



EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

# ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA UMA VISÃO GEOMÉTRICA

EDITORA  
UFMG

# ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA UMA VISÃO GEOMÉTRICA



## **UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Reitor: Ronaldo Tadêu Pena

Vice-Reitora: Heloisa Maria Murgel Starling

### **Pró-Reitoria de Graduação**

Pró-Reitor: Mauro Braga

Pró-Reitora Adjunta: Carmela Maria Pólito Braga

Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância:

Maria do Carmo Vila

### **EDITORA UFMG**

Diretor: Wander Melo Miranda

Vice-Diretora: Silvana Cóser

### **Conselho Editorial**

Wander Melo Miranda (presidente)

Carlos Antônio Leite Brandão

José Francisco Soares

Juarez Rocha Guimarães

Maria das Graças Santa Bárbara

Maria Helena Damasceno e Silva Megale

Paulo Sérgio Lacerda Beirão

Silvana Cóser

DAN AVRITZER

# ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA UMA VISÃO GEOMÉTRICA

Belo Horizonte  
Editora UFMG  
2006

© 2006, OS AUTORES

© 2006, Editora UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização escrita do Editor.

A963e	Avritzer, Dan Elementos de geometria analítica : uma visão geométrica / Dan Avritzer. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2006. 120 p. : il. – (Educação a Distância)
	ISBN: 85-7041-534-6 ISBN: 85-7041-542-7 (da série)
	1.Geometria. 2. Geometria analítica. 3. Matemática. I. Título. II. Série.
	CDD: 516 CDU: 514

Ficha catalográfica elaborada pela CCQC - Central de Controle de Qualidade da Catalogação da Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE QUÍMICA: Amary Cezar Ferreira

EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Ana Maria de Moraes

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO: Simone de Almeida Gomes

PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren M. Santos

PROJETO GRÁFICO : Eduardo Ferreira

FORMATAÇÃO: Sérgio Luz

EDITORA UFMG

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: (31) 3499-4650 - Fax: (31) 3499-4768

www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria – 6º andar

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: (31) 3499-4654 - Fax: (31) 3499-4060

www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

O Curso de Licenciatura em Química da UFMG, modalidade a distância, foi concebido tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro deles se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de professores de alto nível, comprometidos com a qualidade da educação no país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes do Curso. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais, que deverá ser consultada à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresenta, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aula, foi elaborada uma auto-avaliação, com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. A auto-avaliação auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

*Maria do Carmo Vila*  
*Coordenadora do Centro de Apoio a Educação a Distância*



Este livro foi escrito para ser utilizado no programa de educação a distância da Universidade Federal de Minas Gerais na disciplina de Geometria Analítica para a Licenciatura em Química. Com pequenas modificações, ele poderá ser utilizado em outras licenciaturas do mesmo programa.

Ele está assentado na experiência de mais de trinta anos do autor em ministrar não só a disciplina de Geometria Analítica, mas outras disciplinas de Cálculo, História da Matemática, Álgebra Abstrata e Geometria Algébrica no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. Esta experiência talvez possa ser resumida em dois princípios básicos que orientaram a elaboração deste livro. O primeiro é que se deve, no ensino da Matemática, respeitar a evolução histórica dos conceitos, explicitando para o aluno como os conceitos evoluíram. A idéia aqui é que as dificuldades que o aluno enfrenta em seu aprendizado são, muitas vezes, semelhantes àquelas que a ciência enfrentou em sua evolução.

O segundo é que a Matemática se articula sempre em torno de exemplos, da mesma maneira que a Química e outras ciências experimentais se baseiam na experiência. Esta observação é válida, tanto nos estudos mais elementares de matemática, como na pesquisa mais sofisticada. Assim, procuramos desenvolver o texto enfatizando sempre o exemplo em detrimento de um tratamento mais formal, que poderá ser feito em um segundo curso, se o aluno desejar se dedicar mais profundamente à matemática. Tivemos sempre em mente que o livro se destina a cursos a distância. Dessa forma, o texto possui várias características específicas para ser assim utilizado. Dentre elas chamamos atenção para as seguintes:

1. Cada capítulo é aberto com os objetivos gerais daquele capítulo. Recomendamos que o aluno leia-os inicialmente e volte a eles no final certificando-se de que eles foram atingidos, e, se não o forem, tentar sanar a deficiência.

2. No decorrer do texto, existem exercícios. Eles foram incluídos com o objetivo de testar o entendimento do assunto tratado anteriormente. É importante que o aluno faça esses exercícios, pois eles são necessários para o seu amadurecimento.
3. Ao final de cada aula, incluímos numerosos exercícios, ordenados por nível de dificuldade. É um pouco pessoal a escolha de quantos exercícios fazer, mas o aluno deve fazer um número suficiente para se sentir seguro do conteúdo a que eles se referem.
4. Ao final de cada aula, incluímos um teste para avaliar se o conhecimento daquela aula foi absorvido.

Finalmente, ao concluir esta apresentação, gostaríamos de agradecer ao Ministério de Educação e Cultura pela oportunidade de escrever estas notas e à Prof.<sup>a</sup> Maria do Carmo Vila, coordenadora do programa de educação a distância da UFMG, pelo convite para escrevê-las e pela sua eficiente coordenação do programa. Gostaria de agradecer também ao colega Hamilton Prado Bueno, pelas discussões frutíferas que tivemos sobre o texto, bem como por algumas sugestões e correções, e a Joana David Avritzer que revisou parte do texto. Esperamos que elas possam ser úteis a esse importante projeto de formação de professores, tão necessário ao desenvolvimento de nosso país.

*Belo Horizonte, maio de 2006.*

*Dan Avritzer*

## SUMÁRIO

---

<b>1 O QUE É A GEOMETRIA ANALÍTICA?</b> .....	11
1.1 GEOMETRIA SINTÉTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA .....	11
1.2 REVISÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA .....	13
1.3 RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA .....	14
1.4 A GEOMETRIA ANALÍTICA ATUAL .....	16
1.5 OS OBJETIVOS DESTE CURSO .....	16
<b>2 VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO</b> .....	19
2.1 PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO .....	19
2.2 VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO; OPERAÇÕES .....	21
2.3 PRODUTO ESCALAR .....	24
2.4 NORMA DE UM VETOR .....	26
2.5 APLICAÇÕES AO ESTUDO DE ALGUMAS FIGURAS GEOMÉTRICAS .....	28
2.5.1 ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA E DA ESFERA .....	28
2.5.2 ESTUDO DAS CÔNICAS .....	30
2.6 EXERCÍCIOS .....	36
2.7 AVALIAÇÃO DA 2A AULA .....	37
<b>3 OPERAÇÕES COM MATRIZES E DETERMINANTES</b> .....	39
3.1 ADIÇÃO DE MATRIZES .....	39
3.2 PRODUTO DE MATRIZES .....	42
3.3 TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ .....	45
3.4 DETERMINANTES .....	46
3.4.1 DETERMINANTES DE ORDEM 2 .....	46
3.4.2 DETERMINANTES DE ORDEM ARBITRÁRIA .....	47
3.5 A INVERSA DE UMA MATRIZ .....	49
3.6 EXERCÍCIOS .....	52
3.7 AVALIAÇÃO DA 3A AULA .....	53
<b>4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES</b> .....	55
4.1 MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	55
4.2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN .....	57
4.3 SISTEMAS DE $m$ EQUAÇÕES LINEARES A $n$ VARIÁVEIS .....	66

4.4 EXERCÍCIOS. . . . .	68
4.5 AVALIAÇÃO DA 4A AULA . . . . .	72
<b>5 EQUAÇÃO CARTESIANA DO PLANO NO ESPAÇO . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1 A EQUAÇÃO DO PLANO . . . . .	73
5.2 PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES . . . . .	75
5.3 VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E INDEPENDENTES . . . . .	78
5.4 INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS NO ESPAÇO . . . . .	80
5.5 AVALIAÇÃO DA 5A AULA . . . . .	83
<b>6 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA . . . . .</b>	<b>85</b>
6.1 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA . . . . .	85
6.2 RETAS DADAS POR 2 PLANOS . . . . .	88
6.3 RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA: O CASO DE SISTEMAS LINEARES . . . . .	89
6.4 EXERCÍCIOS PARA OS CAPÍTULOS 5 E 6 . . . . .	92
6.5 AVALIAÇÃO DA 6A AULA . . . . .	93
<b>7 POSIÇÕES RELATIVAS DE RETAS E PLANOS NO ESPAÇO . . . . .</b>	<b>95</b>
7.1 RETA E RETA . . . . .	95
7.2 PLANO E PLANO . . . . .	98
7.3 RETA E PLANO . . . . .	99
7.4 EXERCÍCIOS. . . . .	100
7.5 AVALIAÇÃO DA 7A AULA . . . . .	101
<b>8 TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO NO PLANO . . . . .</b>	<b>103</b>
8.1 BASES DO PLANO . . . . .	103
8.2 GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO . . . . .	104
8.3 AUTOVETORES E AUTOVALORES . . . . .	107
8.4 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES . . . . .	109
8.5 TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO ESPAÇO . . . . .	111
8.6 APLICAÇÕES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA E À QUÍMICA. . . . .	112
8.7 EXERCÍCIOS. . . . .	117
8.8 AVALIAÇÃO DA 8A AULA . . . . .	118
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>SOBRE O AUTOR . . . . .</b>	<b>120</b>

## Geometria Sintética e Geometria Analítica

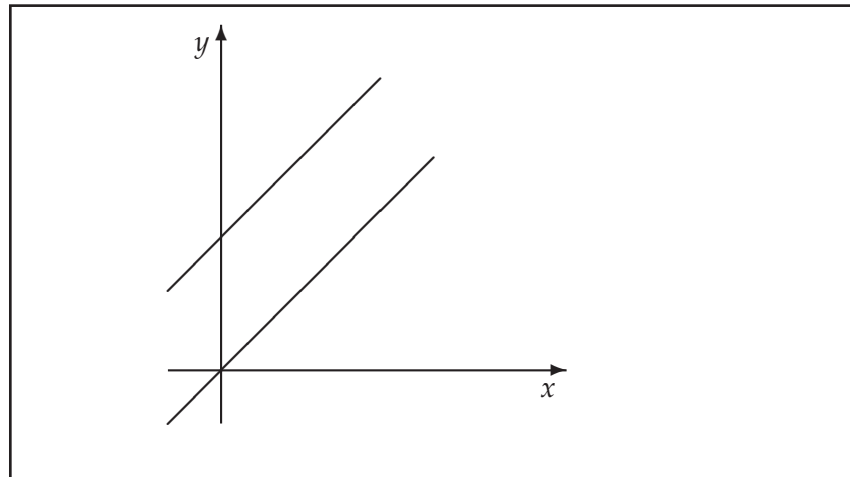
### 1.1 - GEOMETRIA SINTÉTICA E GEOMETRIA ANALÍTICA

---

A Geometria, como a entendemos hoje, surgiu na Grécia antiga há aproximadamente 2600 anos. Embora Euclides não tenha sido o primeiro geômetra grego, sua obra, *Os elementos*, teve enorme influência na história da Geometria e ainda hoje serve como exemplo, entre outras razões, pelo grande rigor do seu método. Esse método, conhecido como método axiomático, parte de definições e postulados tidos como evidentes e, utilizando as regras da lógica formal, chega a fatos geométricos que estão longe de ser evidentes. Essa geometria, que pouco difere da geometria que todos aprendemos no ensino fundamental, é conhecida como Geometria Sintética.

A Geometria Analítica surgiu muito posteriormente, com Descartes (1596-1650) no século XVII. Em seu livro *O discurso do método*, publicado em 1637, Descartes se propõe a encontrar um método capaz de resolver qualquer problema. Numa primeira etapa, ele duvida de todas as coisas e depois procura aquelas verdades que são claras e distintas. Em seguida, procura estudar as coisas desconhecidas comparando-as com as verdades claras e distintas. Como apêndices a *O discurso do método*, Descartes elabora três aplicações para ilustrar seu método: A geometria, A dióptrica e Os meteoros. É em "A geometria" que Descartes inventa a nova geometria, a Geometria Analítica.

Para Descartes as verdades claras e distintas, no caso da geometria, são os segmentos que ele, como os gregos anteriormente, identifica com os números. Na consideração de um certo problema, diz ele, devemos escrever a equação que liga os segmentos conhecidos aos

Figura 1.1: As retas  $y = x$  e  $y = x + 1$ 

desconhecidos e a partir delas resolver os problemas. Ele observa que a geometria é "difícil" e a álgebra "fácil" e que seu método, nesse caso, se limitava a resolver os problemas difíceis que os gregos haviam proposto pela álgebra, mais clara e fácil de manipular.

Vamos considerar um primeiro exemplo simples.

**Exemplo 1.1** Considere as retas dadas pela equações

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x + 1$$

Estamos interessados nos pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas equações. Substituindo a primeira equação na segunda temos  $x = x + 1$  e logo  $1 = 0$ ! Logo as duas equações não possuem soluções em comum. Nesse caso, a tradução que Descartes procurava da álgebra para a geometria é que a ausência de soluções em comum significa que as retas são paralelas. Veja a Figura 1.1.

◁

Antes de considerarmos um outro exemplo um pouco mais complicado, vamos fazer uma revisão da Geometria Analítica no plano.

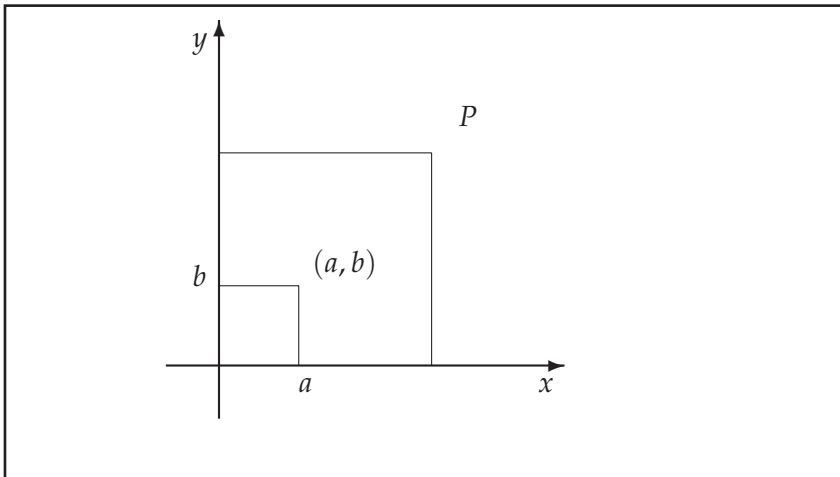


Figura 1.2: Bijeção entre pontos do plano e pares ordenados

## 1.2 - REVISÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

O primeiro passo para iniciar o estudo da geometria analítica é observar que a reta pode ser posta em correspondência bijetiva com os números reais, da seguinte maneira: escolhemos um ponto, chamado origem, para representar o zero; escolhemos uma direção em geral à direita para representar o sentido positivo e uma unidade, que representa o número 1. A partir daí, pode-se mostrar que todo número real fica representado por um ponto da reta e que todo ponto da reta representa um número real.

Em seguida, para representar os pontos do plano, tomamos duas retas, que chamaremos de eixos, que se cortam perpendicularmente em um ponto. Este ponto será a origem de um sistema de coordenadas para o plano. Observe que podemos facilmente estabelecer uma bijeção entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais da seguinte maneira: dado um ponto  $P$  do plano, baixando duas perpendiculares a partir do ponto aos dois eixos, obtemos dois números reais. O primeiro,  $x$ , é chamado abscissa do ponto, o segundo,  $y$ , ordenada. Podemos assim representar o ponto  $P$  pelo par de números reais  $(x, y)$ . Reciprocamente, dado um par de números reais  $(a, b)$  obtemos um ponto  $Q$  do plano como a interseção das paralelas aos eixos, passando pelos pontos  $a$  e  $b$  dos eixos. (Fig. 1.2)

Descartes já havia observado que toda equação nas variáveis  $x, y$ ,  $f(x, y) = 0$  descreve uma curva no plano. Por exemplo  $y = 2x + 3$  descreve a reta que se obtém, dando valores para  $x$  e calculando os

valores correspondentes para  $y$ . Observe:

$x$	1	2													
$y$	5	7													

**Exercício 1.2** Complete a tabela dando mais 11 valores para  $x$  e encontrando os valores correspondentes para  $y$ . A seguir faça um esboço da reta  $y = 2x + 3$ .

Se tomarmos a equação  $x^2 + y^2 = 4$  observe que cada valor de  $x$ ,  $-2 < x < 2$  determina dois valores de  $y$ , por exemplo:

$x$	0	1													
$y$	$\pm 2$	$\pm\sqrt{3}$													

**Exercício 1.3** Complete a tabela dando mais 11 valores para  $x$  e encontrando os valores correspondentes para  $y$ . A seguir faça um esboço da figura dada por  $x^2 + y^2 = 4$ , que neste caso é uma circunferência.

Toda equação  $f(x, y) = 0$ , do primeiro grau, determina uma reta e toda equação da forma  $x^2 + y^2 = a^2$  determina uma circunferência de centro na origem e raio  $a$ . O primeiro fato não será estudado aqui; estudaremos o segundo no próximo capítulo. Se você nunca estudou Geometria Analítica anteriormente, estude a equação da reta, por exemplo, no livro *Matemática*, de Gelson Iezzi e outros autores, Atual Editora, São Paulo, 2002, p. 544-551.

### 1.3 - RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA

Vamos considerar agora um outro exemplo para ilustrar o que Descartes queria dizer com resolver a geometria pela álgebra.

**Exemplo 1.4** Considere as retas do plano dadas por  $a_1x + b_1y = c_1$  e  $a_2x + b_2y = c_2$ , que vamos supor distintas, com  $a_1 \neq 0$  e  $b_1 \neq 0$ . Queremos saber se essas retas se interceptam e, em caso afirmativo, em quantos pontos.

Para tratar este problema geométrico vamos considerar as duas equações acima e considerar o sistema formado por elas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $a_2$  e a segunda por  $a_1$  e subtraindo uma da outra temos:

$$a_2a_1x + a_2b_1y - a_1a_2x - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2.$$

Assim eliminamos  $x$  e obtemos:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$$

Temos duas possibilidades:

1. Se  $(a_2b_1 - a_1b_2) \neq 0$ , então obtemos uma única solução para o sistema, dada por  $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$  e  $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$ .
2. Se  $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$  então, como estamos supondo as duas equações distintas, segue que  $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0$  e o sistema não possui solução, é impossível.

Podemos agora traduzir, neste exemplo, o que Descartes queria dizer com resolver a geometria pela álgebra:

- Se o sistema possui uma solução, isso significa que as retas se encontram em um único ponto.
- Se o sistema não possui solução, isso significa que as retas são distintas e paralelas.

◁

**Exercício 1.5** Considere as retas  $2x + 3y = 4$  e  $6x + y = 2$ . Determine se elas são paralelas ou não e caso não sejam paralelas determine seu ponto de interseção.

**Exercício 1.6** Considere as retas  $2x + 3y = 4$  e  $4x + 6y = 2$ . Determine se elas são paralelas ou não e caso não sejam paralelas determine seu ponto de interseção.

**Exercício 1.7** Considere as 2 retas do plano dadas por  $a_1x + b_1y = c_1$  e  $a_2x + b_2y = c_2$ , como acima, mas agora não suponha que elas sejam distintas. Execute o mesmo procedimento acima. Aparece uma outra possibilidade que não havia aparecido antes. Qual é ela? O que ela significa?

Utilizando o fato, aprendido na álgebra elementar, que um sistema de duas equações lineares possui sempre uma solução, nenhuma solução, ou infinitas soluções, deduzimos o resultado geométrico que duas retas que possuem dois pontos comuns são coincidentes (veja o exercício 1.7, acima).

## 1.4 - A GEOMETRIA ANALÍTICA ATUAL

O final do século XIX e o princípio do século XX assistiram a grandes transformações das ciências, de uma forma geral, e da matemática, em particular. O surgimento da chamada física moderna, com a teoria da relatividade proposta por Einstein e a mecânica quântica proposta por Schrödinger, fez com que a matemática adotasse um tratamento, primordialmente, "vetorial" e "matricial". É o surgimento do que conhecemos como álgebra linear que vai permear todos os ramos da matemática e de outras ciências. Neste curso, vamos tratar os assuntos que já descrevemos desde este ponto de vista. Essa linguagem será introduzida nos Capítulos 2 e 3 e utilizada nos capítulos subseqüentes.

Nos anos 70 do século XX, com o avanço da ciência da computação e de suas múltiplas aplicações a todos os ramos do conhecimento, a geometria analítica passa a conhecer outras aplicações até então insuspeitadas. Surgem ramos do conhecimento como computação gráfica e visão computacional. Todos temos contacto com estas duas áreas da ciência da computação. A computação gráfica estuda o tratamento de imagens utilizando computadores. É largamente utilizada em propaganda televisiva, por exemplo, onde estamos habituados a ver imagens que se deformam ou giram segundo vários eixos. Daremos uma idéia de como isso é feito no Capítulo 8. A computação gráfica, por sua vez, encontrou aplicações à química em programas de modelagem atômica, como por exemplo o ORTEP, largamente utilizado atualmente. Veremos, também no Capítulo 8, como se faz isso.

## 1.5 - OS OBJETIVOS DESTES CURSOS

Podemos agora explicitar melhor quais os objetivos da disciplina que você está iniciando. Quando terminar este livro, você deverá ser capaz de:

- De uma maneira geral, relacionar a geometria de planos e retas no espaço com a álgebra correspondente de equações lineares em três variáveis. Ou seja, ser capaz de estender o Exemplo 1.4 acima para o contexto de retas e planos no espaço.

Mais concretamente você será capaz de

1. Resolver e discutir sistemas de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas.
2. Saber operar com matrizes e resolver sistemas de  $m$  equações a  $n$  incógnitas, operando com as matrizes associadas, o chamado método de Gauss-Jordan.

3. Conhecer e operar com vetores no plano e no espaço.
  4. Conhecer e operar com a equação de um plano no espaço.
  5. Conhecer e operar com as equações paramétricas de retas no espaço.
  6. Estudar a posição relativa de retas e planos no espaço.
- Conhecer a geometria analítica do plano e as transformações lineares do plano no plano.

Mais concretamente você será capaz de:

1. Saber operar com diferentes bases do plano. Conhecer os vários tipos de transformações lineares do plano.
2. Conhecer as cônicas planas e suas equações.
3. Saber quando é possível diagonalizar as matrizes associadas a transformações lineares do plano no plano e diagonalizá-las.



## Vetores no plano e no espaço

**Objetivos 2.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Representar pontos no plano e no espaço tridimensional
2. Saber o que é um vetor no plano e no espaço e somar 2 vetores no plano e 2 vetores no espaço.
3. Conhecer o produto escalar de 2 vetores e suas propriedades.
4. Aplicar os conceitos acima ao estudo da circunferência e das cônicas.

### 2.1 - PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO

Já vimos, na seção 1.2, que os pontos de uma reta podem ser representados por um número real, uma vez escolhido um ponto para ser a origem e um segmento orientado para ser a unidade de medida.

Vimos também como representar um ponto do plano por um par ordenado  $(x, y)$  de números reais.

Vamos ver agora como podemos utilizar um terno  $(x, y, z)$  de números reais para representar um ponto no espaço ordinário, que chamaremos aqui de espaço tridimensional. Acrescentamos ao plano  $xy$  já conhecido um outro eixo perpendicular ao plano  $xy$ , e passando pela origem do plano  $xy$ , o chamado eixo dos  $z$ 's. É fácil ver que todo terno de números reais  $(a, b, c)$  representa, assim, um único ponto no espaço e, reciprocamente, a cada ponto no espaço está associado um terno ordenado de números reais (Ver Fig. 2.1).

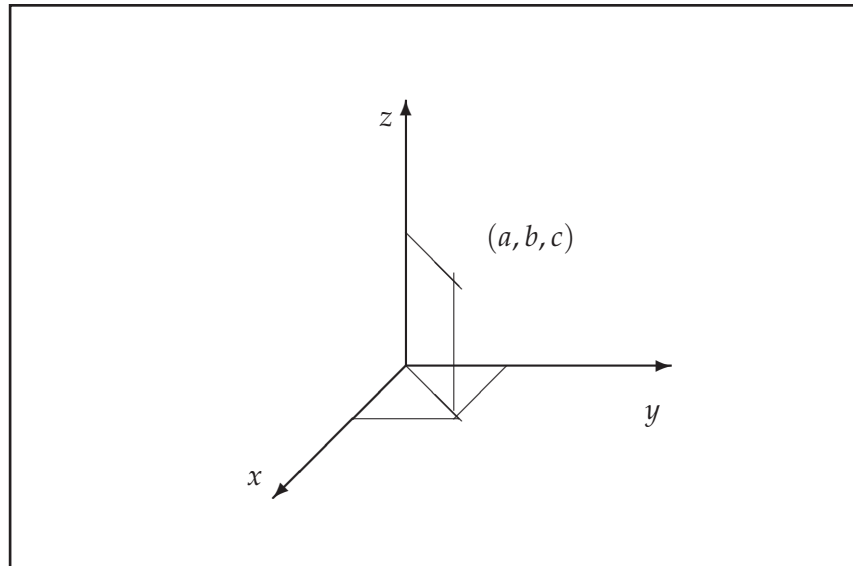


Figura 2.1: O espaço ordinário dotado de eixos coordenados  $x, y, z$ .

Podemos adicionar pontos no plano ou no espaço da seguinte maneira:

Se  $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são dois pontos no espaço, definimos o ponto  $A + B$  como sendo o ponto no espaço dado por  $A + B = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ . Analogamente, definimos a adição de dois pontos no plano. Vamos expor toda a teoria para pontos e vetores (que veremos em seguida) no plano ou no espaço e deixamos a cargo do aluno fazer as modificações necessárias para obter as propriedades de pontos e vetores no outro caso.

**Exercício 2.2** Defina a adição de dois pontos do plano.

### Exemplo 2.3

- Se  $A_1 = (1, 2, -11)$  e  $B_1 = (2, -3, 5)$ ,  $A_1 + B_1 = (3, -1, -6)$ .
- Se  $A_2 = (2, -1)$  e  $B_2 = (-2, 1)$ ,  $A_2 + B_2 = (0, 0) = 0$ .

◁

Denotaremos, como no último exemplo, o ponto  $(0, 0)$ , no plano, e o ponto  $(0, 0, 0)$ , no espaço, por  $0$  quando isto não causar confusão.

Podemos também multiplicar um ponto no plano ou no espaço por um número  $k$ . Se  $A = (a, b, c)$ , então  $kA = (ka, kb, kc)$ .

As seguintes propriedades são satisfeitas pelas operações definidas acima:

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
2.  $A + B = B + A$ .
3.  $k(A + B) = kA + kB$ .
4. Se  $k_1$  e  $k_2$  são números então  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ .
5.  $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$ .
6.  $0 + A = A$
7.  $1.A = A$
8. Se denotarmos por  $-A$  o ponto  $(-1)A$ , então  $A - A = 0$ .

Vamos, agora, interpretar geometricamente a adição de pontos e a multiplicação de pontos por um escalar. Faremos isto no plano, o aluno não terá dificuldades de fazer o mesmo no espaço. Consideremos um exemplo.

**Exemplo 2.4** Vamos esclarecer, no caso do plano, o significado da adição de dois pontos e da multiplicação de um ponto por um escalar. Sejam  $A = (-2, 2)$  e  $B = (5, 4)$ . Então temos  $A + B = (3, 6)$ . Observe a Figura 2.2. Os pontos  $A$  e  $B$  são lados de um paralelogramo e a soma  $A + B$  é a diagonal. Da mesma forma, considere  $3C = (3, 3)$ , em que  $C = (1, 1)$ . O resultado significa esticar  $C$  por um fator de 3. O caso geral não é diferente deste exemplo.  $\triangleleft$

## 2.2 - VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO; OPERAÇÕES

A força ou a velocidade, para serem caracterizados, precisam, além de um valor, de uma direção e um sentido. É intuitivo por exemplo que, se um sólido se desloca com uma certa velocidade (numa certa direção), cada um de seus pontos possui esta velocidade. Para formalizarmos essa idéia definiremos:

**Definição 2.5** Um vetor é um par ordenado de pontos, no plano ou no espaço, que denotamos por  $\overrightarrow{AB}$ . Visualizamos o vetor como uma seta cujo ponto inicial é  $A$  e o ponto final é  $B$ .

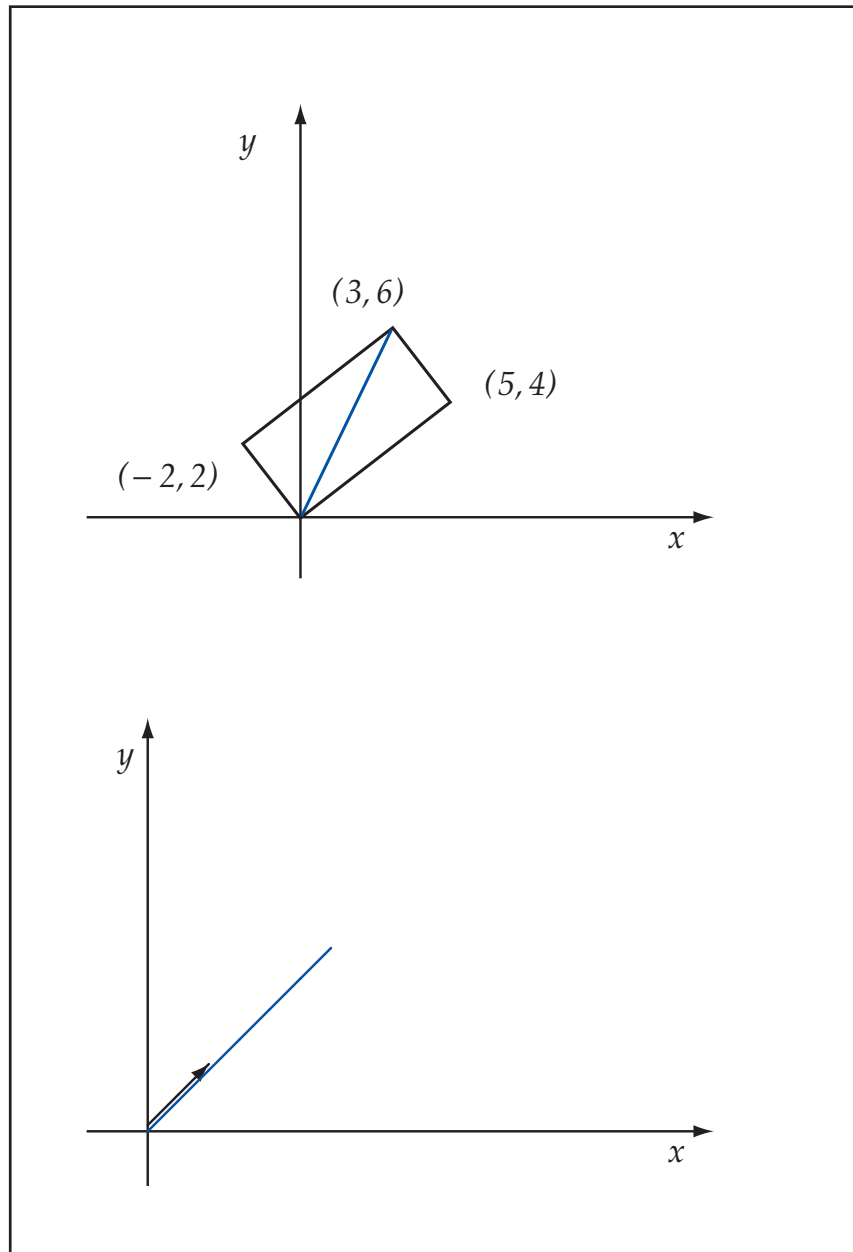


Figura 2.2: Adição de pontos e multiplicação por escalar

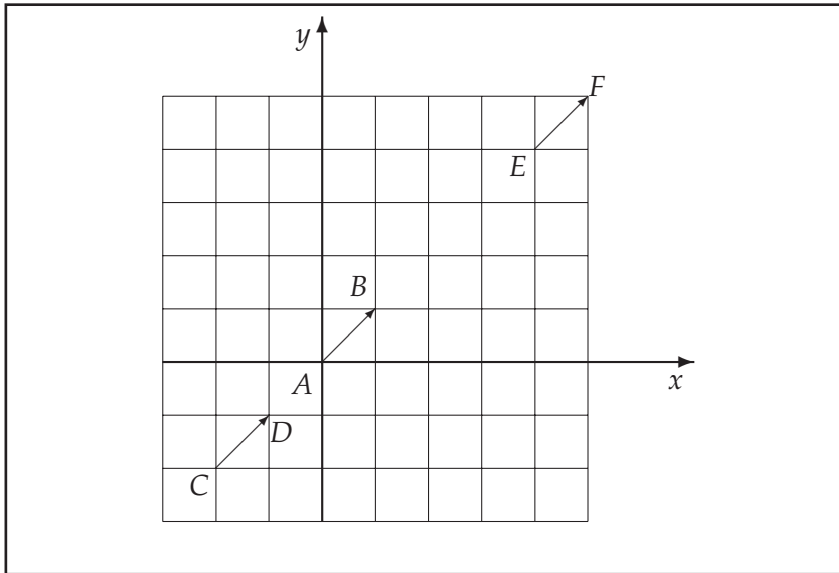


Figura 2.3: Alguns vetores equivalentes

**Definição 2.6** Dados dois vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  dizemos que  $\overrightarrow{AB}$  é equivalente a  $\overrightarrow{CD}$  se  $B - A = D - C$ .

**Exemplo 2.7** Considere os seguintes pontos do plano (veja a Figura 2.2):

$$A = (0,0), \quad B = (1,1), \quad C = (-2,-2),$$

$$D = (-1,-1), \quad E = (4,4) \text{ e } F = (5,5).$$

Então  $\overrightarrow{AB}$  é equivalente a  $\overrightarrow{CD}$  que é equivalente a  $\overrightarrow{EF}$ , pois

$$B - A = (1,1) - (0,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad D - C = (-1,-1) - (-2,-2) = (1,1).$$

Por outro lado  $\overrightarrow{BA}$  não é equivalente a  $\overrightarrow{CD}$ , já que  $A - B = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$  e já vimos que  $D - C = (1,1)$ .  $\triangleleft$

**Exercício 2.8** Verifique que  $\overrightarrow{CD}$  é equivalente a  $\overrightarrow{FE}$ . Verifique se  $\overrightarrow{AF}$  é equivalente a  $\overrightarrow{DE}$

**Observação 2.9** O que fizemos com as duas definições acima foi definir uma relação de equivalência no conjunto de pares ordenados de pontos onde identificamos dois pares  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  se  $B - A = D - C$ . Não vamos formalizar aqui o que significa uma relação de equivalência, mas você já teve contacto com algumas outras relações de equivalência. A primeira que todos encontramos é a relação que definimos no conjunto das frações, quando dizemos que

duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são equivalentes se  $ad = bc$ . É ela que permite afirmar que as frações  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ , o que nos permite comparar frações e operar com frações. Para todos os efeitos práticos, consideramos duas frações equivalentes como iguais. O mesmo se dá com vetores. A equivalência que definimos corresponde à observação prática de que dois vetores equivalentes possuem o mesmo “efeito físico” e portanto indentificamo-los. Na prática, operamos quase que exclusivamente com um único representante da classe de equivalência, a saber, o vetor cujo ponto inicial é  $0 = (0, 0)$ . Veja também a próxima observação.

**Observação 2.10** Considere novamente os vetores  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{FE}$ . Vi-mos que eles são equivalentes ao vetor  $\overrightarrow{AB}$  cujo ponto inicial é a origem. De maneira completamente geral, dado um vetor qualquer  $\overrightarrow{A_1B_1}$  cujo ponto inicial é  $(a_1, b_1)$  e o ponto final é  $(a_2, b_2)$ . Temos  $B_1 - A_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ . Portanto, o vetor  $\overrightarrow{A_1B_1}$  é equivalente ao vetor  $0(A_1 - B_1)$ , ou seja, o vetor cujo ponto inicial é  $(0, 0)$  e o ponto final é  $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ . Desta maneira, podemos pensar qualquer vetor como tendo o ponto inicial na origem, bastando, para isto, olhar para um seu equivalente que tem esta propriedade.

**Exercício 2.11** Dados os vetores  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  abaixo encontre dois outros equivalentes a eles cujo ponto inicial é a origem:

$$A = (2, 3), B = (5, -1), C = (-5, 3), D = (9, -2).$$

## 2.3 - PRODUTO ESCALAR

De acordo com a Observação 2.10, todo vetor pode ser pensado com o ponto inicial na origem. Conseqüentemente, todos os pontos podem ser identificados com vetores. Na definição a seguir e em várias outras oportunidades, faremos esta identificação que não causa confusão, pois o contexto esclarece o que queremos dizer. Ficamos assim dispensados de usar a seta na notação de um vetor, pois há pouca diferença entre os conceitos.

**Definição 2.12** Dados dois vetores no espaço  $\overrightarrow{A_1} = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\overrightarrow{A_2} = (a_2, b_2, c_2)$  o produto escalar de  $A_1$  e  $A_2$ , denotado por  $A_1.A_2$  é definido por :

$$A_1.A_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

O produto escalar é sempre um número. Veja o exemplo.

**Exemplo 2.13** Seja  $A = (1, 2, -3)$  e  $B = (1, 5, 7)$ .

$$A.B = 1.1 + 2.5 + (-3)(7) = -10$$

Se os vetores estão no plano teremos:  $A = (1, 2)$   $B = (4, -6)$ ,  
 $A.B = 4 - 12 = -8.$  ◁

O produto escalar possui 4 propriedades importantes:

1.  $A.B = B.A$
2. Se  $A, B, C$  são 3 vetores temos:  $A.(B + C) = A.B + A.C = (B + C).A$ .
3. Se  $x$  é um número, então  $(xA).B = x(A.B)$
4. Se  $A = 0$ , então  $A.A = 0$  e, caso contrário,  $A.A > 0$ .

As propriedades acima são fáceis de demonstrar e decorrem de propriedades dos números reais. Vejamos como:

**Propriedade 1**  $A.B = B.A$  pois se  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , temos:

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = B.A$$

**Propriedade 2**  $(xA).B = x(A.B)$ . Sejam  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Então  $x(A) = (xa_1, xa_2, xa_3)$  e portanto  $(xA).B = xa_1a_2 + xa_2b_2 + xa_3b_3 = x(A.B)$ .

**Exercício 2.14** Demonstre as propriedades 2 e 4.

**Definição 2.15** *Dois vetores  $A$  e  $B$  são ditos perpendiculares (ou ortogonais) se  $A.B = 0$*

O conceito de perpendicularidade é um conceito conhecido, que vem da geometria elementar e não é claro, no momento, que os dois coincidam. Veremos nos próximos parágrafos que isto é verdade. Por ora, um exemplo.

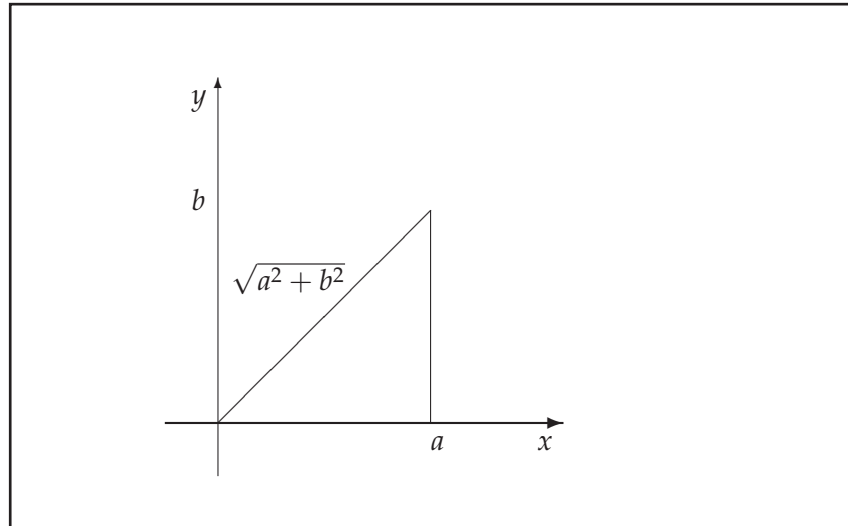


Figura 2.4: O comprimento de um vetor no plano

**Exemplo 2.16** Os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ , e  $e_3 = (0, 0, 1)$  são conhecidos como a base canônica do espaço ou como os vetores unitários na direção dos eixos, denominações cuja razão também será esclarecida posteriormente. Vejamos que eles são 2 a 2 perpendiculares pela definição acima:

$$e_1 \cdot e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \text{ e da mesma forma } e_1 \cdot e_3 = 0, e_2 \cdot e_3 = 0$$

◁

## 2.4 - NORMA DE UM VETOR

**Definição 2.17** Dado um vetor no plano ou no espaço, definimos a norma de  $A$ ,  $\|A\|$  como sendo  $\sqrt{A \cdot A}$

Em coordenadas, temos: se  $A = (a, b)$  é um vetor do plano então  $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Se  $A = (a, b, c)$  então  $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Isto mostra que a norma de um vetor coincide com a nossa noção intuitiva de comprimento. No caso do plano é simplesmente o Teorema de Pitágoras (ver Fig. 2.4). No caso do espaço observe a Figura 2.4.

**Exemplo 2.18** Dado  $A = (1, 7)$ ,  $\|A\| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$ . Dado  $B = (1, 0, 2)$ ,  $\|B\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ . ◁

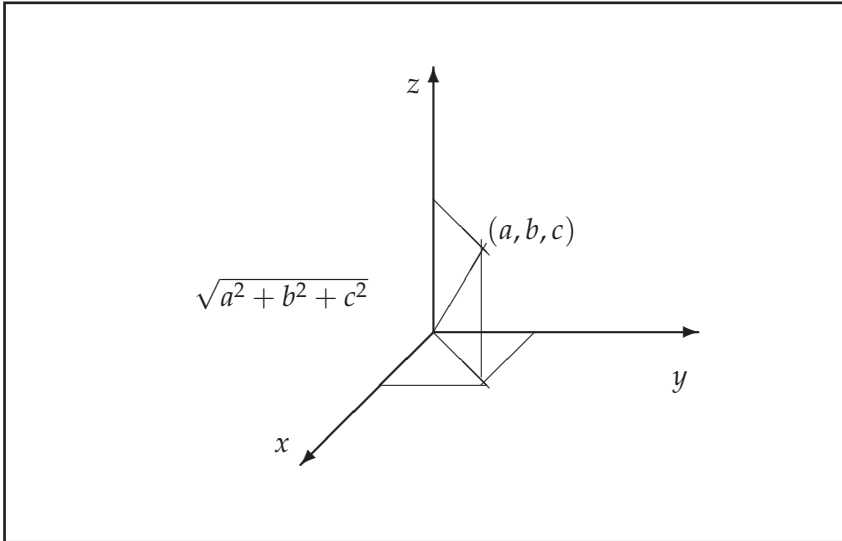


Figura 2.5: O comprimento de um vetor no espaço

Diremos que um vetor  $U$  é unitário se  $\|U\| = 1$ . Dado qualquer vetor  $A$  com norma  $a = \|A\|$ , observe que  $\frac{1}{a}A$  é um vetor e  $\|\frac{1}{a}A\| = \frac{1}{a}\|A\| = \frac{a}{a} = 1$ . Diremos que 2 vetores não nulos,  $A, B$ , possuem a mesma direção se existe uma constante  $c$  tal que  $B = cA$ . O vetor  $\frac{1}{a}A$  é chamado o vetor unitário na direção de  $A$ .

**Exemplo 2.19** (Seja  $A = (1, -1, 2)$ .  $\|A\| = \sqrt{4} = 2$ . O vetor unitário na direção de  $A$  é o vetor  $\frac{1}{2}A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ .  $\triangleleft$

O principal resultado sobre a relação entre o produto escalar de dois vetores e suas normas é a seguinte proposição, cuja demonstração omitiremos:

**Proposição 2.20** *Dados dois vetores  $A$  e  $B$  temos*

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos(\theta),$$

onde  $\theta$  é ângulo entre os vetores  $A$  e  $B$ . Veja a fig. 2.6.

**Observação 2.21** Note que se o ângulo entre dois vetores  $A$  e  $B$  é  $\frac{\pi}{2}$  então, pela fórmula acima  $A \cdot B = 0$ , o que coincide com o conceito expresso na Definição 2.15.

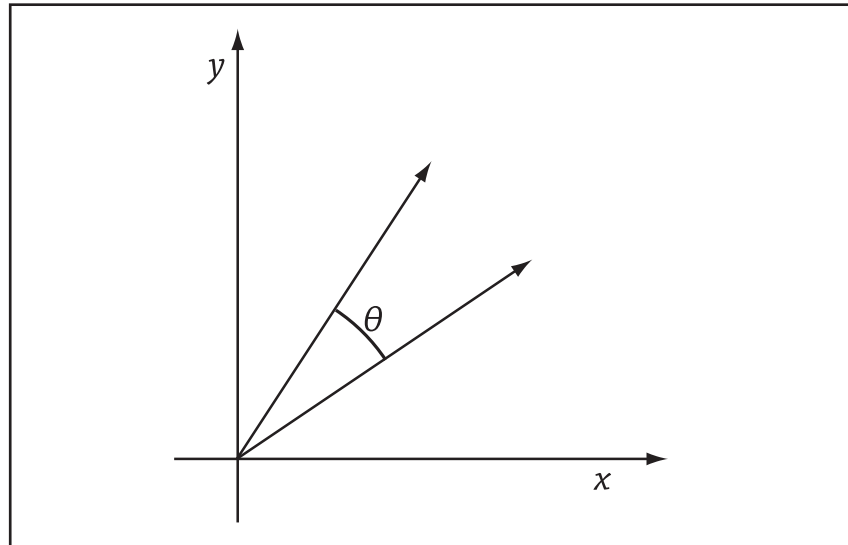


Figura 2.6: A ângulo entre os vetores A e B

## 2.5 - APLICAÇÕES AO ESTUDO DE ALGUMAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

### 2.5.1 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA E DA ESFERA

Consideremos inicialmente o plano  $xy$ . Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto  $C$  dado. O ponto  $C$  é chamado de centro da circunferência e a distância comum o raio. Suponha que o ponto  $C$  é a origem do plano  $xy$  e a distância é um número  $r$ . Aplicando a fórmula de distância temos que um ponto  $(x, y)$  satisfaz o lugar geométrico se  $\sqrt{(x^2 + y^2)} = r$ , ou seja  $x^2 + y^2 = r^2$ , que é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio  $r$ .

De maneira mais geral, se o centro da circunferência é um ponto  $\vec{C} = (a, b)$  dado e,  $\vec{X} = (x, y)$  é um ponto da circunferência o lugar geométrico é descrito pela condição que  $\vec{CX} = X - C = (x - a, y - b)$  possua comprimento constante igual a  $r$ . Temos assim  $\|(x - a, y - b)\| = r$  donde obtemos a equação da circunferência de centro em  $C = (a, b)$  e raio  $r$ :

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \text{ ou ainda } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.22** A equação  $x^2 + y^2 = 4$  descreve a equação da circunferência de centro na origem e raio 2. ◁

**Exemplo 2.23** A equação  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$  descreve a equação da circunferência de centro em  $C = (1, 3)$  e raio 2. A equação acima pode também ser escrita  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$  ou ainda  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ . Isto levanta a seguinte questão: dada uma equação como acima, saber se ela representa uma circunferência e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e raio. É o que faremos após os exercícios abaixo. ◁

**Exercício 2.24** Encontre a equação da circunferência de centro no ponto  $C = (2, 1)$  e raio 3.

Retomemos a Equação 2.1  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Podemos escrevê-la assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0$$

onde  $d = a^2 + b^2 - r^2$ . Queremos responder a seguinte questão: dada uma equação como esta última, como reconhecer se ela é uma circunferência e qual é o seu centro e o seu raio. Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.25** Determine o raio e o centro da circunferência dada pela equação  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ . Esta equação não está na forma, 2.1. Para colocá-la nesta forma usamos um método conhecido como completar o quadrado. Observe que os termos  $x^2 - 2x$  quase formam um quadrado perfeito já que  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ . Para completar o quadrado na equação dada somamos 1 aos dois membros da igualdade e obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \text{ ou ainda } (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1$$

ou seja, a equação dada é a da circunferência de raio 1 e centro no ponto  $(a, b) = (1, 0)$ . ◁

Assim, dada uma equação do segundo grau em  $x, y$ , para saber se ela é ou não uma circunferência tentamos completar os quadrados como no exemplo e, assim, determinamos o seu centro e raio. Nem sempre é possível completar quadrados. Elucidaremos esta questão na próxima seção. Antes disto, vamos estudar uma situação semelhante no espaço tridimensional.

Vamos considerar agora o espaço com coordenadas  $x, y, z$ . Uma esfera é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto  $C$ . O ponto  $C$  é chamado o centro da esfera e a distância comum o raio da esfera.

Suponha que o ponto é a origem do plano  $xyz$  e a distância é um número  $r$ . Aplicando a fórmula de distância temos que um ponto  $(x, y, z)$  satisfaz o lugar geométrico se  $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = r$ , ou seja  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , que é a equação de uma esfera de centro na origem e raio  $r$ .

De maneira mais geral, se o centro da esfera é um ponto  $\vec{C} = (a, b, c)$  dado e  $\vec{X} = (x, y, z)$  é um ponto da esfera, o lugar geométrico é descrito pela condição que  $\vec{CX} = X - C = (x - a, y - b, z - c)$  possua comprimento constante igual a  $r$ . Temos assim  $\|(x - a, y - b, z - c)\| = r$  donde obtemos a equação da esfera de centro em  $C = (a, b, c)$  e raio  $r$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} &= r, \text{ ou ainda,} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Exemplo 2.26** A equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  descreve a equação da esfera de centro na origem e raio 1.  $\triangleleft$

**Exemplo 2.27** A equação  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$  descreve a equação da esfera de centro em  $C = (1, 1, 1)$  e raio 3. A equação acima pode também ser escrita  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 4$  ou ainda  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ . Poderíamos, como no caso da circunferência, tratar da questão de como determinar se uma equação do segundo grau em três variáveis é uma esfera e, em caso afirmativo, determinar o seu centro e raio, mas vamos optar por retornar ao plano  $xy$  e tratar de algumas outras figuras aí.  $\triangleleft$

## 2.5.2 - ESTUDO DAS CÔNICAS

Considere novamente o plano  $xy$ .

**Definição 2.28** Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados é constante. Os dois pontos são chamados de focos da elipse.

Suponha inicialmente que os dois pontos  $F_1, F_2$  são dados por  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , a soma das distâncias seja uma constante  $2a$ , e um ponto qualquer da elipse seja dado por  $(x, y)$ . Então:

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x - (c))^2 + y^2} = 2a.$$

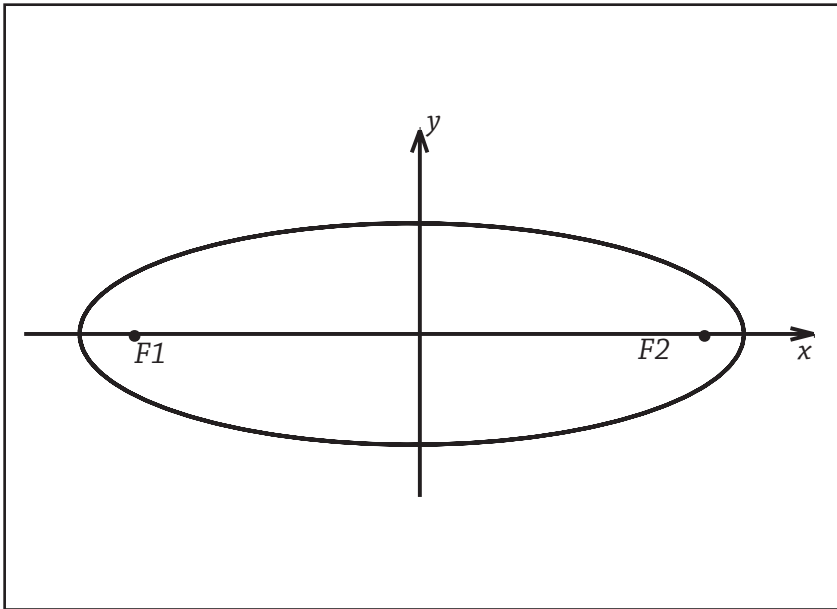


Figura 2.7: Uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

ou ainda

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou ainda

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando obtemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado temos:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 - 2cxa^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Finalmente, fazendo  $a^2 - c^2 = b^2$  e dividindo ambos os membros por  $a^2b^2$  temos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dizemos que  $2a$  e  $2b$  são os eixos da elipse.

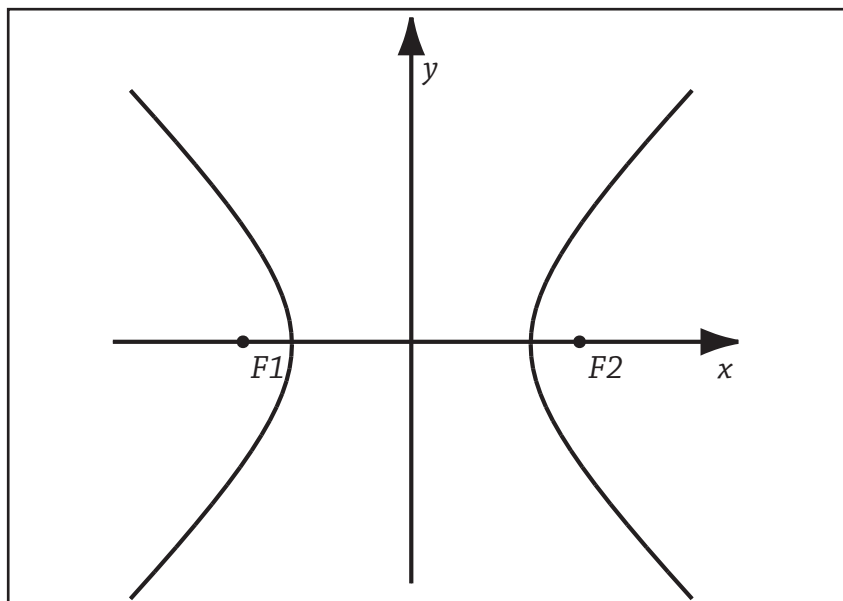


Figura 2.8: Uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Exercício 2.29** Encontre a equação da elipse de focos nos pontos  $F_1 = (-1, 0)$  e  $F_2 = (1, 0)$  e tal que a soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a 2.

### A HIPÉRBOLE

Consideremos ainda o plano  $xy$ .

**Definição 2.30** Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos dados é constante e menor que a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ . Os dois pontos são chamados de focos da hipérbole.

Suponha que os dois pontos  $F_1, F_2$  são dados por  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , e o módulo da diferença das distâncias seja uma constante  $2a$ , e um ponto qualquer da hipérbole seja dado por  $(x, y)$ . Então:

$$\left| \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x - (c))^2 + y^2} \right| = 2a.$$

ou ainda

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - (c))^2 + y^2},$$

já que se  $k$  é um número e  $\|k\| = a$ , temos  $k = \pm a$ . Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

ou ainda

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando obtemos:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

Elevando novamente ao quadrado temos:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 - 2cxa^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

finalmente, fazendo  $c^2 - a^2 = b^2$  e dividindo ambos os membros por  $a^2b^2$  temos a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Exercício 2.31** Encontre a equação da hipérbole de focos nos pontos  $F_1 = (-1, 0)$  e  $F_2 = (1, 0)$  e cujo módulo da diferença das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a 1.

Nos exercícios, vamos investigar quando algumas equações do segundo grau são circunferências, elipses, hipérbolos ou parábolas.

## A PARÁBOLA

**Definição 2.32** Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano  $xy$  tais que sua distância a um ponto fixo, chamado foco, é igual à sua distância a uma reta fixa, chamada diretriz.

Vamos supor inicialmente que o foco é dado por  $F = (c, 0)$  e a diretriz é a reta dada por  $x = -c$ . Vamos encontrar a equação da parábola. Para isto, suponha que um ponto da parábola é dado por  $P = (x, y)$ . A distância de  $P$  à diretriz é dada por  $\overrightarrow{DP} = P - D = \|(x, y) - (-c, y)\| = \sqrt{(x+c)^2}$ . A distância de  $P$  ao foco é dada por  $\overrightarrow{CP} = P - C = \|(x-c, y)\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ . Temos então que a condição  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CP}$  implica que  $\sqrt{(x+c)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ . Elevando ao quadrado temos que:  $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 =$

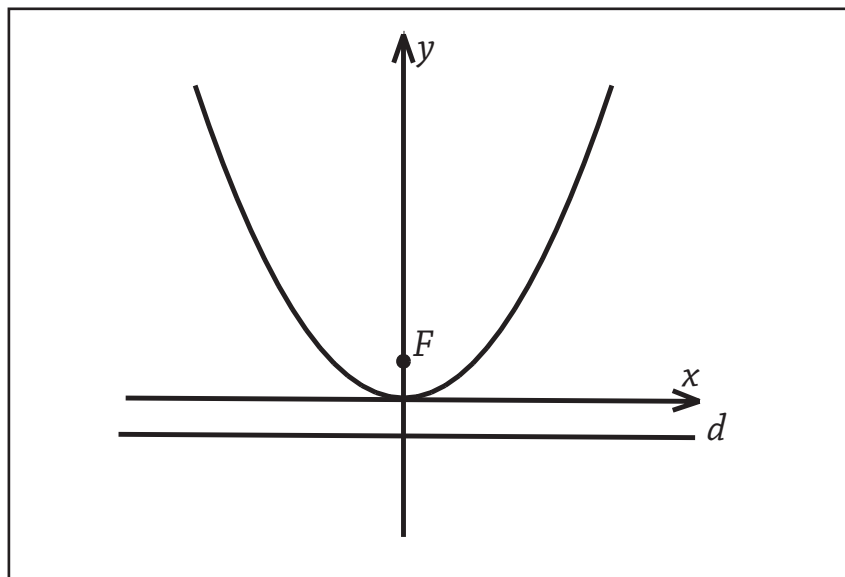


Figura 2.9: Uma parábola de foco  $F_1$  e diretriz  $d$

$x^2 + 2cx + c^2$ , donde obtemos a equação da parábola com foco  $F$  e diretriz  $x = -c$ ..

$$y^2 = 4cx$$

A reta que passa pelo foco  $F$  da parábola e é perpendicular à diretriz se chama eixo da parábola. O ponto médio do eixo de simetria entre o foco e a diretriz se chama vértice da parábola. Claro que a escolha que fizemos do foco e do eixo determinaram a equação que obtivemos. Vamos estudar agora como a equação da parábola é afetada por esta escolha do foco e da diretriz. Resolva os seguintes exercícios.

**Exercício 2.33** Mostre que se escolhermos para foco da parábola o ponto  $F = (-c, 0)$  e para diretriz a reta  $x = c$  então a equação da parábola de foco  $F$  e diretriz  $x = c$  é dada por  $y^2 = -4cx$ .

**Exercício 2.34** Mostre que se escolhermos para foco da parábola o ponto  $F = (0, c)$  e para diretriz a reta  $y = -c$  então a equação da parábola de foco  $F$  e diretriz  $x = c$  é dada por  $x^2 = 4cy$ .

Vamos supor que o vértice da parábola é agora um ponto arbitrário  $(h, k)$ , isto é, que a diretriz é a reta  $x = h - c$  e o foco  $F$  é o ponto  $F = (h + c, k)$ . Vamos encontrar a equação da parábola, neste caso mais geral. Para isto suponha novamente que um ponto da parábola é dado por  $P = (x, y)$ . A distância de  $P$  à diretriz é dada por  $\overrightarrow{DP} = P - D = \|(x, y) - (h - c, y)\| = \sqrt{(x - h + c)^2}$ . A distância

de  $P$  ao foco é dada por  $\overrightarrow{CP} = P - C = \|(x, y) - (h + c, k)\| = \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}$ . Temos então que a condição  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CP}$  implica que  $\sqrt{(x - h + c)^2} = \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}$ . Elevando ao quadrado temos que:

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + h^2 - 2hc - 2xh &= \\ = x^2 + h^2 + c^2 + 2hc - 2xh + 2cx + y^2 - 2yk + k^2 &= \\ y^2 - 2yk + k^2 &= 4cx - 4ch \end{aligned}$$

donde obtemos a equação da parábola com foco  $F = (h + c, k)$  e diretriz  $x = h - c$ :

$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \quad (2.3)$$

Podemos inverter o processo e, dada uma equação de uma parábola, encontrar o seu foco e sua diretriz. Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.35** Encontre o foco e a diretriz da parábola dada pela equação.

$$y^2 - 2y = x - 5$$

Completando o quadrado obtemos:

$$y^2 - 2y + 1 = x - 5 + 1$$

donde:

$$(y - 1)^2 = x - 4 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Ou seja, tendo em mente a Equação 2.3 uma parábola cuja diretriz  $x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$  e cujo foco é  $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$ .  $\triangleleft$

## 2.6 EXERCÍCIOS

1. Considere os pontos  $A$  e  $B$  abaixo, no plano, ou no espaço, e calcule  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $3A$ .
  - (a)  $A = (2, -1)$  e  $B = (-1, 1)$ .
  - (b)  $A = (-1, 3)$  e  $B = (0, 4)$ .
  - (c)  $A = (2, -1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 1)$
  - (d)  $A = (\pi, 3, -1)$  e  $B = (2\pi, -3, 7)$ .
2. Desenhe os pontos do exercício anterior.
3. Calcule e desenhe  $A + 2B$ ,  $A + 3B$ ,  $A + \frac{1}{2}B$  para  $A$  e  $B$  como no exercício 1.
4. Em cada caso, determine se os vetores  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{AB}$  são equivalentes:
  - (a)  $C = (1, -1)$ ,  $D = (1, 3)$ ,  $A = (-1, 5)$ ,  $B = (2, 2)$ .
  - (b)  $C = (1, 4)$ ,  $D = (-3, 5)$ ,  $A = (5, 7)$ ,  $B = (1, 8)$ .
  - (c)  $C = (1, -1, 5)$ ,  $D = (-2, 3, 4)$ ,  $A = (3, 1, 1)$ ,  $B = (0, 5, 0)$ .
  - (d)  $C = (2, 3, -4)$ ,  $D = (-1, 3, 5)$ ,  $A = (-2, -1, 5)$ ,  $B = (2, 2, 7)$ .
5. Encontre o comprimento dos vetores  $A, B, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  no item anterior.
6. Encontre o produto escalar  $A.A$  e  $A.B$  para todos os valores de  $A$  e  $B$  no Exercício 1.
7. Quais dos seguintes pares de vetores são perpendiculares?
  - (a)  $(1, -1, 2)$  e  $(2, 1, 7)$ .
  - (b)  $(1, -1, 1)$  e  $(2, 3, 1)$ .
  - (c)  $(\pi, 2, 1)$  e  $(2, -\pi, 0)$ .
  - (d)  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$ .
  - (e)  $(-5, 2)$  e  $(2, 3)$ .
8. Faça um esboço dos dois últimos itens do exercício acima.
9. Determine o cosseno dos ângulos do triângulo cujos vértices são:
  - (a)  $(2, -1, 1)$ ,  $(1, -3, -5)$  e  $(3, -4, -4)$ .
  - (b)  $(3, 1, 1)$ ,  $(-1, 2, 1)$  e  $(2, -2, 5)$ .
10. Sejam  $A, B, C$  três vetores não nulos. Mostre, por um exemplo, que podemos ter  $A.C = B.C$  com  $A$  e  $B$  distintos.
11. Encontre as equações das seguintes figuras no plano  $xy$  :
  - (a) A circunferência de centro  $C = (1, 2)$  e raio 3.
  - (b) A elipse de focos  $F_1 = (-2, 0)$  e  $F_2 = (2, 0)$  e  $2a = 3$ .
  - (c) A de hipérbole de focos  $F_1 = (-2, 0)$  e  $F_2 = (2, 0)$  e  $2a = 3$ .

12. Encontre as seguintes figuras no espaço  $xyz$  :
- (a) A esfera de centro na origem e raio 2.
  - (b) A esfera de centro  $C = (1, 2, 1)$  e raio 3.
13. Identifique as seguintes figuras no plano  $xy$ , dizendo se elas são circunferências, elipses, hipérbolas ou parábolas e dando seus centros, raios, focos, eixos e diretrizes conforme o caso.
- (a) A figura dada por  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ .
  - (b) A figura dada por  $2x^2 + 3y = 1$ .
  - (c) A figura dada por  $2x^2 - 3y^2 - 2y = 1$ .
  - (d) A figura dada por  $2x^2 + 2y^2 = 1$ .
  - (e) A figura dada por  $y^2 + 2y - 8x - 3 = 0$ .

## 2.7 AVALIAÇÃO DA 2ª AULA

1. Verifique se os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são ou não equivalentes:
- (a)  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0)$  e  $D = (0, 0, 1)$ .
  - (b)  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (2, 1)$  e  $D = (1, 2)$ .

2. Considere os pontos no espaço

$$P = (3, 4, -2) \text{ e } Q = (5, 3, 4)$$

Determine  $k$  de modo que o vetor  $PQ$  seja ortogonal ao vetor  $(4, k - 3, 2)$ .

3. Encontre a equação da esfera de centro no ponto  $C = (0, 1, 0)$  e raio 1
4. Identifique a cônica de equação  $5x^2 + 3y^2 = 15$ , determinando seus eixos e focos.



# AULA 3

## Operações com matrizes e determinantes

**Objetivos 3.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Saber o que é uma matriz e conhecer as operações de soma de matrizes, multiplicação de matrizes por um escalar e produto de matrizes.
2. Saber o que é o determinante de uma matriz quadrada e quais são suas propriedades.

### 3.1 - ADIÇÃO DE MATRIZES

**Definição 3.2** Uma matriz  $m \times n$  é uma tabela de números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

**Exemplo 3.3**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz  $3 \times 3$ .



**Exemplo 3.4**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

é uma matriz  $3 \times 4$ .



Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a matriz é quadrada, caso contrário, retangular. O primeiro exemplo é uma matriz quadrada  $3 \times 3$ , o segundo exemplo é uma matriz retangular  $3 \times 4$ . Matrizes são entes fundamentais em toda a matemática atual. São utilizadas para resolver sistemas de equações, para representar um certo tipo de função, etc. Encontram aplicações na estatística, na física, na computação gráfica e em vários campos do conhecimento. Neste curso, você estudará várias destas aplicações em todos os capítulos que se seguirão. Mas antes vamos aprender a operar com matrizes.

Cada um dos números que compõem uma matriz é chamado uma entrada. Costumamos denotar a entrada de uma matriz na linha  $i$  e coluna  $j$  por  $a_{ij}$ . Assim,  $a_{11}$  significa a entrada na primeira linha e primeira coluna,  $a_{32}$  significa a entrada na terceira linha e segunda coluna etc.

**Exemplo 3.5** É muito comum denotarmos uma matriz arbitrária  $3 \times 4$  assim

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

◁

É usual também escrevermos matrizes arbitrárias  $A$  com  $m$  linhas e  $n$  colunas, da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira de escrever a matriz  $A$ ,  $m \times n$ , é simplesmente  $A = (a_{ij})$ . Utilizaremos as duas maneiras conforme a nossa conveniência.

Diremos que duas matrizes são iguais se elas possuem o mesmo número de linhas e colunas e se suas entradas correspondentes são iguais.

**Definição 3.6** Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$   $m \times n$  a soma de  $A$  e  $B$ ,  $A + B$  é a matriz  $m \times n$  tal que a entrada  $(i, j)$  é a soma da entrada  $(i, j)$  de  $A$  com a entrada  $(i, j)$  de  $B$ .

Podemos escrever: se  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  então  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

**Exemplo 3.7** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz  $3 \times 4$  e

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz do mesmo tamanho.

Então

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 2 & 13 \\ 3 & 76 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

◁

**Definição 3.8** Dada uma matriz  $A$   $m \times n$  e um número  $c$  podemos definir o *produto* da matriz  $A$  por  $c$  que é a matriz  $cA$  obtida de  $A$ , multiplicando todas as entradas de  $A$  por  $c$ .

Podemos escrever se  $A = (a_{ij})$  então  $cA = (ca_{ij})$ .

**Exemplo 3.9** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 73 & 9 & -7 \\ 0 & -8 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

uma matriz  $3 \times 4$ .

Então

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 18 \\ 6 & 219 & 27 & -21 \\ 0 & -24 & 3\sqrt{2} & 12 \end{pmatrix}.$$

◁

**Proposição 3.10** Sejam  $A, B, C$  matrizes  $m \times n$  e  $k, k_1, k_2$  números. A adição de matrizes e o produto por um escalar satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
2.  $A + 0 = A$ , onde  $0$  denota a matriz  $m \times n$  que possui todas as entradas nulas.

3.  $A + (-A) = 0$ , onde  $-A$  denota a matriz  $m \times n$  que é obtida multiplicando todas as entradas de  $A$  por  $-1$ .
4.  $A + B = B + A$ .
5.  $k(A + B) = kA + kB$ .
6.  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ .
7.  $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$ .
8.  $1 \cdot A = A$  e  $0 \cdot A = 0$ .

### 3.2 - PRODUTO DE MATRIZES

Já definimos a adição de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar. Vamos agora definir a mutiplicação de matrizes.

**Definição 3.11** Dadas duas matrizes  $A, m \times k$  e  $B, k \times n$ , o produto  $A \cdot B$  de  $A$  e  $B$ , é a matriz  $C, m \times n$  tal que a entrada  $c_{ij}$  de  $C$  é a soma dos produtos das respectivas entradas da linha  $i$  de  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ .

A definição da multiplicação de matrizes desta maneira é um pouco misteriosa. A melhor justificativa para tal definição é que é esta a definição que “dá certo”, que é útil. Isto ocorre muito em matemática. Nos próximos capítulos, justificaremos tal definição. Por ora, vamos aprender a utilizá-la.

**Exemplo 3.12** Seja  $A$  a matriz  $2 \times 3$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 73 & 9 \end{pmatrix}$$

$B$  a matriz  $3 \times 4$ . e

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

vamos calcular a matriz  $C = A \cdot B$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 + 2 + 0 & 12 + 6 - 8 & 1 - 18 + 2\sqrt{2} & 7 + 14 + 4 \\ -2 + 73 + 0 & 12 + 219 - 72 & 2 - 657 + 18\sqrt{2} & 14 + 511 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -17 + 2\sqrt{2} & 25 \\ 71 & 159 & -655 + 18\sqrt{2} & 561 \end{pmatrix}.$$

Assim, a entrada  $c_{11}$  do produto é o resultado da seguinte operação:  $1(-1)+2.1+1.0=1$ ; da mesma forma a entrada  $c_{21} = 2.(-1)1 + 73.1 + 9.0 = 71$  e a entrada  $c_{23} = 2.1 + 73.(-9) + 9.(2\sqrt{2}) = -655 + 18\sqrt{2}$  ◁

**Exercício 3.13** Encontre as outras entradas da matriz produto, a saber,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{14}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{24}$  e confira com o resultado do exemplo acima.

**Observação 3.14** Observe que não é possível multiplicar matrizes de qualquer tamanho. A definição exige que o número de entradas de cada linha da primeira matriz seja igual ao número de entradas de cada coluna da segunda matriz, isto é, temos que multiplicar matrizes  $m \times k$  por matrizes  $k \times m$  e o resultado será uma matriz  $m \times n$ . No exemplo, a multiplicação de uma matriz  $2 \times 3$  por uma  $3 \times 4$  resultou numa matriz produto  $2 \times 4$ . Segue que  $A \cdot B$  pode existir e  $B \cdot A$  não. Em particular, a multiplicação de matrizes não é comutativa. A Proposição abaixo enumera as propriedades do produto de matrizes.

**Proposição 3.15** *Sejam  $A, B, C$  matrizes de tamanho adequado,  $k$  um número. Então a multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades:*

1.  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .
2.  $A(B + C) = AB + AC$ .
3.  $(B + C)A = BA + CA$ .
4.  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ .

Quando consideramos matrizes quadradas  $n \times n$  a multiplicação de matrizes possui propriedades adicionais, que passamos a enunciar. Em uma matriz quadrada, faz sentido falar na diagonal principal da matriz que são as entradas  $a_{ii}$ . Uma matriz quadrada tal que todas as entradas da matriz são nulas, exceto as da diagonal principal que são todas iguais a 1, é chamada de matriz identidade e denotada por  $I_n$  ou simplesmente  $I$ .

**Exemplo 3.16** Considere a seguinte matriz  $A$ ,  $3 \times 3$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 73 & 9 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

e a matriz identidade

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $AI_3 = I_3A = A$  (verifique). ◁

Dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$  temos a seguinte propriedade:

$$A.I = I.A = A, \text{ onde } I \text{ denota a matriz identidade } n \times n$$

**Exemplo 3.17** Podemos associar a um sistema de equações lineares uma equação matricial da seguinte maneira. Considere o sistema abaixo de 3 equações e 3 incógnitas que será resolvido mais adiante.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podemos escrever este sistema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou ainda  $AX = B$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

É muito comum escrever as variáveis de um determinado sistema de equações como um vetor coluna  $X$ ,  $n \times 1$ , no exemplo acima, um vetor  $3 \times 1$ . ◁

**Exercício 3.18** Verifique que  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercício 3.19** Verifique que  $A \cdot B \neq B \cdot A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercício 3.20** Considere os sistemas lineares abaixo e escreva-os na forma  $AX = B$  como acima.

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + z &= 3 \\ x + y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= -1 \\ 2x + 3y + z + 2w &= -3 \\ x + 9y + 3z - 5w &= 2 \end{aligned}$$

### 3.3 - TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

**Definição 3.21** Dada uma matriz  $A$ ,  $m \times n$  a *transposta* da matriz  $A$  é a matriz  $n \times m$  que se obtém trocando as linhas de  $A$  com suas colunas (notação  $A^t$ .)

**Exemplo 3.22** Seja  $A$  a matriz  $3 \times 4$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & -8 & 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

A transposta de  $A$ ,  $A^t$ , será a matriz  $4 \times 3$ :

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 12 & 3 & -8 \\ 1 & -9 & 2\sqrt{2} \\ 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

◁

3.4.1 DETERMINANTES DE ORDEM 2

Vamos inicialmente considerar determinantes de uma matriz  $2 \times 2$  para, a partir deles, considerar o caso geral. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada  $2 \times 2$ . Definimos o determinante de  $A$  (denotado por  $\text{Det}(A)$  ou  $|A|$ .) como sendo o número:

$$\text{Det}(A) = ad - bc$$

**Exemplo 3.23** *Se*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

então  $\text{Det}(A) = (-3)(5) - 4 \cdot 2 = -23$ . ◁

O determinante pode ser visto como uma função da matriz  $A$  ou de suas colunas. Escrevemos  $\text{Det}(A)$  ou  $\text{Det}(A_1, A_2)$  onde  $A = (A_1 A_2)$ . A proposição seguinte dá as propriedades da função determinante:

**Proposição 3.24** *Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ . A função  $\text{Det}(A)$  possui as seguintes propriedades:*

1.

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \text{Det} \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$$

*e analogamente para a primeira coluna.*

2. *Se  $t$  é um número, então*

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix} = t \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3. *Se duas colunas da matriz  $A$  são iguais, temos  $\text{Det}(A) = 0$ .*

4. *Se a uma coluna adicionamos um múltiplo de uma outra, o determinante não se altera.*

5. *Se duas colunas são trocadas, o determinante muda de sinal.*

6. *O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.*

**Demonstração:**

1. Seja  $A = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{pmatrix}$ . Temos:

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= \text{Det} \begin{pmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{pmatrix} = a(d + d') - c(b + b') = ad - cb + ad' - cb' \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \text{Det} \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Seja  $A = \begin{pmatrix} a & tb \\ c & td \end{pmatrix}$ . Então:

$$\text{Det}(A) = atd - ctb = t(ad - bc) = t \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3. Seja  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ . Então:

$$\text{Det}(A) = ab - ab = 0.$$

□

**Exercício 3.25** Demonstre os itens 4,5 e 6 da Proposição acima.

**3.4.2 - DETERMINANTES DE ORDEM ARBITRÁRIA**

Vamos definir o determinante de uma matriz quadrada arbitrária por indução a partir do caso  $2 \times 2$ , que consideramos inicialmente. O caso seguinte é o caso  $3 \times 3$ .

**Definição 3.26** Seja  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  uma matriz  $3 \times 3$ .

Definimos  $\text{Det}(A)$  como sendo o número:

$$\text{Det}(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

onde  $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{kl} \\ a_{mn} & a_{op} \end{vmatrix}$  denota o determinante da matriz  $2 \times 2 \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{kl} \\ a_{mn} & a_{op} \end{pmatrix}$ .

Uma outra maneira de dizer o que escrevemos acima é a seguinte. Seja  $A_{ij}$  o determinante  $2 \times 2$  obtido da matriz  $A$  acima, retirando a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Assim, por exemplo,  $A_{11}$  será o determinante que se obtém da matriz  $A$ , retirando a primeira linha e a primeira coluna,  $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Com esta notação, o determinante da matriz  $A$ ,  $3 \times 3$ , se escreve:

$$\text{Det}(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

**Exemplo 3.27** Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .  $\text{Det}(A)$  será o número:

$$\text{Det}(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -23$$

◁

Vamos definir agora o determinante de uma matriz quadrada arbitrária  $n \times n$ .

**Definição 3.28** Seja  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

uma matriz  $n \times n$ . Definimos  $\text{Det}(A)$  como sendo o número:

$$\text{Det}(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^n a_{1n}A_{1n}$$

onde  $A_{ij}$  é o determinante da matriz  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtida de  $A$  eliminando a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

**Observação 3.29** A expressão acima, que utilizamos na definição do determinante de uma matriz  $n \times n$ , é conhecida como desenvolvimento de Laplace, em relação à primeira linha. Pode-se escrever o desenvolvimento de Laplace, de maneira análoga, em relação a qualquer linha ou coluna da matriz. Demonstra-se que o número obtido é o mesmo, independentemente da linha ou coluna escolhida.

O determinante de uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , possui propriedades análogas às daquelas do determinante de uma matriz  $2 \times 2$ . É o que veremos a seguir.

**Proposição 3.30** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . A função  $\text{Det}(A)$  possui as seguintes propriedades:*

1. *Se uma coluna da matriz  $A$ ,  $A^j$  se escreve como soma de duas colunas  $A^j = A_1 + A_2$ , então temos:*

$$\begin{aligned} & \text{Det} \left( \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & A_1 + A_2 & \dots & A^n \end{matrix} \right) = \\ & = \text{Det} \left( \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & A_1 & \dots & A^n \end{matrix} \right) + \text{Det} \left( \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & A_2 & \dots & A^n \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

2. *Se  $t$  é um número, então*

$$\text{Det} \left( \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & tA^i & \dots & A^n \end{matrix} \right) = t \text{Det} \left( \begin{matrix} A^1 & A^2 & \dots & A^i & \dots & A^n \end{matrix} \right)$$

3. *Se duas colunas da matriz  $A$  são iguais, o  $\text{Det}(A) = 0$ .*
4. *Se a uma coluna adicionamos um múltiplo de uma outra o determinante não se altera.*
5. *Se duas colunas são trocadas o determinante muda de sinal.*
6. *O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.*
7. *Se  $A, B$  são matrizes  $n \times n$ , então  $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$ .*

### 3.5 - A INVERSA DE UMA MATRIZ

**Definição 3.31** *Dada uma matriz quadrada  $A$ ,  $n \times n$  diz-se que  $A$  é inversível se existe uma matriz  $B$ ,  $n \times n$ , tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I$ . A matriz inversa de  $A$  será denotada por  $A^{-1}$ .*

A matriz  $B$  inversa de  $A$ , quando existe, é única. Para ver que  $B$  é única suponha que existam duas matrizes,  $B_1$  e  $B_2$ , ambas inversas de  $A$ . Temos que  $AB_1 = B_1A = I$  e  $AB_2 = I$ . Mas então temos  $B_1 = B_1I = B_1AB_2 = IB_2 = B_2$ , ou seja,  $B_1 = B_2$ .

Dada a matriz  $A \cdot B$ , sua inversa é a matriz  $B^{-1}A^{-1}$ , pois

$$A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = B^{-1}A^{-1}A \cdot B = I.$$

Suponha que  $A$  seja uma matriz,  $n \times n$ , inversível e seja  $A^{-1}$  sua inversa. Temos então que  $AA^{-1} = I$ . Tomando determinantes temos que  $\text{Det}(A)\text{Det}(A^{-1}) = \text{Det}(I) = 1$ . Concluimos que  $\text{Det}(A) \neq 0$  e que  $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$ .

Vamos aprender a calcular a matriz inversa de matrizes  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ .

**Exemplo 3.32** Considere a matriz  $A$ ,  $2 \times 2$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que  $\text{Det}(A) = ad - bc \neq 0$ . A inversa de  $A$ ,  $A^{-1}$  é a matriz dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esta afirmação é de fácil verificação pois  $AA^{-1} = I$ . No próximo Capítulo, veremos como deduzir esta fórmula.  $\triangleleft$

**Exercício 3.33** Verifique se as seguintes matrizes  $2 \times 2$  são inversíveis e, em caso afirmativo, encontre a matriz inversa.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Vamos aprender agora como encontrar a inversa de uma matriz  $3 \times 3$ . Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde  $\text{Det}(A) \neq 0$ . A matriz dos co-fatores de  $A$  é a matriz  $M$  assim definida:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

onde  $A_{ij}$  é o determinante da matriz  $2 \times 2$  obtida de  $A$ , suprimindo a linha  $i$  e a coluna  $j$ . O determinante  $A_{ij}$  é chamado o menor correspondente à entrada  $a_{ij}$ . Por exemplo  $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ . A matriz adjunta de  $A$ , denotada por  $\text{Adj}(A)$  é a matriz transposta da matriz  $M$  dos co-fatores:  $\text{Adj}(A) = M^t$ . A matriz inversa de  $A$ ,  $A^{-1}$  será dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A). \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.34** Vamos calcular a inversa da matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Primeiramente calculamos a matriz  $M$  dos co-fatores. Para isto, temos que calcular todos os determinantes das matrizes  $2 \times 2$  obtidas de  $A$ , suprimindo uma linha e uma coluna. Observe:

1.  $A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$  (aqui suprimimos a primeira linha e a primeira coluna).
2.  $A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2$  (aqui suprimimos a primeira linha e a segunda coluna).
3.  $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$  (aqui suprimimos a primeira linha e a terceira coluna).

Calcule os outros menores  $A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ . Você encontrará a seguinte matriz  $M$  dos co-fatores (não esqueça dos sinais!):

$$M = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

A matriz adjunta de  $A$  será a transposta de  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando a fórmula 3.2, já que  $\text{Det}(A) = -46$  temos que:

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

◁

### 3.6 EXERCÍCIOS

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B, A - B, 3A, 2A - 3B.$$

2. Encontre  $A^t$  e  $B^t$  onde  $A$  e  $B$  são as matrizes do item anterior.

3. Em cada um dos casos abaixo encontre  $(AB)C$  e  $A(BC)$ .

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Calcule os seguintes determinantes:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

### 3.7 AVALIAÇÃO DA 3ª AULA

1. Encontre todas as matrizes  $M$  onde:

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

que comutam com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determine  $AB$  onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule:  $A - B$ ,  $A + 5B$ ,

4. Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



## Sistemas de equações lineares

**Objetivos 4.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Resolver sistemas de 3 equações lineares a 3 incógnitas.
2. Saber reconhecer quando estes sistemas possuem uma solução, são impossíveis, ou possuem infinitas soluções.
3. Dado um sistema de 3 equações a 3 incógnitas, saber encontrar a matriz associada e resolver o sistema pelo método de Gauss-Jordan.
4. Saber resolver sistemas de equações lineares mais complicados que os de 3 equações a 3 incógnitas.
5. Ter uma idéia, ainda que rudimentar, da teoria dos sistemas de equações lineares.

### 4.1 - MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS

Considere inicialmente o seguinte exemplo:

#### Exemplo 4.2

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

Para resolver o sistema podemos proceder de maneira muito simples, como já fizemos no Capítulo I, quando consideramos sistemas de duas equações e duas incógnitas (ver Exemplo 1.4). Para

eliminar a variável  $x$  na primeira equação, multiplicamos a primeira equação por  $-2$  e adicionamos à segunda. Em seguida, fazemos o mesmo em relação à terceira equação. Para eliminar  $x$  nesta equação, multiplicamos a primeira equação por  $-3$  e adicionamos à terceira. Obtemos o seguinte sistema equivalente ao sistema dado:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Observe que a segunda e a terceira equações formam um sistema de duas equações nas incógnitas  $y$  e  $z$ . Novamente, procedendo como no Exemplo 1.4 eliminamos a incógnita  $y$  encontrando o valor de  $z$ , da seguinte maneira. Multiplicamos a segunda equação por  $3$  e a terceira por  $-2$  e adicionamos. Obtemos:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 6y - 21z &= -51 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

que, novamente, é um sistema equivalente aos 2 primeiros. Obtemos assim o valor de  $z$ , a saber,  $z = 3$ . Substituindo nas duas primeiras equações temos os valores de  $y$  e  $x$ :  $6y = 63 - 51 = 12$  donde  $y = 2$  e finalmente  $x = 9 - 2 - 6 = 1$ .

Temos que a solução do sistema dado é portanto  $x = 1, y = 2$  e  $z = 3$ , solução que, neste caso, é única.  $\triangleleft$

Consideremos um outro exemplo.

**Exemplo 4.3** Encontre as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Procedendo como acima, multiplicamos a segunda equação por  $-2$  e adicionamos à terceira, para eliminar  $x$  na terceira equação. Em seguida, subtraímos a segunda equação da primeira para eliminar  $x$  na segunda equação. Obtemos:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2z &= 1 \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

Neste caso, ao eliminar a variável  $x$  eliminamos também a variável  $y$  e obtemos a segunda equação idêntica à terceira. O sistema é pois equivalente ao seguinte:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2z &= 1\end{aligned}$$

Obtemos que  $z = \frac{1}{2}$  mas aqui ocorre algo distinto do primeiro exemplo. Observe que para  $z = \frac{1}{2}$ ,  $x = -t + \frac{1}{2}$  é sempre solução para qualquer valor de  $y = t$ . Vemos assim que o sistema possui infinitas soluções  $x = -t + \frac{1}{2}$ ,  $y = t$  e  $z = \frac{1}{2}$ .  $\triangleleft$

Na próxima seção, seremos capazes de entender melhor este fenômeno.

**Exercício 4.4** Encontre todas as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 5 \\4x - y &= 7\end{aligned}$$

**Exercício 4.5** Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 0 \\x - 2y - z &= 1 \\x + 4y + z &= 2\end{aligned}$$

**Exercício 4.6** Encontre todas as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}3x + y + z &= 1 \\x + y + z &= 0 \\4x + 2y + 2z &= 1\end{aligned}$$

## 4.2 - MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Considere novamente o sistema de equações lineares do Exemplo 4.2 que consideramos no início deste capítulo:

**Exemplo 4.7**

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

$\triangleleft$

Vamos agora resolvê-lo de uma outra maneira. Para isto, vamos escrever uma matriz associada ao sistema do Exemplo 4.2 do seguinte modo: cada linha da matriz corresponderá a uma das equações. Teremos, portanto, uma matriz com 3 linhas. Cada coeficiente da 1ª equação corresponderá ordenadamente a uma entrada da 1ª linha. O termo independente será a 4ª entrada desta 1ª linha. Ela terá portanto 4 entradas. Para a 2ª e 3ª linhas procedemos da mesma forma. Teremos portanto uma matriz  $3 \times 4$  associada ao sistema, chamada matriz aumentada. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

**Observação 4.8** A matriz acima se chama aumentada para se distinguir da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

que é conhecida como matriz dos coeficientes do sistema. Utilizaremos, na seqüência, as duas matrizes que não podem ser confundidas.

A maneira que utilizaremos para resolver este sistema não é muito diferente da que utilizamos no Parágrafo 4.1. Vamos operar nas linhas da matriz exatamente como operamos com as equações da seguinte maneira: inicialmente, multiplicamos a 1ª linha por  $-2$  e adicionamos à segunda. Conservamos a 1ª linha e não alteramos as demais entradas. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Em seguida, multiplicamos a 1ª linha por  $-3$  e adicionamos à terceira. Não alteramos as demais entradas. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Continuando, multiplicamos a 2ª linha por 3 e a terceira por  $-2$ . O objetivo é ainda "eliminar" a variável  $y$  na 3ª equação como fizemos no Exemplo 4.2 (o que faremos na etapa seguinte) embora neste método trabalhemos sem escrever as variáveis explicitamente. Não alteramos as demais entradas. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & -21 & -51 \\ 0 & -6 & 22 & 54 \end{pmatrix}$$

e finalmente, adicionando a segunda e a terceira linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & -21 & -51 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Secretamente, sabemos que as 3 primeiras entradas das linhas da matriz correspondem respectivamente aos coeficientes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Podemos portanto ler o valor de  $z$  na última linha:  $z = 3$ . A 2ª linha representa a equação:  $6y - 21z = -51$ . Como  $z = 3$  obtemos  $y = \frac{63-51}{6} = 2$ . Levando estes valores na equação correspondente à primeira linha temos:

$$x = 9 - 2 - 2 \cdot 3 = 1.$$

Você talvez tenha observado que utilizamos um sistema misto até aqui. Para obter a solução  $z = 3$  operamos com a matriz aumentada. Em seguida, para obter os valores de  $x$  e de  $y$  escrevemos as correspondentes equações e resolvemos. Não há nada de errado com isto. Podemos assim proceder. Mas podemos também operar com a matriz até o final e obter o resultado lendo as linhas da matriz. Da seguinte maneira: considere a entrada  $(3,3)$  da matriz, o coeficiente de  $z$ . Ela vale 1. Uma entrada que vale 1 e tal que todas as entradas à sua esquerda são nulas é chamada pivô. Operando com o pivô podemos zerar as entradas  $(2,3)$  e  $(1,3)$  da matriz que são os coeficientes de  $z$  das outras equações. Multiplicamos a terceira linha por 21 e adicionamos à segunda equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos a terceira linha por  $-2$  e adicionamos à primeira equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Considere agora a entrada  $(2,2)$ . Ela vale 6 e não é, portanto, um pivô. Para transformá-la em um pivô dividimos a 2ª linha por 6. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, operando com o pivô obtido zeramos a entrada  $(1,2)$ , multiplicando a 2ª linha por  $-1$  e somando à 1ª :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos, agora sim, ler diretamente na matriz as soluções do sistema original:  $x = 1, y = 2, z = 3$ .

**Observação 4.9** O processo que levamos a cabo, para resolver o sistema utilizando a matriz aumentada, se chama escalonamento ou método de Gauss-Jordan. A matriz que obtivemos no final se chama matriz escalonada reduzida por linhas. A terminologia vem da palavra escada, já que a forma da matriz lembra uma escada. Uma dúvida freqüente é a seguinte: no processo de obter a forma escalonada, o que é legítimo fazer e o que não é? Para responder à esta pergunta lembre-se de como obtivemos a matriz aumentada, a partir de um sistema de equações, e da sua experiência anterior com equações. Dada uma equação, você sabe que se multiplicar todos os seus termos por uma constante isto não altera suas soluções. Da mesma forma, dado um sistema de duas equações, você sabe que suas soluções não se alteram se você troca as equações de ordem ou se substitui uma delas por ela multiplicada por uma constante, mais a outra multiplicada por uma outra constante. São estas as operações legítimas que você pode efetuar em uma matriz, de forma a trazê-la à forma escalonada reduzida por linhas:

1. trocar as linhas da matriz.
2. multiplicar as entradas de uma linha por uma constante não nula.
3. substituir uma linha por ela multiplicada por uma constante, mais uma outra multiplicada por outra constante.

Vamos formalizar um pouco mais o conteúdo da observação acima. Uma pergunta que podemos nos fazer é a seguinte: Será sempre possível encontrar a forma escalonada de uma matriz? Ela é única? Vamos dar agora uma definição formal do que seja a forma escalonada reduzida por linhas. Em seguida, consideraremos alguns exemplos e, no próximo parágrafo, consideraremos as questões mais teóricas.

**Definição 4.10** Uma matriz  $m \times n$  se diz na forma escalonada reduzida por linhas quando:

1. Se uma linha não for totalmente nula então a primeira entrada não nula da linha é a unidade (chamada pivô).
2. Se existirem linhas nulas então elas deverão ser agrupadas nas linhas inferiores da matriz.

3. Em quaisquer duas linhas não nulas da matriz, o pivô pertencente à linha inferior ocorre à direita do pivô pertencente à linha superior.
4. Cada coluna que possui um pivô possui zeros nas demais entradas.

Se apenas a condição (4) não é satisfeita, a matriz se diz na forma escalonada.

**Exercício 4.11** Verifique se as seguintes matrizes estão:

1. na forma escalonada,
2. na forma escalonada reduzida por linhas,
3. em nenhuma das duas formas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora considerar alguns exemplos, mostrando como podemos utilizar a forma escalonada ou a forma escalonada reduzida por linhas para resolver sistemas de equações lineares.

**Exemplo 4.12** Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Para resolver o sistema passamos a matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

O nosso método será achar a forma escalonada da matriz aumentada. Veremos que, no processo, encontraremos também a solução do problema. Vamos observar inicialmente que, embora a forma escalonada reduzida por linhas seja única, isto é, cada matriz possui uma única forma escalonada reduzida por linhas, o caminho para chegar até ela não é. Assim, há escolhas e um pouco é gosto pessoal. Algumas coisas são, no entanto, usuais. Procuramos na matriz uma linha em que a primeira entrada seja 1, um pivô. Utilizando este pivô, zeramos as entradas abaixo dele. No exemplo, temos um pivô na primeira linha. Para zerarmos as entradas  $(2, 1)$  e  $(3, 1)$  procedemos como se segue:

1. multiplicamos a primeira linha por  $-3$  e somamos à segunda.
2. multiplicamos a primeira linha por  $-5$  e somamos à terceira.

Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ao chegarmos neste ponto, procuramos um pivô na  $2^a$  ou  $3^a$  linha com o intuito de zerar ou a entrada  $(2,2)$  ou a entrada  $(3,2)$ . Mas, observando que as referidas entradas são iguais, vemos que isto não é necessário, basta subtrairmos uma linha da outra para zerar a entrada  $(3,2)$ . Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Embora ainda não tenhamos encontrado a forma escalonada já resolvemos o problema! Observe que a última linha significa  $0x + 0y + 0z = 7$  e esta equação não possui evidentemente solução. O sistema é pois, impossível.

◁

**Exemplo 4.13** Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para resolver o sistema passamos à matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

O nosso método será novamente encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, nenhuma das linhas possui um pivô. Podemos obter um pivô dividindo a primeira linha por 2. Isto nos faria trabalhar com frações, mas seria um caminho viável. Vamos optar por outro. Como queremos zerar as entradas  $(2,1)$  e  $(3,1)$  podemos multiplicar a  $1^a$  linha por  $-3$  e a segunda por 2 e somá-las, conservando a  $1^a$  linha inalterada. Observe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para zerarmos a entrada  $(3, 1)$  procedemos de forma semelhante. Como não há pivô, multiplicamos a primeira linha por  $-5$  e a última por  $2$ . Isto nos leva à seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{pmatrix}$$

Agora sim, aparece um pivô na segunda linha. Utilizamo-lo para anular a entrada  $(3, 2)$  : multiplicamos a segunda linha por  $-3$  e somamos à última, obtendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{pmatrix}$$

Daqui já poderíamos encontrar as soluções  $z = -3$  e em seguida  $x$  e  $y$ . Vamos, no entanto, continuar o processo de escalonamento até chegar à forma escalonada reduzida por linhas. Dividindo a última linha por  $-14$  obtemos um pivô nesta linha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos este pivô para zerar as duas entradas acima dele. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, utilizando o pivô da entrada  $(2, 2)$  zeramos a entrada acima dele e, dividindo a primeira linha por  $2$ , obtemos a forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos ler diretamente na matriz as soluções do sistema  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = -3$  ◀

Vamos considerar mais um exemplo:

**Exemplo 4.14** Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para resolver o sistema passamos novamente à matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Vamos encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizar este pivô para zerar as entradas (2,1) e (3,1). Para isto, multiplicamos a primeira linha por  $-2$  e somamos à segunda. Em seguida, multiplicamos a primeira linha por  $-4$  e adicionamos à terceira linha. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

A seguir, devemos zerar a entrada (3,2). Como não há pivôs na segunda ou terceira linha e salta aos olhos que as entradas (2,2) e (3,2) são iguais subtraímos a terceira linha da segunda. Observe o que acontece:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos toda uma linha de zeros. Facilmente passamos à forma escalonada reduzida por linhas. Dividindo a segunda linha por  $-5$  conseguimos um pivô. Em seguida, multiplicamos esta nova linha por  $-2$  para zerar a entrada acima do pivô.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é a forma escalonada reduzida por linhas. Como não há pivôs na terceira coluna, temos ali duas entradas não nulas. Para encontrar as soluções do sistema escrevemos as equações correspondentes às duas linhas não nulas.  $y - 2z = 2$  e  $x + z = 2$ . Neste caso temos infinitas soluções para o sistema. Fazendo  $z = t$  temos  $x = 2 - t$  e  $y = 2 + 2t$ . Qualquer valor de  $t$  nos fornece uma solução. Para  $t = 1$  temos  $x = 1, y = 4, z = 1$ ; para  $t = 2$  temos  $x = 0, y = 4, z = 2$  e assim por diante. Este exemplo é muito distinto do Exemplo 4.12 acima. Ali não existiam soluções para o sistema, aqui existe uma infinidade de soluções.  $\triangleleft$

**Observação 4.15** Os três exemplos acima ilustram todas as possibilidades possíveis para um sistema de três equações e três incógnitas: ou eles não possuem solução(4.12), ou eles possuem uma única solução(4.13), ou possuem uma infinidade delas(4.14). Um sistema de equações lineares nunca poderá ter duas, três ou qualquer número finito de soluções, distinto de um. Há uma razão geométrica para tal fato que veremos em capítulos posteriores.

Podemos ter sistemas de equações lineares que dependem de parâmetros. Neste caso, dependendo do valor dos parâmetros, poderemos ter uma solução, infinitas soluções ou até mesmo nenhuma solução. Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 4.16** Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\2x + 3y + az &= 3 \\x + ay + 3z &= 2\end{aligned}\tag{4.5}$$

Para resolver o sistema passamos à matriz aumentada, como anteriormente, sem nos preocuparmos com a presença do parâmetro  $a$  que deve ser pensado como um número qualquer. No final estudaremos as possibilidades para o sistema a partir do valor de  $a$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

O nosso método será novamente encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizar este pivô para zerar as entradas  $(2, 1)$  e  $(3, 1)$ . Para isto, multiplicamos a primeira linha por  $-2$  e somamos à segunda. Em seguida, multiplicamo-la por  $-1$  e adicionamos à terceira linha. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para zerarmos a entrada  $(3, 1)$  procedemos da forma seguinte: como há um pivô na  $2^{\text{a}}$  linha, multiplicamos a segunda linha por  $-(a-1)$  e adicionamos à terceira linha. Isto nos leva à seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(2+a)+4 & -(a-1)+1 \end{pmatrix}.$$



Para resolver o sistema passamos, como anteriormente, à matriz aumentada que aqui será uma matriz  $4 \times 7$ , já que são 6 as variáveis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observe que cada coluna corresponde a uma variável e, se numa equação uma variável não aparece, figura um zero na entrada correspondente da matriz. Vamos encontrar a forma escalonada da matriz aumentada. Neste caso, a primeira linha possui um pivô. Vamos utilizar este pivô para anular as entradas  $(2, 1)$  e  $(4, 1)$ . Para isto, multiplicamos a primeira linha por  $-2$  e somamos à segunda. Em seguida a adicionamos também à terceira linha. Multiplicamos em seguida a segunda linha por  $-1$  para aparecer um pivô. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

O pivô que aparece na entrada  $(2, 3)$  é então utilizado para zerar as entradas  $(3, 3)$  e  $(4, 3)$ , multiplicando a segunda linha por  $-5$  e somando à terceira e, em seguida, multiplicando a mesma linha por  $-4$  e somando à quarta. Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

que possui toda uma linha de zeros. Passamos, então, à forma escalonada reduzida por linhas. A linha de zeros passa para o final; dividindo a última linha por 6 conseguimos um pivô. Em seguida, multiplicamos esta nova linha por  $-3$  para zerar a entrada acima do pivô mais à direita. Para zerar a entrada acima do pivô mais à esquerda, multiplicamos a  $2^a$  linha por 2 e somamos à primeira. Temos finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta é a forma escalonada reduzida por linhas. Como não há pivôs na quarta coluna, temos ali duas entradas não nulas. Para encontrar as soluções do sistema escrevemos as equações correspondentes às três linhas não nulas.  $x_6 = \frac{1}{3}$ , e  $x_3 + 2x_4 = 0$  e  $x_1 + 3x_2 +$

$2x_4 + 2x_5 = 0$ . Neste caso, como no Exemplo 4.14, temos infinitas soluções para o sistema. Como naquele caso, podemos fazer  $x_4 = t$ . Mas, além disto, podemos fazer  $x_2 = r$  e  $x_5 = s$ . Obtemos que o conjunto de soluções do sistema é dado por:

$$x_6 = \frac{1}{3} \quad x_3 = -2t \quad x_1 = -2t - 2r - 2s,$$

onde  $t, r, s$  podem assumir qualquer valor real. ◁

Em um sistema como o anterior, as variáveis correspondentes aos pivôs são chamadas variáveis dependentes (no exemplo  $x_1, x_3$  e  $x_6$ ) e as demais são chamadas variáveis livres ou independentes, no exemplo  $x_2, x_4, x_5$  a quem demos os valores  $r, t, s$ .

Vamos elaborar um pouco mais a nossa teoria de sistemas lineares de equações, inicialmente formalizando as operações expostas na Observação 4.9, quando definimos quais operações são admissíveis quando queremos escalonar uma matriz.

**Definição 4.19** Dada uma matriz  $A, m \times n$ , as seguintes operações são chamadas operações elementares nas linhas da matriz  $A$  :

1. Trocar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um número não nulo.
3. Somar a uma linha um múltiplo não nulo de outra linha.

Dadas duas matrizes  $A$  e  $B, m \times n$  dizemos que elas são equivalentes se uma pode ser transformada na outra por operações elementares. Temos os seguintes resultados:

**Teorema 4.20** *Toda matriz  $A, m \times n$ , é equivalente a uma única matriz escalonada reduzida por linhas.*

**Teorema 4.21** *Se as matrizes aumentadas de dois sistemas lineares  $AX = B$  e  $CX = D$  são equivalentes então os sistemas possuem as mesmas soluções.*

Vamos resumir todas as nossas observações deste capítulo em dois teoremas:

**Teorema 4.22** *Dada uma matriz  $A, m \times n$ , escalonada, reduzida por linhas, suponha que ela seja a matriz de coeficientes do sistema  $AX = B$ .*

1. *Se  $A$  possui o mesmo número de linhas não nulas e colunas o sistema possui solução única ou é impossível.*

2. Se  $A$  possui mais colunas não nulas que linhas ele possui infinitas soluções. Neste caso, as variáveis podem ser divididas em dependentes e independentes. As dependentes correspondem aos pivôs. Atribuindo valores às independentes, temos todas as possíveis soluções do sistema.

**Definição 4.23** Se no sistema acima fazemos  $B = 0$ , temos o sistema  $AX = 0$ , que é chamado um sistema homogêneo.

Temos o seguinte resultado a respeito de sistemas homogêneos.

**Teorema 4.24** Dada uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , escalonada reduzida por linhas, suponha que ela seja a matriz de coeficientes do sistema  $AX = 0$

1. Se  $A$  possui o mesmo número  $n$  de linhas não nulas e colunas, o sistema possui solução única que é trivial, ou seja,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Neste caso temos  $\text{Det}(A) \neq 0$ .
2. Se  $A$  é uma matriz quadrada,  $n \times n$ , o sistema possui soluções não triviais se e somente se  $\text{Det}(A) = 0$ .
3. Se  $A$  possui mais colunas não nulas que linhas ele possui infinitas soluções.
4. Um sistema homogêneo nunca é impossível.

**Observação 4.25** Não faremos aqui a demonstração destes resultados, mas vamos observar que o bom funcionamento de tudo que fizemos até aqui depende destes resultados. São eles que nos garantem que, de qualquer maneira lícita que operemos com as linhas de uma matriz, obteremos a mesma forma escalonada reduzida por linhas e as mesmas soluções ao final. Eles permitem dizer quando um sistema possui uma solução e se elas são ou não em número finito, bastando para isto reduzir a matriz aumentada à forma escalonada reduzida por linhas.

## 4.4 EXERCÍCIOS

1. Encontre as soluções dos seguintes sistemas, inicialmente utilizando o método de eliminação de variáveis e, em seguida, encontrando a matriz aumentada, utilizando o método de Gauss-Jordan e calculando a matriz escalonada reduzida por linhas:

(a)

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 5 \\4x - y &= 7\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 0 \\x - 2y - z &= 1 \\x + 4y + z &= 2\end{aligned}$$

2. Verifique se os sistemas abaixo são impossíveis, possuem uma única solução, ou infinitas soluções.

(a)

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\x + 3y + z &= 11 \\2x + 5y - 4z &= 13\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + z &= 2 \\2x + 2y + 2z &= 5\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + z &= 2 \\2x + 2z &= 3\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}2x + y - 2z &= 10 \\3x + 2y + 2z &= 1 \\5x + 4y + 3z &= 4\end{aligned}$$

3. Encontre todas as soluções dos sistemas abaixo:

(a)

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 3y + z = 5$$

(b)

$$x + y + 3z - w = 4$$

$$x + 3y + z + 2w = 5$$

4. Mostre que os sistemas abaixo possuem apenas a solução trivial:

(a)

$$3x + 4y - 2z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$-x - 3y + 5z = 0$$

(b)

$$7x - 2y + 5z + w = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$y - 2z + w = 0$$

$$x + z + w = 0$$

(Sugestão: calcule o determinante da matriz de coeficientes e, em seguida, aplique o Teorema 4.24)

5. Determine os valores de  $a$  tais que o sistema nas incógnitas  $x, y, z$  possua uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções:

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

## 4.5 AVALIAÇÃO DA 4ª AULA

1. Resolva o sistema :

$$x - y - z = 0$$

$$2x + y + 4z = 0$$

$$2x - 2y + 2z = 0$$

2. Resolva o sistema :

$$x - 2y - z = 1$$

$$2x + y + 4z = -7$$

$$3x - 2y + 2z = 0$$

3. Resolva o sistema :

$$x - 2y + z = 7$$

$$2x - y + 4z = 17$$

$$3x - 2y + 2z = 14$$

4. Encontre os valores de  $a$  para os quais o sistema abaixo:

(a) é inconsistente.

(b) possui uma única solução.

(c) possui mais de uma solução.

$$x + 2y - 3z = a$$

$$2x + 6y - 11z = a$$

$$x - 2y + 7z = 1$$

## Equação cartesiana do plano no espaço

**Objetivos 5.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Deduzir a equação cartesiana de um plano no espaço, ortogonal a um vetor dado e passando por um ponto.
2. Resolver vários problemas sobre planos no espaço como, por exemplo, encontrar a equação de um plano passando por 3 pontos.
3. Conhecer o produto vetorial de 2 vetores e suas propriedades.
4. Saber o que é um conjunto de dois ou três vetores linearmente dependentes ou linearmente independentes no plano ou no espaço.

### 5.1 - A EQUAÇÃO DO PLANO

Uma reta no plano fica determinada pela sua inclinação e um de seus pontos. Da mesma maneira, um plano no espaço fica determinado conhecendo-se um vetor normal a ele e um de seus pontos. É o que veremos a seguir.

Considere um ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  no espaço e um vetor  $N = (a, b, c)$ . Vamos considerar a equação do plano  $\alpha$  ortogonal ao vetor  $N$  passando pelo ponto  $P$ . Para isto, considere um ponto  $X = (x, y, z)$  do plano. A condição para que o ponto  $X$  pertença ao plano é que o vetor  $\overrightarrow{PX}$  seja ortogonal a  $N$ . Assim, o plano  $\alpha$  pode ser descrito pela equação:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{N} = 0, \text{ ou ainda } (X - P) \cdot N = 0, \text{ ou seja,} \\ ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0$$

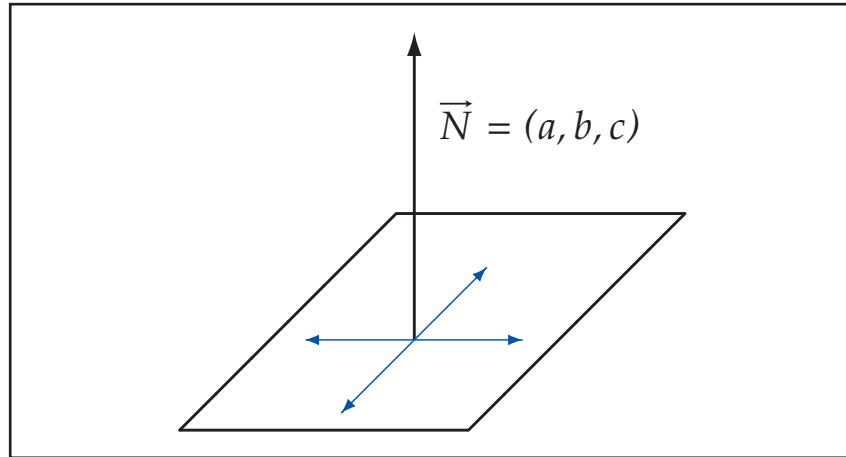


Figura 5.1: A equação cartesiana de um plano no espaço

Portanto teremos  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$ . Efetuando,  $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ . É usual denotar  $ax_0 + by_0 + cz_0$  por  $d$  e obtemos, assim, a equação geral do plano que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e é ortogonal ao vetor  $N = (a, b, c)$ .

$$ax + by + cz = d, \text{ onde } d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

**Exemplo 5.2** Encontre a equação do plano que passa pelo ponto  $P = (3, -1, 7)$  e é perpendicular ao vetor  $N = (4, 2, -5)$ . Como na dedução da fórmula feita acima, um vetor arbitrário do plano é dado por  $\vec{PX} = X - P = (x - 3, y + 1, z - 7)$ . Impondo a condição do vetor arbitrário ser normal ao vetor  $N$  obtemos:  $(x - 3, y + 1, z - 7) \cdot (4, 2, -5) = 0$ , ou seja,  $4x + 2y - 5z = -25$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 5.3** Encontre a equação do plano que passa pelos pontos  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (2, 3, -1)$  e  $C = (3, -1, 2)$ . Já sabemos que um plano no espaço possui equação  $ax + by + cz = d$ , mas ainda não temos como calcular o vetor normal ao plano pedido  $N = (a, b, c)$ . No próximo parágrafo veremos como fazer isto. Neste exemplo, vamos observar que, como  $(x, y, z)$  é um ponto arbitrário do plano, temos, substituindo sucessivamente os pontos  $A, B, C$  na equação do plano:

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= d \\ 2a + 3b - c &= d \\ 3a - b + 2c &= d \end{aligned} \tag{5.1}$$

Resolvendo o sistema obtemos  $a = \frac{3}{2}t, b = -\frac{3}{2}t, c = -\frac{5}{2}t, d = t$ . Tomando  $t = 1$  obtemos uma equação para o plano  $3x - 3y - 5z = 2$ . Observe que qualquer valor de  $t$  nos fornece uma equação para o plano pedido.

◁

## 5.2 - PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

Já vimos no Capítulo 2 que o produto escalar de 2 vetores, no plano ou no espaço, nos fornece um número. Veremos agora um outro produto de 2 vetores no espaço, que nos fornece um terceiro vetor, perpendicular ao plano gerado pelos 2 primeiros. Para isto, introduziremos a seguinte notação. Denotaremos por  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  os vetores unitários na direção dos eixos  $x, y, z$  respectivamente. Ou seja  $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ .

**Definição 5.4** Dados dois vetores  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  o produto vetorial de  $\vec{v}$  por  $\vec{w}$ , que será denotado por  $\vec{v} \times \vec{w}$ , será o determinante

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= (v_2w_3 - w_2v_3)\vec{i} - (v_1w_3 - w_1v_3)\vec{j} + (v_1w_2 - w_1v_2)\vec{k} = \\ &= (v_2w_3 - w_2v_3, -(v_1w_3 - w_1v_3), v_1w_2 - w_1v_2). \end{aligned}$$

**Observação 5.5** Na definição dada, optamos por usar o determinante acima por ser a forma mais fácil de guardar a definição. A forma que aparece mais abaixo poderia ser também utilizada como definição e seria a mais correta, mas é de mais difícil memorização.

**Observação 5.6** Já observamos que o produto escalar de dois vetores é um número, enquanto o produto vetorial é um vetor. Uma outra diferença é que o produto vetorial não é comutativo, isto é, em geral  $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{w} \times \vec{v}$ . Observe os exemplos abaixo:

**Exemplo 5.7** Encontre o produto vetorial dos vetores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , nesta ordem. Temos que o vetor  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  e o vetor  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ .

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) = \vec{k} = (0, 0, 1).$$

◁

**Exemplo 5.8** Calcule o produto vetorial  $\vec{j} \times \vec{i}$ . (O mesmo produto do exemplo anterior, mas na ordem inversa.)

$$\vec{j} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k}) = -\vec{k} = (0, 0, -1).$$

◁

No Exemplo 5.7, obtivemos um vetor ortogonal aos outros dois. No exemplo 5.8, também obtivemos um vetor ortogonal aos outros dois, porém, de sentido contrário ao vetor do Exemplo 5.7. Isto é sempre verdade. Faça o exercício abaixo e, em seguida, estude a proposição que lhe segue.

**Exercício 5.9** Calcule

1.  $\vec{j} \times \vec{k}$
2.  $\vec{k} \times \vec{j}$
3.  $\vec{i} \times \vec{k}$
4.  $\vec{k} \times \vec{i}$
5.  $(1, -2, 3) \times (2, 5, 7)$
6.  $(2, 5, 7) \times (1, -2, 3)$

**Proposição 5.10** *Sejam  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  dois vetores não nulos tais que não existe  $k \neq 0$  tal que  $\vec{w} = k\vec{v}$ . Então, o produto vetorial  $\vec{x} = \vec{v} \times \vec{w}$  é um vetor ortogonal aos outros dois. Além disto,  $\vec{y} = \vec{w} \times \vec{v}$  é um vetor distinto de  $\vec{x}$  também perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e tal que  $\vec{y} = -\vec{x}$ .*

**Demonstração:** Considere

$$\begin{aligned} \vec{x} = \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= (v_2w_3 - w_2v_3)\vec{i} - (v_1w_3 - w_1v_3)\vec{j} + (v_1w_2 - w_1v_2)\vec{k} = \\ &= (v_2w_3 - w_2v_3, -(v_1w_3 - w_1v_3), v_1w_2 - w_1v_2) = \end{aligned}$$

Vamos calcular  $\vec{x} \cdot \vec{v}$  e  $\vec{x} \cdot \vec{w}$ . Lembre-se que, de acordo com a Definição 2.15, dois vetores  $A$  e  $B$  são ortogonais se, e somente se,  $A \cdot B = 0$ . Temos:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{v} &= (v_2w_3 - w_2v_3, -(v_1w_3 - w_1v_3), v_1w_3 - w_1v_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = \\ &v_1v_2w_3 - v_1w_2v_3 - v_2v_1w_3 + v_2w_1v_3 + v_3v_1w_2 - v_3w_1v_2 = 0\end{aligned}$$

De maneira semelhante, calculamos:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{w} &= (v_2w_3 - w_2v_3, -(v_1w_3 - w_1v_3), v_1w_3 - w_1v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = \\ &w_1v_2w_3 - w_1w_2v_3 - w_2v_1w_3 + w_2w_1v_3 + w_3v_1w_2 - w_3w_1v_2 = 0.\end{aligned}$$

Ou seja,  $\vec{x}$  é ortogonal a  $\vec{v}$  e a  $\vec{w}$ .

Para demonstrar a 2ª parte calculamos:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= (w_2v_3 - v_2w_3)\vec{i} - (w_1v_3 - v_1w_3)\vec{j} + (w_1v_2 - v_1w_2)\vec{k} = \\ &= (w_2v_3 - v_2w_3), -(w_1v_3 - v_1w_3), (w_1v_2 - v_1w_2) = -\vec{x}\end{aligned}$$

Observe que temos sempre que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  pois, do contrário,  $v = kw$  para algum  $k \neq 0$ .  $\square$

**Exemplo 5.11** Uma aplicação interessante do produto vetorial é um outro método, distinto do Exemplo 5.3, de calcular a equação do plano passando por 3 pontos dados. Vamos, pois, repetir o cálculo lá feito utilizando outro método. Encontre a equação do plano passando pelos pontos  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (2, 3, 1)$  e  $C = (3, -1, 2)$ . Observe inicialmente que dois vetores do plano procurado são:  $\vec{v} = B - A = (1, 1, 0)$  e  $\vec{w} = C - A = (2, -3, 3)$ . O vetor  $N = \vec{v} \times \vec{w}$  será, como vimos, normal ao plano.

$$N = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, -3 - 2) = (3, -3, -5).$$

Conhecendo o vetor normal  $N$  do plano e um de seus pontos ( $B$ , por exemplo) determinamos a equação do plano, que coincide com a que encontramos no Exemplo 5.3:

$$(3, -3, -5) \cdot (x - 2, y - 3, z + 3) = 3x - 3y - 5z = 2.$$

$\triangleleft$

**Exercício 5.12** Utilize o produto vetorial para encontrar a equação de um plano no espaço, passando pelos seguintes ternos de pontos:

1.  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Faça um esboço deste plano.
2.  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, -2)$  e  $(3, 0, 1)$ .
3.  $(1, 1, 1)$ ,  $(-2, 1, 3)$  e  $(0, 2, 7)$ .

### 5.3 - VETORES LINEARMENTE DEPENDENTES E INDEPENDENTES

No que segue pensaremos sempre em um vetor  $v$  com o ponto inicial na origem. Como, de acordo com a Observação 2.10, isto é sempre possível, não perderemos generalidade assim procedendo.

**Definição 5.13** Dois vetores do plano são linearmente dependentes se estão sobre uma mesma reta que passa pela origem.

Dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente dependentes se existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ . Abreviamos dizendo que  $u$  e  $v$  são l.d.

**Definição 5.14** Dois vetores que não são linearmente dependentes são ditos linearmente independentes.

Portanto, dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente independentes (l.i.) se não existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ .

**Exemplo 5.15** Os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  são linearmente dependentes pois estão sobre a reta  $y = x$ . Uma outra maneira de ver isto é observar que  $(1, 1) = -1(-1, -1)$ . Por outro lado, os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$  são linearmente independentes.  $\triangleleft$

Até aqui, consideramos vetores no plano  $xy$ . Considere agora pares de vetores em um plano no espaço. As mesmas definições e os mesmos conceitos fazem perfeito sentido. Dois vetores  $v, w$  não nulos no espaço serão l.d. se estão sobre uma mesma reta e l.i., caso contrário. Pensando, como sempre, nos vetores com o ponto inicial na origem, isto é, equivalente à existência de uma constante  $k \neq 0$  tal que  $w = kv$  (l.d) ou a  $w \neq kv$  para todo  $k \neq 0$ .

**Exercício 5.16** Verifique quais pares de vetores são linearmente independentes e quais são linearmente dependentes.

1.  $u = (1, 0)$  e  $v = (5, 0)$ .
2.  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 2)$ .
3.  $u = (1, 0)$  e  $v = (-1, 0)$ .
4.  $u = (1, 1)$  e  $v = (1, -1)$ .
5.  $u = (1, 2, 1)$  e  $v = (2, 1, 7)$ .
6.  $u = (0, 0, 1)$  e  $v = (0, 1, 0)$ .
7.  $u = (-1, 2, 3)$  e  $v = (1, -2, -3)$ .

**Definição 5.17** Um conjunto de 2 vetores, linearmente independentes de um plano, é chamado uma base.

**Definição 5.18** Um conjunto de três vetores do plano  $xy$  é sempre linearmente dependente. De maneira análoga, um conjunto de três vetores em um plano do espaço é também linearmente dependente.

**Definição 5.19** Um conjunto de três vetores do espaço é dito linearmente independente se eles não estão no mesmo plano.

**Exemplo 5.20** O conjunto  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  de vetores do espaço é linearmente independente, pois não há um plano que os contém. Com efeito, suponha que o plano  $ax + by + cz = 0$  (que passa pela origem, já que o ponto inicial dos 3 vetores é a origem) contenha os três vetores. Se o plano contém  $\vec{i}$  temos  $a = 0$ . Se o plano contém  $\vec{j}$  segue que  $b = 0$  e finalmente se o plano contém  $\vec{k}$  segue que  $c = 0$ . Absurdo. O conjunto  $\vec{i}, \vec{j}, (1, 1, 0)$  de vetores do espaço é linearmente dependente. Com efeito, os 3 vetores estão contidos no plano  $z = 0$ .  $\triangleleft$

**Proposição 5.21** Um conjunto de  $n$  vetores no espaço  $v_1, \dots, v_n$  ( $n=2$  ou  $3$ ), não nulos, é linearmente independente se, e somente se, sempre que existirem  $a_1, \dots, a_n$  constantes não nulas, tais que  $\sum a_i v_i = 0$ , temos  $a_i = 0$  para todo  $i$ .

**Demonstração:** Temos dois casos a considerar:

1.  $n=2$

Neste caso, suponha que existam  $a_1, a_2$  tais que  $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$  com  $v_1, v_2$  não nulos e  $a_1, a_2$  idem. Segue que  $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$  o que contraria a hipótese dos vetores serem linearmente independentes.

2.  $n=3$

Neste caso, suponha que existam  $a_1, a_2, a_3$  tais que  $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ . com  $v_1, v_2, v_3$  não nulos e  $a_1, a_2, a_3$  também. Segue que  $v_3 = -\frac{a_1}{a_3}v_1 - \frac{a_2}{a_3}v_2$ , o que mostra que  $v_1, v_2, v_3$  estão no mesmo plano, o que contraria a hipótese dos vetores serem linearmente independentes.

Em ambos os casos a recíproca é clara. □

**Proposição 5.22** *Sejam  $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13}), v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}), v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})$  3 vetores no espaço e considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}. \text{ Se } \text{Det}(A) = 0 \text{ os vetores são l.d. e se}$$

$\text{Det}(A) \neq 0$  os vetores são l.i.

**Demonstração:** Suponha  $v_1, v_2, v_3$  l.d. Então  $v_3 = a_1v_1 + a_2v_2$ .

Segue que  $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ a_1v_1 + a_2v_2 \end{vmatrix} = 0$ , de acordo com o Teorema 3.30.

Reciprocamente, suponha  $v_1, v_2, v_3$  l.i.

Então:  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$  possui apenas a solução nula  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

Segue que  $\det(A) \neq 0$  pelo Teorema 4.24 □

No próximo parágrafo, bem como nos próximos capítulos, aplicaremos os conceitos aqui estudados à geometria.

## 5.4 - INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS NO ESPAÇO

Dado um plano  $\alpha$  no espaço de equação  $ax + by + cz = d$  vimos, no Parágrafo 5.1, que ele possui vetor normal  $N = (a, b, c)$ . Como o próprio nome diz, o vetor normal não é unicamente determinado, qualquer vetor na direção de  $N$  pode ser pensado como o vetor normal de  $\alpha$ . Temos o seguinte resultado:

**Proposição 5.23** *Dado um plano  $\alpha$  no espaço de equação  $ax + by + cz = d$  cujo vetor normal é  $N = (a, b, c)$  considere um outro plano  $\beta$*

dado por  $a'x + b'y + c'z = d'$  com vetor normal  $N' = (a', b', c')$ . Se  $N$  e  $N'$  são linearmente dependentes, então,  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes ou são paralelos.

**Demonstração:** Suponha  $N$  e  $N'$  linearmente dependentes. Isto significa que eles estão na mesma reta que passa pela origem, ou dito algebricamente, existe  $k \neq 0$  tal que  $N' = kN$ , ou seja  $(a', b', c') = k(a, b, c)$ . Podemos escrever as equações de  $\alpha$  e  $\beta$  assim:

$$\alpha := ax + by + cz = d \quad \beta := kax + kby + kc z = d'$$

Suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  possuam um ponto  $x_0, y_0, z_0$  em comum. Temos  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$  e  $kax_0 + kby_0 + kc z_0 = d'$ . Onde  $kd = d'$ . Como  $k \neq 0$  temos  $\alpha = \beta$ . Caso contrário, temos  $kax_0 + kby_0 + kc z_0 \neq d'$ , para qualquer solução  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $\alpha$ . Em particular  $kd \neq d'$ , ou ainda  $kd - d' \neq 0$ . Considere o sistema de equações dado por  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ kax + kby + kc z &= d' \end{aligned}$$

Multiplicando a 1ª equação por  $k$  e subtraindo encontramos:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ 0 &= kd - d' \end{aligned}$$

Como  $kd - d' \neq 0$  o sistema é impossível; portanto, não existe um ponto satisfazendo  $\alpha$  e  $\beta$  e os planos são paralelos.  $\square$

**Exercício 5.24** Verifique quais pares de planos são paralelos e quais são coincidentes.

1.  $3x + 2y + 5z = 8$  e  $6x + 4y + 10z = 6$
2.  $2x + 3y + 10z = 0$  e  $2x + 3y + 10z = 1$
3.  $x + y + z = 9$  e  $9x + 9y + 9z = 81$

Considere novamente dois planos no espaço, um plano  $\alpha$  de equação  $ax + by + cz = d$  cujo vetor normal é  $N = (a, b, c)$  e um outro plano  $\beta$  dado por  $a'x + b'y + c'z = d'$  com vetor normal  $N' = (a', b', c')$ . Suponha agora que  $N$  e  $N'$  são linearmente independentes. Sabemos que  $N' \neq kN$  para toda constante não nula  $k$ .

Considere o sistema de equações dado por  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned}$$

Multiplicando a 1ª equação por  $a'$ , a 2ª por  $a$  encontramos:

$$\begin{aligned}a'ax + a'by + a'cz &= a'd \\ a'ax + b'ay + c'az &= ad'\end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro:

$$\begin{aligned}a'ax + a'by + a'cz &= a'd \\ (b'a - a'b)y + (a'c - c'a)z &= a'd - ad'\end{aligned}$$

Como os vetores  $N$  e  $N'$  são linearmente independentes, temos que  $(b'a - a'b)$  e  $(a'c - c'a)$  não podem ser ambos nulos, do contrário teríamos  $N' = aN$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $b'a - a'b \neq 0$ . Supondo também que  $(a'c - c'a) \neq 0$  segue que a variável  $z$  é independente e o sistema possui infinitas soluções. Sabemos, da geometria elementar, que dois planos no espaço que não são paralelos nem coincidentes se encontram numa reta; vamos ver no próximo capítulo que é isto que está acontecendo neste caso, ou seja, as infinitas soluções do sistema acima são os pontos de uma reta.

## 5.5 AVALIAÇÃO DA 5ª AULA

1. Encontre a equação geral do plano que passa por  $(1, 1, 1)$  e possui vetor normal  $N_1 = (1, 1, 1)$ .
2. Encontre a equação geral do plano que passa pelos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 1, 2)$ .
3. Encontre o produto vetorial dos vetores  $(1, 0, 0)$  e  $(3, 0, 0)$ . Interprete geometricamente o seu resultado.



## Equações paramétricas da reta

**Objetivos 6.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Saber o que são equações paramétricas.
2. Representar uma reta no espaço por equações paramétricas.
3. Resolver problemas sobre retas no espaço, tais como: encontrar as equações paramétricas da reta que passa por dois pontos ou encontrar a interseção de uma reta, dada por equações paramétricas, com um plano, dado por uma equação cartesiana.

### 6.1 - EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja  $\ell$  uma reta no espaço passando pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e paralela ao vetor  $\vec{v}_d = (a, b, c)$ . A reta  $\ell$  consiste dos pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

Esta equação é chamada equação paramétrica da reta  $\ell$  ou equação vetorial da reta  $\ell$ . O vetor  $\vec{v}_d = (a, b, c)$  é chamado vetor diretor da reta. Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 6.2** Encontre a equação paramétrica da reta  $r$  passando pelo ponto  $(1, 2, -3)$  e paralela ao vetor  $(4, 5, -7)$ . Temos:

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -7)$$

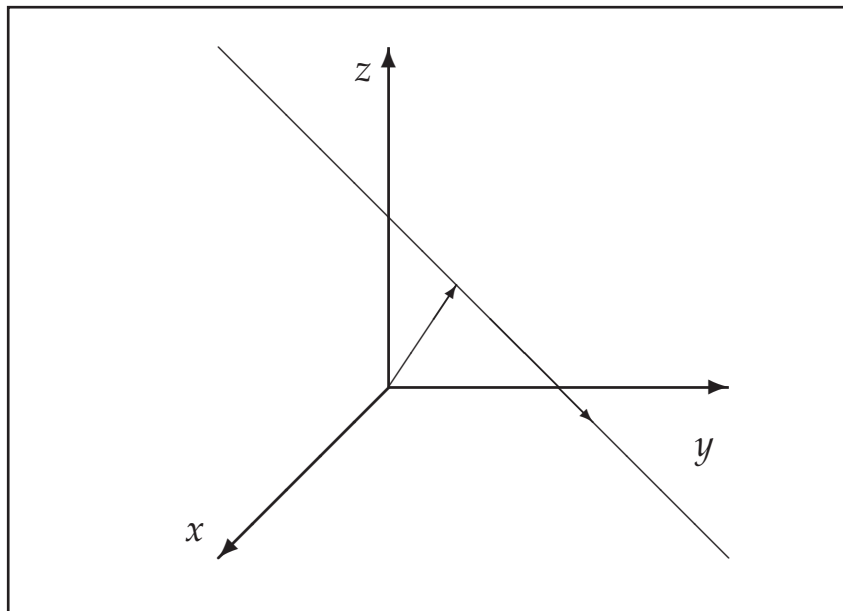


Figura 6.1: equação paramétrica da reta

Podemos também escrever as equações acima da seguinte maneira:

$$x = 1 + 4t \quad y = 2 + 5t \quad z = 3 - 7t.$$

◁

Observe que a equação depende de um parâmetro  $t$  que deve ser entendido da seguinte maneira: a medida que  $t$  percorre os números reais, o ponto  $(x, y, z)$  percorre os pontos da reta. Por exemplo, considere os seguintes valores de  $t$  e os correspondentes valores do ponto  $(x, y, z)$  :

$t$	0	1	2	-1
$(x, y, z)$	(1, 2, 3)	(5, 7, -4)	(9, 12, -11)	(-3, -3, 10)

Veja a Figura 6.1, onde o vetor diretor aparece em azul:

As equações paramétricas de uma reta não são dadas unicamente. Na tabela acima, temos vários pontos da reta. Tome por exemplo o ponto  $P_1 = (5, 7, -10)$ . Considere a reta  $s$  passando por  $P_1$  e com mesmo vetor diretor de  $r$  :

$$s := (5, 7, -10) + t(4, 5, -7)$$

As retas  $r$  e  $s$  já têm um ponto em comum  $P_1$ . Além disto, fazendo  $t = -1$  obtemos o ponto  $(1, 2, -3)$  que é um outro ponto de  $r$ . Ora, uma reta fica determinada por 2 pontos, logo  $r = s$ ! Por outro

lado, considere agora a reta  $u$  passando pelo mesmo ponto,  $P_0 = (1, 2, -3)$ , que  $r$ , mas com vetor diretor l.d. com o vetor diretor de  $r$ , por exemplo, o vetor diretor  $2(4, 5, -7) = (8, 10, -14)$  :

$$u := (1, 2, -3) + t(8, 10, -14)$$

Tomando  $t = \frac{1}{2}$  obtemos o ponto  $Q$  de  $u$ .  $Q = (5, 7, -10) \in r$ . Novamente  $r = u$ . Vemos assim que podemos escrever de muitas maneiras uma reta  $r$  passando por um ponto  $P_0$  e com vetor diretor  $v_d$ . Basta escolher qualquer ponto da reta e qualquer vetor diretor linearmente dependente com  $v_d$  isto é  $v'_d = kv_d$ , com  $k \neq 0$ .

As equações paramétricas podem ser muito úteis para resolver problemas. Considere os seguintes exemplos:

**Exemplo 6.3** Encontre a interseção da reta  $r$  dada por

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -7)$$

com o plano  $\alpha$  dado por  $-x + 2y + z = 2$ . Temos que  $r$  é dada por  $x = 1 + 4t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = -3 - 7t$ . Substituindo na equação do plano temos:

$$-1 - 4t + 2(2 + 5t) + (-3 - 7t) = 2.$$

donde  $t = -2$ . Voltando à equação da reta encontramos o ponto  $X_0$  de interseção da reta  $r$  e do plano  $\alpha$ ,  $X_0 = (-7, -8, 11)$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 6.4** Encontre a interseção da reta  $r$  dada por

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, 5, -6)$$

com o plano  $\alpha$  dado por  $-x + 2y + z = 2$ . Temos que  $r$  é dada por  $x = 1 + 4t$ ,  $y = 2 + 5t$ ,  $z = -3 - 6t$ . Substituindo na equação do plano temos:

$$-1 - 4t + 2(2 + 5t) + (-3 - 6t) = 2.$$

donde  $0t = 2$ . Ou seja, não existe valor de  $t$  que satisfaça as equações. Concluimos que a reta é paralela ao plano.  $\triangleleft$

## 6.2 - RETAS DADAS POR 2 PLANOS

Vamos considerar novamente a situação do final do Capítulo 5. Considere o sistema de 2 equações dado pelas equações de dois planos  $\alpha := -x + 2y + z = 0$  e  $\beta := 2x + 3y - z = 4$ :

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 e somando encontramos:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ 0 + 7y + z &= 6 \end{aligned}$$

Passando a matriz aumentada e multiplicando a 1ª linha por  $-1$  para aparecer um pivô temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Dividindo a 2ª linha por 7 obtemos um pivô e a 2ª na entrada (2,2):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

Com este pivô zeramos a entrada (1,2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

que é a forma escalonada por linhas da matriz dada. Vemos que a variável  $z$  é livre. Fazendo  $z = t$  concluímos:

$$y = \frac{6}{7} - \frac{1}{7}t \quad x = \frac{12}{7} + \frac{5}{7}t$$

Obtemos infinitas soluções, o que já sabíamos. Mas, de posse de nossos novos conhecimentos, vemos que essas infinitas soluções são os pontos da reta de interseção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$  dados. As equações acima se escrevem:

$$(x, y, z) = \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0\right) + t\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 1\right),$$

que é a equação da reta que passa por  $(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$  e possui vetor diretor  $(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 1)$ .

**Exercício 6.5** Determine se os seguintes sistemas de equações determinam planos coincidentes, paralelos ou retas e, no último caso, encontre um ponto e o vetor diretor da reta:

$$1. \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 6y - 7z = 6 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 2 \end{cases}$$

### 6.3 - RESOLVENDO A GEOMETRIA PELA ÁLGEBRA: O CASO DE SISTEMAS LINEARES

Vimos no Capítulo 4, Observação 4.15 e exemplos anteriores, que um sistema linear de três equações e três incógnitas pode ser impossível, possuir infinitas soluções ou ter uma única solução. Já interpretamos geometricamente o que acontece quando consideramos sistemas de equações lineares de 2 equações e três incógnitas. Vejamos o que acontece quando consideramos 3 ou mais equações:

**Exemplo 6.6** Considere o seguinte sistema de 3 equações e 3 incógnitas já estudado no Capítulo 4, Exemplo 4.13.

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Naquela oportunidade, sem interpretar as equações de maneira geométrica, vimos que o sistema possui solução única  $x = 1, y = 2, z = -3$ . Sabendo agora que cada equação linear corresponde a um plano, vemos que os três planos acima possuem como interseção um único ponto.  $\triangleleft$

**Exemplo 6.7** Considere o seguinte sistema de 3 equações e 3 incógnitas já estudado no Capítulo 4, Exemplo 4.13.

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 3y &= 11 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Passando à matriz aumentada temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

Multiplicando a 1<sup>a</sup> linha por  $-3$  e adicionando à segunda multiplicada por 2 e, em seguida, multiplicando-a por  $-5$  e adicionando à terceira multiplicada por 2 temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \end{array} \right)$$

Observamos que a 2<sup>a</sup> e terceira linhas são idênticas e subtraindo uma da outra obtemos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

sem terminar o escalonamento já podemos concluir que o sistema terá infinitas soluções, ou seja, os três planos acima têm por interseção uma reta, ou seja, o terceiro plano passa pela interseção dos 2 primeiros.  $\triangleleft$

**Exercício 6.8** Encontre as equações paramétricas da reta de interseção dos 3 planos acima.

**Exercício 6.9** Determine as posições relativas dos planos dados pelos seguintes sistemas de 3 ou 4 equações. Diga se eles são todos paralelos, ou se determinam retas ou a qual outra configuração geométrica sua interseção corresponde.

1.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 6 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 6y - 7z = 6 \\ 6x + 9y - 2z = 6 \\ 10x + 15y - 9z = 12 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 6y + 10z = 2 \\ 20x + 30y + 50z = 10 \end{cases}$$

Combinando estas observações com as observações feitas no Capítulo 5, Proposição 5.23, vemos que um sistema de 3 equações a 3 incógnitas, visto como interseção de 3 planos, possui 3 possibilidades: ou ele é impossível, ou ele possui solução única, ou ele possui infinitas soluções. Estes 3 casos correspondem geometricamente às seguintes situações respectivamente: ou os planos não possuem interseção, ou eles se interceptam em 1 ponto ou, no caso de possuírem infinitas soluções, eles se interceptam segundo uma reta ou são coincidentes.

## 6.4 EXERCÍCIOS PARA OS CAPÍTULOS 5 E 6

1. Considere os pontos  $A$  e  $B$  no espaço, e calcule a equação paramétrica da reta que passa por  $A$  e  $B$ . (Sugestão: observe que o vetor diretor da reta é dado por  $B - A$ .)

(a)  $A = (2, -1, 1)$  e  $B = (-1, 1, 2)$ .

(b)  $A = (-1, 3, 2)$  e  $B = (0, 4, -1)$ .

(c)  $A = (2, -1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 1)$ .

(d)  $A = (\pi, 3, -1)$  e  $B = (2\pi, -3, 7)$ .

2. Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 1)$  e é paralela à reta  $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-1, 2, 4)$ .

3. Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 3)$  e é paralela ao plano  $x + y + z = 1$ .

4. Encontre a equação cartesiana do plano que contém as retas concorrentes:

$$r := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 2, 1) \quad s := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 2, 3).$$

5. Encontre a equação cartesiana do plano que é paralelo às retas:

$$r := (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-2, 2, 1) \quad s := (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, 3).$$

e passa por  $(-1, -1, 2)$ .

6. Encontre a equação paramétrica da reta que é paralela à interseção dos planos  $x + y + z = 1$  e  $x - y - 2z = 0$  e passa pelo ponto  $(-1, 2, 3)$ .

## 6.5 AVALIAÇÃO DA 6ª AULA

1. Determine a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos  $(1, 2, 0)$  e  $(-5, 3, 2)$ .
2. Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto  $(-1, -2, 0)$  e é paralela ao vetor  $(-2, 9, 3)$ .
3. Determine a equação paramétrica da reta de interseção dos planos  $x + y + z = 1$  e  $3x - 4y = 0$ .
4. Considere as equações dos 3 planos:  $x - y + 2z = 1$ ,  $-x - 3y + 4z = 0$  e  $x - 3y + z = 1$ . Determine se os três planos são coincidentes, paralelos, se interceptam em um ponto ou numa reta e, nos dois últimos casos, determine as equações.



## Posições relativas de retas e planos no espaço

**Objetivos 7.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Determinar a posição relativa de duas retas a partir do estudo de seus vetores diretores.
2. Saber quando dois ou mais planos são ou não paralelos a partir do estudo de seus vetores normais.
3. Determinar a posição relativa de um plano e uma reta no espaço.

### 7.1 - RETA E RETA

Em nossos estudos de geometria, no ensino médio, aprendemos que duas retas no espaço podem se interceptar, ser paralelas ou ainda ser reversas. Recordando o que lá aprendemos, duas retas, no espaço, podem estar ou não em um mesmo plano. Se elas estão em um mesmo plano e são distintas, elas se interceptam ou são paralelas. Se elas não estão em um mesmo plano então elas são reversas. É isto o que se entende por determinar a posição relativa de duas retas no espaço, determinar se elas se interceptam, são paralelas ou reversas.

Vamos agora aplicar o estudo que fizemos até aqui para determinar a posição relativa de duas retas no espaço, dadas parametricamente. Considere duas retas no espaço, dadas parametricamente:

$$r := \vec{X} = P_1 + \lambda \vec{A}_1 \quad s := \vec{X} = P_2 + \lambda \vec{A}_2$$

onde  $\vec{X} = (x, y, z)$  e a reta  $r$  (resp.  $s$ ) é a reta que passa por  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) e possui vetor diretor  $\vec{A}_1$  (resp.  $\vec{A}_2$ ).

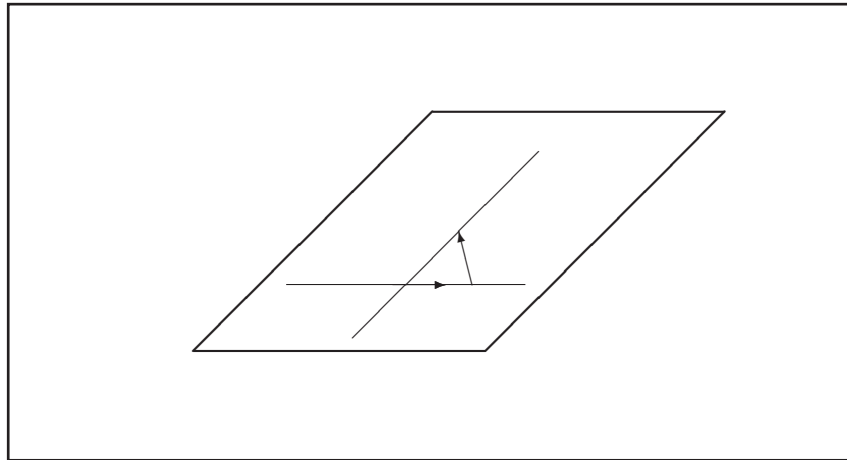


Figura 7.1: Retas em um mesmo plano

Temos duas possibilidades para os vetores diretores  $A_1$  e  $A_2$ . Eles podem ser linearmente dependentes ou independentes. Se os vetores diretores de duas retas distintas são linearmente dependentes então elas são paralelas. Por outro lado, se os vetores diretores de duas retas são linearmente independentes então temos duas possibilidades:

1. As duas retas estão no mesmo plano. Neste caso, elas têm que se interceptar. Dizemos também que elas são concorrentes.
2. As duas retas não estão em um mesmo plano. Neste caso, elas necessariamente são reversas.

Para determinar se duas retas que possuem vetores diretores l.i. são reversas ou se interceptam, procedemos como se segue. Consideramos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  das retas  $r$  e  $s$  e o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Consideramos agora o conjunto de três vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$ . Temos novamente duas possibilidades:

1. Se os três vetores são l.d., as retas  $r$  e  $s$  estão no mesmo plano e, como não são paralelas, são concorrentes (ver Figura 7.1).
2. Se os três vetores são l.i., as retas  $r$  e  $s$  não estão em um mesmo plano e são, portanto, reversas.

Consideremos alguns exemplos.

**Exemplo 7.2** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$$

Primeiramente olhamos para os vetores diretores da reta  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (1, 1, 1)$ . Não existe  $k \neq 0$  tal que  $A_2 = kA_1$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.i. Sejam agora os pontos  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$  e  $P_2 = (0, 1, 0) \in s$  e considere o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, 1, 0) - (1, 2, 3) = (-1, -1, -3)$ . Vamos verificar se o terno  $\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$  é l.d. ou l.i. Para isto, de acordo com a Proposição 5.22 formamos o

determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1} \\ \overrightarrow{A_2} \\ \overrightarrow{P_1P_2} \end{pmatrix}$ . Se  $\text{Det}(A) = 0$  os vetores

são l.i. do contrário l.d.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1(-3 + 1) + 3(-1 + 1) = 2 \neq 0$$

Logo os vetores são l.i. e as retas são reversas.  $\triangleleft$

**Exemplo 7.3** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (1, 3, 6) + \mu(0, 2, 6)$$

Primeiramente olhamos para os vetores diretores da reta  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (0, 2, 6)$ . Neste caso existe  $k \neq 0$  tal que  $A_2 = kA_1$ , a saber  $k = 2$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.d. Pelo nosso critério as retas são paralelas se forem distintas. Considere o ponto  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$ . Veja que  $P_1 \in s$ , pois, se  $(1, 2, 3) = (1, 3, 6) + \mu(0, 2, 6)$ , temos três equações  $1 = 1$ ,  $2 = 3 + 2\mu$  e  $3 = 6 + 6\mu$ . Concluimos que as equações são satisfeitas para  $\mu = -\frac{1}{2}$ . Portanto, as retas são coincidentes,  $r = s$ .  $\triangleleft$

**Observação 7.4** Já observamos antes que a forma paramétrica de uma reta não é única, e duas retas podem ser coincidentes embora, à primeira vista, isto não seja claro. É o que aconteceu no exemplo acima. Se duas retas possuem vetores diretores l.d. elas podem ser paralelas ou coincidentes. A coincidência pode ser verificada como fizemos acima: toma-se qualquer ponto da primeira reta e verifica-se se pertence à segunda; se este for o caso, as retas coincidem.

**Exemplo 7.5** Determine a posição relativa das retas:

$$r := \vec{X} = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad s := \vec{X} = (1, 5, 0) + \mu(0, -1, 1)$$

Primeiramente consideramos os vetores diretores da reta  $A_1 = (0, 1, 3)$  e  $A_2 = (0, -1, 1)$ . Não existe  $k \neq 0$  tal que  $A_2 = kA_1$ . Logo  $A_1, A_2$  são l.i. Sejam agora os pontos  $P_1 = (1, 2, 3) \in r$  e  $P_2 = (1, 5, 0) \in s$  e considere o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1, 5, 0) - (1, 2, 3) = (0, 3, -3)$ . Vamos verificar se o terço  $\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$  é l.d. ou l.i.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a primeira coluna é nula}$$

Logo os vetores são l.d. e as retas são concorrentes.

◁

**Exemplo 7.6** Como as retas acima são concorrentes, podemos facilmente encontrar seu ponto  $P$  de interseção, igualando seus vetores posição.

$$(1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) = (1, 5, 0) + \mu(0, -1, 1),$$

obtemos:

$$(0, -3, 3) + (0, \lambda, 3\lambda) - (0, -\mu, \mu) = 0.$$

Donde,

$$0 = 0 \quad -3 + \lambda + \mu = 0 \quad 3 + 3\lambda - \mu = 0$$

Obtemos  $\lambda = 0$  e  $\mu = 3$ . Substituindo  $\lambda$  em  $r$  e  $\mu$  em  $s$  obtemos o ponto  $P$  de interseção:  $P = (1, 2, 3)$ .

◁

## 7.2 - PLANO E PLANO

Considere o sistema abaixo de três equações e 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 6 \\ 5x + 5y - 5z = 2 \end{cases}$$

Vimos no Capítulo 5, Proposição 5.23, que a condição para que 2 planos sejam paralelos é que os vetores normais sejam l.d. Veremos agora que é fácil concluir, observando as equações de três ou mais planos, se eles são paralelos. Já vimos que os vetores normais dos planos são dados pelos coeficientes de  $x, y, z$  na equação. Ora, se 3 planos possuem o mesmo vetor normal, como acima, é evidente que eles são paralelos.

---

### 7.3 - RETA E PLANO

---

Uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$  são perpendiculares se o vetor diretor de  $r$  é paralelo ao vetor normal de  $\alpha$ .

**Exemplo 7.7** Verificar se o plano dado por  $\alpha := x + 2z = 14$  e a reta  $r$  dada pela interseção dos 2 planos  $2x - y - z = 0$  e  $2x + y - z = 0$  são perpendiculares.

Considere os vetores normais aos dois planos  $N_1 = (2, -1, -1)$  e  $N_2 = (2, 1, -1)$ . O produto vetorial  $N_1 \times N_2$  dá um vetor diretor  $v_d$  para a reta  $r$  de interseção. Obtemos:

$$v_d = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 0, 4).$$

O vetor normal do plano  $\alpha$  também é  $(2, 0, 4)$ . Logo a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

## 7.4 EXERCÍCIOS

1. Considere novamente os pontos  $A$  e  $B$  no espaço, já considerados nos exercícios do capítulo anterior. Determine a posição relativa da reta dos itens a) e b), ou seja, diga se elas são paralelas, reversas ou concorrentes. O mesmo para as retas dos itens b) e c).

(a)  $A = (2, -1, 1)$  e  $B = (-1, 1, 2)$ .

(b)  $A = (-1, 3, 2)$  e  $B = (0, 4, -1)$ .

(c)  $A = (2, -1, 5)$  e  $B = (-1, 1, 1)$ .

2. Determine a posição relativa dos planos dados por:

$$x + 2y + 2z = 1 \quad x + 2y + 2z = 2 \quad x + 2y + 2z = 5$$

3. Determine as posições relativas das seguintes retas e planos, determinando se eles se interceptam ou são paralelos e, caso se interceptem, se são perpendiculares (veja também os Exemplos 6.4 e 6.3)

(a)  $r := (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 2, 5)$  e  $\alpha := 2x + 4y + 4z = 5$ .

(b)  $r := (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(-2, -2, 4)$  e  $\alpha := 2x + 2y + z = 5$ .

(c)  $r := (x, y, z) = (1, 1, 2) + t(1, 4, 5)$  e  $\alpha := -2x - 4y + 4z = 5$ .

4. Calcule  $m$  para que as retas:  $r$  dada pela interseção dos planos  $x - my + 1 = 0$  e  $z - y + 1 = 0$  e  $s$  dada por  $(x, y, z) = (0, 0, 0) + (1, m, 1)$

(a) sejam paralelas.

(b) concorrentes.

## 7.5 AVALIAÇÃO DA 7ª AULA

1. Determine a posição relativa dos planos  $x + 2y - z = 2$  e  $2x + 4y - 2z = 5$ .
2. Determine a posição relativa das retas  $r$  e  $s$  dadas por:

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 1/2 + 1\mu \\ y = 3 - 6\mu \\ z = 3/2 - 3\mu \end{cases}$$

3. Considere as retas  $r, s \subset \mathbf{R}^3$  dadas por:

$$r := (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 2, 3)$$

$$s := (x, y, z) = \mu(-1, 0, 2)$$

Encontre a equação geral do plano  $\alpha$  que é paralelo às retas  $r$  e  $s$  e passa por  $(0, 1, 0)$



## Transformações lineares do plano no plano

**Objetivos 8.1** Ao terminar este capítulo você deverá ser capaz de:

1. Entender o que é uma base do plano.
2. Entender o que é uma transformação linear do plano no plano.
3. Operar com transformações lineares do plano no plano e reconhecer vários tipos de tais transformações.
4. Calcular autovetores e autovalores de transformações lineares do plano e diagonalizar tais operadores quando possível.

### 8.1 - BASES DO PLANO

Já estudamos, no Capítulo 5, o que são vetores linearmente dependentes e independentes no plano e o que é uma base do plano. Vamos rever aqui esses conceitos e utilizá-los para estudar um certo tipo de funções do plano para o plano.

**Definição 8.2** Dois vetores do plano são linearmente dependentes se estão sobre uma mesma reta que passa pela origem.

Dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente dependentes se existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ .

**Definição 8.3** Dois vetores que não são linearmente dependentes são ditos linearmente independentes.

Portanto, dados  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$   $u, v$  são linearmente independentes se não existe  $k \neq 0$  tal que  $u = kv$ .

**Definição 8.4** Um conjunto de 2 vetores linearmente independentes do plano é chamado uma base.

A utilidade de bases do plano é que, dada uma base por exemplo  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 1)$ , podemos escrever qualquer outro vetor do plano, por exemplo  $w = (0, 1)$  como  $w = au + bv$ , para constantes  $a, b$ , que podemos calcular. No caso, tomamos  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = \frac{1}{2}$ , pois  $\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1) = (0, 1) = w$ .

Observe que o fato acima é verdade para qualquer vetor  $w = (w_1, w_2)$  do plano, não apenas para o exemplo escolhido. Para ver isto suponha que  $(w_1, w_2) = a(1, 1) + b(-1, 1)$ . Isto nos dá as seguintes equações:

$$w_1 = a - b \text{ e } w_2 = a + b$$

donde as soluções  $a = \frac{w_1 + w_2}{2}$  e  $b = \frac{w_2 - w_1}{2}$ .

## 8.2 - GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO

Inicialmente, faremos uma revisão do conceito de função visto no ensino médio e neste curso, em outra disciplina, e que será fundamental neste capítulo.

**Definição 8.5** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma lei que associa a *cada* elemento de  $A$ , *um único* elemento de  $B$ . O conjunto  $A$  é chamado o domínio da função  $f$  e o conjunto  $B$  é o contradomínio.

**Observação 8.6** As expressões em itálico *cada* e *um único*, merecem atenção especial. *Cada* significa que não sobram elementos no domínio aos quais não corresponde uma imagem; *um único* significa que cada elemento do domínio tem por imagem um único elemento do contradomínio.

**Exemplo 8.7** Ainda no Capítulo 1, Seção 1.1 vimos exemplos de leis que são funções e leis que não são. Por exemplo, a reta  $y = 2x + 3$  é o gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada  $x \in \mathbb{R}$  associa  $f(x) = 2x + 3$ . Já a lei dada por  $x^2 + y^2 = 4$  também vista ali não é uma função, pois vimos que um valor de  $x$  corresponde a dois valores de  $y$ . ◁

Vamos estudar agora um tipo de função que ainda não havia aparecido. São as chamadas transformações lineares do plano do plano; isto significa que o domínio e o contradomínio da função são o plano  $\mathbb{R}^2$ . Linear significa que a lei pode ser dada por uma matriz  $2 \times 2$ .

**Definição 8.8** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função definida por equações da seguinte forma:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

onde  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  são constantes e  $w_1, w_2, x_1, x_2$  são as variáveis. Observe que as variáveis aparecem em grau 1.

Podemos também escrever a função  $T$  acima da seguinte maneira: Notamos os pontos do  $\mathbb{R}^2$  por  $w = (w_1, w_2)$  e  $x = (x_1, x_2)$ . Então  $T$  se escreve  $w = Ax$ , onde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

**Exemplo 8.9** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em torno do eixo dos  $y$ 's.  $T(x) = (-x_1, x_2)$ . Neste caso  $w_1 = -x_1 + 0x_2$   $w_2 = 0x_1 + x_2$ . Ou ainda

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando-se o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 1)$  é  $(-1, 1)$ , a imagem de  $(1, 0)$  é  $(-1, 0)$  e a de  $(0, 1)$  é  $(0, 1)$ .  $\triangleleft$

#### Exercício 8.10

$(x_1, x_2)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$				
$(w_1, w_2)$	$(-1, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$				

Complete a tabela dando mais 5 valores para  $(x_1, x_2)$  à sua escolha e encontrando os valores correspondentes para  $(w_1, w_2)$ .

**Exemplo 8.11** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  ele mesmo.  $T(x) = (x_1, x_2)$ . Neste caso  $w_1 = x_1 + 0x_2$   $w_2 = 0x_1 + x_2$ . Ou ainda

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A matriz  $2 \times 2$  correspondente a  $T$  é, neste caso, a matriz identidade,  $I_2$ .  $\triangleleft$

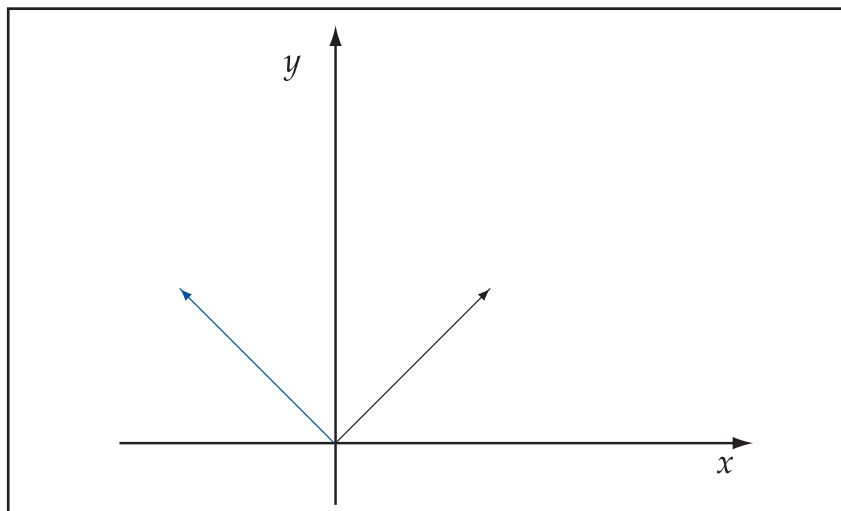


Figura 8.1: A transformação que associa a cada ponto sua imagem simétrica em relação ao eixo dos  $y$ 's

**Exemplo 8.12** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em torno da reta  $y = x$ .  $T$  é dado por  $w_1 = x_2, w_2 = x_1$ . Neste caso,  $w_1 = 0x_1 + x_2, w_2 = 1x_1 + 0x_2$ . Ou ainda

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando-se o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(0, 1)$ , a imagem de  $(1, 1)$  é ele mesmo, em geral, a imagem de  $(x, x)$  é ele mesmo.  $\triangleleft$

**Exemplo 8.13** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ .  $T$  é dado por  $w_1 = -x_2, w_2 = x_1$ . Neste caso  $w_1 = 0x_1 - x_2, w_2 = 1x_1 + 0x_2$ . Ou ainda

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando-se o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(0, 1)$ , a imagem de  $(1, 1)$  é  $(-1, 1)$ .  $\triangleleft$

Um operador que roda cada vetor  $\mathbb{R}^2$  de um ângulo  $\phi$  é chamado um operador de rotação. Ele é muito importante, não só na matemática, como também nas aplicações. Considere o operador  $T :$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  de um ângulo  $\phi$ .  $T$  é dado por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0)$  é  $(\cos(\phi), \text{sen}(\phi))$ , a imagem de  $(1, 1)$  é  $(\cos(\phi) - \text{sen}(\phi), \cos(\phi) + \text{sen}(\phi))$ .

### 8.3 - AUTOVETORES E AUTOVALORES

**Definição 8.14** Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , um vetor  $x$  não nulo do plano é chamado um *autovetor* de  $A$  se  $Ax$  é um múltiplo escalar de  $x$ , isto é, se

$$Ax = \lambda x$$

para algum escalar  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de  $A$  e  $x$  um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ .

A definição acima está dizendo que os vetores  $Ax$  e  $x$  são linearmente dependentes, ou seja, estão na mesma reta. Este fato terá algumas aplicações. Observe o exemplo.

**Exemplo 8.15** O vetor  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  é um autovetor para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x$$

O autovalor é 3 e a reta sobre a qual estão  $Ax$  e  $x$  é a reta  $y = 2x$ .  $\triangleleft$

Para encontrar os autovalores de uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ , procedemos da seguinte forma. Se  $Ax = \lambda x$  temos  $Ax - \lambda Ix = 0$  onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Esta igualdade pode ainda ser escrita como  $(A - \lambda I)x = 0$ . Estamos procurando soluções não triviais  $x = (x_1, x_2)$  para o sistema homogêneo cuja matriz de coeficientes é  $A - \lambda I$ . Pelo Teorema 2 do Capítulo 4 temos que isto acontece se e somente se  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Impondo esta condição, obtemos uma equação do segundo grau em  $\lambda$ , chamada polinômio característico de  $A$ , que podemos resolver, e suas soluções serão os autovalores procurados.

**Exemplo 8.16** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontre todos os autovalores de  $A$  e os autovetores correspondentes. Para encontrar os autovalores resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$  obtemos a equação  $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0$  ou ainda  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$ . Temos portanto dois autovalores  $\lambda = 5$  e  $\lambda = -1$

Para obter os autovetores tomamos um autovalor de cada vez.

1.  $\lambda = 5$

Substituindo na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ ,  $\lambda = 5$  temos:

$$\begin{pmatrix} 1 - 5 & 4 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $-4x_1 + 4x_2 = 0$  e  $2x_1 - 2x_2 = 0$ . Obtemos que  $x_1 = x_2$  e o sistema possui infinitas soluções como já esperávamos (ver Teorema 2, Capítulo 4). Um autovetor será  $(1, 1)$ .

2.  $\lambda = -1$

Substituindo na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ ,  $\lambda = -1$  obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 & 4 \\ 2 & 3 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto,  $2x_1 + 4x_2 = 0$  e  $2x_1 + 4x_2 = 0$ . Obtemos que  $x_1 = -2x_2$  e o sistema também possui infinitas soluções. Um autovetor será  $(-2, 1)$ , um outro  $(2, -1)$ .

◁

**Observação 8.17** Note que, ao obter os autovetores associados a um dado autovalor, estamos procurando soluções de um sistema homogêneo cuja matriz de coeficientes possui determinante zero. Sabemos, do Capítulo 4, que este sistema possui infinitas soluções, todas sobre uma mesma reta. Assim, no exemplo acima, qualquer vetor da forma  $(a, a)$ , ou seja, sobre a reta  $y = x$  é um autovetor para o autovalor 5. Chamamos esta reta de autoespaço já que qualquer ponto da reta é um autovetor.

**Exercício 8.18** Verifique, no exemplo acima, que todo vetor da forma  $x = (a, a)$  satisfaz  $Ax = 5x$  e que todo ponto sobre a reta  $u = -2v$  (escrevemos a reta nas coordenadas  $u, v$  para não haver confusão com o ponto  $x \in \mathbb{R}$ ) satisfaz  $Ax = -1x$ .

## 8.4 - DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

O próximo passo no nosso estudo de transformações lineares do plano é estudar quando é possível obter uma base do plano  $\mathbb{R}$  constituída de autovetores de uma transformação  $T$  dada por uma matriz  $A$ . Estas bases são úteis para estudar propriedades geométricas da matriz  $A$  e porque, quando elas existem, poderemos "diagonalizar" a matriz  $A$ , o que significa encontrar uma matriz diagonal  $A'$  que, em um sentido que explicaremos, é equivalente a  $A$ .

**Definição 8.19** Uma matriz  $A, 2 \times 2$ , é *diagonalizável* se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é uma matriz diagonal, onde  $P^{-1}$  denota a inversa de  $P$ . Dizemos que  $P$  diagonaliza  $A$ .

Temos o seguinte resultado sobre a diagonalização de matrizes cuja demonstração omitiremos:

**Teorema 8.20** *Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , então as duas condições abaixo são equivalentes:*

1.  $A$  é diagonalizável.
2.  $A$  possui dois autovetores linearmente independentes.

O teorema acima garante que uma matriz  $A, 2 \times 2$ , que possui dois autovetores linearmente independentes é diagonalizável. Vamos descrever qual o procedimento que podemos utilizar para levar a cabo a diagonalização de uma matriz  $A, 2 \times 2$ . O processo consiste de três passos:

1. Encontre dois autovetores linearmente independentes de  $A$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .
2. Forme a matriz  $P, 2 \times 2$ , tendo  $x_1, x_2$  como seus vetores coluna.
3. A matriz  $P^{-1}AP$  será diagonal e suas entradas na diagonal serão  $\lambda_1, \lambda_2$  onde  $\lambda_i$  é o autovalor correspondente a  $x_i$ .

**Exemplo 8.21** Considere novamente o Exemplo 8.16 do Parágrafo 8.3 visto acima.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Já encontramos os dois autovalores de  $A$   $\lambda = 5$  e  $\lambda = -1$  e os autovetores correspondentes:  $(1, 1)$  e  $(2, -1)$ . Formamos a matriz  $P$  cujas colunas são os autovetores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontramos a inversa de  $P$ .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A matriz  $P^{-1}AP$  será dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

uma matriz diagonal, como queríamos.  $\triangleleft$

Nem sempre é possível diagonalizar uma matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ . Considere o exemplo abaixo:

#### Exemplo 8.22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos tentar encontrar todos os autovalores de  $A$  e os autovetores correspondentes. Para encontrar os autovalores resolvemos a equação  $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ . Temos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculando  $\text{Det}(A - \lambda) = 0$  obtemos a equação  $(1 - \lambda)^2 = 0$  donde  $\lambda = 1$ , uma raiz dupla. Substituindo na expressão  $(A - \lambda I)x = 0$ ,  $\lambda = 1$  temos:

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temos a equação  $x_2 = 0$ . Logo obtemos que os autovetores correspondentes ao autovalor 1 são da forma  $(x_1, 0)$  sobre a reta  $y = 0$  portanto. Não obtemos assim uma base do plano, já que todos os autovalores correspondentes ao único autovalor são l.d. A matriz  $A$  neste caso não é diagonalizável.  $\triangleleft$

#### Observação 8.23 Transformações lineares do espaço

Toda a teoria que desenvolvemos para transformações lineares do plano pode ser desenvolvida de maneira semelhante para transformações lineares do espaço. De maneira mais geral, podemos

considerar uma matriz quadrada  $n \times n$  e nos perguntar quais são seus autovetores e autovalores e se ela é diagonalizável. Os procedimentos são em tudo semelhantes, mas optamos por desenvolver a teoria no caso particular  $2 \times 2$  pois muitas das aplicações já aparecem neste caso, e o caso geral pode ser entendido a partir do caso  $2 \times 2$  sem maiores dificuldades. Vamos apenas considerar aqui, no próximo parágrafo, algumas transformações lineares do espaço que encontrarão aplicações na química no parágrafo seguinte.

### 8.5 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO ESPAÇO

Já estudamos as transformações lineares do plano no plano que, como vimos, são dadas por matrizes  $2 \times 2$ . Vamos estudar agora as transformações lineares do espaço e veremos que elas são dadas por matrizes  $3 \times 3$ .

**Definição 8.24** Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função definida por equações da seguinte forma:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$w_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Podemos também escrever a função  $T$  acima da seguinte maneira: Notamos os pontos do  $\mathbb{R}^3$  por  $w = (w_1, w_2, w_3)$  e  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Então  $T$  se escreve  $w = Ax$ , onde  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

**Exemplo 8.25** Considere o operador  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  que leva cada ponto  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $T(x) = (-x_2, x_1, x_3)$ . Neste caso  $w_1 = 0x_1 - x_2 + 0x_3$ ,  $w_2 = x_1 + 0x_2 + 0x_3$  e  $w_3 = x_3$ . Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

A imagem de cada ponto pode ser calculada multiplicando o ponto pela matriz de  $T$  dada acima. A imagem de  $(1, 0, 0)$  é  $(0, 1, 0)$ , a imagem de  $(0, 1, 0)$  é  $(-1, 0, 0)$ , a imagem de  $(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .  $\triangleleft$

**Exercício 8.26**

$(x_1, x_2, x_3)$	$(-1, 0, 0)$	$(1, -1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 2)$	$(0, 0, 3)$	$(1, 0, 0)$
$(w_1, w_2, w_3)$						

Complete a tabela encontrando os valores para  $(w_1, w_2, w_3)$  imagens dos valores dados de  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Observe no exercício que a transformação linear dada no exemplo fixa todos os pontos sobre o eixo dos  $z$ 's e gira os vetores no plano  $Z = 0$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Este tipo de transformação que fixa um eixo é muito utilizado nas aplicações como veremos.

**8.6 - APLICAÇÕES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA E À QUÍMICA**

Imagine uma tela de computador. Ela é formada de pequenas luzes chamadas pixels que se acendem e se apagam. Elas estão dispostas em um plano, o plano da tela. Podemos dotar este plano de coordenadas  $(x, y)$  pensando, por exemplo, que a origem do plano está no canto inferior esquerdo da tela. Assim, cada pixel corresponderá a um par ordenado  $(x, y)$  e poderemos falar nas coordenadas de um pixel.

Muitas das aplicações que vemos diariamente na tela de um televisor ou de um computador são produzidas por aplicações simples do material que vimos neste capítulo. Imagine uma figura  $S$  desenhada na tela. Ela corresponde a uma tabela de pixels onde determinamos quais os pixels que estão acesos e quais apagados. Poderíamos complicar um pouco o modelo, associando a cada pixel uma cor, mas vamos imaginar apenas duas posições: apagado e aceso. Suponha que desejamos girar esta figura  $S$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ . Vimos no Parágrafo 8.2, Exemplo 8.13, como proceder para girar um vetor de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ . Tomamos a transformação linear dada por

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando cada vetor pela matriz acima temos o efeito desejado. Na aplicação em questão, se tomarmos a figura  $S$  com sua tabela de pixels acesos e apagados e multiplicarmos cada vetor  $x = (x_1, x_2)$  que dá as coordenadas de cada pixel pela matriz acima, obtemos uma nova tabela de pixels acesos e apagados cujo resultado será girar a figura  $S$  de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ .

Uma observação interessante é que se giramos um vetor (ou uma figura), primeiro de um ângulo  $\phi_1$  e depois de um ângulo  $\phi_2$ , podemos obter a matriz que dá a rotação do ângulo total  $\phi_1 + \phi_2$  da seguinte maneira: tomamos a matriz de rotação que já estudamos no Parágrafo 8.2

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e substituímos  $\phi$  por  $\phi_1 + \phi_2$ . Obtemos

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & -\text{sen}(\phi_1 + \phi_2) \\ \text{sen}(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Utilizando agora as conhecidas relações trigonométricas

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \text{sen}\phi_1\text{sen}\phi_2,$$

$$\text{sen}(\phi_1 + \phi_2) = \text{sen}\phi_1\cos\phi_2 + \text{sen}\phi_2\cos\phi_1,$$

temos que a matriz de rotação de um ângulo  $\phi_1 + \phi_2$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \text{sen}\phi_1\text{sen}\phi_2 & -\text{sen}\phi_1\cos\phi_2 + \text{sen}\phi_2\cos\phi_1 \\ \text{sen}\phi_1\cos\phi_2 + \text{sen}\phi_2\cos\phi_1 & \cos\phi_1\cos\phi_2 - \text{sen}\phi_1\text{sen}\phi_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & -\text{sen}(\phi_1) \\ \text{sen}(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) & -\text{sen}(\phi_2) \\ \text{sen}(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a matriz que dá a rotação de um ângulo  $(\phi_1 + \phi_2)$  é o produto da matriz que dá a rotação do ângulo  $\phi_1$  pela matriz que dá a rotação do ângulo  $\phi_2$ . Este fato possui muitas aplicações no tratamento de imagens utilizando computação. Poderíamos imaginar um filme em que uma certa figura  $S$  fosse girando continuamente até completar um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Escrevemos 90 matrizes de rotação, cada uma girando a figura de  $1^\circ$ . Tomamos a tabela de pixels que dá a figura  $S$  e vamos operando a tabela sucessivamente com cada uma das 90 matrizes. O resultado será um filme em que temos a impressão de uma rotação contínua de  $90^\circ$ .

**Exercício 8.27** Considere duas rotações  $\phi_1, \phi_2$  sucessivas de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ . Calcule a matriz de rotação  $A$  e, em seguida, a matriz  $A^2$ , que como vimos corresponde a uma rotação de  $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Calcule a matriz de rotação  $B$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  diretamente. Verifique que  $A = B$ .

**Observação 8.28** Podemos fazer muito mais que girar figuras utilizando transformações lineares do plano no plano. Podemos também deformar figuras, expandindo-as em uma ou várias direções do plano, e compô-las com rotações e reflexões obtendo aplicações as mais variadas.

**Observação 8.29** Os resultados vistos acima servem como justificativas da definição que adotamos de multiplicação de matrizes que, a princípio, é pouco natural. Se pensarmos na rotação de um ângulo  $\phi_1$  como uma função  $f_1$  e a rotação de um ângulo  $\phi_2$  como uma função  $f_2$  a rotação de um ângulo  $\phi_1 + \phi_2$  é a função composta  $f_2 \circ f_1$ . Isto é um fato bem mais geral. Dadas duas transformações lineares dadas por matrizes  $A$  e  $B$  sua composição corresponde à multiplicação das matrizes correspondentes.

Vamos ver, agora, como estes conceitos são aplicados à química para a visualização de moléculas. Observe as figuras a seguir, cortesia do Prof. Nelson G. Fernandes do Departamento de Química da UFMG, utilizando o programa ORTEP. Elas mostram o composto  $C_{12}H_{11}NO_3$  onde um círculo pequeno representa o átomo de hidrogênio, um elipsóide preto representa átomo de carbono, um elipsóide azul representa átomo de nitrogênio e o elipsóide cinza representa átomo de oxigênio. A primeira, Figura 8.6, mostra a molécula antes de qualquer rotação.

Em seguida, o plano da molécula foi submetido a rotações sucessivas de ângulos  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ . Se imaginarmos o eixo de rotação como sendo o eixo dos  $z$ 's podemos escrever as transformações  $A, B, C$  correspondentes, respectivamente, a estas rotações. Elas são as seguintes:

$$A := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

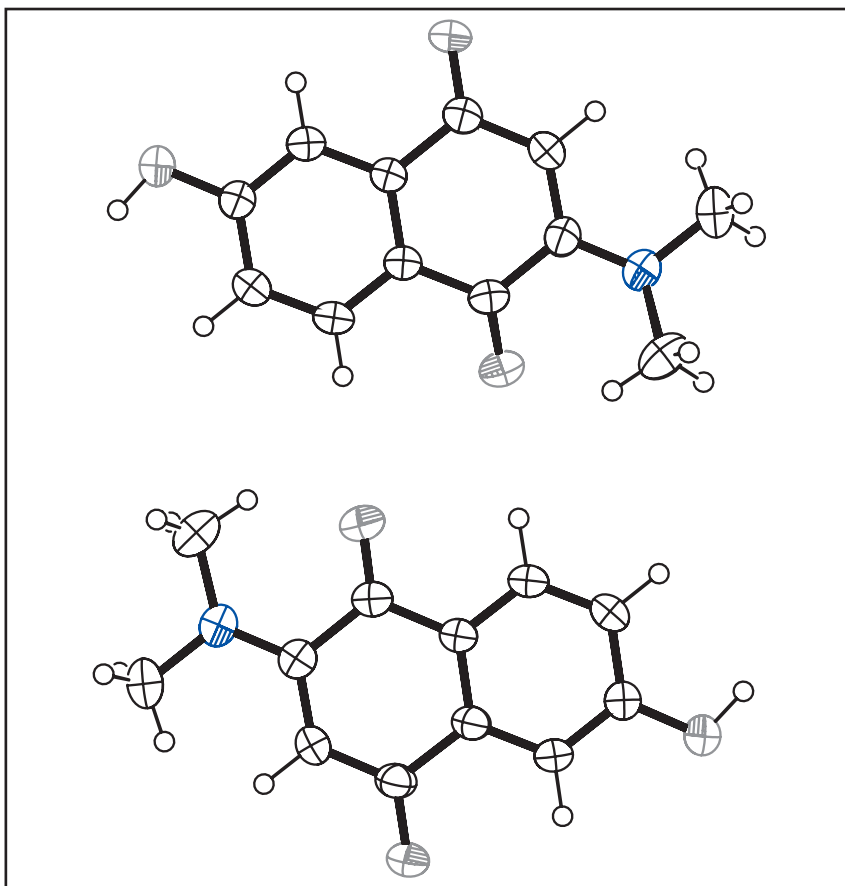


Figura 8.2: A molécula do  $C_{12}H_{11}NO_3$

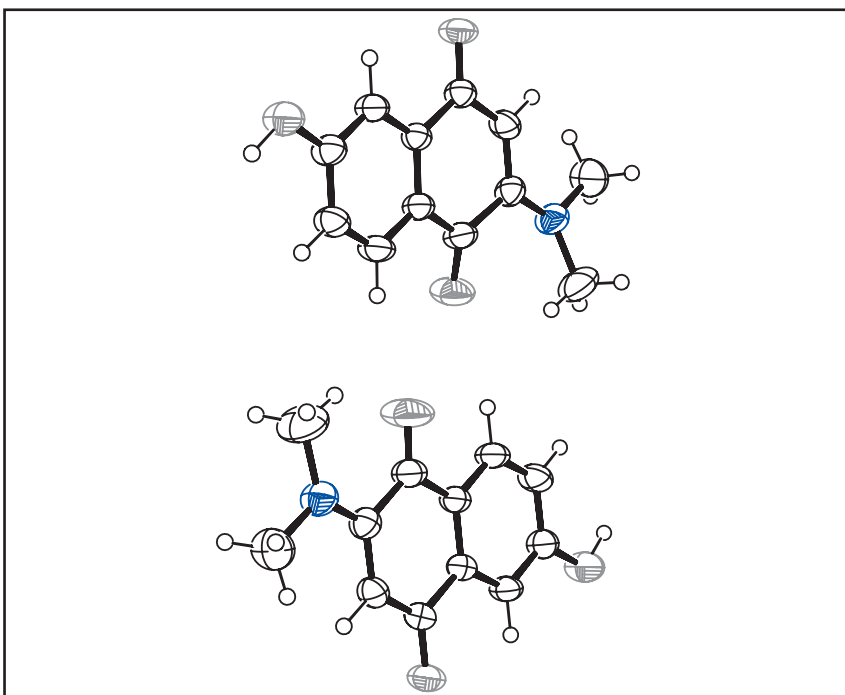


Figura 8.3: Rotação da molécula de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ .

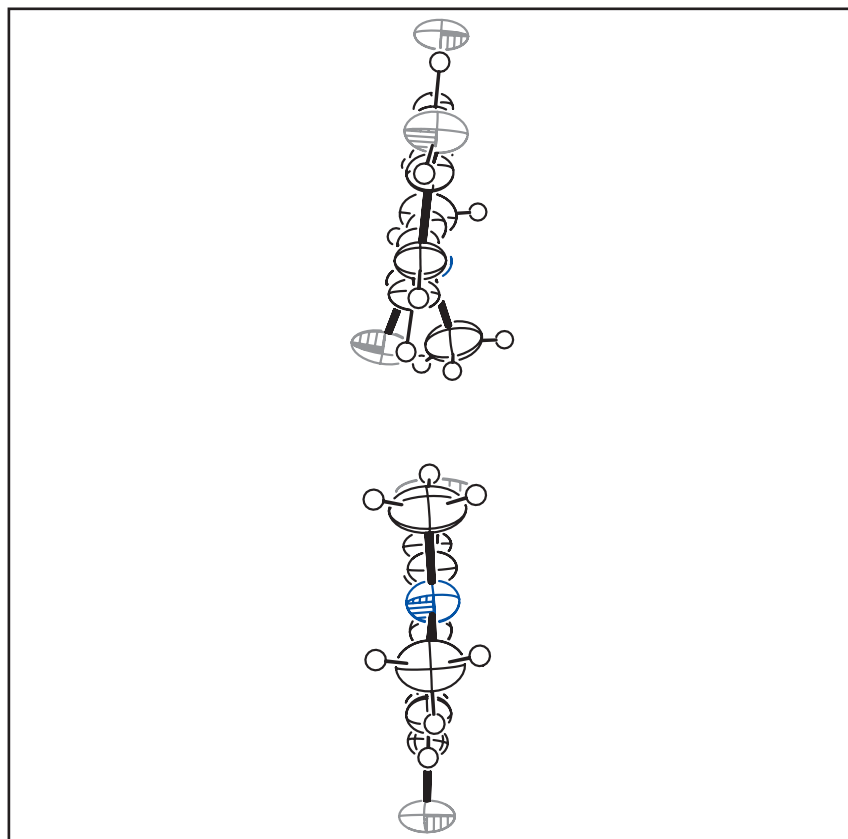


Figura 8.4: Rotação da molécula de um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ .

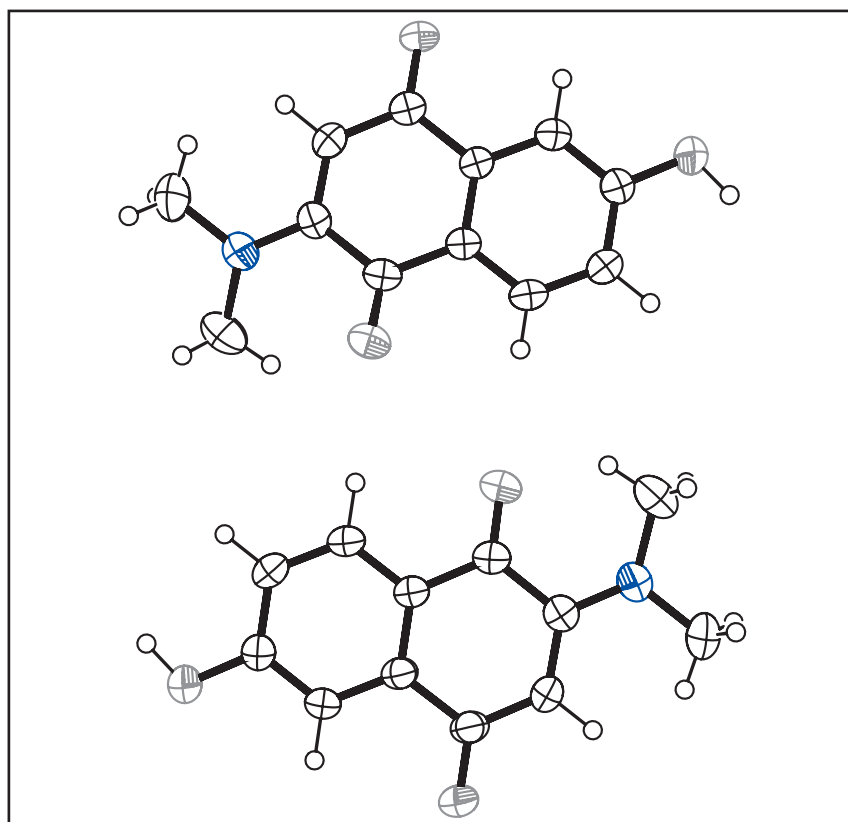


Figura 8.5: Rotação da molécula de um ângulo de  $\pi$ .

## 8.7 EXERCÍCIOS

1. Considere o operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $x = (x_1, x_2)$  sua imagem simétrica em torno do eixo dos  $x$ 's,  $T(x) = (x_1, -x_2)$ .

(a) Mostre que  $T$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(b) Calcule a imagem de:

i.  $(1, 1)$

ii.  $(1, 0)$

iii.  $(0, 1)$

(c) Faça um esboço dos 3 pontos acima e de suas imagens e verifique que  $T$  associa a cada ponto sua imagem simétrica em torno do eixo dos  $x$ 's.

2. Considere uma rotação  $\phi_1$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ . Calcule a matriz de rotação  $A$  e, em seguida, as matrizes  $A^2, A^3$  e  $A^4$ . Calcule a matriz de rotação  $B$  de um ângulo de  $\pi$  diretamente. Verifique que  $A^4 = B$ . Interprete geometricamente.

## 8.8 AVALIAÇÃO DA 8ª AULA

1. Considere a aplicação  $T$  dada por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2. Calcule a imagem de:

(a)  $(1, 1)$

(b)  $(1, 0)$

(c)  $(1, 1)$

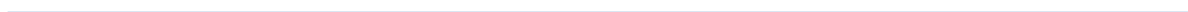
3. Considere uma rotação  $\phi_1$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{6}$ . Calcule a matriz de rotação  $A$  e, em seguida, a matriz  $A^2$ . Calcule o ângulo de rotação de  $A^2$ . Interprete geometricamente. Qual o menor  $n$  tal que  $A^n = I$ ?

4. Considere a rotação  $\phi_1$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$  e seja  $A$  a matriz correspondente. Considere a rotação  $\phi_2$  de um ângulo de  $\frac{\pi}{6}$  e seja  $B$  a matriz correspondente. Calcule a matriz de rotação  $AB$  e seja  $\phi$  o seu ângulo. Calcule  $\phi$ . Interprete geometricamente.

## REFERÊNCIAS

---

- [1] Serge Lang, Linear Algebra, Addison-Wesley, 1971.
- [2] Howard Anton e Chris Rorres , Elementary Linear Algebra, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [3] Seymour Lipschutz, Algebra Linear, McGraw-Hill do Brasil LTDA., 1971.
- [4] Reginaldo J. Santos, Um curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear, Imprensa Universitária da UFMG, 2003.



---

## SOBRE O AUTOR

---

Dan Avritzer doutorou-se em Matemática pela UFPe, com uma tese em geometria algébrica. Realizou um estágio em pós doutorado na Universidade de Harvard (2002-2003), sob a orientação de J. Harris. É professor do Departamento de Matemática da UFMG desde 1975. Sua área de pesquisa é geometria algébrica, tendo várias publicações no assunto. Foi professor visitante na Universidade de Erlangen Nuremberg (Alemanha) em vários períodos e no Centro Internacional de Física Teórica na Itália (1993).







CENTRO DE APOIO  
À EDUCAÇÃO A  
DISTÂNCIA UFMG

**PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Secretaria de Ensino a Distância  
Ministério da Educação

