encontrarmos um bloco com muitos comerciante.

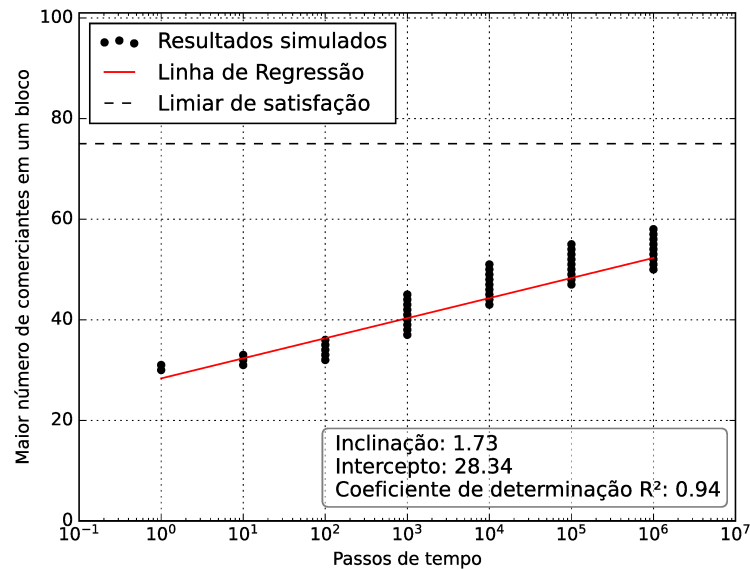


Figura 17 – Gráfico da regressão linear entre dos valores máximos registrados de comerciantes em um único bloco em função do número de passos de tempo das simulações. As cidades simuladas possuíam $\rho_0 = 0.3$, $\rho_R = 0$, $T = 0$, $\Delta = 0$ e $L_C = 0.75$.

Essa conclusão pode ser melhor formalizada se aproximarmos os dados por uma função logarítmica do tipo:

$$y = a \log_{10} t + y_0, \quad (4.6)$$

sendo y o maior número registrado de comerciantes em um bloco, a a inclinação da reta da regressão linear, t o número de passos de tempo de cada simulação e y_0 a interseção da reta com o eixo coordenado, cujo valor deve ser próximo de $H\rho_0^3$. Através de manipulação algébrica, é possível obter o número de passos de tempo esperado, t_C , para que os blocos fiquem cheios o suficiente para que se tornem atrativos para os demais comerciantes, isto

³ O algoritmo para a distribuição inicial de agentes nos blocos pode ser implementado de duas maneiras distintas, conforme comentado na caixa de texto do algoritmo 1. Na primeira abordagem, cada bloco recebe uma quantidade de agentes fixa e predefinida. Na segunda, introduzimos uma variabilidade espacial: para cada célula de cada bloco, há uma chance ρ de ela ser ocupada por um agente, caso seja ocupada, tem uma chance ρ_R do agente ser um residente — caso contrário, ele será um comerciante com chance de $1-\rho_R$. Ambos os métodos produzem resultados similares, entretanto, o primeiro permite uma estimativa mais simples do valor de y_0 , portanto foi utilizado na análise do tempo esperado t_C .

é, para que algum bloco q possua $n_q^C = HL_C$ comerciantes. Assim, substituindo esses valores na equação temos:

$$t_C = 10^{H \frac{L_C - \rho_0}{a}}.$$

Se $\rho_0 < L_C$, os agentes precisam se juntar em um bloco até que esse atinja a densidade mínima $\rho = L_C$, para que se torne atrativo (figura 18). Se $\rho_0 \geq L_C$, os comerciantes já estarão todos satisfeitos, portanto $t_C = 0$. Assim,

$$t_C = \begin{cases} 10^{H \frac{L_C - \rho_0}{a}}, & \text{se } L_C > \rho_0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.7)$$

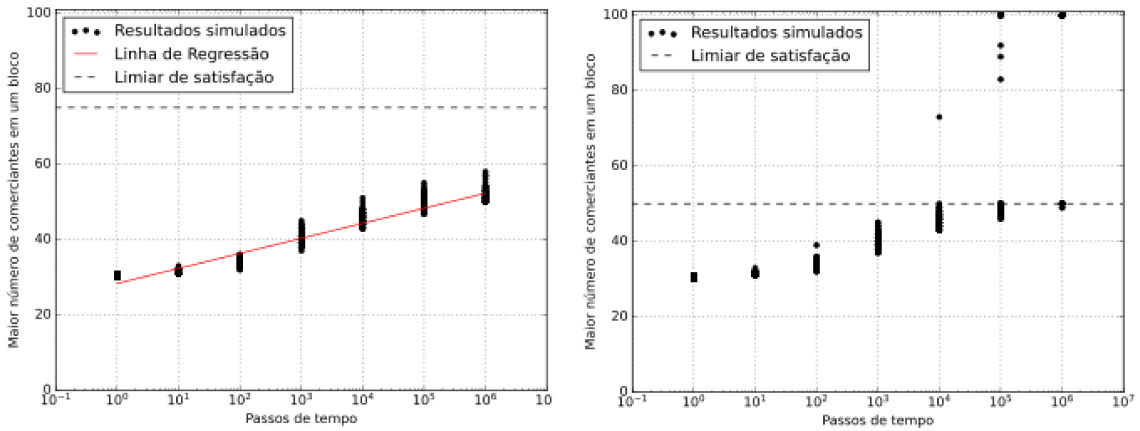


Figura 18 – Gráficos dos valores máximos registrados de comerciantes em um único bloco em função do número de passos de tempo das simulações. As cidades simuladas possuíam $\rho_0 = 0.3$, $\rho_R = 0$, $T = 0$, $\Delta = 0$. Os gráficos à esquerda e à direita possuem $L_C = 0.75$ e $L_C = 0.5$, respectivamente.

Essa análise mostra que, se tivermos muitas células por bloco, isto é, se H for grande, o tempo necessário para observarmos a formação de aglomerados aumenta drasticamente se $\rho_0 < L_C$. Se $\rho_0 > L_C$, como a distribuição inicial é uniforme, todos os comerciantes estão satisfeitos e o tempo necessário para atingir esse estado é nulo.

A dependência de t_C em relação a ρ_0 e L_C evidencia uma importante característica do sistema. Se $\rho_0 \geq L_C$, os comerciantes ficam satisfeitos em qualquer bloco, a menos que, por acaso, algum desses blocos fique vazio o suficiente, isto é, com $\rho < L_C$. Quando isso acontece, os comerciantes saem do bloco, que passa a ser ocupado apenas por residentes. Caso esse evento aconteça uma quantidade de vezes suficiente para esvaziar os comerciantes de alguns blocos, estes podem se tornar atrativos aos residentes, o que irá segregar os dois tipos de agentes.

4.2.1.2 Medida de heterogeneidade

O problema da identificação da segregação de comerciantes em determinados blocos exige a definição de uma medida de segregação e heterogeneidade, que distinga a

configuração inicial homogênea da configuração heterogênea. O problema de definir essa medida é complexo e existem índices distintos, cada um com suas vantagens e limitações. Utilizaremos aqui três índices que são tipicamente usados na literatura e um índice baseado no conceito de entropia.

Vamos analisar, primeiramente, a medida baseada na entropia do sistema. Ao assumirmos que, para uma dada configuração do sistema $\sigma = \{(n_1^R, n_1^C), (n_2^R, n_2^C), \dots, (n_Q^R, n_Q^C)\}$, cada bloco pode organizar seus agentes de maneiras distintas e equiprováveis, é possível então associar uma entropia para a configuração σ^4 . De forma semelhante ao feito no modelo de Grauwin et al., o número de maneiras que um bloco pode se organizar é:

$$\Omega(n_q^R, n_q^C) = \frac{H!}{(H - n_q^R - n_q^C)! n_q^R! n_q^C!} = \frac{H!}{n_q^R! (H - n_q)! (n_q - n_q^R)!}. \quad (4.8)$$

Cada bloco q pode distribuir n_q agentes em H células e n_q^R residentes dentre os espaços ocupados pelos agentes; os comerciantes ficam nos $n_q - n_q^R$ espaços restantes. Portanto, a entropia do bloco q é:

$$s_q = \ln \Omega(n_q^R, n_q^C) = \ln H! - \ln (H - n_q)! - \ln (n_q - n_q^R)! - \ln n_q^R! \quad (4.9)$$

Por conseguinte, a entropia total do sistema é a soma das entropias de cada bloco:

$$S(\sigma) = Q \ln H! - \sum_q \left[\ln (H - n_q)! + \ln (n_q - n_q^R)! + \ln n_q^R! \right]. \quad (4.10)$$

A entropia máxima S_{\max} do sistema se dá quando os agentes estão uniformemente espalhados pelos blocos. Para demonstrar esse fato, vamos supor $n_i^R = n_j^R$ e $n_i^C = n_j^C$ $\forall i, j \leq Q$ e um agente seja movido do bloco A para o bloco B . Vamos calcular a variação da entropia do bloco A , ΔS_A , que perde um agente, e do bloco B , ΔS_B , que recebe o agente. Suponhamos inicialmente que esse agente seja um residente.

$$S_{A,I} = \ln H! - \ln (H - n_A)! - \ln (n_A^R)! - \ln n_A^C!, \quad (4.11)$$

$$S_{A,F} = \ln H! - \ln (H - (n_A - 1))! - \ln (n_A^R - 1)! - \ln n_A^C!, \quad (4.12)$$

$$S_{B,I} = \ln H! - \ln (H - n_B)! - \ln (n_B^R)! - \ln n_B^C!, \quad (4.13)$$

$$S_{B,F} = \ln H! - \ln (H - (n_B + 1))! - \ln (n_B^R + 1)! - \ln n_B^C!. \quad (4.14)$$

Sendo $S_{A,I}$ e $S_{A,F}$ o valor da entropia do bloco A antes e depois da movimentação do agente. $S_{B,I}$ e $S_{B,F}$ são análogas para o bloco B . Portanto:

$$\Delta S_A = S_{A,F} - S_{A,I} = \ln n_A^R - \ln (H - n_A + 1), \quad (4.15)$$

$$\Delta S_B = S_{B,F} - S_{B,I} = \ln (H - n_B) - \ln (n_B^R + 1). \quad (4.16)$$

⁴ Válido destacar que, nessa definição de entropia, assumimos que σ é um conjunto ordenado de pares (n_q^R, n_q^C) . Caso essa suposição não seja feita — tornando os blocos indistinguíveis entre si —, o cálculo da entropia do sistema deve levar isso em consideração. Uma discussão sobre essa questão é realizada na seção 5.2.

Válido destacar que ΔS_A e ΔS_B podem assumir valores positivos ou negativos a depender do número de agentes de cada tipo em cada bloco. Todavia, a variação total da entropia do sistema, visto que supomos $n_A^R = n_B^R \equiv n^R$, $n_A^C = n_B^C \equiv n^C$ e, por consequência, $n_A = n_b \equiv n$,

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = \ln \frac{n^R}{n^R + 1} + \ln \frac{H - n}{H - n + 1} < 0. \quad (4.17)$$

Caso um comerciante mude de bloco, o resultado também é $\Delta S < 0$, isto é, a condição em que os agentes estão igualmente distribuídos entre os blocos é um máximo local de entropia. A função entropia é a soma de várias funções logarítmicas, as quais são côncavas; consequentemente, a função entropia também é côncava. Dessa forma, se um ponto da função entropia é máximo local, ele é também máximo global.

A configuração inicial é, portanto, próxima da configuração de maior entropia⁵. O valor da entropia máxima é:

$$S_{\max} = Q \left(\ln [\Gamma(H + 1)] - \ln \left[\Gamma \left(H - \frac{N}{Q} + 1 \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{N_C}{Q} + 1 \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{N_R}{Q} + 1 \right) \right] \right). \quad (4.18)$$

Uma configuração final que não possua os agentes igualmente distribuídos pelos blocos possui menor entropia. Com essa ideia em mente, é possível construir o seguinte índice:

$$\alpha = \frac{S_{\max} - S(\sigma)}{S_{\max}}. \quad (4.19)$$

A figura 19 mostra a comparação entre as configurações finais típicas do sistema e o mapa de calor dos valores médios de α . Analisando a figura, percebe-se que o indicador de heterogeneidade é capaz de capturar, através de um valor, o quão segregados os agentes de um dado sistema estão.

É possível, então, gerar mapas de calor para diferentes valores de L_R e L_C e verificar sua influência na configuração final do sistema. As figuras 37, 38 e 39, presentes no apêndice B, mostram conjuntos de mapas de calor para diferentes valores dos parâmetros Δ e T . Percebe-se que o parâmetro L_C é determinante na forma do mapa de calor, mas o valor de L_R pouco o influencia. Além disso, o fator Δ aumenta drasticamente a segregação dos agentes na cidade. A temperatura, como esperado, torna o sistema mais homogêneo. Com o aumento da temperatura do sistema, a função probabilidade de movimento de um agente se aproxima de uma linha reta $P(\Delta u) = 1/2$.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(\Delta u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-\Delta u/T}} = \frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

⁵ Note que as quantidades N/Q , N_R/Q e N_C/Q não são necessariamente números inteiros, pois existem casos em que não é possível distribuir a mesma quantidade de agentes em cada bloco. Portanto S_{\max} possui valor maior que a entropia máxima real do sistema, S_{\max} é um limite superior. Por isso, é preciso utilizar a função Γ , que é a extensão mais comum da função fatorial para os números reais, sendo $\Gamma(n) = (n - 1)!$, caso $n \in \mathbb{N}$.

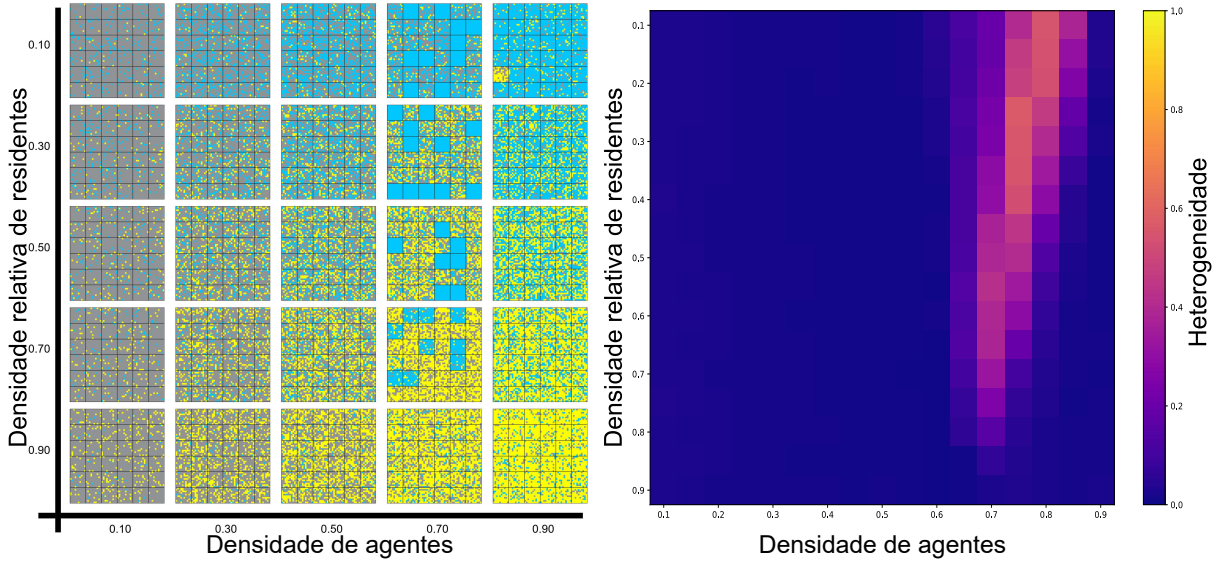


Figura 19 – Resultados para sistemas com parâmetros $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$, $\Delta = 0$, $T = 0$. À esquerda da figura, a imagem mostra as configurações finais para sistemas com valores $\rho_0, \rho_R \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios.; à direita da figura, um mapa de calor mostra os valores médios do indicador de heterogeneidade α para sistemas com ρ_0 e ρ_R com valores variando de 0.1 até 0.9 em intervalos de 0.05.

Dessa forma, os agentes não distinguem os blocos segundo sua utilidade, isto é, todos se tornam igualmente satisfatórios, de modo que os agentes fazem caminhadas aleatórias pelo sistema, tornando sua distribuição homogênea.

O índice de dissimilaridade D e o índice de Gini G dominam a literatura sobre segregação e desigualdade [34]. Eles são definidos, respectivamente, por:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \left| \frac{n_q^R}{N_R} - \frac{n_q^C}{N_C} \right|, \quad (4.21)$$

$$G = 1 - \sum_{q=1}^Q \frac{n_q^R}{N_R} \left(\frac{n_q^C}{N_C} + 2 \sum_{q'=q+1}^Q \frac{n_{q'}^C}{N_C} \right). \quad (4.22)$$

Sendo o índice de Gini computado para dados organizados de forma que $n_1^R/n_1^C \leq n_2^R/n_2^C \leq \dots \leq n_Q^R/n_Q^C$.

Os índices de dissimilaridade e de Gini medem a uniformidade da distribuição espacial de populações. O índice de dissimilaridade mede a porcentagem da população de um grupo que deveria se mudar para que cada divisão do espaço medido possua a mesma porcentagem desse grupo que o sistema como um todo. O índice de Gini é igual a duas vezes a área entre a curva de segregação e a linha de igualdade, como ilustra a figura 20. Ambos os índices indicam completa segregação se são iguais a 1 e total integração se são iguais a 0.

Para uma discussão sobre o que representam os índices e seus limites, ver o ar-

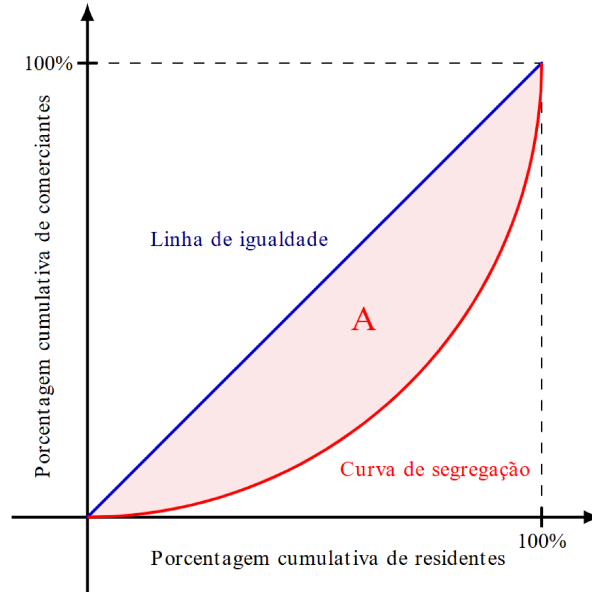


Figura 20 – A curva de segregação mapeia a proporção cumulativa de cada tipo de agente em um mesmo gráfico. O índice de Gini é duas vezes a área A entre a linha de igualdade, que representa a distribuição homogênea dos agentes nos blocos que ocupam, e a linha de segregação, que indica o quão concentrada está uma população.

tigo [34]. Nesse trabalho, o autor propõe uma medida de segregação que não possui os problemas dos índices de dissimilaridade e de Gini. Uma das propriedades desejáveis para essa medida é aumentar seu valor após um movimento “desigualizante” — quando um agente do tipo 1 sai do bloco A , que possui poucos agentes do tipo 1, e vai para o bloco B , com muitos agentes do tipo 1, o que aumentaria a segregação. O índice de dissimilaridade não possui essa propriedade. Outra característica desejável para um índice de segregação é não variar de maneiras distintas sob um mesmo movimento desigualizante a depender da distribuição de agentes em blocos não envolvidos no movimento, isto é, a variação do índice deve depender apenas dos blocos envolvidos no movimento do agente. O índice de Gini não possui essa propriedade.

O indicador proposto no artigo [34] é o índice raiz quadrada, definido por:

$$I_{\text{rq}} = 1 - \sum_{q=1}^Q \sqrt{\frac{n_q^R}{N_R} \frac{n_q^C}{N_C}}. \quad (4.23)$$

Usando esses indicadores para caracterizar a heterogeneidade do nosso modelo, verificamos que todos concordam qualitativamente com o índice de heterogeneidade α , como ilustra a figura 21. Nela, podemos ver que os índices de heterogeneidade e raiz quadrada são os menos ruidosos. A figura 22 mostra, de forma mais abrangente, as semelhanças dos índices. Essa figura mostra conjuntos de diversos mapas de calor, cada conjunto representa um dado índice para diferentes valores de limiares L_R e L_C .

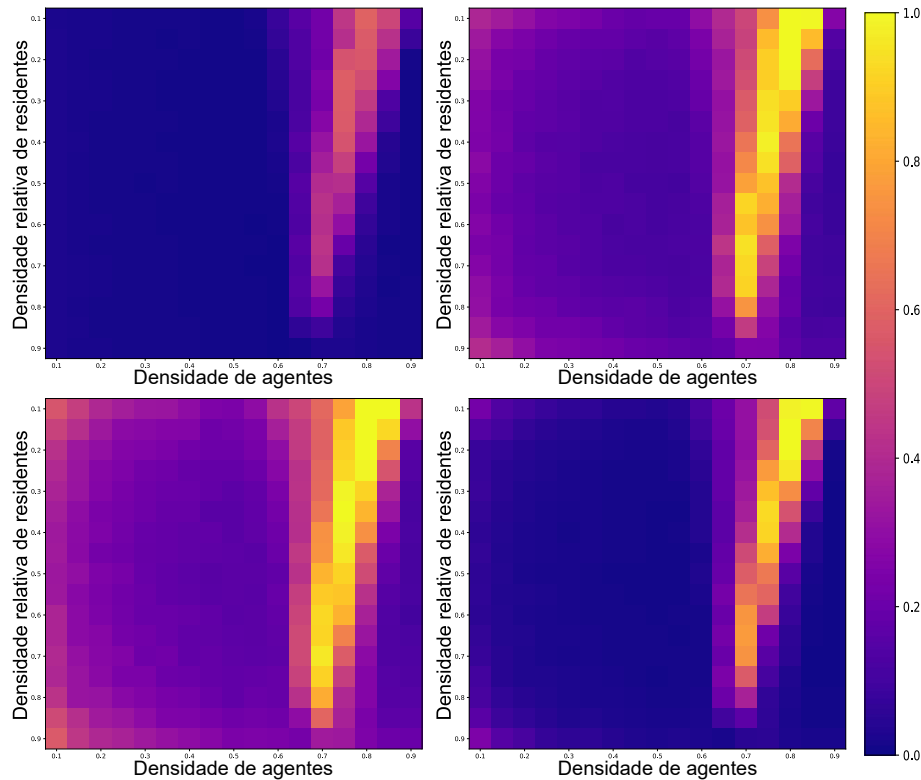


Figura 21 – Mapas de calor das propriedades medidas. As imagens dos cantos superior esquerdo, superior direito, inferior esquerdo e inferior direito representam os índices de heterogeneidade, de dissimilaridade, de Gini e raiz quadrada, respectivamente. Os mapas de calor, apesar de representarem diferentes índices, possuem a mesma escala para possíveis valores, isto é, todos os índices variam de 0 a 1 conforme indica escala de cores ao lado direito da figura. Os sistemas simulados possuem $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$, $T = 0$ e $\Delta = 0$.

4.2.1.3 Análise do Δ

O parâmetro Δ possui significativa relevância na determinação do comportamento do sistema. A função utilidade com $\Delta = 0$ faz com que os comerciantes enxerguem somente dois tipos de blocos: blocos suficientemente cheios ($\rho \geq L_C$) e blocos pouco povoados ($\rho < L_C$). Ao aumentar o seu valor, os comerciantes percebem o bloco que ocupam de maneira diferente. Blocos que antes eram vistos como completamente insatisfatórios, agora são mais toleráveis. Existe uma gradação na classificação da qualidade dos blocos, de modo que os comerciantes não abandonam com facilidade blocos que estão próximos de se tornarem completamente satisfatórios. Por exemplo, suponhamos que o sistema está em uma configuração com três blocos pouco povoados: $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < L_C$. Se $\Delta = 0$, a utilidade, na perspectiva do comerciante, desses três blocos é igual a zero. Porém, se $\Delta > 0$ e $L_C - \Delta < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < L_C$, a utilidade linear pode gerar um fluxo de deslocamento para o bloco 3, facilitando, assim, a formação de blocos de comerciantes. Dessa forma, o tempo de formação de blocos cheios de comerciantes é drasticamente diminuído. Um comportamento coletivo de aglomeração que acontece espontânea e vagarosamente é

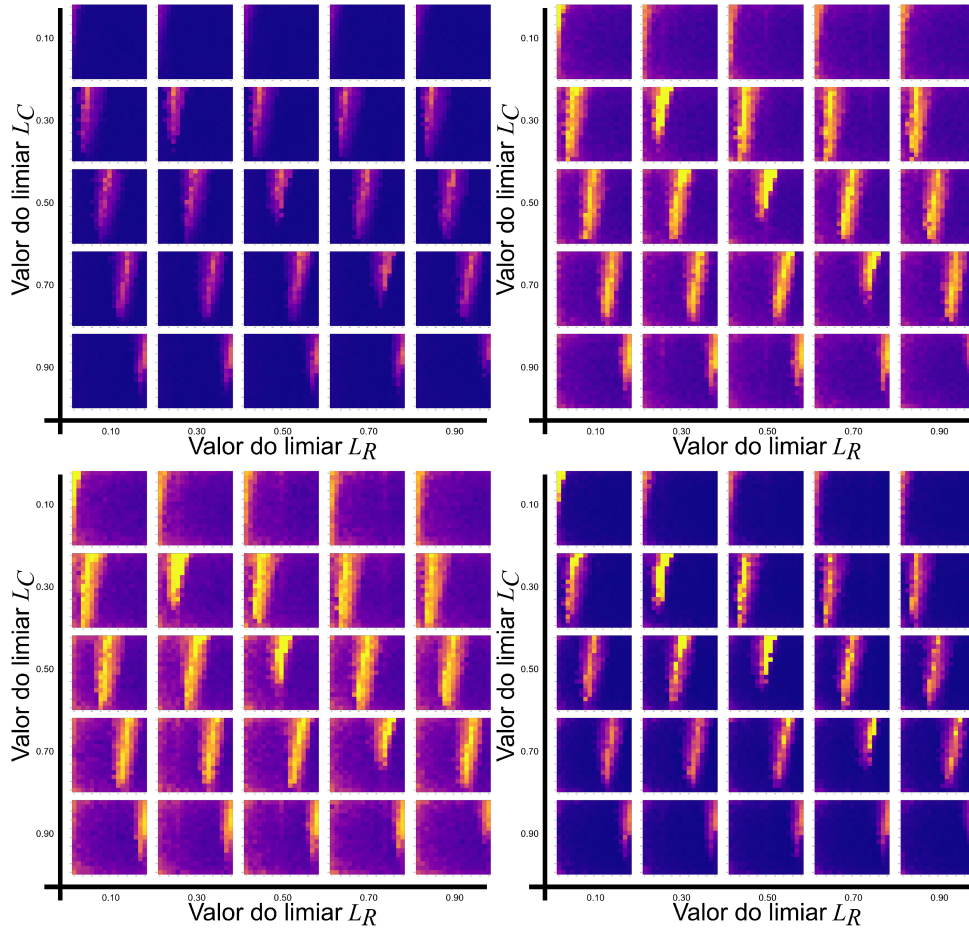


Figura 22 – Conjuntos de mapas de calor das propriedades medidas. As imagens dos cantos superior esquerdo, superior direito, inferior esquerdo e inferior direito são compostas por mapas de calor dos índices de heterogeneidade, de dissimilaridade, de Gini e raiz quadrada, respectivamente. Cada conjunto de mapas de calor representa simulações para diferentes valores de limiares L_R e L_C . Os sistemas simulados possuem $T = 0$ e $\Delta = 0$.

facilitado quando o agente atribui diferentes níveis de satisfação para os possíveis cenários. Ao perceber a vizinhança de forma mais minuciosa, o comerciante pode se manter em um local promissor, apesar de não ser capaz de planejar movimentos futuros.

O gráfico da figura 23 mostra o impacto da variação de Δ na formação de blocos de comerciantes para configurações do sistema em que antes não havia. O gráfico da figura 24 mostra como o tempo de formação de blocos cheios de comerciantes é diminuído com o aumento do Δ .

Válido destacar que a hipótese de que os sistemas com limiar $L_C = L$ e $\Delta = D$ são equivalentes aos sistemas com $L_C = L - D$ e $\Delta = 0$ é falsa. As figuras dispostas no apêndice B mostram que o fator Δ expande a região do gráfico em que a heterogeneidade é maior, e não apenas a desloca, o que ocorreria caso aquela hipótese fosse verdadeira.

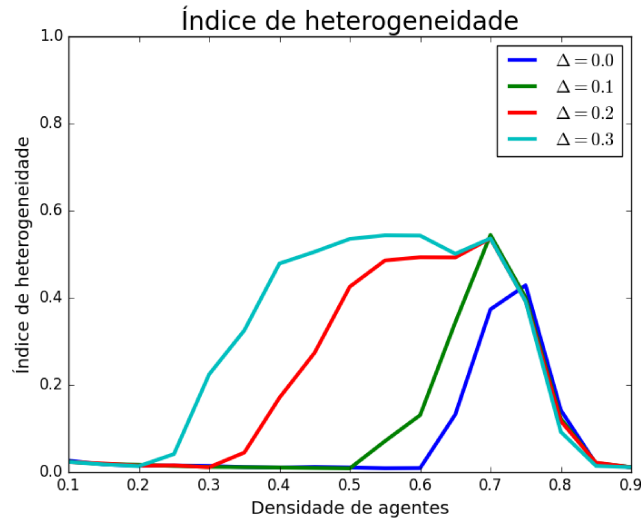


Figura 23 – Índice de heterogeneidade α em função da densidade total de agentes do sistema para $\Delta = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$. Nas simulações, $T = 0$, $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$ e $\rho_R = 0.5$.

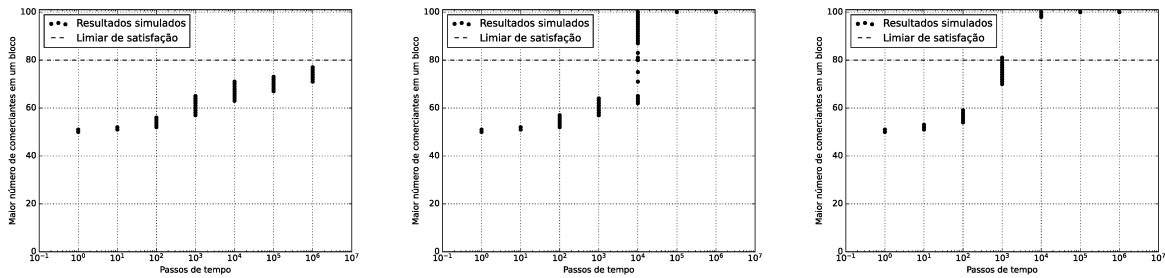


Figura 24 – Gráficos dos valores máximos de comerciantes em um único bloco em função do número de passos de tempo das simulações. As cidades simuladas possuíam $\rho_0 = 0.5$, $\rho_R = 0$, $T = 0$, $L_C = 0.8$. Os gráficos, da esquerda para a direita, possuem $\Delta = 0$, $\Delta = 0.15$ e $\Delta = 0.3$, respectivamente. O sistema com maior Δ diminui drasticamente o tempo de formação de blocos cheios de comerciantes.

4.2.1.4 Satisfação dos agentes

Através das funções utilidade dos agentes, é possível supor que, em sistemas com $\rho_0 \geq L_C$, os comerciantes ficam satisfeitos e, em sistemas com $\rho_0 \leq L_R$, os residentes ficam satisfeitos. Porém, a dinâmica de aglomeração dos comerciantes permite que os agentes se tornem satisfeitos para parâmetros em que aquelas condições não são cumpridas.

Quando os agentes começam a se aglomerar em um bloco, ao atingir uma densidade $\rho \geq L_R$, este se torna um repelente de residentes e, quando atinge uma densidade $\rho \geq L_C$, um atrator de comerciantes. Caso os comerciantes consigam formar um bloco atrator, ele tende a ser povoado exclusivamente por comerciantes. Assim, os demais blocos ficam com uma densidade média menor. Se os comerciantes se juntam em blocos o suficiente, os residentes podem se espalhar nos blocos menos povoados até se tornarem satisfeitos. Portanto, o comportamento gregário dos comerciantes beneficia todo tipo de agente, de

modo que, ao facilitar o encontro dos comerciantes — aumentando o valor do fator Δ — o valor médio da utilidade dos agentes aumenta justamente em sistemas com parâmetros em que passa a existir aglomeração. As figuras 25 e 26 ilustram essa propriedade.

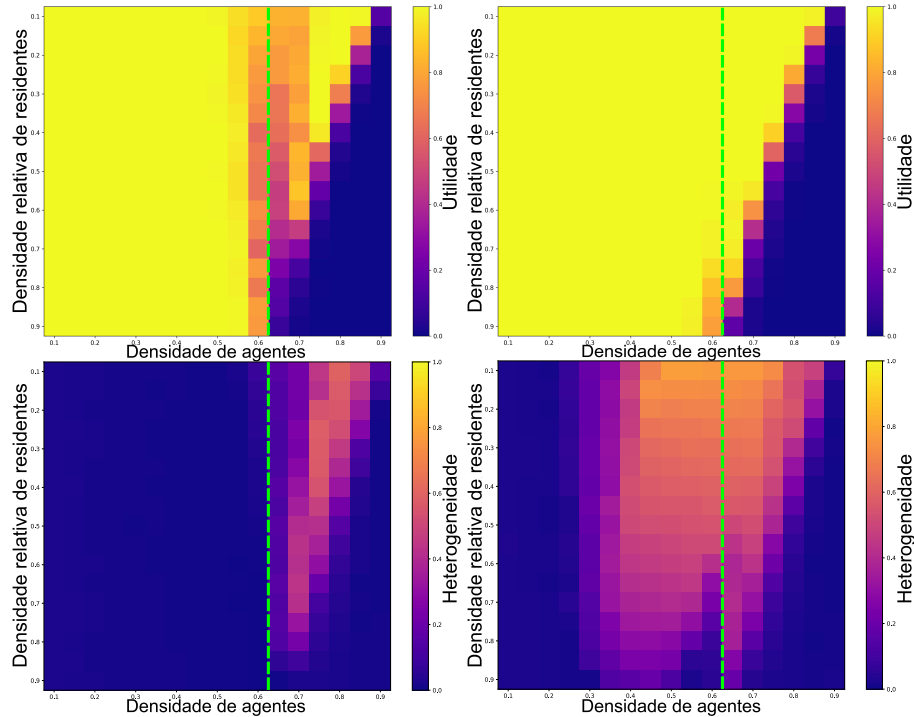


Figura 25 – Mapas de calor das utilidade média dos residentes (gráficos de cima) e da heterogeneidade média (gráficos de baixo) para sistemas com $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$, $T = 0$, $\Delta = 0$ (imagens da esquerda) e $\Delta = 0.3$ (imagens da direita). Os mapas de calor possuem uma linha tracejada que separa os resultados para cidades com densidade ρ_0 maior, à direita, e menor, à esquerda, que L_R . Na região à esquerda da linha tracejada, como esperado, os residentes estão bastante satisfeitos; na região à direita, eles estão mais satisfeitos nas regiões e que há aglomeração dos comerciantes, isto é, quando o índice de heterogeneidade é maior.

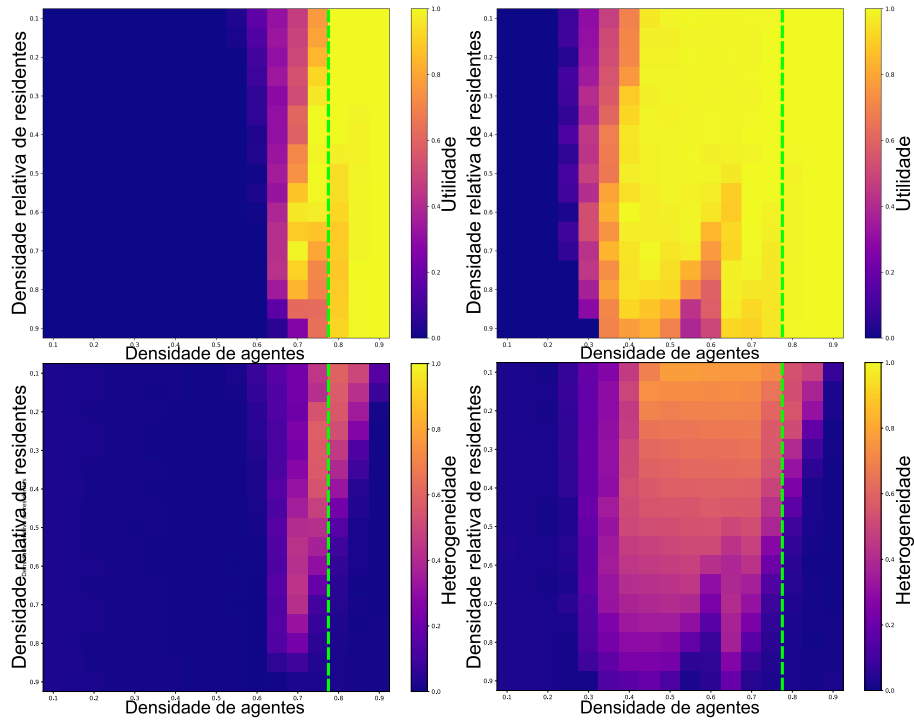


Figura 26 – Mapas de calor das utilidade média dos comerciantes (gráficos de cima) e da heterogeneidade média (gráficos de baixo) para sistemas com $L_R = 0.6$, $L_C = 0.75$, $T = 0$, $\Delta = 0$ (imagens da esquerda) e $\Delta = 0.3$ (imagens da direita). Os mapas de calor possuem uma linha tracejada que separa os resultados para cidades com densidade ρ_0 maior, à direita, e menor, à esquerda, que L_C . Na região à direita da linha tracejada, como esperado, os comerciantes estão bastante satisfeitos; na região à esquerda os comerciantes são mais satisfeitos nas regiões de maior heterogeneidade, ou seja, quando se aglomeram.

4.2.2 Variação: residente intolerante a extremos

A fim de verificar a influência dos residentes no processo de aglomeração, modificamos o modelo proposto. Nessa variação, a função utilidade dos residentes é semelhante àquela do trabalho de Grauwin. A função utilidade escolhida para os comerciantes é a mesma, equação 4.1, e a função utilidade dos residentes é aquela descrita na equação 4.3. As funções são ilustradas na figura 27.

Realizamos simulações com 10^6 passos de tempo para diversos valores de parâmetros. Os resultados de uma simulação para 25 pares (ρ_0, ρ_R) distintos são mostrados na figura 28.

A dinâmica do modelo com a variação é diferente daquela do modelo original. Os comerciantes possuem o mesmo comportamento, porém os residentes podem se aglomerar espontaneamente em alguns blocos. O comportamento dos residentes é contraintuitivo, pois a utilidade dos agentes é máxima para blocos com densidade $\rho = 0.5$, entretanto os residentes se juntam em blocos com densidades mais elevadas, de modo que a utilidade total dos mesmos não é maximizada. É interessante notar que, apesar do desejo comum de

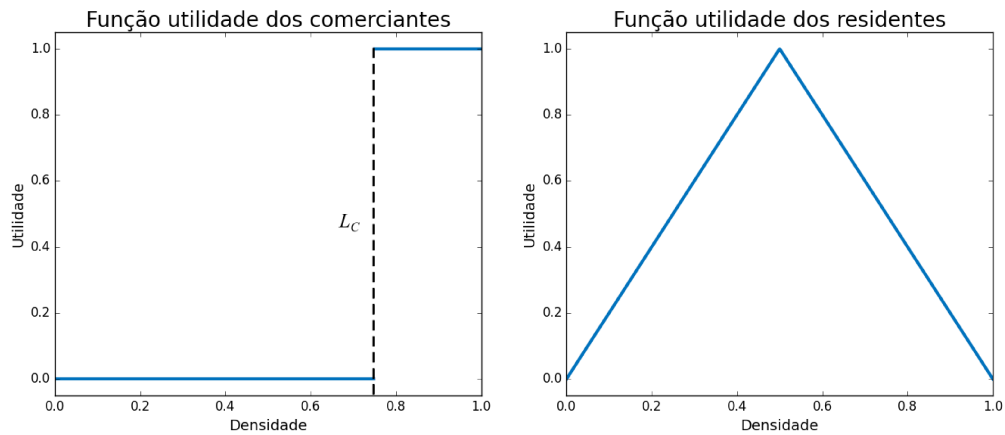


Figura 27 – Funções utilidades da variação do modelo. O gráfico à esquerda da figura mostra a função utilidade dos comerciantes com $L_C = 0.75$ e $\Delta = 0$; o gráfico à direita da figura mostra a função utilidade dos residentes.

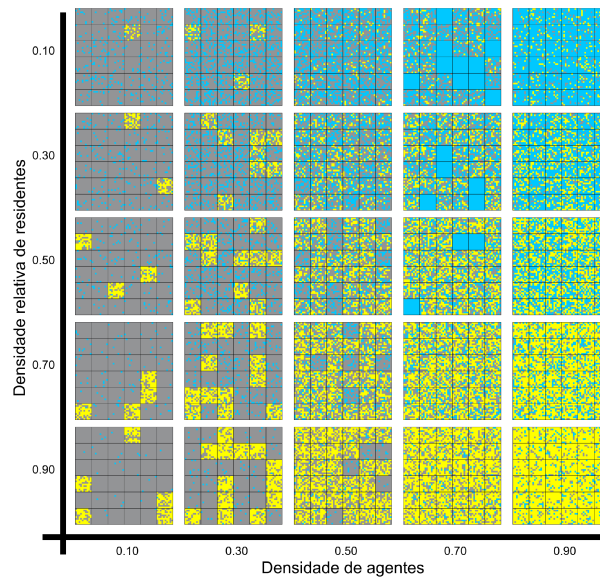


Figura 28 – Configurações finais para sistemas com valores $\rho_0, \rho_R \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $L_C = 0.75$, $T = 0$ e $\Delta = 0$. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios.

se instalarem em blocos mediantemente cheios, os residentes não são capazes de fazê-lo. Esse comportamento está bem descrito no trabalho de Grauwin e mostra que a ação coletiva pode levar a resultados subótimos [26].

No sistema com a variação, existem dois eventos que tornam a cidade segregada: a aglomeração dos comerciantes e a aglomeração dos residentes — que podem se juntar em blocos acompanhados, ou não, de comerciantes. Em razão disso, o índice de heterogeneidade α não apresenta resultados semelhantes aos demais índices, pois o primeiro aumenta se os agentes se aglomeram em poucos blocos, já os últimos não levam esse fator em consideração. Essa comparação pode ser feita através da figura 29 e, de forma mais detalhada, pela figura 30

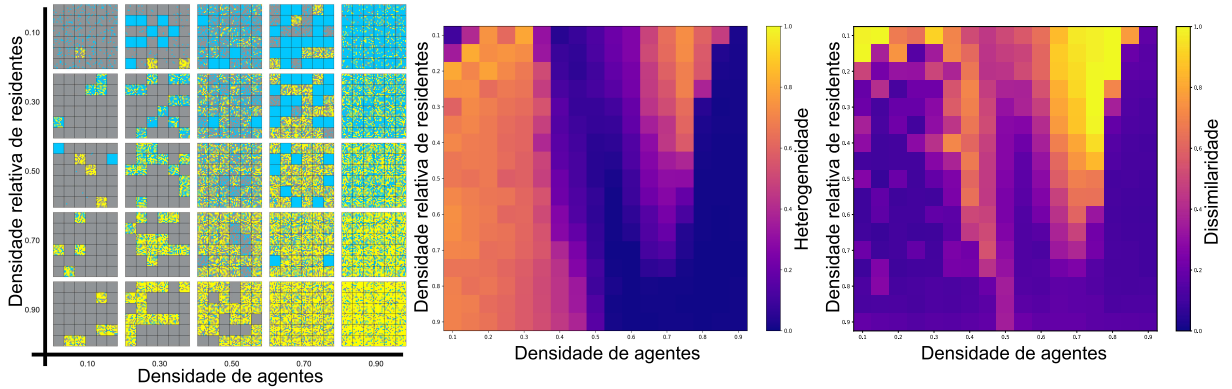


Figura 29 – Resultados de simulações do modelo com a variação da função utilidade dos residentes com parâmetros $L_C = 0.75$, $\Delta = 0.1$, $T = 0$. À esquerda da figura, uma imagem das configurações finais para sistemas com valores ρ_0 , $\rho_R \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes, comerciantes e espaços vazios; ao centro da figura, um mapa de calor dos valores médios do indicador de heterogeneidade para sistemas com ρ_0 e ρ_R com valores variando de 0.1 até 0.9 em intervalos de 0.05; à direita da figura, um mapa de calor do valor médio da dissimilaridade para sistemas com aqueles mesmos valores de ρ_0 e ρ_R .

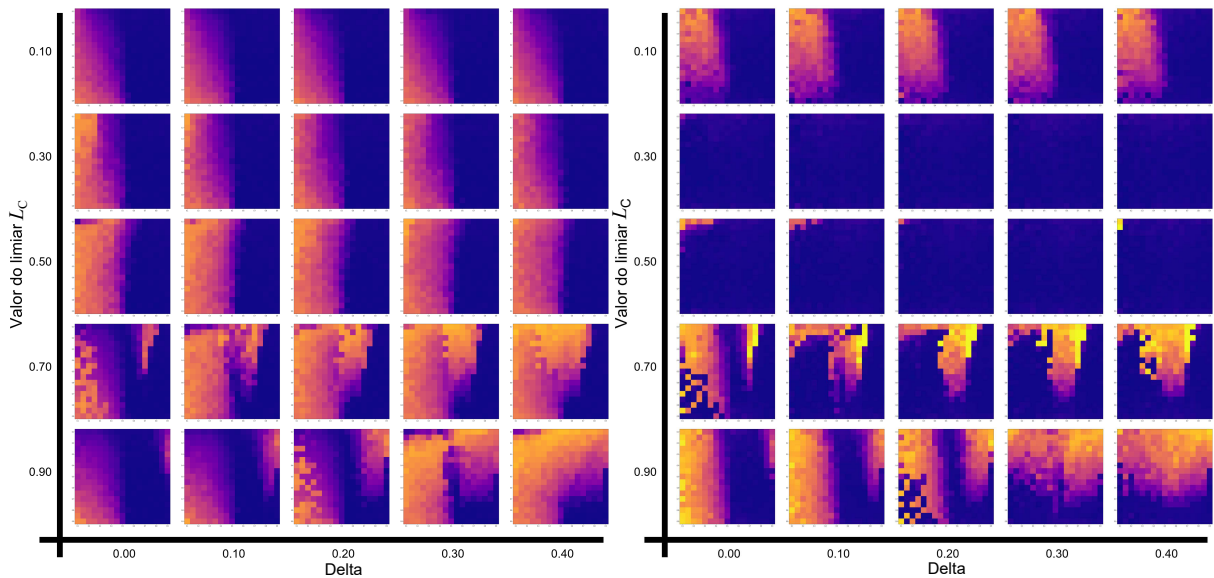


Figura 30 – Mapas de calor das propriedades medidas. A imagem à esquerda indica o índice de heterogeneidade α ; a imagem à direita mostra o índice de dissimilaridade. Os sistemas simulados possuem valores de $L_C \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $\Delta \in \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ e temperatura $T = 0$.

Essa distinção entre os índices se dá pela relevância ou não dos espaços vazios para a medição. Para os índices encontrados na literatura — dissimilaridade, Gini e raiz quadrada —, o que importa é a distribuição de agentes nos blocos ocupados; já no índice de heterogeneidade α , a distribuição dos agentes no espaço disponível também é relevante. No modelo original, os agentes sempre se distribuem de maneira que nenhum bloco fique vazio, pois se algum estivesse, seria eventualmente ocupado pelos residentes. Portanto, a

medida de heterogeneidade se assemelha à medida de segregação.

No caso do modelo com a variação, os agentes podem se aglomerar em poucos blocos e se distribuírem de maneira uniforme nesses blocos ocupados. Nesses casos, o índice de heterogeneidade indica valores maiores, a depender do número de blocos ocupados, e os demais indicadores assumem valores baixos.

No modelo sob a variação da função utilidade dos residentes, aglomeração não é sinônimo de maior utilidade dos agentes, de modo que os comerciantes podem aumentar a própria utilidade em detrimento da satisfação dos residentes. A figura 31 mostra a utilidade média dos comerciantes e residentes para diferentes parâmetros L_C e Δ .

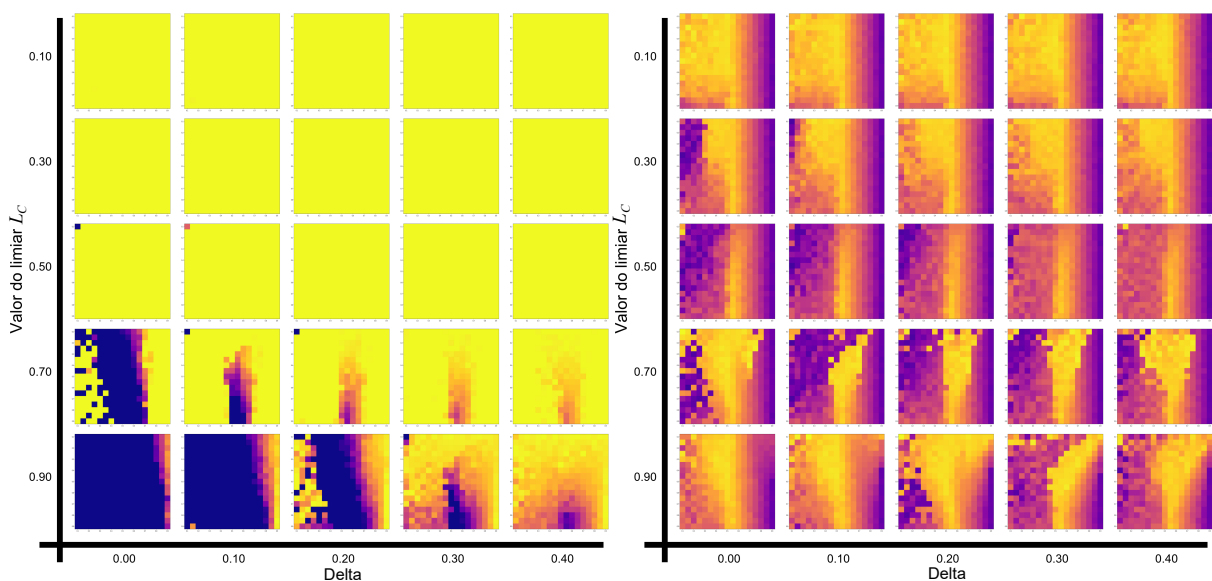


Figura 31 – Mapas de calor das utilidades dos comerciantes (à esquerda) e dos residentes (à direita). Os sistemas simulados possuem valores de $L_C \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $\Delta \in \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ e temperatura $T = 0$.

A utilidade média dos comerciantes aumenta para várias configurações com o aumento de Δ , mas sua relação com o índice de heterogeneidade (ou algum dos índices de segregação) não é trivial. Complexa também é a relação entre a utilidade média dos residentes e os demais índices calculados.

4.2.3 Variação: comerciante não é cliente

O pressuposto inicial de que o comerciante precisa de um número mínimo de clientes para se sustentar pode ser tratado de forma diferente. Supondo que apenas os residentes são relevantes para os comerciantes, de modo que a função utilidade destes dependa apenas da densidade de residentes presentes no bloco, é possível criar outra variação para o modelo original proposto.

Neste modelo modificado, a função dos residentes é a função descontínua 4.2 e a função dos comerciantes é também descontínua, assim como descreve a equação 4.1,

porém, em vez de depender da densidade de agentes do bloco, a função utilidade dos comerciantes depende da densidade de residentes no bloco, isto é, um comerciante se torna satisfeito em sua localidade se houver uma densidade mínima L_C de residentes em seu bloco, como ilustra a figura 32.

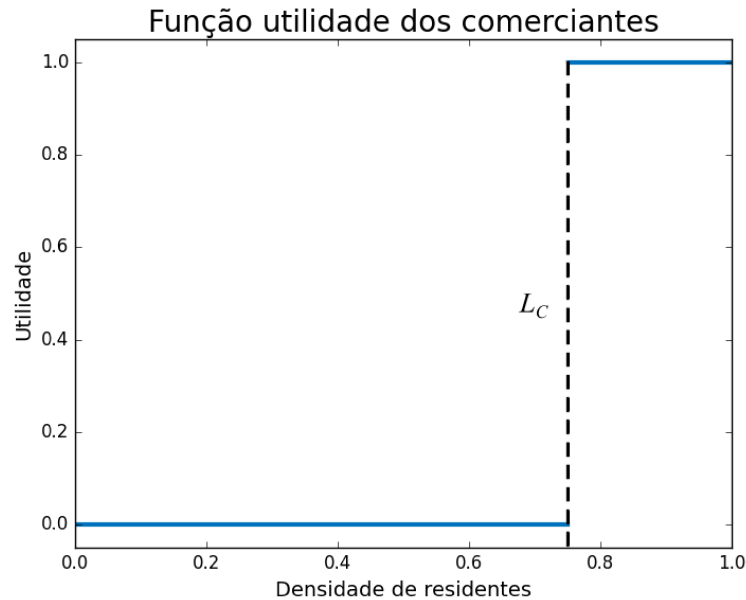


Figura 32 – Função utilidade dos comerciantes dependente da densidade de residentes no bloco com $L_C = 0.75$ e $\Delta = 0$.

Desta modificação, surge uma dinâmica diferente. Tomando $L_R > L_C$, os comerciantes se movem na rede em busca de um bloco com uma quantidade mínima de residentes. Quando essa condição é satisfeita, o bloco em questão se torna atrativo para os comerciantes, que ali passam a se juntar. Se o número de residentes se mantiver acima do mínimo, os comerciantes irão se aglomerar no bloco até que a densidade máxima de agentes tolerada pelos residentes, L_R , seja atingida. Quando isso acontece, o bloco se torna insatisfatório para os residentes, que começam a sair do mesmo, de modo que, ao se mudarem da localidade, tornam o bloco insustentável para os comerciantes, que começam a se mover novamente em busca de clientes. Esse fenômeno pode ser correlacionado ao processo de suburbanização, que, no primeiro momento, é caracterizado pelo espaço comercial “seguindo” o espaço residencial [35]⁶. O processo que leva o residente a sair de uma região muito povoada pode ser associado ao maior custo de vida e moradia nas regiões onde se concentra o comércio das cidades, os CBDs [6]. Esse modelo modificado pode ser melhor explorado a fim de tornar essas conexões com fenômenos reais mais sólidas e empiricamente embasadas.

⁶ O artigo [35] relata que, em um segundo momento do processo de suburbanização, o espaço residencial “segue” o espaço comercial. Uma variação do nosso modelo que atribua uma necessidade mínima de comércio em um bloco para que o residente se torne satisfeito pode ser uma perspectiva futura para verificar essa dinâmica.

A figura 33 ilustra o número de agentes em um bloco da cidade ao longo do tempo e a dinâmica do sistema. Como o sistema é muito errático quando a probabilidade de movimentação de um agente é 50%, quando a variação da utilidade $\Delta u = 0$, mesmo quando $T = 0$, a fim de verificar melhor a dinâmica, a probabilidade de movimentação foi definida como $P(0) = 0.05$. Dessa maneira, os agentes não saem com tanta facilidade de um bloco, a menos que a sua outra opção seja melhor.

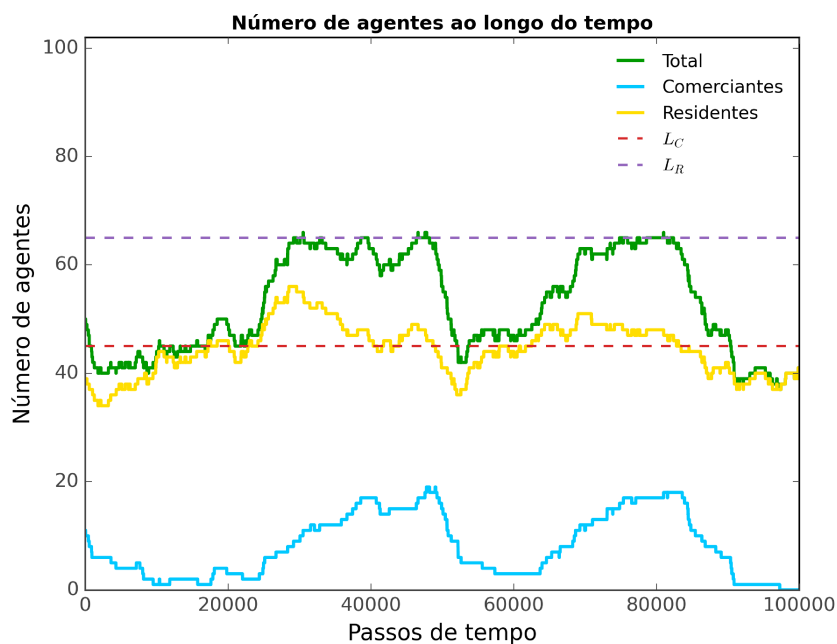


Figura 33 – Número de agentes ao longo do tempo em um dado bloco da cidade. A curva em ciano representa o número de comerciantes, a curva em amarelo representa o número de residentes e aquela em verde representa o número total de agentes no bloco. As linhas tracejadas vermelha e roxa indicam, respectivamente, os limiares dos comerciantes e dos residentes.

5 Discussão

Neste capítulo, iremos discutir alguns aspectos do nosso trabalho que merecem atenção. O primeiro diz respeito à impossibilidade de se construir uma função potencial $V(x)$ para o nosso modelo. Em um primeiro momento, queríamos usar a teoria utilizada por Grauwin et al. para descrever nosso sistema, mas verificamos que isso não é possível, o que será mostrado na seção 5.1. Essa foi uma das razões para construirmos um modelo baseado em uma rede quadrada com blocos, em vez de usar uma rede quadrada livre, como no modelo de Schelling, que pode parecer mais natural para se tratar questões sobre configurações espaciais dos agentes. Discutiremos essa questão da espacialidade do modelo na seção 5.2. Finalmente, a natureza dos modelos discutidos neste trabalho fomenta uma discussão sobre a conexão dos mesmos com a realidade. Uma breve discussão sobre esse tema é feita na seção 5.3.

5.1 Impossibilidade da criação de uma função $V(x)$

No modelo de Grauwin et al., podemos construir uma função $V(x)$ tal que $G = \Delta V$, conforme demonstrado na seção 3.3.1, e usar métodos da mecânica estatística para analisar os resultados. Porém, a existência de $V(x)$ depende de propriedades das funções utilidade dos agentes. Como iremos mostrar nesta seção, o nosso modelo usa funções utilidades que não possuem a propriedade necessária para se definir uma função potencial $V(x)$.

No apêndice do artigo de Grauwin et al., os autores deduzem as condições necessárias para a existência de $V(x)$ tal que $\Delta V = G = \Delta u$. Vamos supor que V possa ser expressa como uma soma sobre todos os Q blocos de funções $l(\rho_q^R, \rho_q^C)$, de forma semelhante à função entropia $S(x)$. Isto é:

$$V(x) = H \sum_q l(\rho_q^R, \rho_q^C). \quad (5.1)$$

Sendo ρ_q^R e ρ_q^C as densidades de residentes e comerciantes no bloco q , respectivamente. Quando um comerciante se move do bloco A para o bloco B ,

$$\begin{aligned} \Delta V = \Delta u_c &= H \left[l(\rho_A^R, \rho_A^C - 1/H) - l(\rho_A^R, \rho_A^C) + l(\rho_B^R, \rho_B^C + 1/H) - l(\rho_B^R, \rho_B^C) \right] \\ &= \frac{l(\rho_B^R, \rho_B^C + h) - l(\rho_B^R, \rho_B^C)}{h} - \frac{l(\rho_A^R, \rho_A^C) - l(\rho_A^R, \rho_A^C - h)}{h} \\ &\approx \frac{\partial l}{\partial \rho^C}(\rho_B^R, \rho_B^C) - \frac{\partial l}{\partial \rho^C}(\rho_A^R, \rho_A^C). \end{aligned}$$

Sendo $h = 1/H$. Desse resultado, podemos fazer a seguinte associação:

$$u_C(\rho^R, \rho^C) = \frac{\partial l}{\partial \rho^C}(\rho^R, \rho^C). \quad (5.2)$$

De forma análoga:

$$u_R(\rho^R, \rho^C) = \frac{\partial l}{\partial \rho^R}(\rho^R, \rho^C). \quad (5.3)$$

Portanto, $-\vec{F} \equiv \vec{\nabla}l = (u_R, u_C)$. Para que a função l exista, é preciso que \vec{F} seja um campo vetorial conservativo. Para tal, é necessário que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{\partial u_C}{\partial \rho^R} - \frac{\partial u_R}{\partial \rho^C} = 0. \quad (5.4)$$

ou seja, $\partial_{\rho^R} u_C = \partial_{\rho^C} u_R$. Caso as funções utilidade dependam apenas da densidade total, isto é, caso $u_R = u_R(\rho^R + \rho^C)$ e $u_C = u_C(\rho^R + \rho^C)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial \rho^C} &= \frac{\partial u_R}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho^C} = \frac{\partial u_R}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial u_C}{\partial \rho^R} &= \frac{\partial u_C}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho^R} = \frac{\partial u_C}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

O que exige que $\partial_{\rho} u_C = \partial_{\rho} u_R$, para todo o domínio — uma condição muito limitante para nosso tipo de sistema, em que os agentes possuem respostas possivelmente antagônicas frente à chegada de um novo agente em seu bloco.

Para um sistema discreto, a relação descrita na equação 5.4 pode ser reescrita na forma:

$$u_C(\rho^R + 1/H, \rho^C) - u_C(\rho^R, \rho^C) = u_R(\rho^R, \rho^C + 1/H) - u_R(\rho^R, \rho^C). \quad (5.5)$$

A variação do valor da função utilidade descrita na derivada com relação a ρ_R (ou ρ_C), em um sistema discreto, corresponde à variação da utilidade de um agente dada a entrada de um residente (ou comerciante) em seu bloco. Para nosso modelo e suas variações, essa condição não é satisfeita, portanto não é possível construir uma função $V(x)$, de modo que resultados gerais para esses sistemas não são conhecidos [8].

É instrutivo analisar uma outra forma de verificar que \vec{F} não é um campo conservativo. Para tal, basta mostrar que uma integral de linha em um caminho fechado é diferente de zero. A função $\vec{F}(\rho^R, \rho^C)$ é definida em $D = \{(\rho^R, \rho^C) \mid \rho^R \geq 0, \rho^C \geq 0, \rho^R + \rho^C \leq 1\}$, uma região triangular. Definindo dois caminhos, C_1 e C_2 , como sendo os catetos e a hipotenusa do triângulo AOB , respectivamente, conforme ilustra a figura 34. Então:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \implies \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.6)$$

De fato, sendo os pontos $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ e O a origem do sistema,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= L_R + L_C - 1, \\ \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -1. \end{aligned}$$

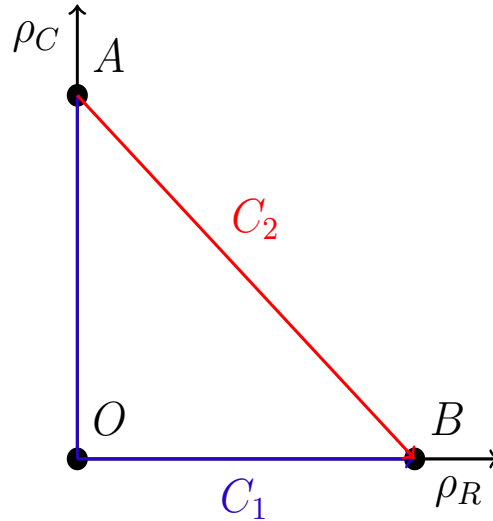


Figura 34 – Caminhos distintos para se calcular a integral de linha do ponto inicial A ao ponto final B . O ponto A e B têm coordenadas $(0, 1)$ e $(1, 0)$, respectivamente.

Portanto, a equação (5.6) apenas é satisfeita se $L_R + L_C = 2$, que apenas ocorre se $L_R = L_C = 1$. Esses valores de parâmetros produzem um sistema em que todos os blocos, independentemente das suas densidades, são igualmente satisfatórios para todos os agentes, tornando o modelo trivial e infrutífero.

5.2 Espacialidade do modelo

O modelo deste trabalho assume que a cidade é representada por um conjunto de Q blocos espacialmente situados em uma rede quadrada. Por sua vez, cada um dos blocos é composto por H células dispostas em uma rede quadrada interna ao bloco. Essa configuração, porém, é mascarada pela dinâmica do sistema por duas razões. A primeira é que o movimento dos agentes entre os blocos pode ser feito sem restrição para qualquer bloco que possua espaço vazio. Assim, a distância espacial dos blocos não possui efeito no modelo. Em segundo lugar, quando um agente se move para um bloco, ele pode ocupar qualquer uma das células vazias dentro do mesmo, independentemente da vizinhança da célula destino. Por isso, se $p_q = (n_q^R, n_q^C)$ é um par ordenado representando a composição do bloco q , a estrutura espacial da cidade do nosso modelo pode ser formalmente representada pelo conjunto não ordenado de pares $\sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_Q\}$.

O modelo é, objetivamente, independente das configurações internas de cada bloco e da disposição dos blocos na cidade. Entretanto, caso as configurações dos blocos na cidade e dos agentes de cada bloco sejam consideradas indistinguíveis, a descrição da cidade se resume ao conjunto de pares ordenados e o conceito de entropia para uma cidade com configuração σ não faz sentido, pois só existe uma maneira de organizar um conjunto não ordenado de Q pares ordenados fixos. Portanto, uma cidade com N_R residentes e

N_C comerciantes pode distribuí-los de diversas maneiras entre os blocos, porém todas essas maneiras, todos os possíveis conjuntos não ordenados σ , são equiprováveis, isto é, a completa segregação e a completa integração dos agentes têm a mesma chance de ocorrer. Nesse caso, a entropia só seria útil ao comparar cidades com números distintos de agentes.

Para contornar essa situação e conseguir definir uma função entropia útil que, por consequência, pode ser utilizada para a construção de uma medida de heterogeneidade, é razoável supor a espacialidade dos agentes dentro de cada bloco e dos blocos na cidade como um todo — esta última suposição é mais flexível e será abordada mais adiante. Dessa forma, os blocos e as organizações dos agentes em cada bloco são considerados distinguíveis. O nosso modelo é compatível com uma dinâmica urbana em que os agentes levam em consideração a densidade de regiões maiores, como os bairros (representados pelos Q blocos), em vez de densidades locais, como um quarteirão (representado pelas vizinhanças de uma célula dentro de um bloco). Além disso, é razoável supor em uma primeira aproximação que os agentes, quando buscam uma nova região para se mudar, levem em consideração qualquer bloco na cidade, independentemente de este ser próximo ou não. É evidente que pode-se incluir fatores ligados à distância que influenciem a dinâmica do modelo, por exemplo, uma “força de gravidade” em torno de blocos mais ou menos vazios. Questões como essa serão analisadas em investigações futuras.

No cálculo da entropia, se consideramos o conjunto de pares $\sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_Q\}$ como não ordenado, o cálculo da entropia se torna mais complexo, assemelhando-se à modificação da física estatística ao tratar de problemas da física quântica ao levar em consideração o princípio da indistinguibilidade das partículas. Na subseção 4.2.1.2, o que fizemos foi supor que os blocos são distinguíveis e estão, de fato, estruturados em uma rede quadrada. Para fins de definir uma medida de heterogeneidade, isso é suficiente e simplifica o cálculo. No apêndice C, a entropia de um sistema de blocos indistinguíveis é deduzida.

Uma outra maneira de se definir a estrutura espacial do nosso modelo é de forma semelhante ao modelo de Schelling, utilizando uma rede quadrada livre, sem blocos. Os vizinhos do agente, nesse caso, são aqueles que são mais próximos espacialmente dele. A definição de satisfação dos agentes é semelhante. Os comerciantes são satisfeitos apenas quando têm seu limiar de vizinhos, L_C , atingido; os residentes possuem função utilidade semelhante à equação (4.2). As simulações mostram que os comerciantes também se aglomeram nesse sistema. Entretanto, as “bolhas” de comerciantes são apenas estáveis se envoltas por uma “película” de residentes. Esse resultado é ilustrado na figura 35.

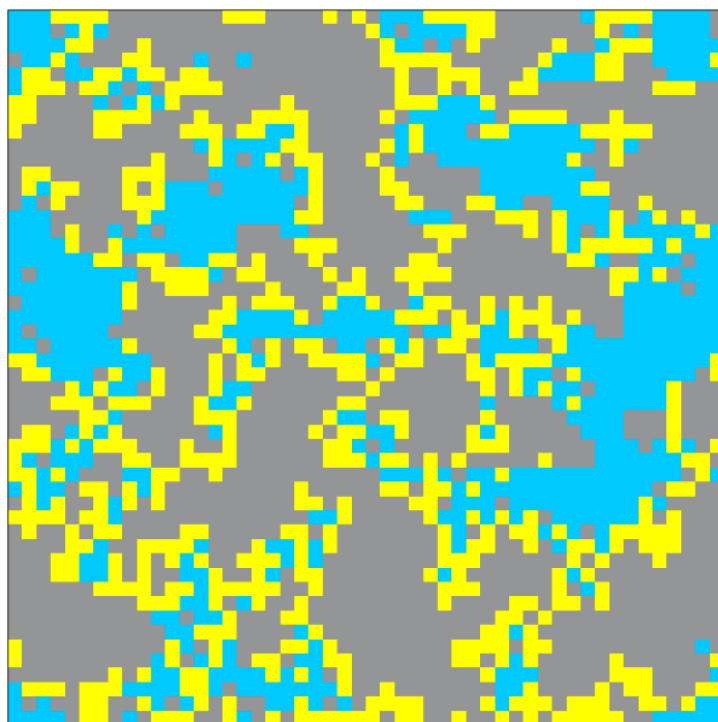


Figura 35 – Resultado para um sistema semelhante ao do modelo deste trabalho, definido em uma rede quadrada sem blocos. As células em amarelo, ciano e cinza representam, respectivamente, residentes comerciantes e espaços vazios.

5.3 Aspectos da modelagem

A modelagem matemática de aspectos da realidade é um tema de interesse para a filosofia da ciência e fundamenta grande parte da produção científica, desde modelos físicos até modelos econômicos. Inerente ao processo de modelagem, de abstração de situações reais, existe a simplificação de eventos, fenômenos e sistemas. Nesse processo, é preciso levar em consideração a validade e a plausibilidade das suposições que fundamentam o modelo. De toda forma, elas devem ser testadas empiricamente, para determinar se são verificadas.

Esse tema é discutido no artigo de Sugden, em que ele apresenta críticas a alguns modelos clássicos, inclusive ao modelo de Schelling¹. Sugden afirma que muitos dos modelos sugerem poder explicar algum fenômeno real, mas os autores são relutantes em dizer o que realmente os modelos propostos dizem sobre a realidade [23].

Outro fator relevante para o teste empírico dos modelos são os conjuntos de dados utilizados. Como os modelos se baseiam, muitas vezes, em “primeiros princípios”, que seriam iguais para todas as cidades, é preciso compará-los com dados de diversos países, para verificar como fatores econômicos, políticos e sociais podem afetar as previsões e a

¹ Modelo este que é bem discutido no artigo [22], que mostra que, apesar de muito influente, o modelo de Schelling tem sido mais uma inspiração para os trabalhos sobre segregação social do que o sujeito de testes empíricos de seus fundamentos. Além disso, o artigo destaca que existe um crescente número de artigos influentes sobre o tema de segregação social que não citam Thomas Schelling.

qualidade do modelo.

É preciso destacar que o conhecimento interdisciplinar é de suma importância para o tratamento de problemas da geografia urbana a fim de concretizar a ligação entre a modelagem, o escrutínio e a realidade. Como destacam Crooks, Castle e Batty no artigo [36], um dos principais desafios na construção de modelos baseados em agentes é conectá-los aos conhecimentos e teorias pertinentes ao tema que desejam modelar, os quais estão frequentemente ausentes. Sem essa conexão, os modelos se tornam demasiado genéricos e de limitada utilidade para a compreensão de fenômenos urbanos.

Em vista das considerações apresentadas, podemos dizer que o nosso trabalho se baseia em conceitos pertinentes à geografia urbana, como a teoria do lugar central e o *central business district*, reproduzindo um dos resultados dessas teorias de forma qualitativa: a formação de centros comerciais. Do ponto de vista de validação empírica, nosso trabalho se mostra promissor no que diz respeito a como a heterogeneidade pode vir a depender das densidades de residentes e comerciantes. Para tanto, existe a perspectiva de analisar dados espaciais de cidades, o que será comentado no capítulo final de conclusões e perspectivas.

6 Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, exploramos a organização espacial do comércio através de uma abordagem fundamentada na modelagem baseada em agentes. Utilizamos métodos da física estatística para investigar como as ações e interações entre os agentes podem originar padrões emergentes na distribuição dos mesmos no espaço, em especial, a formação de centros comerciais.

Os resultados obtidos demonstram que, por meio de regras simples, o modelo foi capaz de descrever a formação de centros comerciais no sistema. Além disso, os resultados mostram a relevância do fator Δ , aquele que é o responsável por criar uma transição suave entre a condição de completa insatisfação e de plena satisfação na função utilidade do comerciante, no tempo gasto para que os centros comerciais se formem. Uma função utilidade que possua uma suavização entre a condição de máxima e mínima satisfação permite que o agente se encaminhe para uma condição de maior satisfação, em vez de depender do acaso gerado por caminhadas aleatórias. Com $\Delta \neq 0$, o agente atribui valores distintos para diferentes condições, aumentando a probabilidade de atingir a satisfação maior, possibilitando distinguir de forma mais precisa blocos piores de blocos melhores.

As medidas de heterogeneidade e segregação analisadas fornecem resultados semelhantes para o modelo base proposto, entretanto, mostram valores distintos para o modelo submetido à variação da função utilidade do residente, ressaltando a complexidade da definição e medição da segregação. Como a nossa medida de heterogeneidade α leva em consideração até mesmo os blocos vazios, isto é, considera todo o sistema, ao contrário dos demais índices estudados, os resultados requerem maior investigação para se entender as nuances das diferenças entre eles e a sua relação com o espaço e, por consequência, com a espacialidade do modelo. Dessa forma, essa análise requisita uma comparação com um modelo sem blocos, em que se pode comparar medidas globais e locais de segregação e, possivelmente, do índice de heterogeneidade α [37].

A alteração do modelo que modifica a função utilidade dos comerciantes, que passa a depender apenas da densidade de residentes no bloco, mostra resultados promissores para o estudo da dinâmica urbana e da disposição de espaços residenciais e comerciais ao longo do tempo. Transportar esse modelo modificado para uma rede quadrada sem blocos e levar em consideração a atração gerada por espaços comerciais é uma abordagem que pode aprimorar o estudo da transformação urbana destacada no artigo [35] e pode, inclusive, ser expandida para tratar de outros fenômenos da dinâmica urbana, como a gentrificação, que é um processo de transformação urbana que ocorre quando áreas historicamente ocupadas por populações de menor renda passam a atrair moradores e investimentos de

classes mais altas, resultando em mudanças significativas na dinâmica social, cultural, econômica e física da região.

Para realizar a validação do modelo, isto é, compará-lo com dados empíricos a fim de verificar sua acurácia, é possível confrontar os resultados obtidos com dados, por exemplo, do uso e ocupação de lotes da cidade de Belo Horizonte (figura 36), inclusive sua evolução temporal. Transpor a análise para o próprio mapa das cidades através de um sistema de informação geográfica (GIS) pode fornecer um eficiente método de validação do modelo. Os dados serão úteis para verificar a relevância da densidade e proporção entre espaços residenciais e comerciais para a formação de centros comerciais e como esses espaços mudam ao longo do tempo. Ao realizar a comparação, é possível atacar um dos principais desafios da modelagem baseada em agentes: a sua validação [36].

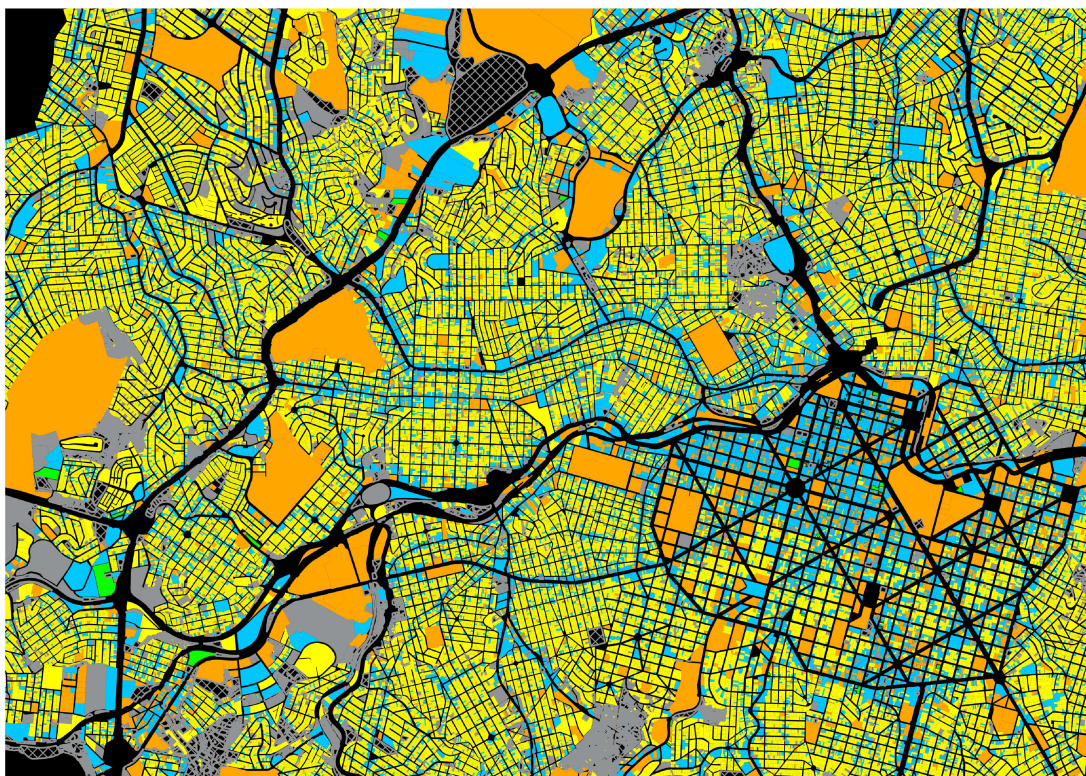


Figura 36 – Recorte do mapa de uso e ocupação de lote da cidade de Belo Horizonte. Dados referentes ao ano de 2022. A atribuição de cores para os tipos de uso dos lotes determinados pela prefeitura foi feita pelo autor. Os lotes de cor amarela são residenciais, os azuis possuem alguma atividade comercial e os laranjas não se encaixam nessas definições.

Finalmente, é possível aprimorar o modelo através da utilização de teorias mais elaboradas da área da geografia urbana e desenvolvimento regional para modelar os espaços comerciais e residenciais a fim de tornar nosso sistema mais verossímil e construir a conexão interdisciplinar exigida pela natureza do tema tratado, que é, também, um dos principais desafios enumerados por Batty et al. [36].

Referências

- [1] Jacobs, Jane: *Morte e vida de grandes cidades*. WMF Martins Fontes, São Paulo, 3ª edição, 2011. Citado na página 10.
- [2] Schelling, Thomas C.: *Models of Segregation*. RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 20.
- [3] Malczewski, Jacek: *Central Place Theory*. Em Kobayashi, Audrey (editor): *International Encyclopedia of Human Geography (Second Edition)*, páginas 127–131. Elsevier, Oxford, second edition edição, 2009, ISBN 978-0-08-102296-2. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780081022955103324>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 14 e 29.
- [4] McCann, P.: *Modern Urban and Regional Economics*. OUP Oxford, 2013, ISBN 9780199582006. <https://books.google.com/books?id=H6-m6VlCWQC>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- [5] Rice, G.A.: *Central Business District*. Em Kitchin, Rob e Nigel Thrift (editores): *International Encyclopedia of Human Geography*, páginas 18–25. Elsevier, Oxford, 2009, ISBN 978-0-08-044910-4. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080449104010415>. Citado na página 15.
- [6] Rice, Gareth: *Central Business District*. Em Kobayashi, Audrey (editor): *International Encyclopedia of Human Geography (Second Edition)*, páginas 119–126. Elsevier, Oxford, second edition edição, 2020, ISBN 978-0-08-102296-2. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780081022955102422>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.
- [7] Batty, Michael: *The New Science of Cities*. The MIT Press, 2013, ISBN 9780262019521. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt9qf7m6>, acesso em 2024-12-11. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [8] Barthelemy, Marc: *The statistical physics of cities*. Nature Reviews Physics, 1(6):406415, maio 2019, ISSN 2522-5820. <http://dx.doi.org/10.1038/s42254-019-0054-2>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 18 e 53.
- [9] Castellano, Claudio, Santo Fortunato e Vittorio Loreto: *Statistical physics of social dynamics*. Rev. Mod. Phys., 81:591–646, May 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.591>. Citado na página 16.

- [10] Ribeiro, Fabiano e Diego Rybski: *Mathematical models to explain the origin of urban scaling laws*. Physics Reports, 1012:1–39, abril 2023. Citado na página 17.
- [11] Simini, Filippo, Marta C. Gonzalez, Amos Maritan e Albert Laszlo Barabasi: *A Universal Model for Mobility and Migration Patterns*. Nature, 484:96–100, fevereiro 2012. Citado na página 17.
- [12] Soo, Kwok Tong: *Zipf's Law for cities: a cross-country investigation*. Regional Science and Urban Economics, 35(3):239–263, 2005, ISSN 0166-0462. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016604620400033X>. Citado na página 18.
- [13] Cristelli, Matthieu, Michael Batty e Luciano Pietronero: *There is More than a Power Law in Zipf*. Scientific reports, 2:812, novembro 2012. Citado na página 18.
- [14] Hegselmann, Rainer: *Thomas C. Schelling and James M. Sakoda: The Intellectual, Technical, and Social History of a Model*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 20, janeiro 2017. Citado na página 18.
- [15] Abella, David, Maxi Miguel e Jose Javier Ramasco: *Aging effects in Schelling segregation model*. Scientific Reports, 12:19376, novembro 2022. Citado na página 19.
- [16] Zhang, Junfu: *Residential segregation in an all-integrationist world*. Journal of Economic Behavior & Organization, 54(4):533–550, 2004, ISSN 0167-2681. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167268103001768>. Citado na página 19.
- [17] Ortega, Diego, Javier Rodríguez-Laguna e Elka Korutcheva: *Segregation in spatially structured cities*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 608:128267, 2022, ISSN 0378-4371. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122008251>. Citado na página 19.
- [18] Gambetta, Daniele, Giovanni Mauro e Luca Pappalardo: *Mobility constraints in segregation models*. Scientific Reports, 13, julho 2023. Citado na página 19.
- [19] Pancs, Romans e Nicolaas J. Vriend: *Schelling's spatial proximity model of segregation revisited*. Journal of Public Economics, 91(1):1–24, 2007, ISSN 0047-2727. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047272706001228>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 31.
- [20] Rogers, Tim e Alan J McKane: *A unified framework for Schellings model of segregation*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2011(07):P07006, jul 2011. <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2011/07/P07006>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

- [21] Vinkovi, Dejan e Alan Kirman: *A physical analogue of the Schelling model*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 103(51):19261–19265, 2006. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0609371103>. Citado na página 19.
- [22] Ubareviiien, Rta, Maarten van Ham e Tiit Tammaru: *Fifty years after the Schelling's Models of Segregation: Bibliometric analysis of the legacy of Schelling and the future directions of segregation research*. Cities, 147:104838, 2024, ISSN 0264-2751. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264275124000520>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 56.
- [23] Sugden, Robert: *Credible Worlds, Capacities and Mechanisms*. Erkenntnis (1975-), 70(1):3–27, 2009, ISSN 01650106, 15728420. <http://www.jstor.org/stable/40267405>, acesso em 2024-11-11. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 56.
- [24] Grauwin, Sébastien, Eric Bertin, Rémi Lemoy e Pablo Jensen: *Competition between collective and individual dynamics*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(49):20622–20626, 2009. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0906263106>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- [25] Jensen, Pablo, Thomas Matreux, Jordan Cambe, Hernan Larralde e Eric Bertin: *Giant Catalytic Effect of Altruists in Schelling's Segregation Model*. Phys. Rev. Lett., 120:208301, May 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.208301>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- [26] Schelling, Thomas C: *Micromotives and macrobehavior*. WW Norton & Company, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 47.
- [27] Gauvin, Laetitia, Jean Pierre Nadal e Jean Vannimenus: *Schelling segregation in an open city: A kinetically constrained Blume-Emery-Griffiths spin-1 system*. Phys. Rev. E, 81:066120, Jun 2010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.066120>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- [28] Blume, M., V. J. Emery e Robert B. Griffiths: *Ising Model for the λ Transition and Phase Separation in He³-He⁴ Mixtures*. Phys. Rev. A, 4:1071–1077, Sep 1971. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.4.1071>. Citado na página 21.
- [29] Gauvin, Laetitia, Jean Vannimenus e J P Nadal: *Phase diagram of a Schelling segregation model*. The European Physical Journal B, 70:293–304, 2009. Citado na página 22.
- [30] Clark, William A. V. e Mark Fossett: *Understanding the social context of the Schelling segregation model*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 105(11):4109–4114, 2008. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0708155105>. Citado na página 23.

- [31] Ortega, Diego, Javier Rodríguez-Laguna e Elka Korutcheva: *Segregation in spatially structured cities*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 608:128267, 2022, ISSN 0378-4371. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122008251>. Citado na página 23.
- [32] Salinas, S. R.: *Introdução à Física Estatística*. EDUSP, 1997. Citado na página 25.
- [33] Ramshaw, J.D.: *The Statistical Foundations Of Entropy*. World Scientific Publishing Company, 2017, ISBN 9789813234147. <https://books.google.com.br/books?id=cENBDwAAQBAJ>. Citado na página 26.
- [34] Hutchens, Robert: *Numerical measures of segregation: desirable properties and their implications*. *Mathematical Social Sciences*, 42(1):13–29, 2001, ISSN 0165-4896. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489600000706>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- [35] Zhou, Lei, Ming Liu, Zhenlong Zheng e Wei Wang: *Quantification of Spatial Association between Commercial and Residential Spaces in Beijing Using Urban Big Data*. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 11(4), 2022, ISSN 2220-9964. <https://www.mdpi.com/2220-9964/11/4/249>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 58.
- [36] Crooks, Andrew, Christian Castle e Michael Batty: *Key challenges in agent-based modelling for geo-spatial simulation*. *Computers, Environment and Urban Systems*, 32(6):417–430, 2008, ISSN 0198-9715. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0198971508000628>, *GeoComputation: Modeling with spatial agents*. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- [37] Feitosa, Flávia F., Gilberto Câmara, Antônio Miguel Vieira Monteiro, Thomas Koschitzki e Marcelino Pereira dos Santos Silva: *Spatial Measurement of Residential Segregation*. Em *Brazilian Symposium on GeoInformatics*, 2004. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:9405159>. Citado na página 58.

APÊNDICE A – Dedução da função ligação

Assumindo que L possa ser escrito de forma análoga à entropia total do sistema, então $L(x) = H \sum_q l(\rho_q)$. Quando um agente sai do bloco A e vai para o bloco B , apenas os valores das densidades desses blocos são alterados, ρ_A e ρ_B , respectivamente. Portanto, as densidades dos blocos A e B , após a movimentação do agente, são $\rho'_A = \rho_A - 1/H$ e $\rho'_B = \rho_B + 1/H$, respectivamente. Portanto $\Delta L = H [l(\rho'_A) + l(\rho'_B) - l(\rho_A) - l(\rho_B)]$. Escrito de outra forma:

$$\begin{aligned} \Delta L &= H [l(\rho_A - 1/H) - l(\rho_A)] + H [l(\rho_B + 1/H) - l(\rho_B)] \\ &= -\frac{l(\rho_A) - l(\rho_A - h)}{h} + \frac{l(\rho_B + h) - l(\rho_B)}{h}, \end{aligned}$$

sendo $h = 1/H$. Essas expressões são precisamente a definição da derivada da função l (uma derivada é esquerda e outra é direita), caso $h \rightarrow 0$. Portanto, para H grande, ΔL pode ser aproximado por:

$$\Delta L \approx l'(\rho_B) - l'(\rho_A). \quad (\text{A.1})$$

Como $\rho'_B \approx \rho_B$ e se deseja que $\Delta L = \Delta u = u(\rho'_B) - u(\rho_A)$, pode-se fazer a associação $l'(\rho) = u(\rho)$, de modo que

$$l(\rho) = \int_0^\rho u(\rho') d\rho'. \quad (\text{A.2})$$

Um outro modo de obter esse mesmo resultado é supor que

$$l(\rho) = \sum_{i=0}^{\rho H} u\left(\frac{i}{H}\right) \frac{1}{H}. \quad (\text{A.3})$$

Esta é a forma discreta da equação (A.2). Calculando $\Delta L = L_F - L_I$, sendo L_I e L_F os valores da função L antes e depois da movimentação do agente, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} L_I &= \sum_q \left[\sum_{i=0}^{\rho_q H} u\left(\frac{i}{H}\right) \right] = L_0 + \sum_{i=0}^{\rho_A H} u\left(\frac{i}{H}\right) + \sum_{i=0}^{\rho_B H} u\left(\frac{i}{H}\right), \\ L_F &= L_0 + \sum_{i=0}^{\rho'_A H} u\left(\frac{i}{H}\right) + \sum_{i=0}^{\rho'_B H} u\left(\frac{i}{H}\right). \end{aligned}$$

Sendo L_0 a soma dos termos $l(\rho_q)$ referentes às densidades que não se alteram durante o movimento de um dado agente e as densidades ρ_A , ρ_B , ρ'_A e ρ'_B são as densidades dos blocos A e B antes e depois da movimentação do agente, assim como explicitado anteriormente.

Logo:

$$\begin{aligned}
 \Delta L &= \sum_{i=0}^{\rho'_A H} u\left(\frac{i}{H}\right) - \sum_{i=0}^{\rho_A H} u\left(\frac{i}{H}\right) + \sum_{i=0}^{\rho'_B H} u\left(\frac{i}{H}\right) - \sum_{i=0}^{\rho_B H} u\left(\frac{i}{H}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\rho_A H - 1} u\left(\frac{i}{H}\right) - \sum_{i=0}^{\rho_A H} u\left(\frac{i}{H}\right) + \sum_{i=0}^{\rho_B H + 1} u\left(\frac{i}{H}\right) - \sum_{i=0}^{\rho_B H} u\left(\frac{i}{H}\right) \\
 &= u(\rho_B + 1/H) - u(\rho_A) \\
 &= u(\rho'_B) - u(\rho_A) \\
 &= \Delta u.
 \end{aligned}$$

Portanto, é sempre verdadeiro que $\Delta L = \Delta u$. De modo que, tomando H muito grande, obtém-se a equação (A.2):

$$l(\rho) = \sum_{i=0}^{\rho H} u\left(\frac{i}{H}\right) \frac{1}{H} \xrightarrow{H \rightarrow \infty} \int_0^\rho u(\rho') d\rho'. \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B – Mapas de calor do índice de heterogeneidade

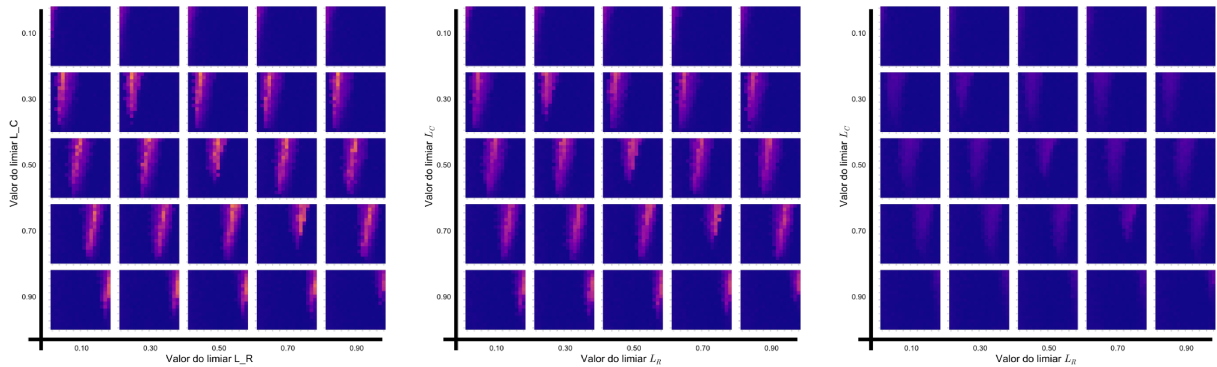


Figura 37 – Mapas de calor do índice de heterogeneidade com $\Delta = 0.0$ e $T = 0.0, 0.2, 0.5$, respectivamente, para valores dos limiares $L_R, L_C \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

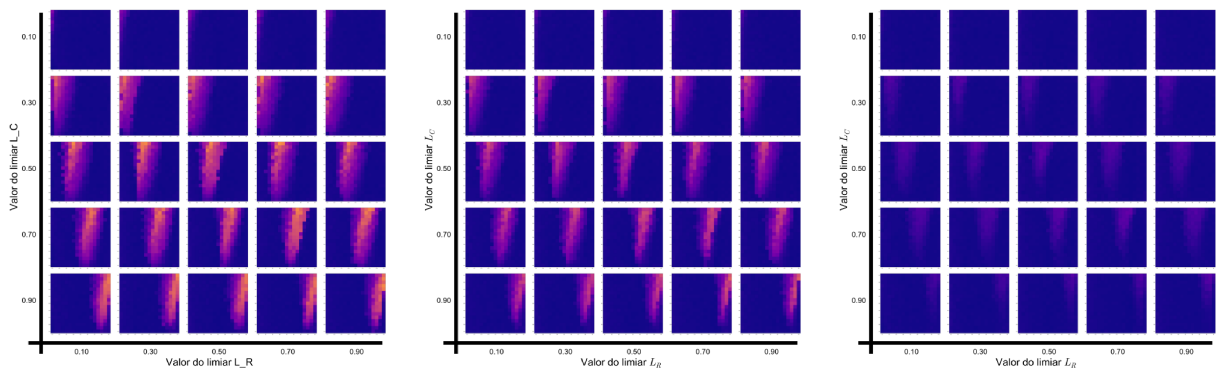


Figura 38 – Mapas de calor do índice de heterogeneidade com $\Delta = 0.1$ e $T = 0.0, 0.2, 0.5$, respectivamente, para valores dos limiares $L_R, L_C \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

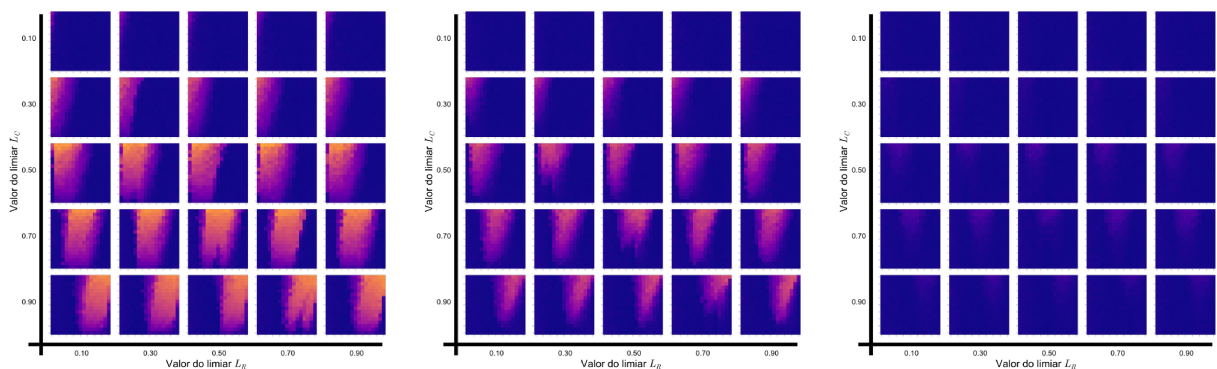


Figura 39 – Mapas de calor do índice de heterogeneidade com $\Delta = 0.3$ e $T = 0.0, 0.2, 0.5$, respectivamente, para valores dos limiares $L_R, L_C \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

APÊNDICE C – Entropia

Uma cidade de Q blocos e H células pode distribuir seus agentes pelos blocos da cidade, de modo que cada bloco será descrito por um par ordenado $p_q = (n_q^R, n_q^C)$, que contém a informação das quantidades de agentes no mesmo, sendo n_q^R, n_q^C o número de residentes e comerciantes no bloco q , respectivamente. Uma cidade, desconsiderando sua espacialidade, isto é, considerando seus blocos como indistinguíveis, pode ser definida pelo conjunto dos pares ordenados de cada um de seus blocos, $\sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_Q\}$, essa é sua configuração.

Vamos supor que cada bloco, descrito pelo seu par ordenado p_q , pode arranjar os seus agentes de $\Omega(p_q)$ maneiras distintas e equiprováveis. Cada bloco q pode distribuir n_q agentes em H células e n_q^R residentes dentre os espaços ocupados pelos agentes; os comerciantes ficam nos $n_q - n_q^R$ espaços restantes. O número de configurações possíveis em um bloco q é um problema simples de combinatória:

$$\begin{aligned} \Omega(p_q) &= \Omega(n_q^R, n_q^C) = \binom{H}{n_q} \binom{n_q}{n_q^R} \\ &= \frac{H!}{n_q! (H - n_q)!} \frac{n_q!}{n_q^R! (n_q - n_q^R)!} \\ &= \frac{H!}{n_q^R! (H - n_q)! (n_q - n_q^R)!}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Cada possível organização dos agentes em um bloco vamos chamar de microestado do bloco.

Existem a pares ordenados acessíveis a um bloco qualquer, eles estão contidos no conjunto $\mathcal{P} = \{(n_q^R, n_q^C) \mid n_q^R, n_q^C \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_q^R, n_q^C \leq H, n_q^R + n_q^C \leq H\}$. Portanto, uma cidade na configuração σ possui m_k blocos com par ordenado $p^k, \forall p^k \in \mathcal{P}$. Os a valores m_k podem ser dispostos no vetor $\vec{V} = (m_1, \dots, m_a)$, este que descreve a cidade de forma equivalente ao conjunto σ .

Sabemos que existem m_k blocos com par ordenado p^k , cada um deles pode estar em um dos $\Omega(p^k)$ microestados acessíveis, queremos então saber de quantas maneiras esses blocos podem se organizar. Esse problema é equivalente à permutação com repetição de m_k bolinhas e $\Omega(p^k) - 1$ divisórias, pois, em ambos os problemas, desejamos distribuir m_k objetos idênticos entre $\Omega(p^k)$ possíveis classificações. O número organizações possíveis é:

$$\frac{(\Omega(p^k) - 1 + m_k)!}{m_k! (\Omega(p^k) - 1)!}. \quad (\text{C.2})$$

O número de maneiras com que os blocos, cada um com seu par ordenado p^k , podem ser organizar ao fim, é:

$$\Omega(\sigma) = \prod_{i=0}^a \frac{(\Omega(p^k) - 1 + m_k)!}{m_k! (\Omega(p^k) - 1)!}. \quad (\text{C.3})$$

Como supusemos que os microestados assumidos pelos blocos são equiprováveis, as micro configurações da cidade em dada configuração também o são. Portanto, é possível definir a sua entropia como:

$$\begin{aligned} S(\sigma) &= \ln \Omega(\sigma) \\ &= \ln \left(\prod_{i=0}^a \frac{(\Omega(p^k) - 1 + m_k)!}{m_k! (\Omega(p^k) - 1)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^a \left[\ln (\Omega(p^k) - 1 + m_k)! - \ln m_k! - \ln (\Omega(p^k) - 1)! \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$