

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Medição da Fase Topológica Fracionária
em qudits fotônicos codificados
espacialmente

Artur Araújo Matoso

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte

Abril de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Medição da Fase Topológica Fracionária
em qudits fotônicos codificados
espacialmente

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências

Artur Araújo Matoso

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte

Abril de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M425m Matoso, Artur Araújo.
Mediação da fase topológica fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente / Artur Araújo Matoso.
– 2018.
80f.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Física.
Bibliografia: f. 76-80.

1. Óptica quântica. 2. Informação quântica. 3. Topologia.
4. Interferometria . 5. Qubits. Computação quântica. I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535(043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3409 5637
(xx) (31) 3409 5633
Fax (xx) (31) 3409 5688
(xx) (31) 3409 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 337ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR ARTUR ARAÚJO MATOSO orientado pelo professor Sebastião José Nascimento de Pádua para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 09:00 horas de dez de abril de dois mil e dezoito, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Leonardo Teixeira Neves** (Departamento de Física/UFMG), **Reinaldo Oliveira Vianna** (Departamento de Física/UFMG), **Marcos Cesar de Oliveira** (Instituto de Física "Gleb Wataghin"/UNICAMP) e **Virgílio de Carvalho dos Anjos** (Departamento de Física/UFJF) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **ARTUR ARAÚJO MATOSO** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de **"Medição da Fase Topológica Fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente"**. Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 10 de Abril de 2018.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Marcos Cesar de Oliveira
Instituto de Física "Gleb Wataghin"/UNICAMP

Prof. Leonardo Teixeira Neves
Departamento de Física/UFMG

Prof. Virgílio de Carvalho dos Anjos
Departamento de Física/UFJF

Prof. Reinaldo Oliveira Vianna
Departamento de Física/UFMG

Candidato

Aos meus pais, minha irmã e minha esposa

Agradecimentos

A Deus, porque vivo com fé no Seu amor.

Aos meus pais e minha irmã, principais responsáveis por eu ter condições de cursar a pós-graduação.

A minha esposa Júlia, meu amor, meu grande amor, que sempre foi compreensiva e colaborativa com os meus planos.

A minha família que sempre e muito me incentivou, em especial minhas tias/mães Cláudia e Clarete, minhas madrinhas Messe e Zelma e meu padrinho Vanderlei, e meus primos/irmãos Christian e Gabriel, que estiveram mais próximos de mim nos momentos mais importantes.

Aos meus amigos Ana, Peteco, Jão e Alice, amizades inabaláveis.

Aos meus amigos da física Guilhermito, Érico, Barbrita (Flower), Wawa, Aleja, Breno, Zé, Xóchitl, Regiane, Ingrid e Karol que se afastaram do departamento mas não do meu coração.

Aos meus amigos Barbrita (Black), Gil, Davi, Denise, Rafael, Paulinha, Renan, Ana, Dani, Helena, Thiagueta, Betão, Sheillitcha, Erick, Xabláu, e Pumba que estão comigo desde a graduação ou o mestrado. Também aos demais amigos do Lab, da sala e do Enlight que fiz durante este doutorado.

Ao meu orientador Sebastião, a quem admiro muito por ser um pesquisador e professor tão dedicado e também um amigo.

Ao professor Zelaquett, que nos propôs este trabalho e colaborou conosco desde o meu mestrado até agora.

As agências de fomento CNPq, Capes, Fapemig e INCT, pelo financiamento da pesquisa.

“Why so serious?”

Joker

Resumo

Neste trabalho realizamos dois experimentos para observar a fase topológica fracionária em sistemas de dois qudits fotônicos. O grau de liberdade em que os qudits são codificados é a posição transversal de pares de fótons gerados pela conversão paramétrica descendente espontânea após serem transmitidos por fendas múltiplas. Os fótons neste fenômeno são quanticamente correlacionados em momento e energia. Inicialmente revisamos a teoria sobre a origem das fases adquiridas pelos estados quânticos de um e de dois qubits ao evoluir, onde identificamos as fases dinâmica, geométrica e topológica. Examinamos em seguida a generalização da fase topológica para dois qudits, e discutimos a sua relação com o conceito de conexidade de um espaço. Mostramos então uma forma de medir a fase topológica, considerando que ela deve aparecer como uma fase relativa entre dois estados quânticos que interferem. Realizamos a medição construindo um interferômetro óptico com um modulador espacial de luz inserido nele para implementar as operações unitárias necessárias. A polarização é utilizada como um grau de liberdade auxiliar para que as operações atuem de forma condicional. Os resultados se mostram próximos às previsões teóricas, demonstrando a dependência da fase com a dimensão do espaço de Hilbert do estado. Em uma segunda montagem medimos a fase topológica fracionária para qudits sem utilizar um interferômetro longitudinal. Uma nova fonte de pares de fótons emaranhados em polarização é utilizada nesta nova montagem. O emaranhamento no grau de liberdade auxiliar, polarização, é utilizado como um recurso para eliminar o interferômetro, propiciando uma melhora significativa na visibilidade das curvas de interferência medidas, e um grande aumento na relação sinal/ruído. Nesta nova montagem, fomos capazes de realizar operações unitárias em ambas as partes do sistema de dois qudits.

Abstract

In this work we performed two experiments to observe the fractional topological phases in two qudits photonic systems. The qudits are encoded in the transverse position degree of freedom of photon pairs generated by the spontaneous parametric down conversion after being transmitted through multiple slits. The photons in this phenomenon are quantum correlated in momentum and energy. Initially we review the theory about the origin of the phases acquired by the evolving quantum states of one and two qubits, where we identify the dynamic, the geometric and the topological phases. Then we examine the generalization of topological phases for two qudits, and discuss its relation with the concept of connectedness of a space. Next we show a way to measure the topological phase, considering that it must appear as a relative phase between two interfering quantum states. To realize the measurement we build an optical interferometer with a spatial light modulator inside it to implement the necessary unitary operations. The polarization is used as an auxiliary degree of freedom for the operations to act conditionally. The results are close to the theoretical predictions, showing the dependence of the phase with the Hilbert space dimension of the state. In a second setup we measure the topological phase for qudits without using a longitudinal interferometer. A new source of polarization entangled photon pairs is used in this new setup. The entanglement in the auxiliary degree of freedom, polarization, is used as a resource to eliminate the interferometer, propitiating a significant improvement in the visibility of the measured interference curves, and a large increase in the signal to noise ratio. In this new setup, we are also capable of realize the unitary operations in both parts of the two qubit system.

Sumário

Agradecimentos	5
Resumo	7
Abstract	8
1 Introdução	11
2 Fundamentos Teóricos	15
2.1 Representação geométrica e fases para um e dois qubits	15
2.1.1 Representação geométrica e fases para um qubit	16
2.1.2 Representação geométrica para dois qubits	18
2.1.3 Fases para dois qubits	20
2.2 Cálculo da FTF para dois qubits	25
2.3 Natureza topológica da fase fracionária	28
3 Como medir a FTF	30
3.1 FTF como fase relativa em uma interferência	30
3.2 Previsões teóricas	34
4 Resultados	38
4.1 Experimento com interferômetro Sagnac	38
4.1.1 Fonte de pares de fótons emaranhados em caminho transversal	38
4.1.2 Interferômetro tipo Sagnac implementando operações locais	40
4.1.3 Curva de interferência através da detecção em coincidência	43
4.1.4 Verificação da indistinguibilidade em caminho longitudinal e das correlações espaciais em caminho transversal dos pares de fótons	46
4.1.5 Discussão dos resultados	50
4.2 Experimento com fonte emaranhada em polarização	52
5 Conclusão	59
6 Perspectivas	62

A Cálculo da fase dinâmica e da FG para dois qudits	66
B Cálculo da transformação realizada pelo deslocador de fase	73
Referências Bibliográficas	76

Capítulo 1

Introdução

Historicamente, o caminho até a Fase Topológica Fracionária (FTF) começa com a chamada Fase Geométrica (FG). Esta foi introduzida em 1956 por S. Pancharatnam[1] em um trabalho sobre transformações na polarização da luz em óptica clássica. Seu surgimento no contexto da mecânica quântica se deu com o Físico M. V. Berry[2] em 1984. Berry investigava a evolução de um estado quântico sob a ação de um Hamiltoniano dependente do tempo, sendo que em seu desenvolvimento ele considerou que a dependência temporal do Hamiltoniano e de seus autoestados se dava através de um conjunto de parâmetros modificados segundo as condições da chamada aproximação adiabática. Berry percebeu que neste caso, além da fase relacionada à evolução unitária associada ao Hamiltoniano, referida como fase dinâmica, o estado adquire também uma outra fase relacionada ao caminho definido no espaço de parâmetros à medida em que eles são modificados, referida como fase geométrica. Posteriormente em 1987, Y. Aharonov e J. Anandan[3] chegaram em uma expressão chave para a FG sem precisar considerar a parametrização e a aproximação adiabática, generalizando-a para uma evolução temporal qualquer. A interpretação geométrica é então transferida do espaço de parâmetros para o chamado espaço de Hilbert projetivo. De forma não rigorosa, podemos dizer que o espaço de Hilbert projetivo é uma “compactação” do espaço de Hilbert que descreve o sistema quântico. Todos os vetores de estado no espaço de Hilbert que diferem pela multiplicação de um número complexo são levados no mesmo ponto do espaço de Hilbert projetivo, indicando que eles representam o mesmo estado físico. Portanto, dado que combinações convexas não são tomadas, cada ponto do espaço de Hilbert projetivo irá representar um estado puro. Para o espaço de Hilbert de dimensão 2 por exemplo, o espaço de Hilbert projetivo é mapeado na chamada esfera de Bloch¹. Portanto, quando

¹No caso de um sistema óptico, quando é utilizado o grau de liberdade de polarização, temos a esfera de Poincaré.

um qubit² evolui, ele percorre um certo caminho na esfera de Bloch, e agora é a este caminho ao qual a FG se relaciona.

Na mesma época surgiram trabalhos experimentais sobre a observação da FG[4–6], onde já se pode notar o uso do termo fase topológica. Porém devemos deixar claro que o emprego do termo foi feito em um sentido diferente. Nestas referências “topológica” se refere à característica da FG de depender somente do caminho percorrido pelo estado no espaço de Hilbert projetivo, mesmo que a transformação tenha sido promovida por dinâmicas diferentes. Já no caso da FTF, como veremos no capítulo 2, “topológica” se relaciona ao conceito de conexidade de um espaço. Em 1991, Kwiat e Chiao[7] começaram a explorar estados bipartidos para observar a FG utilizando um sistema fotônico e interferometria de dois fótons, garantindo assim que a FG se manifesta em um sistema óptico em nível quântico. Em seguida Brendel *et. al.*[8] e Shih e Strekalov[9] utilizaram sistemas semelhantes em seus trabalhos, demonstrando que a fase adquirida pelo sistema global depende da polarização inicial de cada fóton (o sistema estava codificado neste grau de liberdade) e que ela pode ser obtida aplicando-se localmente etapas diferentes da transformação em cada fóton. Contudo, a idéia destas referências ainda consistia em observar a FG adquirida através do caminho percorrido por uma das partes do sistema global no espaço de Hilbert projetivo correspondente àquela parte.

Somente em 2000, a primeira evidência mais clara da FTF aparece em dois trabalhos, um de Sjöqvist[10] e um de Sjöqvist e Hessmo[11], que investigavam a influência do emaranhamento na FG. Eles demonstram que para um estado maximamente emaranhado (MES) de dois qubits, a FG só pode ser igual a 0 ou π . Mais tarde, Milman e Mosseri[12] demonstraram que estes dois valores possíveis estão relacionados a dois tipos de caminho que podem ser traçados na chamada bola $SO(3)$ ³. LiMing e Tang[13] sintetizam em seu trabalho a existência de uma correspondência entre os MES de dois qubits e os pontos dessa bola. Um dos tipos de caminho evidencia o fato de que o espaço $SO(3)$ é dito ser não-simplesmente conexo, isto é, ele possui uma topologia não trivial, o que leva à fase π . Este resultado é reforçado em mais um trabalho de Milman[14], demonstrando portanto que em certos casos a FG pode apresentar uma natureza topológica. No ano seguinte, em 2007, dois trabalhos experimentais[15, 16] observaram a FTF para dois qubits, até que em 2011 Oxman e Khoury[17] a generalizaram para dois qudits. Nesta referência o espaço não-simplesmente conexo em questão é o das matrizes $SU(d)$ ⁴ que obedecem a seguinte regra de identificação: uma nova matriz obtida multiplicando-se a

²Um qubit é a nomenclatura utilizada para um sistema quântico de dois níveis, e qudit para um sistema quântico de d níveis.

³O grupo especial ortogonal, denotado por $SO(d)$, é o grupo das matrizes $d \times d$ ortogonais e que possuem determinante igual a 1. Em 3 dimensões elas descrevem todas as rotações de \mathbb{R}^3 em torno da origem, e por isso é chamado grupo de rotação, cuja representação geométrica é a bola $SO(3)$

⁴O grupo especial unitário, denotado por $SU(d)$, é o grupo das matrizes $d \times d$ unitárias e que possuem determinante igual a 1.

matriz original por um fator de fase que não altera o determinante é considerada igual à matriz original. Para o caso de dois qubits (onde $d=2$) essas matrizes $SU(2)$ de fato estão relacionadas com a bola $SO(3)$.

A partir daí vários trabalhos surgiram nessa área, tratando a FTF para multiqubits[18], propondo experimentos para medi-la em sistemas fotônicos de qudits[19] e multiqubits[20], generalizando a teoria para dois qudits com dimensões diferentes[21], e explorando experimentalmente sua dependência com o emaranhamento para dois qubits[22]. Podemos perceber que as atenções se voltaram para os sistemas multipartidos, uma vez que o espaço que os descreve pode possuir uma topologia não trivial, isto é, o espaço que descreve esse tipo de sistema pode ser não-simplesmente conexo. Nos casos em que de fato o sistema é descrito por um espaço não-simplesmente conexo, a manifestação da FTF pode ser observada. Ela surge portanto como uma consequência natural da dinâmica de evolução dos estados multipartidos, e por isso há um interesse fundamental em se investigar a FTF. Além disso, uma vez estabelecida uma ou mais formas de se medi-la, estudos futuros podem determinar se a FTF possui potencial de aplicação em implementações de portas lógicas para computação quântica, como na porta $\pi/8$ por exemplo, que é uma das chamadas portas quânticas universais. Para aplicações desse tipo é importante verificar se a medição da FTF é robusta à decoerência sofrida pelo sinal utilizado na observação ao ser transmitido por um canal ruidoso. Existem algumas evidências[23] de que isto realmente ocorre, o que abre perspectivas de novos trabalhos experimentais. Há ainda uma conjectura (ver conclusão em [19]) sobre se a FTF estaria relacionada à alguma testemunha de dimensionalidade, dado que seu valor depende das dimensões das partes do sistema multipartido, como veremos no capítulo 2.

Uma revisão em 2015 sobre o assunto[24] apontava que nenhuma verificação experimental para qudits havia sido feita até aquele momento, mas em 2016 nós do laboratório de Óptica Quântica coordenado pelo professor Sebastião de Pádua na Universidade Federal de Minas Gerais, em colaboração com os professores Luis Oxman e Antônio Khoury da Universidade Federal Fluminense, pudemos medir a FTF[25] para dois qudits maximamente emaranhados com dimensões $d = 2, 3$ e 4 . Nesta tese vamos descrever este trabalho no qual utilizamos também um sistema fotônico e interferometria de dois fótons, porém, nós codificamos o estado no grau de liberdade de caminho dos fótons ao invés da polarização. Além disso, vamos descrever também um segundo trabalho no qual obtivemos uma melhora na qualidade dos resultados utilizando uma montagem sem um interferômetro longitudinal. A tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 serão mostrados exemplos de como calcular as fases adquiridas por um e por dois qubits sujeitos a uma certa evolução, e como representar geometricamente esses sistemas. Em seguida vamos derivar a FTF para um sistema de dois qudits, e na última seção veremos uma breve explicação do motivo pelo qual se utiliza o termo “topológica” para a fase

em certas situações. No capítulo 2 vamos esquematizar uma forma de se medir a FTF, e mostraremos algumas simulações numéricas para o caso dos MES. No capítulo 3 iremos descrever os experimentos realizados e exibir os resultados obtidos. Por fim vamos apresentar as conclusões e apontar perspectivas futuras de novos trabalhos.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1 Representação geométrica e fases para um e dois qubits

O objetivo desta seção é tornar mais clara a diferenciação entre as fases dinâmica, geométrica e topológica. Para tanto, iremos repassar os casos descritos nos trabalhos de Sjöqvist[10] e Milman[14] que contém exemplos com os sistemas mas simples de uma e de duas partes, isto é, um qubit e dois qubits. Devemos ter em mente que a fase total adquirida por um estado ao sofrer uma evolução é sempre dada por

$$\gamma_t = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \gamma_d + \gamma_g \quad (2.1)$$

onde γ_d é a fase dinâmica e γ_g é a fase geométrica. A fase dinâmica tem origem nos autovalores do Hamiltoniano que determina a evolução do estado, e é dada por

$$\gamma_d = -i \int_0^\tau dt \langle \psi(t) | \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle. \quad (2.2)$$

Se utilizarmos a equação de Schrödinger para substituir a derivada temporal do estado, obtemos $\gamma_d = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle$. Vemos então que a fase dinâmica é na verdade o fator de fase do operador evolução que atua no estado, porém com o Hamiltoniano substituído por seu valor esperado. Como estamos considerando Hamiltonianos que podem depender do tempo, o estado evoluído é dado por $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle$ onde $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt H(t)}$ é o operador evolução generalizado. Para os casos em que o Hamiltoniano independe do tempo, recuperamos a expressão conhecida para o operador evolução, $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t H}$, e a fase dinâmica é dada por $\gamma_d = -\frac{1}{\hbar} t \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle$ (é possível mostrar que o valor esperado do Hamiltoniano também não dependerá do tempo, e por isso

a integração resulta simplesmente em t). Se considerarmos ainda que os autovalores e autovetores do Hamiltoniano são conhecidos, $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$, e que o estado inicial pode ser expandido nessa base, $|\psi(0)\rangle = \sum a_n|E_n\rangle$, é possível efetuar os cálculos para obter $\gamma_d = -\frac{1}{\hbar}t \sum E_n|a_n|^2$.

Já a fase geométrica depende do caminho realizado pelo estado no espaço de Hilbert projetivo, e é comumente calculada fazendo-se $\gamma_t - \gamma_d$. No caso de sistemas bipartidos, a representação geométrica do espaço de Hilbert projetivo revela a possibilidade do surgimento de um terceiro tipo de fase, que possui uma natureza topológica. Somos então tentados a acrescentar um termo γ_{top} na soma de γ_t , mas a forma como γ_g é calculada já engloba essa contribuição. A seguir veremos alguns exemplos de como essas fases podem se combinar resultando na fase total.

2.1.1 Representação geométrica e fases para um qubit

O estado puro mais geral de um qubit pode ser escrito da seguinte forma

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (2.3)$$

cuja representação geométrica é feita na esfera de Bloch como mostra a Fig.2.1. Os polos norte e sul representam respectivamente os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, de modo que os ângulos θ e ϕ são respectivamente os ângulos polar e azimutal em coordenadas esféricas. Devido a normalização do estado a esfera de Bloch possui raio igual a 1, e os pontos antipodais representam estados ortogonais.

Uma rotação em torno de um eixo em qualquer direção desloca o vetor que representa o estado na esfera de Bloch. Vamos considerar, por exemplo, o efeito de uma rotação em torno do eixo z produzida pelo Hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\omega\hat{\sigma}_z/2$, onde $\hat{\sigma}_z$ é a matriz de Pauli na direção z e $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são autoestados dela com autovalores 1 e -1, respectivamente. Aplicando-se o operador evolução o estado se torna

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i(\varphi+\frac{\omega t}{2})}\sin(\theta/2)|1\rangle. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.1) temos

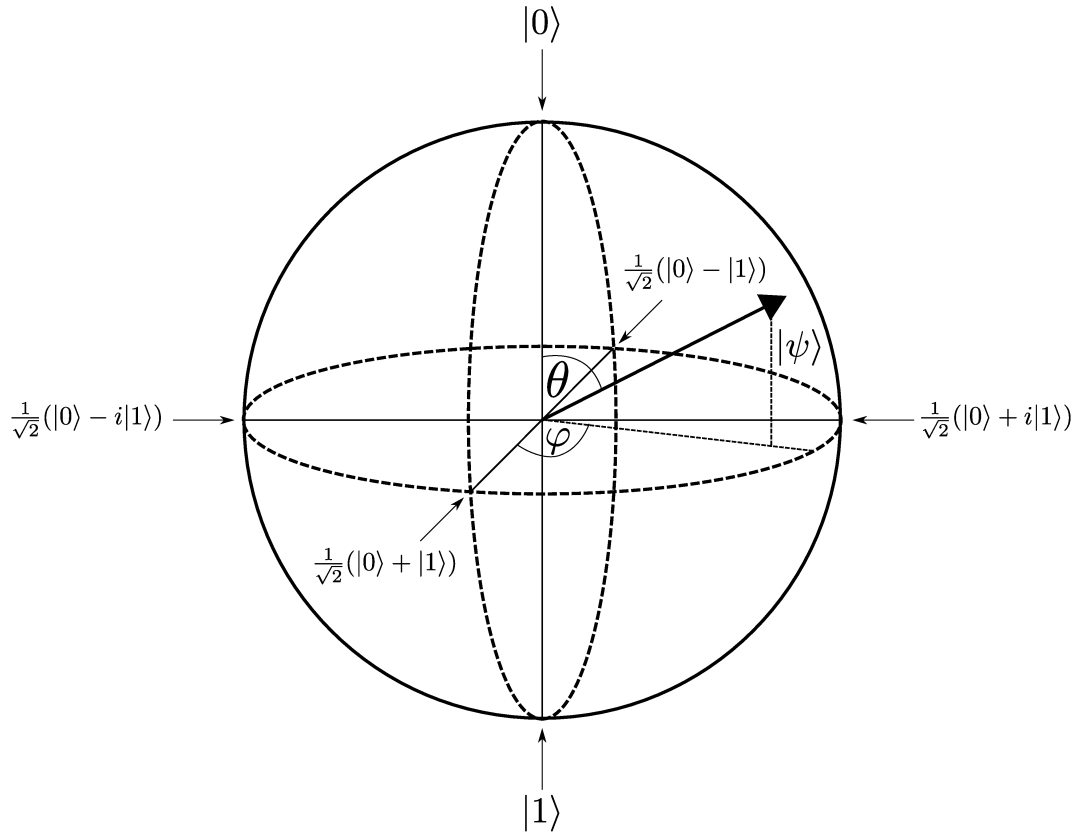


FIGURA 2.1: Representação dos estados puros de um qubit na esfera de Bloch. Ela possui raio unitário e os pontos antipodais representam estados ortogonais.

$$\begin{aligned}
 \gamma_t &= \arg \left\{ e^{-i\frac{\omega t}{2}} \cos^2(\theta/2) + e^{i\frac{\omega t}{2}} \sin^2(\theta/2) \right\} \\
 &= \arg \left\{ e^{-i\frac{\omega t}{2}} \frac{(1 + \cos \theta)}{2} + e^{i\frac{\omega t}{2}} \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \right\} \\
 &= \arg \left\{ \frac{(e^{-i\frac{\omega t}{2}} + e^{i\frac{\omega t}{2}})}{2} + \frac{(e^{-i\frac{\omega t}{2}} - e^{i\frac{\omega t}{2}})}{2} \cos \theta \right\} \\
 &= \arg \left\{ \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos \theta \right\}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Este é um número complexo da forma $A - iB$ cujo argumento é dado por $-\arctan(B/A)$, portanto

$$\gamma_t = -\arctan \left(\tan\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos \theta \right) \tag{2.6}$$

Agora, calculando a derivada temporal de (2.4) e substituindo em (2.2) temos

$$\begin{aligned}
\gamma_d &= -i \int_0^\tau -i \frac{\omega}{2} \cos^2(\theta/2) + i \frac{\omega}{2} \sin^2(\theta/2) dt \\
&= -\frac{\omega}{2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} - \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \int_0^\tau dt \\
&= -\frac{\omega t}{2} \cos \theta.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto, a fase geométrica fica

$$\gamma_g = -\arctan \left(\tan\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos \theta \right) + \frac{\omega t}{2} \cos \theta \tag{2.8}$$

Temos então uma expressão geral para cada tipo de fase como queríamos. Para o caso de uma rotação completa de 2π , ou seja, $\omega t = 2\pi$, temos

$$\gamma_t = -\pi, \quad \gamma_d = -\pi \cos \theta \quad \text{e} \quad \gamma_g = -\pi(1 - \cos \theta).$$

É mais fácil checar o cálculo de γ_t usando a eq.(2.5), onde temos $\arg\{-1\} = \arg\{e^{-i\pi}\} = -\pi$. Essa é uma situação que pode causar confusão por dois motivos. Primeiro que a fase total é sempre igual a $-\pi$ independente de qual é o estado inicial, mas sua origem física carrega uma dependência com o ângulo θ . A fase total pode ser puramente dinâmica ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$), puramente geométrica ($\theta = \pi/2$), ou uma combinação de ambas que resulta em $-\pi$ (qualquer outro valor de θ entre 0 e π). Em segundo lugar, esse valor é exatamente igual ao da fase topológica que surge para dois qubits, porém sua natureza nada tem a ver com a existência de um espaço não-simplesmente conexo para representar o estado, já que a esfera de Bloch possui uma topologia trivial. Nas próximas subseções veremos como a fase topológica surge para um estado de dois qubits devido à topologia não trivial da bola $SO(3)$.

2.1.2 Representação geométrica para dois qubits

De acordo com a decomposição de Schmidt[26, 27], o estado puro mais geral de dois qubits pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \cos(\alpha/2) |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 + e^{i\beta} \sin(\alpha/2) |\psi^\perp\rangle_1 |\psi^\perp\rangle_2 \\
 &= \cos(\alpha/2) [\cos(\theta_1/2) |0\rangle + e^{i\varphi_1} \sin(\theta_1/2) |1\rangle] [\cos(\theta_2/2) |0\rangle + e^{i\varphi_2} \sin(\theta_2/2) |1\rangle] + \\
 &\quad e^{i\beta} \sin(\alpha/2) [\sin(\theta_1/2) |0\rangle - e^{i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) |1\rangle] [\sin(\theta_2/2) |0\rangle - e^{i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) |1\rangle]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $|\psi^\perp\rangle$ é um estado ortogonal à $|\psi\rangle$. Sua representação geométrica se torna mais complicada, mas um bom começo é olhar para um dos qubits efetuando-se o traço parcial no subespaço do outro. Dessa forma, obtemos uma matriz densidade que pode ser representada na bola de Bloch, o que significa que devemos incluir os estados mistos na descrição de um dos qubits, estados estes que são representados pelos pontos no interior da esfera de Bloch. No entanto ainda temos uma representação insuficiente para o estado global, uma vez que a mesma matriz densidade pode ser obtida através de um número infinito de estados que possuam o mesmo grau de emaranhamento.

Um resultado obtido por Mosseri e Dandoloff[28] demonstra que o espaço onde o resto da informação necessária se encontra é o $SO(3)$. Sua representação consiste em uma bola de raio π que nos dá todas as rotações possíveis em um espaço real de três dimensões, como mostra a Fig.2.2.

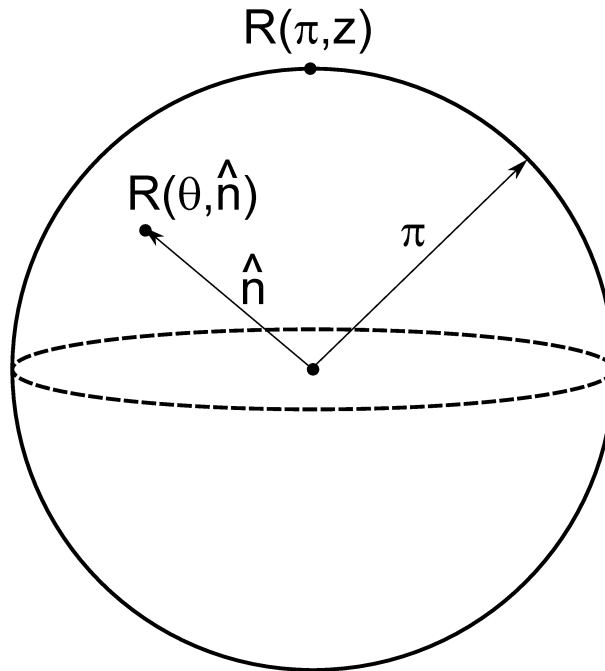


FIGURA 2.2: Representação geométrica do espaço $SO(3)$, que consiste em uma bola de raio π com os pontos antipodais identificados. Cada ponto está associado a uma rotação em 3 dimensões cuja direção é dada pela reta que liga a origem ao ponto, e o ângulo de giro é dado pela distância entre eles.

A direção da rotação é dada pela reta que vai da origem a um ponto da bola, enquanto o ângulo da rotação é dado pela distância entre a origem e o ponto. Portanto, pontos opostos da bola representam as rotações de um certo ângulo e do negativo deste ângulo. Notamos então que um ponto na superfície da bola que representa uma rotação de π e o ponto oposto que representa uma rotação $-\pi$ descrevem fisicamente a mesma situação e, por isso, dizemos que os pontos antipodais da bola $SO(3)$ são identificados.

Em seu trabalho Mosseri e Dandoloff mostram ainda que o modo como devemos combinar as bolas de Bloch e a $SO(3)$ para representar o estado global depende da concorrência [29] \mathcal{C} . Ela está relacionada com o raio r do vetor que representa o estado reduzido de um dos qubits na bola de Bloch, além de medir o grau de emaranhamento do estado global. A concorrência varia entre 0 e 1, valendo 0 para estados produto e 1 para o MES. Quando $\mathcal{C} = 0$ temos $r = 1$, e portanto o estado de uma das partes é puro, sendo necessário apenas a esfera de Bloch para representá-lo. Nesse caso a bola $SO(3)$ também se converte em uma esfera de Bloch, culminando na situação esperada onde um estado produto é representado por duas esferas de Bloch, uma para cada qubit. Já no caso em que $\mathcal{C} = 1$ temos $r = 0$, e o estado de uma das partes se reduz ao ponto no centro da bola de Bloch. Nessa situação o estado global é completamente descrito pela bola $SO(3)$, havendo uma correspondência entre cada ponto da bola e um estado MES. Isto está relacionado ao fato de que todos os estados MES estão conectados por uma rotação local, isto é, aplicada em um dos qubits. Como exemplo podemos ilustrar os estados de Bell na bola $SO(3)$. Primeiro tomamos o estado de Bell $|\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$ obtido fazendo-se $\alpha = \pi/2$, $\beta = \theta_1 = \phi_2 = 0$ e $\theta_2 = \phi_1 = \pi$ na eq.(2.9) e o colocamos na origem (esta escolha pode ser feita arbitrariamente). Em seguida, é possível mostrar que uma rotação local de π nas direções x , y e z levam respectivamente aos estados de Bell $|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$, $|\Phi^-\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle - |11\rangle)$ e $|\psi^-\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle - |10\rangle)$, o que nos fornece pontos na superfície da bola $SO(3)$ como mostra a Fig.2.3. Finalmente, para os casos intermediários onde $0 < \mathcal{C} < 1$, cada ponto da bola de Bloch é associada a uma bola $SO(3)$. A seguir vamos ver como a origem das fases que aparecem na evolução de um estado de dois qubits podem ser melhor compreendidas com esta representação.

2.1.3 Fases para dois qubits

Vamos considerar evoluções locais, ou seja, evoluções onde o operador pode ser escrito como um produto de operadores que atuam em cada qubit. Analogamente ao caso de um qubit tomaremos o exemplo onde $\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{\sigma}_{z,1}/2 + \hbar\omega_2\hat{\sigma}_{z,2}/2$, de modo que o estado evoluído se torna

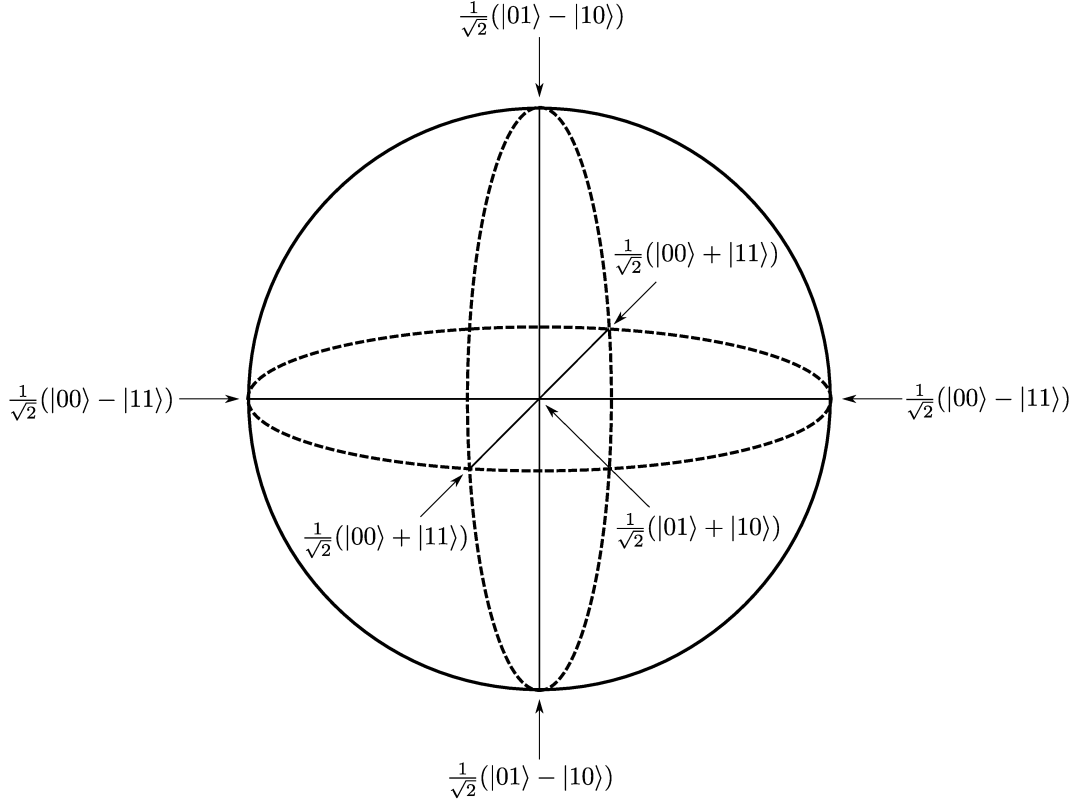


FIGURA 2.3: Estados de Bell representados na bola SO(3). Escolhendo-se a origem para representar o estado $|\psi^+\rangle$, os demais estados $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$ e $|\psi^-\rangle$ são obtidos fazendo-se uma rotação de π respectivamente nas direções x , y e z , que portanto se localizam em pontos na superfície da bola SO(3).

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] |00\rangle + \\
 & e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_2} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] |01\rangle + \\
 & e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\phi_1} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] |10\rangle + \\
 & e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\phi_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\phi_1} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e^{i\phi_2} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] |11\rangle \\
 & = e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} c_{00} |00\rangle + e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} c_{01} |01\rangle + e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} c_{10} |10\rangle + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} c_{11} |11\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde c_{ij} ($i, j = 0, 1$) é igual aos colchetes que multiplicam os estados $|ij\rangle$ em (2.10). Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.1) temos

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \arg \left\{ e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} |c_{00}|^2 + e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} |c_{01}|^2 + e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} |c_{10}|^2 + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} |c_{11}|^2 \right\} \\
&= \arg \left\{ e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} \frac{1}{4} [1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \alpha (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \right. \\
&\quad e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} \frac{1}{4} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \\
&\quad e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} \frac{1}{4} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \\
&\quad \left. e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} \frac{1}{4} [1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \alpha (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] \right\} \\
&= \arg \left\{ \frac{e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t}}{2} \frac{1}{2} [1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \right. \\
&\quad \frac{e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t} - e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t}}{2} \frac{1}{2} [\cos \alpha (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)] + \\
&\quad \frac{e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} + e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t}}{2} \frac{1}{2} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \\
&\quad \left. \frac{e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} - e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t}}{2} \frac{1}{2} [\cos \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)] \right\} \\
&= \arg \left\{ \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \frac{1}{2} [1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] - \right. \\
&\quad i \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \frac{1}{2} [\cos \alpha (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)] + \\
&\quad \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \frac{1}{2} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] - \\
&\quad \left. i \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \frac{1}{2} [\cos \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)] \right\} \\
&= \arg \left\{ \cos\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2}{2}t\right) [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2] - \right. \\
&\quad \left. i \cos \alpha [\sin\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2}{2}t\right) \cos \theta_1 + \cos\left(\frac{\omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1}{2}t\right) \cos \theta_2] \right\}
\end{aligned}$$

Novamente temos um número complexo da forma $A - iB$, e para simplificar a expressão da fase total tomaremos $-\arctan\left(\frac{B/\cos(\frac{\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2}{2}t)}{A/\cos(\frac{\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2}{2}t)}\right)$, portanto

$$\gamma_t = -\arctan \left(\frac{\cos \alpha [\tan(\frac{\omega_1}{2}t) \cos \theta_1 + \tan(\frac{\omega_2}{2}t) \cos \theta_2]}{1 - \tan(\frac{\omega_1}{2}t) \tan(\frac{\omega_2}{2}t) [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2]} \right) \quad (2.11)$$

Agora, derivando (2.9) e substituindo em (2.2) temos

$$\begin{aligned}
 \gamma_d &= -i \int_0^\tau -i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} (|c_{00}|^2 - |c_{11}|^2) - i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} (|c_{01}|^2 - |c_{10}|^2) dt \\
 &= -i \int_0^\tau -i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) dt \\
 &= -\cos \alpha \left(\frac{\omega_1}{2} \cos \theta_1 + \frac{\omega_2}{2} \cos \theta_2 \right) \int_0^\tau dt \\
 &= -\cos \alpha \left(\frac{\omega_1}{2} t \cos \theta_1 + \frac{\omega_2}{2} t \cos \theta_2 \right) \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

A fase geométrica desta vez fica então

$$\begin{aligned}
 \gamma_g &= -\arctan \left(\frac{\cos \alpha [\tan(\frac{\omega_1}{2} t) \cos \theta_1 + \tan(\frac{\omega_2}{2} t) \cos \theta_2]}{1 - \tan(\frac{\omega_1}{2} t) \tan(\frac{\omega_2}{2} t) [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_1 \sin \theta_2]} \right) + \\
 &\quad \cos \alpha \left(\frac{\omega_1}{2} t \cos \theta_1 + \frac{\omega_2}{2} t \cos \theta_2 \right) \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Mais uma vez chegamos a uma expressão geral para cada tipo de fase, como desejávamos. Atentando para a eq.(2.9), vemos que o parâmetro α determina o grau de emaranhamento do estado, sendo que para $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ temos um estado produto e para $\alpha = \pi/2$ temos um MES. Para o primeiro caso, utilizando a relação $\arctan[(x + y)/(1 - xy)] = \arctan x + \arctan y$, temos

$$\gamma_t = \gamma_{t,1} + \gamma_{t,2} \quad \gamma_d = \gamma_{d,1} + \gamma_{d,2} \quad \text{e} \quad \gamma_g = \gamma_{g,1} + \gamma_{g,2},$$

onde $\gamma_{t,i}$, $\gamma_{d,i}$ e $\gamma_{g,i}$ ($i = 1, 2$) são da mesma forma obtida nas eqs.(2.6), (2.7) e (2.8), respectivamente. Isso era de se esperar, já que o estado produto é representado por duas esferas de Bloch independentes. Já para o MES temos que a fase dinâmica desaparece, e três situações diferentes podem ocorrer para a fase total. É mais fácil compreender isso analisando o produto escalar $\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle$ do qual extraímos o argumento para calculá-la. Quando $\alpha = \pi/2$, ele se torna um número real, de modo que seu argumento irá depender do valor assumido da seguinte forma:

$$\gamma_t = \gamma_g = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle > 0, \\ \text{indefinido} & \text{se } \langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle = 0, \\ \pi & \text{se } \langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle < 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Essa descontinuidade na fase está diretamente ligada ao fato de que o MES é representado pela bola $SO(3)$, que é um espaço não-simplesmente conexo, como veremos na

seção 2.3. As fases 0 e π advêm de duas classes de caminhos diferentes que podem ser traçados em uma evolução. Essa diferença entre as classes pode ser vista geometricamente através da representação na bola $SO(3)$. Como exemplo vamos considerar novamente o MES $1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$ posicionado na origem. Uma rotação de π no estado em qualquer direção nos leva até um ponto da borda, digamos ao polo norte se fizermos $\omega_1 t = -\omega_2 t = \pi/2$ no nosso exemplo em que a rotação está na direção z , e o estado se torna $1/\sqrt{2}(-i|01\rangle + i|10\rangle)$. Para retornar a origem podemos desfazer a rotação aplicando uma nova rotação na direção contrária, ou seja, fazemos $\omega_1 t = -\omega_2 t = -\pi/2$ para a nova aplicação dos operadores no estado, de modo que terminamos com $1/\sqrt{2}(i(-i)|01\rangle + (-i)i|10\rangle) = 1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$. No entanto temos outra opção para retornar a origem se lembrarmos que o estado pode “reaparecer” no polo oposto da bola uma vez que estes pontos são identificados. Basta então aplicar uma nova rotação na mesma direção, ao que terminamos com $1/\sqrt{2}((-i)(-i)|01\rangle + (i)(i)|10\rangle) = -1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$.

Os dois caminhos são mostrados na Fig.2.4, e é aqui onde podemos perceber que a fase geométrica é na verdade uma fase topológica para o MES. Se o estado evoluído atravessa a borda um número ímpar de vezes, uma fase π surge, definindo uma classe de caminho. Se a borda é atravessada um número par de vezes, temos a outra classe. Sendo assim, a paridade do número de vezes que o estado evoluído atravessa a borda é responsável pela diferença topológica entre os caminhos e a fase acumulada. O sinal negativo que aparece para o segundo caminho, isto é, uma fase π , se deve unicamente à uma propriedade do espaço $SO(3)$, a de possuir uma dupla conexidade (voltaremos a este conceito na seção 2.3). Portanto, a única contribuição que aparece para a fase total é de origem topológica. Em [14] é mostrado ainda que o mesmo ocorre para um estado parcialmente emaranhado, o que completa a discussão para dois qubits.

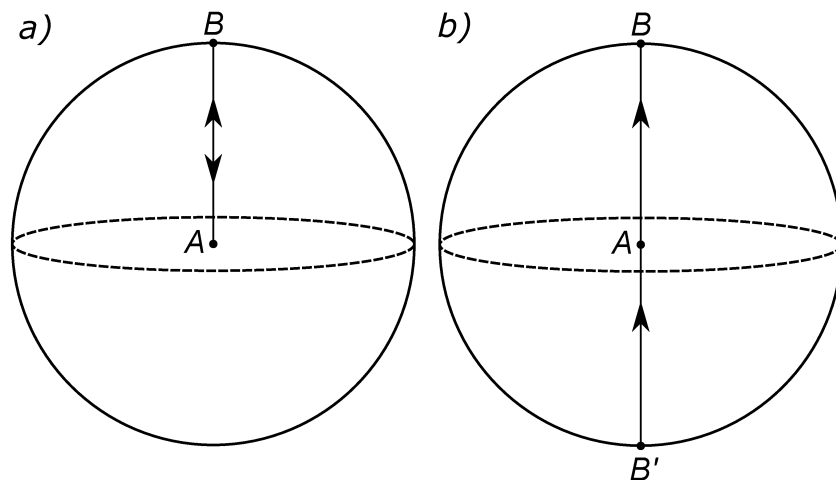


FIGURA 2.4: Dois caminhos possíveis pertencentes a duas classes diferentes em $SO(3)$. A sequência a) $A \rightarrow B \rightarrow A$ não atravessa a borda da bola $SO(3)$ onde estão representados os estados ortogonais ao inicial, e nenhuma fase aparece. A sequência b) $A \rightarrow B' \rightarrow A$ atravessa a borda, levando ao acúmulo de uma fase π .

Efetuiremos agora um cálculo onde vamos derivar a FTF para um estado de dois qudits, isto é, vamos obter a FTF para dimensões maiores. Faremos isso utilizando uma notação matricial para escrever o estado e a evolução, além de uma ferramenta matemática chamada decomposição polar de matrizes.

2.2 Cálculo da FTF para dois qudits

Vamos considerar o estado puro mais geral de dois qudits $|\psi\rangle = \sum_{m,n=1}^d \alpha_{mn} |m,n\rangle$, e vamos organizar seus coeficientes α_{mn} em uma matriz α $d \times d$ como fizemos em [19]. Com esta notação a norma ao quadrado do vetor de estado é $\langle\psi|\psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger\alpha] = 1$, e o produto escalar de dois estados é $\langle\phi|\psi\rangle = \text{Tr}[\beta^\dagger\alpha]$, onde β é a matriz $d \times d$ contendo os coeficientes do estado $|\phi\rangle$. Utilizaremos agora o fato de que qualquer matriz admite a chamada decomposição polar, e escrevemos o estado em $t = 0$ como

$$\alpha(0) = U(0)Q(0),$$

onde U é uma matriz unitária e Q é uma matriz hermitiana positiva-semidefinida¹. Utilizaremos também o fato de que qualquer matriz unitária pode ser escrita como $U = \sqrt[d]{\det U} S$ onde $S \in \text{SU}(d)$; podemos provar isso mostrando que a matriz $S = U / \sqrt[d]{\det U}$ é unitária e possui determinante igual a 1, sendo portanto um elemento do grupo $\text{SU}(d)$. Para mostrar que S é unitária temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{U}{\sqrt[d]{\det U}} \right)^{-1} &= \left(\frac{U}{\sqrt[d]{\det U}} \right)^\dagger \\ \sqrt[d]{\det U} U^{-1} &= \frac{U^\dagger}{(\sqrt[d]{\det U})^*} \\ |\sqrt[d]{\det U}|^2 U^{-1} &= U^\dagger, \end{aligned}$$

o que só é verdade se $|\sqrt[d]{\det U}|^2 = 1$ uma vez que $U^{-1} = U^\dagger$. Mas como $|\det U| = 1$, podemos escrever tanto $\det U$ quanto $\sqrt[d]{\det U}$ como um fator de fase $e^{i\phi}$, e de fato a igualdade é verdadeira. Para mostrar que $\det S = 1$ temos

$$\det \left(\frac{U}{\sqrt[d]{\det U}} \right) = \frac{\det U}{(\sqrt[d]{\det U})^d} = 1.$$

¹Uma matriz é dita positiva-definida quando todos os seus autovalores são positivos, e positiva-semidefinida quando todos os seus autovalores são positivos ou iguais a zero.

Portanto, o estado inicial fica

$$\alpha(0) = e^{i\phi(0)} S(0) Q(0). \quad (2.15)$$

Sob operações unitárias locais U_s e V_i (os índices s e i identificando cada qudit), a matriz de coeficientes é transformada de acordo com

$$\alpha(t) = U_s(t) \alpha(0) V_i^\top(t), \quad (2.16)$$

onde V_i^\top é a transposta de V_i , sendo que a decomposição polar é preservada. Podemos ver isso escrevendo

$$\alpha(t) = e^{i\phi(t)} S(t) Q(t) \quad (2.17)$$

e substituindo (2.15) e (2.17) em (2.16), o que fornece

$$\begin{aligned} e^{i\phi(t)} S(t) Q(t) &= U_s(t) e^{i\phi(0)} S(0) Q(0) V_i^\top(t) \\ &= e^{i\phi(0)} \sqrt[d]{\det U_s(t) \det V_i(t)} \bar{U}_s(t) S(0) Q(0) \bar{V}_i^\top(t) \\ &= e^{i\phi(0)} \sqrt[d]{\det U_s(t) \det V_i(t)} \bar{U}_s(t) S(0) \bar{U}_s^\dagger(t) \bar{U}_s(t) Q(0) \bar{V}_i^\top(t) \end{aligned}$$

onde $\bar{U}_s(t)$ e $\bar{V}_i(t)$ são as partes $SU(d)$ das operações unitárias locais, bastando então fazer as identificações $e^{i\phi(t)} = e^{i\phi(0)} \sqrt[d]{\det U_s(t) \det V_i(t)}$, $S(t) = \bar{U}_s(t) S(0) \bar{U}_s^\dagger(t)$, e $Q(t) = \bar{U}_s(t) Q(0) \bar{V}_i^\top(t)$. Dessa forma enxergamos a evolução separada em três setores da decomposição polar: uma transformação fechada no espaço dos números complexos $\phi(0) \mapsto \phi(t)$, uma transformação fechada no espaço das matrizes hermitianas positivas-semidefinidas $Q(0) \mapsto Q(t)$, e uma transformação fechada em $SU(d)$ $S(0) \mapsto S(t)$. Como as raízes de um número complexo possuem múltiplos valores, é preciso ter cuidado para se definir as quantidades acima. Para operações unitárias variando no tempo, podemos supor que qualquer uma das raízes possíveis é tomada como o tempo inicial e os valores subsequentes devem formar uma evolução contínua como uma função do tempo, assim $\phi(t)$ é uma função suave, diferenciável em toda parte.

Podemos então escrever a projeção $\alpha^\parallel(t)$ do estado evoluído sobre o estado inicial e utilizar a decomposição polar para investigar as contribuições vindas de cada setor da matriz de coeficientes para a fase total. Na notação de Dirac temos que essa projeção é dada por

$$|\psi^{\parallel}(t)\rangle = (|\psi(0)\rangle \langle\psi(0)|) |\psi(t)\rangle = \langle\psi(0) | \psi(t)\rangle |\psi(0)\rangle,$$

e retornando à notação matricial temos

$$\alpha^{\parallel}(t) = \text{Tr}[\alpha^{\dagger}(0)\alpha(t)]\alpha(0).$$

Mas $\text{Tr}[\alpha^{\dagger}(0)\alpha(t)]$ é um número complexo da forma $ve^{i\gamma}$ com $v = |\text{Tr}[\alpha^{\dagger}(0)\alpha(t)]|$ e $\gamma = \arg\{\text{Tr}[\alpha^{\dagger}(0)\alpha(t)]\}$, e portanto temos

$$\alpha^{\parallel}(t) = ve^{i\gamma}\alpha(0),$$

Utilizando a eq.(2.15) e fazendo $\gamma = \Delta\phi + \gamma_s + \gamma_q$ obtemos

$$\alpha^{\parallel}(t) = v \left(e^{i(\Delta\phi + \phi(0))} \right) \left(e^{i\gamma_s} S(0) \right) \left(e^{i\gamma_q} Q(0) \right),$$

onde $\Delta\phi$ é uma contribuição para a fase total vinda do setor dos números complexos, e γ_s e γ_q são possíveis contribuições vindas dos setores Hermitiano e $SU(d)$. Verificando a hermiticidade do termo $e^{i\gamma_q}Q(0)$ temos

$$e^{i\gamma_q}Q(0) = e^{-i\gamma_q}Q^{\dagger}(0),$$

mas $Q(0) = Q^{\dagger}(0)$, e a igualdade só se mantém se $\gamma_q = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$). Podemos nos restringir ao intervalo entre 0 e 2π sem perder generalidade, de modo que basta considerar $k = 0$, o que resulta em $\gamma_q = 0$. Portanto nenhuma contribuição de fase decorre deste setor. No setor $SU(d)$ precisamos verificar o determinante do termo $e^{i\gamma_s}S(0)$, o que fornece

$$\begin{aligned} \det(e^{i\gamma_s}S(0)) &= 1 \\ e^{i\gamma_s d} \det S(0) &= 1, \end{aligned}$$

onde d é a dimensão de cada uma das partes do estado bipartido. Como temos também $\det S(0) = 1$, a igualdade só se mantém se $e^{i\gamma_s d} = 1$, o que implica em

$$\gamma_s = \frac{2l\pi}{d} \quad l = 0, 1, 2, \dots, d-1. \quad (2.18)$$

Portanto, somente valores de fase fracionários podem surgir do setor $SU(d)$. Esta é a FTF, que somada a $\Delta\phi$ nos dá a fase total. Uma característica importante dessa fração é o denominador dado pela dimensão das partes do sistema bipartido, como mencionado no capítulo 2. Vemos que para $d = 2$ recuperamos exatamente a fase π que aparece abruptamente na expressão para a fase total da eq.(2.14) quando o estado é emaranhado. A fase 0 da eq.(2.14) ou o caso de um estado produto correspondem a $l = 0$, quando nenhuma fase de natureza topológica surge na evolução. O cálculo da fase dinâmica e da FG para dois qudits será deixado para o apêndice A, dado que neste trabalho nós realizamos a medição da FTF justamente através da fase total. Antes de passar ao capítulo 2 onde mostraremos como podemos medir a FTF, faremos uma rápida discussão sobre sua relação com a topologia de um espaço. O objetivo é apontar a diferença entre um espaço simplesmente conexo e um espaço não-simplesmente conexo, já que este conceito, a exemplo do que vimos na bola $SO(3)$, é o responsável pela classificação da fase fracionária como fase topológica. Iremos apontar também qual espaço assume o papel análogo ao da bola $SO(3)$ para dimensões maiores.

2.3 Natureza topológica da fase fracionária

Nesta seção definiremos brevemente alguns conceitos que nos auxiliarão a entender um pouco melhor porque a FTF traz a palavra topológica em seu nome. Vamos começar com a ideia de caminho em um espaço: considerando dois pontos x e y em um espaço, se houver alguma função contínua f no intervalo de 0 a 1 com $f(0) = x$ e $f(1) = y$, ela nos dá um caminho entre x e y . Daí podemos seguir com a noção de um espaço conectado por caminhos: dizemos que um espaço é conectado por caminhos se existe um caminho entre quaisquer dois pontos nele. Dois exemplos simples são os seguintes: o espaço representado por uma bola é conectado por caminhos; já o espaço representado por duas bolas sem nenhuma intersecção não é conectado por caminhos.

Passamos agora para o conceito de conexidade: um espaço é dito simplesmente conexo se dois requisitos são cumpridos:

- ele é conectado por caminhos;
- todo caminho entre dois pontos pode ser continuamente transformado, continuando dentro do espaço, em qualquer outro caminho preservando os pontos em questão.

Uma maneira mais simples de enxergar a segunda condição é pensar em um caminho fechado (ou seja, um caminho onde os dois pontos em questão são o mesmo) e tentar contraí-lo até ele se tornar o próprio ponto, como ilustra a Fig.2.5.

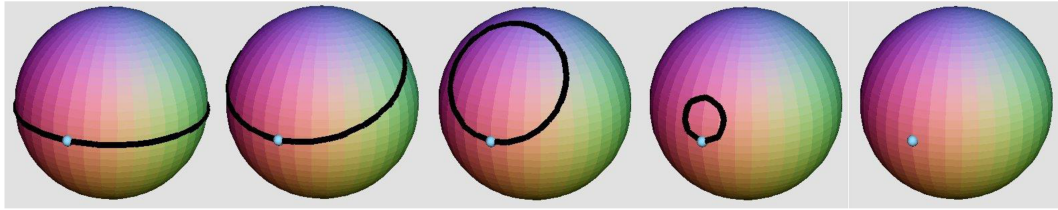


FIGURA 2.5: Uma esfera é simplesmente conexa porque todo caminho pode ser contraído em um ponto na superfície.

Um espaço que não é simplesmente conexo é chamado de não-simplesmente conexo ou multiplamente conexo. Como exemplos de cada tipo podemos citar os seguintes: uma bola ou uma bola oca são espaços simplesmente conexos, enquanto uma bola ou um cilindro com um furo vazado, ou ainda uma bola com os pontos antipodais identificados são espaços não-simplesmente conexos. A Fig.2.6 ilustra esses exemplos.

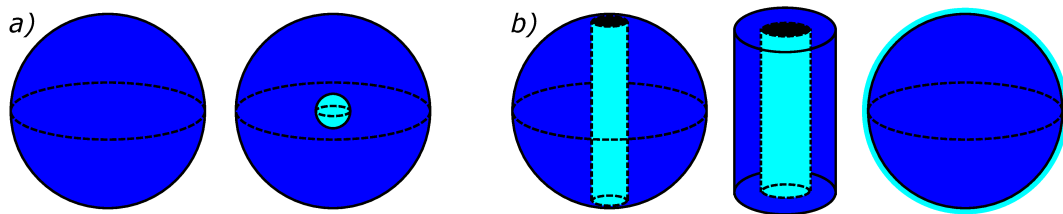


FIGURA 2.6: a) Uma bola e uma bola oca são exemplos de espaços simplesmente conexos. b) Uma bola e um cilindro com um furo vazado e uma bola com os pontos antipodais identificados são exemplos de espaços não-simplesmente conexos.

Espaços simplesmente conexos e não-simplesmente conexos são topologicamente distintos, o que nos permite voltar à discussão sobre a natureza da FTF. Embora o espaço das matrizes $SU(d)$ seja simplesmente conexo, o espaço que representa o conjunto das matrizes $SU(d)$ com a identificação $S' = e^{i2l\pi/d}S$, é não-simplesmente conexo. Na subseção 2.1.2 nos deparamos com a situação onde o estado é representado em um espaço duplamente conexo, uma vez que as rotações de π e $-\pi$ nos davam pontos identificados na borda da bola $SO(3)$. Isto está diretamente relacionado² com a identificação das matrizes S e $e^{i\pi}S = -S$ pertencentes a $SU(2)$. Para dimensões maiores não é obvio se há e qual é a representação geométrica para o estado através das matrizes especiais ortogonais, mas a FTF da eq.(2.18) ainda é uma consequência de termos um espaço não-simplesmente conexo resultante da identificação das matrizes especiais unitárias. Iniciaremos agora o capítulo 2 mostrando como podemos medir a FTF.

²Dizemos que há um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$.

Capítulo 3

Como medir a FTF

3.1 FTF como fase relativa em uma interferência

Para medir a FTF precisamos interferir o estado que adquire a fase com um estado preparado identicamente e que não sofre a transformação, ou seja, a FTF precisa aparecer como uma fase relativa entre dois estados para que seja possível percebê-la. Um esquema ilustrativo dessa situação considerando um interferômetro óptico é mostrado na Fig.3.1.

Nesse esquema, supomos uma fonte de pares de fótons preparando identicamente várias realizações do estado inicial $|\psi_s(0)H, \psi_i(0)V\rangle$. Já atencipando as situações que veremos nos experimentos do capítulo 4, vamos considerar que $|\psi\rangle$ representa o grau de liberdade de caminho transversal dos fótons, enquanto H e V indicam que as polarizações do primeiro e do segundo fóton são respectivamente horizontal e vertical. O feixe preparado incide em um divisor de feixes por polarização que separa os fótons em dois caminhos distintos, sendo que em ambos há uma placa de onda transformando a polarização dos fótons em uma superposição das componentes horizontal e vertical com igual probabilidade. Em seguida, dois dispositivos introduzem as operações locais U_s e V_i condicionadas a atuar somente nas componentes vertical de cada fóton. Um terceiro dispositivo é encarregado de introduzir uma fase $\Delta\phi$ na componente vertical de um dos fótons. Neste ponto vemos que os estados evoluído e inicial que desejamos interferir, isto é, $|\psi(t)\rangle = U_s V_i |\psi_s(0), \psi_i(0)\rangle$ e $|\psi(0)\rangle = |\psi_s(0), \psi_i(0)\rangle$, tem suas contribuições advindas de cada fóton separadas nos dois braços do interferômetro. Os feixes são então direcionados para se recombinarem em outro divisor de feixes por polarização, de modo que só haverá um fóton em cada saída distinta do interferômetro quando as componentes de polarização de ambos forem horizontal ou vertical. Nos casos em que a componente de polarização de um dos fótons for horizontal e a do outro vertical, os dois fótons seguirão por uma mesma saída do interferômetro. Dois detectores são posicionados em cada uma

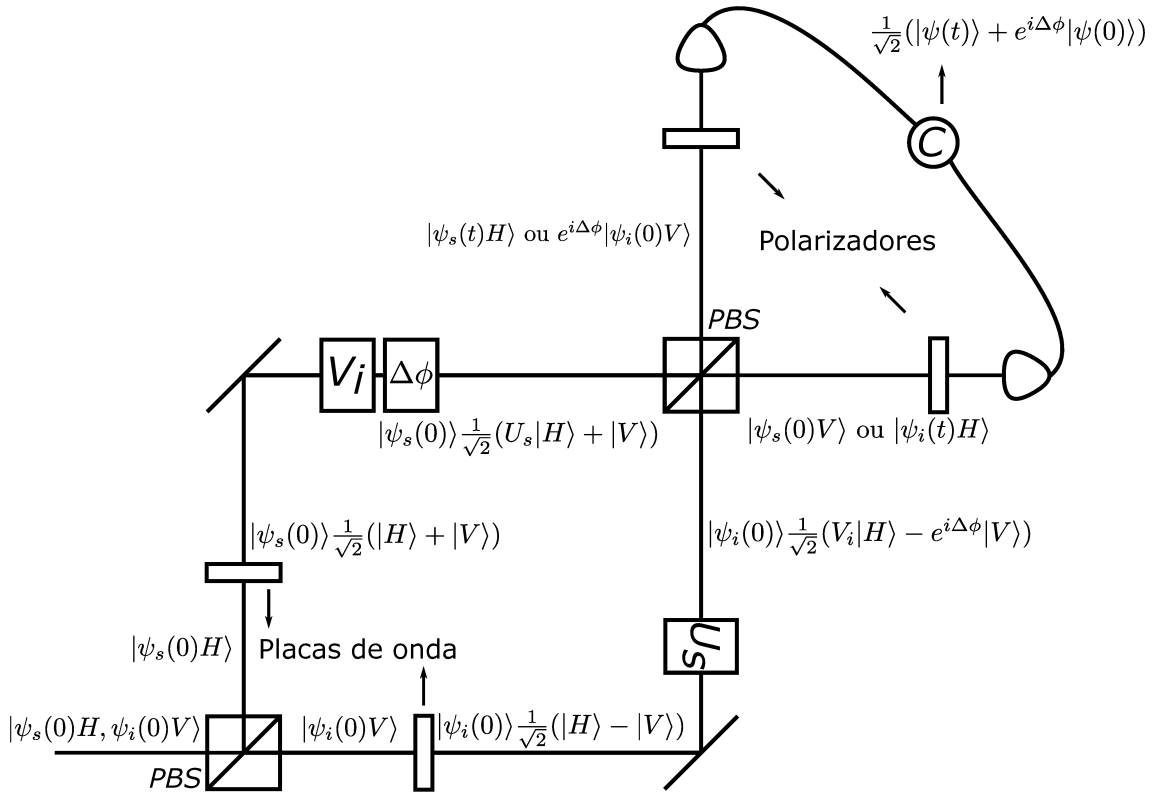


FIGURA 3.1: Esquema de um interferômetro para se medir a FTF. Um par de fótons incide sobre um divisor de feixes por polarização, que transmite um dos fótons e reflete o outro. Ambos tem seu estado de polarização transformado por uma placa de onda, ficando em uma superposição das componentes horizontal e vertical. Dois dispositivos introduzem operações locais U_s e V_i somente nas componentes de polarização horizontal, enquanto um terceiro introduz uma fase $\Delta\phi$ na componente vertical de um dos fótons. Após se recombinarem em outro divisor de feixes por polarização, dois detectores programados para realizar contagens em coincidência selecionam a superposição entre as componentes dos fótons que sofreram a atuação dos operadores e as componentes que permaneceram inalteradas, havendo a fase relativa $\Delta\phi$ entre eles.

das saídas do interferômetro e programados para validar uma contagem apenas quando dois fótons forem detectados simultaneamente, um em cada detector. Essa configuração é chamada de detecção em coincidência. Desse modo, assumindo que os pares de fótons são gerados simultaneamente e que cada fóton viaja a mesma distância até a detecção, somente nos casos em que temos um fóton em cada saída do interferômetro é que registramos uma contagem. Como há um polarizador orientado na diagonal antes de cada detector para tornar indistinguível a polarização dos fótons, o que temos na detecção final é a superposição desejada, isto é

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(U_s V_i |\psi_s(0)D, \psi_i(0)D\rangle + e^{i\Delta\phi} |\psi_s(0)D, \psi_i(0)D\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi(t)\rangle + e^{i\Delta\phi} |\psi(0)\rangle) \otimes |D, D\rangle,$$

onde $|D\rangle$ é o estado de polarização diagonal. O comportamento I do padrão de interferência é obtido tomando-se a norma ao quadrado da superposição entre estes dois estados, ou seja, retomando a notação matricial,

$$I = \left\| \frac{\alpha(t) + e^{i\Delta\phi}\alpha(0)}{\sqrt{2}} \right\|^2 = 1 + \text{Re}\{\text{Tr}[e^{-i\Delta\phi}\alpha^\dagger(0)\alpha(t)]\} = 1 + v \cos(\Delta\phi + \gamma'), \quad (3.1)$$

onde $v = |\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(t)]|$, $\Delta\phi + \gamma' = \arg\{\text{Tr}[e^{i\Delta\phi}\alpha^\dagger(0)\alpha(t)]\}$, e $\gamma' = \arg\{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\bar{U}_s(t)\alpha(0)\bar{V}_i^\top(t)]\}$. Portanto, em $t = 0$ quando $\bar{U}_s(0) = \bar{V}_i(0) = \mathbb{I}$, temos $v = 1$ e $\gamma' = 0$, o que nos dá uma curva de interferência em função de $\Delta\phi$. Para qualquer tempo intermediário da evolução, à medida em que $\bar{U}_s(t)$ e $\bar{V}_i(t)$ variam, temos $0 < v < 1$ e $\gamma' = 0$ ou $\gamma' = \gamma_s$, a depender de a evolução ter ou não atingido o momento em que a fase surge. Isso nos dá para cada t uma curva novamente em função de $\Delta\phi$ mas agora com uma visibilidade menor que a primeira e possivelmente deslocada em relação à ela. Finalmente, considerando um instante $t = T$ onde a fase já surgiu, temos $v = 1$ se a evolução for cíclica (do contrário permanece uma situação em que $0 < v < 1$) e $\gamma' = \gamma_s$, e a curva de interferência em função de $\Delta\phi$ exibe franjas deslocadas de γ_s em relação à primeira. A Fig.3.2 abaixo esquematiza o processo para o exemplo de uma evolução cíclica.

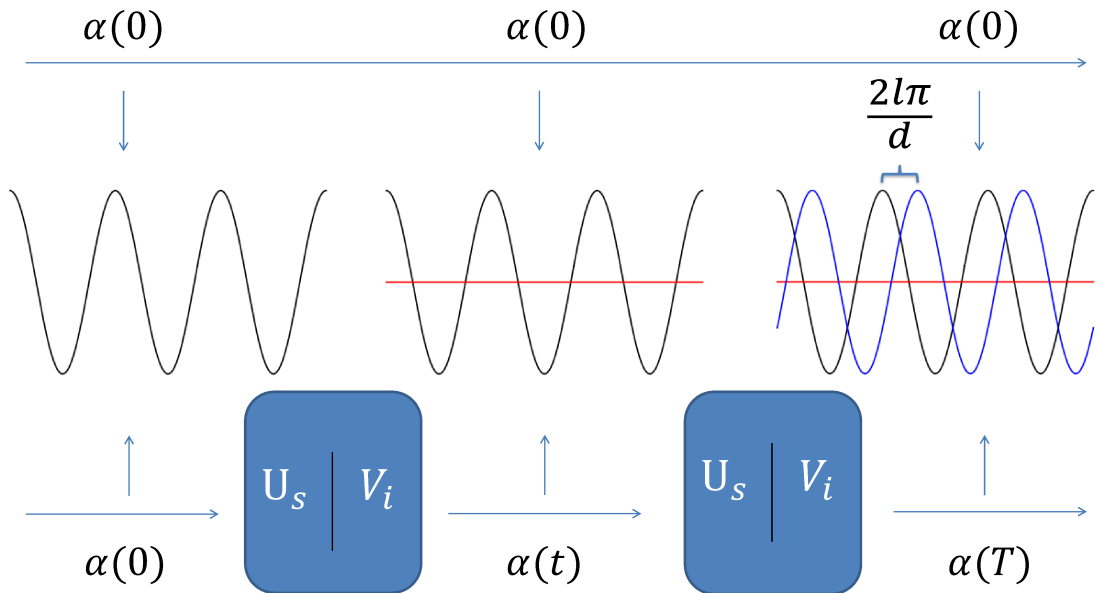


FIGURA 3.2: Esquema de um método para se medir a FTF. Dois estados quânticos preparados identicamente sofrem interferência, cuja curva é traçada em função de $\Delta\phi$. À medida que um dos estados evolui sob operações unitárias locais, a visibilidade do padrão de interferência C diminui até zerar (linha vermelha no gráfico) quando o estado evoluído se torna ortogonal ao inicial, até que no fim do ciclo a visibilidade é recuperada e há um deslocamento correspondente à FTF entre os padrões final e inicial.

Vamos considerar operações unitárias diagonais da forma $U_s = e^{i\phi_s} \bar{U}_s$ e $V_i = e^{i\phi_i} \bar{V}_i$ com $\bar{U}_s = \text{diag}[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_m}]$ e $\bar{V}_i = \text{diag}[e^{i\chi_1}, e^{i\chi_2}, \dots, e^{i\chi_n}]$, o que nos leva à condição¹ $\sum_m \xi_m = \sum_n \chi_n = 0$ para que de fato tenhamos $\bar{U}_s, \bar{V}_i \in \text{SU}(d)$. Dessa forma, o produto escalar entre o estado inicial e o transformado é

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(t)] &= e^{i(\phi_s+\phi_i)} \text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\bar{U}_s(t)\alpha(0)\bar{V}_i^\top(t)] \\
 &= e^{i\Delta\phi} \text{Tr}[\alpha^\dagger(0) \begin{bmatrix} e^{i\xi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\xi_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\xi_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \bar{V}_i^\top(t)] \\
 &= e^{i\Delta\phi} \text{Tr}[\alpha^\dagger(0) \begin{bmatrix} e^{i\xi_1}\alpha_{11} & e^{i\xi_1}\alpha_{12} & \cdots & e^{i\xi_1}\alpha_{1n} \\ e^{i\xi_2}\alpha_{21} & e^{i\xi_2}\alpha_{22} & \cdots & e^{i\xi_2}\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\xi_m}\alpha_{m1} & e^{i\xi_m}\alpha_{m2} & \cdots & e^{i\xi_m}\alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\chi_n} \end{bmatrix}] \\
 &= e^{i\Delta\phi} \text{Tr} \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & \cdots & \alpha_{m1}^* \\ \alpha_{12}^* & \alpha_{22}^* & \cdots & \alpha_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n}^* & \alpha_{2n}^* & \cdots & \alpha_{mn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i(\xi_1+\chi_1)}\alpha_{11} & e^{i(\xi_1+\chi_2)}\alpha_{12} & \cdots & e^{i(\xi_1+\chi_n)}\alpha_{1n} \\ e^{i(\xi_2+\chi_1)}\alpha_{21} & e^{i(\xi_2+\chi_2)}\alpha_{22} & \cdots & e^{i(\xi_2+\chi_n)}\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(\xi_m+\chi_1)}\alpha_{m1} & e^{i(\xi_m+\chi_2)}\alpha_{m2} & \cdots & e^{i(\xi_m+\chi_n)}\alpha_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= e^{i\Delta\phi} \text{Tr} \begin{bmatrix} \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_1)}|\alpha_{m1}|^2 & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_2)}\alpha_{m1}^*\alpha_{m2} & \cdots & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_n)}\alpha_{m1}^*\alpha_{mn} \\ \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_1)}\alpha_{m2}^*\alpha_{m1} & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_2)}|\alpha_{m2}|^2 & \cdots & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_n)}\alpha_{m2}^*\alpha_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_1)}\alpha_{mn}^*\alpha_{m1} & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_2)}\alpha_{mn}^*\alpha_{m2} & \cdots & \sum_m e^{i(\xi_m+\chi_n)}|\alpha_{mn}|^2 \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 e^{i(\xi_m(t)+\chi_n(t)+\Delta\phi)}. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.2) na eq.(3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
 I &= 1 + \text{Re}\left\{ \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 e^{i(\xi_m(t)+\chi_n(t)+\Delta\phi)} \right\} \\
 &= 1 + \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \cos(\xi_m(t) + \chi_n(t) + \Delta\phi) \\
 &= 2 \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \cos^2\left(\frac{\xi_m(t) + \chi_n(t) + \Delta\phi}{2}\right). \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

¹Caso $\sum_m \xi_m = c$ por exemplo, podemos colocar $e^{ic/d}$ em evidência na matriz e redefinir cada fase fazendo $\xi'_m = \xi_m - c/d$, e agora $\sum_m \xi'_m = 0$. Portanto, no caso $\sum_m \xi_m \neq 0$ isso apenas resultaria na adição de uma fase trivial que poderia ser incorporada em ϕ_s .

A eq.(3.3) nos permite então obter teoricamente o padrão esperado, uma vez especificados a evolução através dos parâmetros $\xi_m(t)$ e $\chi_n(t)$ e o estado através dos coeficientes α_{mn} .

3.2 Previsões teóricas

Vamos analisar o MES anticorrelacionado nos casos de um qubit ($d = 2$), de um qutrit ($d = 3$) e de um ququart ($d = 4$). Os estados em cada caso são dados por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|12\rangle + |21\rangle) \quad (d = 2) \quad (3.4)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|13\rangle + |22\rangle + |31\rangle) \quad (d = 3) \quad (3.5)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|14\rangle + |23\rangle + |32\rangle + |41\rangle) \quad (d = 4) \quad (3.6)$$

ou seja, $\alpha_{m,d-m+1} = 1/\sqrt{d}$ e $\alpha_{m,n} = 0$ se $n \neq d - m + 1$.

Apesar da possibilidade de operar independentemente em cada qudit e implementar evoluções locais totalmente diferentes, vamos abordar apenas o caso mais simples em que as operações em cada parte são essencialmente a mesma, atentando para o detalhe de que elas serão iguais para modos m e n simetricamente opostos. Mesmo com essa simplificação as influências do emaranhamento e da dimensão do espaço de Hilbert já se revelam através do comportamento das curvas de interferência. As operações serão descritas por um parâmetro real t no intervalo $t \in [0, 1]$, sendo que vamos escolher

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{2}t \\ \xi_2 = \chi_1 = -\frac{\pi}{2}t \end{aligned} \right\} d = 2 \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \chi_3 = \frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}(2t - 1)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_2 = \chi_2 = -\frac{2\pi}{3}t \\ \xi_3 = \chi_1 = \frac{\pi}{3}(2t - 1)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} d = 3 \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \chi_4 &= -\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}(1-2t)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_2 = \chi_3 &= \frac{\pi}{4}t \\ \xi_3 = \chi_2 &= \frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}(1-2t)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \xi_4 = \chi_1 &= -\frac{3\pi}{4}t \end{aligned} \right\} d=4 \quad (3.9)$$

onde $H(t)$ é a função de Heaviside definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = 0, \\ 1 & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

A tabela 3.1 exemplifica os valores obtidos para as fases quando t assume os valores 0, 0.5 e 1.

	$t = 0$	$t = 0.5$	$t = 1$
$d = 2$	$\xi_1 = \chi_2 = 0$ $\xi_2 = \chi_1 = 0$	$\xi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{4}$ $\xi_2 = \chi_1 = -\frac{\pi}{4}$	$\xi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{2}$ $\xi_2 = \chi_1 = -\frac{\pi}{2}$
$d = 3$	$\xi_1 = \chi_3 = 0$ $\xi_2 = \chi_2 = 0$ $\xi_3 = \chi_1 = 0$	$\xi_1 = \chi_3 = \frac{\pi}{3}$ $\xi_2 = \chi_2 = 0$ $\xi_3 = \chi_1 = -\frac{\pi}{3}$	$\xi_1 = \chi_3 = \frac{\pi}{3}$ $\xi_2 = \chi_2 = \frac{\pi}{3}$ $\xi_3 = \chi_1 = -\frac{2\pi}{3}$
$d = 4$	$\xi_1 = \chi_4 = 0$ $\xi_2 = \chi_3 = 0$ $\xi_3 = \chi_2 = 0$ $\xi_4 = \chi_1 = 0$	$\xi_1 = \chi_4 = -\frac{\pi}{8}$ $\xi_2 = \chi_3 = \frac{\pi}{8}$ $\xi_3 = \chi_2 = \frac{3\pi}{8}$ $\xi_4 = \chi_1 = -\frac{3\pi}{8}$	$\xi_1 = \chi_4 = -\frac{3\pi}{4}$ $\xi_2 = \chi_3 = \frac{\pi}{4}$ $\xi_3 = \chi_2 = \frac{5\pi}{4}$ $\xi_4 = \chi_1 = -\frac{3\pi}{4}$

TABELA 3.1: Valores das fases nas eqs.(3.7), (3.8) e (3.9) para $t = 0$, $t = 0.5$ e $t = 1$.

A idéia por trás dessa escolha é fazer com que na metade da evolução os fasores $e^{i(\xi_m + \chi_{d-m+1})}$ estejam uniformemente distribuídos no círculo trigonométrico, e que ao final todos se alinhem na posição correspondente à γ_s (ou um múltiplo dela, mesmo que negativo), como ilustra a Fig.3.3.

As curvas de interferência previstas em todos os casos são mostradas na Fig.3.4. Como podemos ver o comportamento é o mesmo para todas as dimensões. As franjas de interferência desaparecem completamente quando $t = 1/2$ pois o estado de dois qudits se torna ortogonal ao estado inicial. Em seguida, as franjas reaparecem com um deslocamento de fase fracionário igual a $2\pi/d$, atingindo novamente a visibilidade máxima em $t = 1$.

Passamos agora à parte central do trabalho, onde descrevemos os experimentos feitos para gerar os estados das eqs.(3.4), (3.5) e (3.6), para aplicar as evoluções das eqs.(3.7), (3.8) e (3.9), e para observar experimentalmente as curvas da Fig.3.4.

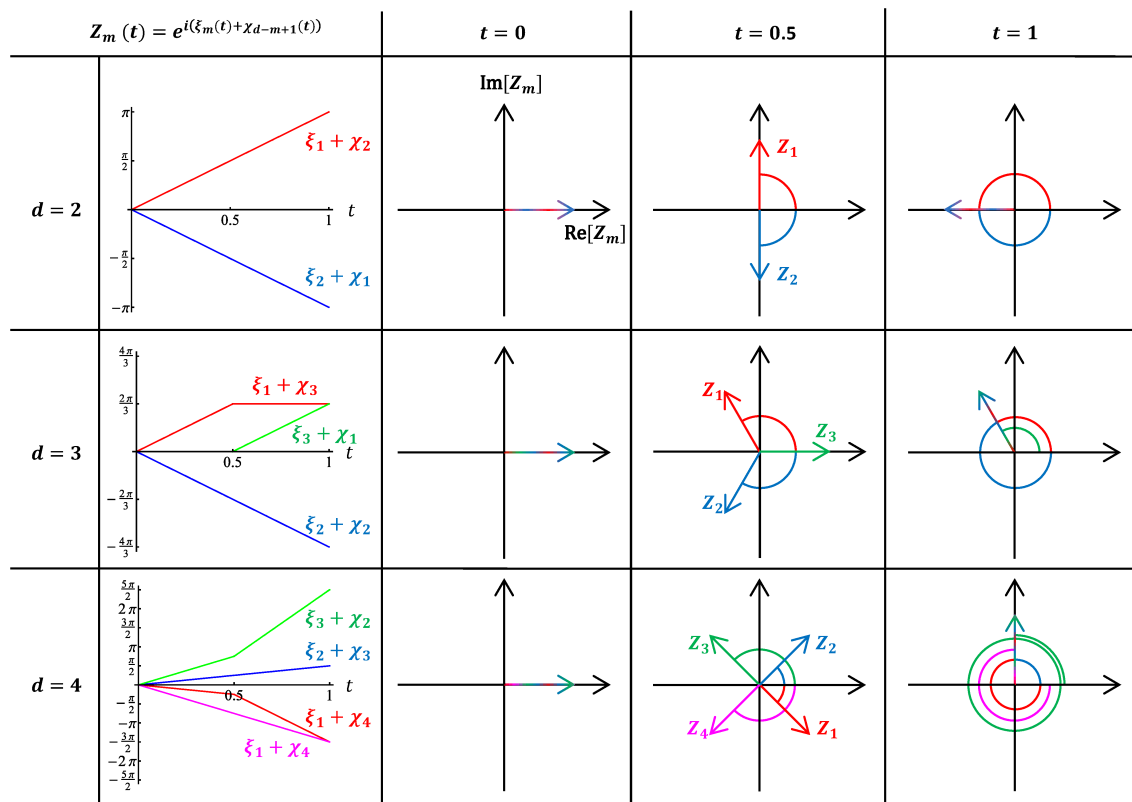


FIGURA 3.3: Evolução das fases ξ_m e χ_{d-m+1} descritas pelas eqs.(3.7), (3.8) e (3.9) (primeira coluna de gráficos), e dos respectivos fasores $e^{\xi_m + \chi_{d-m+1}}$ (segunda, terceira e quarta colunas).

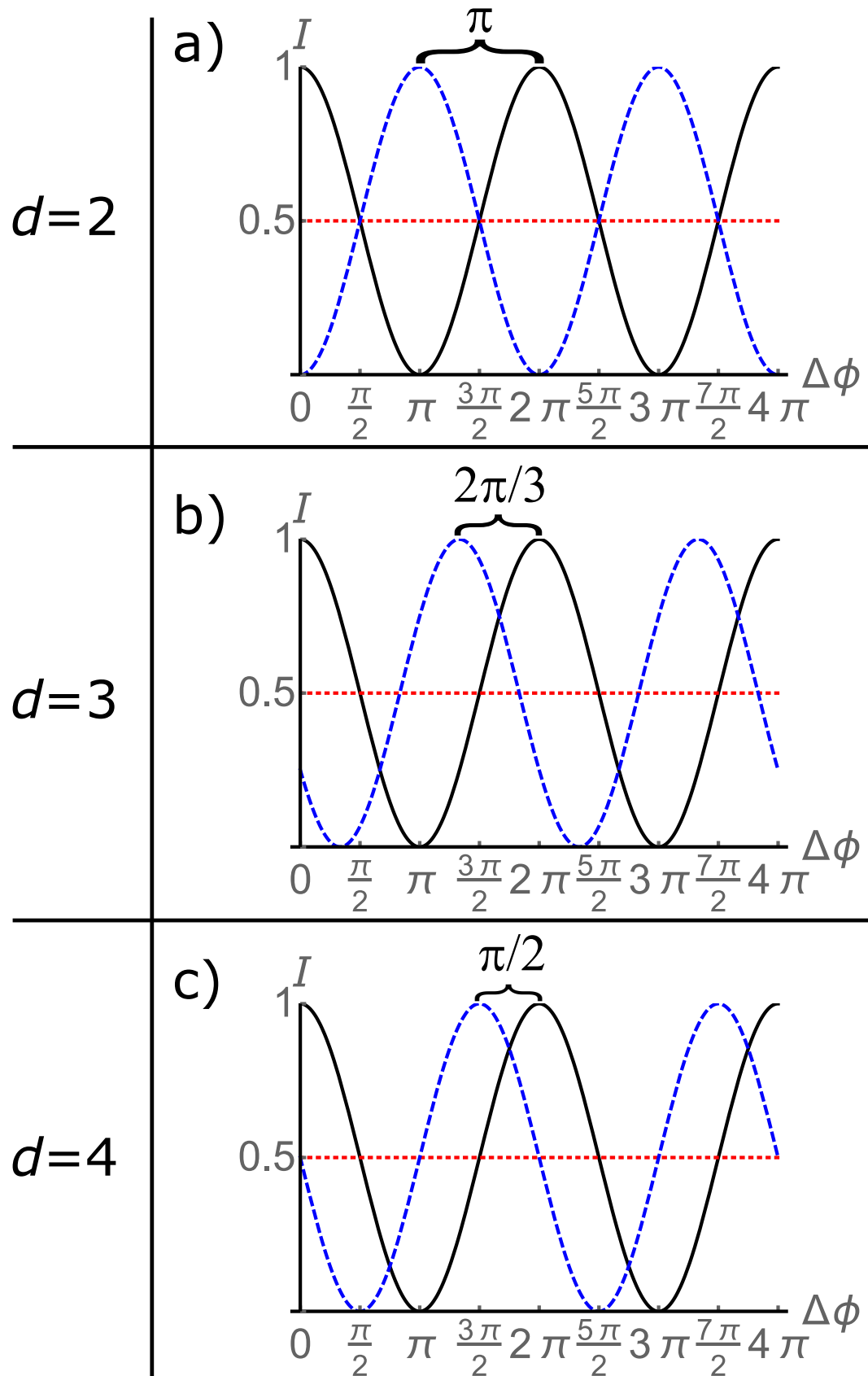


FIGURA 3.4: Curvas de interferência para a) o estado da eq.(3.4) sob a transformação das eqs.(3.7), b) o estado da eq.(3.5) sob a transformação das eqs.(3.8), e c) o estado da eq.(3.6) sob a transformação das eqs.(3.9). Todos os gráficos exibem as curvas para três valores de t : $t = 0$ (preto), $t = 0.5$ (vermelho pontilhado) e $t = 1$ (azul tracejado).

Capítulo 4

Resultados

4.1 Experimento com interferômetro Sagnac

O objetivo principal deste trabalho de doutorado é medir a FTF, e para realizar essa tarefa construímos um interferômetro óptico inspirado na proposta original apresentada em [19]. Nosso estado quântico é então o estado do par de fótons gêmeos gerado pela Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (SPDC - *Spontaneous Parametric Down Conversion*) codificado no grau de liberdade espacial[30]. Fizemos modificações na proposta original para utilizar um interferômetro do tipo Sagnac, já que por construção os fótons percorrem o mesmo caminho desde a geração até a recombinação no divisor de feixes antes de seguir para os detectores. Essa é uma condição necessária para que ocorra o chamado efeito Hong-Ou-Mandel[31] (HOM), isto é, para que haja a interferência de dois fótons. A montagem experimental utilizada é mostrada na Fig.4.1.

4.1.1 Fonte de pares de fótons emaranhados em caminho transversal

Utilizamos um laser contínuo de 355nm modelo Genesis CX-355-100-STM da empresa Coherent operando a 90mW para realizar o experimento. O feixe de laser passa por uma lente L_P de foco 30cm e bombeia um cristal não linear β -Borato de Bário (BBO) de 1mm de espessura, gerando pares de fótons em 710nm com um casamento de fase Tipo II ajustado para que a propagação dos fótons seja colinear. Para este tipo de casamento de fase e o feixe de bombeamento com polarização vertical, os fótons gerados possuem um deles polarização horizontal e o outro vertical. Um espelho dicróico (D) é colocado após o cristal para refletir o laser de bombeamento, enquanto os pares de fótons seguem para uma fenda múltipla (FM) onde são produzidos os chamados estados de fenda[32–34]. Produzir esses estados nos permite trabalhar com o grau de liberdade

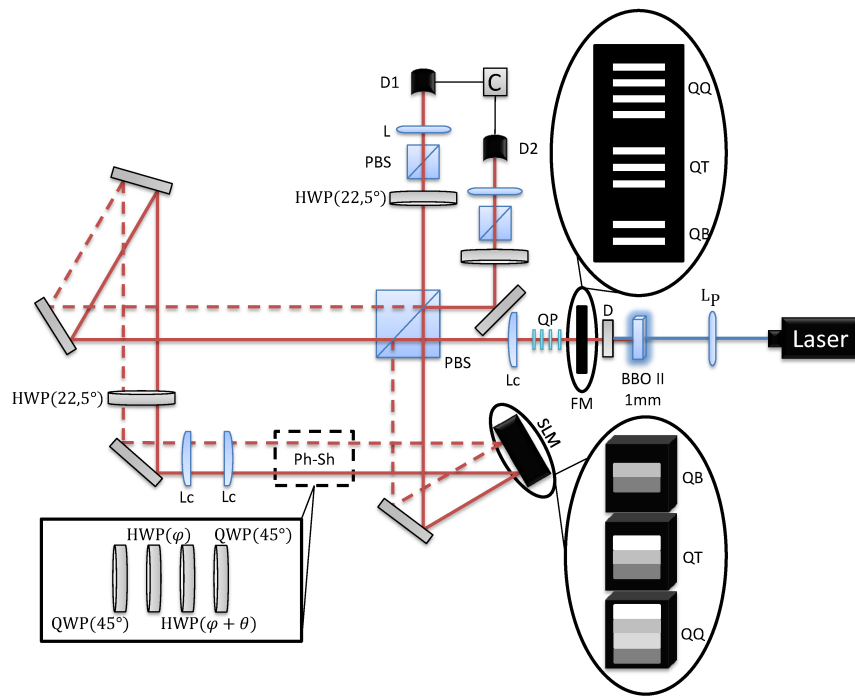


FIGURA 4.1: Esquema da montagem experimental para medir a FTF. Um feixe de laser contínuo de 355nm passa por uma lente L_P de foco 30cm e incide em um cristal não linear (BBO tipo II de 1mm) gerando dois feixes colineares de fótons emaranhados em 710nm. A parcela do laser de bombeamento transmitida no cristal é refletida de volta pelo espelho dicróico (D). Os feixes gerados incidem em uma fenda múltipla (FM) colocada no plano focal da lente L_P onde são definidos os estados de fenda. As fendas possuem $100\mu\text{m}$ de largura e separação centro a centro de $250\mu\text{m}$. Quatro placas de quartzo (QP) de $\sim 1\text{mm}$ são colocadas após as fendas para compensar a diferença de caminho óptico entre os fótons com polarizações ortogonais gerados no BBO. Os fótons entram em um interferômetro Sagnac com um PBS de entrada e saída percorrendo caminhos em direções opostas e que não estão sobrepostos longitudinalmente. O SLM e as placas de onda dentro no interferômetro implementam as operações unitárias locais necessárias para se observar a FTF. As lentes cilíndricas (Lc) de foco 5cm, uma colocada antes do interferômetro com foco nas fendas e duas constituindo um telescópio dentro do interferômetro Sagnac, são responsáveis por manter os caminhos bem definidos durante a propagação por todo o interferômetro. Após se recombinarem no PBS, ambas as saídas passam por um conjunto HWP-PBS-Lente(L)-Detector(D1 e D2) que constitui um aparato de detecção. Na entrada de cada detector há um filtro de interferência de 10nm de largura de banda centrado em 710nm, além de uma lente de microscópio que acopla os fótons em uma fibra multimodo conectada ao detector. As contagens em coincidência são registradas em uma janela temporal de 5ns.

posição transversal no qual as variáveis são discretas, e a etiqueta de cada modo é dada por cada fenda que constitui a fenda múltipla. O número de fendas determina a dimensão do estado de caminho do fóton e pode ser ajustado para se obter diferentes dimensões, o que é feito deslocando-se verticalmente um arranjo contendo diferentes fendas múltiplas (ver detalhe superior da Fig.4.1). Elas possuem $100\mu\text{m}$ de largura e a separação centro a centro é de $250\mu\text{m}$. Em [34] foi mostrado que o MES anticorrelacionado é gerado se o perfil transversal do feixe de bombeamento é mais estreito que a separação entre as fendas no plano em que elas estão, o que é bem aproximado quando o feixe de bombeamento é focalizado no plano das fendas. Sendo assim, posicionamos a fenda múltipla no plano focal da lente L_P . O estado logo após as fendas pode ser escrito como

$$|\psi_0\rangle = \sum_{m,n} \alpha_{mn} |mH, nV\rangle, \quad (4.1)$$

onde α_{mn} é a amplitude de probabilidade de se obter um fóton *signal* passando pela fenda m e um fóton *idler* passando pela n (por razões históricas os fótons gêmeos da SPDC são denominados *signal* e *idler*). Apesar de que nesta montagem trabalhamos com o MES, vamos representar o estado mais geral com todos os coeficientes α_{mn} a princípio e mostrar que a taxa de detecção em coincidência na saída do interferômetro possui o mesmo comportamento da eq.(3.3).

4.1.2 Interferômetro tipo Sagnac implementando operações locais

Um conjunto de quatro placas de quartzo (QP) de aproximadamente 1mm de espessura é inserido após a fenda múltipla para compensar a diferença de caminho entre os fótons devido a birrefringência do cristal, fenômeno este conhecido como *walkoff* longitudinal[35]. Mais a frente serão apresentadas as medidas que determinaram a quantidade de placas necessária e que verificaram através do efeito HOM a indistinguibilidade dos fótons nas variáveis longitudinais de espaço e tempo. Em seguida, os fótons passam por uma lente cilíndrica L_C de foco 5cm cujo plano focal está sobre a fenda múltipla, com o objetivo de que a imagem das fendas se forme distante da lente onde o modulador espacial de luz (SLM - *Spatial Light Modulator*) vai estar. O par é dividido ao incidir em um PBS (*Polarizing Beam Splitter*) de modo que ambos irão percorrer o mesmo interferômetro propagando em direções contrárias por caminhos longitudinais que não estão sobrepostos, até se recombinarem novamente no PBS. Naturalmente, existe um atraso entre eles devido ao *walkoff* do cristal, que é compensado com as placas de quartzo.

Após entrar no interferômetro, o fóton *signal* passa por uma placa de meia onda (HWP - *Half-Wave Plate*) orientada a $22,5^\circ$ que realiza a transformação $|mH\rangle \rightarrow (|mH\rangle +$

$|mV\rangle)/\sqrt{2}$. Logo após a HWP há outras duas lentes cilíndricas L_C de foco 5cm em uma configuração de telescópio confocal, com o intuito de estender a propagação da imagem da fenda múltipla até o SLM e pelo resto do experimento. Isso é necessário porque a imagem projetada pela primeira L_C não está colimada, e antes de chegar no SLM a divergência faz com que o tamanho do feixe fique incompatível com a tela do SLM e com os demais elementos ópticos. Em seguida o *signal* passa por um deslocador de fase (Ph-Sh - *Phase Shifter*) composto por duas placas de um quarto de onda (QWP - *Quarter-Wave Plate*) orientadas a 45° , uma HWP orientada a um ângulo φ , e uma HWP orientada a um ângulo $\varphi + \theta$ (ver a ordem no detalhe inferior esquerdo da Fig.4.1). É possível obter através das matrizes de Jones para as placas QWP e HWP a transformação promovida pelo Ph-Sh, que em geral é $|H\rangle \rightarrow e^{i2\theta} |V\rangle$ e $|V\rangle \rightarrow e^{-i2\theta} |H\rangle$. Os cálculos são apresentados no apêndice B. Dessa forma, o *signal* sofre a transformação $(|mH\rangle + |mV\rangle) \rightarrow (|mH\rangle + e^{i4\theta} |mV\rangle)$ (o fator $e^{-i2\theta}$ colocado em evidência se torna uma fase global e por isso não está explicitado).

Na sequência, o fóton incide no SLM, que é um dispositivo programável capaz de modular a fase do feixe refletido em uma tela de cristal líquido presente nele. A modulação é feita através de um programa de computador que utiliza escalas de cinza (EC) como parâmetro, sendo que a cada uma delas corresponde uma certa tensão elétrica enviada ao SLM. A tensão provoca um reordenamento das moléculas do cristal líquido, resultando na modulação de fase desejada. Utilizamos um SLM modelo LCOS-SLM x10468 da empresa Hamamatsu, que modula apenas a componente de polarização na direção paralela àquela de menor dimensão do aparelho (ver figura Fig.4.2), e que fizemos coincidir com a direção de polarização horizontal dos fótons. Esta característica nos é extremamente útil para que possamos realizar uma operação no grau de liberdade de caminho transversal, porém condicionada à polarização. De acordo com o fabricante, para o funcionamento correto do aparelho, o ângulo entre o feixe incidente e a direção normal à tela de cristal líquido precisa ser igual ou menor do que 10° , de modo que a geometria do interferômetro montado possui um caminho interno em forma de triângulo por onde os fótons propagam para satisfazer esta condição.

A implementação da operação diagonal $\bar{U}_s = \sum_m e^{i\xi_m} |m\rangle \langle m|$ corresponde exatamente a introduzir uma fase para cada modo de fenda m definido no plano da fenda múltipla ou em um plano onde esteja projetada a imagem dela. Por isso é necessário propagar a imagem das fendas até a tela do SLM. As fases são introduzidas dividindo-se a tela do SLM em d regiões retangulares com EC diferentes (ver detalhe inferior direito da Fig.4.1) que coincidem com cada modo de fenda, sendo que a relação entre as EC e a fase ξ_m vem de uma calibração feita anteriormente. Portanto, após o SLM, o *signal* sofre a transformação $(|mH\rangle + e^{i4\theta} |mV\rangle) \rightarrow (e^{i\xi_m} |mH\rangle + e^{i4\theta} |mV\rangle)$.



FIGURA 4.2: Foto do SLM da empresa Hamamatsu, modelo LCOS-SLM x10468.

Analisando agora o fóton *idler*, ao entrar no interferômetro ele ganha uma fase $\pi/2$ devido à reflexão no PBS, porém ela aparece como um fator de fase global. Como o fóton possui polarização vertical o SLM não adiciona fase, o que significa $\chi_n = 0$ e $\bar{V}_i = \mathbb{I}$. Isso a princípio seria um problema, mas na verdade representa uma simplificação no experimento. Se observarmos que para o MES só os termos com $n = d - m + 1$ contribuem para o cálculo da curva de interferência na eq.(3.3), e que nas transformações escolhidas temos $\xi_m = \chi_{d-m+1}$, podemos aplicar em um dos fótons as fases $\xi'_m = 2\xi_m$ e obter o mesmo resultado para I . Para $d = 2$ por exemplo temos

$$I = \cos^2\left(\frac{\xi_1(t) + \chi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_2(t) + \chi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right),$$

mas como $\xi_1 = \chi_2$ e $\xi_2 = \chi_1$, temos

$$I = \cos^2\left(\frac{2\xi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{2\xi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right).$$

Já no caso do estado produto teríamos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\xi_1(t) + \chi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_1(t) + \chi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. \cos^2\left(\frac{\xi_2(t) + \chi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_2(t) + \chi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\xi_1(t) + \xi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{2\xi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. \cos^2\left(\frac{2\xi_2(t) + \Delta\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi_2(t) + \xi_1(t) + \Delta\phi}{2}\right) \right],
\end{aligned}$$

sendo impossível um SLM aplicar no mesmo fóton uma fase ξ'_1 que equivalha simultaneamente a $\xi_1 + \xi_2$ e $2\xi_1$. Dessa forma, desde que o estado gerado seja emaranhado, basta utilizar apenas um SLM e realizar uma operação local em uma das partes para observar o mesmo efeito visto no caso em que se faz operações locais nas duas partes do estado bipartido.

Na direção contrária à do *signal*, as transformações promovidas pelo Ph-Sh são $|H\rangle \rightarrow -e^{-i2\theta}|V\rangle$ e $|V\rangle \rightarrow -e^{i2\theta}|H\rangle$ (ver apêndice B), e portanto o *idler* se transforma de acordo com $|nV\rangle \rightarrow |nH\rangle$ (o fator $-e^{i2\theta}$ se torna uma fase global). Após passar pela HWP, o fóton sofre a transformação $|nH\rangle \rightarrow (|nH\rangle - |nV\rangle)/\sqrt{2}$, e o estado logo antes da recombinação no PBS é

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{-i}{2} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (e^{i\xi_m} |mH\rangle + e^{i4\theta} |mV\rangle) \otimes (|nH\rangle - |nV\rangle) \\
&= \frac{-i}{2} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (e^{i\xi_m} |mH, nH\rangle - e^{i\xi_m} |mH, nV\rangle + e^{i4\theta} |mV, nH\rangle - e^{i4\theta} |mV, nV\rangle).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.3 Curva de interferência através da detecção em coincidência

A interferência de dois fótons é observada através das contagens em coincidência. Como mencionado no capítulo 3, uma contagem em coincidência ocorre quando os dois detectores detectam os fótons gêmeos simultaneamente. “Simultaneamente” é uma idealização, e experimentalmente utilizamos uma janela temporal de 5ns. Podemos perceber então que apenas os termos $|mH, nH\rangle$ e $|mV, nV\rangle$ contribuem para as contagens em coincidência, já que só nesses casos os fótons do par vão para detectores diferentes após a

recombinação no PBS, produzindo uma contagem válida. Como esses termos possuem polarizações ortogonais eles são distinguíveis e não podem interferir. Para apagar a informação de polarização inserimos uma HWP orientada a $22,5^\circ$ e um PBS em cada saída do interferômetro. Em seguida os feixes são focalizados por lentes L de foco 20cm em uma fibra multimodo conectada aos detectores. Logo antes da entrada de cada fibra há um filtro de interferência centrado em 710nm com largura de banda de 10nm, e uma lente de microscópio para acoplar os fótons na fibra multimodo.

As contagens em coincidência são proporcionais à função de correlação

$$\langle \psi_1 | E_1^- E_2^- E_2^+ E_1^+ | \psi_2 \rangle = \| E_2^+ E_1^+ | \psi_1 \rangle \|^2, \quad (4.3)$$

onde E_j^+ (E_j^-) é a componente de frequência positiva (negativa) do operador campo elétrico no detector D_j . Em termos dos operadores campo antes da recombinação no PBS temos

$$E_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(iE_{sV}^+ + E_{iH}^+) \quad \text{e} \quad E_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{sH}^+ + iE_{iV}^+), \quad (4.4)$$

onde $E_{s\mu}^+$ e $E_{i\nu}^+$ são respectivamente os operadores para o *signal* e para o *idler* para as diferentes polarizações $\mu, \nu = H, V$. Os fatores i levam em conta as reflexões no PBS das componentes de polarização vertical dos fótons após a recombinação. Cada componente de campo é expandida em termos das funções $\eta_m(\mathbf{r})$ dos modos de fenda (distribuição espacial do campo propagado após ser transmitido pela fenda m) como

$$E_{s\mu}^+ = \sum_p a_{p\mu} \eta_p(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad E_{i\nu}^+ = \sum_q b_{q\nu} \eta_q(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

onde os operadores aniquilação $a_{p\mu}$ e $b_{q\nu}$ atuam nos estados de Fock do *signal* e do *idler* da seguinte forma

$$a_{p\mu} b_{q\nu} |m\sigma, n\epsilon\rangle = \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{\nu\epsilon} |vac\rangle. \quad (4.6)$$

Substituindo as eqs.(4.5) nas eqs.(4.4), e estas por sua vez junto com a eq.(4.2) na eq.(4.3), obtemos a função de correlação $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ normalizada

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \frac{1}{16} \left\| \left(i \sum_p a_{pH} \eta_p(\mathbf{r}_2) \sum_{p'} a_{p'V} \eta_{p'}(\mathbf{r}_1) + \sum_p a_{pH} \eta_p(\mathbf{r}_2) \sum_q b_{qH} \eta_q(\mathbf{r}_1) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_q b_{qV} \eta_q(\mathbf{r}_2) \sum_p a_{pV} \eta_p(\mathbf{r}_1) + i \sum_q b_{qV} \eta_q(\mathbf{r}_2) \sum_{q'} b_{q'H} \eta_{q'}(\mathbf{r}_1) \right) \right. \\
& \left. \sum_{m,n} \alpha_{mn} (e^{i\xi_m} |mH, nH\rangle - e^{i\xi_m} |mH, nV\rangle + e^{i4\theta} |mV, nH\rangle - e^{i4\theta} |mV, nV\rangle) \right\|^2.
\end{aligned}$$

Aqui podemos ver com a ajuda da eq.(4.6) que os termos em que aparecem os produtos $a_{pH}a_{p'V}$ e $b_{qV}b_{q'H}$ atuando em qualquer termo do estado zeram, em virtude de se aplicar o operador aniquilação duas vezes no mesmo qudit com apenas um modo ocupado. Além disso, os termos em que aparecem os produtos $a_{pH}b_{qH}$ e $b_{qV}a_{pV}$ atuando nos termos do estado em que a polarização de pelo menos um dos qudits é distinta da que está no índice do operador aniquilação também zeram. Assim, como dito anteriormente, apenas os termos $|mH, nH\rangle$ e $|mV, nV\rangle$ contribuem para as contagens em coincidência. A função de correlação se reduz então a

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{16} \left\| \sum_{m,n} \alpha_{mn} (\eta_m(\mathbf{r}_2) \eta_n(\mathbf{r}_1) e^{i\xi_m(t)} + \eta_n(\mathbf{r}_2) \eta_m(\mathbf{r}_1) e^{i4\theta}) |vac\rangle \right\|^2 \\
&= \frac{1}{16} \left| \sum_{m,n} \alpha_{mn} (\eta_m(\mathbf{r}_2) \eta_n(\mathbf{r}_1) e^{i\xi_m(t)} + \eta_n(\mathbf{r}_2) \eta_m(\mathbf{r}_1) e^{i4\theta}) \right|^2,
\end{aligned}$$

e podemos notar como o grau de liberdade de polarização foi utilizado como auxiliar para a implementação das operações unitárias nos qudits espaciais. Como todos os modos de fenda são acoplados na fibra de detecção, a taxa de coincidências C que segue a curva de interferência descrita na eq.(3.3) é dada pela integral da função de correlação sobre o plano transversal dos feixes

$$C = \int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Uma vez que as funções dos modos de fenda satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 \eta_m^*(\mathbf{r}_1) \eta_n(\mathbf{r}_2) = \delta_{mn} \quad ,$$

é possível mostrar que a taxa de coincidências se torna

$$C = \frac{1}{16} \sum_{m,n} \left[2|\alpha_{mn}|^2 + e^{-i(\xi_m(t)-4\theta)} \alpha_{nm}^* \alpha_{mn} + e^{i(\xi_m(t)-4\theta)} \alpha_{nm}^* \alpha_{mn} \right],$$

e se $\alpha_{nm} = \alpha_{mn}$ (que é o caso do MES) chegamos a

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{16} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 |2 + e^{-i(\xi_m(t)-4\theta)} + e^{i(\xi_m(t)-4\theta)}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 (1 + \cos(\xi_m(t) - 4\theta)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \cos^2\left(\frac{\xi_m(t) - 4\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lembrando que $\xi_m(t)$ aqui está multiplicado por um fator 2 em comparação com a seção anterior para compensar o fato de que $\chi_m(t) = 0$, e fazendo a associação $\Delta\phi \rightarrow -4\theta$, vemos que a eq.(4.7) possui a mesma forma da eq.(3.3) como necessitávamos. De fato, a interferência descrita pela eq.(4.7) pode ser pensada como o resultado da superposição do estado de dois qudits $\sum_{m,n} \alpha_{mn} e^{i(\xi_m - 4\theta)} |mH, nH\rangle$ associado a $\alpha(t)$ com o estado $\sum_{m,n} \alpha_{mn} |mV, nV\rangle$ associado a $\alpha(0)$.

4.1.4 Verificação da indistinguibilidade em caminho longitudinal e das correlações espaciais em caminho transversal dos pares de fótons

Antes de executarmos o experimento fizemos a montagem mostrada na Fig.4.3 a) para verificar a indistinguibilidade dos fótons longitudinalmente. A HWP posicionada antes do PBS transforma o estado gerado no cristal que, representando apenas o subespaço da polarização, se torna

$$|\Psi\rangle = \cos(2\varphi) \sin(2\varphi) |H, H\rangle - \cos^2(2\varphi) |H, V\rangle + \sin^2(2\varphi) |V, H\rangle - \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) |V, V\rangle, \quad (4.8)$$

onde φ é o ângulo em que a placa está orientada. Quando $\varphi = 22,5^\circ$ temos

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|H, H\rangle - |H, V\rangle + |V, H\rangle - |V, V\rangle),$$

e apenas os termos $|H, V\rangle$ e $|V, H\rangle$ contribuem para as contagens em coincidência. Em [36] efetuamos um cálculo onde vemos uma dependência dessas contagens com a diferença

entre os tempos que cada fóton leva para percorrer o caminho do cristal até o PBS. Essa dependência é evidenciada nos cálculos quando levamos em conta que os fótons não são monocromáticos, mas possuem uma incerteza em frequência dada pela largura de banda dos filtros de interferência. De acordo com a expressão calculada, quando os fótons incidem ao mesmo tempo no PBS a contagem dobra se a superposição entre $|H, V\rangle$ e $|V, H\rangle$ possui uma simetria bosônica, ou zera se a simetria da superposição for fermiônica (que é o caso do estado acima). Dessa forma, à medida que inserimos as placas de quartzo após o cristal para compensar o *walkoff* longitudinal, vemos um vale na taxa de coincidências quando o número de placas se aproxima da compensação ideal e o estado se torna indistinguível. Uma vez determinado o número de placas medimos também as coincidências em função do ângulo da HWP[37], cujo gráfico apresenta um comportamento similar no intervalo de 0° a 45° . Isso ocorre porque o estado é distinguível¹ quando o ângulo da placa é 0° , se torna indistinguível para $22,5^\circ$ e volta a ser distinguível em 45° . Os resultados obtidos são mostrados nas Figs.4.3 b) e c). Note que ao contrário do resultado mostrado na ref.[37], a taxa de coincidências para o número de placas $n > 4$ é menor que a taxa de coincidências para $n = 1, 2$ (Fig.4.3 b)). Isto se justifica pelas perdas por reflexão ao acrescentar um número maior de placas de quartzo.

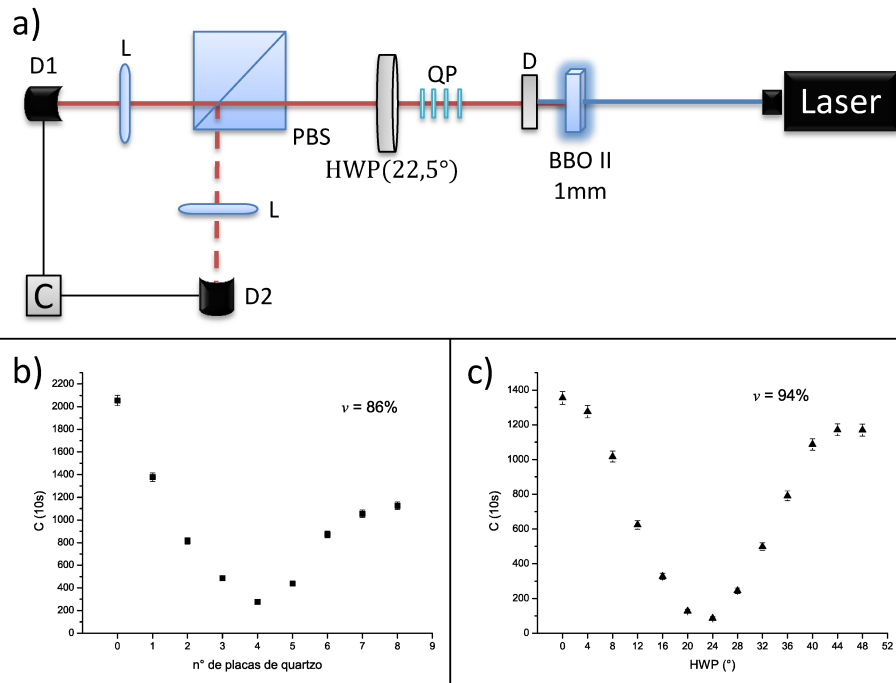


FIGURA 4.3: Testes para verificar a indistinguibilidade dos fótons gêmeos compensando-se o *walkoff* longitudinal: a) Montagem para observar o efeito HOM; b) Vale do efeito HOM em função do acréscimo de placas de quartzo; c) Vale do efeito HOM em função do ângulo da HWP. As visibilidades foram calculadas fazendo-se $(C_{max} - C_{min})/C_{max}$.

¹Mesmo já havendo a compensação das placas de quartzo, a distinguibilidade aparece na polarização, pois com a HWP em 0° ou 45° teremos um estado produto de acordo com a eq.(4.8).

Finalmente, para confirmar se o interferômetro Sagnac realmente não introduziu alguma diferença de tempo na propagação dos fótons, refizemos o teste girando a HWP para a montagem mostrada na Fig.4.4 a). O resultado é mostrado na Fig.4.4 b).

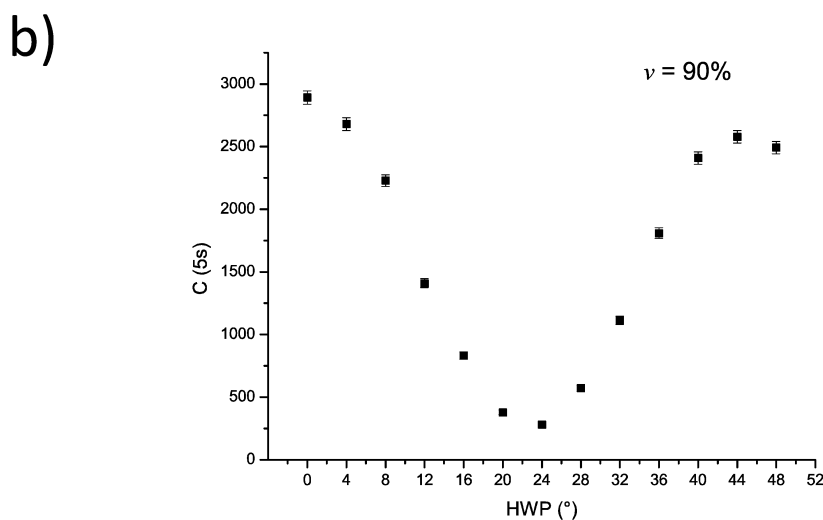
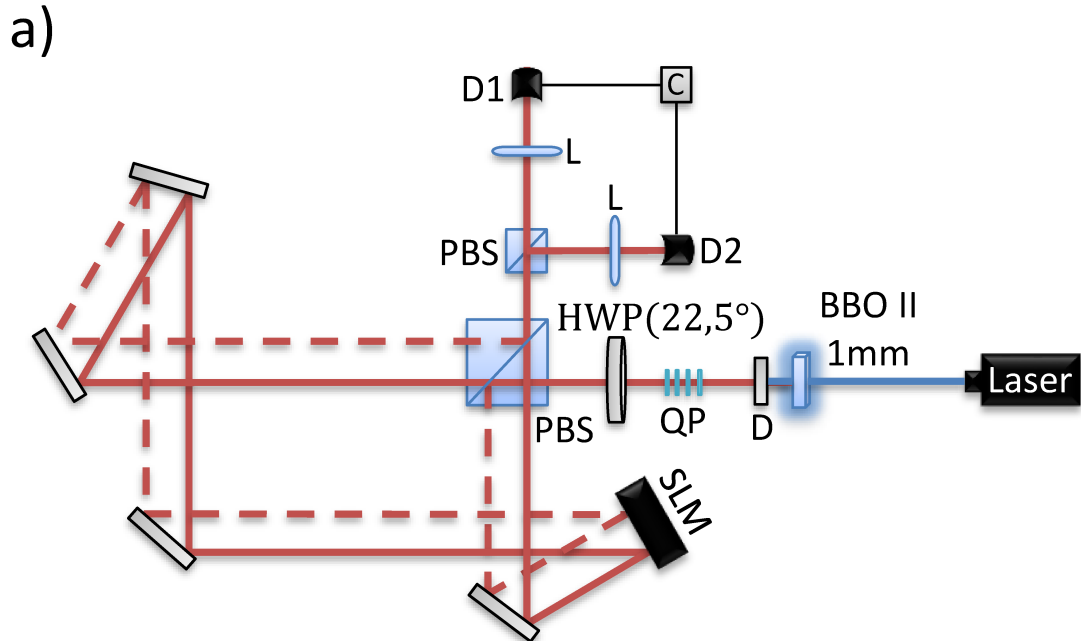


FIGURA 4.4: Teste para verificar a indistinguibilidade dos fótons gêmeos passando pelo interferômetro. a) Montagem para observar o efeito HOM; b) Vale do efeito HOM em função do ângulo da HWP.

O próximo passo foi testar a correlação espacial entre os modos de fenda para verificar se o estado gerado realmente se aproxima do MES, e para isso deixamos a montagem na configuração final com o SLM e o Ph-Sh ajustados para não acrescentar nenhuma fase. Uma fenda simples móvel foi colocada logo antes de cada lente que focaliza nos detectores, onde está a imagem projetada, podendo as fendas serem varridas verticalmente para selecionar um modo de fenda por vez para ser acoplado na fibra de detecção. Coletamos

as contagens em coincidência entre todos os pares de modos possíveis correspondentes a $|\alpha_{mn}|^2$, e os resultados para $d = 2, 3, 4$ são mostrados nas Figs.4.5 a), b) e c).

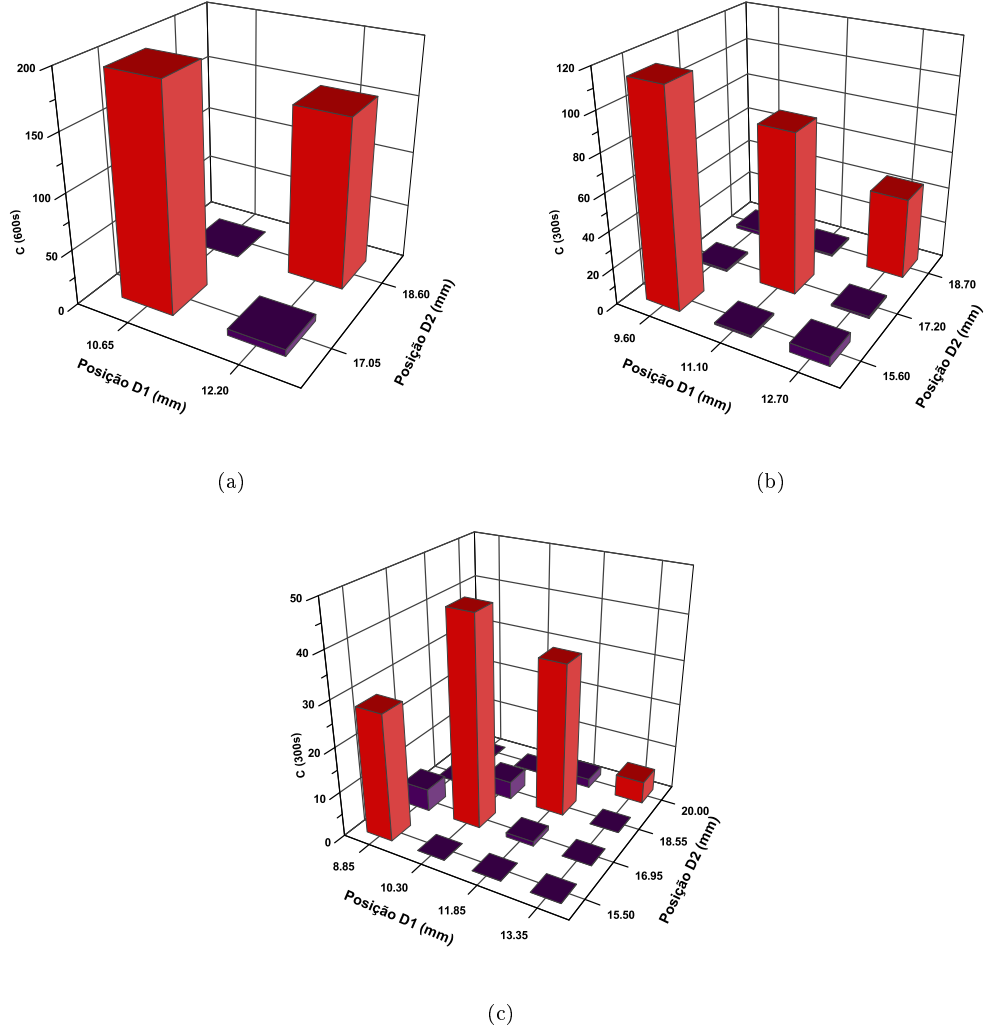


FIGURA 4.5: Testes para verificar a correlação espacial nas variáveis de caminho transversal dos fótons. O teste é feito medindo-se as contagens em coincidência após ser selecionado apenas um modo de fenda em cada saída do interferômetro para ser detectado. As taxas de coincidências medidas para cada par de modos de fenda são proporcionais às amplitudes de probabilidade $|\alpha_{mn}|^2$. a) População da matriz de coeficientes para dois qubits, b) dois qutrits e c) dois ququarts. Para o MES anticorrelacionado espera-se observar contagens apenas na antidiagonal e que o valor das contagens sejam iguais.

Vemos que só há contagens apreciáveis na antidiagonal como é esperado para o MES, mas há um desbalanceamento² entre os coeficientes dos estados. Verificamos então que os estados de dois qudits obtidos são parcialmente emaranhados. No entanto, esse desbalanceamento não influencia no deslocamento de fase entre as curvas dado por $\arg\{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\bar{U}_s(t)\alpha(0)\bar{V}_i^\top(t)]\}$, mas apenas faz com que a visibilidade dada por $|\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(t)]|$ seja não nula em $t = 0.5$, e assuma um valor inferior ao inicial em $t = 1$. Podemos ver isso

²Devemos dizer que o desbalanceamento não necessariamente ocorre apenas na preparação do estado, mas pode ser devido também às perdas na propagação e na detecção dos fótons.

tomando o ququart como exemplo e gerando uma curva de modo semelhante ao que foi feito na Fig.3.4c), porém utilizando os valores obtidos experimentalmente para $|\alpha_{mn}|^2$. Fizemos isso normalizando as contagens de coincidências da Fig.4.5c), e o resultado é mostrado na Fig.4.6. Desta forma, a medição da FTF não é comprometida.

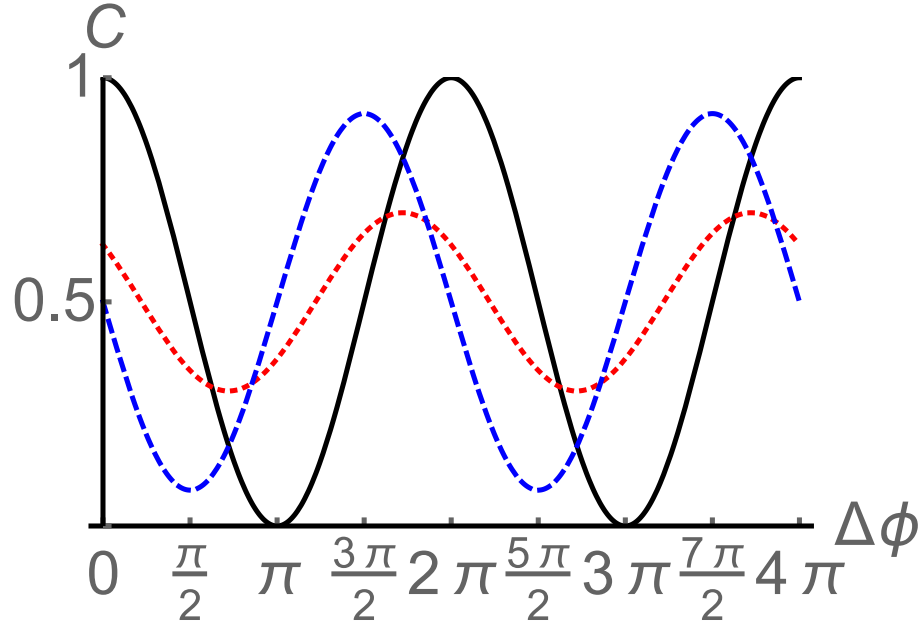
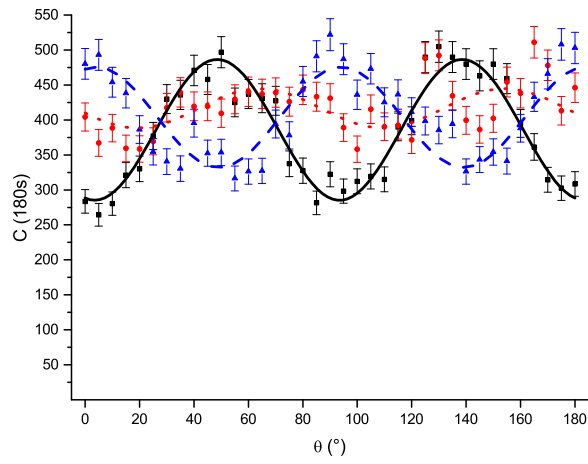


FIGURA 4.6: Curvas de interferência para o ququart com os coeficientes determinados experimentalmente. São exibidas as curvas para três valores de t : $t = 0$ (preto), $t = 0.5$ (vermelho pontilhado) e $t = 1$ (azul tracejado). No programa de computador utilizado para gerar as curvas calculamos também a visibilidade para $t = 0.5$ e $t = 1$, que são respectivamente 0.70 e 0.92, além do deslocamento de fase que é 90° .

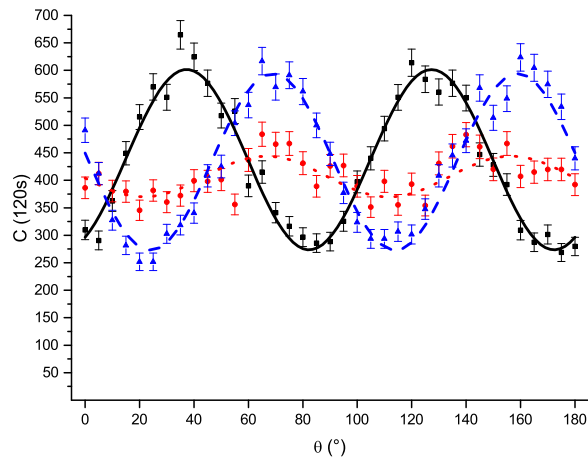
4.1.5 Discussão dos resultados

Os resultados experimentais para os casos teóricos vistos nas Figs.3.4 a), b) e c) são mostrados nas Figs.4.7 a), b) e c). Os dados foram ajustados através da expressão $C = A(1 - v \cos[4\theta + c])$, cujos parâmetros para cada ajuste são mostrados na tabela 4.1.

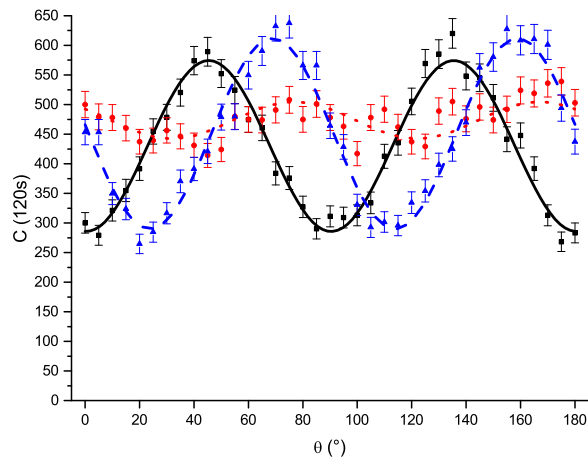
Vemos que o comportamento é semelhante ao previsto teoricamente, com a curva exibindo para $t = 0.5$ uma visibilidade quase nula e para $t = 1$ um valor próximo ao de $t = 0$. O deslocamento correspondente a FTF é dado pela diferença entre os parâmetros c para $t = 0$ e $t = 1$, sendo $(182 \pm 7)^\circ$, $(126 \pm 3)^\circ$ e $(94 \pm 3)^\circ$ para os qubits, os qutrits e os ququarts, respectivamente. Procuramos por possíveis causas para as diferenças entre as visibilidades previstas e as medidas, e apontamos as seguintes: primeiro a visibilidade do vale no efeito HOM indica que ainda existe alguma distinguibilidade entre os fótons, segundo que o desbalanceamento na antidiagonal da matriz de coeficientes contribui para alterar as visibilidades, terceiro uma eventual ineficiência introduzida pelo Ph-Sh, e por último uma imperfeição no casamento dos modos transversais na saída do interferômetro.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.7: Dados experimentais dos padrões de interferência para a) o estado da Fig.4.5 a) sob a transformação das eqs.(3.7), b) o estado da Fig.4.5 b) sob a transformação das eqs.(3.8) e c) o estado da Fig.4.5 c) sob a transformação das eqs.(3.9). Todos os gráficos exibem as contagens de coincidências e os ajustes para os três valores de t : $t = 0$ (quadrados e linha pretos), $t = 0.5$ (círculos e pontilhado vermelhos) e $t = 1$ (triângulos e tracejado azuis).

	$t = 0$	$t = 0.5$	$t = 1$
Parâmetros	$d = 2$		
A	(386 ± 4)	(417 ± 5)	(404 ± 5)
v	(0.26 ± 0.01)	(0.07 ± 0.02)	(0.18 ± 0.02)
c	$-(14 \pm 3)$	$-(77 \pm 15)$	$-(196 \pm 6)$
	$d = 3$		
A	(438 ± 4)	(407 ± 5)	(434 ± 5)
v	(0.38 ± 0.01)	(0.09 ± 0.02)	(0.37 ± 0.01)
c	(31 ± 2)	$-(86 \pm 10)$	$-(96 \pm 2)$
	$d = 4$		
A	(430 ± 3)	(474 ± 4)	(451 ± 4)
v	(0.34 ± 0.01)	(0.07 ± 0.01)	(0.37 ± 0.01)
c	$-(2 \pm 2)$	$-(128 \pm 11)$	$-(96 \pm 2)$

TABELA 4.1: Valores dos parâmetros de ajuste para os dados experimentais das Figs.4.7.

As duas últimas foram testadas utilizando um laser de He-Ne, sendo que o Ph-Sh gerou curvas com visibilidade próximas de 1 e a interferência dos modos cruzando o interferômetro ficou em torno de 0.4. Portanto, o casamento entre os modos é a principal causa das diferenças nas visibilidades medidas em relação às previsões teóricas.

4.2 Experimento com fonte emaranhada em polarização

A seguir vamos descrever a segunda montagem que construímos para medir novamente a FTF. Ela traz uma vantagem em relação à montagem anterior porque não é necessário haver um interferômetro longitudinal (Mach-Zehnder, Saganac por exemplo), eliminando a tarefa de tornar os fótons indistinguíveis em caminho longitudinal. Em contrapartida, é preciso que haja emaranhamento também no grau de liberdade de polarização. A Fig.4.8 exibe a nova montagem. Desta vez, ao invés de termos um cristal não linear na geração dos fótons gêmeos pela SPDC, existem dois cristais com casamento de fase tipo I e com as direções dos eixos ópticos ortogonais entre si. Em [38] foi demonstrado que nessa configuração com os cristais cruzados o estado de polarização gerado é

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + e^{i\lambda}|V, V\rangle), \quad (4.9)$$

onde o fator de fase $e^{i\lambda}$ é o mesmo que existe entre as componentes de polarização do laser de bombeamento que geram os fótons em cada cristal. Este é exatamente o tipo de estado pós selecionado pelo efeito HOM na montagem anterior.

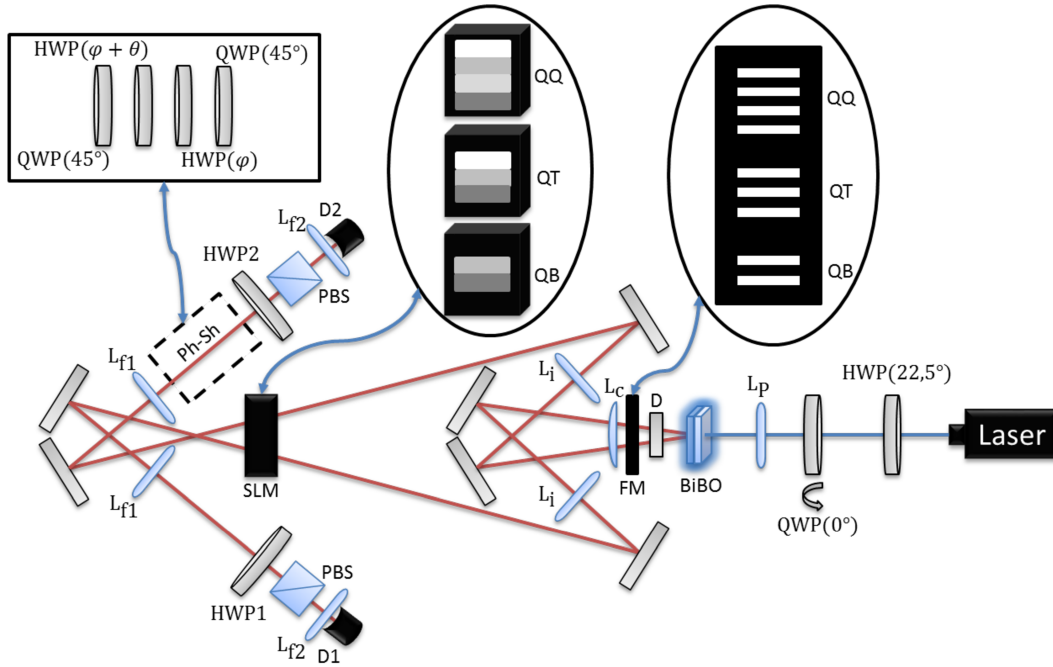


FIGURA 4.8: Esquema da montagem experimental para medir a FTF. Um feixe de laser contínuo de 355nm passa por uma HWP orientada a $22,5^\circ$ que deixa o estado de polarização linear a 45° . Em seguida há uma QWP fixada em 0° que pode ser inclinada em relação ao plano de incidência do feixe inserindo um fator $e^{i\lambda}$ entre as componentes de polarização do feixe de laser. Mais adiante o feixe passa por uma lente L_P de foco 30cm e incide em dois cristais não lineares (BiBO tipo I de 0,5mm) que estão colados um ao outro, gerando dois feixes não-colineares de fótons em 710nm emaranhados em momento e polarização. O espelho dicróico (D) reflete a parcela do laser de bombeamento transmitida no cristal. Os feixes gerados incidem em uma fenda múltipla (FM) colocada no plano focal da lente L_P onde são definidos os estados de fenda como na subseção anterior. Na sequência uma lente cilíndrica L_C de foco 7,5cm e duas lentes L_i de foco 15cm projetam uma imagem ampliada da fenda múltipla no SLM. Em um dos braços é colocado o Ph-Sh para implementar juntamente com o SLM as operações unitárias locais necessárias para se observar a FTF. Os feixes são direcionados para os detectores (D1 e D2) passando por duas lentes L_{f1} de foco 30cm, duas lentes L_{f2} de foco 15cm, e pelo conjunto HWP(1 e 2)-PBS, constituindo o aparato de detecção. Como antes há na entrada de cada detector um filtro de interferência de 10nm de largura de banda centrado em 710nm e uma lente de microscópio que acopla os fótons nas fibras, e as contagens de coincidência são resgistradas em uma janela temporal de 5ns.

O feixe do laser de bombeamento passa por uma HWP orientada a $22,5^\circ$ que deixa o estado de polarização linear a 45° . Assim, suas componentes H e V geram na mesma proporção em cada cristal. Em seguida há uma QWP fixada em 0° cuja superfície onde o feixe incide pode ser inclinada, proporcionando um ajuste do fator $e^{i\lambda}$ graças à sua birrefringência[38]. Em nossa montagem ajustamos para que ele valha -1. Após passar pela lente L_P o feixe de laser bombeia dois cristais BiBO de 0,5mm de espessura cada, ajustados para que a propagação dos fótons gerados não seja colinear. Novamente o espelho dicróico reflete o laser de bombeamento e transmite os fótons gêmeos que passam pela fenda múltipla posicionada no plano focal da lente L_P . Podemos então neste ponto

escrever o estado do par de fótons nas variáveis de caminho e polarização da seguinte forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (|mH, nH\rangle - |mV, nV\rangle). \quad (4.10)$$

Na sequência há uma lente cilíndrica L_C e duas lentes L_i projetando uma imagem ampliada da fenda múltipla no plano do SLM, a fim de que cada modo de fenda seja transmitido por fileiras diferentes de pixels da tela do SLM. Nesta montagem utilizamos um SLM de transmissão da empresa Meadowlark modelo D3128 (ver figura Fig.4.9), que novamente só atua na polarização H.



FIGURA 4.9: Foto do SLM da empresa Meadowlark, modelo D3128.

Como ambos os fótons passam por ele, agora temos a liberdade de implementar ambas as operações \bar{U}_s e \bar{V}_i dividindo a tela do SLM em duas partes. Em um dos braços está o Ph-Sh para introduzir a fase relativa entre as componentes de polarizações H e V do fóton idler. Assim, o estado da eq.(4.10) se torna

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i2\theta}}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} \alpha_{mn} (e^{i(\xi_m + \chi_n)} |mH, nV\rangle - e^{-i4\theta} |mV, nH\rangle). \quad (4.11)$$

Atentando para o fato de que agora os operadores campo dos detectores são dados por

$$E_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{sH}^+ + E_{sV}^+) \quad \text{e} \quad E_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{iH}^+ + E_{iV}^+), \quad (4.12)$$

podemos realizar cálculos semelhantes aos anteriores e encontrar a seguinte expressão para a contagem de coincidências

$$C = \frac{1}{2} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \sin^2\left(\frac{\xi_m(t) + \chi_n(t) + 4\theta}{2}\right). \quad (4.13)$$

Novamente foram utilizados uma HWP e um PBS no caminho de cada fóton para apagar a informação de polarização, e as lentes L_f direcionam os feixes para os detectores.

Aqui vemos claramente a característica interessante, mencionada no início desta seção, que esta montagem possui: obtém-se uma expressão para a contagem de coincidências essencialmente igual à curva de interferência derivada na eq.(3.3), entretanto, não é necessário utilizar um interferômetro longitudinal. A fonte de fótons emaranhados em polarização nos permite realizar a detecção diretamente, sem precisar recombinar os feixes em um PBS como na montagem anterior. O estado do par de fótons na saída do interferômetro (eq.(4.11)) já está naturalmente na forma de um estado de superposição entre as componentes do estado inicial e as componentes do estado evoluído, sem a necessidade da pós-seleção destas componentes por um interferômetro de caminhos longitudinais. O emaranhamento em polarização do estado inicial e as operações condicionais do SLM produzem a superposição necessária.

Para verificar o emaranhamento em polarização, nós configuramos o SLM (tela com a mesma escala de cinza para todos os modos de fenda) e posicionamos a placa variável do Ph-Sh de modo que nenhuma operação seja realizada. Seguindo [39], ao medirmos as coincidências variando a HWP1, devemos ver uma oscilação quando a HWP2 está em 0° , e três outras oscilações deslocadas de π , $\pi/2$ e $-\pi/2$ quando a HWP2 está em 45° , $22,5^\circ$ e $-22,5^\circ$, respectivamente (interferência condicional). Caso o estado não esteja emaranhado, as oscilações para a HWP2 em $22,5^\circ$ e $-22,5^\circ$ estariam superpostas com as outras duas (correlação clássica). Os resultados obtidos são mostrados na Fig.4.10. Vemos que as oscilações nas contagens de coincidências obtidas variando o ângulo θ_1 da HWP1 se deslocam, dependendo do ângulo fixo θ_2 da HWP2. Isto indica que a interferência é condicional e que o estado é emaranhado em polarização[39].

Para testar a correlação espacial entre os modos de fenda e verificar novamente se o estado gerado se aproxima do MES, acrescentamos duas fendas simples logo após o SLM, onde está a imagem da fenda múltipla projetada. Cada fenda está no caminho de um dos fótons e pode ser varrida verticalmente, permitindo selecionar apenas um modo de fenda

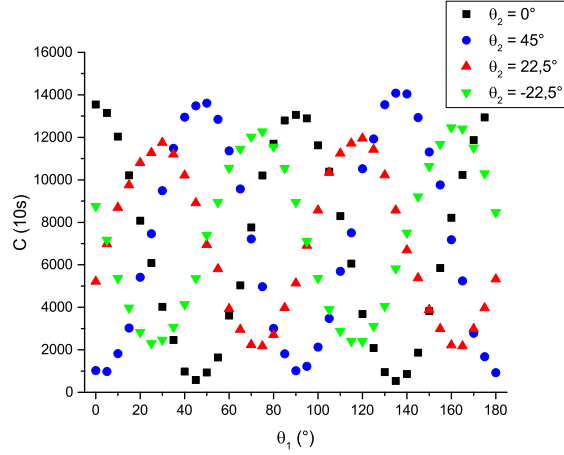


FIGURA 4.10: Verificação do emaranhamento em polarização do estado gerado. As coincidências são obtidas em função do ângulo θ_1 da HWP1 para diferentes posições de θ_2 da HWP2.

para ser acoplado na fibra da mesma forma que fizemos no experimento anterior. Assim pudemos mais uma vez medir as contagens relacionadas a $|\alpha_{mn}|^2$ e obter as populações da matriz de coeficientes, conforme mostram as Figs.4.11 a), b) e c). É possível notar uma melhora considerável na distribuição dos termos na antidiagonal comparando com o resultado da seção anterior.

Os resultados para a medição da FTF são mostrados nas Figs.4.12 a), b) e c) para dois qubits ($d = 2$) e para dois qudits ($d = 3$ e $d = 4$). Novamente os dados foram ajustados através da expressão $C = A(1 - v \cos[4\theta + c])$, e os parâmetros para cada ajuste são mostrados na tabela 4.2.

	$t = 0$	$t = 0.5$	$t = 1$
Parâmetros	$d = 2$		
A	(3360 ± 24)	(3500 ± 14)	(3846 ± 24)
v	(0.581 ± 0.009)	(0.076 ± 0.006)	(0.502 ± 0.008)
c	(2 ± 1)	(148 ± 4)	(185 ± 1)
	$d = 3$		
A	(4832 ± 37)	(4893 ± 5)	(5103 ± 32)
v	(0.59 ± 0.01)	(0.110 ± 0.005)	(0.480 ± 0.008)
c	(44 ± 1)	$-(35 \pm 3)$	(172 ± 1)
	$d = 4$		
A	(6026 ± 36)	(6214 ± 17)	(6323 ± 26)
v	(0.698 ± 0.007)	(0.126 ± 0.004)	(0.644 ± 0.005)
c	(17.7 ± 0.7)	$-(42 \pm 2)$	(107.2 ± 0.5)

TABELA 4.2: Valores dos parâmetros de ajuste para os dados experimentais das Figs.4.12.

Desta vez os cálculos para os deslocamentos de fase entre as curvas em $t = 0$ e $t = 1$ resultaram em $(183 \pm 1)^\circ$, $(128 \pm 1)^\circ$ e $(91.5 \pm 0.8)^\circ$ para os qubits, os qutrits e os

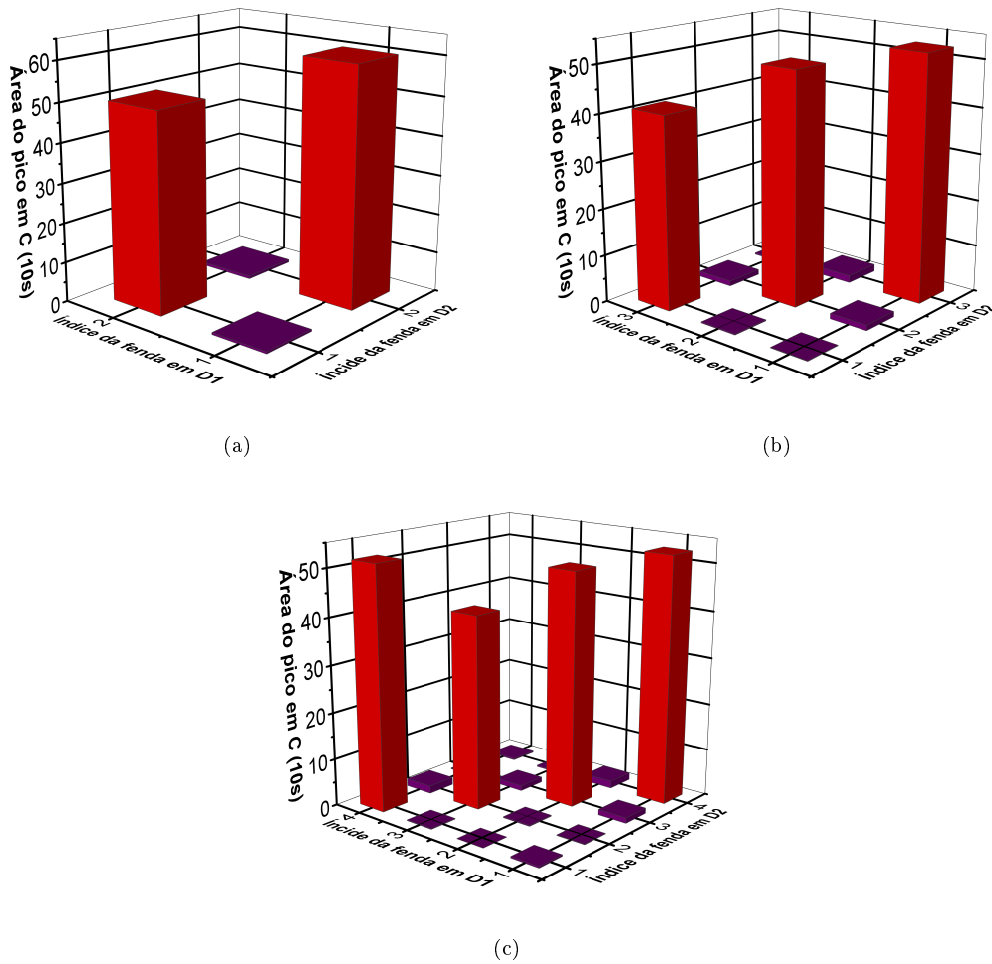


FIGURA 4.11: População da matriz de coeficientes para a) dois qubits, b) dois qutrits e c) dois ququarts.

ququarts, respectivamente, valores próximos da previsão teórica de $2\pi/d$. O comportamento das curvas se repetiu como esperado, atingindo uma visibilidade próxima de 0 para $t = 0.5$ e próxima do valor inicial para $t = 1$. Contudo, podemos observar uma melhora significativa da visibilidade e da relação sinal/ruído de todas as curvas em relação às aquelas da Fig.4.7. Neste experimento o fator limitante passa a ser a “qualidade” do emaranhamento em polarização ao invés da distinguibilidade dos modos longitudinais e transversais na saída do interferômetro na montagem anterior. A visibilidade das curvas medidas nas bases ortogonais no teste de Bell apresentaram valores em torno de 68% para $\theta_2 = 22,5^\circ$ e $\theta_2 = -22,5^\circ$, o que é compatível com os valores das visibilidade das curvas de interferência para medir a FTF (Fig. 4.12).

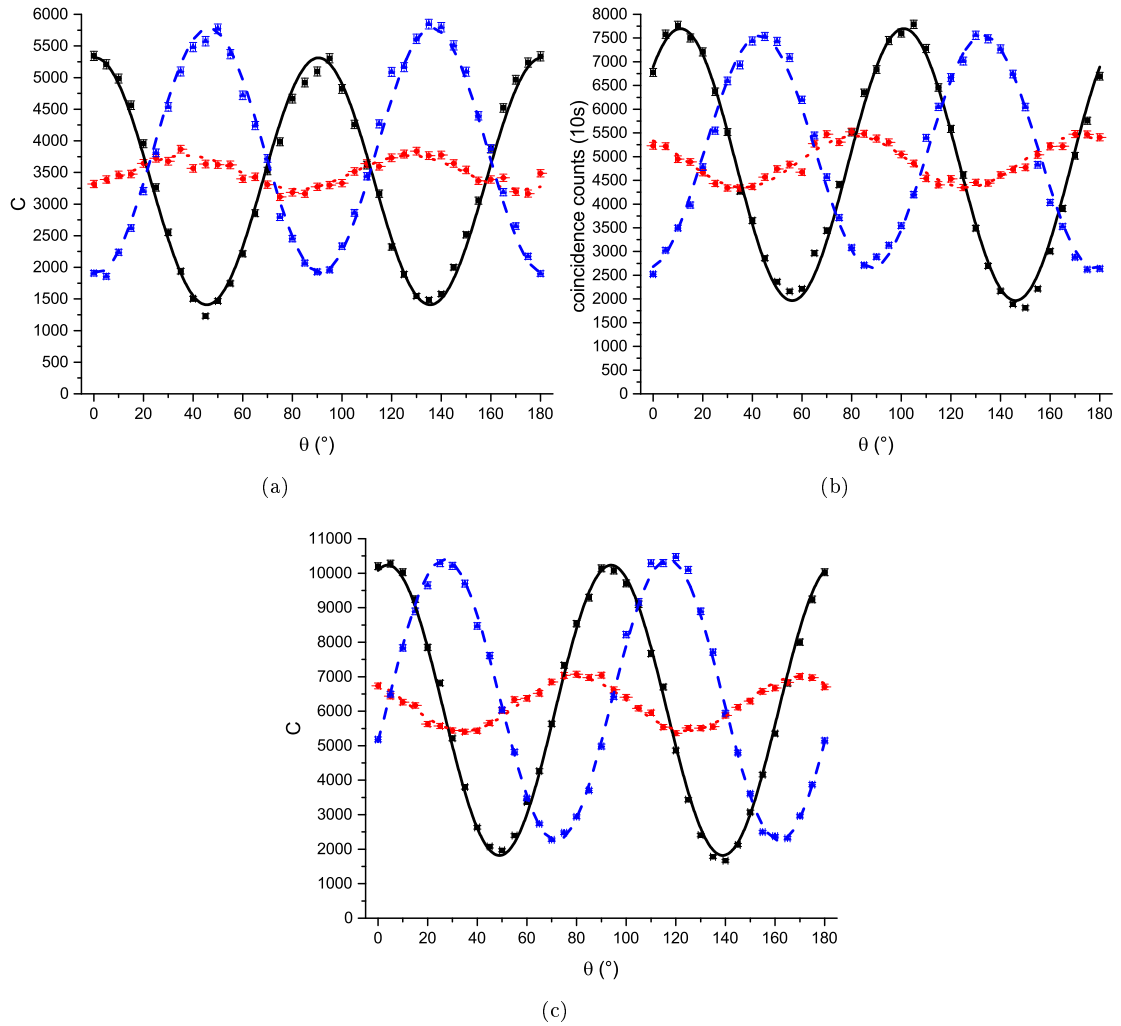


FIGURA 4.12: Dados experimentais dos padrões de interferência para a) o estado da Fig.4.11a) sob a transformação das eqs.(3.7), b) o estado da Fig.4.11b) sob a transformação das eqs.(3.8) e c) o estado da Fig.4.11c) sob a transformação das eqs.(3.9). Todos os gráficos exibem as contagens de coincidências e os ajustes para os três valores de t : $t = 0$ (quadrados e linha pretos), $t = 0.5$ (círculos e pontilhado vermelhos) e $t = 1$ (triângulos e tracejado azuis).

Capítulo 5

Conclusão

Iniciamos esta tese revisando como são as representações geométricas para os estados quânticos de um e de dois qubits, e como obter as fases adquiridas por eles ao sofrerem uma evolução. Vimos que essas fases podem trazer uma contribuição dinâmica com origem nos autovalores do Hamiltoniano que descreve a evolução, e uma contribuição geométrica com origem no caminho traçado no espaço de Hilbert projetivo quando ocorre a evolução. Vimos também que pode surgir uma contribuição de natureza topológica para o estado de dois qubits caso ele seja emaranhado. Foi possível compreender melhor a origem das fases geométrica e topológica justamente ao olharmos para as representações geométricas. Para um qubit temos a esfera de Bloch, e a fase geométrica surge quando o vetor de Bloch se desloca na esfera. Para dois qubits algo semelhante ocorre se o estado for produto, já que temos uma esfera de Bloch representando cada qubit. Porém, quando o estado é emaranhado, temos a representação dada pela bola de Bloch e pela bola $SO(3)$. Esta última possui uma topologia não trivial por ser um espaço não-simplesmente conexo, de modo que a fase topológica surge quando a evolução define um caminho que “enxerga” essa propriedade. Mostramos a generalização da fase topológica para sistemas bipartidos de dimensões maiores ao calcularmos a FTF, cuja origem associamos ao espaço não-simplesmente conexo das matrizes $SU(d)$ com a identificação $S' = e^{2l\pi/d}S$. De fato, quando $d = 2$, a dupla conexidade de $SO(3)$ se reflete no ato de igualarmos as matrizes S e $-S$ pertencentes a $SU(2)$.

Em seguida mostramos uma forma possível de se medir a FTF. Ela precisa aparecer como uma fase relativa entre dois estados que interferem para ser percebida, assim como com qualquer outra fase que se deseja observar. Consideramos então evoluções locais capazes de explorar a múltipla conexidade das matrizes $SU(d)$ sujeitas à regra de identificação mencionada, sendo que utilizamos as fases ξ_m e χ_n em função do parâmetro t para descrevê-las. Chegamos a uma expressão para a curva de interferência I entre o estado

transformado e um estado inicial preparado identicamente, expressão essa que é função das fases ξ_m e χ_n , dos coeficientes α_{mn} que determinam o estado, e de uma fase $\Delta\phi$. Esta última foi utilizada como parâmetro de varredura para obtenção das curvas esperadas uma vez especificados as evoluções e o estado. Para este trabalho escolhemos um exemplo para funções ξ_m e χ_n e os estados MES para as dimensões 2, 3 e 4.

Para medir a FTF construímos um interferômetro óptico utilizando os feixes de fótons gerados na SPDC como fonte para a preparação do estado quântico. Devido à conservação de momento transversal, os feixes gerados são emaranhados nesse grau de liberdade. O vetor de estado que descreve o par é função do perfil do campo do laser que promove a SPDC. Dessa forma, quando os feixes de pares de fótons incidem em uma fenda múltipla é possível preparar o estado fotônico no grau de liberdade de caminho transversal, sendo que as correlações espaciais (ou de momento transversal) são controladas por uma lente que manipula o perfil do laser de bombeamento no plano das fendas. Temos assim uma base discreta na qual expandimos o estado, e o índice de cada elemento da base é associado a uma fenda da fenda múltipla. Após os feixes serem transmitidos pela fenda múltipla mantivemos os caminhos transversais bem definidos durante a propagação do feixe até o SLM posicionado dentro do interferômetro. Fizemos isso utilizando lentes para projetar a imagem do plano da fenda no plano do SLM. Com os modos de fenda bem definidos no plano do SLM podemos modular a fase da frente de onda de cada modo separadamente graças à estrutura pixelada da tela do modulador. Além disso, ele modula apenas uma componente de polarização da luz incidente, o que foi imprescindível para conseguirmos aplicar as operações de fase localmente utilizando este grau de liberdade como auxiliar. O SLM foi então programado para implementar as operações $SU(d)$ que levam ao aparecimento da FTF, enquanto o Ph-Sh introduziu a fase de varredura utilizada para construir as curvas de interferência. Esta por sua vez só ocorre se houver uma indistinguibilidade entre os feixes que se recombinam na saída do interferômetro, de modo que a diferença no tempo de propagação dos feixes desde a geração até a recombinação precisa ser compatível com a largura de banda dos filtros de interferência utilizados na detecção. Por isso utilizamos um conjunto de placas de quartzo e um interferômetro do tipo Sagnac, e verificamos a indistinguibilidade através do efeito HOM.

Vimos que a interferência de dois fótons vista na contagem de coincidências exibe o mesmo comportamento previsto teoricamente para a interferência entre o estado transformado e o estado inicial identicamente preparado. Desta forma foi possível medir a FTF através do deslocamento de fase entre as curvas obtidas no início e no fim da evolução. Os resultados obtidos foram $(182 \pm 7)^\circ$, $(126 \pm 3)^\circ$ e $(94 \pm 3)^\circ$ para dois qubits, dois qutrits e dois ququarts, respectivamente. Os valores ficaram próximo do previsto de $2\pi/d$, demonstrando a dependência da FTF com a dimensão do estado. Realizamos ainda um segundo experimento onde houve uma melhora considerável na qualidade das

curvas. Novamente utilizamos a SPDC como fonte de fótons, porém haviam dois cristais emparelhados e com os eixos ópticos ortogonais entre si para gerar os feixes. Com esta configuração junto à fenda múltipla, o estado fica emaranhado não só em caminho transversal, mas também em polarização. Isso nos permitiu reproduzir o mesmo resultado sem precisar de um interferômetro longitudinal, sendo que a qualidade do emaranhamento em polarização desempenha um papel análogo ao da indistinguibilidade no experimento anterior no sentido de viabilizar a interferência de dois fótons. O casamento dos modos transversais no interferômetro longitudinal foi um grande fator limitante para a visibilidade das curvas no primeiro experimento, e por isso obtivemos uma melhora significativa da visibilidade e da relação sinal/ruído na segunda montagem. Os valores obtidos para a medição da FTF foram $(183 \pm 1)^\circ$, $(128 \pm 1)^\circ$ e $(91.5 \pm 0.8)^\circ$, novamente próximos dos esperado.

Capítulo 6

Perspectivas

A seguir apresentaremos alguns possíveis desdobramentos do trabalho feito nesta tese que podem ser explorados futuramente. Primeiro podemos comparar o comportamento das curvas de interferência calculadas para o estado produto com o que vimos na seção 3.2. Neste caso, os estados para as dimensões consideradas são

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle + |2\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle) \quad (d = 2) \quad (6.1)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \quad (d = 3) \quad (6.2)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \quad (d = 4) \quad (6.3)$$

ou seja, $\alpha_{m,n} = 1/d$. As curvas previstas são mostradas na Fig.6.1. Em contraste com a Fig.3.4, para o estado produto, as franjas nunca desaparecem em $t = 1/2$. As mesmas operações não levam o estado a passar por uma evolução cíclica, uma vez que visibilidade máxima não é recuperada. Porém, o deslocamento entre as curvas continua sendo $2\pi/d$ (exceto para $d=2$, onde o estado final é ortogonal ao inicial), apesar de sua origem não ser topológica¹.

A fim de observarmos também o efeito da dimensão do espaço de Hilbert, vamos considerar a situação em que apenas dois modos dos qutrits são operados como se fossem um qubit e comparar sua evolução com um par de qubits. Dessa forma, a transformação para os qutrits será

¹Aqui ocorre algo semelhante à situação confusa citada no último parágrafo da subseção 2.1.1.

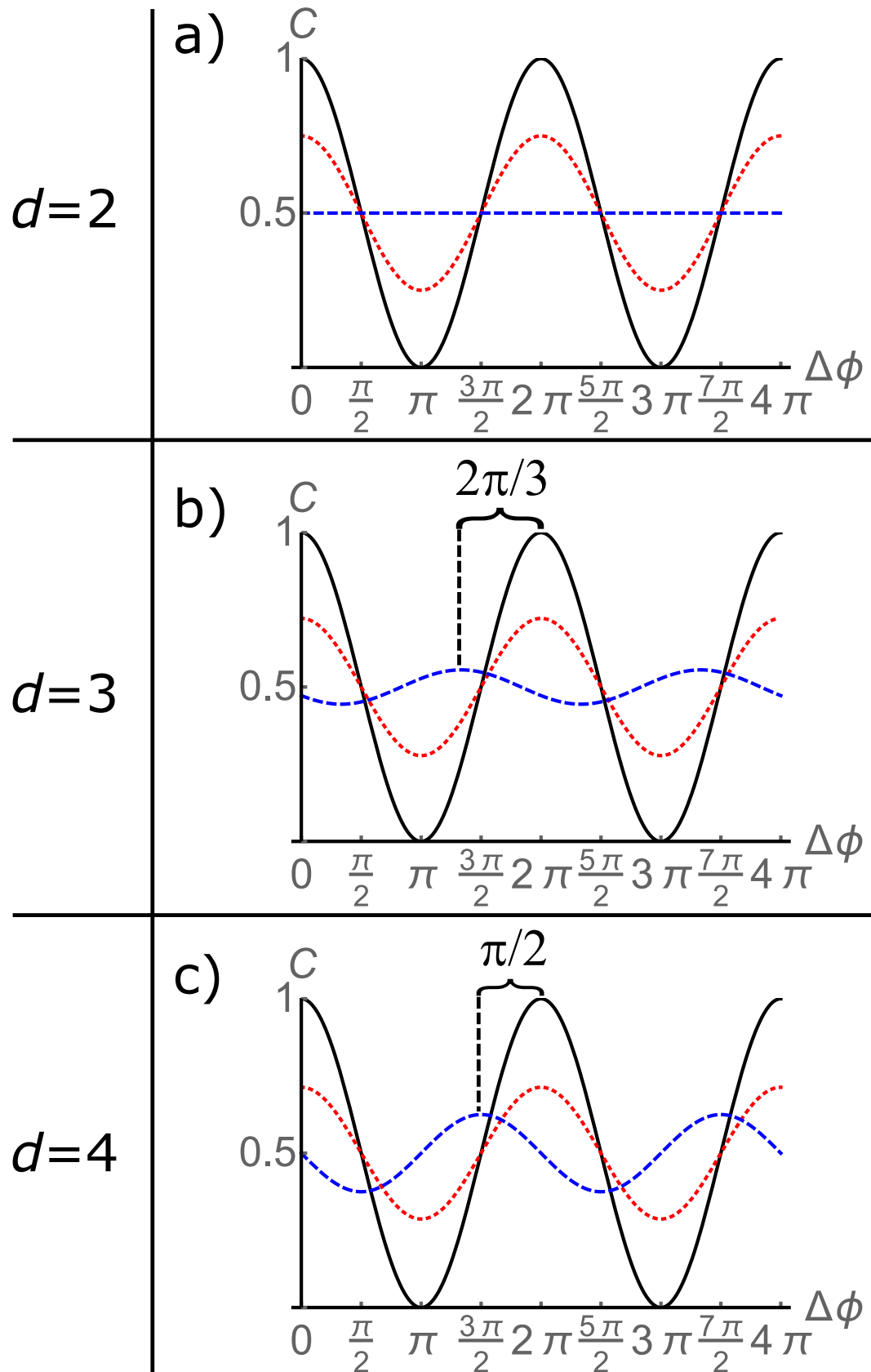


FIGURA 6.1: Curvas de interferência para a) o estado da eq.(6.1) sob a transformação das eqs.(3.7), b) o estado da eq.(6.2) sob a transformação das eqs.(3.8), e c) o estado da eq.(6.3) sob a transformação das eqs.(3.9). Todos os gráficos exibem as curvas para três valores de t : $t = 0$ (preto), $t = 0.5$ (vermelho pontilhado) e $t = 1$ (azul tracejado).

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \chi_2 = \frac{\pi}{2}t \\
 \xi_2 &= \chi_1 = -\frac{\pi}{2}t \\
 \xi_3 &= \chi_3 = 0
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

A Fig.6.2 exibe as curvas para este caso. Desta vez nem o MES nem o estado produto são governados por uma evolução cíclica no intervalo total do parâmetro de controle t , e as franjas de interferência nunca recuperam a visibilidade máxima, ao contrário do que acontece com o MES para os qubits. Mesmo o comportamento do estado produto é diferente, pois para os qubits o estado termina a evolução em um estado ortogonal ao inicial, o que não acontece para os qutrits. Portanto, o comportamento da interferência é sensível não apenas ao emaranhamento, mas também a dimensão dos qutrits sendo operados.

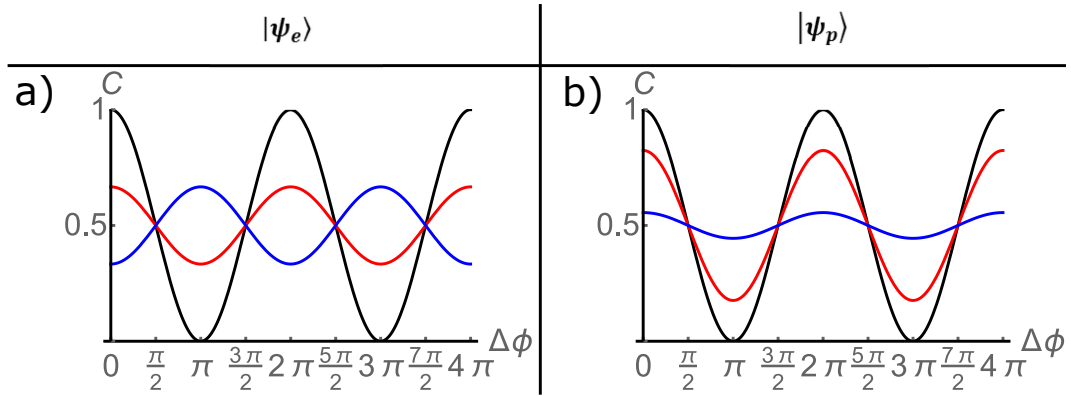


FIGURA 6.2: Curva de interferência para a) o estado da eq.(3.5) sob a transformação das eqs.(6.4), b) o estado da eq.(6.2) sob a transformação das eqs.(6.4), para $t = 0$ (preto), $t = 0.5$ (vermelho pontilhado) e $t = 1$ (azul tracejado).

Além disso, se tivermos a liberdade de implementar a operação \bar{V}_i como no caso do segundo experimento, há a possibilidade de experimentar outras transformações unitárias. Ao invés de escolher evoluções como nas eqs.(3.7), (3.8) e (3.9), podemos tomar exemplos onde as evoluções não necessariamente precisam ser da mesma forma nos dois fótons, ou pelo menos onde os parâmetros não são iguais a todo instante.

Outras possibilidades são a realização de dois experimentos: um deles visa medir a FTF após o estado dos fótons ser submetido à aplicação de ruídos e verificar que ela sobrevive a este tipo de transformação, como discutido teoricamente na dissertação de mestrado[40] do Rafael Antunes, um dos integrantes do nosso grupo. O outro visa medir a FTF para sistemas bipartidos com dimensões diferentes, sendo que o estudo sobre como gerar esse

tipo de estado e sobre como são as correlações entre as partes fazem parte da dissertação de mestrado[41] da Paula D'ávila Machado, outra integrante do nosso grupo.

Apêndice A

Cálculo da fase dinâmica e da FG para dois qudits

Partiremos da expressão derivada por Aharonov e Anandan para obter a FG e relacioná-la a FTF em um sistema de dois qudits. Seguindo [3], temos que a FG é sempre dada por

$$\gamma_g = \arg \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle + i \int_0^T dt \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle, \quad (\text{A.1})$$

que corresponde à fase total da evolução subtraída da fase dinâmica. Com a notação matricial para o estado, a eq.(A.1) se torna

$$\gamma_g = \arg\{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(T)]\} + i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t)\dot{\alpha}(t)]. \quad (\text{A.2})$$

Podemos verificar que o primeiro termo equivale a $\gamma = \Delta\phi + \gamma_s$, pois

$$\begin{aligned} \arg\{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(T)]\} &= \arg\{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)e^{i\gamma}\alpha(0)]\} \\ &= \arg\{e^{i\gamma} \overbrace{\text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(0)]}^{=1}\} = \Delta\phi + \frac{2l\pi}{d}, \end{aligned}$$

e já neste ponto vemos que **a FG possui uma contribuição que é a FTF para o sistema considerado**. Vamos utilizar novamente a decomposição polar para escrever

$$\dot{\alpha}(t) = i\dot{\phi}(t)\alpha(t) + e^{i\phi(t)} \left(\dot{S}(t)Q(t) + S(t)\dot{Q}(t) \right)$$

e substituir no segundo termo da eq.(A.2), o que fornece

$$\begin{aligned}
 i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t) \dot{\alpha}(t)] &= i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t) i \dot{\phi}(t) \alpha(t) + \alpha^\dagger(t) e^{i\phi(t)} (\dot{S}(t) Q(t) + S(t) \dot{Q}(t))] \\
 &= - \int_0^T dt \dot{\phi}(t) \overbrace{\text{Tr}[\alpha^\dagger(t) \alpha(t)]}^{=1} + i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t) e^{i\phi(t)} (\dot{S}(t) Q(t) + S(t) \dot{Q}(t))] \\
 &= -\Delta\phi + i \int_0^T dt \text{Tr}[\alpha^\dagger(t) e^{i\phi(t)} (\dot{S}(t) Q(t) + S(t) \dot{Q}(t))]
 \end{aligned}$$

resultando no cancelamento de $\Delta\phi$. Agora, substituindo $\alpha^\dagger(t) = e^{-i\phi(t)} Q(t) S^\dagger(t)$ (uma vez que $Q(T) = Q^\dagger(T)$) e utilizando a ciclicidade do traço, retomamos a eq.(A.2) que se torna

$$\gamma_g = \frac{2l\pi}{d} + i \int_0^T dt \text{Tr}[Q^2(t) S^\dagger(t) \dot{S}(t) + Q(t) \dot{Q}(t)]. \quad (\text{A.3})$$

Notamos ainda que a condição de normalização do estado fornece

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\alpha^\dagger(t) \alpha(t)] &= 1 \\
 \text{Tr}[Q(t) S^\dagger(t) S(t) Q(t)] &= 1 \\
 \text{Tr}[Q^2(t)] &= 1,
 \end{aligned}$$

e diferenciando com respeito ao tempo de ambos os lados e usando novamente a ciclicidade do traço temos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\dot{Q}(t) Q(t) + Q(t) \dot{Q}(t)] &= 0 \\
 \Rightarrow \text{Tr}[Q(t) \dot{Q}(t)] &= -\text{Tr}[Q(t) \dot{Q}(t)] = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, o segundo termo da integral na eq.(A.3) desaparece. Para lidar com o primeiro termo da integral vamos identificar os seguintes invariantes sob evoluções unitárias locais: $\text{Tr}[\rho_f^p]$, $p = 1, \dots, d$, onde ρ_f é a matriz densidade reduzida do qudit $f = s, i$. De fato, sob uma evolução unitária local $\rho'_f = U_f \rho_f U_f^\dagger$ temos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\rho_f^p] &= \text{Tr}[(U_f \rho_f U_f^\dagger)^p] = \text{Tr}[\underbrace{U_f \rho_f U_f^\dagger U_f \rho_f U_f^\dagger \dots U_f \rho_f U_f^\dagger U_f \rho_f U_f^\dagger}_{p \text{ vezes}}] \\
 &= \text{Tr}[U_f \rho_f^p U_f^\dagger] = \text{Tr}[\rho_f^p]
 \end{aligned}$$

Vamos também escrever as matrizes densidade reduzidas em termos das matrizes Q e S para que os invariantes fiquem em função delas; para o estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |m, n\rangle \langle m', n'|$ considerado podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \rho_s &= \text{Tr}_i[\rho] = \sum_{n''} \langle n'' | \left(\sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |m, n\rangle \langle m', n'| \right) |n''\rangle \\
 &= \sum_{m,n,m',n',n''} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* \delta_{nn''} \delta_{n'n''} |m\rangle \langle m'| \\
 &= \sum_{m,n,m'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n}^* |m\rangle \langle m'|.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Analogamente para o qudit i

$$\begin{aligned}
 \rho_i &= \text{Tr}_s[\rho] = \sum_{m''} \langle m'' | \left(\sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |m, n\rangle \langle m', n'| \right) |m''\rangle \\
 &= \sum_{m,n,m',n',m''} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* \delta_{mm''} \delta_{m'm''} |n\rangle \langle n'| \\
 &= \sum_{m,n,n'} \alpha_{mn} \alpha_{mn'}^* |n\rangle \langle n'|.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agora, uma vez que podemos escrever $\alpha = \sum_{m,n} \alpha_{mn} |m\rangle \langle n|$ e $\alpha^\dagger = \sum_{m',n'} \alpha_{m'n'}^* |n'\rangle \langle m'|$, notamos que

$$\begin{aligned}
 \alpha \alpha^\dagger &= \sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |m\rangle \langle n | n'\rangle \langle m'| \\
 &= \sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* \delta_{nn'} |m\rangle \langle m'| \\
 &= \sum_{m,n,m'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n}^* |m\rangle \langle m'|.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Também,

$$\begin{aligned}
(\alpha^\dagger \alpha)^\top &= \left(\sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* |n'\rangle \langle m' | m\rangle \langle n| \right)^\top \\
&= \left(\sum_{m,n,m',n'} \alpha_{mn} \alpha_{m'n'}^* \delta_{mm'} |n'\rangle \langle n| \right)^\top \\
&= \sum_{m,n,n'} \alpha_{mn} \alpha_{mn'}^* |n\rangle \langle n'|.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Comparando as eqs.(A.4) e (A.6), e as eqs.(A.5) e (A.7) vemos que

$$\rho_s = \alpha \alpha^\dagger = S Q^2 S^\dagger, \tag{A.8}$$

$$\rho_i = (\alpha^\dagger \alpha)^\top = (Q^2)^\top. \tag{A.9}$$

Com as matrizes densidade reduzidas escritas dessa forma podemos verificar que, além de invariantes sob evoluções unitárias locais, $\text{Tr}[\rho_f^p]$ são independentes do qudit f pois

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\rho_s^p] &= \text{Tr}[(S Q^2 S^\dagger)^p] = \text{Tr}[\underbrace{S Q^2 S^\dagger S Q^2 S^\dagger \dots S Q^2 S^\dagger S Q^2 S^\dagger}_{p \text{ vezes}}] \\
&= \text{Tr}[S Q^{2p} S^\dagger] = \text{Tr}[Q^{2p}] = \text{Tr}[\rho_i^p],
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que $\text{Tr}[(Q^2)^\top]^p = \text{Tr}[(Q^{2p})^\top] = \text{Tr}[Q^{2p}]$. O invariante correspondente a $p = 1$ reproduz simplesmente a condição de normalização; já o invariante para $p = 2$ se relaciona com o quantificador de emaranhamento de um estado puro de dois qudits denominado concorrência[29, 42]. A concorrência é dada por $\mathcal{C} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}[\rho_f^2])}$, e sua relação com um dos invariantes expressa o fato bem conhecido de que o emaranhamento não é afetado por operações unitárias locais. Ela vai de 0 para o estado produto a $\mathcal{C}_m = \sqrt{2(d-1)/d}$ para o MES. Isso porque no primeiro caso as matrizes densidade reduzidas podem ser escritas na forma diagonal com apenas o primeiro elemento diferente de 0, o que resulta em $\text{Tr}[\rho_f^2] = 1$ para o estado normalizado, enquanto que no segundo caso é possível escrever $\rho_f = \mathbb{I}/d$ e portanto $\text{Tr}[\rho_f^2] = 1/d$. Da relação entre $\text{Tr}[\rho_f^2]$ e \mathcal{C} podemos tirar que

$$\text{Tr}[Q^4] = 1 - \frac{\mathcal{C}^2}{2}, \quad (\text{A.10})$$

o que será útil mais a frente no desenvolvimento do primeiro termo da integral na eq.(A.3).

A fim de explorarmos o papel desempenhado pelos invariantes na FG, vamos torná-los explícitos na expressão de Q^2 em termos da identidade e dos geradores T_j ($j = 1, 2, \dots, d^2-1$) de $SU(d)$. Os geradores são matrizes hermitianas de traço nulo normalizadas de acordo com $\text{Tr}[T_j T_k] = \delta_{jk}/2$, sendo que qualquer matriz hermitiana ou anti-hermitiana de traço nulo pode ser escrita como uma combinação linear deles. Um exemplo familiar ocorre para $d = 2$ onde os geradores são as matrizes de Pauli; junto com a identidade eles são uma base para as matrizes $d \times d$ hermitianas. Dessa forma, podemos escrever

$$Q^2 = \frac{\mathbb{I}}{d} + \vec{q} \cdot \vec{T}, \quad (\text{A.11})$$

onde \vec{q} é um vetor cujas componentes são reais e dão os coeficientes da combinação linear dos geradores, e o primeiro termo garante que Q^2 tenha traço igual a 1. Consequentemente temos

$$Q^4 = \frac{\mathbb{I}}{d^2} + \frac{2}{d} \vec{q} \cdot \vec{T} + (\vec{q} \cdot \vec{T})^2,$$

e tirando o traço temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}[Q^4] &= \frac{1}{d} + \text{Tr} \left[\left(\sum_j q_j T_j \right) \left(\sum_k q_k T_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} + \sum_{j,k} q_j q_k \overbrace{\text{Tr}[T_j T_k]}^{\delta_{jk}/2} \\ &= \frac{1}{d} + \frac{q^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Igualando as eqs.(A.12) e (A.10) o módulo de \vec{q} fica

$$q = \sqrt{\frac{2(d-1)}{d} - \mathcal{C}^2} = \sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2}, \quad (\text{A.13})$$

e substituindo de volta na eq.(A.11) ficamos com

$$Q^2 = \frac{\mathbb{I}}{d} + \sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2} \hat{q} \cdot \vec{T}. \quad (\text{A.14})$$

Como último passo para finalmente retornarmos à eq.(A.3) vamos utilizar o fato de que também podemos escrever $S^\dagger \dot{S}$ utilizando os geradores. Derivando a relação $S^\dagger S = \mathbb{I}$ com respeito ao tempo de ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned} \dot{S}^\dagger S + S^\dagger \dot{S} &= 0 \\ S^\dagger \dot{S} &= -\dot{S}^\dagger S \\ S^\dagger \dot{S} &= -(S^\dagger \dot{S})^\dagger \end{aligned}$$

e, portanto, o produto $S^\dagger \dot{S}$ é anti-hermitiano. Neste caso os coeficientes da combinação linear são imaginários, o que nos leva a

$$S^\dagger \dot{S} = i \vec{s} \cdot \vec{T} \quad (\text{A.15})$$

onde $\vec{s} \in \mathbb{R}^{d^2-1}$ assim como \hat{q} .

Substituindo a eq.(A.14) na eq.(A.3) obtemos

$$\gamma_g = \frac{2l\pi}{d} + i \int_0^T dt \text{Tr} \left[\frac{S^\dagger(t) \dot{S}(t)}{d} + \sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2} (\hat{q}(t) \cdot \vec{T}) S^\dagger(t) \dot{S}(t) \right], \quad (\text{A.16})$$

o que podemos simplificar recorrendo ao fato de que uma matriz inversível geral A obedece a relação

$$\frac{d(\det A)}{dt} = \det A \text{Tr} \left[A^{-1} \frac{dA}{dt} \right].$$

Utilizando a relação acima para S e lembrando que $S^{-1} = S^\dagger$ e $\text{Tr}[S] = 1$ temos

$$0 = \text{Tr} \left[S^{-1} \frac{dS}{dt} \right] = \text{Tr}[S^\dagger \dot{S}],$$

e portanto o primeiro termo da integral na eq.(A.16) desaparece. Substituindo agora a eq.(A.15) no segundo termo da integral na eq.(A.16) temos

$$\begin{aligned}
 i \int_0^T dt \operatorname{Tr}[\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2}(\hat{q}(t) \cdot \vec{T})S^\dagger(t)\dot{S}(t)] &= i \int_0^T dt \operatorname{Tr}[\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2}(\hat{q}(t) \cdot \vec{T})i(\vec{s}(t) \cdot \vec{T})] \\
 &= -\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2} \int_0^T dt \operatorname{Tr}[\sum_j q_j(t)T_j \sum_k s_k(t)T_k] \\
 &= -\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2} \int_0^T dt \sum_{j,k} q_j(t)s_k(t) \overbrace{\operatorname{Tr}[T_j T_k]}^{\delta_{jk}/2} \\
 &= \frac{-\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2}}{2} \int_0^T dt \hat{q}(t) \cdot \vec{s}(t)
 \end{aligned}$$

Finalmente, definindo $d\vec{x} = \vec{s}(t)dt$, chegamos a uma expressão compacta que estabelece uma conexão entre a FG e a concorrência de um estado de dois qudits que passa por uma evolução cíclica

$$\gamma_g = \frac{2l\pi}{d} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{C}_m^2 - \mathcal{C}^2} \oint \hat{q}(t) \cdot d\vec{x}. \quad (\text{A.17})$$

Este resultado chave mostra que a FG para uma evolução cíclica é composta pela FTF e por uma contribuição integral advinda dos setores hermitiano e $SU(d)$ da decomposição polar, e que depende da história da evolução do estado quântico. **Vemos que para o MES essa contribuição desaparece, e apenas a FTF aparece.**

Apêndice B

Cálculo da transformação realizada pelo deslocador de fase

Na subseção 4.1.2 introduzimos um deslocador de fase que transforma o estado de polarização dos fótons adicionando uma fase relativa entre as componentes horizontal e vertical. Mostraremos o princípio de seu funcionamento utilizando as chamadas matrizes de Jones que representam as placas de onda utilizadas na construção do deslocador de fase.

Primeiro lembramos que o campo elétrico da luz está restrito ao plano perpendicular à direção de propagação, e que no caso da luz polarizada temos um vetor campo elétrico bem definido. Portanto, o estado de polarização é naturalmente um sistema de duas dimensões, sendo que podemos decompor o vetor campo elétrico em duas componentes nas direções horizontal e vertical. Representamos essas direções através dos vetores canônicos, de modo que podemos representar um estado de polarização $|P\rangle$ qualquer utilizando o chamado vetor de Jones

$$|P\rangle = E_H |H\rangle + E_V |V\rangle = \begin{bmatrix} E_H \\ E_V \end{bmatrix},$$

onde

$$|H\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e E_H e E_V são as componentes do vetor campo elétrico.

Nesta representação, o efeito de um elemento óptico linear que transforma o estado de polarização será descrito por uma matriz 2x2 que atua no vetor de Jones, chamada matriz de Jones. Um material birrefringente é um material que possui dois eixos perpendiculares com índices de refração diferentes para uma luz linearmente polarizada ao longo da direção de cada um desses eixos. O eixo com índice de refração menor é chamado eixo rápido, e o outro eixo lento. Se fizermos o eixo rápido coincidir com a direção horizontal, podemos escrever a matriz de Jones J de um material birrefringente como sendo

$$J = \begin{bmatrix} e^{in_H L} & 0 \\ 0 & e^{in_V L} \end{bmatrix} = e^{in_H L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta n L} \end{bmatrix},$$

onde n_H e n_V são respectivamente os índices de refração dos eixos rápido e lento, L é a espessura do material, e $\Delta n = n_V - n_H$. Se atuarmos com essa matriz no vetor de Jones $|J\rangle$ vemos que o efeito do material birrefringente é introduzir uma fase relativa $\Delta n L$ entre as componentes de polarização horizontal e vertical. Se quisermos saber qual é a matriz $J(\varphi)$ para um material birrefringente com o eixo rápido orientado em uma direção φ qualquer, basta aplicarmos uma rotação em J fazendo

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= R(\varphi)JR(-\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta n L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + e^{i\Delta n L}\sin^2\varphi & (1 - e^{i\Delta n L})\cos\varphi\sin\varphi \\ (1 - e^{i\Delta n L})\cos\varphi\sin\varphi & e^{i\Delta n L}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $R(\varphi)$ é a matriz de rotação em duas dimensões (omitimos o fator $e^{in_H L}$ em J pois ele aparece apenas como um fator de fase global). Quando se é fabricada uma placa de material birrefringente com uma espessura específica tal que $\Delta n L$ seja um múltiplo inteiro de π temos a chamada placa de meia onda, enquanto que se a espessura for tal que $\Delta n L$ seja um múltiplo inteiro de $\pi/2$, temos uma placa de um quarto de onda. Substituindo esses valores e utilizando algumas relações trigonométricas, podemos encontrar as matrizes de Jones $H(\varphi)$ para uma placa de meia onda e $Q(\varphi)$ para uma placa um quarto de onda, que são

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + i\sin^2\varphi & (1 - i)\cos\varphi\sin\varphi \\ (1 - i)\cos\varphi\sin\varphi & i\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix}.$$

Conhecendo essas matrizes podemos efetuar a multiplicação na ordem em que as placas de onda aparecem no deslocador de fase e obter a transformação promovida por ele no estado de polarização dos fótons. Para o fóton transmitido no PBS ao entrar no interferômetro da Fig.4.1, a matriz J_{signal} do deslocador de fase fica

$$\begin{aligned}
 J_{signal} &= Q(\pi/4)H(\varphi + \theta)H(\varphi)Q(\pi/4) \\
 &= Q(\pi/4) \begin{bmatrix} \cos(2(\varphi + \theta)) & \text{sen}(2(\varphi + \theta)) \\ \text{sen}(2(\varphi + \theta)) & -\cos(2(\varphi + \theta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{bmatrix} Q(\pi/4) \\
 &= Q(\pi/4) \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+i)e^{2i\theta} & (1-i)e^{-2i\theta} \\ (1-i)e^{2i\theta} & (1+i)e^{-2i\theta} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & e^{-2i\theta} \\ e^{2i\theta} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Daí as transformações $|H\rangle \rightarrow e^{i2\theta}|V\rangle$ e $|V\rangle \rightarrow e^{-i2\theta}|H\rangle$ utilizadas na subseção 4.1.2. Para o fóton refletido, os ângulos de orientação das placas são o negativo dos ângulos utilizados para o fóton transmitido, e a ordem das placas também muda, de modo que um cálculo similar nos dá a seguinte matriz J_{idler} que atua no estado de polarização do fóton refletido

$$\begin{aligned}
 J_{idler} &= Q(-\pi/4)H(-\varphi)H(-\varphi - \theta)Q(-\pi/4) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -e^{2i\theta} \\ -e^{-2i\theta} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dessa vez temos as transformações $|H\rangle \rightarrow -e^{-i2\theta}|V\rangle$ e $|V\rangle \rightarrow -e^{i2\theta}|H\rangle$, também citadas na subseção 4.1.2. Vemos então que o deslocador de fase introduz uma fase relativa entre as componentes horizontal e vertical do estado de polarização de um fóton que o atravessa, e que essa fase relativa pode ser controlada variando-se o ângulo de orientação $\varphi + \theta$ de uma das placas de meia onda, ou seja, girando-se esta placa.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Pancharatnam. Generalized theory of interference, and its applications. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 44:247, 1956.
- [2] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 392:45–57, 1984.
- [3] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593–1596, Apr 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1593. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1593>.
- [4] Akira Tomita and Raymond Y. Chiao. Observation of berry’s topological phase by use of an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 57:937–940, Aug 1986. doi: 10.1103/PhysRevLett.57.937. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.937>.
- [5] T. Bitter and D. Dubbers. Manifestation of berry’s topological phase in neutron spin rotation. *Phys. Rev. Lett.*, 59:251–254, Jul 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.251. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.251>.
- [6] D. J. Richardson, A. I. Kilvington, K. Green, and S. K. Lamoreaux. Demonstration of berry’s phase using stored ultracold neutrons. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2030–2033, Oct 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.2030. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2030>.
- [7] Paul G. Kwiat and Raymond Y. Chiao. Observation of a nonclassical berry’s phase for the photon. *Phys. Rev. Lett.*, 66:588–591, Feb 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.66.588. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.588>.
- [8] J. Brendel, W. Dultz, and W. Martienssen. Geometric phases in two-photon interference experiments. *Phys. Rev. A*, 52:2551–2556, Oct 1995. doi: 10.1103/PhysRevA.52.2551. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.2551>.
- [9] D. V. Strekalov and Y. H. Shih. Two-photon geometrical phase. *Phys. Rev. A*, 56:3129–3133, Oct 1997. doi: 10.1103/PhysRevA.56.3129. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.3129>.

- [10] Erik Sjöqvist. Geometric phase for entangled spin pairs. *Phys. Rev. A*, 62:022109, Jul 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.022109. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.022109>.
- [11] Björn Hessmo and Erik Sjöqvist. Quantal phase for nonmaximally entangled photons. *Phys. Rev. A*, 62:062301, Oct 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.062301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062301>.
- [12] Pérola Milman and Rémy Mosseri. Topological phase for entangled two-qubit states. *Phys. Rev. Lett.*, 90:230403, Jun 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.230403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.230403>.
- [13] W. LiMing, Z. L. Tang, and C. J. Liao. Representation of the $SO(3)$ group by a maximally entangled state. *Phys. Rev. A*, 69:064301, Jun 2004. doi: 10.1103/PhysRevA.69.064301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.064301>.
- [14] Pérola Milman. Phase dynamics of entangled qubits. *Phys. Rev. A*, 73:062118, Jun 2006. doi: 10.1103/PhysRevA.73.062118. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.062118>.
- [15] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Phys. Rev. Lett.*, 99:160401, Oct 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.160401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.160401>.
- [16] Jiangfeng Du, Jing Zhu, Mingjun Shi, Xinhua Peng, and Dieter Suter. Experimental observation of a topological phase in the maximally entangled state of a pair of qubits. *Phys. Rev. A*, 76:042121, Oct 2007. doi: 10.1103/PhysRevA.76.042121. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042121>.
- [17] L. E. Oxman and A. Z. Khoury. Fractional topological phase for entangled qudits. *Phys. Rev. Lett.*, 106:240503, Jun 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.240503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.240503>.
- [18] Markus Johansson, Marie Ericsson, Kuldip Singh, Erik Sjöqvist, and Mark S. Williamson. Topological phases and multiqubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 85:032112, Mar 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.85.032112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.032112>.
- [19] A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. Matoso, and S. Pádua. Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits. *Phys. Rev. A*, 87:042113, Apr 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.87.042113. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042113>.

- [20] Markus Johansson, Antonio Z. Khoury, Kuldip Singh, and Erik Sjöqvist. Three-qubit topological phase on entangled photon pairs. *Phys. Rev. A*, 87:042112, Apr 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.87.042112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042112>.
- [21] A. Z. Khoury and L. E. Oxman. Topological phase structure of entangled qudits. *Phys. Rev. A*, 89:032106, Mar 2014. doi: 10.1103/PhysRevA.89.032106. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.032106>.
- [22] J. C. Loredó, M. A. Broome, D. H. Smith, and A. G. White. Observation of entanglement-dependent two-particle holonomic phase. *Phys. Rev. Lett.*, 112:143603, Apr 2014. doi: 10.1103/PhysRevLett.112.143603. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.143603>.
- [23] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M. França Santos, and V. Vedral. Geometric phase in open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 90:160402, Apr 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.160402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.160402>.
- [24] Erik Sjöqvist. Geometric Phases in Quantum Information. *International Journal of Quantum Chemistry*, 115:1311, 2015.
- [25] A. A. Matoso, X. Sánchez-Lozano, W. M. Pimenta, P. Machado, B. Marques, F. Scarrino, L. E. Oxman, A. Z. Khoury, and S. Pádua. Experimental observation of fractional topological phases with photonic qudits. *Phys. Rev. A*, 94:052305, Nov 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.94.052305. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.052305>.
- [26] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. *Math. Ann.*, 63:433, 1907.
- [27] A. Peres. *Quantum Theory: Methods and Concepts*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1995.
- [28] Rémy Mosseri and Rossen Dandoloff. Geometry of entangled states, bloch spheres and hopf fibrations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(47):10243, 2001. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/34/i=47/a=324>.
- [29] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [30] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:

- 3123–3126, Apr 1998. doi: 10.1103/PhysRevA.57.3123. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.3123>.
- [31] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044–2046, Nov 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.2044. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2044>.
- [32] Leonardo Teixeira Neves. *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2006.
- [33] Leonardo Neves, S. Pádua, and Carlos Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69:042305, Apr 2004. doi: 10.1103/PhysRevA.69.042305. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.042305>.
- [34] Leonardo Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua. Generation of entangled states of qudits using twin photons. *Phys. Rev. Lett.*, 94:100501, Mar 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.94.100501. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.100501>.
- [35] A.G. da Costa Moura, W.A.T. Nogueira, and C.H. Monken. Fourth-order image formation by spontaneous parametric down-conversion: The effect of anisotropy. *Optics Communications*, 283:2866, 2010.
- [36] Artur Araújo Matoso. *Fase topológica fracionária em qudits fotônicos codificados espacialmente*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2014.
- [37] G. Di Giuseppe, L. Haiberger, F. De Martini, and A. V. Sergienko. Quantum interference and indistinguishability with femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 56:R21–R24, Jul 1997. doi: 10.1103/PhysRevA.56.R21. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.R21>.
- [38] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773–R776, Aug 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.60.R773. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.R773>.
- [39] Taehyun Kim, Marco Fiorentino, and Franco N. C. Wong. Phase-stable source of polarization-entangled photons using a polarization sagnac interferometer. *Phys. Rev. A*, 73:012316, Jan 2006. doi: 10.1103/PhysRevA.73.012316. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.012316>.

-
- [40] Rafael Antunes Ribeiro. *Fase topológica fracionária é Robusta à Ruído de Fase*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2015.
- [41] Paula D'Ávila Machado. *Engenharia de estados espaciais de dimensões híbridas*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG, Brazil, 2016.
- [42] Pranaw Rungta, V. Bužek, Carlton M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn. Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions. *Phys. Rev. A*, 64: 042315, Sep 2001. doi: 10.1103/PhysRevA.64.042315. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.042315>.