

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Simulação Exata de Processos de Difusão Não-Homogêneos

Belo Horizonte
2024

Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Simulação Exata de Processos de Difusão Não-Homogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Flávio Bambirra Gonçalves

Belo Horizonte
2024

Silva, Rebeca Alves Dantas de Lima e.

S586s Simulação exata de processos de difusão não-homogêneos [recurso eletrônico] / Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva – 2024.

1 recurso online (39 f. il., color.) : pdf.

Orientador: Flávio Bambirra Gonçalves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f. 39

1. Estatística – Teses. 2. Processo estocástico – Teses
3. Equações diferenciais estocásticas - Teses. 4. Métodos de Simulação – Teses. 5. Movimento browniano – Teses.
I. Gonçalves, Flávio Bambirra. I. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA




FOLHA DE APROVAÇÃO

“Simulação exata de processos de difusão não-homogêneos”


REBECA ALVES DANTAS DE LIMA E SILVA

Dissertação submetida à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.


Aprovada em 22 de agosto de 2024, pela banca constituída pelos membros:

Documento assinado digitalmente
 **FLAVIO BAMBIRRA GONCALVES**
Data: 23/08/2024 09:26:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Flávio Bambirra Gonçalves - Orientador
DEST/UFMG

Documento assinado digitalmente
 **ROGER WILLIAM CAMARA SILVA**
Data: 23/08/2024 07:56:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Roger William Câmara Silva
DEST/UFMG

Documento assinado digitalmente
 **DANI GAMERMAN**
Data: 22/08/2024 16:34:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dani Gamerman
DME/IM-UFRJ

Belo Horizonte, 22 de agosto de 2024.

Aos meus pais Robson e Mirian.
Pelo seu apoio incondicional.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais Robson Alves e Mirian Dantas que durante toda a minha trajetória me apoiaram e incentivaram a seguir os meus sonhos e meus objetivos durante meus quatro anos de graduação e agora mais dois anos de mestrado, além de me permitirem ter estrutura para poder estudar todos os dias. Agradeço ao meu orientador Flávio Bambirra, que foi o professor que se colocou a disposição para me ajudar a trabalhar com um tema tão difícil, e ser tão paciente comigo. Agradeço ao professor Isnaldo Barbosa, que me deu suporte desde conselhos de como seguir minha carreira como matemática, inscrições para pós-graduação, projetos, até impressão de livros e apoio emocional mesmo a quilômetros de distância, sempre permaneceu me aconselhando. Acrescento que sua orientação foi base para todas as minhas conquistas acadêmicas. Agradeço também ao professor Alan Pereira, que além de me orientar de maneira excepcional no estudo de probabilidade avançada, me ajudou de inúmeras maneiras como amigo, conselheiro e sócio. Devo a ele toda minha habilidade em latex e em métodos de apresentação.

Agradeço também a todos os amigos que permaneceram e entraram em minha vida durante esses dois curtos anos. Agradeço aos meus amigos: Samla, Paulo, Diego, Amanda, Mariana, Ricardo e Otávio. Vocês tornaram meus dias longe da minha família alegres. Agradeço também à Lúcia, Matheus e Andie, que por vezes me fizeram sentir parte de uma nova família. Agradeço a todos por estarem presentes e me ajudar de inúmeras maneiras em minha trajetória.

A vocês que citei, não há palavras para agradecê-los pelo apoio nas várias ocasiões que me senti sozinha até nos momentos que acreditei não saber como demonstrar um teorema, agradeço o apoio, cada um de vocês não será esquecido.

Meus agradecimentos ao Kevyn Lacerda, que apesar da grande distância de terra entre nós, sempre me apoiou e me aconselhou. Agradeço também a Luiza Lima, prima/irmã, que mesmo com uma grande distância, amo da mesma maneira de quando estávamos próximas.

Certamente aqui não tem espaço para que eu possa citar tudo o que fizeram por mim. E por fim, eu agradeço novamente a todos por acreditarem no meu futuro mais do que eu mesma já acreditei.

Resumo

Este trabalho aborda o problema de simulação de processos de difusão, que são processos estocásticos em tempo contínuo amplamente utilizados em diversas áreas científicas. Os processos são definidos como a solução fraca de equações diferenciais estocásticas, que especificam a média e a variância instantâneas do processo e são guiadas por um movimento Browniano. A simulação de processos de difusão permite explorar o comportamento ao longo do tempo e avaliar a sensibilidade às variações nos parâmetros do modelo. Além disso, serve de base para construir algoritmos de inferência para tais processos.

O objetivo principal desta dissertação é estudar o problema de simulação exata para processos de difusão, em particular, processos não-homogêneos, quando as distribuições de transição do processo são desconhecidas. É proposta uma modificação do algoritmo exato, que reduz o custo computacional do mesmo.

Palavras-chave: cálculo estocástico; simulação exata; movimento browniano.

Abstract

This work addresses the problem of simulating diffusion processes, which are continuous-time stochastic processes widely used in several scientific areas. The processes are defined as the weak solution of stochastic differential equations, which specify the instantaneous mean and variance of the process and are driven by a Brownian motion. The simulation of diffusion processes allows exploring the behavior over time and evaluating the sensitivity to variations in the model parameters. In addition, it is the basis to devise inference algorithms for such processes. The main objective of this dissertation is to study the problem of exact simulation for diffusion processes, in particular, inhomogeneous processes, when the transition distributions of the process are unknown. A modification of the exact algorithm is proposed for this purpose, which reduces its computational cost.

Keywords: stochastic calculus; exact simulation; brownian motion.

Sumário

1	Introdução	10
2	Arcabouço teórico	12
2.1	Caso homogêneo	12
2.2	Caso não-homogêneo	14
3	Algoritmo exato para simulação de processos de difusão	16
3.1	Algoritmo Exato para tempo homogêneo	16
3.2	Algoritmo Exato para tempo não homogêneo	20
3.3	Contribuição metodológica	23
3.3.1	Modificação proposta	25
4	Conclusões e trabalhos futuros	27
A	Apêndice	28
A.1	Cálculo Estocástico de Itô	28
A.1.1	Diferencial Estocástica e Fórmula de Itô	29
A.2	Ponte Browniana em camadas	30
A.2.1	Resultados Auxiliares	32
A.2.2	Construção das camadas da ponte Browniana	35
	Referências	38

Capítulo 1

Introdução

Processos de difusão são extensivamente utilizados para modelagem de fenômenos em tempo contínuo em muitas áreas científicas: economia, genética, química, física e engenharia. O modelo é definido através de uma equação diferencial estocástica (EDE), que explicita a média e variância instantâneas do processo. Formalmente, um processo de difusão univariado $Y = \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ é definido como a solução fraca (uma medida de probabilidade) de uma EDE do tipo

$$dY_t = b(t, Y_t; \theta)dt + \sigma(t, Y_t; \theta)dB_t, \quad Y_0 = y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T] \quad (1.1)$$

onde $\{B_t; 0 \leq t \leq T\}$ é o movimento Browniano. As funções b e σ são chamadas de *drift* e *coeficiente de difusão*, respectivamente, e, em um contexto estatístico, podem depender de alguns parâmetros $\theta \in \Theta$. Essas funções precisam satisfazer algumas condições de regularidade (localmente Lipschitz, com crescimento limitado) para garantir a existência de uma única solução fraca global. Para uma revisão mais ampla de cálculo estocástico, veja a seção (A.1) do apêndice, ou [17] e [7].

Quando as funções b e σ dependem do tempo t , como em (1.1), o processo é dito não-homogêneo (no tempo). Caso contrário, é dito homogêneo. Além disso, é possível também definir processos multivariados, mas esses não serão considerados nesta dissertação.

A menos de casos bem particulares, por exemplo, quando b é homogêneo e linear em Y_t e σ não depende de Y_t e é linear em t , as distribuições de transição do processo são analiticamente inacessíveis. Isso dificulta consideravelmente a aplicação desses processos em problemas reais, que tipicamente envolvem a estimação dos parâmetros θ e do valor esperado de funções do processo.

Uma possível direção para resolver esse problema considera métodos de Monte Carlo baseados na simulação dos processos. Naturalmente, devido à intratabilidade analítica das distribuições de transição, simular exatamente da medida de probabilidade do processo é um problema difícil. Isso justifica a popularidade de métodos aproximados na literatura existente (veja, por exemplo, [16]).

Naturalmente, o erro envolvido em métodos aproximados, e sua relação inversa com o custo computacional envolvido, motivou o desenvolvimento de métodos exatos, que simulam exatamente da medida de probabilidade do processo. Um algoritmo eficiente para simular uma classe ampla de processos de difusão univariados foi proposto nos trabalhos de [4], [3] e [1]. O algoritmo é chamado de *Exact Algorithm* (EA) e foi utilizado em vários trabalhos subsequentes para desenvolver metodologias de inferência que envolvem apenas erro de Monte Carlo (veja, por exemplo, [5] e [2]).

A simulação de processos de difusão pode ser útil mesmo não envolvendo metodologias formais de inferência estatística. Ela ajuda a explorar o comportamento dos processos ao

longo do tempo e a avaliar diferentes cenários. Para valores fixos dos parâmetros, pode-se obter estimativas de Monte Carlo para o valor esperado de funções de interesse do processo, a partir de amostras i.i.d. Além disso, é possível investigar a sensibilidade do modelo a variações dos parâmetros e fazer calibração dos mesmos.

Apesar do *exact algorithm* poder ser aplicado em processos não-homogêneos, os trabalhos existentes não exploram este contexto e focam exclusivamente no caso homogêneo. Nem mesmo os detalhes da teoria e o algoritmo geral são apresentados para o caso não-homogêneo.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é explorar o problema de simulação exata para processos de difusão não-homogêneos, derivando a teoria necessária e o algoritmo geral para aplicar o *exact algorithm* neste caso.

Por fim, uma contribuição metodológica é apresentada através da proposta de uma modificação do *exact algorithm* que melhora a eficiência computacional do algoritmo no caso não-homogêneo.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, é apresentado o arcabouço teórico necessário para derivar o *exact algorithm*. Os algoritmos para os casos homogêneo e não-homogêneo são apresentados no capítulo 3, bem como a contribuição metodológica para melhorar a eficiência computacional no segundo caso. Finalmente, conclusões e trabalhos futuros são apresentados no capítulo 4.

Capítulo 2

Arcabouço teórico

Este capítulo apresenta a teoria de probabilidade e cálculo estocástico necessária para desenvolver o *exact algorithm* nos casos homogêneo e não-homogêneo.

Será dada uma atenção especial a um resultado chamado transformada de Lamperti, especialmente para o caso não-homogêneo. Esse resultado é essencial na derivação dos algoritmos por permitir a obtenção de transformações dos processos originais, cujas medidas são absolutamente contínuas com respeito à medida de um movimento Browniano.

Mesmo fora do contexto do *exact algorithm*, a transformada de Lamperti emerge como uma ferramenta poderosa no domínio das finanças quantitativas, especialmente na modelagem de processos estocásticos utilizados para descrever a dinâmica de preços de ativos financeiros. Desenvolvida por John Lamperti com o objetivo de lidar com as peculiaridades dos mercados financeiros, a transformada desempenha um papel fundamental na análise de processos estocásticos não negativos, uma característica comum em preços de ativos, taxas de juros e volatilidade implícita. Ao aplicar a transformada de Lamperti a modelos financeiros, é possível capturar de forma mais precisa fenômenos como retornos assimétricos e volatilidade estocástica, comumente observados nos mercados financeiros. Isso é particularmente relevante na modelagem de ativos financeiros onde valores negativos não são realistas, como contratos de opções e commodities. Uma discussão detalhada sobre esse resultado é apresentada em Lamperti.

Com o objetivo de se ter uma apresentação mais limpa, o vetor de parâmetros θ é suprimido da notação deste capítulo.

2.1 Caso homogêneo

Uma apresentação detalhada da teoria de cálculo estocástico abordada aqui pode ser encontrada em Oksendal e Steele.

Seja $Y = \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo de difusão com EDE

$$dY_t = \mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dB_t.$$

Y é dito ser *reduzível* se existe uma transformação $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que

$$d\eta(Y_t) = \delta \circ \eta(Y_t) dt + dB_t,$$

para alguma função drift $\delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., o processo reduzido $X = \eta(Y)$ possui coeficiente de volatilidade igual a 1. Essa transformação é chamada *transformada de Lamperti*. Pela

fórmula de Itô, temos

$$d\eta(Y_t) = \left[\eta'(Y_t) \mu(Y_t) + \frac{1}{2} \eta''(Y_t) \sigma^2(Y_t) \right] dt + [\eta'(Y_t) \sigma(Y_t)] dB_t,$$

portanto, para que o coeficiente de volatilidade seja 1, é preciso que σ seja derivável e

$$\eta'(a)\sigma(a) = 1 \Rightarrow \eta(a) = \int_{v^*}^a \frac{db}{\sigma(b)} \quad (a, v^* \in V).$$

Note que v^* é somente uma translação de X , então podemos supor $\eta'(v^*) = 0$. Fixando v^* , obtemos uma transformação bijetiva, e denotamos sua inversa $\eta^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}$. Assim, aplicando novamente a fórmula de Itô,

$$\delta(a) = \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma'}{2} \right) \circ \eta^{-1}(a), \quad (a \in \mathcal{X}).$$

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.1 (Caso homogêneo). Seja Y é um processo de difusão com suporte \mathcal{V} e função de volatilidade continuamente diferenciável σ no suporte. Defina a **transformada de Lamperti**

$$\eta(a) = \int_{v^*}^a \frac{db}{\sigma(b)} \quad (a, v^* \in \mathcal{V}).$$

Então, $X = \eta(Y)$ tem volatilidade 1 e

$$dX_t = \delta(X_t) dt + dB_t.$$

Embora não haja uma transformação tratável que modifique o drift com a mesma facilidade que no caso da volatilidade, podemos aplicar uma relação entre a lei de duas difusões com drifts diferentes e volatilidade idêntica. Essa relação é conhecida como *Teorema de Girsanov*, e vamos aplicar uma versão do resultado que se aplica às difusões de Itô.

O Teorema de Girsanov é baseado no fato que processos de difusão com mesmo coeficiente de difusão definem medidas de probabilidade equivalentes e, portanto, implicam na existência de uma derivada de Radon-Nikodym entre elas. O teorema consiste exatamente dessa derivada.

Teorema 2.1.2 (Teorema de Girsanov). Sejam V, \tilde{V} processos de difusão que resolvem as EDEs

$$\begin{aligned} dV_t &= \mu(V_t) dt + \sigma(V_t) dB_t, & (V_0 = v_0) \\ d\tilde{V}_t &= \tilde{\mu}(\tilde{V}_t) dt + \sigma(\tilde{V}_t) dB_t, & (\tilde{V}_0 = \tilde{v}_0) \end{aligned}$$

e as medidas de probabilidade \mathbb{V} induzida por V e $\tilde{\mathbb{V}}$ induzida por \tilde{V} . Defina o diferencial do drift

$$\gamma(a) = \frac{\tilde{\mu}(a) - \mu(a)}{\sigma(a)}, \quad (a \in \mathcal{V}),$$

e assumamos que γ é quadrado integrável. Além disso, a exponencial-Doleans-Dade

$$\exp \left[\int_0^t \gamma(V_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(V_t) dt \right]$$

é um martingale sobre \mathbb{V} para $\hat{\tau} \in [0, \bar{\tau}]$. A condição de Novikov dada por

$$\mathbb{E} \left[\exp \left[\int_0^{\hat{\tau}} \gamma^2 (V_t) dt \right] \mid v_0 \right] < \infty \quad (v_0 \in \mathcal{V}, 0 < \bar{\tau} < \infty)$$

Então, $\tilde{\mathbb{V}}$ é absolutamente continua com respeito a \mathbb{V} , e a derivada de Radon-Nikodym de $\tilde{\mathbb{V}}$ com respeito a \mathbb{V} é dada pela exponencial-Doleans-Dade

$$\frac{d\tilde{\mathbb{V}}}{d\mathbb{V}} (v_{[0, \hat{\tau}]}) = \exp \left[\int_0^{\hat{\tau}} \gamma (V_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^{\hat{\tau}} \gamma^2 (V_t) dt \right].$$

2.2 Caso não-homogêneo

Da mesma forma que no contexto de processos de difusão com tempo homogêneo, podemos formalizar tanto a Transformada de Lamperti quanto o Teorema de Girsanov no caso não-homogêneo.

Ao considerar a dinâmica dos processos de difusão sob a influência de variações temporais não homogêneas, somos capazes de explorar uma gama mais ampla de cenários do mundo real, capturando de forma mais precisa os fenômenos dinâmicos observados em muitos contextos financeiros e econômicos.

Teorema 2.2.1. Seja Y_t um processo de difusão com coeficiente de difusão estritamente positivo e continuamente diferenciável no domínio de Y_t , com $dY_t = \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$. Se η é uma transformação no espaço de estados de Y_t para \mathbb{R} , para $t \in [0, \infty)$, seja $Z_t := \eta(t, Y_t)$ e defina

$$Z_t = \eta(t, Y_t) := \int_{v^*}^a \frac{1}{\sigma(t, u)} du \Big|_{a=Y_t} \quad (a, v^* \in \mathcal{V}).$$

Então Z_t é uma transformação injetiva do espaço de estados de Y_t em \mathbb{R} para $t \in [0, +\infty)$ onde

$$\begin{aligned} dZ_t &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{v^*}^a \frac{1}{\sigma(t, u)} du \Big|_{a=Y_t} + \frac{\mu(t, Y_t)}{\sigma(t, Y_t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(t, Y_t)}{\partial Y_t} \right] dt + dB_t \\ &= \left[\frac{\partial \eta(t, \eta^{-1}(t, Z_t))}{\partial t} + \frac{\mu(t, \eta^{-1}(t, Z_t))}{\sigma(t, \eta^{-1}(t, Z_t))} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(t, \eta^{-1}(t, Z_t))}{\partial Y} \right] dt + dB_t. \end{aligned}$$

Prova: Pelo teorema de Itô, temos

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, Y_t) dt + \frac{\partial \eta}{\partial Y}(t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2}(t, Y_t) \cdot (dY_t)^2 \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, Y_t) dt + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \mu(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} \cdot \sigma^2(t, Y_t) dt + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \sigma(t, Y_t) dB_t. \end{aligned}$$

Dessa forma, o coeficiente de volatilidade será 1 se

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y}(t, Y_t) \cdot \sigma(t, Y_t) = 1,$$

com isso, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta(t, Y_t)}{\partial Y} &= \frac{1}{\sigma(t, Y_t)} \\ \frac{\partial^2 \eta(t, Y_t)}{\partial Y^2} &= -\frac{\frac{\partial \sigma(t, Y_t)}{\partial Y}}{\sigma^2(t, Y_t)} \\ \frac{\partial \eta(t, Y_t)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{v^*}^a \frac{1}{\sigma(t, u)} du \Big|_{a=Y_t}.\end{aligned}$$

Combinando este resultado com o fato que $Y_t = \eta^{-1}(t, Z_t)$, desde que exista uma inversa, temos

$$dZ_t = \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{v^*}^a \frac{1}{\sigma(t, u)} du \Big|_{a=Y_t} + \frac{\mu(t, Y_t)}{\sigma(t, Y_t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(t, Y_t)}{\partial Y_t} \right] dt + dB_t,$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 2.2.2 (Girsanov). Sejam V, \tilde{V} processos de difusão com tempo não homogêneo que resolvem as EDEs

$$\begin{aligned}dV_t &= \mu(t, V_t) dt + \sigma(t, V_t) dB_t, & (V_0 = v_0) \\ d\tilde{V}_t &= \tilde{\mu}(t, \tilde{V}_t) dt + \sigma(t, \tilde{V}_t) dB_t, & (\tilde{V}_0 = \tilde{v}_0)\end{aligned}$$

e as medidas de probabilidade \mathbb{V} induzida por V e $\tilde{\mathbb{V}}$ induzida por \tilde{V} . Defina o diferencial do drift

$$\gamma(t, a) = \frac{\tilde{\mu}(t, a) - \mu(t, a)}{\sigma(t, a)}, \quad (a \in \mathcal{V})$$

e assumamos que γ é quadrado integrável. Além disso, a exponencial-Doleans-Dade

$$\exp \left[\int_0^{\dot{\tau}} \gamma(t, V_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^{\dot{\tau}} \gamma^2(t, V_t) dt \right]$$

é um martingale sobre \mathbb{V} para $\dot{\tau} \in [0, \dot{\tau}]$. A condição de Novikov dada por

$$\mathbb{E} \left[\exp \left[\int_0^{\dot{\tau}} \gamma^2(t, V_t) dt \right] \mid v_0 \right] < \infty \quad (v_0 \in \mathcal{V}, 0 < \dot{\tau} < \infty)$$

Então $\tilde{\mathbb{V}}$ é absolutamente continua com respeito a \mathbb{V} , e a derivada de Radon-Nikodym de $\tilde{\mathbb{V}}$ com respeito a \mathbb{V} é dada pela exponencial-Doleans-Dade

$$\frac{d\tilde{\mathbb{V}}}{d\mathbb{V}}(t, v_{[0, \dot{\tau}]}) = \exp \left[\int_0^{\dot{\tau}} \gamma(t, V_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^{\dot{\tau}} \gamma^2(t, V_t) dt \right].$$

No contexto do *exact algorithm* considerado nesta dissertação, sempre que aplicarmos o teorema de Girsanov, tanto o caso homogêneo quanto o não homogêneo, usaremos $\sigma(t, u) = 1$ e $\mu = 0$. Assim, $\gamma = \tilde{\mu}$.

Capítulo 3

Algoritmo exato para simulação de processos de difusão

Neste capítulo, apresentamos o *exact algorithm* proposto em [3] e [1] e sua extensão para o caso não homogêneo, que não é detalhada ou implementada nesses artigos.

3.1 Algoritmo Exato para tempo homogêneo

Iremos nos restringir a EDE do tipo

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

para alguma função drift α , desde que (1.1) pode ser transformada em (3.1) usando a transformada de Lamperti $X_t \mapsto \eta(X_t)$, onde

$$\eta(x) = \int_z^x \frac{1}{\sigma(\mu)} d\mu,$$

para algum z no espaço de estados de X .

Sejam \mathbb{Q} e \mathbb{W} as medidas induzidas por X e por um movimento Browniano, respectivamente, em $[0, T]$, ambos com valor inicial x . Assumimos as seguintes condições:

(C_0) A derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} com respeito a \mathbb{W} existe e é dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) = \exp \left\{ \int_0^T \alpha(\omega_t) d\omega_t - \int_0^T \frac{1}{2} \alpha^2(\omega_t) dt \right\}.$$

(C_1) Assumindo $\alpha \in C^1$, e pelo teorema de Itô, para $A(u) := \int_0^u \alpha(y) dy$, $u \in \mathbb{R}$, a fórmula de Girsanov pode ser reescrita como

$$\int_0^T f'(\omega_t) d\omega_t = f(\omega_T) - f(\omega_0) - \int_0^T \frac{1}{2} f''(\omega_t) dt$$

Para $f(u) = A(u) = \int_0^u \alpha(y) dy$, $f'(u) = \alpha(u)$ e $f''(u) = \alpha'(u)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^T \alpha(\omega_t) d\omega_t &= A(\omega_T) - A(x) - \int_0^T \frac{1}{2} \alpha'(\omega_t) dt \\ \Rightarrow \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) &= \exp \left\{ A(\omega_T) - A(x) - \int_0^T \frac{\alpha^2(\omega_t) + \alpha'(\omega_t)}{2} dt \right\}. \end{aligned}$$

(C₂) $\alpha^2 + \alpha'$ é limitado por baixo.

Definimos o movimento Browniano viciado como o processo para o qual, condicionado no valor final B_T , sua medida é igual à do movimento Browniano e B_T tem densidade proporcional a $h(u) \propto \exp \left\{ A(u) - \frac{(u-x)^2}{2T} \right\}$, $u \in \mathbb{R}$. Assumiremos que essa função é integrável.

Seja \mathbb{Z} a medida de probabilidade do movimento Browniano viciado. Note que para simular um esqueleto (processo em uma coleção finita de tempos) de \mathbb{Z} , primeiro simula-se o ponto final de h e, condicionado neste, o restante do processo é uma ponte Browniana (movimento Browniano condicionado nos valores iniciais e finais). Além disso, as medidas \mathbb{Z} e \mathbb{W} são equivalentes à sua derivada de Radon-Nikodym que pode ser facilmente derivado da proposição abaixo. Como iremos lidar com medidas distintas e equivalentes de processos de difusão em um mesmo espaço mensurável, vamos adotar a notação ω para denominar um elemento deste espaço, ou seja, uma trajetória, e ω_t é o valor de ω no tempo t .

Proposição 1. Sejam $M = \{M_t; 0 \leq t \leq T\}$, $U = \{U_t; 0 \leq t \leq T\}$ dois processos estocásticos em (C, \mathcal{C}) com medidas de probabilidade correspondentes \mathbb{M}, \mathbb{U} . Assuma que f_M, f_U são as densidades do ponto final M_T e U_T respectivamente, com suporte \mathbb{R} . Se é verdade que $(M \mid M_T = \rho) \stackrel{d}{=} (U \mid U_T = \rho)$, para todo $\rho \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{U}}(w) = \frac{f_M}{f_U}(\omega_T).$$

Portanto, $\frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Z}}(\omega) = \frac{N_{x,T}}{h(\omega_T)} \propto \exp \{-A(\omega_T)\}$ onde $N_{x,T}$ representa a densidade da distribuição normal com média x e variância T . Pela regra da cadeia,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}}(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) \frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Z}}(\omega) \propto \exp \left\{ - \int_0^T \left(\frac{1}{2} \alpha^2(\omega_t) + \frac{1}{2} \alpha'(\omega_t) \right) dt \right\}.$$

Sejam

$$l \leq \inf_{u \in \mathbb{R}} \frac{(\alpha^2 + \alpha')(u)}{2},$$

$$r(L) \geq \sup_{u \in L} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \alpha')(u; \theta)}{2} - l(\theta) \right\},$$

onde L é um intervalo local para a trajetória ω em $[0, T]$.

Nos casos em que ω é uma ponte Browniana, é possível simular L utilizando um algoritmo chamado ponte Browniana em camadas. Detalhes desse algoritmo são fornecidos no apêndice. Nos casos em que $(\alpha^2 + \alpha')$ é uniformemente limitada, pode-se definir um limite uniforme $r \geq \sup_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \alpha')(u; \theta)}{2} - l(\theta) \right\}$.

Definimos agora a seguinte função $0 \leq \phi \leq 1$:

$$\phi(\omega_t; \theta) = \frac{1}{r(L)} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \alpha')(\omega_t)}{2} - l \right\}, \quad t \in [0, T],$$

e, portanto,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}}(w) \propto \exp \left\{ -r(L) \int_0^T \phi(\omega_t) dt \right\} \leq 1.$$

Vamos agora definir um evento no espaço de probabilidade de um processo de Poisson bivariado que, condicionado em uma trajetória ω , tem probabilidade dada pela função exponencial em (3.1).

Teorema 3.1.1. [Moeda Poisson] Seja ω um elemento qualquer de $C([0, T], \mathbb{R})$ e $r(L)$ um limite superior para a transformação $t \mapsto \phi(\omega_t)$, $t \in [0, T]$. Se Φ é um processo de Poisson homogêneo de intensidade $r(L)$ em $[0, T] \times [0, 1]$ e N é o número de pontos de Φ abaixo do gráfico $\{(t, \phi(\omega_t)); t \in [0, T]\}$, então

$$\mathbb{P}[N = 0 \mid \omega] = \exp \left\{ -r(L) \int_0^T \phi(\omega_t) dt \right\}.$$

Observação 1. Perceba que $N \mid \omega$ tem distribuição de Poisson com média $r(L) \int_0^T \phi(\omega_t) dt$ (veja [14]).

A ideia do *exact algorithm* é simular trajetórias de \mathbb{Q} via amostragem por rejeição, propondo de \mathbb{Z} e aceitando com probabilidade dada pela função exponencial em (3.1).

Apesar da dimensionalidade infinita de ω , o algoritmo pode ser executado com custo computacional finito pelas seguintes razões:

1. A proposta \mathbb{Z} pode ser simulada em qualquer coleção finita de tempos;
2. O passo de aceitação/rejeição pode ser executado de forma exata simulando a proposta apenas em uma coleção finita de tempos, graças ao resultado no Teorema (3.1.1);
3. Uma vez aceita uma trajetória proposta, seu valor em qualquer tempo pode ser simulado.

Portanto, o *exact algorithm* retorna uma trajetória do processo com medida \mathbb{Q} em uma coleção finita de tempos (esqueleto) e uma forma de simular a trajetória em qualquer outra coleção finita de tempos. O algoritmo é o seguinte.

Exact Algorithm

Passo 1: Simular $\omega_T \sim h$.

Passo 2: Simular L do algoritmo PB em camadas e calcular $r(L)$;

Passo 3: Gerar um processo de Poisson $\Phi = \{\Psi, \Upsilon\}$, com taxa $r(L)$ em $[0, T] \times [0, 1]$, com pontos $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ e $\Upsilon = \{v_1, \dots, v_k\}$;

Passo 4: Simular o esqueleto $\{w_{\psi_1}, \dots, w_{\psi_k}\}$ de $\mathbb{Z} \mid L$ usando o algoritmo do PB em camadas;

Passo 5: Calcular o indicador de aceitação $I := \prod_{j=1}^k \mathbb{1} \{ \phi(\omega_{\psi_j}; \theta) < v_j \}$;

Passo 6: Se $I = 1$, aceite o esqueleto proposto e retorne

$$S(\omega) := \{(0, x), (\psi_1, \omega_{\psi_1}), \dots, (\psi_k, \omega_{\psi_k}), (T, y)\},$$

caso contrário, retorne ao passo 1.

Naturalmente, o algoritmo é consideravelmente mais simples quando r é uniformemente limitada e, portanto, simulações do PB em camadas são substituídas por simulações de uma simples ponte Browniana. Apresentamos abaixo um exemplo no qual isso acontece.

Exemplo 3.1.1. Considere a EDE $dX_t = \sin(X_t)dt + dB_t$. Embora pareça simples, a EDE não pode ser resolvida analiticamente. Contudo, o algoritmo EA pode ser aplicado desde que X satisfaça $(C_1) - (C_2)$ e $(\alpha^2 + \alpha')$ seja uniformemente limitada, com $l(\theta) = -\frac{1}{2}$ e $r(\theta) = \frac{9}{8}$. Nosso método proposto será testar no conjunto de dados de X com a versão não condicional do EA1 sobre as especificações $n = 1000$, $\Delta t_i = 1$, $X_0 = 0$ e $\theta = \pi$. Neste caso, $\alpha \in C^1$ e

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \text{sen}(u), & \alpha'(u) &= \cos(u), \\ A(u) &= \int_0^u \text{sen}(y)dy = -\cos(u)|_0^u = 1 - \cos(u), \\ \alpha^2(u) &= \text{sen}^2(u), \\ \frac{\alpha^2 + \alpha'}{2} &= \frac{\text{sen}^2(u) + \cos(u)}{2}, \\ l &= \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\text{sen}^2(u) + \cos(u)}{2} \right\} = -\frac{1}{2}, \\ r &= \sup_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\text{sen}^2(u) + \cos(u)}{2} \right\} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$h(u) \propto \exp \left\{ -\cos(u) - \frac{(u-x)^2}{2} \right\}.$$

Seja $q(u) = \left\{ -\frac{(u-x)^2}{2\Delta t_i} \right\}$, então $\frac{h(u)}{q(u)} = \exp \{-\cos(u)\} \leq e$. Assim, podemos simular da densidade h via amostragem por rejeição, propondo de uma distribuição normal com média dada pelo valor inicial x do processo e variância Δt_i .

Agora podemos aplicar o algoritmo exato para simular a solução da EDE na equação com $T = 1000$ em janelas de tamanho 1, veja Figura 3.1.

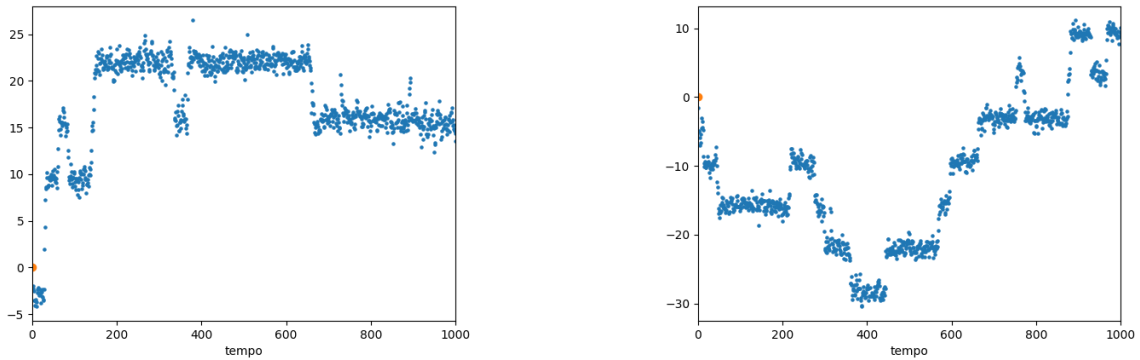
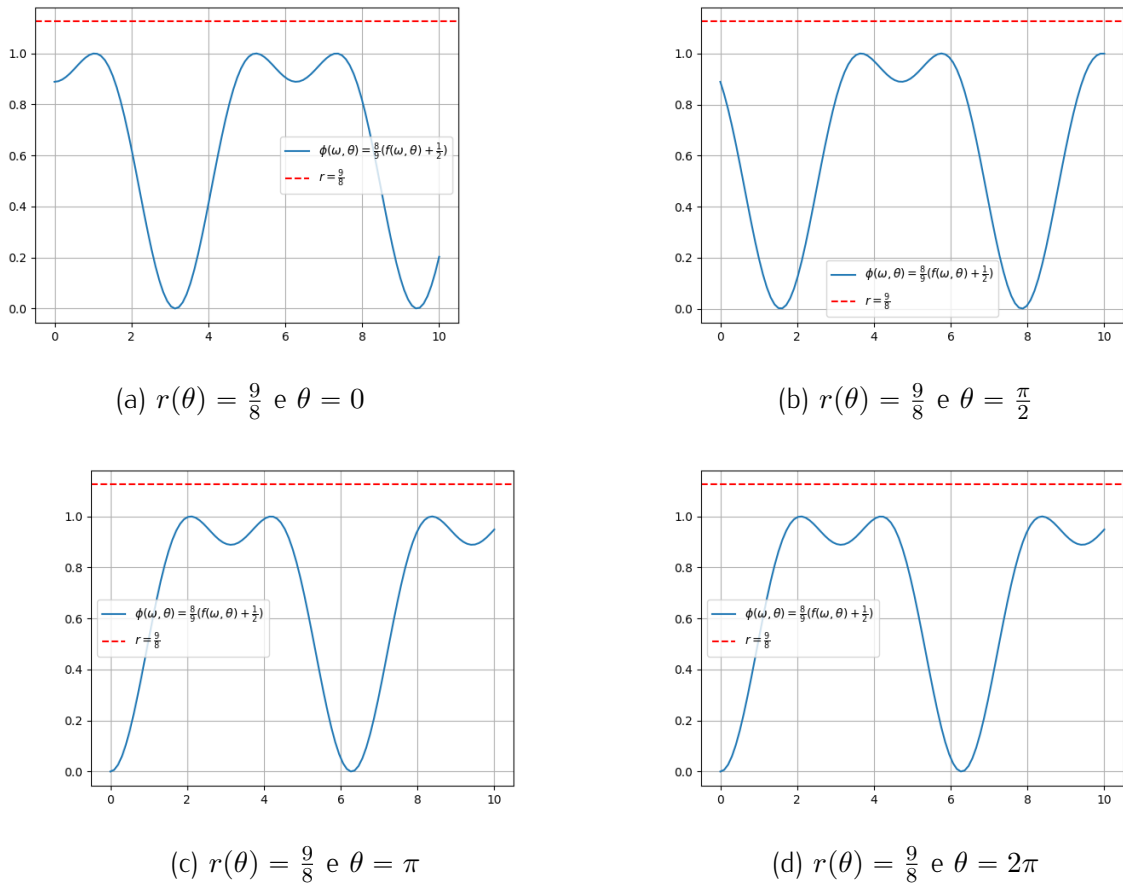


Figura 3.1: Duas trajetórias simuladas do processo X .

Vamos agora considerar a forma paramétrica $dX_t = \sin(X_t + \theta)dt + dB_t$, de forma que

$$f(\omega; \theta) = \frac{(\alpha^2 + \alpha')(\omega; \theta)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2(\omega + \theta) + \cos(\omega + \theta)), \quad \phi(\omega; \theta) = \frac{8}{9} \cdot \left[f(\omega; \theta) + \frac{1}{2} \right],$$

$r(\theta) = \frac{9}{8}$ e $l(\theta) = -\frac{1}{2}$. A Figura 3.2 apresenta os gráficos de $r(\theta)$ e ϕ para alguns valores de θ .


 Figura 3.2: Gráficos da função $\phi(\omega; \theta)$ no exemplo 3.1.1.

3.2 Algoritmo Exato para tempo não homogêneo

Seja $Y = \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo de difusão com tempo não-homogêneo determinado como a solução de uma equação diferencial estocástica (EDE) do tipo

$$dY_t = \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t, \quad Y_{t_i} = y \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_i, t_j], \quad (3.2)$$

onde μ e σ satisfazem as condições de regularidade. Isso garante a existência de uma solução fraca global. Novamente nos restringiremos a uma EDE do tipo

$$dX_t = \alpha(t, X_t) dt + dB_t, \quad X_{t_i} = x, \quad t \in [t_i, t_j], \quad (3.3)$$

para alguma função drift α , já que (3.2) pode ser transformada em (3.4) usando a transformada de Lamperti.

Sejam \mathbb{Q} e \mathbb{W} as medidas induzidas por X e a medida de um movimento Browniano, respectivamente, em $[0, T]$, com valor inicial x . Assumimos as seguinte condições:

(IC₀) A derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} com respeito a \mathbb{W} existe e é dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}}(\omega) = \exp \left\{ \int_{t_i}^{t_j} \alpha(t, \omega_t) d\omega_t - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_j} \alpha^2(t, \omega_t) dt \right\},$$

(IC₁) $\alpha \in C^{1,1}$, e pelo teorema de Itô, para $A(t, u) := \int_0^u \alpha(t, y) dy$, $u \in \mathbb{R}$, a fórmula de Girsanov pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dW}(\omega) = \exp \left\{ A(T, \omega_{t_j}) - A(t_i, x) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_j} \alpha^2(t, \omega_t) + \frac{\partial \alpha(t, \omega_t)}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A(t, \omega_t)}{\partial t} dt \right\},$$

(IC₂) $\alpha^2(t, x) + \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A(t, x)}{\partial t}$ é limitada inferiormente,

(IC₃) para $h(t, u) \propto \exp \left\{ A(t, u) - \frac{(u-x)^2}{2\Delta t_i} \right\}$, $u \in \mathbb{R}$, $t \in [t_i, t_j]$, $\Delta t_i = t_j - t_i$, assumimos que $h(t, u)$ seja integrável.

O resultado em (IC₁) é obtido da seguinte forma: pela fórmula de Itô, temos

$$df(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) d\omega_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) dt$$

Para $f(t, u) = A(t, u) = \int_0^u \alpha(t, y) dy$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha(t, x)$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial x}$

$$\Rightarrow f(t_j, \omega_{t_j}) - f(t_i, \omega_{t_i}) = \int_{t_i}^{t_j} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega_t) dt + \int_{t_i}^{t_j} \frac{\partial f}{\partial x}(t, \omega_t) d\omega_t + \int_{t_i}^{t_j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \omega_t) dt$$

$$\Rightarrow A(t_j, \omega_{t_j}) - A(t_i, x) = \int_{t_i}^{t_j} \frac{\partial A(t, \omega_t)}{\partial t} dt + \int_{t_i}^{t_j} \alpha(t, \omega_t) d\omega_t + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_j} \frac{\partial \alpha(t, \omega_t)}{\partial x} dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_j} \alpha(t, \omega_t) d\omega_t = A(t_j, \omega_{t_j}) - A(t_i, x) - \int_{t_i}^{t_j} \left(\frac{\partial A(t, \omega_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(t, \omega_t)}{\partial x} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dW}(\omega) = \exp \left\{ A(t_j, \omega_{t_j}) - A(t_i, x) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_j} \alpha^2(t, \omega_t) + \frac{\partial \alpha(t, \omega_t)}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A(t, \omega_t)}{\partial t} dt \right\}$$

Seja \mathbb{Z} a medida do movimento Browniano viciado. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dZ}(\omega) &\propto \exp \left\{ -A(t_j, \omega_{t_j}) \right\} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dZ}(\omega) &= \frac{dQ}{dW}(\omega) \cdot \frac{dW}{dZ}(\omega) \propto \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_j} \frac{1}{2} \left(\alpha^2(t, \omega_t) + \frac{\partial \alpha(t, \omega_t)}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A(t, \omega_t)}{\partial t} \right) dt \right\} \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} l(t_i, t_j) &\leq \inf_{t \in [t_i, t_j]} \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2(t, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(t, u)}{\partial u} + \frac{\partial A(t, u)}{\partial t} \right\}, \\ r(L, t_i, t_j) &\geq \sup_{t \in [t_i, t_j]} \sup_{u \in L} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2(t, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(t, u)}{\partial u} + \frac{\partial A(t, u)}{\partial t} - l(t_i, t_j) \right\}, \end{aligned}$$

e defina

$$\phi(t, \omega_t, t_i, t_j) = \frac{1}{r(L, t_i, t_j)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) (t, \omega_t) - l(t_i, t_j) \right\}, \quad t \in [0, T].$$

Logo,

$$\frac{dQ}{dZ}(\omega) \propto \exp \left\{ -r(L, t_i, t_j) \int_{t_i}^{t_j} \phi(t, \omega_t, t_i, t_j) dt \right\} \leq 1. \quad (3.4)$$

Pelo teorema (3.1.1), seja N o número de pontos de Φ processo de Poisson de taxa $r(L)$ em $[t_i, t_j] \times [0, 1]$ encontrados abaixo do gráfico de $\{(t, \phi(t, \omega_t)); t \in [t_i, t_j]\}$, então

$$\mathbb{P}[N = 0 \mid \omega] = \exp \left\{ -r(L) \int_{t_i}^{t_j} \phi(t, \omega_t, t_i, t_j) dt \right\}.$$

Dessa forma, obtemos o *exact algorithm* para o caso não-homogêneo fazendo as devidas adaptações ao algoritmo para o caso homogêneo.

Exemplo 3.2.1. Considere a EDE $dY_t = \cos\left(\frac{Y_t}{t}\right) dt + \sigma dB_t$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Precisamos transformá-la numa equação do tipo (3.4) utilizando a transformada de Lamperti. Seja

$$X_t = \eta(Y_t) = \int_0^y \frac{1}{\sigma} db \Big|_{Y_t=y} = \frac{Y_t}{\sigma} \Rightarrow Y_t = \sigma X_t.$$

Pela fórmula da transformada de Lamperti, temos

$$\begin{aligned} dX_t &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y \frac{1}{\sigma(t, u)} du \Big|_{Y_t=y} + \frac{\mu(t, Y_t)}{\sigma(t, Y_t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(t, Y_t)}{\partial Y_t} \right] dt + dB_t \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Y_t}{\sigma} \right) + \frac{\cos\left(\frac{Y_t}{t}\right)}{\sigma} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right] dt + dB_t \\ &= \left[\frac{\cos\left(\frac{\sigma X_t}{t}\right)}{\sigma} \right] dt + dB_t, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Assim, consideraremos a equação $dX_t = \cos\left(\frac{X_t}{t}\right) dt + dB_t$ para $\sigma = 1$ e $T = 50$, $\Delta t_i = 1$ e $X_0 = 0$. Neste caso, $\alpha \in C^{1,1}$ e

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= \cos\left(\frac{x}{t}\right), \\ A(t, x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{y}{t}\right) dy = t \operatorname{sen}\left(\frac{x}{t}\right), \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{x}{t}\right), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, x) &= -\left(\frac{1}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{t}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi(t, u, t_i, t_j) = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{u}{t}\right) - \left(1 + \frac{1}{2t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{u}{t}\right) - l(t_i, t_j).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} l(t_i, t_j) &= \inf_{t \in [t_i, t_j]} \left(-1 - \frac{1}{2t} - \frac{1}{t} \right) = \inf_{t \in [t_i, t_j]} -\frac{3}{2t} - 1 = -\frac{3}{2t_i} - 1, \\ r(t_i, t_j) &= \sup_{t \in [t_i, t_j]} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} - l \right) = \sup_{t \in [t_i, t_j]} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2t} + 1 + \frac{3}{2t_i} \right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{t_i}. \end{aligned}$$

Assim, a função $\phi(t, \omega_t, t_i, t_j)$ é dada por

$$\frac{2t_j}{(5t_j + 6)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\omega_t}{t}\right) - \left(1 + \frac{1}{2t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_t}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{\omega_t}{t}\right) \right] + 1 + \frac{3}{2t_j} \right\}$$

e

$$h(t_j, u) \propto \exp \left\{ A(t_j, u) - \frac{(u-x)^2}{2\Delta t_i} \right\} = \exp \left\{ t_j \operatorname{sen}\left(\frac{u}{t_j}\right) - \frac{(u-x)^2}{2\Delta t_i} \right\}.$$

Exemplo 3.2.2. [Modelo de Hull-White] Este modelo é utilizado para modelar taxas de juros futuras e é definido como a solução da seguinte EDE:

$$dY_t = a(b + ct - Y_t)dt + \sigma_0 e^{\sigma_1 t} dB_t,$$

para $a, \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}^+$, $b, c \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^+$. Note que ela não está na sua forma reduzida, então precisamos utilizar a transformada de Lamperti, obtendo

$$dX_t = \left[\frac{a(b + ct)}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - (a + \sigma_1)X_t \right] dt + dB_t.$$

Neste caso, $\alpha \in C^{1,1}$ e

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= \frac{a(b + ct)}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - (a + \sigma_1)x, \\ A(t, x) &= - \left(\frac{a + \sigma_1}{2} \right) x^2 + \left(\frac{a(b + ct)}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} \right) x, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, x) &= \frac{a[c - \sigma_1(b + ct)]x}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, x) &= -(a + \sigma_1). \end{aligned}$$

Assim, a função $\frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) (t, x)$ é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{a^2(b + ct)^2}{\sigma_0 e^{2\sigma_1 t}} - \frac{2a(b + ct)(a + \sigma_1)x}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} + (a + \sigma_1)^2 x^2 \right] - \frac{(a + \sigma_1)}{2} + \frac{a[c - \sigma_1(b + ct)]x}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} = \\ & = \frac{(a + \sigma_1)^2}{2} x^2 + \left(\frac{a[c - (b + ct)(a + 2\sigma_1)]}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} \right) x + \left(\frac{a^2(b + ct)^2}{2\sigma_0^2 e^{2\sigma_1 t}} - \frac{(a + \sigma_1)}{2} \right). \end{aligned}$$

Note que esta função é limitada inferiormente em x , como necessário para aplicar o EA. Além disso, o valor mínimo da função é dado por

$$- \frac{\left(\frac{a[c - (b + ct)(a + 2\sigma_1)]}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} \right)^2}{2(a + \sigma_1)^2} + \left(\frac{a^2(b + ct)^2}{2\sigma_0^2 e^{2\sigma_1 t}} - \frac{(a + \sigma_1)}{2} \right).$$

Agora, as funções l e r podem ser definidas sem maiores dificuldades. Além disso, como $A(t, x)$ é um polinômio de 2º grau em x com coeficiente de grau 2 negativo, temos que h será uma distribuição normal.

3.3 Contribuição metodológica

Este trabalho é focado em estudar a simulação exata de processos não-homogêneos. Assim, é natural pensar se há algum caso limitante para que esses processos não possam ser simulados. A resposta é positiva e aqui explicamos os problemas que podem comprometer a funcionalidade do algoritmo.

Primeiramente, note que o *exact algorithm* pode ser modificado para ficar mais eficiente. Defina:

$$\begin{aligned}\tilde{l}(L, t_i, t_j) &= \inf_{t \in [t_i, t_j]} \inf_{u \in L} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2(t, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(t, u)}{\partial u} + \frac{\partial A(t, u)}{\partial t} \right\}, \\ \tilde{r}(L, t_i, t_j) &= \sup_{t \in [t_i, t_j]} \sup_{u \in L} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2(t, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(t, u)}{\partial u} + \frac{\partial A(t, u)}{\partial t} - \tilde{l}(L, t_i, t_j) \right\}, \\ \tilde{\phi}(t, \omega_t, t_i, t_j) &= \frac{1}{\tilde{r}(L, t_i, t_j)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) (t, \omega_t) - \tilde{l}(L, t_i, t_j) \right\}, \quad t \in [t_i, t_j].\end{aligned}$$

A probabilidade de aceitação do algoritmo pode ser reescrita como

$$\exp \left\{ -(\tilde{l}(L, t_i, t_j) - l(t_i, t_j)) \Delta t_i \right\} \exp \left\{ -\tilde{r}(L, t_i, t_j) \int_{t_i}^{t_j} \tilde{\phi}(t, \omega_t, t_i, t_j) dt \right\}.$$

Dessa forma, o passo de aceitação/rejeição pode ser executado simulando uma variável aleatória Bernoulli com probabilidade de sucesso dada pela primeira função exponencial acima, e aplicando o algoritmos da moeda Poisson com uma taxa $\tilde{r}(L, t_i, t_j)$ e avaliando a função $\tilde{\phi}(t, \omega_t, t_i, t_j)$.

Problemas ocorrem quando:

1. $(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t})(t, \omega_t) - l(t_i, t_j) \rightarrow \infty$, quando $t_i \rightarrow \infty$, para $t \in [t_i, t_j]$ e Δt_i fixo,
2. $\tilde{r}(L, t_i, t_j) \rightarrow \infty$, quando $t_i \rightarrow \infty$, para Δt_i fixo.

O resultado em 1 faz com que a probabilidade de aceitação do algoritmo, para qualquer intervalo de tempo fixo, convirja para 0, uma vez que esta decai exponencialmente em $\int_{t_i}^{t_j} (\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t})(t, \omega_t) - l(t_i, t_j) dt$.

O resultado em 2 faz com que o custo computacional do algoritmo cresça indefinidamente, por envolver a simulação de um processo de Poisson com taxa $\tilde{r}(L, t_i, t_j)$ e da ponte Browniana (em camadas) nos pontos do processo de Poisson.

Por fim, note que o problema 2 também ocorre quando utilizamos l e r ao invés de \tilde{l} e \tilde{r} e o resultado em 2 ocorre para r . Existem casos em que o problema 2 ocorre para r e l mas não ocorre para \tilde{l} e \tilde{r} .

Ilustramos os problemas citados por meio do exemplo abaixo.

Exemplo 3.3.1. Considere a EDE $dY_t = \cos(tY_t) dt + \sigma dB_t$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Precisamos transformá-la numa equação do tipo (3.4) utilizando a transformada de Lamperti, obtendo

$$X_t = \left[\frac{\cos(\sigma \cdot t \cdot X_t)}{\sigma} \right] dt + dB_t, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, consideraremos a equação $dX_t = \cos(tX_t) dt + dB_t$ para $\sigma = 1$. Nesse caso, $\alpha \in C^{1,1}$ e

$$\begin{aligned}\alpha(t, x) &= \cos(tx), \\ A(t, x) &= \int_0^x \cos(ty) dy = \text{sen}(tx)/t, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, x) &= \frac{\cos(tx)}{t^3} + \frac{\text{sen}(tx)}{t^4}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, x) &= -t \text{sen}(tx).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\phi(t, \omega_t, t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \cos^2(tx) - \frac{t}{2} \sin(tx) + \frac{\cos(tx)}{t^3} + \frac{\sin(tx)}{t^4} - l(t_i, t_j, \theta), \\ l(t_i, t_j, \theta) &= \inf_{t \in [t_i, t_j]} \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} \right) = -\frac{t_j}{2} - \frac{1}{t_i^3} - \frac{1}{t_i^4}, \\ r(t_i, t_j, \theta) &= \sup_{t \in [t_i, t_j]} \left(\frac{1+t}{2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} - l(\omega, \theta) \right) = \frac{1}{2} + t_j + \frac{2}{t_i^3} + \frac{2}{t_i^4}.\end{aligned}$$

Note que, para este exemplo, não existem ganhos significativos se consideramos \tilde{l} e \tilde{r} ao invés de l e r . Por fim, fica evidente que ambos os problema descritos anteriormente ocorrem para esse exemplo.

Os mesmos problemas são encontrados em processos utilizados em aplicações na área de finanças. Um desses processos é apresentado abaixo.

Exemplo 3.3.2 (O modelo Black-Scholes Extendido). Considere a EDE

$$dY_t = aY_t dt + \sigma_0 e^{\sigma_1 t} Y_t dB_t,$$

para $a, \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}^+$ e suas restrições serão dadas de modo que o algoritmo possa ser aplicado, e $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^+$. Note que ela não está na sua forma reduzida, então precisamos utilizar a transformada de Lamperti, obtendo a EDE reduzida

$$dX_t = \left[-\sigma_1 X_t + \frac{a}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}}{2} \right] dt + dB_t.$$

Neste caso, $\alpha \in C^{1,1}$ e

$$\begin{aligned}\alpha(t, x) &= -\sigma_1 x + \frac{a}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}}{2}, \\ A(t, x) &= -\frac{\sigma_1}{2} x^2 + \left(\frac{a}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}}{2} \right) x, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, x) &= -\frac{a\sigma_1 x}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_1 \sigma_0 e^{\sigma_1 t} x}{2}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, x) &= -\sigma_1.\end{aligned}$$

Assim, a função $\frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) (t, \omega_t)$ é dada por

$$\frac{1}{2} \left[\left(-\sigma_1 x + \frac{a}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}}{2} \right)^2 - \sigma_1 \right] - \frac{a\sigma_1 x}{\sigma_0 e^{\sigma_1 t}} - \frac{\sigma_1 \sigma_0 e^{\sigma_1 t} x}{2},$$

e diverge para infinito, para x fixo, quando t tende a infinito, resultando nos problemas descritos anteriormente.

3.3.1 Modificação proposta

Ao considerar o *exact algorithm* para processos de difusão com tempo não homogêneo como uma extensão natural do caso homogêneo, definimos as funções \tilde{l} e \tilde{r} tomando o supremo em t e ω . No entanto, podemos considerar o supremo apenas em ω e assim definir as funções

$\tilde{l}(L, t)$ e $\tilde{r}(L, t)$, dependendo de t . Dessa forma, temos que a probabilidade de aceitação do EA será

$$\exp \left\{ -(\tilde{l}(L, t) - l(t_i, t_j))\Delta t_i \right\} \exp \left\{ -\tilde{r}(L, t) \int_{t_i}^{t_j} \tilde{\phi}(t, \omega_t) dt \right\},$$

sendo $\tilde{\phi}(t, \omega_t) = \frac{1}{\tilde{r}(L, t)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) (t, \omega_t) - \tilde{l}(L, t) \right\}$.

Isto significa que o processo de Poisson Φ no algoritmo da moeda de Poisson será não-homogêneo, mas terá um valor esperado do número de pontos menor que o processo homogêneo com taxa que considera o supremo também em t . Isso resultará em um algoritmo com menor custo computacional e, em alguns casos, até mesmo resolver o problema 2 descrito anteriormente. No entanto, o problema 1 não pode ser remediado, uma vez que a probabilidade de aceitação não se altera.

Se aplicarmos a modificação proposta ao Exemplo 3.3.1, obtemos:

$$l(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}$$

$$r(t) = \frac{1}{2} + t + \frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^4}.$$

Neste caso, o problema 2 não é resolvido mas, se por exemplo, aplicamos o EA no intervalo $(1, T]$, para $T > 1$, o número médio de pontos no algoritmo da moeda de Poisson diminui como mostrado na Figura 3.3.

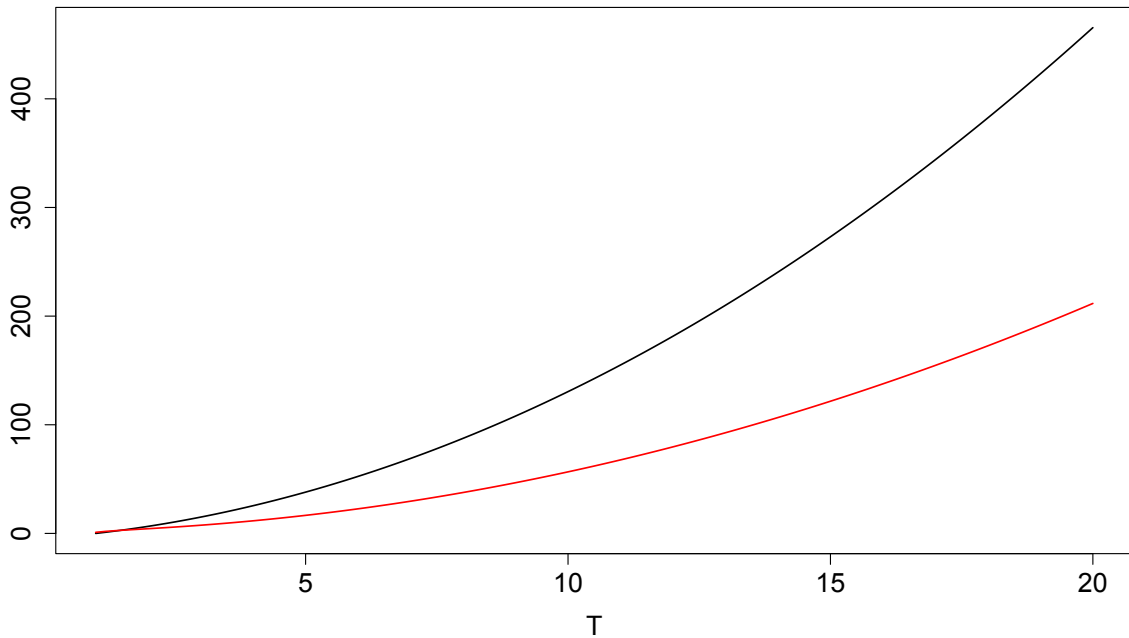


Figura 3.3: Número médio de pontos do PP no exemplo 3.3.1 sem (preto) e com (vermelho) a modificação proposta.

Capítulo 4

Conclusões e trabalhos futuros

Essa dissertação discutiu o problema de simulação exata para processos de difusão univariados. O algoritmo EA foi apresentado para o caso homogêneo e, como ainda não havia sido feito na literatura, detalhadamente derivado para o caso não-homogêneo.

O algoritmo foi aplicado em exemplos específicos e resultados numéricos foram apresentados.

Por fim, uma modificação do algoritmo EA foi proposta para melhorar sua eficiência computacional.

O caso não-homogêneo ainda apresenta desafios que tornam sua aplicação computacionalmente inviável. Pretende-se, em trabalhos futuros, propor modificações do algoritmo que resolvam essas limitações, em particular, utilizando como proposta no algoritmo de rejeição, processos não homogêneos, mas que preservem a continuidade absoluta necessária e possam ser simulados.

Uma vez resolvidos os problemas do algoritmo no caso não-homogêneo, este pode ser utilizado para derivar metodologias de inferência exatos (sem erro de discretização). Essas metodologias, por sua vez, podem ser aplicadas a vários exemplos de processos utilizados na área de finanças.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Cálculo Estocástico de Itô

Esta seção tem o objetivo de introduzir os principais tópicos do cálculo estocástico. Caso queira um maior aprofundamento neste tema (veja [17] e [7]). Uma das principais aplicações do processo de Wiener (movimento Browniano) foi proposta por **Bachelier**, que por volta de 1900 escreveu um artigo inovador sobre a modelagem dos preços de ativos na bolsa de valores de Paris.

É claro que Bachelier não poderia ter chamado isso de processo de Wiener, mas ele usou o que na terminologia significa $B(t)$ como uma descrição das oscilações de mercado afetando o preço $X(t)$ de um ativo. A saber, ele assumiu que incrementos infinitesimais de preço $dX(t)$ são proporcionais aos incrementos $dB(t)$ do processo de Wiener,

$$dX(t) = \sigma dB(t),$$

onde σ é uma constante positiva. Como um resultado, um ativo com preço inicial $X(0) = x$ valeria a pena

$$X(t) = x + \sigma W(t)$$

no tempo t . Esta abordagem estava à frente do tempo de Bachelier, mas sofreu de uma séria falha: para qualquer tempo $t > 0$ o preço $X(t)$ pode ser negativo com probabilidade diferente de zero. Mesmo assim, para curtos períodos funciona bem o suficiente, desde que a probabilidade seja insignificante. Mas à medida que t aumenta, aumenta a probabilidade de que $X(t) < 0$, e o modelo afasta-se da realidade.

Para remediar a falha, observou-se que os investidores trabalham em termos de ganho ou perda potencial $dX(t)$ na proporção da soma investida $X(t)$. Portanto, é na verdade o preço relativo $dX(t)/X(t)$ de um ativo que reage às oscilações de mercado, i.e., que seria proporcional a $dB(t)$,

$$dX(t) = \sigma X(t) \cdot dB(t). \tag{A.1}$$

Qual é o significado matemático preciso desta igualdade? Formalmente, se assemelha a uma equação diferencial, mas isto conduz imediatamente para uma dificuldade, porque os caminhos de $B(t)$ não são diferenciáveis em lugar algum. Uma maneira de contornar o obstáculo foi encontrada por **Itô** em 1940. Em seu enorme sucesso da teoria de integrais estocásticas, Itô deu um rigoroso significado para equações como (A.1) escrevendo-as como equações integrais envolvendo um novo tipo de integral. Em particular, (A.1) pode ser escrita

como

$$X(t) = x + \sigma \int_0^t X(t) dB(t),$$

onde a integral do lado direito com respeito a $B(t)$ é chamada de Integral Estocástica de Itô e será definida na próxima seção. Enquanto à primeira vista seria de se esperar que a solução da equação fosse $xe^{B(t)}$, mas na verdade, acaba por ser

$$X(t) = xe^{B(t)}e^{-\frac{t}{2}},$$

que é a exponencial martingal. O intrigante fator adicional $e^{-\frac{t}{2}}$ é devido a não-diferenciabilidade dos caminhos do processo de Wiener. Claramente, se $x > 0$, então $X(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, como requerido no modelo de preços de ativos.

A.1.1 Diferencial Estocástica e Fórmula de Itô

Qualquer função continuamente diferenciável $x(t)$ tal que $x(0) = 0$ satisfaz as fórmulas

$$\begin{aligned} x(T)^2 &= 2 \int_0^T x(t) dx(t), \\ x(T)^3 &= 3 \int_0^T x(t)^2 dx(t), \end{aligned}$$

onde $dx(t)$ pode simplesmente ser entendida como uma abreviação para $x'(t)dt$, as integrais no lado direito são integrais de Riemann. Fórmulas semelhantes são obtidas para o movimento Browniano:

$$\begin{aligned} B(T)^2 &= \int_0^T dt + 2 \int_0^T B(t) dB(t), \\ B(T)^3 &= 3 \int_0^T B(t) dt + 3 \int_0^T B(T)^2 dB(t). \end{aligned}$$

Aqui, as integrais estocásticas se assemelham às expressões correspondentes para uma função suave $x(t)$, mas há também os termos intrigantes $\int_0^T dt$ e $3 \int_0^T B(t) dt$. As fórmulas para $B(T)^2$ e $B(T)^3$ são exemplos muito mais gerais da **fórmula de Itô**, uma ferramenta crucial para transformar e calcular integrais estocásticas. Termos como $\int_0^T dt$ e $3 \int_0^T W(t) dt$, que não são análogos no cálculo clássico de funções suave, são uma característica inerente à fórmula de Itô e referidos como a **correção** de Itô. A classe de processos aparecendo na fórmula de Itô é definida como se segue.

Definição A.1.1. Um processo estocástico $\xi(t)$, $t \geq 0$ é chamado um **processo de Itô** se ele possui caminhos contínuos q.c. e pode ser representado como

$$\xi(T) = \xi(0) + \int_0^T a(t) dt + \int_0^T b(t) dB(t) \text{ q.c.}, \quad (\text{A.2})$$

onde $b(t)$ é um processo pertencente a M_T^2 para todo $T > 0$ e $a(t)$ é um processo adaptado a filtração \mathcal{F}_t tal que

$$\int_0^T |a(t)| dt < \infty \text{ q.c.} \quad (\text{A.3})$$

para todo $T \geq 0$. A classe de todos os processos $a(t)$ satisfazendo (A.3) para algum $T > 0$ será denotada por \mathcal{L}_T^1 .

Para um processo de Itô ξ é comum escrever (A.2) como

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dB(t)$$

e chamar $d\xi(t)$ a **diferencial estocástica** de $\xi(t)$. Isto é conhecido como a **notação diferencial de Itô**. Deve ser enfatizado que a diferencial estocástica não tem significado matemático bem definido por conta própria e deve ser sempre entendida no contexto da rigorosa equação (A.2). A notação diferencial de Itô é um meio eficiente de escrever esta equação, ao invés de uma tentativa de dar um significado preciso à diferencial estocástica.

Perceba que a equação (A.2) se difere do teorema fundamental do cálculo apenas pelo ruído determinado pela integral determinística $\int_0^T a(t)dt$. E isso segue em qualquer construção de um processo de Itô, devido a aleatoriedade do processo.

Teorema A.1.1 (Fórmula de Itô 1-dimensional). Seja X_t um processo de Itô dado por

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Seja $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Então $Y_t = g(t, X_t)$ é um processo de Itô, e

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

onde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ é calculado de acordo com a **tabela de multiplicação de Itô**

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= 0, & dt \cdot dB(t) &= 0, \\ dB(t) \cdot dt &= 0, & dB(t) \cdot dB(t) &= dt. \end{aligned}$$

Teorema A.1.2 (Existência e unicidade para equações diferenciais estocásticas). Sejam $T > 0$ e $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ funções mensuráveis satisfazendo

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguma constante C , (onde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) e tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguma constante D . Seja Z uma variável aleatória independente da σ -álgebra $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ gerada por $B_s(\cdot)$, $s \geq 0$ e tal que $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Então a equação diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, X_0 = Z$$

tem uma única solução $X_t(\omega)$ com a propriedade que $X_t(\omega)$ é adaptado a filtração \mathcal{F}_t^Z gerada por Z e $B_s(\cdot)$; $s \leq t$ e

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty.$$

A.2 Ponte Browniana em camadas

Nesta seção demonstramos como aplicar EA quando somente $(C_0) - (C_2)$ são assumidos (veja [1]). Portanto, agora não temos suposição de limite superior em ϕ . Lembre que o elemento aleatório $\Upsilon = \Upsilon(X)$ deveria ser selecionado de modo que $\sup_{s \in [0, t]} \phi(X_s) < r(\Upsilon) < \infty$ então

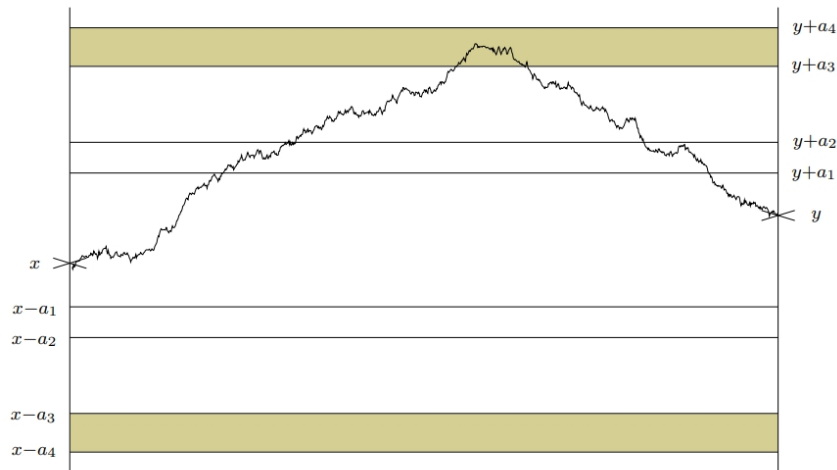


Figura A.1: Um caminho de $X_0 = x$ até $X_t = y$, com $x < y$. Neste exemplo usamos camadas simétricas $a_i = b_i, i \geq 1$ para a escolha específica de $\{a_i\}$ ilustrada no gráfico, o evento U_4 ocorreu. Portanto, neste caso $I(X) = 4$.

agora deve conter informações para todo o intervalo de caminho X . Definiremos Υ como a janela para uma partição apropriada do espaço de caminhos. Cada caminho na partição contém caminhos que se movem dentro de um intervalo conhecido. Portanto, condicionalmente em $\Upsilon = \Upsilon(X)$ estaremos em posição de obter um superconjunto de $[\min(X), \max(X)]$, e então, o limite superior requerido em $s \mapsto \phi(X_s)$. Lembre que a construção deve respeitar os passos 2. e 4. do EA, ou seja, permitir a simulação de Υ e, então, de X dado Υ em quaisquer instantes de tempo dados (de número finito). Começamos com a definição da (acima mencionada) partição do espaço de caminhos. Sejam $\{a_i\}_{i \geq 1}$ e $\{b_i\}_{i \geq 1}$ duas seqüências positivas crescentes de números reais, e $a_0 = b_0 = 0$. Dados $X_0 = x, Y_t = y$, definimos $\bar{x} = x \wedge y, \bar{y} = x \vee y$, e definimos os seguintes eventos: Começamos com a definição da (camada-mencionada) partição do espaço de caminhos. Sejam $\{a_i\}_{i=1}$ e $\{b_i\}_{i=1}$ duas seqüências positivas crescentes de números reais, e $a_0 = b_0 = 0$. Dados $X_0 = x, Y_t = y$, definimos $\bar{x} = x \wedge y, \bar{y} = x \vee y$, e definimos os seguintes eventos:

$$U_i = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \in [\bar{y} + b_{i-1}, \bar{y} + b_i] \right\} \cap \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} X_s > \bar{x} - a_i \right\}$$

$$L_i = \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \in (\bar{x} - a_i, \bar{x} - a_{i-1}] \right\} \cap \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} X_s < \bar{y} + b_i \right\}$$

e

$$D_i = U_i \cup L_i, i \geq 1. \quad (\text{A.4})$$

A partição requerida do espaço amostral consiste dos conjuntos $D_i, i \geq 1$. Introduziremos a variável aleatória discreta $I = I(x)$ tal que $\{I = i\} = D_i$. Note que $\{I \leq i\}$ é equivalente a $\{\bar{x} - a_i < X_s < \bar{y} + b_i, \text{ para todo } s \in [0, t]\}$. Portanto, definimos

$$\Upsilon = I, \text{ e } r(i) = \sup \{ \phi(z) : z \in (\bar{x} - a_i, \bar{y} + b_i) \}, i \in \mathbb{N}.$$

A figura 1 demonstra a construção. No restante da seção exploramos uma representação da CDF de I em termos de séries monótonas alternadas, para desenvolver um novo algoritmo para a simulação. Mostraremos como simular a ponte Browniano condicionada em I . Na seqüência, as vezes iremos chamar I de camada da ponte Browniana. Assim, nos referimos a

ponte Browniana condicionada em alguns valores de I como camadas da Ponte Browniana. O algoritmo concebido para a simulação de I pode ser facilmente modificado para desenvolver uma amostragem de rejeição da ponte Browniana por camadas, usando propostas da ponte Browniana. No entanto, o número de caminhos propostos até a primeira aceitação tem esperança infinita, onde a esperança é tomada com respeito aos caminhos propostos e I . Este problema é aliviado pela introdução de um amostrador de rejeição alternativo para a simulação da ponte Browniana por camadas.

A.2.1 Resultados Auxiliares

Nas subseções seguintes nós identificaremos eventos relevantes para a construção da ponte Browniana por camadas com probabilidade, p digamos, não é conhecida explicitamente mas pode ser expressa como o limite da seguinte série de estimações:

$$0 < S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < p < \cdots < S_5 < S_3 < S_1,$$

para alguma $\{S_j\}$ explicitamente conhecida. Para simplificar a exposição, consideremos a seguinte definição.

Definição A.2.1. Seja \mathcal{I} o subconjunto de seqüências de Cauchy com valores em \mathbb{R}_+ , tal que $\{S_j\} \in \mathcal{I}$ se e somente se

$$S_{2j} < S_{2j+2} < S_{2j+1} < S_{2j-1}, \text{ para todo } j \geq 1 \quad (\text{A.5})$$

Para nossa construção, iremos requerer simulações de eventos de probabilidade $p = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j$, onde $\{S_j\} \in \mathcal{I}$. Portanto, precisamos simular a variável aleatória binária $\mathbb{1}[U < p]$. Isto é realizado do seguinte modo. Seja

$$J = \inf \{j : j \text{ par, } S_j > U \text{ ou } j \text{ impar, } S_j < U\}$$

então

$$\mathbb{1}[U < p] = \mathbb{1}[J \text{ é par }].$$

Portanto, é preciso considerar somente J termos de $\{S_j\}$ para simular o evento de probabilidade p . A série alternada específica que aparece no nosso algoritmo e são apresentadas na seqüência, está convergindo em seu limite mais rápido que exponencialmente, então J será normalmente um valor muito pequeno.

Na seqüência, nós precisaremos simular eventos em que as probabilidades são combinações lineares ou proporções da seqüência alternada em \mathcal{I} . A seguinte proposição ilustra que, para o caso destas simples transformações, tais probabilidades podem ser expressas também como o limite de algumas seqüências facilmente identificáveis em \mathcal{I} , portanto os eventos correspondentes podem ser simulados como descrito abaixo.

Proposição 2. Seja $f : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$, para algum $m \in \mathbb{N}$, uma função C^1 com

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) \right| > 0 \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m, \text{ e } u \in \mathbb{R}_+^m.$$

Seja $\{S_j^i\} \in \mathcal{I}$, para todo $1 \leq i \leq m$, com $p_i = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j^i$, e defina $p = f(p_1, \dots, p_m)$. Considere a seqüência $\{T_j^i\}$ definida para cada $1 \leq i \leq m$ da seguinte forma:

$$T^i \equiv S^i \text{ se } \frac{\partial f}{\partial u_i} > 0, \text{ enquanto } T^i = S_{i+1}^i \text{ se } \frac{\partial f}{\partial u_i} < 0$$

Considere a sequência $\{S_j\}$ definida como:

$$S_j = f(T_j^2, T_j^2, \dots, T_j^m).$$

Então $\{S_j\} \in \mathcal{I}$ e $p = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j$.

Demonstração: Precisamos provar que (A.5) ocorre para $\{S_j\}$, dado que ocorre para cada $\{S_j^i\}$. A prova segue considerando a monotonicidade estrutural de f . Para a afirmação $S_{2j+1} < S_{2j-1}$, basta notar que quando calculamos S_{2j-1} , f toma como entrada valores mais altos (comparado a S_{2j+1}) ao longo das direções em que f é crescente e valores mais baixos ao longo das direções em que f é decrescente. O caso é análogo para $S_{2j} < S_{2j+2}$. ■

O Máximo Absoluto de uma ponte Browniana

Para $K > |u_1| \vee |u_2|$, seja $\gamma(s, u_1, u_2, K)$ denota a probabilidade sobre $\mathbb{B}\mathbb{B}(s; u_1, u_2)$ em que um caminho não sai do intervalo $[-K, K]$. Esta probabilidade tem uma expressão conhecida em termos de uma série infinita, um resultado que pode ser rastreado até Doob (1949), embora veja Pötzelberger e Warg (2001) para uma referência mais recente. Definamos para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_j(s, u_1, u_2, K) &= \exp \left\{ -\frac{2}{s} [2Kj - (K + u_1)] [2Kj - (K + u_2)] \right\} \\ \bar{\tau}_j(s, u_1, u_2, K) &= \exp \left\{ -\frac{2j}{s} [4K^2j + 2K(u_1 - u_2)] \right\} \end{aligned}$$

Então, o Teorema 3, de Pötzelberger e Wang (2001) implica

$$\gamma(s, u_1, u_2, K) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \{ \sigma_j(s, u_1, u_2, K) - \tau_j(s, u_1, u_2, K) \} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \bar{\sigma}_j(s, u_1, u_2, K) + \bar{\sigma}_j(s, -u_1, -u_2, K) \\ \tau_j &= \bar{\tau}_j(s, u_1, u_2, K) + \bar{\tau}_j(s, -u_1, -u_2, K) \end{aligned}$$

Observe que devido as propriedades simétricas da ponte Browniana, (A.6) pode ser usada para calcular a probabilidade que uma ponte Browniana arbitrária não escapa de nenhum intervalo dado. Simulações de eventos de probabilidade (A.6) podem ser alcançadas conforme descrito anteriormente devido a proposição abaixo.

Proposição 3. Seja $\{S_j\}$ construída como se segue.

$$S_{2j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} (\sigma_k - \tau_k) + \sigma_j, \quad S_{2j} = S_{2j-1} - \tau_j, \quad j \geq 1,$$

onde $\sigma_j = \bar{\sigma}_j(s, u_1, u_2, K)$, $\tau_j = \bar{\tau}_j(s, u_1, u_2, K)$. Então $\{S_j\} \in \mathcal{I}$ para qualquer $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $s > 0$, e $K > |\mu_1| \vee |\mu_2|$.

Demonstração: Note que pela definição de $\bar{\sigma}_j$ e $\bar{\tau}_j$, temos $\bar{\sigma}_j > \bar{\tau}_j > \bar{\sigma}_{j+1}$, para todo $j \geq 1$. Assim, $\sigma_k > \tau_k > \sigma_{k+1}$, para todo $1 \leq k \leq j-1$, resultando em $\sigma_k - \tau_k > 0$. Logo, como

$$S_{2j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} (\sigma_k - \tau_k) + \sigma_j,$$

e

$$S_{2(j+1)-1} = S_{2j+1} = \sum_{k=1}^j (\sigma_k - \tau_k) + \sigma_{j+1}$$

daí, $S_{2j+1} = S_{2j-1} - \tau_j + \sigma_{j+1}$, onde $-\tau_j + \sigma_{j+1} < 0$. Assim, $S_{2j+1} < S_{2j-1}$. Por hipótese, $S_{2j} = S_{2j-1} - \tau_j$, donde $-\tau_j < -\tau_j + \sigma_{j+1}$. Portanto, $S_{2j} < S_{2j+2} < S_{2j+1} < S_{2j-1}$, para todo $j \geq 1$ e o resultado segue diretamente. ■

Probabilidades de acerto da ponte de Bessel

Considere algum $u_1 > 0, u_2 > 0$ e $K > u_1 \vee u_2$. Seja $\delta(s, u_1, u_2, K)$ que denota a probabilidade sobre a lei da ponte de Bessel $S(s; u_1, u_2)$ que um caminho não ultrapassa K . Similarmente, para $K < L$, denotamos $\delta(s, u_1, u_2, K, L)$ a probabilidade sobre $\mathbb{S}(s; u_1, u_2)$ que um caminho condicionado para ficar abaixo de L , que não ultrapassa K . A derivação dessas probabilidades explora a representação de uma ponte de Bessel como uma ponte Browniana condicionada a permanecer positiva. Portanto para $u_1 > 0$ e omitindo os argumentos da medida da ponte Browniana,

$$\begin{aligned} \delta(s, u_1, u_2, K; L) &= \frac{\mathbb{BB}[X \text{ não sai de } (0, K)]}{\mathbb{BB}[X \text{ não sai de } (0, L)]} \\ &= \frac{\gamma(s, u_1 - \frac{K}{2}, u_2 - \frac{K}{2}, \frac{K}{2})}{\gamma(s, u_1 - \frac{L}{2}, u_2 - \frac{L}{2}, \frac{L}{2})} \end{aligned}$$

$$\delta(s, u_1, u_2, K) = \lim_{L \rightarrow \infty} \delta(s, u_1, u_2, K; L) = \frac{\gamma(s, u_1 - \frac{K}{2}, u_2 - \frac{K}{2}, \frac{K}{2})}{1 - \exp\{-\frac{2u_1 u_2}{s}\}}$$

Nesta configuração, $\mathbb{BB} = \mathbb{BB}(s; u_1, u_2)$. Para o caso especial $u_1 = 0$, tomamos o limite $u_1 \rightarrow 0$ na expressão acima e encontramos que,

$$\begin{aligned} \delta(s, 0, u_2, K; L) &= \frac{u_2 - \sum_{j=1}^{\infty} \{\zeta_j(s, u_2, K) - \xi_j(s, u_2, K)\}}{u_2 - \sum_{j=1}^{\infty} \{\zeta_j(s, u_2, L) - \xi_j(s, u_2, L)\}}, \\ \delta(s, 0, u_2, K) &= 1 - \frac{1}{u_2} \sum_{j=1}^{\infty} \{\zeta_j(s, u_2, K) - \xi_j(s, u_2, K)\}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_j(s, u_2, K) &= (2Kj + u_2) \exp\{-2Kj(Kj + u_2)/s\} \\ \zeta_j(s, u_2, K) &= \xi_j(s, -u_2, K). \end{aligned}$$

Simulação de eventos de probabilidade $\delta(s, u_1, u_2, K; L)$ e $\delta(s, u_1, u_2, K)$ pode ser facilmente alcançado para qualquer $u_1, u_2 > 0, L > K > u_1 \vee u_2$, explorando a proposição 2. Para o caso limitante $u_1 = 0$, adicionalmente requeremos o seguinte resultado.

Proposição 4. Seja $\{S_j\}$ construída como se segue

$$S_{2j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} (\zeta_k - \xi_k) + \zeta_j, \quad S_{2j} = S_{2j-1} - \xi_j, \quad j \geq 1,$$

onde $\zeta_j = \zeta_j(s, u_2, K)$, $\xi_j = \xi_j(s, u_2, K)$, com $K > u_2 > 0$. Se $3K^2 - s > 0$, então $\{S_j\} \in \mathcal{I}$.

Demonstração: Note que quando $3K^2 - s > 0$, então $f(u) := \zeta_j(s, u, K)/\xi_j(s, u, K)$ é crescente com $f(0) = 1$. Portanto, $\zeta_j > \xi_j$ para todos os valores apropriados de seus argumentos. Mostraremos agora que $\xi_j > \zeta_{j+1}$. A razão ξ_j/ζ_{j+1} é crescente em j então é suficiente mostrar que $\xi_1 > \zeta_2$. Note que quando $8K^2 - s > 0$, então $g(u) := \xi_1(s, u, K)/\zeta_2(s, u, K)$ é decrescente com $g(K) = 1$, portanto $\xi_1 > \zeta_2$. Tendo estabelecido o ordenamento $\zeta_j > \xi_j > \zeta_{j+1}$, o resultado requerido segue diretamente. ■

A restrição $3K^2 > s$ não afetará a aplicabilidade geral do algoritmo que se segue. Como mostramos na sequência, o usuário pode facilmente especificar um limite superior e inferior na possível faixa de valores de K e s respectivamente de modo que está garantido que $3K^2 > s$.

A.2.2 Construção das camadas da ponte Browniana

Retornamos agora para a configuração que introduzimos no início desta seção. A função distribuição de I pode ser escrito como

$$\begin{aligned} F(i) &:= \mathbb{P}[I \leq i] \\ &= \gamma \left(t, \frac{x-y}{2} + \frac{a_i - b_i}{2}, \frac{y-x}{2} + \frac{a_i - b_i}{2}, \frac{|y-x|}{2} + \frac{a_i + b_i}{2} \right), i \geq 1 \end{aligned}$$

com $F(0) = 0$. Note que $\mathbb{P}[I = i] = \mathbb{P}[F(i-1) < U < F(i)]$, para uma $U \sim U_n[0, 1]$, portanto I pode ser simulado como se segue. Para qualquer $i \geq 1$, seja $\{S_j^i\} \in \mathcal{I}$ a sequência alternada convergindo para $F(i)$, como obtido da representação de γ em (A.6). Também definimos a sequência $\{S_j^0\}$ com $S_j^0 = 0$ para todo $j \geq 1$. Então, definimos $I = i$ quando $S_j^{i-1} < U < S_{j+1}^i$, para algum j par.

Simulando a camada I da ponte Browniana, continuamos para o passo 4. do EA, que é para simular o resultado da camada da ponte Browniana na coleção finita de instantes de tempo determinados pelo processo de Poisson. A abordagem mais óbvia para fazer isso é usar amostragem de rejeição com candidatos da $\mathbb{BB}(t; x, y)$: para uma proposta da realização condicionada de I . Contudo, esta solução é teoricamente e praticamente inviável se N_0 é o número de tentativas até (e incluindo) o primeiro sucesso quando:

$$\mathbb{E}[N_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_0 | I]] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbb{P}[I = i]} \times \mathbb{P}[I = i] = \infty$$

Portanto, adotamos um procedimento alternativo de amostragem de rejeição no qual propomos trajetórias que são prováveis de serem aceitas. Para a construção proposta, consideramos camadas simétricas, isto é, escolhemos $a_i = b_i$, $i \geq 1$. A produção poderia continuar mesmo no caso geral, contudo esse ajuste especificado pelo usuário vai simplificar as fórmulas que aparecem em seguida. Também não existe razão óbvia para tomar diferentes alturas do comportamento superior e inferior da ponte Browniana.

Seja \mathbb{BB}_{D_1} a lei da camada de destino da ponte Browniana. Proporemos de uma mistura de duas pontes Brownianas condicionadas. Especificamente, considere os eventos

$$\overline{M}_i = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \in [\bar{y} + a_{i-1}, \bar{y} + a_i] \right\}, \quad \underline{M}_i = \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \in (\bar{x} - a_i, \bar{x} - a_{i-1}] \right\}, i \geq 1.$$

Sejam $\mathbb{BB}_{\overline{M}_I}$ e $\mathbb{BB}_{\underline{M}_I}$ as leis da ponte Browniana $\mathbb{BB}(t; x, y)$ restrita a \overline{M}_I e \underline{M}_I respectivamente. Nosso algoritmo de amostragem de rejeição usa trajetórias candidatas de

$$\mathbb{P}_{D_I} := \frac{1}{2} \mathbb{BB}_{\overline{M}_I} + \frac{1}{2} \mathbb{BB}_{\underline{M}_I}$$

Esta medida proposta força o mínimo ou o máximo das trajetórias realizadas para estarem no intervalo correto, que é o intervalo onde o máximo ou o mínimo da trajetória de destino estão. Mais analiticamente, lembre a definição do evento condicionante D_I de (A.4): $D_I = U_I \cup L_I$. A definição dos vários eventos sugere que a ponte Browniana de $\overline{M_I}$ (resp. de $\underline{M_I}$) são candidatos extremamente bons para a ponte de U_I (resp. de L_I).

O seguinte teorema deriva a probabilidade de aceitação apropriada. Para um subconjunto geral de trajetórias, digamos Δ , $\mathbb{B}[\Delta]$ é a probabilidade sobre $\mathbb{B}(t; x, y)$ que uma trajetória está em Δ .

Teorema A.2.1. \mathbb{B}_{D_I} é absolutamente contínuo com respeito a \mathbb{P}_{D_I} com densidade

$$\frac{d\mathbb{B}_{D_I}}{d\mathbb{P}_{D_I}}(X) = \frac{2\mathbb{B}[\overline{M_I}]}{\mathbb{B}[D_I]} \times \frac{\mathbb{1}[X \in D_I]}{1 + \mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I]}.$$

Demonstração: Basta usar a ponte Browniana não condicionada $\mathbb{B} = \mathbb{B}(t; x, y)$ como uma medida referência. Então

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{B}_{D_I}}{d\mathbb{P}_{D_I}}(X) &= \frac{\frac{d\mathbb{B}_{D_I}}{d\mathbb{B}}(X)}{\frac{1}{2} \frac{d\mathbb{B}_{\overline{M_I}}}{d\mathbb{B}}(X) + \frac{1}{2} \frac{d\mathbb{B}_{\underline{M_I}}}{d\mathbb{B}}(X)} \\ &= \frac{2\mathbb{1}[X \in D_I] \mathbb{B}[D_I]^{-1}}{\mathbb{1}[X \in \overline{M_I}] \mathbb{B}[\overline{M_I}]^{-1} + \mathbb{1}[X \in \underline{M_I}] \mathbb{B}[\underline{M_I}]^{-1}} \end{aligned}$$

Pela simetria das camadas, é claro que $\mathbb{B}[\overline{M_I}] = \mathbb{B}[\underline{M_I}]$, e a expressão da densidade requerida segue diretamente. ■

Assuma que N é o número de trajetórias propostas até a primeira aceitação. Então

$$\mathbb{E}[N|I] = \frac{2\mathbb{B}[\overline{M_I}]}{\mathbb{B}[D_I]} \leq \frac{2\mathbb{B}[\overline{M_I}]}{\mathbb{B}[U_I]} \leq \frac{2}{\mathbb{B}[\inf_{0 \leq s \leq t} X_s > \bar{x} - a_1]},$$

de modo que, mesmo para moderado a_1 , $\mathbb{E}[N]$ será pequeno.

Note também que selecionando camadas simétricas ($a_i = b_i$) simplifica a expressão para a probabilidade de aceitação da amostragem de rejeição desde que, quando este é o caso, $\mathbb{B}[\overline{M_I}] = \mathbb{B}[\underline{M_I}]$; veja a prova do teorema acima. Nosso algoritmo com probabilidade 1/2 propõe uma trajetória $X \sim \mathbb{B}_{\overline{M_I}}$ e com probabilidade igual, uma trajetória $X \sim \mathbb{B}_{\underline{M_I}}$. A simulação de $\mathbb{B}_{\underline{M_I}}$ (e por simetria de $\mathbb{B}_{\overline{M_I}}$) pode ser facilmente realizada seguindo a decomposição de uma ponte Browniana em seu mínimo em termos de duas pontes de Bessel. O cálculo da probabilidade de aceitação X requer também a simulação das indicadoras $\mathbb{1}[X \in D_I]$ e $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I]$ que serão realizadas com base nos resultados sobre tempo de acerto de uma ponte de Bessel. Analiticamente, continuamos como se segue.

Primeiro, simulamos o mínimo m da ponte Browniana proposta X condicionalmente estando em $(\bar{x} - a_I, \bar{x} - a_{I-1}]$, e então o tempo τ quando o mínimo é atingido. Lembre que o caminho da camada alvo, também portanto o caminho proposto, precisa ser simulado somente nos instantes de tempo do processo de Poisson $\Phi_{r(\Upsilon)}$. No caso simples quando $\Phi_{r(\Upsilon)}$ não tem pontos, a variável binária $\mathbb{1}[X \in D_I]$ é fácil de simular, pois é igual a 1 com probabilidade

$$\delta(\tau, 0, \bar{x} - m, \bar{y} + a_I - m) \times \delta(t - \tau, 0, \bar{y} - m, \bar{y} + a_I - m).$$

Se $\mathbb{1}[X \in D_I] = 0$ a trajetória X é rejeitada. No caso oposto, prosseguimos para a indicadora $\mathbb{1}[X \in U_I \cap D_I]$. Condicionalmente em $\mathbb{1}[X \in D_I] = 1$, é verdade que $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I] = 0$,

com probabilidade

$$\begin{aligned} & \delta(\tau, 0, \bar{x} - m, \bar{y} + a_{I-1} - m; \bar{y} + a_I - m) \\ & \times \delta(t - \tau, 0, \bar{y} - m, \bar{y} + a_{I-1} - m; \bar{y} + a_I - m). \end{aligned}$$

Se $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I] = 1$, então a trajetória proposta é aceita com prob. 1/2, caso contrário com prob. 1. No caso geral quando $\Phi_{r(\Upsilon)}$ tem um número de pontos positivo, o procedimento é simular. Simulamos, m, τ , e a localização da trajetória proposta nos instantes de tempo determinados per $\Phi_{r(\Upsilon)}$. Condicionalmente nesta informação, a trajetória é recuperada como um produto de pontes de Bessel. Portanto, a distribuição das variáveis binárias $\mathbb{1}[X \in D_I]$ e $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I]$ pode ser expressa em termos de produtos de probabilidades de acerto da ponte de Bessel e pode ser simulada seguindo o método da série alternada.

Para mais concretude, podemos formular um pseudoalgoritmo descrevendo o passo 4. do EA 3. Vamos precisar do máximo de uma trajetória $m^* := \sup \{X_s; s \in [0, t]\}$.

Exact Algorithm

Simulação de $\{X_{\mathcal{X}_i}; 1 \leq i \leq |\Phi_{r(\Upsilon)}|\}$ de $\mathbb{Z}|X_t = y, I$.

- 1 Para $X \sim \mathbb{BB}(t; x, y)$, simula $\{X_{\mathcal{X}_i}; 1 \leq i \leq |\Phi_{r(\Upsilon)}|\}$ junto com o mínimo (τ, m) , com prob. 1/2 ou o máximo (τ, m^*) , com prob. 1/2, condicionalmente em $m \in (\bar{x} - a_I, \bar{x} - a_{I-1})$ ou $m^* \in [\bar{y} + a_{I-1}, \bar{y} + a_I]$;
- 2 Se $\mathbb{1}[X \in D_I] = 0$, rejeita X e volta para 4.1;
- 3 Se $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I] = 0$ (resp. 1) retorna $\{X_{\mathcal{X}_i}; 1 \leq i \leq |\Phi_{r(\Upsilon)}|\}$ com prob. 1 (resp. 1/2) Caso contrário, rejeita X e volta para 4.1.

Para o passo 2, note que, no caso em que o mínimo m é simulado, $\mathbb{1}[X \in D_I] = 1$ é um evento de probabilidade

$$\prod_{i=1}^{|\Phi_{r(\Upsilon)}|+2} \delta(s_i - s_{i-1}, X_{s_{i-1}} - m, X_{s_i} - m, \bar{y} + a_I - m),$$

onde $\{S_i; 0 \leq i \leq |\Phi_{r(\Upsilon)}| + 2\}$ é uma ordem crescente de $\{0, t, \tau\} \cup \{X_{\mathcal{X}_i}; 1 \leq i \leq |\Phi_{r(\Upsilon)}|\}$. Para o caso do máximo m^* , deve-se apenas trocar cada termos no produto acima com $\delta(s_i - s_{i-1}, m^* - X_{s_{i-1}}, m^* - X_{s_i}, m^* - \bar{x} + a_I)$. Então para o passo 4.3, o evento $\mathbb{1}[X \in U_I \cap L_I] = 0$ é de probabilidade:

$$\prod_{i=1}^{|\Phi_{r(\Upsilon)}|+2} \delta(s_i - s_{i-1}, X_{s_{i-1}} - m, X_{s_i} - m, \bar{y} + a_{I-1} - m; \bar{y} + a_I - m)$$

para o caso de m , com $\delta(s_i - s_{i-1}, m^* - X_{s_{i-1}}, m^* - X_{s_i}, m^* - \bar{x} + a_{I-1}; m^* - \bar{x} + a_I)$ trocando os termos no produto acima para o caso de m^* .

Referências

- [1] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O. e Roberts, G. O. "A new factorisation of diffusion measure and sample path reconstruction". Em: *Methodology and Computing in Applied Probability* 10.1 (2008), pp. 85–104.
- [2] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O. e Roberts, G. O. "Monte Carlo maximum likelihood estimation for discretely observed diffusion processes". Em: *The Annals of Statistics* 37 (2009), pp. 223–245.
- [3] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O. e Roberts, G. O. "Retrospective exact simulation of diffusion sample paths with applications". Em: *Bernoulli* 12.6 (2006), pp. 1077–1098.
- [4] Beskos, A. e Roberts, G. O. "Exact simulation of diffusions". Em: *The Annals of Applied Probability* 15.4 (2005), pp. 2422–2444.
- [5] Beskos, A. et al. "Exact and computationally efficient likelihood-based inference for discretely observed diffusion processes (with discussion)". Em: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* 68.3 (2006), pp. 333–382.
- [6] Boer, S. G. *The Lamperti Transform: Applications to Stochastic Local Volatility Models*. Delft University of Technology, 2020.
- [7] Brzezniak, Z. e Zastawniak, T. *Basic Stochastic Processes – A Course Through Exercises*. Springer undergraduate mathematics series, 2000.
- [8] Casella, B. e Roberts, G. O. "Exact simulation of jump-diffusion processes with Monte Carlo applications". Em: *Methodology and Computing in Applied Probability* 12.3 (2010).
- [9] Egorov, A. V., Li, H. e Xu, Y. "Maximum likelihood estimation of time-inhomogeneous diffusions". Em: *Journal of Econometrics* 114 (2003), pp. 107–139.
- [10] Gonçalves, F. B. e Gamerman, D. "Exact Bayesian inference in spatiotemporal Cox processes driven by multivariate Gaussian processes". Em: *In preparation* (2014).
- [11] Gonçalves, F. B. e Roberts, G. O. "Exact simulation problems for jump-diffusions". Em: *Methodology and Computing in Applied Probability* 16 (2014), pp. 907–930.
- [12] Gonçalves, F. B., Roberts, G. O. e Łatuszyński, K. G. "Exact Bayesian inference for diffusion driven Cox processes". Em: *In preparation* (2014).
- [13] Gonçalves, F. B., Roberts, G. O. e Łatuszyński, K. G. "Exact Monte Carlo likelihood-based inference for jump-diffusion processes". Em: *In preparation* (2014).
- [14] Kingman, J. C. *Poisson Process*. vol. 3 de Oxford : Clarendon Press, 1993.
- [15] Kingman, J. F. C. *Poisson Processes*. New York: Oxford University Press, 1993.
- [16] Kloeden, P. E. e Platen, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 2011.

-
- [17] Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Springer, 2000.
- [18] Steele, J. M. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2000.