

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISAS EM ADMINISTRAÇÃO

**OTIMIZAÇÃO DINÂMICA SOB CONDIÇÃO DE
INCERTEZA NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO**

Juliana de Moraes Marreco

Belo Horizonte
2001

Juliana de Moraes Marreco

OTIMIZAÇÃO DINÂMICA SOB CONDIÇÃO DE INCERTEZA NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração – CEPEAD – da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Administração.

Área de Concentração: Mercadologia e
Administração Estratégica
Orientador: Prof. Dr. Haroldo Guimarães
Brasil
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte
Faculdade de Ciências Econômicas da UFMG
2001

Esta dissertação é dedicada aos meus pais e ao Alexandre.

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas que contribuíram para a elaboração deste trabalho. A todas elas, meus sinceros agradecimentos.

Ao professor Dr Haroldo Guimarães Brasil, pelo apoio, pela liberdade e pela orientação.

À professora Dra Marielza Oliveira Borges Martins, pelo incentivo e por me oferecer condições para finalizar o trabalho sem interromper minha atividade profissional no Ibmec.

Ao professor Dr Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto que gentilmente permitiu minha participação na disciplina Algoritmos de Otimização no departamento de Engenharia Mecânica, fundamental para o desenvolvimento do modelo da dissertação.

Ao professor Marco Antônio Guimarães Dias, da Puc Rio, autor da minha principal referência, pelo envio de artigos, pelas dicas e por todas as informações técnicas referentes à produção de petróleo. Senti-me verdadeiramente honrada pela sua atenção. Entendi o valor de uma dissertação que é aprovada com honra.

À Germana Aparecida Trigueiro de Assis e à Claudia Aparecida Augusta de Souza, pela ajuda na pesquisa bibliográfica.

À Raquel de Freitas Oliveira, pelas importantes discussões sobre o tema e pelas leituras e comentários.

Ao Alexandre Salles da Cunha que não apenas me incentivou na idéia do mestrado o tempo todo, como também muito contribuiu com sugestões na modelagem e no desenvolvimento do algoritmo. Agradeço ainda pelas críticas, pela compreensão de toda a ansiedade e por estar sempre ao meu lado.

Aos meus pais, José Carlos Nunes Marreco e Maria Inês de Moraes Marreco, pelo incentivo, pelo apoio, pela valorização do meu trabalho e pelo amor.

“Toda nossa ciência comparada com a realidade é primitiva e infantil – e, no entanto é a coisa mais preciosa que temos”

(Albert Einstein)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	ANÁLISE DE INVESTIMENTOS NAS EMPRESAS	17
2.1	Teoria das Opções Reais	20
2.1.1	Modelos de avaliação de opções	25
2.1.1.1	Modelo de Black e Scholes	26
2.1.1.2	Modelo Binomial	31
3	APLICAÇÃO DA TEORIA DAS OPÇÕES REAIS NA PRODUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO	36
4	OTIMIZAÇÃO DINÂMICA SOB CONDIÇÃO DE INCERTEZA	40
4.1	Programação dinâmica	41
4.1.1	Aspectos gerais da programação dinâmica	42
4.1.2	A programação dinâmica no domínio contínuo	43
4.1.3	A programação dinâmica em domínio discreto	44
4.2	Interpretação do problema de programação dinâmica	44
4.3	Princípio da otimalidade	45
5	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA OPÇÃO DE ABANDONO	48
5.1	Metodologia	48
5.2	Parâmetros de entrada	50
5.2.1	Produção diária de barris	51
5.2.2	Taxa anual de declínio da produção	52
5.2.3	Preço atual do barril de petróleo	53
5.2.4	Taxa livre de risco e taxa de conveniência do petróleo	53
5.2.5	Custos operacionais	54
5.2.6	Discretização do tempo	55
5.2.7	Vida útil da jazida	55
5.2.8	Volatilidade anual - σ	56
5.2.9	Parâmetros do modelo binomial: u , d , a e p .	56
5.2.10	Custo de abandono.	57

5.3	Algoritmo	57
5.3.1	Busca Unidirecional pela Seção Áurea	60
5.3.2	Análise de convergência do algoritmo	62
5.3.3	Interpretação da fronteira de exercício ótimo	63
6	RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	64
7	CONCLUSÕES	75
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1	Produção esperada de petróleo	53
GRÁFICO 2	Fronteira do exercício ótimo	68
GRÁFICO 3	Análise de sensibilidade da taxa livre de risco	69
GRÁFICO 4	Análise de sensibilidade da volatilidade	70
GRÁFICO 5	Análise de convergência do algoritmo	74

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1	Árvore binomial – movimentos para o valor do ativo	34
QUADRO 2	Árvore binomial – valor da opção em cada nó	35
QUADRO 3	Modelos de opções reais para projetos de produção e exploração de petróleo	38
QUADRO 4	Princípio da otimalidade	46
QUADRO 5	Redução do intervalo de busca pela seção áurea	60
QUADRO 6	Página inicial para entrada de dados	66
QUADRO 7	Árvore binomial para os preços do petróleo em intervalos anuais	67

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	Valores da fronteira de exercício ótimo	71
TABELA 2	Sensibilidade da taxa livre de risco	72
TABELA 3	Valores críticos para exercício para volatilidade do preço do petróleo iguais a 15 e 25%	73

RESUMO

A criação de valor para os acionistas, principal objetivo das empresas, está diretamente relacionada à tomada de decisões. Muito tem sido estudado para orientar os administradores a tomarem as decisões que melhor traduzem esse objetivo.

Na área das finanças, o principal desafio consiste na adaptação e na criação de novos modelos que sejam adequados a um ambiente cada vez mais incerto. A moderna teoria financeira conta com o conhecimento de profissionais ligados às áreas da matemática e da física e rende-se à maior complexidade para tornar eficientes seus modelos.

O grande avanço nesse sentido ocorrido nos últimos anos foi a Teoria das Opções Reais. A idéia central é que ativos não financeiros podem ser avaliados por analogia às opções financeiras. A Teoria da Opções Reais apresenta-se como uma alternativa para análise de investimentos em casos em que o método do Valor Presente Líquido falha. Torna possível avaliar a flexibilidade, as opções de crescimento e de abandono entre outras embutidas nos projetos de investimento.

O trabalho a seguir estuda uma opção de abandono de um campo de petróleo. Deseja-se responder a seguinte pergunta: “Qual o melhor momento de abandonar um campo de petróleo em operação, considerando que o preço do barril está sujeito à incerteza?” Não se trata apenas de abandonar quando a receita operacional for menor do que os custos operacionais fixos e variáveis. É preciso ter em mente que a incerteza pode tornar um campo inviável em altamente lucrativo no futuro, caso o preço do petróleo suba.

Projetos de produção e exploração de petróleo envolvem investimentos altos, fontes de incerteza de ordem técnica e econômica, e são sempre repletos de opções. São comuns na literatura da Teoria das Opções Reais aplicações em investimentos de energia e petróleo, justificando a importância e a demanda dessas empresas por modelos mais eficientes.

O resultado da dissertação é a curva de fronteira do exercício ótimo dessa opção. A fronteira é traçada a partir de valores críticos, acima dos quais é ótimo manter a produção e, abaixo desse, o ótimo seria abandonar.

O modelo apresentado vale-se da programação dinâmica associada a uma técnica de programação não linear para determinação dos valores críticos.

A conclusão, em perfeita harmonia com a teoria apresentada, demonstra a eficiência do modelo para solução do problema proposto.

ABSTRACT

The companies' main objective is the creation of value, which is closely related to the decision making process. A lot has been studied to help managers to make decisions that best represent this objective.

In the field of Finance the target relies on the adaptation and the creation of new models that do work better in an uncertain environment. Modern Finance Theory leads on the knowledge of mathematics and physics and accepts more complexity in order to obtain more efficiency.

The greatest step in the last years was the Real Options Theory. The main idea is that real assets can be valued by an analogy with financial assets. Real Options Theory is a valuable alternative when the Net Present Value fails. It also makes it possible to value flexibility, growth options and abandon options among others that are implicit in investment projects.

This thesis studies the option to abandon an offshore oil field. In other words, to answer the question: "when is it optimal to abandon an offshore oil field, considering that future oil price is uncertain?" It is not just about abandoning the field when the operating costs become higher than the operating revenues. It's important to remember that uncertain can turn an unprofitable field into a highly profitable one, once there is an increase in oil prices.

Oil exploration and production projects demand high investments, that are under technical and economic uncertain and are always full of real options. They are quite common in the literature, which shows their importance and how companies are demanding best models.

The result is the boundary curve, above which is optimal to keep operation, and below it there is an abandon region. The model presented uses Dynamic Programming together with a non linear programming method (Golden Section Search) to calculate the critical values.

The conclusion, in accordance to the theory presented, shows that the model is able to solve the problem proposed.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo primordial das empresas é a criação de valor para os seus acionistas. O sucesso desse objetivo depende fundamentalmente da análise de investimentos dos novos projetos que precede a tomada de decisões.

Os estudos de viabilidade técnica e econômica dos investimentos deverão contemplar questões de risco, retorno, incerteza e orçamento de capital. Normalmente a análise de investimentos é feita através de modelos de avaliação do fluxo de caixa projetado. Dos diversos métodos de avaliação conhecidos, o método do Fluxo de Caixa Descontado – FCD – é o mais utilizado e também o que possui, aliado a sua facilidade de aplicação, o maior apelo intuitivo.

No entanto, esse método apresenta algumas limitações. A dificuldade na escolha da taxa de desconto adequada e a incapacidade de valorizar oportunidades embutidas no projeto motivaram o surgimento de novas técnicas de avaliação, que contemplassem tais aspectos. O cálculo do Valor Presente Líquido – VPL – deve ceder espaço às novas teorias para a avaliação de projetos, tornando-as mais adequadas ao ambiente de incerteza. A Teoria das Opções Reais surgiu como uma nova maneira de pensar a avaliação de ativos reais.

A partir de uma analogia com as opções financeiras, a Teoria das Opções Reais permite considerar na análise de projetos fatores como flexibilidade, oportunidades de crescimento, opção de abandono do investimento, contração, investimentos seqüenciais e, até mesmo, a entrada de concorrentes em um mercado. Projetos que poderiam ser descartados por apresentarem VPL negativo passam a ser considerados viáveis sob a justificativa de conterem valiosas opções embutidas.

Estudos de viabilidade técnica e econômica na área de recursos naturais têm sido um campo fértil para a aplicação da Teoria das Opções Reais. Projetos de exploração de petróleo, como o que será tratado nesta dissertação, são repletos de opções e cercados de fontes de incerteza. Além disso, a abordagem de investimentos de produção e exploração de petróleo é facilitada

pela existência de mercados futuros de petróleo, que irão permitir a montagem do portfólio dinâmico para a utilização da taxa livre de risco.

Entre as opções embutidas nesse tipo de projeto, podemos destacar a decisão de investir, isto é, o *timing* do investimento, a decisão de mudança de uso, decisões de parada temporária, decisão de venda e decisão de abandono.

Esta dissertação trata da opção de abandono de um campo de exploração de petróleo, que pode ser exercida caso o preço do barril de petróleo atinja determinado patamar que justifique tal decisão.

A opção de abandono é tratada como uma opção de venda¹ americana. Neste trabalho, o objetivo principal será traçar a fronteira de exercício ótimo, o que será feito através da programação dinâmica. A dissertação está estruturada da forma apresentada a seguir.

No capítulo 2, os modelos da análise tradicional são confrontados com a Teoria das Opções Reais e, ainda nesse capítulo, apresentam-se os modelos utilizados para precificação das opções.

Uma breve revisão da literatura da aplicação da Teoria das Opções Reais a projetos de produção e exploração de petróleo está contida no capítulo 3.

O capítulo 4 apresenta a técnica da programação dinâmica para otimização sob incerteza.

A formulação matemática da opção de abandono é objeto do capítulo 5. Ainda no capítulo 5 é descrito o pseudo algoritmo, com a explicação das premissas de cada um dos parâmetros de entrada.

¹ O titular de uma opção de venda tem o direito (não a obrigação) de vender o ativo por um preço de exercício estabelecido, na data de expiração do contrato (para opções europeias) ou até a data (caso das opções americanas). Esse direito é adquirido mediante o pagamento do prêmio.

A aplicação das técnicas e do algoritmo a um caso real é objeto do capítulo 6, em que se apresentam os resultados seguidos de uma breve análise de sensibilidade das taxas de juros e da volatilidade.

A conclusão do trabalho é descrita no capítulo 7. O capítulo 8 destina-se às referências bibliográficas.

2 ANÁLISE DE INVESTIMENTOS NAS EMPRESAS

A análise de investimentos consiste no levantamento e avaliação de todas as vantagens e impactos de um projeto para a empresa. É a partir dessa análise que os dirigentes das empresas tomarão as decisões acerca de em quais projetos investir, qual o orçamento de capital que deverá ser destinado a cada projeto e ainda poderão contar com uma previsão do resultado de cada um dos projetos. A avaliação de investimentos é utilizada seja na abordagem das finanças corporativas, na análise de fusões e aquisições ou na administração de portfólios. Uma empresa pode ser avaliada como um projeto por diferentes técnicas: valor contábil, análise de múltiplos como preço/lucro, preço/valor contábil ou preço/vendas e, até mesmo, pela avaliação de suas oportunidades.

A avaliação de projetos de investimento pela metodologia do VPL é consagrada na teoria e na prática financeira. Baseia-se no fluxo de caixa descontado a uma taxa que representa o custo de capital. O cálculo dessa taxa deve considerar o benefício fiscal do uso do capital de terceiros, custos de transação, custos de emissão de novos títulos, custos referentes a dificuldades financeiras e subsídios. As principais técnicas utilizadas para a determinação da taxa são: o Custo Médio Ponderado de Capital – CMPC – e a técnica do Valor Presente Ajustado – VPA .

O CMPC propõe que a taxa seja calculada como uma média ponderada entre o custo do capital próprio e o custo do capital de terceiros, descontando-se o benefício fiscal.

O VPA parte do cálculo do valor presente líquido, considerando inicialmente que o projeto seja totalmente financiada por capital próprio, e ajusta esse valor aos efeitos do financiamento do projeto.

Ainda assim, o cálculo do valor presente líquido apresenta a dificuldade na estimativa da taxa de desconto, principalmente na determinação do custo do capital próprio e, até mesmo, na projeção dos fluxos de caixa futuros.

O modelo mais utilizado para estimativa do custo de capital dos acionistas ainda é o *Capital Asset Pricing Model*² – CAPM. Apesar de inúmeras críticas de diversos autores³, principalmente no que se refere às hipóteses do modelo e à dificuldade de testá-lo na prática, o CAPM apresenta uma equação muito simples que relaciona o retorno esperado do ativo e o seu risco sistemático. A simplicidade e o enorme apelo intuitivo consagraram o CAPM como o método mais utilizado pelas empresas para a determinação do custo de capital próprio.

A decisão de investimento seria adequada quando o VPL do projeto fosse maior que zero, no momento considerado. Otimizar uma decisão quando não existe incerteza é relativamente simples: basta calcular o VPL de vários projetos de investimentos e escolher aqueles que oferecem maior retorno.

Na prática, porém, as decisões são quase sempre cercadas de incerteza. No caso de projetos de exploração e produção de petróleo, as decisões de investimentos são afetados pelos componentes econômico e técnico⁴ da incerteza.

O método de avaliação pelo VPL trata a incerteza através da prospeção de diversos cenários que são associados a probabilidades. Mas a definição da probabilidade ainda é feita de maneira arbitrária e ainda assim permanece o problema de não contemplar o valor das opções embutidas nos projetos.

Companhias que detêm novas tecnologias, idéias de desenvolvimento de produtos, bem posicionadas em mercados emergentes, ou com acesso potencial a novos mercados contam com valiosas oportunidades. São nessas situações que a análise pelo cálculo do VPL falha, e

² Para maiores detalhes do CAPM, ver SHARPE(1964); LINTNER(1965); SEARS e TRENNEPOHL(1993). FAMA(1991) trata a hipótese conjunta sobre a dificuldade de testar modelos de equilíbrio, FAMA E FRENCH(1992), LELAND(1999) e MERTON(1973).

³ Por exemplo, FAMA (1991) expõe o problema da hipótese conjunta (modelo inadequado ou mercado ineficiente) que gera ambigüidade em explicar anomalias no comportamento dos retornos. Outros críticos do CAPM poderiam ser citados como ROSS(1978) e ROLL(1977).

⁴ De acordo com DIAS(1996), incerteza técnica é a incerteza nos volumes de fluidos da jazida e do desempenho de projetos em razão da utilização de novas tecnologias, e a incerteza econômica advém de fatores externos ao projeto como, por exemplo, oscilações do preço do barril de petróleo.

as decisões passam a ser guiadas pela intuição do gerente que as considera estratégicas, mas não consegue quantificar o seu valor de uma forma lógica. Além disso, o VPL considera que, se o projeto não for aceito no momento do estudo, ele não poderá ser revisto em uma ocasião posterior.

Quando um projeto é analisado, pode-se optar por investir imediatamente caso as condições sejam favoráveis, ou ainda aguardar e só investir num momento posterior de acordo com as mudanças no cenário. Isto é, pode-se esperar que algumas dessas fontes de incerteza sejam resolvidas sem perdermos a oportunidade do investimento. Essa opção tem valor, e esse valor pode ser calculado de maneira análoga a uma opção financeira.

Muitos projetos de investimentos não são necessariamente irreversíveis. DIAS(1996) aponta que investimentos tais como a perfuração de um poço é irreversível, uma vez que o custo de recuperação dos materiais é maior ou igual ao seu valor de revenda. Em contrapartida, investimentos na completação⁵ de um poço submarino são considerados parcialmente reversíveis, pois, nesse caso, recupera-se a árvore de natal molhada⁶.

É essa reversibilidade parcial que justifica a consideração da opção de abandono gerada por uma queda expressiva na cotação do petróleo.

⁵ Conjunto de operações que possibilita a colocação de um poço de óleo ou gás em produção. Disponível em <http://www.petrobras.com.br>. Acesso em 15/01/2001.

⁶ Conjunto de válvulas colocado sobre o solo oceânico, que controla a pressão e vazão de um poço submarino. Disponível em <http://www.petrobras.com.br>. Acesso em 15/01/2001.

2.1 TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

Em finanças, oportunidades podem ser avaliadas como opções. A partir dessa nova forma de pensar, nasce a Teoria das Opções Reais, que utiliza a matemática do cálculo de derivativos para avaliar ativos reais. A teoria das opções reais adequa o cálculo do valor das opções financeiras ao caso dos ativos reais, tornando possível quantificar o valor de oportunidades de crescimento, de abandono, de esperar para investir, de flexibilidade etc...

É importante observar que a Teoria das Opções Reais não rejeita o VPL Tradicional, apenas o complementa, ao considerar uma parte do valor que o VPL Tradicional não consegue captar. Essa parte do valor de que estamos falando é o valor das opções que estão embutidas no projeto.

Um novo método de avaliação sugerido por DIXIT e PINDICK (1994) seria um Valor Presente Líquido Expandido ou Valor Presente Líquido Estratégico -VPLE. Essa nova abordagem considera que, num contexto de incerteza, em que existem opções embutidas no projeto, o valor desse seria obtido por

$$VPLE = VPL + VO \quad (1)$$

Em que

VPLE = valor presente líquido estratégico (expandido)

VPL = valor presente líquido tradicional

VO = valor das opções

Dessa forma, o valor adequado de uma empresa seria aquele que considera não apenas a sua capacidade de geração de caixa no futuro, mas que também abrange o valor das suas opções.

DIXIT e PINDYCK(1994) demonstraram que a adoção dos critérios do VPL como regra de decisão isolada levam à rejeição de projetos que, quando analisados pela Teoria das Opções Reais, seriam aceitos. Isso geralmente ocorre com projetos que têm opções, como projetos de P&D.

A teoria das opções reais surgiu a partir de uma analogia com as opções financeiras. Uma opção financeira dá ao seu titular o direito (e não a obrigação) de comprar ou vender um determinado ativo em uma data preestabelecida por um preço determinado no contrato (preço de exercício). Em uma opção européia, o titular só pode exercer o seu direito na data estabelecida no contrato. Já em uma opção americana, o titular poderá exercer o seu direito de compra/venda em qualquer momento até a data de vencimento.

Quando a opção atinge a data de exercício e não é vantajoso exercer, é comum dizer no jargão do mercado que a opção “virou pó”. A partir dessa data de maturidade, a opção expira, e as obrigações do lançador da opção são encerradas. O portador deixa de ter o direito de comprar ou vender o ativo pelo preço contratado.

Para adquirir uma opção, o portador deverá pagar um prêmio ao lançador da opção. A definição do valor do prêmio está diretamente relacionada com as condições do contrato de opção. Isto é, o valor do prêmio depende do valor presente do ativo, do prazo até a data de exercício, da volatilidade do preço do ativo, do preço de exercício, dos dividendos pagos pela ação e, finalmente, da taxa livre de risco.

De acordo com HULL (1999), o valor do prêmio se relaciona com essas seis variáveis da seguinte forma:

Preço do ativo \Rightarrow quanto maior o preço do ativo-base, maior será o preço de uma opção de compra, e menor será o valor da opção de venda. Isso vale tanto para opções americanas como para opções européias.

Preço de exercício \Rightarrow quanto maior o preço de exercício, maior será o preço das opções de venda, e menor o preço das opções de compra, americanas e européias.

Tempo até a data de exercício \Rightarrow para as opções européias, que só podem ser exercidas na maturidade, um tempo maior não garante maiores oportunidades e, portanto, as opções européias não se tornam mais valiosas por terem mais tempo até a data de exercício. No caso das opções americanas, quanto maior for o prazo até a maturidade, mais chances de exercício existirão e, por isso, mais valiosas serão as opções de compra e de venda americanas. Isso se justifica também porque as opções americanas devem ser mais caras do que as opções européias em condições iguais.

Volatilidade \Rightarrow para qualquer tipo de opção, quanto maior a volatilidade, maiores serão as oportunidades de ganhos. Como as opções apresentam perdas limitadas ao valor do prêmio e ganhos ilimitados, volatilidades apresentam impacto positivo no preço das opções.

Taxa livre de risco \Rightarrow um aumento nas taxas da economia tende a aumentar a taxa esperada de crescimento das empresas. Com isso, o valor das opções de venda diminui à medida que a taxa livre de risco aumenta. Para as opções de compra, o efeito é o oposto: o aumento da taxa livre de risco implica em um aumento do valor da opção de compra.

Dividendos \Rightarrow Os dividendos funcionam como uma parte da remuneração do acionista e apresentam efeito de redução do preço da ação na data da distribuição dos mesmos. Quanto maiores forem os dividendos pagos pelo ativo-base, maior será o preço da opção de venda e menor o preço da opção de compra.

A Teoria das Opções Reais assume as mesmas relações entre essas variáveis e o prêmio da opção.

A existência de incerteza e a possibilidade de mudança no cenário até a data de vencimento é que tornam a opção atrativa aos investidores. Sob a ótica das opções, a incerteza não é prejudicial ou negativa na avaliação do prêmio. Ao contrário, quanto maior a incerteza (medida pela volatilidade), maior a expectativa de ganhos. Um contrato de opção oferece oportunidade de perdas limitadas ao valor do prêmio e ganhos ilimitados. Dessa forma, quanto maior a volatilidade, maiores podem ser os retornos auferidos. Se na data de

vencimento, o titular optar por não exercer, tudo o que terá perdido será o prêmio pago pela opção.

O mesmo raciocínio deverá ser utilizado para os ativos reais. Assim, quanto maior a incerteza envolvida, maior será o valor da opção real. Entre as aplicações mais frequentes da Teoria das Opções Reais destacam-se opções de espera, opções que representam flexibilidade, opções de abandono, opções de aprendizado e opções de crescimento. Tem sido comum a utilização dessa abordagem na avaliação de projetos de P&D, nos projetos que avaliam a exploração de recursos naturais, desenvolvimento de novos produtos, utilização de patentes, licenças, concessões, projetos de infra-estrutura e nos estudos sobre o impacto da entrada de competidores no mercado.

Para AMRAM e KULATILAKA (1999), uma análise através de opções reais é recomendada nas seguintes situações:

- Quando existem decisões circunstanciais.
- Quando a incerteza justifica a espera por maiores informações.
- Quando a incerteza é grande o suficiente para tornar imperativa a consideração da flexibilidade.
- Quando o projeto será atualizado ao longo sua vida.
- Quando as oportunidades de crescimento são mais significativas que a geração de fluxo de caixa.

Ao aplicarmos a Teoria das Opções Reais, o primeiro passo é identificar as opções existentes no projeto. O segundo passo é a escolha do modelo de avaliação da opção. Existem três formas para o cálculo do valor das opções. São os seguintes:

- 1) Resolução de equações diferenciais parciais.
- 2) Simulações.
- 3) Programação dinâmica.

Para a resolução de equações diferenciais, de acordo com as características do problema, pode existir ou não uma solução analítica. Um caso particular, por exemplo, é o que leva à solução pela fórmula de Black e Scholes. No entanto, para muitas equações diferenciais parciais, não é possível encontrar uma solução analítica. Nesses casos, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos, que irão resolver a equação através de sucessivas iterações.

No caso das simulações, o melhor exemplo seria o da simulação de Monte Carlo. A simulação de Monte Carlo engloba diversas aplicações reais, incluindo regras de decisão complicadas e complexas relações entre o valor da opção e o valor do ativo-base. Nas simulações, as variáveis do problema são excitadas de forma a gerar milhares de possibilidades que irão caracterizar a evolução do ativo-base da data presente até o vencimento da opção.

A programação dinâmica pode ser exemplificada pelo modelo binomial, que utiliza uma abordagem de malhas, proposto por COX, ROSS e RUBINSTEIN⁷ (1979). Esse método utiliza um diagrama em que estão representados os possíveis valores em cada ponto do tempo durante toda a vida da opção. A avaliação através de árvores binomiais está centrada na formação de um portfólio que impede oportunidades de arbitragens e torna possível uma avaliação em mundo livre de risco que pode ser estendida para o mundo real. A programação dinâmica, ao contrário da Simulação de Monte Carlo, é uma técnica de otimização.

Uma vantagem da Teoria das Opções Reais em relação ao método do VPL é que exige reduzido número de parâmetros de entrada, dentre os quais, a maioria pode ser observada no próprio mercado. Particularmente, nas aplicações na exploração de reservas naturais, ADELMAN e JACOBY (1979) chamam a atenção para o fato de que o VPL exige do analista projeções sobre o valor futuro esperado do preço do petróleo e o tempo ótimo de extração, enquanto a Teoria das Opções Reais permite que o mercado avalie as novas

⁷ O modelo foi desenvolvido no artigo de COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979), mas a idéia básica partiu de Sharpe quando considerou intervalos discretos, em que o investidor poderia alterar a composição do seu portfólio em uma carteira livre de risco, a partir dos preços das ações no final do intervalo de tempo considerado. Os preços poderiam ou subir ou descer um percentual conhecido.

reservas a serem desenvolvidas através dos preços de mercado de reservas já desenvolvidas com características similares.

Outra vantagem que a Teoria das Opções Reais apresenta sobre o VPL é que elimina a necessidade de determinar a taxa ajustada ao risco, como será mostrado adiante.

2.1.1 MODELOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES

A avaliação de opções consiste na determinação do valor justo para o prêmio. Modelos matemáticos podem ser desenvolvidos a partir de considerações dos vários fatores que afetam o valor do prêmio. Para traduzir para um modelo matemático um fenômeno, é fundamental que sejam determinados os pressupostos do modelo, isto é, as hipóteses.

De acordo com DAS (1998), os modelos de avaliação de opções seguem as seguintes premissas:

- Ativos são negociados continuamente, e todos os preços seguem processos estocásticos contínuos e estacionários.
- Os fluxos de caixa intermediários (como o pagamento de dividendos, por exemplo) não são considerados. Essa premissa será relaxada posteriormente.
- Os preços dos ativos se comportam de forma randômica.
- A distribuição dos preços do ativo-base é log normal.
- A variância do retorno e a taxa livre de risco são constantes ao longo do tempo.
- Os modelos são desenvolvidos com base em opções européias.
- Inexistência de restrições ou custos atrelados à venda curta.
- Os custos de transação ou taxas não são considerados.

Os principais modelos de avaliação de opções são o Modelo Binomial proposto por COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979) e o Modelo de BLACK e SCHOLLES (1973).

2.1.1.1 Modelo de Black e Scholes

A publicação do artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* por Fischer Black, e Myron Scholes, em 1973, revolucionou o mercado de opções nos Estados Unidos, impulsionando o investimento em opções e os estudos dos derivativos.

A idéia central da formulação de Black e Scholes reside na adoção de um portfólio, que, através de um mecanismo de *hedge*⁸, elimina oportunidades de arbitragem e garante ao investidor um retorno igual à taxa livre de risco.

O modelo parte do pressuposto de que o preço do ativo-base varia ao longo do tempo de acordo com um processo estocástico chamado Movimento Geométrico Browniano⁹.

Desta forma, de acordo com KWOK (1998), o preço do ativo se comporta de acordo com a equação

$$\frac{dS}{S} = \rho \cdot dt + \sigma \cdot dZ \quad (2)$$

Em que

S = preço do ativo-base;

ρ = taxa de retorno esperada;

σ = volatilidade;

dZ = é o termo que representa um processo de Wiener padrão.

⁸ *Hedge* é uma operação que visa reduzir a exposição ao risco. Por exemplo: quando um exportador transfere sua mercadoria em troca das divisas do importador em um contrato a termo para pagamento de 120 dias, o exportador vende as divisas imediatamente, considerando o câmbio do dia, evitando prejuízo caso o câmbio na ocasião seja desfavorável. Em resumo, os prejuízos de uma transação são cobertos pelos possíveis lucros em outras.

⁹ Na física, o movimento de uma partícula sujeita a um grande número de choques moleculares é conhecido como Movimento Browniano.

No processo de Markov, apenas o valor presente da variável seria relevante na determinação do seu comportamento no futuro¹⁰. Um processo de Wiener é um caso particular de um processo de Markov em que a variação da média é zero, e a taxa da variância é igual a 1.

Os parâmetros ρ e σ são considerados constantes ao longo do tempo. O portfólio que deverá ser montado envolve a venda curta¹¹ de uma unidade de uma opção de compra européia e a compra de Δ unidades do ativo-base. O valor desse portfólio, Π , será:

$$\Pi = -c + \Delta S \quad (3)$$

em que $c = c(S,t)$ é o valor da opção de compra em função do tempo e do preço do ativo-base.

Nesse ponto, vale ressaltar que as ferramentas utilizadas no cálculo tradicional são válidas quando tratamos variáveis determinísticas. Os mercados financeiros não são determinísticos. Com exceção do tempo, as demais variáveis todas seguem processos estocásticos no tempo contínuo. O lema de Ito corresponde à Regra da Cadeia do cálculo determinístico. O cálculo estocástico utiliza o lema de Ito para obter uma equação diferencial estocástica para o derivativo a partir de uma equação diferencial estocástica para o ativo-base (NEFCTI, 1996).

Aplicando o lema de Ito, em (2) temos

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt \quad (4)$$

e

¹⁰ A propriedade de Markov é condizente com a eficiência fraca de mercado, isto é, o preço atual do ativo é ajustado de modo a refletir todas as informações até o momento considerado. (HULL, 1999)

¹¹ Venda de valores ou mercadorias por alguém que ainda não os possui.

$$d\Pi = -dc + \Delta dS$$

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) dS \quad (5)$$

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \rho \cdot S \right) dt + \left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S} \right) \sigma \cdot S \cdot dZ \quad (6)$$

O último termo à direita em (6) é o termo estocástico, referente a dZ . Podemos escolher um Δ tal que o termo estocástico seja igual a zero. Para isso, devemos ter $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$, para que o portfólio se torne um *hedge*, livre de risco. Em uma situação de equilíbrio, os retornos desse portfólio devem ser iguais aos retornos em um investimento à taxa livre de risco. Em caso contrário, seria possível arbitrar e obter lucros tomando emprestado à taxa livre de risco e aplicando no portfólio acima. É fundamental ressaltar que a cada instante um novo portfólio deve ser estruturado visando garantir essa posição de *hedge*.

Igualando os retornos do portfólio ao retorno oferecido por uma aplicação à taxa livre de risco temos:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt = r \cdot \Pi \cdot dt = r \left(-c + S \frac{\partial c}{\partial S} \right) dt \quad (7)$$

Portanto:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + r \cdot S \frac{\partial c}{\partial S} - r \cdot c = 0 \quad (8)$$

A equação (8) é a Equação de Black e Scholes.

Para uma opção de compra do tipo europeia, na solução da equação (8), estaríamos sujeitos à seguinte condição de contorno:

Na data de exercício, o valor da opção é dado por

$$c(S, T) = \max(S - X, 0) \quad (9)$$

em que

T = tempo até a data de exercício

X = preço de exercício

É importante observar que o parâmetro ρ (taxa de retorno esperada do ativo) não aparece na equação final. Isso quer dizer que as preferências de risco dos investidores não afetam o valor da opção.

A fórmula para a precificação de opções é obtida a partir de uma abordagem que considera que os investidores são indiferentes ao risco. No entanto, os resultados obtidos podem ser levados para o mundo real. Isso pode ser demonstrado pelo teorema de Girsanov¹².

A partir da equação (8), de acordo com as condições de contorno de cada tipo de opção, podemos encontrar as equações de Black e Scholes para opções de compra (10) e venda (11) européias no momento zero.

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (10)$$

$$p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(d_1) \quad (11)$$

em que

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (12)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (13)$$

Uma vantagem do Modelo de Black e Scholes é que todas as variáveis utilizadas no cálculo do valor da opção podem ser observadas diretamente no mercado, à exceção da volatilidade. A volatilidade pode ser estimada por diversos métodos, como, por exemplo, volatilidade histórica, volatilidade implícita que é calculada pelo modelo Black e Scholes e volatilidade condicional, apurada através de modelos auto-regressivos como *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* – ARCH – e sua variação, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*¹³ – GARCH.

Das premissas assumidas inicialmente para o desenvolvimento do modelo, algumas podem ser violadas sem perda de significância. Isso pode ser demonstrado a partir de análises de sensibilidade de cada variável. A consideração de uma taxa livre de risco constante ao longo do período é uma premissa que não é verificada na prática, mas que não impacta significativamente no modelo. Os fluxos de caixa intermediários, como os dividendos, podem ser considerados a partir de alguns ajustes no modelo. O mesmo pode ser dito sobre a possibilidade do exercício antecipado, isto é, antes da data de expiração.

Por outro lado, as considerações feitas acerca do comportamento dos preços do ativo, que variam continuamente ao longo do tempo (sem apresentar saltos ou descontinuidades), seguindo um padrão de distribuição log normal, com variância constante ao longo do tempo são questionáveis. Pesquisas empíricas mostraram que o comportamento real dos preços difere do padrão em dois aspectos: existência de extremos maiores (em densidade de probabilidade) do que o da curva de Gauss, que caracteriza a distribuição normal, e pela presença de saltos. Outros modelos foram desenvolvidos para sobrepor essa dificuldade, mas os resultados de testes empíricos demonstraram que nenhum deles apresentou resultados consistentes melhores do que aqueles obtidos pelo modelo de Black e Scholes. (DAS, 1998).

¹² Para maiores detalhes sobre o teorema de Girsanov, ver NEFCTI, (1996).

¹³ Para um estudo comparativo do desempenho dos métodos de estimativa da volatilidade, ver MENDES (2000) e BERTUCCI (1999).

2.1.1.2 Modelo Binomial

O Modelo Binomial, proposto em 1979, utiliza o mesmo raciocínio lógico e basicamente as mesmas premissas assumidas no Modelo Black e Scholes.

O modelo envolve a construção de uma árvore binomial, em que para cada instante discreto (representado por um nó), estarão relacionadas as possibilidades de alteração do preço do ativo-base. Considera-se que o ativo-base obedece a um processo binomial multiplicativo.

Igualmente ao Modelo de Black e Scholes, o valor da opção deverá ser igual ao valor de um portfólio que permita o mesmo retorno da opção. Esse portfólio, que deverá se ajustar de forma dinâmica a cada nova posição, será formado pela compra de Δ ações e pela venda de uma opção. O valor de Δ deve ser escolhido de modo que o retorno gerado pelo portfólio seja igual ao retorno obtido em uma aplicação livre de risco. Isso garante que não existirão oportunidades de lucro através de operações de arbitragem.

A cada intervalo de tempo Δt , o retorno sobre o ativo poderá variar de duas maneiras: na primeira, o retorno seria dado por $u - 1$, ($u > 1$); ou o retorno poderia ser igual a $d - 1$, ($d < 1$). Seja S_0 o valor atual do ativo, o preço, no momento $t = 1$, seria dado por $S_1 = u.S_0$, e nessa situação o valor da opção seria f_u ; ou por $S_1 = d.S_0$ e a opção valeria f_d .

Se houver um aumento no preço do ativo-base, o valor do portfólio será

$$S_0 u \Delta - f_u \tag{14}$$

Por outro lado, se o preço do ativo recuar, teremos

$$S_0 d \Delta - f_d \tag{15}$$

Logo, para que o portfólio ofereça um retorno livre de risco, (14) e (15) devem ser iguais.

Nesse caso,

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad (16)$$

O parâmetro Δ pode ser interpretado como sendo a taxa de variação do preço da opção em relação à variação do preço do ativo-base.

Se o custo do portfólio é igual a

$$S_0 \Delta - f \quad (17)$$

segue que

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT} \quad (18)$$

em que “ r ” representa a taxa livre de risco.

Substituindo o Δ obtido pela equação (16) em (18), temos:

$$f = S_0 \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) - \left(S_0 u \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) - f_u \right) e^{-rT} \quad (19)$$

Simplificando temos:

$$f = \frac{f_u - f_d - e^{-rT} u \cdot f_d + e^{-rT} d \cdot f_u}{u - d} \quad (20)$$

Fazendo $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$, e substituindo em (20):

$$f = e^{-rT} [p \cdot f_u + (1 - p) f_d] \quad (21)$$

Os parâmetros “u” e “d” são escolhidos de acordo com a volatilidade e o retorno esperado do ativo-base. De acordo com HULL (1999), isso pode ser feito da forma descrita a seguir.

Os intervalos entre os nós têm comprimento igual a Δt . A probabilidade associada a um aumento no preço do ativo, “u”, é dada por “p”. De maneira análoga, a probabilidade de que o preço seja reduzido em “d” é igual a $1 - p$. O valor esperado do ativo ao final do primeiro período é obtido por $S_0 e^{\mu \Delta t}$, em que “ μ ” representa o retorno esperado do ativo. Portanto, o valor esperado do ativo-base, ao considerarmos as probabilidades, será dado por:

$$qS_0u + (1 - q)S_0d \quad (22)$$

Igualando a equação (22), ao retorno esperado do ativo $S_0 e^{\mu \Delta t}$, podemos encontrar uma fórmula para calcular “p”.

$$p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d} \quad (23)$$

O mesmo raciocínio é aplicado para ajustar os parâmetros à volatilidade.

Em um processo de Wiener, a variação do termo estocástico Δz , em pequenos períodos de tempo Δt , é igual a $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ em que ε é uma variável randômica relacionada a uma distribuição normal padrão. Como Δz é normalmente distribuído, a variância de Δz é dada por Δt , e o desvio padrão é igual a $\sqrt{\Delta t}$.

A volatilidade é definida como o desvio padrão dos retornos em um período de tempo Δt . Logo, a volatilidade é obtida por $\sigma \sqrt{\Delta t}$. A variância é igual a $\sigma^2 \Delta t$. Para adequar os parâmetros da árvore binomial à volatilidade, devemos então igualar a variância dos retornos àquela proposta na árvore.

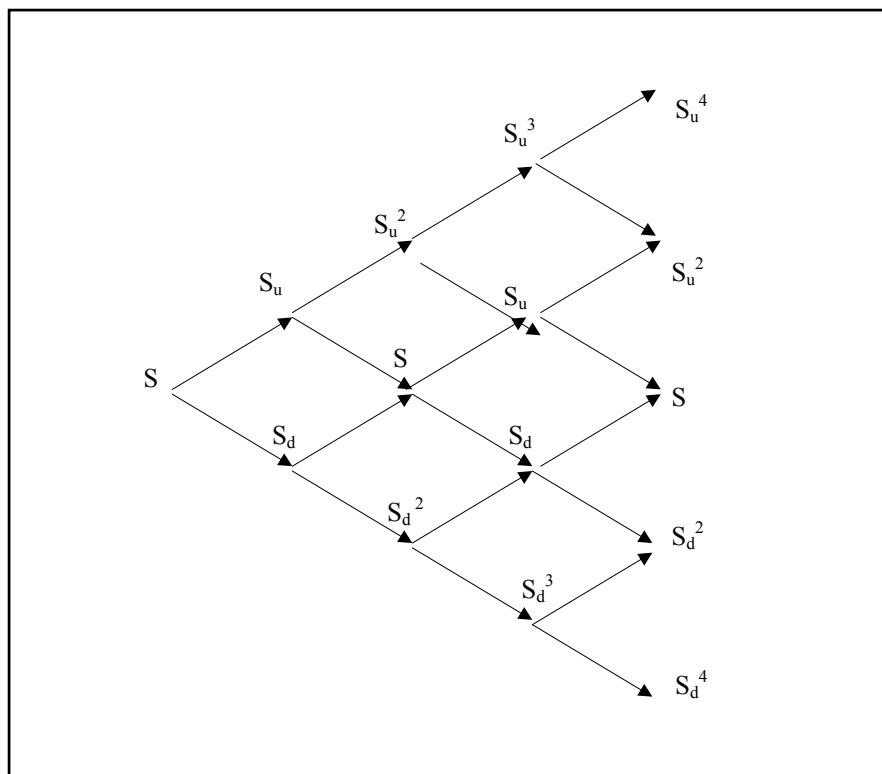
$$qu^2 + (1 - q)d^2 - [qu + (1 - q)d]^2 = \sigma^2 \Delta t \quad (24)$$

Substituindo (23) em (24) e ignorando os termos de ordem superior a Δt^2 , chegamos aos valores de “u” e “d”, propostos por COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979).

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (25)$$

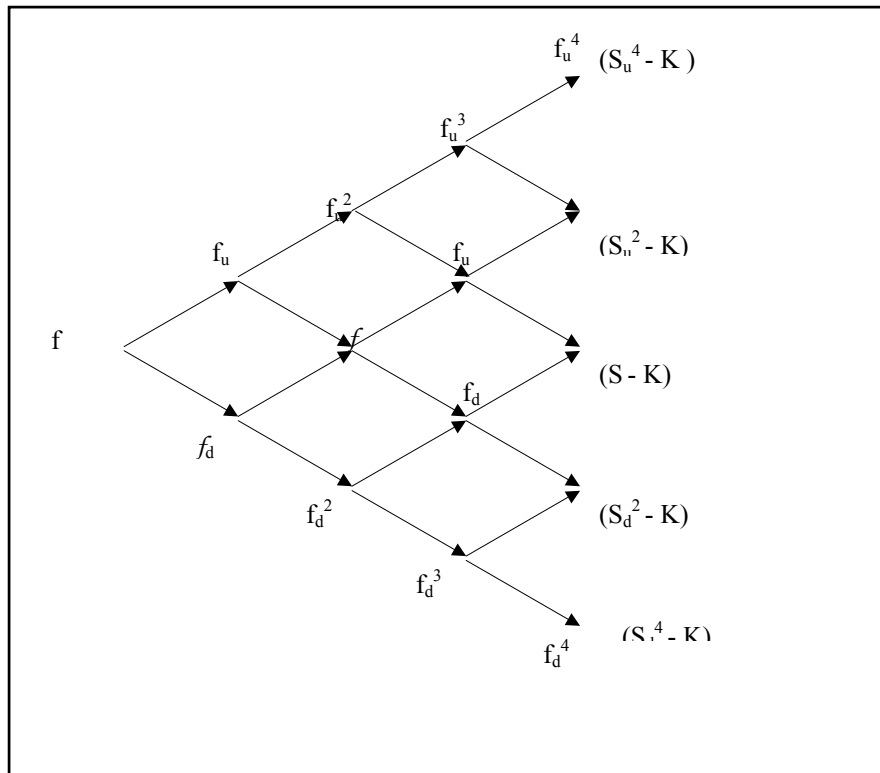
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (26)$$

Uma vez calculados esses parâmetros, o modelo binomial (ilustrado no quadro 1) apura o valor justo para o prêmio a cada nó, e esses valores são trazidos até a data presente descontados à taxa livre de risco. No quadro 1, ilustramos os movimentos possíveis para o valor do ativo. No quadro 2, representamos a cada nó o valor da opção. O intervalo entre os nós é igual a Δt .



QUADRO 1 – Árvore binomial – movimentos para o valor do ativo

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.



QUADRO 2 – Árvore binomial – valor da opção em cada nó

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.

O modelo binomial é o que melhor se adequa à avaliação de opções americanas, uma vez que é capaz de incorporar todas as alterações de preço possíveis, considerando a possibilidade do exercício antecipado. Se em um determinado nó o valor intrínseco (obtido pela diferença entre o preço de exercício e o preço corrente) for maior que o valor teórico da opção, esse prevalecerá na solução. Dessa forma, é possível incorporar ao modelo o risco do exercício anterior à data de maturidade da opção.

3 APLICAÇÃO DA TEORIA DAS OPÇÕES REAIS NA PRODUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

Como já foi dito anteriormente, é bastante comum encontrar na literatura estudos na área de exploração de recursos naturais que se valem da Teoria das Opções Reais.

TOURINHO (1979) foi o primeiro a aplicar a Teoria das Opções Reais em estudos de reservas de recursos naturais.

Já em 1985, BRENNAN e SCHWARTZ (1985) avaliaram as opções de cessar operações e abandonar uma mina, utilizando preços dos mercados à vista e futuros de commodities. Em 1988, PADDOCK, SIEGEL e SMITH avaliaram as opções presentes em reservas de óleo ainda não desenvolvidas utilizando analogia com uma opção americana e foram os primeiros a demonstrar empiricamente que a avaliação por opções reais levaria a resultados melhores que o FCD. Em 1996, DIAS utilizou essa mesma abordagem na sua dissertação de mestrado, em que trata a opção de *timing* de um investimento em produção e exploração de petróleo.

TRIGEORGIS (1990) estudou um projeto de exploração mineral que era considerado por uma empresa de mineração multinacional. Ainda em 1995, BJERKSUND e EKERN avaliaram opções de adiamento e abandono em um campo de óleo norueguês.

KEMMA (1993) trabalhou com as opções de *timing* para investir em um campo de petróleo, de expansão de um projeto que poderia ser feito em módulos e a opção de abandono de unidade de refino. Para estudo dessas três opções, utilizou analogia de opções de compra européia, para as duas primeiras e analogia a uma opção de venda também européia para a última. Neste trabalho a opção de abandono será estudada como uma opção de venda americana, uma vez que o exercício ótimo poderá ocorrer a qualquer momento até o data de expiração. Isso porque o preço do petróleo pode não justificar que o campo continue em operação, caso ele desça a um determinado patamar. Esse preço limite é denominado gatilho.

MORCK, SCHWARTZ e STANGELAND (1989) também avaliaram os recursos florestais considerando estoques e preços estocásticos. A utilização da programação dinâmica na exploração de recursos naturais foi discutida por STENSLAND e TJOSTHEIM (1989).

DIAS (1996) cita o primeiro artigo de BJERKSUND (1991) em que é analisado o problema da perda de valor (“custo de uma promessa de desenvolvimento do campo”) devido à redução do *timing* para o investimento, quando o governo da Noruega, devido ao elevado desemprego, opta pelo desenvolvimento antecipado de um campo. A opção de *timing* calculada vale US\$250 milhões, para o preço do petróleo igual ao Custo Unitário de Produção - CUP, (isto é: $VPL = 0$). O estudo do VPL para o mesmo caso resulta em perda zero, demonstrando mais uma vez as limitações do VPL.

Em projetos de produção de petróleo, destacam-se as opções de abandono, opções de cessar operações temporariamente, opções de flexibilidade e opções de *timing* do investimento¹⁴.

A opção de abandono é observada em projetos em operação ou que estão parados temporariamente. Segundo DIAS (1996), quanto maior a flexibilidade de uso alternativo de recursos do projeto, mais valiosa será a opção. Para projetos de exploração e produção de petróleo que utilizam plataforma fixa, o abandono implica em custos adicionais. Mas se a plataforma for móvel, como acontece nos casos de exploração em águas profundas, é possível seu aproveitamento em outro campo tanto para atividade de produção, perfuração, completação ou manutenção dos poços. A mudança de uso nesse caso também pode ser uma opção.

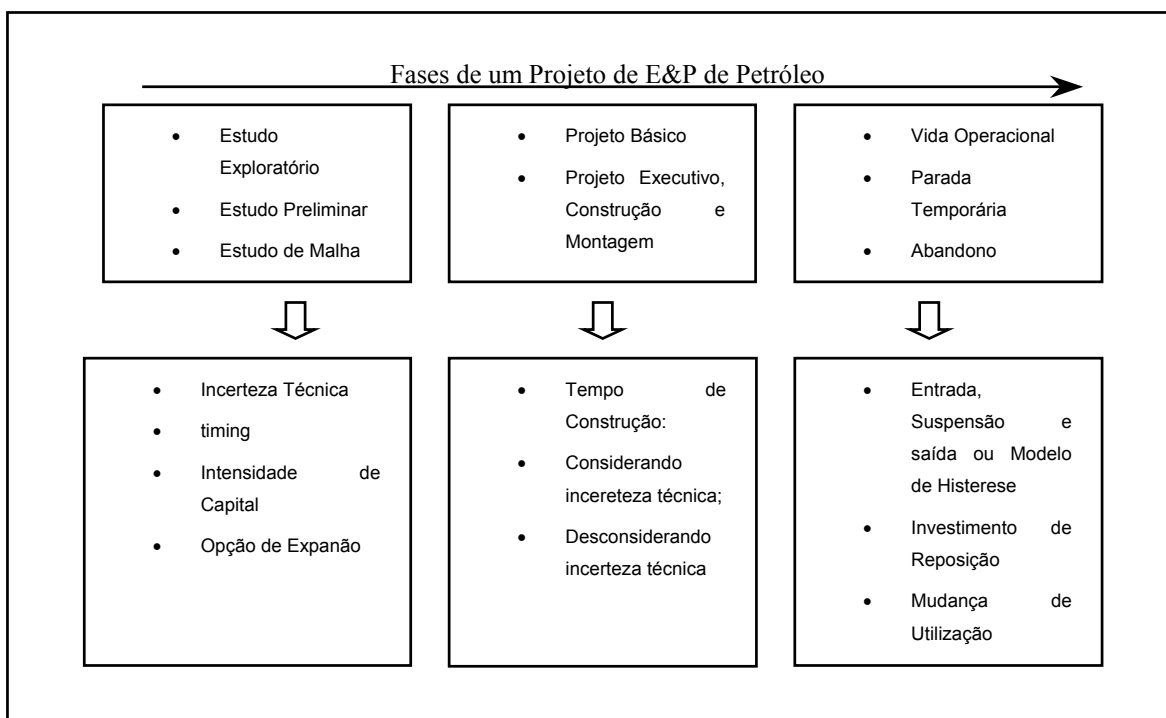
A opção de cessar operações é considerada quando a possibilidade de voltar a produzir no mesmo campo é significativa. São levados em conta custos de desmobilização temporária, de preservação, de retomada da produção e, caso sejam muito altos, optar-se-á pelo abandono definitivo. DIAS (1996) cita o exemplo do que ocorre na Bacia de Campos, onde a plataforma que produz o campo de Coral e toda a planta de processo são alugadas. A

¹⁴ Para mais exemplos da Teoria das Opções Reais em companhias de petróleo, veja DIAS (1996), em que são enumeradas 20 aplicações. A dissertação de mestrado de Dias faz um amplo levantamento das opções presentes em projetos de produção e exploração de petróleo e estuda o caso particular da opção de *timing*.

operação é terceirizada por causa da baixa lucratividade da jazida, o que aumenta o valor da opção de parada temporária, possibilitando operação apenas em condições favoráveis do preço do petróleo.

A opção de flexibilidade, largamente estudada entre os pesquisadores de opções reais, é verificada, por exemplo, nas refinarias que podem alternar o perfil de refino (proporção relativa de derivados de petróleo). DIAS (1996) ilustra isso com o exemplo do “Programa Fundo de Barril” proposto pela Petrobrás, na década de 80, em que os investimentos visavam aumentar a produção de diesel em detrimento de derivados mais pesados.

A aplicação de modelos de opções reais em projetos de produção e exploração de petróleo é tão ampla que abrange todas as fases do projeto. O quadro 3, mostra os tipos de modelos adotados em cada uma das etapas de um projeto de produção e exploração de petróleo.



QUADRO 3 – Modelos de opções reais para projetos de produção de exploração de petróleo

FONTE – DIAS (1996, p. 174).

A opção de abandono, a ser modelada neste trabalho, pode ser destacada como a mais importante na etapa 3. Isso porque a vida operacional de uma jazida de petróleo é finita e a sua produção tem uma tendência declinante (depleção). O ativo passa a ter custos

operacionais crescentes por barril produzido, até o ponto em que é ótimo abandonar o campo. A decisão de abandono só tem sentido pela existência da incerteza. Em caso contrário, na primeira vez que o custo operacional superasse a receita, a jazida deveria ser abandonada.

DIAS (1996) cita o exemplo em que o valor residual é maior do que o custo de abandono. Nesse caso, devem-se comparar os lucros operacionais positivos vindouros (atualizados) com a curva (declinante) da diferença entre o valor residual e o custo de abandono, tendo isso que ser feito para todo um horizonte temporal, determinando o abandono ótimo que proporcione o maior valor presente.

A incerteza gera a expectativa de que o preço do petróleo possa subir e, com isso, alterar a receita, tornando inadequada a decisão de abandono. Nesse tipo de decisão, no qual vale o princípio das boas notícias¹⁵, o modelo de histerese é uma alternativa para casos em que se considera a opção de abandono e aqueles em que se leva em conta a opção de parada temporária.

A idéia de encontrar o momento ótimo para o exercício de uma opção, um dos objetivos desta dissertação, já foi tratada na literatura econômica. CAMPBELL e VICEIRA (1999) demonstraram que erros relacionados ao tempo podem causar grandes perdas na escolha do portfólio. MAJD e PINDYCK (1987) trataram dos efeitos do tempo e do valor das opções nas decisões de investimento. BALDWIN (1982) e MCDONALD e SIEGEL (1986) estudaram a questão da otimização para investimentos irreversíveis.

ROSIERE (1993) propõe uma metodologia para determinar o momento ótimo de venda de uma reserva produtora, motivado pelo mercado de reservas que tem se desenvolvido principalmente no Reino Unido, Estados Unidos e Canadá. A análise de quando é mais lucrativo vender uma propriedade produtora é um problema diferente do abordado aqui, mas que pode ser resolvido pelo mesmo modelamento, com pequenas adaptações.

¹⁵ O princípio das boas notícias é provocado pela assimetria na regra de decisão e fará que quanto maior a incerteza, mais relutante ficará o gerente para a tomada de decisão.

4 OTIMIZAÇÃO DINÂMICA SOB CONDIÇÃO DE INCERTEZA

Os modelos que contemplam a incerteza, sempre presente no ambiente econômico, têm motivado pesquisas dos melhores economistas e matemáticos em toda a parte e há muito tempo. LUCAS e PRESCOTT (1971) dedicaram-se ao estudo do investimento agregado em uma indústria em condições de incerteza utilizando a programação dinâmica e considerando a demanda estocástica. Pelo enfoque no equilíbrio e através da crítica aos modelos de precificação de previsão de preços que usam expectativas adaptativas, consideraram expectativas racionais dos preços, nas quais eles têm a mesma distribuição de probabilidades ao longo do tempo. Essa idéia rendeu a Lucas o prêmio Nobel, em 1995.

BJORSTAD, HEFTING e STENSLAND (1989) estudaram as interações entre opções combinando ferramentas de estatística com a programação dinâmica estocástica. ARROW e CHANG (1982) utilizam a programação dinâmica combinada com a teoria da utilidade do consumidor. A técnica de programação dinâmica apresenta diversas aplicações nos campos da economia e das finanças.

DIXIT e PINDYCK (1994) apresentam duas técnicas para otimização dinâmica sob incerteza: a programação dinâmica e a análise de ativos contingentes. Ambas estão relacionadas entre si e levam a resultados idênticos em muitas aplicações.

A programação dinâmica torna-se equivalente à análise dos ativos contingentes quando a avaliação neutra ao risco é adotada. A idéia de montar um portfólio que impeça ganhos por arbitragem é um truque conveniente para o cálculo do preço das opções, e foi a partir dessa idéia que Merton contribuiu para a solução da equação de Black e Scholes. O problema de calcular a taxa de desconto passa a ser irrelevante com a adoção da taxa livre de risco.

A opção pela programação dinâmica nesta dissertação justifica-se por ser essa uma ferramenta de enorme utilidade em análise econômica e em problemas de pesquisa operacional. Em finanças, especificamente no estudo de opções reais, recomenda-se a utilização da técnica de programação dinâmica quando não é possível obter dados de mercado que permitam a formação de um portfólio livre de risco, o que implicaria o

problema da determinação da taxa de desconto adequada. Com isso, atende a uma ampla gama de problemas, e a solução aqui apresentada pode ser utilizada não apenas na aplicação em exploração de petróleo, mas para todas as outras que podemos imaginar, independentemente da existência de relação com o mercado financeiro.

Vários autores escreveram sobre a programação dinâmica aplicada a finanças. Entre eles, destacam-se DIXIT (1990), DREYFUS (1965), HARRIS (1987) e KAMIEN e SCHWARTZ (1991). STOCKEY, LUCAS e PRESCOTT (1989) utilizam a programação dinâmica no contexto do controle ótimo e parada do Movimento Browniano.

4.1 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A programação dinâmica é um procedimento matemático de otimização que surgiu no início da década de 50. Richard Bellman (1957) foi responsável não somente pela formulação do principal aspecto teórico do método, mas também pela sua sistematização.

Os problemas de otimização podem assim ser divididos:

- Problemas de programação matemática, tais como programação linear, programação não linear, programação linear inteira, programação não linear inteira etc.
- Problemas variacionais, que tratam da otimização no domínio das funções, isto é, trabalham com identificação de curvas ótimas.
- Problemas de controle ótimo.

Na segunda metade do século XX, surgiu a Teoria de Controle Ótimo, apresentando algumas vantagens sobre o cálculo variacional no tratamento de sistemas dinâmicos em que são observadas restrições diversas e descontinuidades nas derivadas. Assim, tanto o cálculo variacional como a teoria de controle ótimo tratam da otimização no domínio de funções. A abordagem de ambas as classes é variacional. É nesse contexto que se insere a programação dinâmica.

4.1.1 ASPECTOS GERAIS DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A programação dinâmica oferece algumas vantagens em relação a outras técnicas de programação matemática.

A primeira dessas vantagens é poder tratar funções descontínuas, não diferenciáveis, não convexas, determinísticas ou estocásticas. Além disso, não exige o isolamento prévio de uma região convexa para a aplicação do procedimento. A última e não menos importante dessa série de vantagens é o fato de a programação dinâmica oferecer um algoritmo mais barato que a simples enumeração de todas as possibilidades de um problema combinatório, o que, em alguns casos, se torna impraticável ou extremamente caro.

O método possui também desvantagens entre as quais as principais são a necessidade de separabilidade e monotonicidade. Uma função é dita separável se, e somente se, a função de retorno ótimo depender apenas do estágio em que é avaliada, não sendo afetada pelos demais estados do sistema. Funções monotônicas, por sua vez, são aquelas em que um crescimento na função de retorno ótimo acarreta um crescimento na função objetivo. Normalmente, essas desvantagens não representam problemas para a aplicação da programação dinâmica na maioria dos problemas práticos. No caso específico do problema tratado nesta dissertação, a separabilidade é garantida pela definição do fenômeno como um processo de Wiener. A demonstração da monotonicidade, no caso de um problema de parada ótima, como é o caso, pode ser encontrada em DIXIT e PINDYCK (1994).

A programação dinâmica oferece uma abordagem alternativa ao problema de controle ótimo que explora de forma mais direta a estrutura dinâmica do problema. A sua principal vantagem em relação à formulação tradicional do problema de controle ótimo é que, uma vez resolvido o problema, a lei de controle ótimo para todo o domínio viável do estado é obtida. Será necessário resolver uma equação diferencial parcial que é a função de retorno ótimo e é derivada da equação de Bellman. A partir desse ponto, obtém-se a função de retorno ótimo. A vantagem que advém disso é que se dispõe de uma gama completa de controles ótimos em malha aberta que poderão servir de pré-programação para um sistema dinâmico. Como a dinâmica do problema é uma abstração do sistema físico real, é possível que existam

diferenças entre os resultados do modelo matemático e os resultados reais. Essa é a vantagem de se trabalhar o controle em malha fechada, como faz a programação dinâmica.

4.1.2 A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA NO DOMÍNIO CONTÍNUO

A programação dinâmica consistente com o contexto variacional foi formulada no domínio contínuo. O problema clássico consiste em

$$\text{Min } J[x(\tau), u(\tau)] = \psi[x(T)] + \int_0^T I[x(\tau), u(\tau)] d\tau \quad (27)$$

sujeito a

$$\dot{x} = f[x(\tau), u(\tau)] \triangleq \text{derivada de } x \text{ em relação a } t \quad (28)$$

$$u(\tau) \in U$$

$$x(T) = x_T \quad (29)$$

$$\tau \in [0, T]$$

em que u representa a variável de controle, e U o espaço de controles viáveis, $x(T)$ é a variável de estado ao longo do tempo T .

O resultado da equação 27 é a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. A solução analítica dessa equação diferencial parcial é restrita a alguns casos particulares. No exemplo apresentado acima, as restrições no contorno foram particularizadas.

O problema de programação no domínio contínuo exige um tratamento matemático rigoroso. Muitas vezes, a discretização das equações e restrições de um problema de domínio contínuo se apresentam como uma boa solução para problemas de otimização.

4.1.3 A PROGRAMAÇÃO DINÂMICA EM DOMÍNIO DISCRETO

O formulação do problema clássico de programação no domínio discreto é encontrar $x(0), x(1) \dots x(N)$ tal que

$$f[x(0), x(1), \dots, x(N)] = \psi[x(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} l[x(k), u(k)] \quad (30)$$

sujeito a

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)] \quad (31)$$

$$u(k) \in U \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$x(N) = x_N$$

seja minimizada.

4.2 INTERPRETAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A função de desempenho é escrita como função do controle e do estado em um estágio isolado. Deseja se conhecer o conjunto de estados ótimos para que essa função de desempenho seja otimizada. Conhecer o conjunto de estados ótimos significa conhecer o conjunto de controles ótimos.

Através de restrições aos estados (finais, intermediários ou iniciais), deve-se estabelecer a lei de controle ótimo que também deve satisfazer as restrições impostas ao controle. A variável “N” representa o número de mudanças de estado.

4.3 PRINCÍPIO DA OTIMALIDADE

A firma deverá escolher as variáveis de controle u_t que irão gerar um lucro $\pi_t(x_t, u_t)$. No período seguinte ($t + 1$), o estado será x_{t+1} . A decisão ótima leva a $F_{t+1}(x_{t+1})$. Uma vez que o período t é uma variável de comportamento randômico, utiliza-se o valor esperado: $\varepsilon[F_{t+1}(x_{t+1})]$, que é chamado de valor de continuidade¹⁶. O valor atual da soma do lucro mais o valor de continuidade será

$$\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} \varepsilon_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \quad (32)$$

O problema de otimização consiste em encontrar o conjunto de controles u_t que maximize a expressão acima. O resultado nos leva à equação de Bellman, também conhecida como equação fundamental da otimalidade, ou equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, como é conhecida pelos matemáticos devido à grande similaridade dessa abordagem com aquela formulada por Hamilton-Jacobi na teoria de controle ótimo.

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} \varepsilon[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (33)$$

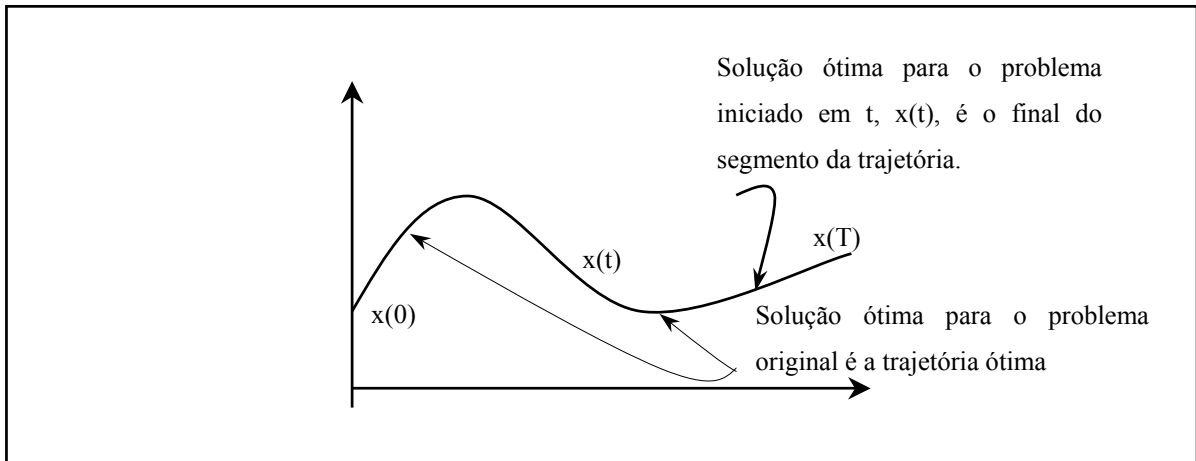
A equação de Bellman é derivada do princípio de otimalidade também formulado por Bellman, enunciado a seguir:

“De qualquer ponto de uma trajetória ótima, a trajetória remanescente é ótima para o problema correspondente que se inicia naquele ponto e termina no mesmo ponto do problema anterior.”

A interpretação do princípio de otimalidade é imediata. No quadro 4, temos a representação de uma trajetória ótima para ir de $x(0)$ até $x(T)$. Imagine o problema de determinar qual o

¹⁶ A informação no tempo t inclui as variáveis de estado e de controle a cada momento. Formalmente, DIXIT e PINDYCK (1994:100) afirmam: “ $\varepsilon_t[F_{t+1}(x_{t+1})] = \int F_{t+1}(x_{t+1}) d\Phi_t(x_{t+1} | x_t, u_t)$ ”

caminho ótimo para uma viagem de carro de Belo Horizonte, $x(0)$, ao Rio de Janeiro, $x(T)$, minimizando o tempo, por exemplo. De qualquer ponto nessa trajetória, isto é, de qualquer cidade no meio do caminho, $x(t)$, o melhor caminho a seguir daquele ponto é o que percorre o trajeto ótimo determinado inicialmente.



QUADRO 4 - Princípio da otimalidade

FONTE - LUENBERGER (1979, p.420).

A função retorno ótimo é caracterizada pelo estado $F_t(x_t)$. Essa função para cada estágio consiste em um vetor, em que a ordem do vetor é o número de estados viáveis para cada estágio. Assim, a dimensão F pode variar de estágio para estágio.

No estágio final, o valor de F é dado apenas pela contribuição do estado final à função objetivo.

Assim, o procedimento geral de solução do problema de programação dinâmica consiste na avaliação recursiva da função de retorno ótimo. Inicia-se com a avaliação de $F_T(x_T)$. Em seguida, são avaliadas as funções para os pontos intermediários anteriores. O vetor de estado ótimo é aquele que, após essas avaliações recursivas, proporcionar o $F_t(x_t)$ máximo.

É importante notar que o estado final não precisa ser conhecido. É necessário apenas que a avaliação da função retorno ótimo se inicie no último estágio, o que não implica a definição do estágio final.

A formulação do problema de programação dinâmica exige rigor na notação. A notação adotada, que a princípio pode parecer pesada, visa apenas facilitar a identificação clara dos estágios, representados por unidades de tempo e dos estados.

5 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA OPÇÃO DE ABANDONO

5.1 METODOLOGIA

O problema da opção de abandono pertence a uma classe particular de programação dinâmica, de extrema importância, devido à vasta possibilidade de aplicações no campo das ciências econômicas. Trata-se do problema de parada ótima, caracterizado por uma decisão binária. Isso quer dizer que a variável de controle poderá assumir o valor zero ou um.

O controle u_t será igual a zero, quando a decisão for de continuar produzindo para obtenção de um fluxo, $\pi(x_t, u_t)$. Se a melhor decisão for a de abandonar o campo, o controle passa a assumir valor unitário.

Os estágios são definidos pelo intervalo de tempo. Para a aplicação prática do caso apresentado, tomou-se intervalo anual.

Em muitos casos, poderá existir um valor residual, $\Omega(x_t, u_t)$, por exemplo, da venda dos ativos no encerramento das atividades de uma fábrica. No caso específico da opção de abandono de um poço de produção de petróleo de águas profundas, iremos considerar que $\Omega(x_t, u_t)$ representa os custos de recuperação ambiental da locação a ser abandonada. Do valor total a ser considerado será descontado um valor residual líquido de equipamentos justificado pela fato de que a árvore de natal molhada e de outros equipamentos, bem como os recursos humanos, podem ser aproveitados em outro campo, cuja taxa de extração seja maior a ponto de justificar o investimento. Assim, ao mesmo tempo em que pode ser ótimo abandonar um determinado poço, a mesma decisão poderá não ser válida para os demais, uma vez que a taxa de extração decai à medida que a vida útil da jazida vai chegando ao fim.

A equação de Bellman neste caso será:

$$F_t(x_t, u_t) = \underset{u_t}{\text{máx}} \left\{ \Omega(x_t, u_t), \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} \varepsilon[F(x') | x] \right\} \quad (34)$$

Para uma determinada faixa de valores de x , aqui representado pelo preço do petróleo, o máximo será dado pelo lado direito da equação 34. Da mesma forma, para alguns valores de x , o lado direito poderá se tornar negativo, tornando o abandono a opção que maximiza a equação. Isso é, pode acontecer de o preço do petróleo estar baixo a ponto de resultar em prejuízo a extração do mesmo em determinado campo.

Duas condições específicas irão prover a consistência adequada para que a decisão de abandono não seja alternada por uma decisão de continuidade. Na primeira, considerando $x > x^*$, para o caso em que é ótimo manter a operação, equivale dizer que o lado direito da equação 34 é maior que zero, portanto, a relação expressa em 35 deverá ser maior quanto maior o valor de x .

$$\pi(x) + (1 + \rho)^{-1} \varepsilon[F(x') | x] - \Omega(x) \quad (35)$$

A segunda condição é que nenhuma vantagem poderá ser revertida no futuro próximo. Para que isso seja verdadeiro, é necessário que exista correlação no processo estocástico de evolução de x , o que é tecnicamente conhecido como dominância estocástica de primeira ordem.

A definição da curva de parametrização da decisão de exercer ou não a opção de abandono está relacionada ao valor da opção em cada momento em que a decisão pode ser tomada.

Investimentos parcialmente reversíveis, como no caso de um campo de petróleo no qual é possível recuperar a árvore de natal molhada, têm a opção de abandono que pode ser avaliada como uma opção de venda americana. No caso específico do abandono de um campo de produção de petróleo, a variável preço do barril de petróleo, cotada no mercado, é a variável estocástica. A vantagem em se adotar o preço do petróleo como a variável estocástica reside no fato de que existe maior liquidez do barril de petróleo no mercado. Alguns modelos de exploração e produção de petróleo adotam o valor da reserva desenvolvida como alternativa, uma vez que o valor da reserva desenvolvida tem correlação positiva próxima à unidade com o preço do barril de petróleo. O comportamento da oscilação dos preços ao longo do tempo

pode ser descrito pelo Movimento Geométrico Browniano, que foi utilizado no modelo proposto neste trabalho.

Existe na literatura discussão sobre a utilização do Movimento Geométrico Browniano quando existem argumentos que levariam ao modelamento pela Reversão à Média. Testes econométricos demonstram que a utilização da Reversão à Média é mais adequada nos estudos em que se considera um horizonte de tempo maior. PINDYCK e RUBINFELD (1991), a partir de dados de preços de petróleo em 117 anos, rejeitaram a hipótese do Movimento Browniano. No entanto, ao tratar no horizonte de 30 anos, não conseguiram rejeitar a hipóteses do Movimento Browniano.

Outros autores, como BESSEMBINDER, COURGHENOUR, SEGUIN e SMOLLER (1995) e GIBSON e SCHWARTZ (1991) demonstraram que, mesmo considerando horizontes de tempo menores que aqueles adotados por PINDYCK e RUBINFELD (1991), poderia ser observado um processo de reversão à média. METCLAF e HASSET (1995) sugerem que dois efeitos atuam sobre o processo de reversão à média: no primeiro, haveria uma redução da variância dos preços o que teria como consequência a redução da incerteza e, portanto, do valor crítico de exercício; e, no segundo, uma tendência de queda nos preços quando esses estivessem altos o que diminuiria o interesse de a firma investir e, da mesma forma, uma tendência de aumento dos preços quando estivessem abaixo da média, o que tornaria inválida a consideração da opção de abandono. Simulações considerando esses dois efeitos contrários demonstraram que um seria anulado pelo outro. Isso tornou a utilização do Movimento Geométrico Browniano uma simplificação aceita e bastante viável por ser um processo matematicamente menos complexo que a Reversão à Média.

A seguir serão apresentados os parâmetros de entrada do modelo, para aplicação da metodologia aqui descrita.

5.2 PARÂMETROS DE ENTRADA

O modelo de programação dinâmica foi feito em planilha *Excel*, em linguagem *Visual Basic*. O quadro 6 ilustra a página inicial para a entrada de dados do problema. Todos os parâmetros

de entrada podem ser alterados permitindo simulações de diferentes situações e ambientes. Pequenas adaptações poderão ser feitas para a utilização em outra aplicação.

O algoritmo desenvolvido tem como parâmetros de entrada a produção diária de barris, a taxa anual de declínio da produção, o preço atual do barril em dólares, a taxa livre de risco, a taxa de conveniência do petróleo, os custos operacionais fixos e variáveis em dólares, o intervalo de discretização do tempo, a vida útil da jazida, a volatilidade anual, o custo de abandono em dólares, além dos parâmetros do modelo binomial: “u”, “d”, “a” e “p” que são calculados com base na volatilidade e na discretização do tempo.

Mostraremos o significado de cada um desses parâmetros e como eles interferem no modelo, quando serão apresentados os valores que foram adotados no estudo de caso, que geraram os resultados que serão tratados no capítulo seguinte.

O presente estudo de caso é baseado em dados reais de um projeto de alta lucratividade do campo de Albacora, na Bacia de Campos¹⁷.

5.2.1 PRODUÇÃO DIÁRIA DE BARRIS

A produção diária considerada é sempre a máxima tecnicamente factível. A variação do volume ano a ano é dada pela taxa anual de declínio da produção, a qual, de acordo com BALDWIN (1982), foge ao controle da empresa.

Essa premissa também é adotada na dissertação de DIAS (1996), que acrescenta que, em cinco anos de prática como gerente de produção em várias plataformas na Bacia de Campos e mais de cinco anos de experiência em análise econômica de projetos, nunca viu nenhuma exceção.

DIAS (1996) justifica que se a função lucro operacional fosse convexa com a vazão da produção, deveria existir uma vazão ótima, que poderia ser escolhida para a maximização do lucro.

¹⁷ Parte dos dados foram obtidos de DIAS (1996).

5.2.2 TAXA ANUAL DE DECLÍNIO DA PRODUÇÃO

O modelo adotado nesta dissertação e largamente utilizado na indústria petrolífera e na literatura é o modelo simplificado de declínio exponencial da produção ao longo dos anos, causado pela depleção.

A curva de produção de um campo de petróleo tipicamente apresenta um declínio exponencial após o pico de produção. Considera-se que a quantidade $Q(t)$ é função do tempo de exploração e da taxa de declínio exponencial.

$$Q(t) = Q(0) * e^{-\lambda * t} \quad (36)$$

ADELMAN e JACOBY (1979) especificam que o valor de λ reflete características da reserva que impõem restrições na taxa de extração.

O valor adotado no caso estudado para λ é o valor típico sugerido por DIAS (1996) igual a 10% ao ano. A capacidade inicial de produção do campo é de 95.000 barris por dia.

O gráfico 1 mostra a produção esperada de óleo a cada ano de acordo com a equação 36, considerando λ igual a 10% ao ano.

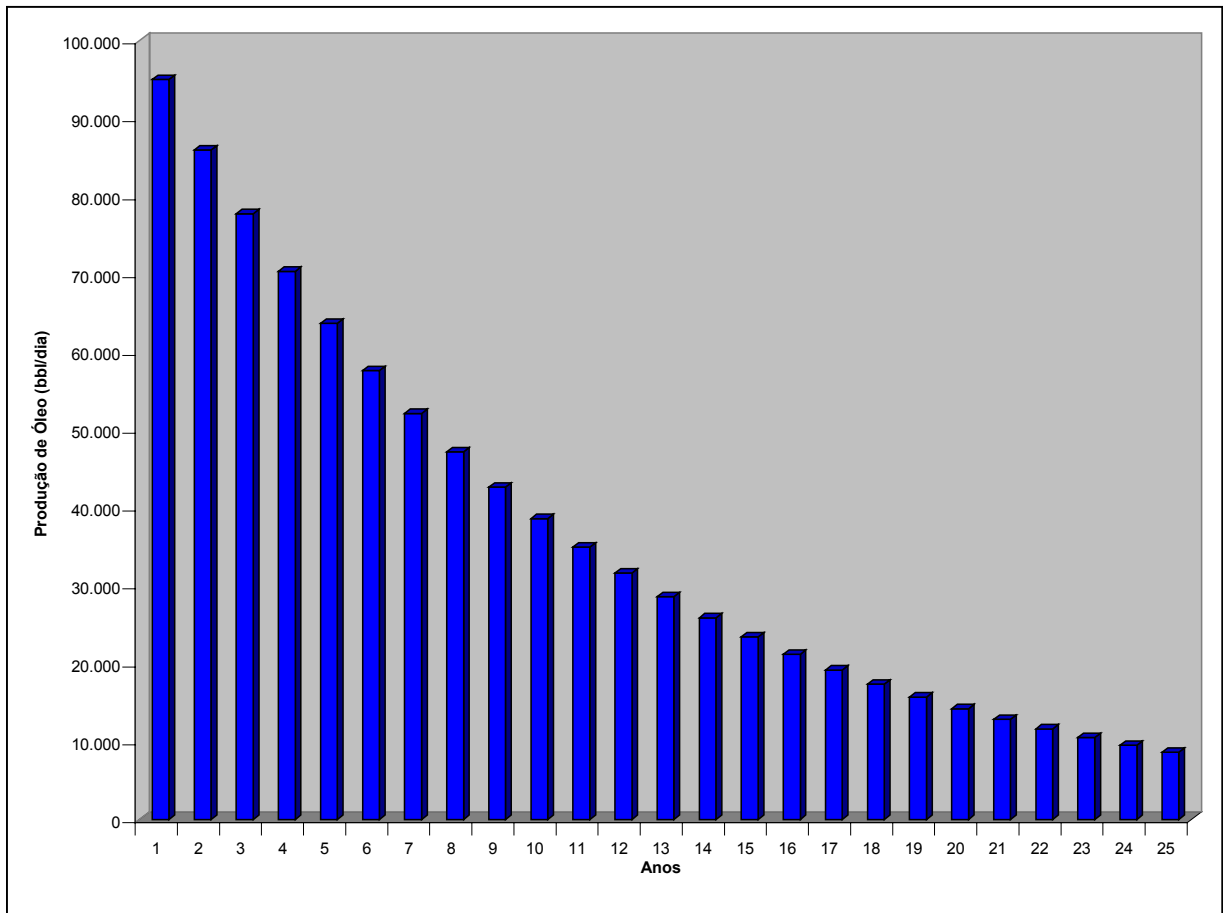


GRÁFICO 1 - Produção esperada de óleo

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.

5.2.3 PREÇO ATUAL DO BARRIL DE PETRÓLEO

O preço atual do barril de petróleo no mercado internacional corresponde à cotação do mercado no dia 15 de maio de 2001. O valor nesse dia foi de US\$28,98 (vinte e oito dólares e noventa e oito centavos).

5.2.4 TAXA LIVRE DE RISCO E TAXA DE CONVENIÊNCIA DO PETRÓLEO

A primeira consideração acerca da taxa livre de risco é a adoção da taxa real, isto é, obtida após subtraída a expectativa de inflação para o período. Isso acontece para garantir a consistência uma vez que os efeitos inflacionários não estão sendo contemplados no fluxo de caixa. Além disso, deverá ser utilizada uma taxa após os impostos, o que é uma premissa bastante comum na literatura.

Uma premissa simplificadora adotada é que a alíquota de impostos é zero. Isso pode ser facilmente adaptado, mas exigiria um estudo detalhado da tributação específica, o que foge ao escopo da dissertação.

A taxa escolhida para o estudo de caso que ilustra a dissertação foi de 6% ao ano. Diversas publicações de autores brasileiros consideram a taxa livre de risco entre 6 e 8%, coerentes com as altas taxas de juros praticadas no Brasil nos últimos anos. DIAS (1996) adota 6% ao ano. D'ALMEIDA (2000) et al. trabalham com taxa livre de risco igual a 7% ao ano.

Um último argumento seria que, de acordo com diversos autores, o valor das opções é pouco sensível a variações na taxa livre de risco. TRIGEORGIS (1999) trata a análise de sensibilidade na avaliação de flexibilidade operacional e conclui que um aumento de 2% na taxa livre de risco (que é elevada de 2 para 4%) acarretaria um aumento do valor da flexibilidade de 11%, o que pode ser considerado como uma pequena variação face às variações sofridas por igual aumento na volatilidade.

Após a exposição dos resultados para o caso-base, será feito um estudo da sensibilidade do modelo à taxa livre de risco, em que são apresentadas as curvas para taxas de 3, 6 e 10% ao ano. (GRAF. 3)

A taxa de conveniência do petróleo, foi estimada em 6% ao ano e representa um custo de oportunidade. Em análise econômica de projetos de petróleo, essa taxa varia entre 2 e 10%. O efeito da taxa de conveniência é equivalente ao efeito causado pela taxa livre de risco.

5.2.5 CUSTOS OPERACIONAIS

Neste trabalho, optou-se por não considerar a incerteza nos custos. DIAS (1996) apresenta uma análise detalhada do artigo de MCDONALD e SIEGEL (1986) na qual conclui que o efeito da incerteza dos custos na incerteza global pode ser zero ou pode reduzir a incerteza total. Portanto, os custos não são considerados como estocásticos no modelo apresentado. Essa simplificação pode ser observada em trabalhos que tratam de opções em projetos de produção e exploração de petróleo, cujas variações são representadas via análises de sensibilidade da volatilidade, o que será feito na segunda parte do capítulo 6.

Uma importante premissa feita neste trabalho com relação aos custos é que há uma correlação positiva entre os custos e o preço do petróleo. BEIKE e HOLTZ (1995) trabalharam com modelos de regressão, para chegar à conclusão de que a principal motivação de oscilações dos custos é a variação no preço do petróleo. Embora a análise seja feita para reservas terrestres, DIAS (1996) acrescenta que essa relação deve ser ainda mais favorável para o caso de reservas *offshore*, que são mais intensivas em bens de apital.

Os custos operacionais são divididos em custos fixos e variáveis. Os custos operacionais variáveis são os *royalties*, aqui estimados em 10% da receita bruta, custos de transporte e outros, que foram estimados em US\$0,8/bbl.

Os custos operacionais fixos dependem do porte do sistema instalado, da lâmina d'água etc. O valor estimado foi de US\$30 milhões.

5.2.6 DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO

Os resultados apresentados na dissertação foram obtidos através de uma discretização de tempo em intervalos anuais. A justificativa baseia-se no fato de as decisões gerenciais, como é o caso de abandonar uma plataforma em operação, serem parte do planejamento estratégico da empresa e, portanto, não analisadas a cada dia.

A fim de verificar a convergência do algoritmo, foram realizados testes em que foram adotados intervalos semestrais, trimestrais e mensais. Isso pode ser feito alterando-se o campo de discretização. Quando o valor for unitário, estaremos considerando intervalos anuais. Para um valor 0,5, o intervalo estudado será semestral.

5.2.7 VIDA ÚTIL DA JAZIDA

A vida útil da jazida é parte do que chamamos de incerteza técnica, isto é, a incerteza que não está correlacionada com os movimentos macroeconômicos. É estimada a partir de técnicas

tais como poços de delimitação, de extensão e pioneiros adjacentes¹⁸, sísmica¹⁹ 2D,3D, e de detalhe, testes de longa duração e sistemas pilotos de produção entre outros.

O valor adotado para o estudo de caso foi de 25 anos. Jazidas de petróleo têm vida útil entre 20 e 30 anos, dependendo das características geológicas.

5.2.8 VOLATILIDADE ANUAL - σ

O valor da volatilidade utilizado no caso-base foi de 15% ao ano. A fim de fazer uma análise de sensibilidade da volatilidade, adotou-se $\sigma = 25\%$. DIXIT e PINDYCK(1994) apontam que estimativas baseadas em dados passados de 30 anos levariam a uma volatilidade em torno de 15%, embora as previsões da indústria sejam superiores a esse valor. Seria razoável pensar em valores entre 15 e 25%.

PADDOCK, SIEGEL e SMITH (1988), utilizando registros mensais no período de 1974 a 1980 e, depois anualizando a relação, chegaram a um valor de $\sigma = 0.142$. A fim de capturar um possível aumento da volatilidade adotaram também $\sigma = 0.250$.

D'ALMEIDA, et al. (2000) consideraram $\sigma = 25\%$.

5.2.9 PARÂMETROS DO MODELO BINOMIAL: U, D, A E P.

Esses parâmetros são utilizados para a construção da árvore binomial. A partir do preço atual do barril de petróleo (S_0), será traçada a árvore binomial dos preços de petróleo. No primeiro período, o preço do petróleo poderá ser $S_0 \cdot u$ com uma probabilidade “p” ou poderá assumir

¹⁸ Poços de delimitação, de extensão e pioneiros adjacentes são investimentos da ordem de US\$10 a 20 milhões/poço que fornecem informações para redução da incerteza técnica pela perfuração de poços vizinhos à área estudada.

¹⁹ Sísmica é um processo no qual, através de uma série de explosões, são captados os reflexos das ondas emitidas pelas camadas subterrâneas. Para maiores detalhes dos métodos de resolução da incerteza técnica. Ver DIAS(1996. p.36-9)

um valor $S_0.d$, associado à probabilidade $(1-p)$. Os valores de “u” e “d” foram calculados pelas equações 25 e 26, respectivamente. A probabilidade “p” é obtida pela equação 23.

O parâmetro “a” representa a relação $e^{r*\Delta t}$ que será utilizado no cálculo de “p”.

Os detalhes do modelo binomial podem ser encontrados no item 2.2.1.2.

5.2.10 CUSTO DE ABANDONO.

A legislação brasileira estabelece que a estrutura da plataforma deve ser cortada pelo menos 50 metros abaixo da linha d’água, para permitir a navegação, o que demanda serviços que de acordo com DIAS (1996), podem chegar a mais de US\$ 10 milhões.

Além desse custo de recuperação ambiental, há uma série de outros custos que serão incorridos no abandono do campo, como de desmobilização, remoção de equipamentos que serão aproveitados em outros campos, dispensa de pessoal etc...O valor adotado no caso-base desta dissertação considera um custo de abandono para o campo *offshore* de US\$ 50 milhões.

5.3 ALGORITMO

Admitindo o preço do barril de petróleo como sendo a variável estocástica, que segue um Movimento Geométrico Browniano, o primeiro passo será traçar uma árvore binomial pelo número de períodos da vida útil e de acordo com a discretização do tempo Δt e com a volatilidade estimada. O quadro 7 ilustra a árvore binomial dos preços do petróleo para o caso em estudo.

O passo seguinte é calcular a quantidade produzida a cada período de acordo com a taxa de declínio exponencial da produção. O gráfico 1 representa os valores esperados em barris/dia para o caso estudado.

Em seguida, é calculado o lucro $\pi(x_t, u_t)$ para cada período t , em que x_t é a variável de estado preço do barril de petróleo no instante t , e u_t é a variável de controle no instante t . A variável de controle, conforme foi explicado anteriormente no capítulo 5, irá assumir o valor 1,

quando a decisão ótima for a de manter a produção, e valor zero quando for mais vantajoso exercer a opção de abandono.

O lucro, $\pi(x_t, u_t)$, é calculado como sendo a receita bruta (RB), menos os custos operacionais (CO), no período. Assim,

$$\pi(x_t, u_t) = RB - COF - COV * Q \quad (37)$$

em que

RB = Preço do petróleo na data x Produção esperada

COF = Custos Operacionais Fixos

COV = Custos Operacionais Variáveis

Q = Produção esperada em barris

Esse valor $\pi(x_t, u_t)$ representa o fluxo imediato e o segundo termo do lado direito da equação

(34), dado por $\left\{ \frac{1}{1 + \rho} \varepsilon[F(x') | x] \right\}$ é o valor de continuidade, que reflete o valor presente

da expectativa dos fluxos futuros, caso a produção seja mantida. Em outras palavras, representa o valor presente do lucro esperado até o final da vida útil da jazida. Esse valor é obtido através da programação dinâmica, que irá calculá-lo recursivamente, isto é, do estágio final para o estágio inicial.

Para cada intervalo de tempo t , o valor de continuação é obtido com a aplicação da fórmula (37), substituindo o preço do petróleo em $t + 1$ para o cálculo da receita bruta e ponderando os valores encontrados pelas probabilidades correspondentes da árvore binomial. O lucro obtido no período $t + 1$ é descontado por um período para ser somado ao fluxo imediato, resultando no valor que será comparado a $\Omega(x_t, u_t)$, que representa o valor do custo de abandono.

Assim, no nosso caso em que a vida útil da jazida é de 25 anos, no ano 24, iremos comparar se o valor de manter a operação até o ano 25 produz um valor presente líquido maior do que aquele calculado na hipótese do abandono da jazida no ano 24. O valor de continuação para $t = 24$ será igual ao fluxo de caixa produzido pelas perspectivas de preço em $t = 25$, trazidas para $t = 24$, à uma taxa igual a taxa livre de risco mais a taxa de conveniência do petróleo.

Quando $t = 23$, o valor de continuidade será o valor dos fluxos produzidos em $t = 24$, adicionados do valor de continuidade de $t = 24$ trazidos a valor presente. Dessa forma, é possível afirmar que, caso o valor do preço do petróleo atinja um valor abaixo da fronteira de exercício, será ótimo exercer a opção de abandono, ainda que o preço possa subir novamente até o final da vida útil da jazida. Em outras palavras, a decisão ótima garante que nenhuma vantagem poderá ser revertida no futuro próximo. Dessa forma, a decisão de manter a produção ou abandoná-la estaria de acordo com o objetivo de maximização da riqueza dos acionistas.

Para cada instante representado por um nó na árvore binomial, dependendo do preço do petróleo, da produção esperada e da expectativa dos preços futuros, a variável de controle irá assumir um valor igual a zero, quando o lado esquerdo da equação 34 for maior do que o lado direito. Em caso contrário, a variável de controle $u_t = 1$.

O passo seguinte é determinar em cada estágio, isto é, a cada momento, quando os controles passam de zero a um. Nesse intervalo é que se encontra o ponto crítico, que determina a fronteira de exercício ótimo. O ponto crítico é definido como sendo o ponto em que o lado direito da equação de Bellman torna-se igual ao lado esquerdo, fazendo indiferente o exercício da opção. Igualando os dois lados da equação, tem-se

$$\Omega(x_t, u_t) = \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} \varepsilon[F(x') | x] \right\} \quad (38)$$

A equação (38) é não linear. Deseja-se calcular o preço(x_t^*) no tempo t , que torna a expressão verdadeira, conhecendo-se as seguintes condições:

i) Para o preço(x_t^+), $u_t = 1$, $\Omega(x_t, u_t) < \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \varepsilon[F(x') | x] \right\}$ e

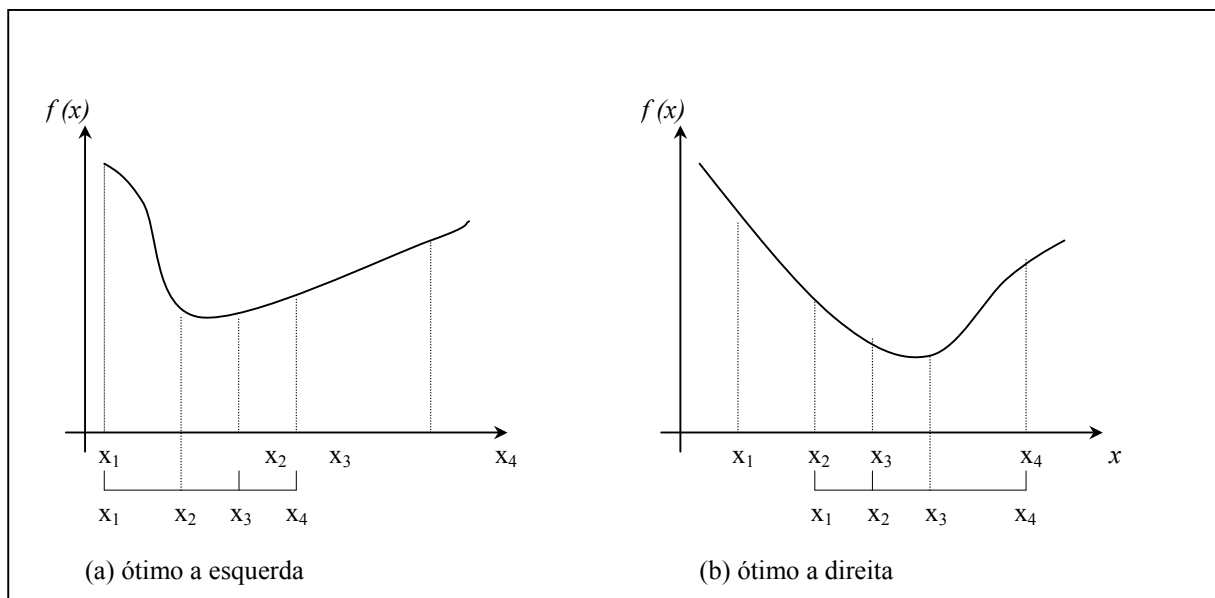
ii) Para o preço(x_t^-), $u_t = 0$, $\Omega(x_t, u_t) > \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \varepsilon[F(x') | x] \right\}$

Para encontrar esse ponto, adotou-se a técnica de programação matemática não linear da Busca Unidirecional da Seção Áurea.

5.3.1 BUSCA UNIDIRECIONAL PELA SEÇÃO ÁUREA

A determinação de um ponto de mínimo para funções não lineares é feita através de um método de busca. Entre os mais inteligentes métodos de busca está a Seção Áurea, que trata uma função-objetivo unimodal por um processo de estreitamento do intervalo que garantidamente contém o ótimo.

O intervalo que contém o ponto é cercado à esquerda e à direita pelos pontos x_1 e x_4 . Pontos intermediários são escolhidos espaçados de acordo com a seguinte relação expressa nas equações 39 e 40.



QUADRO 5 – Redução do intervalo através da busca pela Seção Áurea

FONTE: RARDIN (1998, p. 728).

$$x_2 = x_4 - \alpha.(x_4 - x_1) \quad (39)$$

$$x_3 = x_1 + \alpha.(x_4 - x_1) \quad (40)$$

em que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é conhecida como *golden ratio* ou taxa áurea.

A cada iteração, o valor da função-objetivo é calculado para os pontos intermediários. Em seguida, é feito um teste lógico para determinar qual subintervalo contém o ponto ótimo. Dessa forma, se a função-objetivo no ponto x_2 apresentar resultado melhor do que no ponto x_3 , conclui-se que o ótimo pertence ao intervalo $[x_1, x_3]$, situação representada graficamente no quadro 5, na letra (a). O passo seguinte é eliminar o ponto x_4 e repetir o mesmo procedimento no intervalo reduzido.

Quando a função-objetivo no ponto x_3 apresentar melhor resultado do que no ponto x_2 , x_1 é eliminada e o intervalo passa a ser $[x_2, x_4]$. (Quadro 5, (b))

O método da busca unidirecional está entre os métodos de busca mais utilizados e mais atuais, embora a convergência seja lenta se comparada a outros métodos. Para maiores detalhes do método, ver LUENBERGER (1984. p. 199).

Para o problema da determinação do preço na equação 38, uma vez conhecidos os preços das condições de contorno, deseja-se minimizar o intervalo entre eles, $(x_t^+ - x_t^-)$, de acordo com uma precisão preestabelecida até chegar ao preço x_t no qual a decisão de abandono produz o mesmo fluxo que a decisão de manter a operação. O algoritmo desenvolvido trabalha com precisão de 0,2.

5.3.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DO ALGORITMO

Três importantes propriedades devem ser consideradas para a validação do algoritmo. São as seguintes: a consistência, a ordem e a convergência.

O método adotado é dito consistente com a equação diferencial parcial se a diferença entre os resultados obtidos se torna irrelevante à medida que aumenta a discretização da malha. Os erros de truncamento tendem a zero com a diminuição do intervalo de tempo. Isso é uma condição necessária para a convergência do algoritmo

A ordem refere-se à taxa com que o erro global tende a zero com a diminuição do intervalo. É definida como a ordem da potência do Δx e do Δt no erro de truncamento.

Utilizando-se expansão em séries de Taylor, demonstra-se que o esquema binomial é de primeira ordem.²⁰

Um método numérico é convergente se a solução encontrada se aproxima da solução exata da equação diferencial parcial à medida que o espaçamento da malha tende a zero. Quando não existe a solução exata disponível, a convergência é obtida quando uma acurácia desejada é satisfeita. No caso do algoritmo proposto, o parâmetro de acurácia considerado foi 0,2. Isso quer dizer que as iterações de busca do ponto em que a decisão de parar tem o mesmo valor da decisão de manter as operações cessam quando a diferença entre esses dois valores for menor do que esse parâmetro de acurácia de 0,2.

Os testes realizados apresentaram resultados coerentes, demonstrando a convergência e consistência do algoritmo (GRAF. 5). O mesmo problema foi resolvido para intervalos anuais, semestrais, quadrimestrais e trimestrais, produzindo resultados com um desvio padrão menor que 0,9. O gráfico 5 mostra a curva obtida para as simulações, considerando-se a malha do esquema binomial com intervalos de tempo cada vez menores.

²⁰ Para detalhes da demonstração, ver KWOK (1998).

5.3.3 INTERPRETAÇÃO DA FRONTEIRA DE EXERCÍCIO ÓTIMO

O procedimento para determinação do ponto crítico será realizado para cada instante do tempo. No caso estudado, estamos considerando uma discretização anual do tempo o que irá resultar em uma planilha com o preço crítico do barril para cada ano. Ao traçar o gráfico, obtém-se a curva da fronteira do exercício ótimo, mostrada no gráfico 2.

A análise do gráfico a cada momento conduz à decisão que otimiza o fluxo de caixa do acionista. Para melhor compreensão dos resultados, imagine-se a decisão no ano 15, quando ainda faltam 10 anos de exploração para se esgotar a jazida. O que é mais vantajoso: manter a operação ou abandonar o campo antes de esgotada sua capacidade produtiva? Analisando o gráfico 2, obtém-se um preço mínimo de US\$7,59 para o barril de petróleo no ano 15. Se o preço no mercado internacional for superior a esse valor, a melhor decisão é manter a produção. Caso o preço seja menor que US\$7,59, vale mais exercer a opção de abandono, ainda que exista potencial de exploração para mais 10 anos.

A área acima da curva da fronteira representa a região em que é mais lucrativo manter a unidade produzindo, ao passo que a área abaixo da curva é chamada de região de abandono.

6 RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

As páginas seguintes trazem os resultados obtidos para o caso de um projeto do campo de Albacora, na Bacia de Campos.

O gráfico 2 apresenta a fronteira do exercício ótimo para a opção de abandono quando a volatilidade é de 15% ao ano. O resultado observado mostra que com o passar dos anos o preço mínimo exigido para a manutenção da produção é cada vez maior. A região de abandono, representada pela área abaixo da curva, é maior quanto mais próximo do fim da vida útil.

Observa-se, por exemplo, que no último ano de produção (ano 24) só é viável manter a produção se o preço do barril for superior a US\$29,05. No ano 23, a opção de abandono só deverá ser exercida caso o preço atinja valores abaixo de US\$25,04. A tabela 1 mostra os valores críticos para cada ano, que resultam no gráfico da fronteira de exercício ótimo.

Isso está de acordo com a Teoria das Opções Reais. Nos primeiros anos, poderá ser viável manter a produção a preços mais baixos porque existe o valor da opção de abandono, e a incerteza quanto ao comportamento futuro dos preços é maior. Somado a isso, o fato de a capacidade de produção apresentar um decaimento exponencial torna o preço mínimo requerido maior para que as receitas operacionais superem os custos operacionais. Isso é, uma vez produzindo menor quantidade para os mesmos custos fixos, faz-se necessário maior preço de venda para manter o equilíbrio das contas.

Foi feito um estudo de sensibilidade para a taxa livre de risco e para a volatilidade. Reduzindo-se a taxa livre de risco de 6 para 3%, a curva permaneceu a mesma (no gráfico 3 as linhas são coincidentes). Aumentando-se a taxa para 10%, observa-se uma variação em torno de 25% nos preços, trazendo a curva para baixo, comprimindo a região de abandono. O efeito pode ser observado no gráfico 3. Os valores que originaram o gráfico 3 são apresentados na tabela 2.

A volatilidade, como acontece em todos os estudos de sensibilidade em opções reais, é um parâmetro muito mais sensível. Uma variação de 10% na volatilidade (que passou de 15 para 25%) muda bruscamente o perfil do gráfico. O aumento de 10% na volatilidade acarretou aumentos que chegam a mais de 300% no preço crítico (Observe esse aumento na tabela 3, que nos anos 23 e 24) . A região de abandono cresce com o aumento da volatilidade. Veja o gráfico 4 e a tabela 2 com os valores do preço crítico para volatilidade de 15 e 25% ao ano.

A opção de abandonar tem valor justamente porque existe incerteza, que é quantificada no modelo pela volatilidade. Os preços poderão subir no futuro e tornar a produção de petróleo, nesse campo, uma atividade altamente rentável ainda que em algum momento possa parecer melhor abandoná-lo. A análise da opção de abandono pela fronteira do exercício ótimo é valiosa justamente por contemplar todos esses aspectos.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "modprodin9" with a menu bar (Arquivo, Editar, Exibir, Inserir, Formatar, Ferramentas, Dados, Janela, Ajuda) and a toolbar. The spreadsheet contains a data entry form with the following fields:

Row	Column	Label	Value	Unit
3	D	Produção diária de Barris	95.000	
3	F	Discretização do tempo	1,00000	ano
5	D	Taxa anual de declínio da produção	0,1	
5	F	Vida útil da jazida	25	anos
7	D	Preço atual do barril(US\$)	28,98	
7	F	Volatilidade anual	0,15	
9	D	Taxa livre de risco	0,06	
9	F	u	1,1618	
11	D	Taxa de conveniência do petróleo	0,06	
11	F	d	0,8607	
13	F	a	1,0618	
15	D	Fixos	30.000.000	
15	F	p	0,6679	
17	D	Variáveis	0,9	
17	F	Custo de Abandono (US\$)	50.000.000,00	
18	D	Royalties	0,1	
19	D	Transportes e outros	0,8	

At the bottom of the spreadsheet, there is a button labeled "Definir Fronteira de Exercício ótimo". The taskbar at the bottom shows the Windows taskbar with the Start button, taskbar buttons for "Meu Computador", "CD Player", "Microsoft Exc...", and "Microsoft Word - ...", and a system tray showing the time as 16:28.

QUADRO 6. Página inicial para entrada de dados

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.

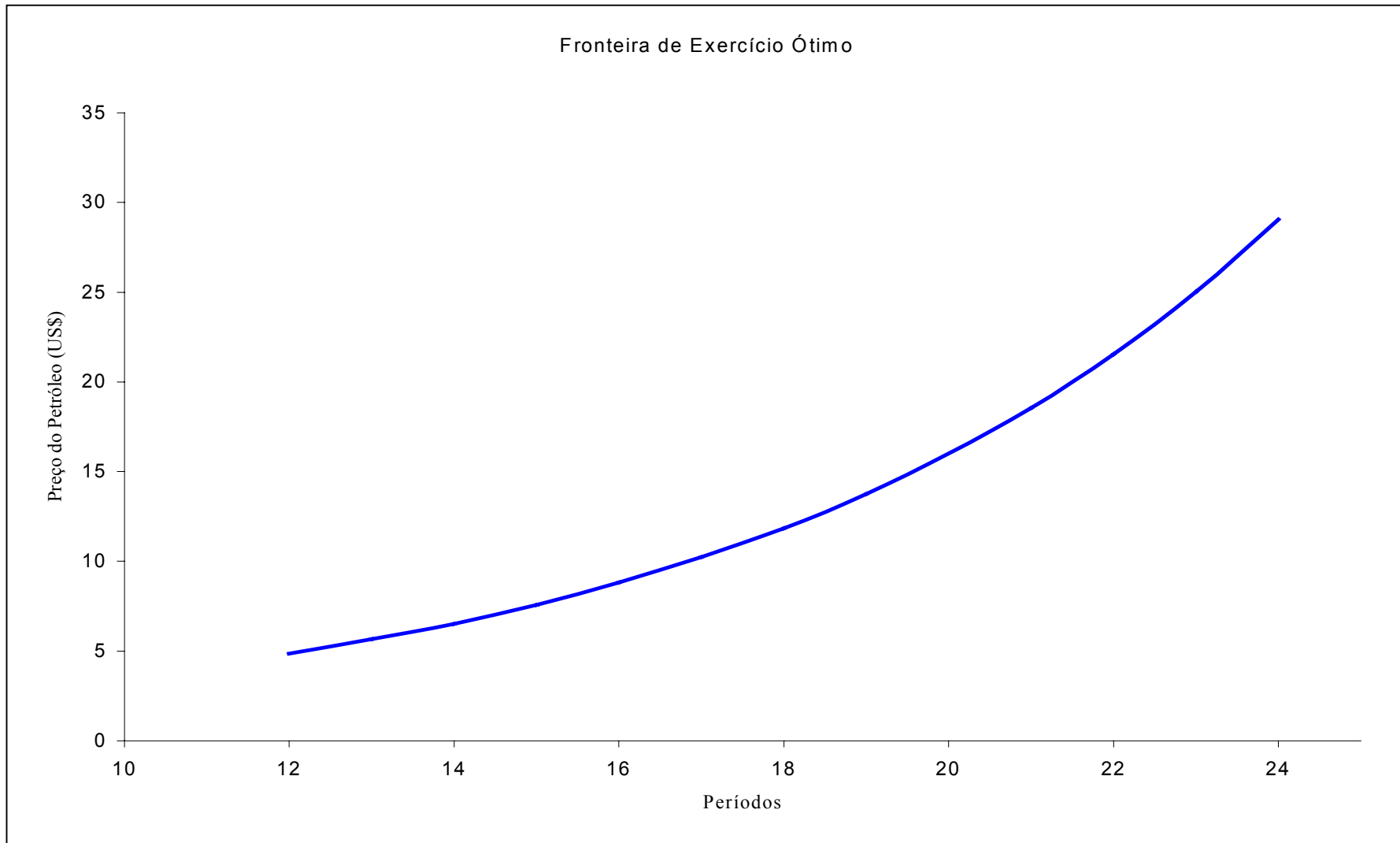


GRÁFICO 2 – Fronteira do Exercício Ótimo

FONTE –Elaborado pela autora da dissertação.

NOTA – A área acima da curva representa a região de continuação e a área abaixo, a região de abandono.

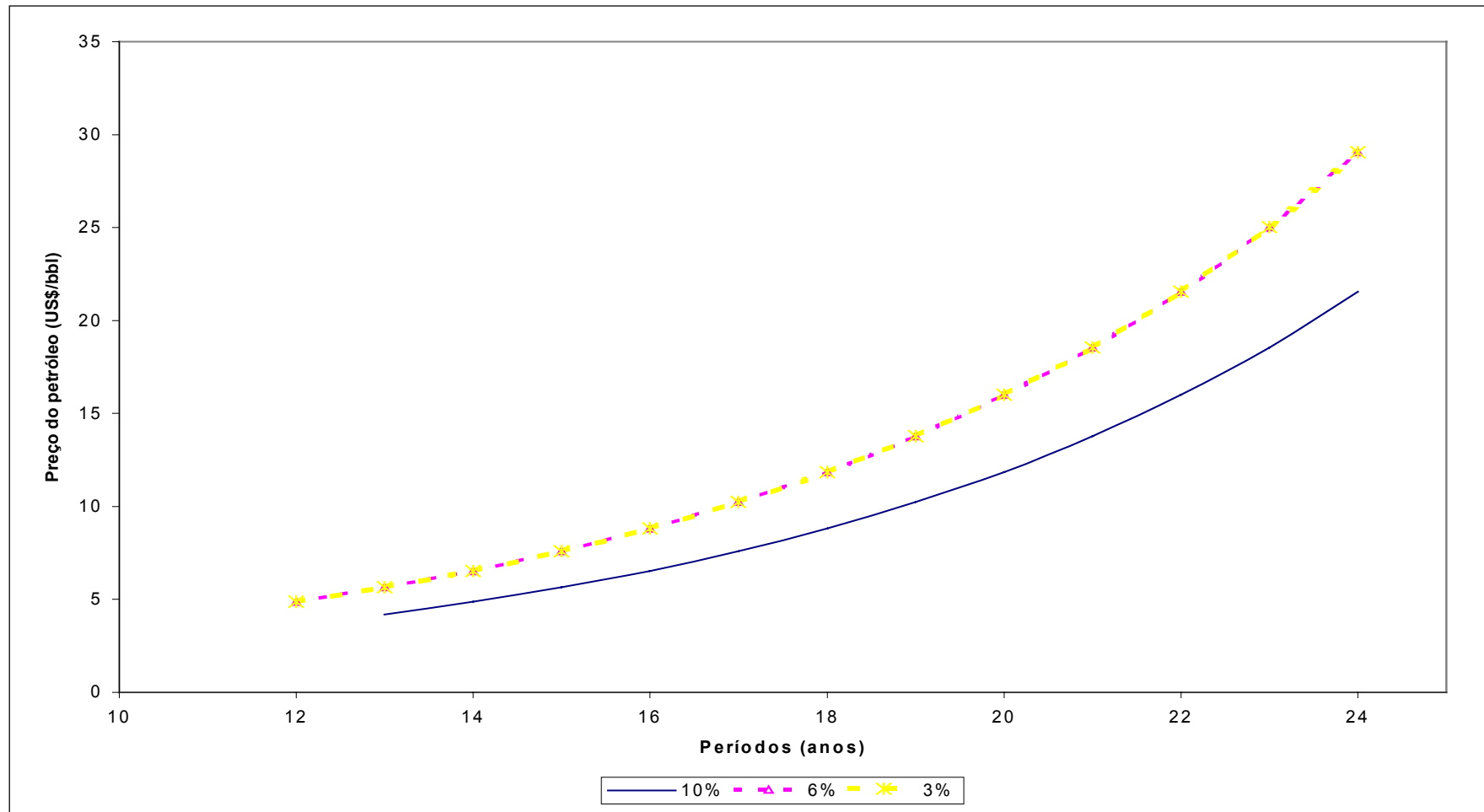


GRÁFICO 3 – Análise de sensibilidade da taxa livre de risco

FONTE –Elaborado pela autora da dissertação.

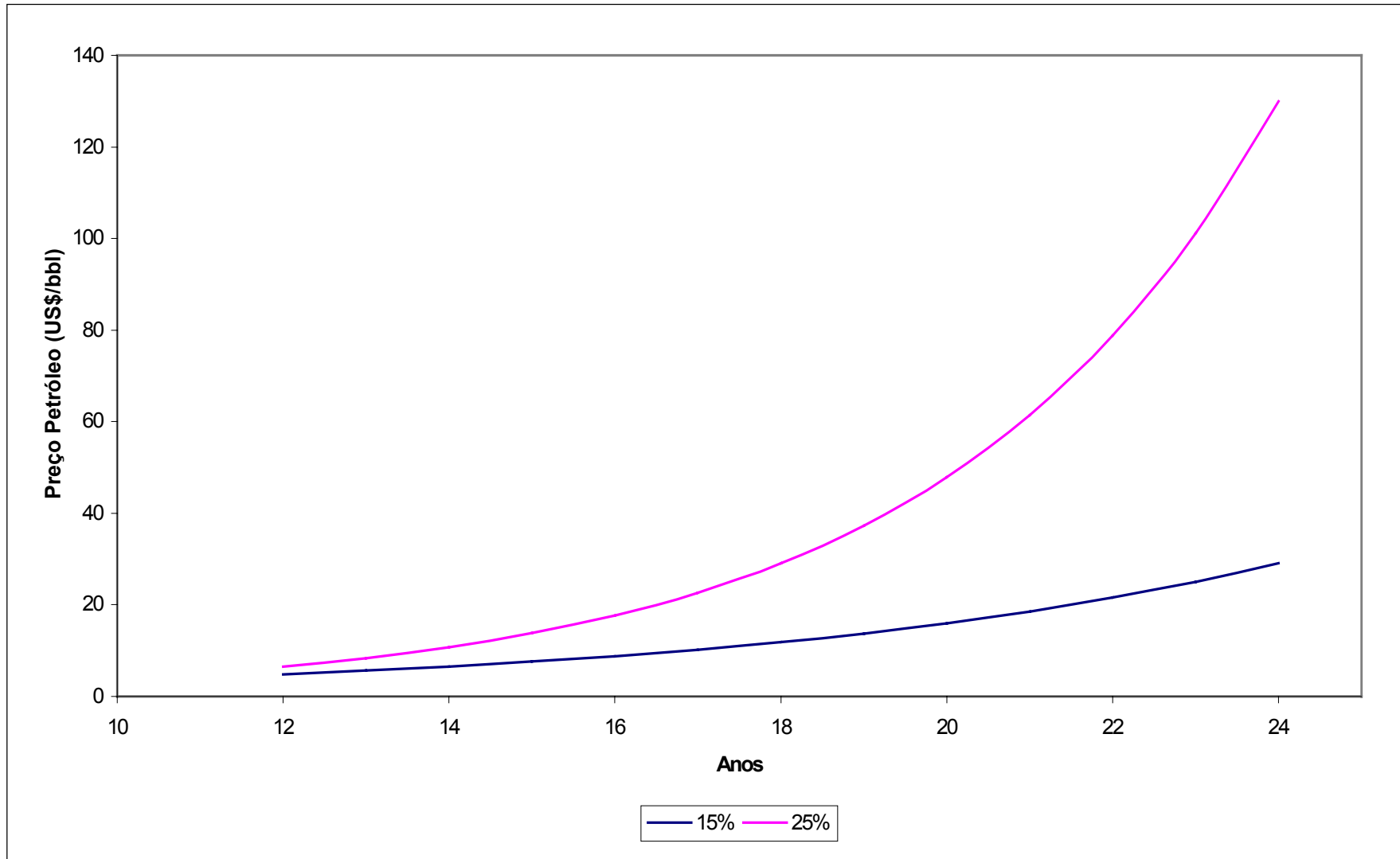


GRÁFICO 4 – Análise de sensibilidade da volatilidade

FONTE –Elaborado pela autora da dissertação.

TABELA 1

Valores da fronteira de exercício ótimo, para volatilidade de 15% ao ano e taxa livre de risco de 6% ao ano

Anos	Valores Críticos
12	4,87
13	5,65
14	6,53
15	7,59
16	8,81
17	10,24
18	11,85
19	13,77
20	16,00
21	18,55
22	21,55
23	25,04
24	29,05

FONTE – Elaborada pela autora da dissertação.

TABELA 2

Sensibilidade da taxa livre de risco

Anos	Taxa Livre de Risco		
	10%	6%	3%
12		4,87	4,87
13	4,19	5,65	5,65
14	4,87	6,53	6,53
15	5,65	7,59	7,59
16	6,53	8,81	8,81
17	7,59	10,24	10,24
18	8,81	11,85	11,85
19	10,24	13,77	13,77
20	11,85	16,00	16,00
21	13,77	18,55	18,55
22	16,00	21,55	21,55
23	18,55	25,04	25,04
24	21,55	29,05	29,05

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.

TABELA 3

Valores críticos de exercício para volatilidade do preço de petróleo igual a 15 e 25%

Anos	Volatilidade	
	15%	25%
9		3,14
10		3,99
11		5,13
12	4,87	6,54
13	5,65	8,40
14	6,53	10,73
15	7,59	13,78
16	8,81	17,65
17	10,24	22,67
18	11,85	29,06
19	13,77	37,31
20	16,00	47,86
21	18,55	61,45
22	21,55	78,86
23	25,04	101,21
24	29,05	129,96

FONTE – Elaborada pela autora da dissertação.

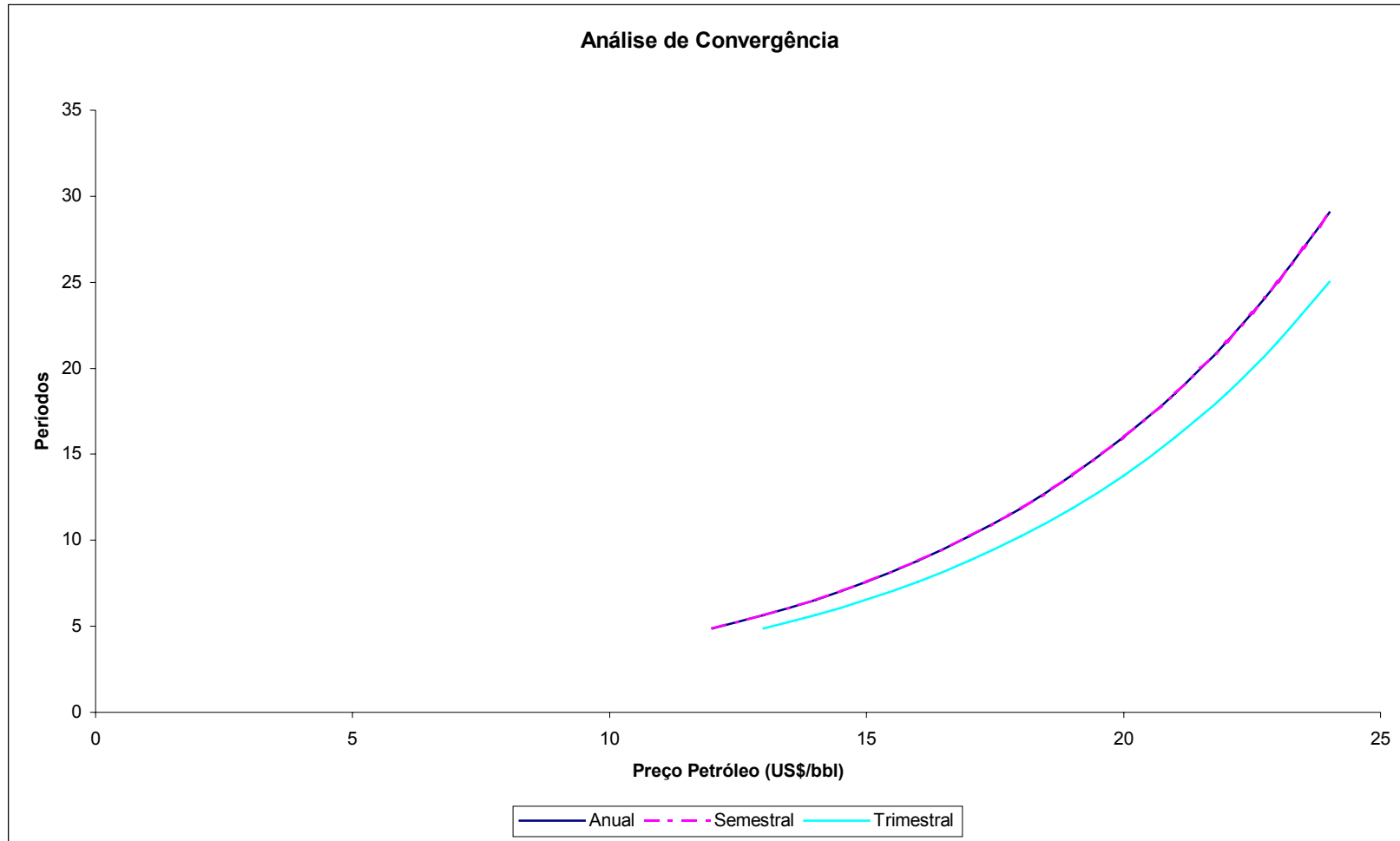


GRÁFICO 5 – Análise de convergência do algoritmo

FONTE – Elaborado pela autora da dissertação.

7 CONCLUSÕES

A crescente necessidade de tomar decisões acertadas que maximizem a riqueza dos acionistas, em um ambiente repleto de fontes de incerteza, tem levado a uma incessante busca por novos modelos para tomada de decisões.

A caracterização de algumas variáveis econômicas como estocásticas, e não mais determinísticas, como era adotado no passado, nos conduz à moderna teoria e prática financeiras, que se apoiam em modelos matemáticos mais complexos para adaptar-se ao ambiente incerto. A Teoria das Opções Reais supera as limitações dos métodos de Fluxo de Caixa Descontado e imprime um novo ritmo aos estudos econômicos e financeiros.

Somada à necessidade de modelar a incerteza, as empresas estão expostas a uma competição cada vez mais voraz, resultado de um mundo globalizado, tornando procedimentos de otimização obrigatórios para garantir a sua sobrevivência e o seu posicionamento no mercado.

É imperativo tomar as decisões certas no momento exato. Principalmente quando tratamos de investimentos de grande porte e que sejam irreversíveis, ou mesmo, parcialmente irreversíveis.

O trabalho apresentado combina essas duas demandas da gestão moderna: otimização sob condições de incerteza. O método de otimização escolhido foi a programação dinâmica por se aplicar a uma ampla gama de problemas econômicos e de pesquisa operacional. A técnica da programação dinâmica é uma solução viável mesmo nos casos em que não existam dados de mercado. Além disso, pode ser aplicada tanto em problemas cuja natureza seja determinística, como em problemas que envolvam variáveis estocásticas.

Estudos na área de recursos naturais, como são os de exploração e produção de petróleo, têm características de irreversibilidade, demandam valores altos de investimentos, além de apresentarem incerteza de ordem técnica e econômica, que justificam a motivação de grande número de pesquisadores, que têm produzido vários artigos sobre o assunto. Além disso, a

existência de um mercado de fácil obtenção de dados torna esses estudos acessíveis mesmo para os profissionais de outras áreas.

O objeto de estudo desta dissertação é a determinação da fronteira de exercício ótimo de uma opção de abandono de um campo de petróleo *offshore*. O que equivale dizer que, a cada momento do tempo, de acordo com o preço do petróleo, poderá ser ótimo manter a produção, caso o valor do preço esteja situado acima da curva representada no gráfico 2, ou a decisão ótima, que maximiza o valor para a empresa, poderá ser a de abandonar mesmo que ainda exista óleo para ser extraído da jazida. No último caso, aconselha-se o abandono quando o preço do petróleo atingir níveis inferiores à fronteira.

A análise feita pela otimização dinâmica que leva aos resultados apresentados vai além de uma simples análise de receitas *versus* custos operacionais. Considera o valor de continuidade, que é o valor que se obtém por continuar a produção. Às vezes, um período de baixa nos preços do petróleo pode acarretar fluxos negativos por um período de tempo, e essa situação pode ser revertida com uma alta futura nos preços. Uma análise que desprezasse os valores de continuidade poderia levar à decisão de abandonar um campo que futuramente traria resultados positivos e, portanto, não otimizaria o uso dos equipamentos e dos recursos empregados.

Os resultados obtidos estão de acordo com a Teoria das Opções Reais. Quanto mais próximo estiver do final da vida útil da jazida, maior deverá ser o preço do barril para justificar a produção, uma vez que há menos quantidade a ser explorada. Nos primeiros anos de extração, admite-se um preço mais baixo pela existência da incerteza. Isso quer dizer que, nos primeiros anos, há grande expectativa de que os preços subam e a jazida seja lucrativa.

A utilização da programação dinâmica combinada com técnicas de programação não linear (busca direcional pela Seção Áurea) mostrou-se eficiente para a otimização de investimentos sob condições de incerteza.

Uma breve análise de sensibilidade para volatilidade indica que um aumento na volatilidade de 10%, que pode ser entendido como um aumento da incerteza, altera drasticamente o perfil da fronteira de exercício ótimo, aumentando a região de abandono.

Algumas premissas foram adotadas no modelo com o objetivo de simplificar o trabalho. A principal delas foi a opção pela consideração de os preços do petróleo seguirem um Movimento Geométrico Browniano. Embora se tenha encontrado precedentes na literatura que endossam o uso do MGB, seria interessante a realização de um outro trabalho adotando-se o Movimento de Reversão à Média para comparação dos resultados.

DIXIT e PINDYCK (1994) utilizam um modelo de histerese que combina a determinação dos valores críticos que justificam o investimento (entrada) com a determinação dos valores de abandono (saída). A comparação dos resultados do modelo de histerese com os aqui obtidos pela programação dinâmica certamente seria outra sugestão para um trabalho futuro.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ADELMAN, M e JACOBY, H. Alternative methods of oil supply forecasting. *Advances in Economics Energy Resources*, v.2 Robert Pindyck, ed.Greenwich, CT:JAI Press, 1979.
2. AGGARWAL, R. *Capital budgeting under uncertainty*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
3. AMRAM, M. E N. KULATILAKA. *Real Options: managing strategic investment in a uncertain world*. Boston: Harvard Business School Press, 1999.
4. _____ Strategy and shareholder value creation: the real options frontier. *Journal of Applied Corporate Finance*. v. 13, n.2, Summer 2000.
5. ARROW, K.J e CHANG, S. Optimal pricing use, and exploration of uncertain natural resources stocks. *Journal of Environmental Economics and Management*, v. 9, p.1-10, 1982.
6. BAGCHI, A. *Optimal control of stochastic systems*. Great Britain: Prentice Hall International , 1993.
7. BALDWIN, C. Optimal sequential investment when capital is not readily reversible. *The Journal of Finance*. v. 37, n. 3, June, 1982.
8. BEIKE,D e HOLTZ, M. *Cost functions for oil well drilling, lease equipment and well operation in Texas*. SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, Proceedings, 1995. p. 307-21 (SPE paper n.º 30065).
9. BELLMAN, R. E *Dynamic programming*. New Jersey: Princeton University Press, 1957.

10. BERNSTEIN, P. *Capital ideas: the improbable origins of modern Wall Street*. New York: The Free Press, 1992.
11. _____ *Desafio aos deuses*. A fascinante história do risco. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
12. BERRADA, TONY. Valuing real options when time to maturity is uncertain. *Third Annual International Conference in Real Options: theory meets practice*, 1999.
13. BERTSEKAS, D. *Dynamic programming*. Deterministic and stochastic models. New Jersey: Prentice Hall, 1987.
14. BERTUCCI, L Avaliação de Modelos de Volatilidade Condicionada na Precificação de Opções de Compra no Mercado da BOVESPA. *ENANPAD*, Foz do Iguaçu, 1999.
15. BESSEMBINDER, H, COUGHENOUR, J, SEGUIN, P e SMOLLER, M Mean reversion in equilibrium asset prices: evidence from futures term structure. *Journal of Finance* v 50, n.1, p.361-75, March 1995.
16. BJERKSUND, P. *The cost of a promise to develop an oil field within a fixed future date*. Stochastic Models and Options Values, D.Lund and B. Oksendal, New York: North-Holland, 1991.
17. BJERKSUND, P (1990). Managing investment opportunities under price uncertainty: from last chance to wait and see strategies. *Financial Management*, n.19, p.65-83, Autumn 1990.
18. BJERKSUND, P e EKERN, S. *Contingent claims evaluation of mean reverting cash flows in shipping*. Real Options in capital investments: models strategies and applications. Westport: Trigeorgis, Praeger, 1995.

19. BJORSTAD, H HEFTING,T e STENSLAND, G. A model for exploration decisions. *Energy Economics*, p 189-200, July, 1989.
20. BLACK, F e SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, n.81, p. 637-59, 1973.
21. BRANDÃO, L.Qual o momento certo de investir na empresa. *Conjuntura Econômica*, p.40-1, Fev. 2001.
22. BREALEY, R. e S. MYERS. *Principles of corporate finance*. 5th ed. New York: Irwin McGraw-Hill, 1996.
23. BRENNAN, M.J. e SCHWARTZ, E.S. A new approach to evaluating natural resource investment. *Midland Corporate Finance Journal*, v.3, n.1, p37-47, 1985.
24. _____ The valuarion of american put options. *The Journal of Finance*, v. 32, n.2, p 449-62, May 1977.
25. BRONSON, RICHARD *Pequisa operacional*. São Paulo: MacGraw-Hill, 1985.
26. CAMPBELL, J e VICEIRA, L. Consumption and porfolio decisions when expected returns are time varying. *Quarterly Journal of Economics*, May, 1999.
27. COPELAND, T; T. KOLLER E J. MURRIN. *Valuation: measuring and managing the value of the companies*. New Yoork, NY: John Wiley, 1990.
28. COURNEY, H; J. KIRKLAND, E P. VIGUERIE. Strategy under uncertainty. *Harvard Business Review*, p. 67-79, Nov./Dec. 1997.

29. COX, S , ROSS, S e RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, Oct. 1979.
30. D'ALMEIDA, A L, LOPEZ, I F e DIAS, M A G. Determinação da frota de sondas de petróleo utilizando a teoria das opções reais. *Working Paper*, Petrobrás, Encontro de Desenvolvimento da Produção, 20 p, Oct. 2000.
31. DAMODARAN, A. *Damodaran on valuation*. Security analysis for investment and corporate finance. New York, NY: John Wiley, 1994.
32. _____ *Estimating risk free rates*. New York: Damodaran On-line.
Disponível em:
http://www.stern.nyu.edu/~damodar/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html. Acesso em 20/10/2000.
33. DAS, SATYAJIT. *Risk manangement and financial derivatives*. A guide to the mathematics. New York, NY: McGraw Hill, 1998.
34. DIAS, M. *Investimento sob incerteza em exploração e produção de petróleo*. Rio de Janeiro: Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1996. 464 p. (Dissertação, Mestrado em Engenharia da Produção).
35. DIAS, M. *Investimento sob incerteza em exploração e produção de petróleo*. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html> . Acesso em 10/01/2001.
36. DIXIT, A. Investment and Hysteresis. *Journal of Economic Perspectives*. V. 6, n. 1, p. 107-32, 1992.
37. _____ *Optimization in economic theory*. New York, NY, Oxford University Press, 1990.

38. DIXIT, A e R. PINDYCK. *Investment under uncertainty* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
39. DREYFUS, S. *Dynamic programming and the calculus of variations* New York: Academic Press. 1965.
40. FAMA, E. Efficient Capital Markets II *Journal of Finance*, v5, p. 1575-617, Dec. 1991.
41. FAMA e FRENCH. The Cross section of expected stock returns. *Journal of Finance*, v. 47, p.427-65, June 1992.
42. FUDENBERG, D e TIROLE, J. *Game theory*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1991.
43. GIBSON, R e SCHWARTZ, E. *Valuation of long term oil-linked assets*. Stochastic models and options values, D. Lund and B. Oksendal (org.). New York: North-Holland, 1991.
44. HARRIS, M. *Dynamic economic analysis*. New York: Oxford University Press. 1987.
45. HOFFMAN, J. *Numerical methods for engineers and scientists*. McGraw-Hill, 1992.
46. HULL, J. *Options, futures and other derivatives*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
47. HULL, J. e A. WHITE. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 25, n. 1, p.87-100; Mar. 1990.
48. JONSBRATEN, TW. Oil field optimization under price uncertainty. *Journal of Operational Research Society*. v. 49, p 811-18, 1998.

49. KAMIEN, M e SCHWARTZ, N. *Dynamic optimization*. New York: North Holland. 1991.
50. KEMMA, A. Case studies on real options. *Financial Management*, v. 22, n. 3, p. 259-70, 1993.
51. KESTER, W.C. Today's options for tomorrow's growth. *Harvard Business Review*, p.153-60, Mar./Apr. 1994.
52. KULATILAKA, N. The value of flexibility: the case of a dual fuel industrial steam boiler. *Financial Management*, v. 22, n 3, p. 271-79, 1993.
53. KWOK, YUE-KUEN. *Mathematical models of financial derivatives*. Singapore: Springer, 1998.
54. LELAND. Beyond mean variance: performance measurement in a nonsymmetrical world. *Financial Analysts Journal*. p. 27-36, Jan./Feb. 1999.
55. LINTNER. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economic and Statistics*, p.13-37, Feb. 1965.
56. LUCAS, R e PRESCOTT, E. Investment under uncertainty. *Econometrica* ,v. 39, n.5, p. 659-81, Sept. 1971.
57. LUENBERGER, D. G. *Introduction to dynamic systems. Theory, models and applications*. New York: John Wiley, 1979.
58. _____ *Linear and non linear programming*. Addison-Wesley Publishing, 1984.
59. _____ *Investment science*. New York: Oxford University Press , 1998.

60. LUERHMAN , T. What's it worth? A general manager's guide to valuation. *Harvard Business Review*, p.132-42, May/June 1997.
61. _____ Investment opportunities as real options: Getting started with the numbers . *Harvard Business Review*, p.51-64, July/Aug. 1998^a
62. _____ Strategy as a portfolio of real options. *Harvard Business Review*, p.89-100, Sept./Oct. 1998b.
63. MAJD, S e PINDYCK, R. Time to build, option value and investment decisions. *Journal of Financial Economics*. v. 18, 1987.
64. MC DONALD, R e SIEGEL, D. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review*. v. 26, n. 2, p. 331-49, June 1985.
65. _____ The value of waiting to invest. *The Quarterly Journal of Economics*. Nov. 1986.
66. MENDES, L. *Avaliação de opções: uma comparação do desempenho de métodos distintos de se estimar a volatilidade*. Belo Horizonte: Faculdade de Ciências Econômicas da UFMG, 2000. 80p. (Dissertação, Mestrado em Administração).
67. MERTON R. *Continuous time finance* Malden, MA: Blackwell, 1990.
68. _____ Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*.v. 3, p. 373-413, 1973.

69. METCALF, G e HASSET, K. Investment under alternative return assumptions comparing random walks and mean reversion. *Journal of Economic Dynamics and Control*. v.19, p. 1471-88. Nov. 1995.
70. MORCK,R., SCHWARTZ, E e STANGELAND. The valuation of Forestry resources under stochastic prices and inventories. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. n. 24, p. 473-87, 1989.
71. MYERS, S. Interactions of corporate finance and investment decisions: implications for capital budgeting. *Journal of Finance*, v. 29, n.1, p. 1-25, 1974.
72. NEFCTI, S. N. *An introduction to the mathematics of financial derivatives*. San Diego, California: Academic Press, 1996.
73. NEUFVILLE, RICHARD DE. *Applied systems analysis*. Engineering planning and technology management. Singapore: McGraw-Hill, 1990.
74. NEUFVILEE, CLARK e FIELD. *Dynamic strategic planning*. Boston: Massachusetts Institute of Technology. 2000.
75. OLIVEIRA, R. *A avaliação de bancos para fusões e aquisições: modelos tradicionais X teoria das opções reais*. Belo Horizonte: Faculdade de Ciências Econômicas da UFMG, 2001. 83 p. (Dissertação, Mestrado em Administração).
76. PADDOCK, J; SIEGEL, D e SMITH, J. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*. p. 479-508, Aug. 1988.
77. PINDYCK, R e RUBINFELD, D. *Econometric models and economic forecasts*. New York: McGraw-Hill. 1991.

78. RAO, Singiresu. *Engineering optimization*, New York, John Willey, 1996.
79. RAPPAPORT, A. *Creating shareholder value*. A guide for managers and investors. New York, NY: The Free Press, 1986.
80. RARDIN, R L. *Optimization in operations research*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
81. ROBERTS, K e WEITZMAN, M. Funding criteria for research, development and exploration projects. *Econometrica*, v. 49. n 5, Sept. 1981.
82. ROLL, Richard. A critique of the asset pricing theory's tests. *Journal of Financial Economics*, n. 4, p.129-76, Mar. 1977.
83. ROSIERE, D.W. *Optimum timing for property divestment*. Dallas: SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation symposium, Proceedings, 1993. p 199-208. (SPE paper n.º 25840).
84. ROSS, S. The current status of the capital asset pricing modelo(CAPM). *Journal of Finance* v. 33, p. 885-901, June 1978.
85. ROSS, S; R. WESTERFIELD E J. JAFFE. *Administração financeira*. São Paulo: Atlas, 1995.
86. SEARS, S e TRENNEPOHL, G. *Investment management*. The Dryden Press. 1993.
87. SHARPE, W. Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium. *Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-42, Sept. 1964.
88. SHAMBLIN, JAMES E. e STEVENS JR, G.T. *Pesquisa operacional: uma abordagem básica*. São Paulo: Atlas, 1989.

89. SIEGEL, D; J SMITH E J. PADDOCK. Valuing off shore oil properties with option pricing models. *Midland Corporate Finance Journal*, v. 5, n. 1, p. 22-30, 1987.
90. STENSLAND, G e TJOSTHEIM. Optimal Investment using empirical dynamic programming with application to natural resources. *Journal of Business*, v. 62, n. 1, p.99-120, 1989.
91. _____ *Optimal Decisions with reduction of uncertainty over time: an application to oil production*. Stochastic Models and Options Values, D.Lund and B. Oksendal (org). New York: North-Holland, 1991.
92. STOECKER, W.F *Design of thermal systems*. Singapore: McGraw-Hill, 1989.
93. STOKEY, N.L, LUCAS,R e PRESCOTT. *Recursive models in economic dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989.
94. TOURINHO, O. *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach*. Berkeley: University of California, 1979 (Tese, Doutorado em Administração)
95. TRIGEORGIS, L. *Real options: managerial flexibility and strategy in resource allocation*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1999.
96. _____ A real options application in natural resource investments. *Advances in Futures and Options Research*, v. 4, p. 153-64, 1990.
97. VENEZIA, I e BRENNER, M. The optimal duration of growth investments and search. *The Journal of Business*, v. 52, n . 1, Jan. 1979.
98. WILMOTT,P; HOWISON,S e DEWYNNE, J. *The mathematics of financial derivatives*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1995.

99. WINSTON, WAYNE L. Pricing of options and real options for arbitrary distributions. *Third Annual International Conference in Real Options: theory meets practice, 1999.*
100. _____ *Financial models using simulation and optimization.* New York: Palisades, 1998.