



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Welbert Henrique Alves

Controle de Sistemas Nebulosos Takagi–Sugeno
Baseado em Observador de Entradas
Desconhecidas

Belo Horizonte
2026

Welbert Henrique Alves

Controle de Sistemas Nebulosos Takagi–Sugeno Baseado em Observador de Entradas Desconhecidas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzato Santos

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO WELBERT HENRIQUE ALVES E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUCIANO ANTONIO FREZZATO SANTOS.

Belo Horizonte
2026

A474c

Alves, Welbert Henrique.

Controle de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno baseado em observador de entradas desconhecidas [recurso eletrônico] / Welbert Henrique Alves. – 2026.

1 recurso online (89 f.: il., color.): pdf.

Orientador: Luciano Antonio Frezzato Santos.

Coorientador: Víctor Costa da Silva Campos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Lógica difusa – Teses.
3. Sistemas não-lineares – Teses. I. Santos, Luciano Antonio Frezzato.
II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
COLEGIADO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA ELETRICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Controle de Sistemas Nebulosos Takagi-Sugeno Baseado em Observador de Entradas Desconhecidas"

Welbert Henrique Alves

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 16 de março de 2026.

Por:

Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzato Santos

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle (PTC) - Escola Politécnica - USP - Orientador

Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

DELT (UFMG) (Coorientador)

Prof. Dr. Eduardo Stockler Tognetti

ENE (UnB)

Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli

DELT (UFMG)



Documento assinado eletronicamente por **Luciano Antonio Frezzato Santos, Usuário Externo**, em 16/03/2026, às 13:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Stockler Tognetti, Usuário Externo**, em 17/03/2026, às 22:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Amaral Mozelli, Professor do Magistério Superior**, em 19/03/2026, às 10:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Victor Costa da Silva Campos, Professor do Magistério Superior**, em 19/03/2026, às 10:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5027179** e o código CRC **1AF7EF22**.

Dedico esta dissertação a minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder a oportunidade, a resiliência e a força necessárias para manter o foco no meu objetivo, o que foi essencial para alcançar esta importante etapa da minha vida.

Agradeço à minha família pelo apoio ao longo do mestrado, especialmente à minha mãe, Claudilene, e ao meu noivo, Douglas, que estiveram ao meu lado e acreditaram em mim desde o início desta trajetória.

Minha profunda gratidão ao Luciano e ao Víctor pela excelente orientação. Agradeço pelo apoio desde o início desta jornada incrível, pela paciência e pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos e conselhos. A dedicação de vocês ao ensino e à pesquisa me inspira.

Agradeço ao Guilherme por todo o apoio desde o início do mestrado e pelos conselhos ao longo desta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro, essencial para o desenvolvimento da pesquisa nacional.

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) pela estrutura e pelo elevado nível de ensino e pesquisa, bem como a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) por todo o conhecimento compartilhado.

*“É preciso ter sonho sempre
Quem traz na pele essa marca possui
A estranha mania de ter fé na vida”
(Milton Nascimento)*

Resumo

Compreender a dinâmica de sistemas é essencial em projetos de engenharia. Em contextos reais, sistemas de controle apresentam dinâmicas não lineares, o que resulta no aumento da complexidade nos projetos, tanto para a análise de estabilidade quanto para o desenvolvimento de técnicas de monitoramento e de controle. Outra característica importante a ser considerada em aplicações de controle é o fato de que parte do vetor de estados do sistema pode ser inacessível à medição, devido a limitações técnicas ou econômicas, o que compromete o projeto do controlador por realimentação de estados. Essas características de aplicações reais motivam o uso de técnicas eficazes para descrever adequadamente a dinâmica não linear dos sistemas, bem como de estimar os estados não medidos. Os sistemas nebulosos Takagi–Sugeno (TS) destacam-se como uma técnica poderosa em projetos de sistemas não lineares, pois permitem representar a dinâmica não linear da planta por meio de uma combinação convexa de modelos lineares locais. Por sua vez, observadores de estados são dispositivos baseados na dinâmica do sistema e representam uma alternativa adequada para solucionar o problema de estimação de estados não medidos, o que viabiliza o projeto de controladores por realimentação de estados baseado em observador. Neste contexto, esta dissertação apresenta o projeto de controle baseado em observador de entradas desconhecidas para sistemas discretos TS. Para tanto, o sistema não linear é representado por um sistema nebuloso TS e um observador de entradas desconhecidas é utilizado para estimar os estados não medidos do sistema. Desse modo, o controle por realimentação de estados é projetado por meio de um controlador de compensação paralela distribuída, que utiliza os estados estimados pelo observador para obter a lei de controle para o sistema em malha fechada. Em sistemas não lineares, tais projetos tornam-se desafiantes, uma vez que as não linearidades podem estar associadas aos estados não medidos do sistema. Para lidar com essa complexidade, o Teorema do Valor Médio é utilizado para tratar o descasamento das funções de pertinência e lidar com essa incerteza nos projetos. Por fim, a metodologia proposta é aplicada em modelos não lineares de sistemas reais, especificamente, um sistema de rotor duplo de múltiplas entradas e múltiplas saídas e em um sistema de quatro tanques acoplados. Os resultados obtidos demonstram a eficácia da técnica para estimação de estados não medidos do sistema, bem como no controle baseado em observador aplicado à estabilidade e ao seguimento de referência.

Palavras-chaves: Sistemas nebulosos; Takagi–Sugeno; Observador de entradas desconhecidas; Controle por realimentação de estados.

Abstract

Understanding the dynamics of systems is essential in engineering design. In real contexts, control systems present nonlinear dynamics, which results in an increase in complexity in design, both for stability analysis and for the development of monitoring and control techniques. Another important characteristic to be considered in control applications is the fact that part of the state vector of the system may be inaccessible to measurement, due to technical or economic limitations, which compromises the design of the state feedback controller. These characteristics of real applications motivate the use of effective techniques to properly describe the nonlinear dynamics of systems, as well as to estimate the unmeasured states. Takagi–Sugeno fuzzy systems stand out as a powerful technique in the design of nonlinear systems, because they allow the representation of the nonlinear dynamics of the plant through a convex combination of local linear models. In turn, state observers are devices based on the system dynamics and represent an appropriate alternative to solve the problem of estimating unmeasured states, which enables the design of observer based state feedback controllers. In this context, this dissertation presents the design of observer based control with unknown inputs for discrete Takagi–Sugeno systems. For this purpose, the nonlinear system is represented by a Takagi–Sugeno fuzzy system, and an unknown input observer is used to estimate the unmeasured states of the system. In this way, the state feedback control is designed through a parallel distributed compensation controller, which uses the states estimated by the observer to obtain the control law for the closed loop system. In nonlinear systems, such designs become challenging, since the nonlinearities may be associated with the unmeasured states of the system. To deal with this complexity, the Mean Value Theorem is used to treat the mismatch of the membership functions and to deal with this uncertainty in the design. Finally, the proposed methodology is applied to nonlinear models of real systems, specifically, a twin rotor MIMO system and a four coupled tank system. The obtained results demonstrate the effectiveness of the technique for the estimation of unmeasured states of the system, as well as for observer based control applied to stability and reference tracking.

Keywords: Fuzzy systems; Takagi–Sugeno; Unknown input observer; State–feedback control.

Lista de Figuras

Figura 1 – Twin Rotor MIMO System - TRMS	49
Figura 2 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	56
Figura 3 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	57
Figura 4 – Erro de estimação obtidos pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada.	57
Figura 5 – Sinal de controle para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada.	58
Figura 6 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	60
Figura 7 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS em malha fechada e seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	61
Figura 8 – Erro de estimação obtidos pelo UIO para o TRMS com seguimento de referência.	62
Figura 9 – Comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para o seguimento de referência dos ângulos de arfagem (ψ) e guinada (ϕ). . .	62
Figura 10 – Visão ampliada da comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para os ângulos de arfagem (ψ) e guinada (ϕ) no intervalo de 105 a 110 s.	63
Figura 11 – Sinal de controle para o seguimento de referência no TRMS.	63
Figura 12 – Sistema para Controle de Nível com Quatro Tanques Acoplados	64

Figura 13 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	68
Figura 14 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC no intervalo de 0 a 100 s. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	69
Figura 15 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC no intervalo de 205 a 210 s. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	70
Figura 16 – Erros de estimação obtidos pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada.	70
Figura 17 – Sinal de controle $u(k)$ para o sistema não linear com quatro tanques acoplados.	71
Figura 18 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com controlador para seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	73
Figura 19 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com controlador para seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.	73
Figura 20 – Erros de estimação obtidos pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com seguimento de referência.	74
Figura 21 – Comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para o seguimento de referência nos tanque 1 e 2.	75
Figura 22 – Visão ampliada da comparação entre saídas controladas e referências aplicadas nos tanques 1 e 2 no intervalo de 120 a 220 s.	75
Figura 23 – Sinal de controle $u(k)$ para o sistema não linear com quatro tanques acoplados com integrador para seguimento de referência.	76

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Intervalo de operação do TRMS	51
Tabela 2 – Parâmetros técnicos do TRMS	51
Tabela 3 – Erro RMS para o TRMS	58
Tabela 4 – Erro RMS para o TRMS – Seguimento de Referência	61
Tabela 5 – Parâmetros técnicos do sistema com quatro tanques acoplados	65
Tabela 6 – Erro RMS para o sistema com quatro tanques acoplados	71
Tabela 7 – Erro RMS para o sistema com quatro tanques acoplados – Seguimento de Referência	74

Lista de Siglas

LMI	Desigualdade Matricial Linear, (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
TS	Takagi–Sugeno
UIO	Observador de Entradas Desconhecidas, (<i>Unknown Input Observer</i>)
PDC	Compensação Paralela Distribuída, (<i>Parallel Distributed Compensation</i>)
TRMS	Sistema de Rotor Duplo de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas, (<i>Twin Rotor MIMO System</i>)
LIT	Linear Invariante no Tempo

Lista de Símbolos

\in	Pertence a
\mathbb{R}	Conjuntos dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço vetorial real de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espaço real de dimensão $n \times n$
A^T	Matriz transposta de A
$*$	Termo transposto de matrizes simétricas
\otimes	Produto de Kronecker
\circ	Composição
$x(t)$	Vetor de estados do sistema contínuo no tempo
$x(k)$	Vetor de estados do sistema discreto no tempo
$\hat{x}(k)$	Vetor de estados estimados discreto no tempo
$z(k)$	Vetor de estados do observador discreto no tempo
$\xi(k)$	Vetor de variáveis-premissa
$\xi_\alpha(k)$	Vetor de variáveis-premissa medidas
$\xi_\beta(k)$	Vetor de variáveis-premissa não medidas
$\hat{\xi}_\beta(k)$	Vetor de variáveis-premissa estimadas
$w_i(k)$	I -ésima função de pertinência
$h_i(k)$	I -ésima função de pertinência normalizada
$L_i(k)$	I -ésimo ganho do observador
$K_i(k)$	I -ésimo ganho do controlador
$M_i(k)$	I -ésimo ganho do integrador
γ_o	Limitante do custo garantido \mathcal{H}_∞ para o observador
γ_c	Limitante do custo garantido \mathcal{H}_∞ para o controlador
η	Limitante para incerteza referente ao descasamento da pertinência
η_o	Limitante referente ao erro de estimativa do observador

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Objetivos	20
1.2	Estrutura do Texto	20
2	Fundamentos Teóricos	22
2.1	Desigualdades Matriciais Lineares	22
2.2	Análise de Estabilidade	22
2.3	Custo Garantido \mathcal{H}_∞	23
2.4	Observador de Entradas Desconhecidas	24
2.5	Modelos Nebulosos	26
2.5.1	Não Linearidade de Setor	28
2.6	Controlador de Compensação Paralela Distribuída	30
2.7	Lemas Auxiliares	30
3	Controle Baseado em Observadores	33
3.1	Sistema Nebuloso TS com Variáveis–Premissa Não Mensuráveis	33
3.2	UIO Nebuloso com Variáveis–Premissa Não Mensuráveis	34
3.3	UIO Nebuloso com Custo Garantido \mathcal{H}_∞	38
3.4	Controlador PDC com Custo Garantido \mathcal{H}_∞	41
3.5	Seguimento de Referência em Degrau	46
4	Controle do Sistema de Rotor Duplo	49
4.1	Descrição do Problema	49
4.2	Modelo Takagi–Sugeno do Sistema de Rotor Duplo	52
4.3	Resultados e Simulações	54
4.4	Sistema de Rotor Duplo – Seguimento de Referência	59
5	Controle de Quatro Tanques Acoplados	64
5.1	Descrição do Problema	64
5.2	Modelo Takagi–Sugeno do Sistema Quatro Tanques Acoplados	65
5.3	Resultados e Simulações	67
5.4	Sistema com Quatro Tanques Acoplados – Seguimento de Referência	71
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	77
6.1	Considerações Gerais	77
6.2	Aplicação para Controle do Sistema de Rotor Duplo	77
6.3	Aplicação para Controle do Sistema com Quatro Tanques Acoplados	78
6.4	Artigo Desenvolvido	78
6.5	Trabalhos Futuros	78

Referências 80

1 Introdução

A presença de não linearidades em sistemas de controle e suas influências na dinâmica da planta destacam a importância de representar adequadamente essas características em modelos de aplicações reais (KHALIL, 2002). Os comportamentos não lineares da planta elevam o nível de complexidade do sistema de controle, pois devem ser considerados no projeto de controladores e observadores, por exemplo, de modo a garantir um bom desempenho do sistema em malha fechada. Desse modo, o desafio é representar de maneira adequada a dinâmica de modelos não lineares, para garantir a consistência e rigor nos projetos de engenharia.

Uma alternativa para representar adequadamente classes de sistemas não lineares nos projetos é utilizar sistemas nebulosos (*fuzzy systems*), por meio da teoria de conjuntos nebulosos introduzida por Zadeh (1965), visto que são classificados como aproximadores universais. Os modelos nebulosos utilizam um conjunto de regras Se-Então baseado em antecedentes e consequentes, que são combinados de forma nebulosa, o que permite representar adequadamente a dinâmica do sistema não linear. Essa combinação nebulosa é realizada por meio de ponderações, denominadas pertinências, que indicam o grau de relevância associado a cada consequente na representação.

Os sistemas nebulosos podem ser classificados como do tipo Mamdani (MAMDANI; ASSILIAN, 1975) ou do tipo Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985). Os sistemas do tipo Mamdani descrevem o comportamento dos sistemas utilizando conjuntos nebulosos tanto nos antecedentes quanto nos consequentes das regras, enquanto que os modelos TS utilizam funções diretamente como o consequente das regras. Na literatura, é muito comum empregar modelos TS em que os consequentes são modelos lineares, de modo que podemos ver o modelo não linear, neste caso, como uma combinação de modelos lineares.

Uma vantagem para o uso de modelos nebulosos TS é a possibilidade de aplicação de técnicas de projeto para sistemas lineares à uma classe de sistemas não lineares. Dentre as técnicas disponíveis, os métodos de otimização convexa baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) constituem uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores e de observadores (TANAKA; WANG, 2001).

Com base nessas considerações e como apresentado em Nguyen *et al.* (2019), é importante ressaltar a crescente evolução da área de sistemas nebulosos nas últimas décadas, bem como os avanços significativos proporcionados em aplicações de diversos campos do conhecimento. Pode-se citar o uso de sistemas nebulosos em diagnóstico e isolamento de falhas (do inglês, *Fault Detection and Isolation* – FDI) (LOPEZ-TORIBIO; PATTON,

1999; ZHANG *et al.*, 2011; KAMAL *et al.*, 2013; LI *et al.*, 2020), controle tolerante a falhas (do inglês, *Fault Tolerant Control – FTC*) (LOPEZ-TORIBIO; PATTON, 1999; LAN; PATTON, 2017; QUADROS *et al.*, 2022; RODRÍGUEZ *et al.*, 2024), ataques cibernéticos (LIU *et al.*, 2021; HUANG *et al.*, 2024; GUADARRAMA-ESTRADA *et al.*, 2025), engenharia biomédica (GUERRA *et al.*, 2017; GAINO *et al.*, 2020; MORENO-SÁENZ *et al.*, 2023), engenharia aeronáutica (HUŠEK; NARENATHREYAS, 2016; NGUYEN *et al.*, 2021a), motores (KHIAR *et al.*, 2007; CHOI *et al.*, 2012; HAMMOUDI *et al.*, 2015), aplicações industriais (KISS *et al.*, 2011; FLORES-HERNÁNDEZ *et al.*, 2018), entre outros.

A evolução das aplicações implica, também, em aumento da complexidade dos modelos e critérios essenciais de projetos, como, por exemplo, na síntese de controladores para estabilidade em malha fechada de plantas não lineares. A estabilidade em malha fechada de sistemas nebulosos TS pode ser garantida por meio do uso de diferentes tipos de controladores, sendo o controlador de compensação paralela distribuída (do inglês, *Parallel Distributed Compensation – PDC*), um dos mais amplamente utilizados (WANG *et al.*, 1995; TANAKA *et al.*, 1998a). Nessa metodologia de controle, um ganho de realimentação de estados é projetado para cada modelo linear local e, posteriormente, esses ganhos são combinados utilizando as mesmas funções de pertinência do modelo do sistema (TANAKA; WANG, 2001).

As mais diversas aplicações de controladores nebulosos com a estrutura do PDC, evidenciam a relevância desse tipo de técnica para o projeto de controladores por realimentação de estados para sistemas não lineares. Uma lei de controle do tipo PDC pode ser obtida tanto a partir de condições quadráticas, em que uma matriz de Lyapunov constante é utilizada para certificar a estabilidade de todo o domínio (TANAKA *et al.*, 1998a; KIM; LEE, 2000; GUERRA; VERMEIREN, 2001; TEIXEIRA *et al.*, 2003; CAMPOS *et al.*, 2016) quanto a partir de condições não quadráticas, em que um conjunto paramétrico de matrizes de Lyapunov é utilizado para certificar a estabilidade do domínio (GUERRA; PERRUQUETTI, 2001; TANAKA *et al.*, 2003; ABDELMALEK *et al.*, 2007; JI *et al.*, 2007). Além disso, critérios de desempenho podem ser adicionados às condições de estabilização, garantindo, por exemplo, a minimização do custo energético total, também denominado custo \mathcal{H}_2 (CHEN *et al.*, 2000; WU; CAI, 2004; WU; CAI, 2006), ou a minimização da influência de perturbações e incertezas sobre a planta, denominado custo \mathcal{H}_∞ (TANAKA *et al.*, 1998b; LIU; ZHANG, 2003; SAIFIA *et al.*, 2011). A estrutura do controlador PDC também se destaca em cenários que consideram restrições práticas, como a saturação nos atuadores (SAIFIA *et al.*, 2011; SAIFIA *et al.*, 2020) e a presença de atrasos no tempo (TIAN *et al.*, 2009; YANG; TONG, 2015; MA *et al.*, 2016).

Todavia, em contextos práticos, parte do vetor de estados do sistema pode estar inacessível para medição e comprometer a implementação do controlador. Essa limitação prática motiva utilizar técnicas alternativas para estimar os estados não medidos, como

por exemplo observadores de estados. Introduzidos por Kalman (1960) e por Luenberger (1964), os observadores de estados são dispositivos tipicamente empregados para estimar os estados internos de um sistema dinâmico a partir do conhecimento de sua entrada e de sua saída. Desse modo, caso o erro de estimação convirja a zero, ou seja, os estados estimados equivalem aos estados reais do sistema, pode-se utilizar as estimativas para compor a lei de controle que estabiliza o sistema em malha fechada (LUENBERGER, 1966).

Observadores nebulosos podem ser utilizados na estimação de estados de sistemas não lineares representados por modelos nebulosos TS como demonstrado nos trabalhos de Tanaka *et al.* (1998a), Ma *et al.* (1998), Tanaka e Wang (2001), Bergsten *et al.* (2002), Teixeira *et al.* (2003). A hipótese base em todos esses trabalhos é que as variáveis-premissa que escalonam os ganhos do observador são mensuráveis, o que pode ser irrealista em muitas aplicações práticas. Trabalhos mais recentes propõem condições que separam as variáveis-premissa medidas das variáveis-premissa desconhecidas, sendo o escalonamento das matrizes de ganho do observador dependente da combinação de uma parcela medida e de uma parcela estimada das variáveis-premissa do modelo (HAMMOUDI *et al.*, 2015; GUERRA *et al.*, 2017; VU *et al.*, 2017; NGUYEN *et al.*, 2021a; PAN *et al.*, 2023; PEIXOTO *et al.*, 2023).

Outra característica existente em aplicações práticas é a presença de entradas desconhecidas, ou perturbações, que podem estar relacionadas a incertezas do modelo não linear, falhas em sensores e atuadores do sistema ou distúrbios externos. Devido à entrada ser desconhecida ou imensurável, o observador clássico de Luenberger não é capaz de tratar adequadamente esse distúrbio (GUAN; SAIF, 1991). É necessário, portanto, estabelecer um método que viabilize reduzir o efeito de tal perturbação na dinâmica de observação, pois essa característica pode afetar as estimativas dos estados e o desempenho do observador (DAROUACH *et al.*, 1994).

A existência de entradas desconhecidas é um tema continuamente estudado na literatura para o projeto de observadores de estados, em que Meditch e Hostetter (1973), Wang *et al.* (1975), Bhattacharyya (1978) representam algumas das primeiras propostas de estrutura e condições de existência para esses dispositivos em sistemas lineares e invariantes no tempo. Os trabalhos de Kudva *et al.* (1980), Yang e Wilde (1988) destacam a evolução das técnicas de projeto para esses tipos de observadores, apresentando metodologias padronizadas para determinar as matrizes de projeto.

Após essas primeiras décadas de desenvolvimento e pesquisas, o termo observador de entradas desconhecidas (do inglês, *Unknown Input Observer* – UIO) é consolidado na década de 1990 para classificar este tipo de observador capaz de rejeitar (ou atenuar) a influência de entradas desconhecidas na dinâmica do erro de observação (GUAN; SAIF, 1991; CHEN; ZHANG, 1991). Também ao longo da década de 1990, foram estabelecidas as condições de existência necessárias e suficientes de forma sistemática e simplificada

para os projetos de UIOs (HOU; MULLER, 1992; DAROUACH *et al.*, 1994; CHEN *et al.*, 1996). Dessa forma, o UIO é classificado como um dispositivo adequado para desacoplar entradas desconhecidas no processo de estimação dos estados (DAROUACH *et al.*, 1994), reduzindo o efeito dessas perturbações na dinâmica do erro de estimação. Essa característica o torna eficaz em aplicações de detecção e isolamento de falhas (CHEN; ZHANG, 1991; CHEN *et al.*, 1996; PATTON; CHEN, 1997), evidenciando sua relevância para o aumento da confiabilidade em sistemas de controle, ao possibilitar a estimação de falhas em sensores e atuadores a partir da análise dos resíduos gerados.

A síntese de UIOs para sistemas não lineares via LMIs (CHEN; SAIF, 2006; KORBICZ *et al.*, 2007; MONDAL *et al.*, 2010; MOHAMED *et al.*, 2012; CHADLI; KARIMI, 2012) representam avanços significativos nas técnicas de projeto baseadas em otimização para observadores robustos. No entanto, percebe-se que projetos de UIOs baseados em LMIs para sistemas discretos no tempo ainda permanecem como um tema desafiador e pouco explorado na literatura, especialmente para sistemas não lineares descritos por modelos nebulosos TS.

UIOs nebulosos TS têm sido projetados para diferentes finalidades, como, por exemplo, estimação de estados (ESTRADA-MANZO *et al.*, 2015; BOUASSEM *et al.*, 2016; NGUYEN *et al.*, 2021b), para tratar incertezas do modelo (DU *et al.*, 2015; YEH *et al.*, 2015; VU *et al.*, 2017), em identificação e detecção de falhas (LIU *et al.*, 2017; LI *et al.*, 2020; MU *et al.*, 2020) auxiliando no diagnóstico de falhas de sensores e atuadores, na identificação de ataques cibernéticos (PAN *et al.*, 2023; LIU *et al.*, 2024), em técnicas de controle tolerante a falhas (RODRÍGUEZ *et al.*, 2024; ALVES *et al.*, 2025) para proporcionar maior nível de confiabilidade das aplicações, em sistemas com atraso no tempo (PEIXOTO *et al.*, 2023), entre outros.

Entretanto, grande parte dos trabalhos da literatura sobre observadores nebulosos são baseados na suposição de que todas as variáveis-premissa são medidas, uma condição que nem sempre é atendida em sistemas reais. Os projetos de observadores nebulosos baseados em LMIs para sistemas em tempo contínuo (CHEN; SAIF, 2010; GUERRA *et al.*, 2017) e tempo discreto (NGUYEN *et al.*, 2021a; NGUYEN *et al.*, 2021b; NGUYEN *et al.*, 2021c; PEIXOTO *et al.*, 2023; PAN *et al.*, 2023) com variáveis-premissa não medidas são considerados desafiadores e pouco explorados na literatura, visto que um dos desafios é lidar com a incerteza resultante do descasamento das funções de pertinência entre variáveis-premissa medidas e variáveis-premissa desconhecidas. Dessa forma, uma solução para lidar com essa complexidade nos projetos de observadores de estado é utilizar o Teorema do Valor Médio para tratar adequadamente o descasamento existente (GUERRA *et al.*, 2017; NGUYEN *et al.*, 2021b; PAN *et al.*, 2023).

Assim, a complexidade do controle de plantas não lineares, somada às dificuldades no processo de medição na presença de entradas desconhecidas, motiva o estudo de UIOs aplicados a sistemas descritos por modelos nebulosos TS. Essa abordagem para

o controle baseado em observador torna-se ainda mais relevante no contexto de sistemas discretos no tempo, dada a escassez de trabalhos na literatura que abordam o problema considerando a existência de variáveis-premissa não mensuráveis.

1.1 Objetivos

O propósito desta dissertação é apresentar uma metodologia para o projeto de controladores por realimentação de estados baseados em observador de entradas desconhecidas para sistemas nebulosos Takagi–Sugeno discretos no tempo. Para tanto, são apresentadas condições LMI para síntese de observadores de entradas desconhecidas nebulosos TS e para síntese de controladores PDC, em que as variáveis-premissa são classificadas como medidas e desconhecidas. Para lidar com o problema de descasamento da pertinência, o Teorema do Valor Médio é aplicado, baseado na proposta apresentada por Guerra *et al.* (2017). Além disso, o Lema de Finsler é utilizado para introduzir variáveis de folga aos projetos de observadores e controladores, o que permite reduzir o conservadorismo e apresentar propostas de projetos mais relaxados.

Nesse sentido, o UIO nebuloso de ordem completa será utilizado para estimar os estados não medidos de um sistema não linear, desacoplar os efeitos da entrada desconhecida da dinâmica do erro de estimativa e viabilizar a implementação de uma lei de controle PDC que estabilize o sistema em malha fechada. Além disso, a metodologia proposta é aplicada em modelos não lineares de sistemas reais, especificamente, um sistema de rotor duplo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês, *Twin Rotor MIMO System* – TRMS) e em um sistema de quatro tanques acoplados.

1.2 Estrutura do Texto

O Capítulo 1 fez uma breve introdução sobre os modelos nebulosos e sua relevante aplicação no contexto de representar dinâmicas de modelos não lineares, síntese de observadores de estados e controladores nebulosos, além dos objetivos do trabalho.

Em seguida, o Capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos e lemas auxiliares que serão utilizados no trabalho para síntese do UIO e do controlador PDC para sistemas nebulosos TS discretos no tempo.

O Capítulo 3 apresenta as condições LMI para síntese do UIO nebuloso considerando variáveis-premissa mensuráveis e não mensuráveis. Para tanto, é utilizado o Teorema do Valor Médio para tratar o descasamento da pertinência. Além disso, variáveis de folga são introduzidas aos projetos pelo Lema de Finsler a fim de reduzir o conservadorismo das condições.

Os Capítulos 4 e 5 apresentam os resultados obtidos para estimação de estados e controle em modelos não lineares. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de continuidade de pesquisa para trabalhos futuros.

2 Fundamentos Teóricos

Este capítulo apresenta as definições teóricas para projeto de controladores e observadores nebulosos. Inicialmente é apresentada uma breve introdução às LMIs, pois esta será a ferramenta utilizada na síntese do controlador e observador de estado. A análise de estabilidade por meio do método direto de Lyapunov apresenta as técnicas que serão utilizadas nos projetos. Na sequência é apresentado o critério de custo garantido \mathcal{H}_∞ para abordar o contexto de robustez em malha fechada. Em seguida, são apresentadas as condições de existência para o projeto do UIO. Por fim, é apresentado como uma classe de sistemas não lineares pode ser representada por meio de modelos nebulosos TS para síntese de observadores e controladores nebulosos.

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear possui a estrutura (BOYD *et al.*, 1994)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a i -ésima matriz e $F_i = F_i^T$.

A notação $>$ é utilizada para definir o sinal das matrizes, de modo que $F(x) > 0$ representa uma matriz definida positiva e, portanto, com todos os seus autovalores positivos. Ademais, também são utilizadas as notações: \geq (semi-definida positiva), $<$ (definida negativa) e \leq (semi-definida negativa).

Quando a condição $F(x) > 0$ é atendida, entende-se que uma solução factível foi encontrada. O conjunto solução convexo (BOYD *et al.*, 1994) é dado por

$$\{x \in \mathbb{R}^m | F(x) \geq 0\}, \quad (2.2)$$

o que permite utilizar métodos de otimização convexa para encontrar soluções factíveis. Para tanto, dentre as opções de pacotes disponíveis, pode-se citar LMI Control Toolbox (GAHINET *et al.*, 1994), YALMIP (LOFBERG, 2004), SeDuMi (STURM, 1999) e Mosek (MOSEK APS, 2019).

2.2 Análise de Estabilidade

Como apresentado em Tanaka e Sano (1993), a estabilidade é um dos conceitos fundamentais para projetos em engenharia de controle. Para tanto, LMIs podem ser utilizadas em conjunto com o método direto de Lyapunov para análise de estabilidade de sistemas lineares e não lineares (BOYD *et al.*, 1994).

Desse modo, considere o sistema discreto linear invariante no tempo (LIT) em malha aberta

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (2.3)$$

em que $x(k)$ é o vetor de estados e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz do sistema.

O método direto de Lyapunov estabelece que a análise da estabilidade de (2.3) pode ser obtida por meio de uma função candidata de Lyapunov. Para tanto, considere a seguinte escolha para a função candidata

$$V(k) = x^T(k)Px(k) > 0, \quad P = P^T > 0, \quad (2.4)$$

em que deseja-se encontrar uma matriz de Lyapunov P simétrica e positiva definida que satisfaz à condição quadrática imposta e garanta a estabilidade do sistema no sentido de Lyapunov.

A primeira diferença no tempo deve satisfazer $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0$, ou de forma equivalente

$$\Delta V(k) = x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) < 0, \quad (2.5)$$

que pode ser reescrito como

$$\Delta V(k) = x^T(k)(A^T P A - P)x(k) < 0. \quad (2.6)$$

Portanto, para que o sistema seja assintoticamente estável no sentido de Lyapunov, as seguintes condições LMI devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P A - P &< 0. \end{aligned}$$

Essa estrutura é denominada estabilidade quadrática (TANAKA; SUGENO, 1992), (BOYD *et al.*, 1994), (WANG *et al.*, 1996).

2.3 Custo Garantido \mathcal{H}_∞

Frequentemente, é necessário considerar distúrbios existentes em sistemas de controle, pois esta característica representa o contexto real de aplicações práticas. Desse modo, deve-se estabelecer métodos que garantam robustez a perturbações existentes no sistema em malha fechada.

Dessa forma, considere um sistema não linear discreto no tempo dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), w(k)) \\ \vartheta(k) &= h(x(k), w(k)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que $x(k)$ é o vetor de estados, $\vartheta(k)$ é a saída de desempenho e $w(k)$ é a perturbação de energia limitada que atua no sistema. A norma \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos no tempo estáveis no domínio da frequência (OLIVEIRA, 1999) é dada por

$$\|H_z(\zeta)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \bar{\sigma}(H_z(e^{j\omega})) \quad (2.8)$$

em que $\bar{\sigma}(\cdot)$ corresponde ao máximo valor singular de (\cdot) .

A suposição de que o ruído $w(k)$ pertence ao espaço ℓ_2 permite obter sua equivalência no domínio do tempo e utilizar a técnica de controle robusto \mathcal{H}_∞ para minimizar o efeito das perturbações na saída do sistema (BOYD *et al.*, 1994). Para tanto, o ganho ℓ_2 induzido pode ser utilizada como critério de desempenho para garantir a robustez desejada do sistema em malha fechada (SCHERER; WEILAND, 2000). A definição entrada-saída para ganho ℓ_2 induzido é dado por

$$\sup_{\|w(k)\|_2 \neq 0} \frac{\|\vartheta(k)\|_2}{\|w(k)\|_2} \leq \gamma \quad (2.9)$$

em que γ é o limitante superior estabelecido para o ganho. Com base nessa definição, e devido à semelhança com o custo garantido \mathcal{H}_∞ (BOYD *et al.*, 1994), a seguinte condição pode ser usada para determinar o valor do limitante γ

$$\Delta V(k) + \vartheta^T(k)\vartheta(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) < 0, \quad (2.10)$$

conhecida como *Bounded Real Lemma* (BRL) (BOYD *et al.*, 1994), e possibilita implementar um critério robusto limitado em norma para o sistema em malha fechada.

2.4 Observador de Entradas Desconhecidas

Um observador de estado é um dispositivo capaz de reconstruir o vetor de estados por meio das entradas e saídas do sistema que observa (LUENBERGER, 1964). Para tanto, o projeto de um observador consiste em assegurar a redução assintótica do erro de estimativa a zero, ou para um valor mínimo admissível, o que garante convergência das estimativas para aos valores reais.

Caso o controlador projetado necessite de informação de todos os estados do sistema (ou parte deles) para obter uma lei de controle que estabilize o sistema em malha fechada, observadores de estado são uma solução alternativa e que viabiliza a implementação de controladores. No entanto, aplicações reais são sujeitas a perturbações na planta que podem corromper a qualidade das estimativas dos estados, o que indica a necessidade de implementar técnicas para tratar os efeitos causados por esta característica.

Desse modo, considere o sistema LIT discreto no tempo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k), \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $d(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada desconhecida, ou perturbação, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes conhecidas com dimensões apropriadas.

Um observador de entradas desconhecidas é um tipo de observador de estados que permite desacoplar o efeito das entradas desconhecidas do erro de estimativa dos estados estimados. Para tanto, a estratégia utilizada é considerar que a matriz de entrada desconhecida é conhecida (CHEN; PATTON, 2012), o que permite utilizar tal informação no projeto do observador.

A estrutura de um UIO de ordem completa para o sistema discreto no tempo (2.11) é dada por

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Rz(k) + Gu(k) + Ly(k) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + Hy(k), \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados estimados, $z(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do observador e R , G , L e H são matrizes de projeto.

Para que exista um UIO seja capaz de realizar tal desacoplamento e garantir que o erro de estimativa seja assintoticamente estável, algumas condições devem ser satisfeitas. Os lemas auxiliares a seguir demonstram tais imposições.

Lema 2.1 (Chen e Patton (2012)). *Considere uma matriz B_d de posto completo de colunas e uma matriz C de posto completo de linhas, para existência de um UIO é necessário que*

$$\text{posto}(CB_d) = \text{posto}(B_d) = m,$$

o que permite obter uma matriz pseudo-inversa

$$(CB_d)^\dagger = ((CB_d)^T CB_d)^{-1} (CB_d)^T,$$

e encontrar a matriz de projeto $H = B_d(CB_d)^\dagger$.

Lema 2.2 (Chen e Patton (2012)). *Dado que*

$$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

se o par (C_1, A) for detectável, então o par (C, A) será detectável.

Lema 2.3 (Chen (1999)). *O critério de observabilidade estabelece que dado o par (C, A) , o sistema é dito observável se a matriz de observabilidade \mathcal{O}*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

atender a condição de posto completo

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = n$$

O erro de estimação para um observador é definido como

$$e_o(k) = x(k) - \hat{x}(k), \quad (2.13)$$

e conforme mencionado anteriormente, deseja-se que o estado estimado convirja ao estado real, ou para uma região próxima ao estado real. Caso esta condição seja atendida, $e_o(k)$ convergirá para zero, ou para uma região próxima da origem admissível para o projeto. Portanto, a seguinte definição pode ser empregada para o UIO.

Definição 2.1 (Observador de Entradas Desconhecidas (CHEN; PATTON, 2012)). *Um observador é definido como um observador de entradas desconhecidas para o sistema em tempo discreto (2.11), se o erro de estimação $e_o(k)$ convergir assintoticamente para uma região próxima da origem, mesmo na presença de entradas desconhecidas no sistema.*

No cenário em que não há entradas desconhecidas ($B_d = 0$), ao considerar $H = 0$, $R = A - LC$, $G = TB$ e $T = I$, a estrutura do observador definida em (2.12) corresponde ao observador de Luenberger de ordem completa (LUENBERGER, 1964; LUENBERGER, 1966). Entretanto, quando o sistema é afetado por entradas desconhecidas ($B_d \neq 0$), a estrutura do observador de Luenberger não possibilita o desacoplamento do efeito dessas perturbações da dinâmica do erro de estimação, o que compromete a qualidade das estimativas de estado. Logo, a estrutura do UIO apresenta vantagens para projetos desses dispositivos, pois a escolha adequada da matriz H permite desacoplar o efeito dessas perturbações da dinâmica do erro de estimação.

2.5 Modelos Nebulosos

Os sistemas nebulosos utilizam a teoria de conjuntos nebulosos propostos por Zadeh (1965) para representar uma classe de sistemas não lineares e são classificados como aproximadores universais (TANAKA; WANG, 2001). Desse modo, estes sistemas permitem representar a dinâmica de um sistema não linear por meio de uma combinação nebulosa convexa, que considera ponderações determinadas por pertinências estabelecidas pela metodologia. Para tanto, a estrutura de sistemas nebulosos é constituída por um conjunto de regras Se-Então que representam relações entrada-saída, denominadas antecedentes e consequentes.

Os sistemas nebulosos são classificados como do tipo Mamdani ou Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985). Em sistemas do tipo Mamdani os consequentes são conjuntos nebulosos (ZENG *et al.*, 2000), o que permite utilizá-los em aplicações práticas quando modelos matemáticos não podem ser obtidos previamente. Por sua vez, os

sistemas nebulosos TS possuem como consequentes modelos lineares locais para representar a dinâmica de uma planta não linear e herdaram muitas propriedades dos sistemas introduzidos por Zadeh (1965), o que permite explorar diferentes regiões do espaço de estados.

A representação de um sistema nebuloso TS discreto no tempo é definida pela seguinte estrutura

\mathcal{R}_i : Se $\xi_1(k)$ é \mathcal{Z}_1^i e, \dots , e $\xi_\ell(k)$ é \mathcal{Z}_ℓ^i então

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) &= C_i x(k), \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que \mathcal{R}_i é a i -ésima regra nebulosa, $r \in \mathbb{N}$ é o número de regras existentes, em que $r = 2^{n_x}$ e n_x é o número de não linearidades existentes no modelo, $\xi_i(k)$ é a i -ésima variável-premissa, \mathcal{Z}_ℓ^i são os conjuntos nebulosos, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, A_i , B_i , C_i são matrizes conhecidas com dimensões apropriadas e k é a amostra em tempo discreto.

Em um sistema nebuloso TS o conjunto de variáveis-premissa pode ser representado por estados do sistema, perturbações externas ou dependência no tempo (TANAKA; WANG, 2001).

A representação normalizada de um sistema nebuloso TS é dada por

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(k)) (A_i x(k) + B_i u(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)), \quad (2.15)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(k)) C_i x(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(k))} = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) C_i x(k), \quad (2.16)$$

sendo que a função de pertinência normalizada para a i -ésima regra é definida como

$$h_i(\xi(k)) = \frac{w_i(\xi(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(k))}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.17)$$

e a relação entre o grau de pertinência $\xi_\ell(k)$ com \mathcal{Z}_ℓ^i possui a seguinte estrutura

$$w_i(\xi(k)) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{Z}_j^i(\xi_j(k)), \quad (2.18)$$

sendo que $Z_j^i(\xi_j(k))$ representa o grau de associação da variável-premissa $\xi_j(k)$, antecedente, com relação a Z_j^i , consequente. Ao considerar as definições acima, o sistema nebuloso TS para a função de pertinência normalizada é representado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) (A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) C_i x(k), \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.19)$$

Outra característica importante é que em sistemas nebulosos TS a função de pertinência $h(\xi(k))$ pertence ao simplex unitário, definido como

$$\Lambda_r = \left\{ h \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) = 1, \quad 0 \leq h_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, r \right\}, \quad (2.20)$$

o que possibilita associar cada vértice do politopo a um grau de pertinência para compor a representação dinâmica do sistema não linear.

2.5.1 Não Linearidade de Setor

Para obter um modelo nebuloso TS é utilizada a técnica denominada não linearidade de setor (do inglês, *Sector Nonlinearity*). Esta metodologia permite obter uma representação exata na forma de um modelo TS com as restrições desejadas para um sistema não linear com base no modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema (TANAKA; WANG, 2001).

A principal característica da técnica de não linearidade de setor é representar a dinâmica do sistema não linear por um setor global, ou por um setor local quando for necessário considerar as restrições (OHTAKE *et al.*, 2003), como por exemplo limitações físicas do sistema.

Exemplo 2.1: Considere o sistema não linear em tempo contínuo apresentado em Tanaka e Wang (2001)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_1(t)x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1^3(t) \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo $z_1(t) = x_1(t)x_2^2(t)$ e $z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1^2(t)$ as não linearidades existentes no modelo. A representação do modelo nebuloso TS é dada por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (2.21)$$

e ao assumir que os estados $x_1(t) \in [-1, 1]$ e $x_2 \in [-1, 1]$, os limitantes do modelo TS para z_1 e z_2 são definidos como

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \max(z_1) = 1 & a_1^2 &= \max(z_2) = 4 \\ a_2^1 &= \min(z_1) = -1 & a_2^2 &= \min(z_2) = 0 \end{aligned}$$

o que permite obter as funções de pertinência

$$\begin{aligned} w_1^1 &= \frac{z_1(t) - a_2^1}{a_1^1 - a_2^1} = \frac{z_1(t) + 1}{2} & w_1^2 &= \frac{z_2(t) - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{z_2(t)}{4} \\ w_2^1 &= 1 - w_1^1 & w_2^2 &= 1 - w_1^2 \end{aligned}$$

e ao combinar os limitantes obtidos obtém-se os vértices A_i

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desse modo, percebe-se que esse método estabelece um procedimento sistemático para obter o modelo nebuloso TS e as funções de pertinência para representar o comportamento dinâmico do sistema não linear por meio da combinação convexa. Além disso, devido aos consequentes serem modelos lineares locais, as técnicas de projeto consolidadas para sistemas lineares poderão ser aplicadas (TANAKA; WANG, 2001), como, por exemplo, o uso de LMIs.

O uso de LMIs para análise de estabilidade em sistemas nebulosos TS demonstram sua poderosa aplicação em diferentes contextos para sistemas não lineares (WANG *et al.*, 1996; CAO; FRANK, 2000; TEIXEIRA *et al.*, 2003; CHADLI; GUERRA, 2012; NGUYEN *et al.*, 2019). Para tanto, o método direto de Lyapunov é utilizado para análise de uma classe de sistemas não lineares por meio funções quadráticas e tem como objetivo encontrar uma matriz P que estabilize todos os vértices do sistema nebulosos TS (TANAKA; SUGENO, 1992).

Dentre as possibilidades existentes na literatura, os projetos de observadores e controladores nebulosos (TANAKA; SANO, 1994; MA *et al.*, 1998; TANAKA *et al.*, 1998a; GUERRA *et al.*, 2017)) possibilitam explorar a dinâmica do sistema não linear para gerar estimativas confiáveis dos estados não medidos, e obter uma lei de controle baseada nos estados estimados.

2.6 Controlador de Compensação Paralela Distribuída

O controlador de compensação paralela distribuída é um controlador não linear, que possui matrizes de ganho para cada modelo linear local do sistema nebuloso TS (WANG *et al.*, 1995). A estrutura de uma lei de controle PDC é definida por

$$u(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) K_i x(k), \quad (2.22)$$

em que K_i é a matriz de ganho do controlador associado à i -ésima regra do modelo nebuloso TS.

Ao analisar a estrutura de (2.22), nota-se que a lei de controle que estabiliza o sistema não linear em malha fechada é obtida por meio da combinação dos ganhos K_i ponderados por cada função de pertinência normalizada do conjunto de regra. Para tanto, esta combinação nebulosa gera um controlador nebuloso não linear que compartilha das mesmas variáveis-premissa do sistema.

Desse modo, por ser um controlador por realimentação de estados, a lei de controle possui dependência direta dos estados do sistema. Desta forma, quando existir limitações técnicas que inviabilizem a medição direta de algum estado, pode-se projetar um UIO para fornecer estimativas dos estados para determinar $u(k)$ e projetar um controle por realimentação de estados baseado em observador, ou seja,

$$u(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) K_i \hat{x}(k). \quad (2.23)$$

Portanto, caso os estados estimados pelo observador converjam para os estados reais do sistema, o vetor $\hat{x}(k)$ poderá ser utilizado para obter uma lei de controle que estabilize o sistema em malha fechada.

Observação 2.1. *Uma propriedade fundamental no contexto de controle baseado em observadores é o denominado Princípio da Separação (CHEN, 1999; TANAKA; WANG, 2001), o qual estabelece as condições sob as quais o observador e o controlador podem ser projetados de forma independente. Portanto, sempre que possível, busca-se assegurar a validade dessa propriedade, uma vez que, na sua ausência, torna-se necessário o projeto conjunto do observador e do controlador, o que resulta em um aumento significativo na complexidade do projeto.*

2.7 Lemas Auxiliares

Lema 2.4 (Estabilidade Quadrática (TANAKA; SUGENO, 1992)). *O sistema em malha aberta $x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k)) A_i x(k)$ é globalmente assintoticamente estável se existir uma*

matriz $P > 0$ comum a todos os subsistemas, tal que

$$\begin{aligned} A_i^T P A_i - P &< 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ A_i^T P A_j + A_j^T P A_i - 2P &< 0 \quad 1 \leq i < j \leq r \end{aligned}$$

Lema 2.5 (Complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994)). *Considere a matriz quadrada X e simétrica*

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

sendo A e C matrizes não singulares, então as seguintes afirmações são verdadeiras

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B^T A^{-1} B > 0$
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - B C^{-1} B^T > 0$
- $X < 0$ se e somente se $A < 0$ e $C - B^T A^{-1} B < 0$
- $X < 0$ se e somente se $C < 0$ e $A - B C^{-1} B^T < 0$

Lema 2.6 (Teorema do Valor Médio (GUERRA *et al.*, 2017)). *Seja $f(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se $f(\xi)$ é uma função diferenciável em $[a, b]$, então, existe um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ com $c_i \in]a_i, b_i[$, $i = 1, \dots, n$, tal que*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b - a)$$

sendo $\nabla f(c) = \frac{\partial f(c)}{\partial \xi}$ e $]a_i, b_i[$ significa o intervalo aberto entre a_i e b_i .

Lema 2.7 ((GUERRA *et al.*, 2017)). *Dada a transformação não linear $Z_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r_\beta}$ de classe C^1 , o Teorema do Valor Médio é usado da seguinte forma: Existe um $c \in]x, \hat{x}[$ tal que*

$$\beta_j \circ \xi_\beta(x) - \beta_j \circ \xi_\beta(\hat{x}) = \left. \frac{\partial \beta_j \circ \xi_\beta(x)}{\partial x} \right|_{x=c} (x - \hat{x}) = \nabla(\beta_j \circ \xi_\beta(c))e,$$

em que \circ indica a composição de funções e dado o limitante em norma $\Omega_x : \left\| \frac{\partial(\beta_j \circ \xi_\beta(x))}{\partial x} \right\| \leq \sigma_j$, considera-se

$$\frac{\partial(\beta_j \circ \xi_\beta(x))}{\partial x} = \frac{\partial \beta_j(\xi_\beta)}{\partial \xi_\beta} \times \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x}, \text{ sendo que } E = \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x}$$

Lema 2.8 (Lema de Finsler (OLIVEIRA; SKELTON, 2001)). *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m < n$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} , isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

$$(i) \quad x^T \mathcal{A} x < 0, \quad \forall x \neq 0 : \mathcal{B}x = 0$$

(ii) $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{A} \mathcal{B}^{\perp} < 0$ sendo que $\mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} = 0$

(iii) $\exists \rho \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A} - \rho \mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} < 0$

(iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{A} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$

Lema 2.9 ((GUERRA *et al.*, 2017)). *Sejam duas matrizes \mathcal{M} e \mathcal{W} , com dimensões apropriadas, e um escalar $\mu > 0$, então a seguinte relação é verdadeira*

$$\mathcal{M}^T \mathcal{W} + \mathcal{W}^T \mathcal{M} \leq \mu \mathcal{M}^T \mathcal{M} + \mu^{-1} \mathcal{W}^T \mathcal{W} \quad (2.25)$$

Lema 2.10 ((OLIVEIRA, 1999)). *Seja uma matriz $N = N^T$ e M uma matriz não nula, a seguinte relação é satisfeita*

$$(M - N)N^{-1}(M - N)^T > 0 \rightarrow -MN^{-1}M^T < N - M - M^T \quad (2.26)$$

3 Controle Baseado em Observadores

Este capítulo apresenta a síntese de um observador de entradas desconhecidas e controladores nebulosos. O Teorema do Valor Médio é utilizado para tratar o descasamento das incertezas associadas as variáveis-premissa não medidas pelo sistema. Além disso, o Lema de Finsler é utilizado para introduzir variáveis de folga aos projetos e o critério de custo garantido \mathcal{H}_∞ é utilizado para atenuar o efeito de perturbações externas nas estimativas do observador, bem como, nas saídas do sistema em malha fechada.

3.1 Sistema Nebuloso TS com Variáveis–Premissa Não Mensuráveis

Seja um sistema TS em tempo discreto representado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D_s d_s(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo que $A_i, B_i, i = 1, \dots, r, B_d, C$ e D_s são matrizes conhecidas, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados do sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ o sinal de controle, $d(k) \in \mathbb{R}^m$ a entrada desconhecida, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema, $d_s(k) \in \mathbb{R}^{l_s}$ é o ruído de medição, $\xi(k)$ é o vetor de variáveis-premissa, $h_i(\xi(k))$ é o vetor de funções de pertinência normalizadas e r representa o número de regras que descrevem o politopo desta representação. Nesta dissertação, as variáveis-premissa são os estados do sistema.

A expressão (3.1) pressupõe que o vetor $h_i(\xi(k))$ depende somente de variáveis-premissa mensuráveis. Caso exista alguma variável-premissa que não é medida, a representação de $h_i(\cdot)$ apresentada em (3.1) não é mais adequada. Desse modo, uma nova representação deve ser obtida a fim de indicar a dependência de variáveis-premissa desconhecidas associadas as funções de pertinência do sistema. Para tanto, (3.1) pode ser reescrito na seguinte estrutura

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\xi_\beta(k)) (A_{ij} x(k) + B_{ij} u(k)) + B_d d(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D_s d_s(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $r_\alpha = 2^{\rho_\alpha} \in \mathbb{N}$ representa a quantidade de funções dependentes das variáveis-premissa mensuráveis e $r_\beta = 2^{\rho_\beta} \in \mathbb{N}$ as desconhecidas, em que ρ_α e ρ_β indicam a quantidade de não linearidades com variáveis-premissa medidas e desconhecidas, respectivamente, associadas às funções de pertinência do sistema TS. Quando todas as variáveis-

premissa são medidas $\alpha_i(\xi_\alpha(k)) = h_i(\xi(k))$ e $\beta_j(\xi_\beta(k)) = 1$, mas quando nenhuma variável-premissa é medida $\alpha_i(\xi_\alpha(k)) = 1$ e $\beta_j(\xi_\beta(k)) = h_j(\xi(k))$.

Nesta dissertação, considerou-se C , D_s e B_d como matrizes constantes, em que B_d possui posto completo de colunas. Para simplificar a notação, a seguinte abreviação será utilizada

$$h = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\xi_\beta(k)) \quad \hat{h} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) \quad (3.3)$$

3.2 UIO Nebuloso com Variáveis–Premissa Não Mensuráveis

O UIO de ordem completa para (3.2) é representado por

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (R_{ij}z(k) + G_{ij}u(k) + L_{ij}y(k)) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + Hy(k) \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $G_{ij} = TB_{ij}$, $L_{ij} = L_{1ij} + L_{2ij}$, $z(k)$ são os estados do observador e $\hat{x}(k)$ é o vetor de estados estimados.

A dinâmica do erro de estimação definido em (2.13), é dada por

$$e_o(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1), \quad (3.5)$$

que combinando com (3.4) pode ser reescrita como

$$e_o(k+1) = x(k+1) - z(k+1) - Hy(k+1)$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} e_o(k+1) &= h(A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k) + B_d d(k)) - \hat{h}(R_{ij}z(k) + G_{ij}u(k) + L_{ij}y(k)) \\ &\quad - hH(CA_{ij}x(k) + CB_{ij}u(k) + B_d d(k) + D_s d_s(k+1)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Conforme definido em (3.4) e (2.13), sabe-se que

$$\begin{aligned} z(k) &= \hat{x}(k) - Hy(k) \\ z(k) &= x(k) - e_o(k) - Hy(k) \end{aligned}$$

e conseqüentemente, (3.6) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} e_o(k+1) &= h(A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k) + B_d d(k)) - \hat{h}(R_{ij}(x(k) - e_o(k) - Hy(k)) + G_{ij}u(k) \\ &\quad + L_{ij}y(k)) - hH(CA_{ij}x(k) + CB_{ij}u(k) + CB_d d(k) + D_s d_s(k+1)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Após realizar as devidas manipulações, (3.7) poderá ser representada por

$$\begin{aligned} e_o(k+1) &= (hA_{ij} - hHCA_{ij} - \hat{h}L_{1ij}C - \hat{h}R_{ij})x(k) + (hI - hHC - \hat{h}T)B_{ij}u(k) \\ &\quad + h(I - HC)B_d d(k) + \hat{h}R_{ij}e_o(k) + \hat{h}(R_{ij}H - L_{2ij})y(k) - \hat{h}L_{1ij}D_s d_s \\ &\quad - HD_s d_s(k+1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Idealmente, deseja-se que a dinâmica do erro dependa somente do erro de estimativa $e_o(k)$. No entanto, por (3.8), percebe-se parcelas que são afetadas por variáveis-premissa medidas e desconhecidas, o que reforça a necessidade de tratar e reduzir os efeitos de incertezas na estimativa sobre a dinâmica do erro. Para tanto, podemos utilizar as propriedades de existência do UIO para alcançar tal objetivo.

Ao analisar a parcela referente ao vetor de estados $x(k)$, deseja-se que

$$hA_{ij} - hHCA_{ij} - \hat{h}R_{ij} - \hat{h}L_{1ij}C = 0,$$

somando e subtraindo o termo $\hat{h}(A_{ij} - HCA_{ij})$, tem-se que

$$(h - \hat{h})(A_{ij} - HCA_{ij}) + \hat{h}(A_{ij} - HCA_{ij} - L_{1ij}C - R_{ij}) \approx 0,$$

porém, não será possível mitigar a influência da parcela $(h - \hat{h})(A_{ij} - HCA_{ij}) \neq 0$, pois esta parcela dependerá do erro de estimação das variáveis-premissa desconhecidas. Para que a parcela dependente de \hat{h} seja nula, a seguinte relação deve ser satisfeita

$$A_{ij} - HCA_{ij} - L_{1ij}C - R_{ij} = 0,$$

o que implica que o ganho R_{ij} do observador será dado por

$$R_{ij} = A_{ij} - HCA_{ij} - L_{1ij}C \quad (3.9)$$

O mesmo processo pode ser utilizado para a parcela associada à entrada de controle $u(k)$,

$$\begin{aligned} h(I - HC) - \hat{h}T &= 0, \\ (h - \hat{h})(I - HC) - \hat{h}(I - HC - T) &\approx 0, \end{aligned}$$

e o ganho T poderá ser obtido por

$$T = I - HC. \quad (3.10)$$

Por sua vez, percebe-se que a parcela referente a entrada desconhecida do sistema $d(k)$ dependerá somente de matrizes constantes, e, impondo

$$(I - HC)B_d = 0, \quad (3.11)$$

tem-se que o ganho H será determinado pela pseudo-inversa

$$H = B_d(CB_d)^\dagger. \quad (3.12)$$

Por último, para reduzir o efeito da parcela relativa a $y(k)$, que depende exclusivamente de \hat{h} , tem-se

$$L_{2ij} = R_{ij}H. \quad (3.13)$$

Portanto, as relações de existência do UIO são dadas por (3.9)-(3.13) e (3.8) pode ser simplificada para

$$e_o(k+1) = (h - \hat{h})(TA_{ij}x(k) + TB_{ij}u(k)) + \hat{h}(R_{ij}e_o(k) - L_{1ij}D_s d_s(k)) - HD_s d_s(k+1) \quad (3.14)$$

O vetor reduzido referente ao erro de estimação para as variáveis-premissa desconhecidas é dado por

$$e_\xi(k) = \xi_\beta(k) - \hat{\xi}_\beta(k) \quad (3.15)$$

em que $e_\xi \in \mathbb{R}^{\rho_\beta}$. Além disso, (2.13) e (3.15) estão relacionados, o que possibilita obter $e_\xi(k) = Ee_o(k)$, sendo $E \in \mathbb{R}^{\rho_\beta \times n}$ um mapeamento linear para o erro de estimação (GUERRA *et al.*, 2017).

Considerando (3.15) e o Teorema do Valor Médio apresentado no Lema 2.6, tem-se que a parcela relacionada à diferença entre variáveis-premissas medidas e estimadas para o vetor de estados $x(k)$ pode ser reescrita como

$$(h - \hat{h})TA_{ij} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (\beta_j(\xi_\beta(k)) - \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k))) TA_{ij} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \nabla \beta_j(c) e_\xi TA_{ij},$$

e de forma análoga, a parcela relativa a $u(k)$ é

$$(h - \hat{h})TB_{ij} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \nabla \beta_j(c) e_\xi TB_{ij},$$

sendo que do Lema 2.6 pode-se definir $\nabla \beta_j = \frac{\partial \beta_j(c)}{\partial \xi_\beta}$.

Note que

$$\sum_{j=1}^{r_\beta} \beta_j(\xi_\beta(k)) - \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) = 0, \quad (3.16)$$

então, matrizes de folga $Y_{\hat{h}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z_{\hat{h}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ podem ser introduzidas no projeto de observador, pois

$$\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \nabla \beta_j(c) e_\xi X^{-1} (Y_{\hat{h}} x(k) + Z_{\hat{h}} u(k)) = 0. \quad (3.17)$$

Após as devidas manipulações, (3.14) será dada por

$$\begin{aligned} e_o(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \left(\tilde{A}_{\hat{h}ij} x(k) + \tilde{B}_{\hat{h}ij} u(k) \right) \nabla \beta_j(c) E e_o(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (R_{ij} e_o(k) - L_{1ij} D_s d_s(k)) - HD_s d_s(k+1), \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo que $\tilde{A}_{\hat{h}ij} = TA_{ij} + X^{-1} Y_{\hat{h}}$ e $\tilde{B}_{\hat{h}ij} = G_{ij} + X^{-1} Z_{\hat{h}}$.

Conforme apresentado por Guerra *et al.* (2017), ao aplicar o Lema 2.6 à (3.18) tem-se que

$$\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \tilde{A}_{\hat{h}ij} x(k) \nabla \beta_j(c) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} [\tilde{A}_{\hat{h}i1} \dots \tilde{A}_{\hat{h}ir_\beta}] (I_{r_\beta} \otimes x(k)) \begin{bmatrix} \nabla \beta_1(c) \\ \vdots \\ \nabla \beta_{r_\beta}(c) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \tilde{B}_{\hat{h}ij} u(k) \nabla \beta_j(c) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} [\tilde{B}_{\hat{h}i1} \dots \tilde{B}_{\hat{h}ir_\beta}] (I_{r_\beta} \otimes u(k)) \begin{bmatrix} \nabla \beta_1(c) \\ \vdots \\ \nabla \beta_{r_\beta}(c) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que \otimes é o produto de Kronecker. Portanto, (3.18) pode ser reescrita como

$$e_o(k+1) = (N_{\hat{h}}^a \Delta_a + N_{\hat{h}}^b \Delta_b) E e_o(k) + R_{\hat{h}} e_o(k) - L_{1\hat{h}} D_s d_s(k) - H D_s d_s(k+1) \quad (3.21)$$

em que

$$N_{\hat{h}}^a = [\tilde{A}_{\hat{h}i1} \dots \tilde{A}_{\hat{h}ir_\beta}] \quad (3.22a)$$

$$N_{\hat{h}}^b = [\tilde{B}_{\hat{h}i1} \dots \tilde{B}_{\hat{h}ir_\beta}] \quad (3.22b)$$

$$\Delta_a = (I_{r_\beta} \otimes x(k)) \nabla \beta(c) = \begin{bmatrix} x(k) \nabla \beta_1(c) \\ \vdots \\ x(k) \nabla \beta_{r_\beta}(c) \end{bmatrix} \quad (3.22c)$$

$$\Delta_b = (I_{r_\beta} \otimes u(k)) \nabla \beta(c) = \begin{bmatrix} u(k) \nabla \beta_1(c) \\ \vdots \\ u(k) \nabla \beta_{r_\beta}(c) \end{bmatrix} \quad (3.22d)$$

$$\nabla \beta(c) = \begin{bmatrix} \nabla \beta_1(c) \\ \vdots \\ \nabla \beta_{r_\beta}(c) \end{bmatrix} \quad (3.22e)$$

e, finalmente, agrupando os termos

$$e_o(k+1) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \left((\bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E + T A_{ij} - L_{1ij} C) e_o(k) + \tilde{D}_{ij} \bar{d}(k) \right), \quad (3.23)$$

sendo que

$$\bar{N}_{ij} = \begin{bmatrix} N_{\hat{h}}^a & N_{\hat{h}}^b \end{bmatrix} \quad (3.24a)$$

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_a^T & \Delta_b^T \end{bmatrix}^T \quad (3.24b)$$

$$\tilde{D}_{ij} = [L_{1ij} D_s \quad H D_s] \quad (3.24c)$$

$$\bar{d}(k) = \begin{bmatrix} d_s^T(k) & d_s^T(k+1) \end{bmatrix}^T \quad (3.24d)$$

Observação 3.1. Ao assumir que a incerteza $\bar{\Delta}$ é limitada em norma, é necessário definir um limitante η adequado para o projeto, sendo que a escolha desse parâmetro influencia diretamente o conjunto de soluções admissíveis. Mais detalhes sobre sua determinação e sua relação com o espaço de soluções são apresentados em Guerra et al. (2017).

Observação 3.2. Nenhuma hipótese é feita sobre o sinal $d(k)$, que representa a perturbação na dinâmica do sistema, pois o objetivo do projeto consiste em desacoplar sua influência da dinâmica do erro de estimativa por meio da matriz H .

Observação 3.3. Conforme abordado na Seção 2.3, assume-se que $d_s(k)$ é um sinal de energia limitada.

3.3 UIO Nebuloso com Custo Garantido \mathcal{H}_∞

Como apresentado no Capítulo 2, o custo garantido \mathcal{H}_∞ para reduzir a influência de perturbações no processo de estimativa de estados do sistema pode ser expresso por

$$\sup_{\|\bar{d}(k)\|_2 \neq 0} \frac{\|e_o(k)\|_2}{\|\bar{d}(k)\|_2} \leq \gamma_o, \quad (3.25)$$

sendo γ_o um escalar positivo ($\gamma_o > 0$) e representa o nível de atenuação da perturbação. O Teorema 3.1 apresenta o projeto do UIO nebuloso com custo garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas TS discretos no tempo.

Teorema 3.1. A dinâmica do erro de estimação $e_o(k)$ apresentada em (3.23) é assintoticamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ_o se existirem matrizes $P_{ijmn} = P_{ijmn}^T > 0$, S_{ij} , Y_{ij} , Z_{ij} , $i = 1, \dots, r_\alpha$, $j = 1, \dots, r_\beta$, X e escalares $\rho \in [-1, 1]$, $\gamma_o > 0$, $\mu > 0$ e $\varphi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} He\{\rho XTA_{ij} - \rho S_{ij}C\} - P_{ij} & * & * & * & * & * \\ XTA_{ij} - S_{ij}C - \rho X^T & P_{mn} - X - X^T & * & * & * & * \\ \rho \tilde{W}_{ij}^T & \tilde{W}_{ij}^T & -\gamma_o^2 I & * & * & * \\ \rho \tilde{N}_{ij}^T X^T & \tilde{N}_{ij}^T X^T & 0 & -\mu I & * & * \\ \mu E & 0 & 0 & 0 & -\varphi I & * \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$\forall i, m = 1, \dots, r_\alpha$, $j, n = 1, \dots, r_\beta$. Neste caso o ganho de observação é dado por $L_{1ij} = X^{-1}S_{ij}$.

Demonstração. Seja uma função Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP) candidata para um sistema discreto Takagi-Sugeno dada por

$$V(k) = e_o^T(k) \left(\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) P_{ij} \right) e_o(k), \quad (3.26)$$

em que $P_{ij} = P_{ij}^T > 0$. A primeira diferença é dada por

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0, \quad (3.27)$$

e considerando (3.26) tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= e_o^T(k+1) \left(\sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_m(\xi_\alpha(k+1)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k+1)) P_{mn} \right) e_o(k+1) \\ &\quad - e_o^T(k) \left(\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) P_{ij} \right) e_o(k) < 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

para simplificar o desenvolvimento e apresentação dos resultados, os somatórios serão omitidos. Retomando a definição do BRL apresentada no Capítulo 2, tem-se para o sistema (3.23) a seguinte representação

$$\Delta V(k) + e_o^T(k) e_o(k) - \gamma_o^2 \bar{d}^T(k) \bar{d}^T(k) \leq 0. \quad (3.29)$$

que pode ser colocado na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} e_o^T(k) & e_o^T(k+1) & \bar{d}^T(k) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -P_{ij} + I & 0 & 0 \\ 0 & P_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_o^2 I \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e_o(k) \\ e_o(k+1) \\ \bar{d}^T(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

Aplicando o Lema 2.8 com

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E + T A_{ij} - L_{1ij} C) & -I & \tilde{D}_{ij} \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} e(k) \\ e(k+1) \\ \bar{d}(k) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.31)$$

a introdução de variáveis de folga é realizada por meio da condição (iv) do Lema 2.8, o que possibilita escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{X} B + B^T \mathcal{X}^T &= \begin{bmatrix} \rho X \\ X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E + T A_{ij} - L_{1ij} C) & -I & \tilde{D}_{ij} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T + A_{ij}^T T^T - C^T L_{1ij}^T) \\ -I \\ \tilde{D}_{ij}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho X^T & X^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dado (3.32), é possível considerar (3.30) e (3.31) em (i) do Lema 2.8, que equivale à condição (iv) dada por

$$\begin{bmatrix} He\{\rho X \bar{N} \bar{\Delta} E + \rho X (T A_{ij} - L_{1ij} C)\} - P_{ij} + I & * & * \\ X \bar{N} \bar{\Delta} E + X (T A_{ij} - L_{1ij} C) - \rho X^T & P_{mn} - X - X^T & * \\ \rho \tilde{D}_{ij}^T X^T & \tilde{D}_{ij}^T X^T & -\gamma_o^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.33)$$

Para converter (3.33) em uma LMI, é necessário realizar um processo de linearização, pois X e L_{1ij} são matrizes desconhecidas e a incerteza $\bar{\Delta}$ deve ser adequadamente tratada. Desta forma, tomando $S_{ij} = XL_{1ij}$, implica que

$$\begin{bmatrix} He\{\rho XTA_{ij} - \rho S_{ij}C\} - P_{ij} + I & * & * \\ XTA_{ij} - S_{ij}C - \rho X^T & P_{mn} - X - X^T & * \\ \rho \tilde{D}_{ij}^T X^T & \tilde{D}_{ij}^T X^T & -\gamma_o^2 I \end{bmatrix} + \Theta_o < 0. \quad (3.34)$$

sendo a matriz Θ_o definida por

$$\Theta_o = \begin{bmatrix} \rho X \bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E + \rho E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T X^T & E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 \\ X \bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para tratar a incerteza $\bar{\Delta}$, aplicam-se o Lema 2.9 e considerada-se a seguinte escolha $\bar{\Delta}^T \bar{\Delta} \leq \eta^2 I$ para majoração, conforme apresentado em Guerra *et al.* (2017), o que resulta em

$$\mathcal{M} = [\bar{\Delta} E \quad 0 \quad 0] \quad (3.35a)$$

$$\mathcal{W} = [\rho \bar{N}_{ij}^T X^T \quad \bar{N}_{ij}^T X^T \quad 0], \quad (3.35b)$$

desse modo,

$$\Theta_o = \mathcal{M}^T \mathcal{W} + \mathcal{W}^T \mathcal{M} \leq \mu \begin{bmatrix} E^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\Delta}^T \bar{\Delta} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^{-1} \begin{bmatrix} \rho X \bar{N}_{ij} \\ X \bar{N}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

e, finalmente, obtêm-se que

$$\Theta_o = \mu \begin{bmatrix} E^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \eta^2 I \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu^{-1} \begin{bmatrix} \rho X \bar{N}_{ij} \\ X \bar{N}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Após algumas manipulações, obtêm-se aplicando Complementos de Schur a condição LMI para o projeto do UIO nebuloso TS

$$\begin{bmatrix} He\{\rho XTA_{ij} - \rho S_{ij}C\} - P_{ij} & * & * & * & * & * \\ XTA_{ij} - S_{ij}C - \rho X^T & P_{mn} - X - X^T & * & * & * & * \\ \rho \tilde{W}_{ij}^T & \tilde{W}_{ij}^T & -\gamma_o^2 I & * & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & -\mu I & * & * \\ \mu E & 0 & 0 & 0 & -\varphi I & * \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.38)$$

em que $\varphi = \mu/\eta^2$, $S_{ij} = XL_{1ij}$, $\tilde{W}_{ij} = [-S_{ij}D_s \quad -XHD_s]$, $\bar{N}_{ij} = [N_{\hat{h}}^a \quad N_{\hat{h}}^b]$, sendo que $N_{\hat{h}}^a = [\tilde{A}_{\hat{h}i1} \quad \dots \quad \tilde{A}_{\hat{h}ir_\beta}]$ e $N_{\hat{h}}^b = [\tilde{B}_{\hat{h}i1} \quad \dots \quad \tilde{B}_{\hat{h}ir_\beta}]$ com $\tilde{A}_{\hat{h}ij} = TA_{ij} + X^{-1}Y_{\hat{h}}$ e $\tilde{B}_{\hat{h}ij} = G_{ij} + X^{-1}Z_{\hat{h}}$. \square

Observação 3.4. A utilização da condição quadrática, com o objetivo de determinar uma única matriz P válida para todo o polítopo convexo, não resultou em soluções factíveis para o projeto. Dessa forma, utilizou-se a condição não quadrática, a fim de reduzir o conservadorismo e, conseqüentemente, possibilitar encontrar soluções factíveis.

3.4 Controlador PDC com Custo Garantido \mathcal{H}_∞

Tomando o sistema (3.2) e somando e subtraindo o termo $\hat{h}(A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k))$, de forma similar ao que foi feito para o problema de observação, tem-se que a dinâmica do sistema pode ser representada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (\beta_j(\xi_\beta(k)) - \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k))) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) + B_d d(k), \end{aligned} \quad (3.39)$$

que ao utilizar a definição estabelecida em (3.15), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) \nabla \beta_j(c) E e_o(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) + B_d d(k), \end{aligned} \quad (3.40)$$

incluindo variáveis de folga por meio de (3.17), tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) ((A_{ij} + X^{-1}Y_{\hat{h}})x(k) + (B_{ij} + X^{-1}Z_{\hat{h}})u(k)) \nabla \beta_j(c) E e_o(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) + B_d d(k), \end{aligned} \quad (3.41)$$

e o processo análogo apresentado em (3.19) e (3.20) pode ser aplicado ao sistema (3.41), o que resulta em

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta}) E e_o(k) + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) \\ &\quad + B_d d(k). \end{aligned} \quad (3.42)$$

A lei de controle PDC baseada nos estados estimados possui a estrutura

$$u(k) = \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) K_{mn} \hat{x}(k) \quad (3.43)$$

com $\hat{x}(k)$ dado por (2.13) e estabelece que a lei de controle dependerá diretamente do erro de estimação dos estados.

Ao substituir a lei de controle (3.43) a dinâmica do sistema (3.42), tem-se o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta}) E e_o(k) + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (A_{ij} x(k) \\ & + B_{ij} (\sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) (K_{mn} x(k) - K_{mn} e_o(k))) + B_d d(k), \end{aligned} \quad (3.44)$$

e, finalmente, a seguinte representação

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) ((A_{ij} + B_{ij} K_{mn}) x(k) \\ & + (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E - B_{ij} K_{mn}) e_o(k)) + B_d d(k). \end{aligned} \quad (3.45)$$

O Teorema 3.2 apresenta o projeto do controlador PDC com custo garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas TS discretos no tempo.

Teorema 3.2. *O sistema em malha fechada (3.45) é assintoticamente estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ_c se existirem matrizes $W_{ij} = W_{ij}^T > 0$, S_{mn} , Υ , $i = 1, \dots, r_\alpha$, $j = 1, \dots, r_\beta$ e escalares $\rho \in [-1, 1]$, $\gamma_c > 0$, $\eta_o > 0$, $\mu > 0$ e $\varphi > 0$ tais que*

$$Q_{ijmnpq} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 - W_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ A_{ij} \Upsilon + B_{ij} S_{mn} - \rho \Upsilon^T & W_{pq}^+ - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * & * & * \\ \rho F_c^T & F_c^T & -\gamma_c^2 I & * & * & * & * \\ -\rho S_{mn}^T B_{ij}^T & -S_{mn}^T B_{ij}^T & 0 & -\bar{\eta}_o^2 I - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * \\ C \Upsilon & 0 & G_c & 0 & -I & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T & \bar{N}_{ij}^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu E \Upsilon & 0 & 0 & -\varphi I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.46)$$

Dado que,

$$Q_{ijjppq} < 0, \quad \forall i, p = 1, \dots, r_\alpha, j, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.47a)$$

$$Q_{ijmnpq} + Q_{mnijpq} < 0, \quad \forall 1 \leq i < m \leq r_\alpha, 1 \leq j < n \leq r_\beta, p = 1, \dots, r_\alpha, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.47b)$$

em que $\Lambda_1 = \rho A_{ij} \Upsilon + \rho B_{ij} S_{mn} + \rho \Upsilon^T A_{ij}^T + \rho \Upsilon^T S_{mn}^T B_{ij}^T$ e neste caso o ganho de controle é dado por $K_{mn} = \Upsilon^{-1} S_{mn}$.

Demonstração. Para o critério robusto de custo garantido, a saída do sistema $y(k)$ será considerada como saída de desempenho reescrita como

$$\vartheta(k) = Cx(k) + G_c \omega(k), \quad (3.48)$$

em que $G_c = [0 \ D_s]$ e $\omega(k) = [d^T(k) \ d_s^T k]^T$. Dessa forma, (3.45) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) ((A_{ij} + B_{ij}K_{mn})x(k) \\ & + (\bar{N}_{ij}\bar{\Delta}E - B_{ij}K_{mn})e_o(k) + F_c\omega(k)), \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que $F_c = [B_d \ 0]$.

Pelo Teorema de Lyapunov para uma função candidata, sabe-se que

$$V(k) = x^T(k) \left(\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) P_{ij} \right) x(k) > 0 \quad (3.50)$$

sendo $P_{ij} = P_{ij}^T > 0$. Para sistemas discretos, a variação no tempo é dada por

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & x^T(k+1) \left(\sum_{p=1}^{r_\alpha} \sum_{q=1}^{r_\beta} \alpha_p(\xi_\alpha(k+1)) \beta_q(\hat{\xi}_\beta(k+1)) P_{pq} \right) x(k+1) \\ & - x^T(k) \left(\sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) P_{ij} \right) x(k) < 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para simplificar a leitura, os somatórios serão omitidos a partir desta etapa para o projeto do controlador.

Tomando uma condição similar ao BRL, podemos escrever

$$\Delta V(k) + \vartheta^T(k)\vartheta(k) - \gamma_c^2 \omega^T(k)\omega(k) - \eta_o^2 e_o^T(k)e_o(k), \quad (3.52)$$

cuja representação matricial é

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \omega(k) \\ e_o(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_{ij} + C^T C & 0 & C^T G_c & 0 \\ 0 & P_{pq} & 0 & 0 \\ G_c^T C & 0 & -\gamma_c^2 I + G_c^T G_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_o^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \omega(k) \\ e_o(k) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.53)$$

Por meio do Lema 2.8, tomando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (A_{ij} + B_{ij}K_{mn}) & -I & F_c & (\bar{N}_{ij}\bar{\Delta}E - B_{ij}K_{mn}) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \omega(k) \\ e_o(k) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.54)$$

pode-se introduzir variáveis de folga de maneira análoga ao realizado para o problema de síntese do observador. Assim, (3.52) pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} He\{\rho X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn})\} - P_{ij} & * & * & * & * \\ X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn}) - \rho X^T & P_{pq} - X - X^T & * & * & * \\ \rho F_c^T X^T & F_c^T X^T & -\gamma_c^2 I & * & * \\ \rho (E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T - K_{mn}^T B_{ij}^T) X^T & (E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T - K_{mn}^T B_{ij}^T) X^T & 0 & -\eta_o^2 I & * \\ C & 0 & G_c & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

Assim como realizado no projeto do observador, aplicando o Lema 2.9 para tratar o termo $\bar{N}_{ij}\bar{\Delta}E$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} He\{\rho X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn})\} - P_{ij} & * & * & * & * \\ X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn}) - \rho X^T & P_{pq} - X - X^T & * & * & * \\ \rho F_c^T X^T & F_c^T X^T & -\gamma_c^2 I & * & * \\ -\rho K_{mn}^T B_{ij}^T X^T & -K_{mn}^T B_{ij}^T X^T & 0 & -\eta_o^2 I & * \\ C & 0 & G_c & 0 & -I \end{bmatrix} + \Theta_c < 0, \quad (3.56)$$

sendo a matriz Θ_c definida por

$$\Theta_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho X \bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T X^T & E^T \bar{\Delta}^T \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e escolhe-se novamente $\bar{\Delta}^T \bar{\Delta} \leq \eta^2 I$ considerando que

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta} E & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57a)$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.57b)$$

resulta em

$$\Theta_c = \mathcal{M}^T \mathcal{W} + \mathcal{W}^T \mathcal{M} \leq \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E^T \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\Delta}^T \bar{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E & 0 \end{bmatrix} + \mu^{-1} \begin{bmatrix} \rho X \bar{N}_{ij} \\ X \bar{N}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

e, finalmente, obtêm-se que

$$\Theta_c = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E^T \\ 0 \end{bmatrix} \eta^2 I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E & 0 \end{bmatrix} + \mu^{-1} \begin{bmatrix} \rho X \bar{N}_{ij} \\ X \bar{N}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

após manipulações e por meio de Complemento de Schur à (3.56), tem-se que

$$\begin{bmatrix} He\{\rho X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn})\} - P_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ X(A_{ij} + B_{ij}K_{mn}) - \rho X^T & P_{pq} - X - X^T & * & * & * & * & * \\ \rho F_c^T X^T & F_c^T X^T & -\gamma_c^2 I & * & * & * & * \\ -\rho K_{mn}^T B_{ij}^T X^T & -K_{mn}^T B_{ij}^T X^T & 0 & -\eta_o^2 I & * & * & * \\ C & 0 & G_c & 0 & -I & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T X^T & \bar{N}_{ij}^T X^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu E & 0 & 0 & -\varphi I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.60)$$

Aplicando transformação de congruência à (3.60) com

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

utilizando o Lema 2.10 e realizando as linearizações devidas, tem-se

$$Q_{ijmnpq} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 - W_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ A_{ij}\Upsilon + B_{ij}S_{mn} - \rho\Upsilon^T & W_{pq}^+ - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * & * & * \\ \rho F_c^T & F_c^T & -\gamma_c^2 I & * & * & * & * \\ -\rho S_{mn}^T B_{ij}^T & -S_{mn}^T B_{ij}^T & 0 & -\bar{\eta}_o^2 I - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * \\ C\Upsilon & 0 & G_c & 0 & -I & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T & \bar{N}_{ij}^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu E\Upsilon & 0 & 0 & -\varphi I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.62)$$

em $\Upsilon = X^{-T}$, $W_{ij} = \Upsilon^T P_{ij} \Upsilon$, $W_{pq}^+ = \Upsilon^T P_{pq} \Upsilon$, $S_{mn} = K_{mn} \Upsilon$, $\Lambda_1 = \rho A_{ij} \Upsilon + \rho B_{ij} S_{mn} + \rho \Upsilon^T A_{ij}^T + \rho \Upsilon^T S_{mn}^T B_{ij}^T$, $\varphi = \mu/\eta^2$, $\bar{\eta}_o = 1/\eta_o$ e W_{pq}^+ representa a abreviação de $W_{pq}(k+1)$.

Ao considerar o somatório quádruplo *fuzzy* para (3.49), a condição de síntese do controlador PDC será

$$Q_{ijijpq} < 0, \quad \forall i, p = 1, \dots, r_\alpha, j, q = 1, \dots, r_\beta \quad (3.63a)$$

$$Q_{ijmnpq} + Q_{mniijpq} < 0, \quad \forall 1 \leq i < m \leq r_\alpha, 1 \leq j < n \leq r_\beta, p = 1, \dots, r_\alpha, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.63b)$$

□

Ao considerar o sistema aumentado composto pelas dinâmicas do observador em (3.23) e o do sistema em malha fechada em (3.45), verifica-se que

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e_o(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{ij} + B_{ij}K_{mn}) & (\bar{N}_{ij}\bar{\Delta}E - B_{ij}K_{mn}) \\ 0 & (\bar{N}_{ij}\bar{\Delta}E + TA_{ij} - L_{1ij}C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e_o(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ \bar{d}(k) \end{bmatrix},$$

dessa forma, nota-se que o Princípio da Separação (CHEN, 1999; TANAKA; WANG, 2001) é respeitado, o que permite projetar observador e controlador separadamente.

3.5 Seguimento de Referência em Degrau

Para o controle com seguimento de referência em degrau, foi acrescentado um integrador ao controlador PDC. Desse modo, considere (3.2) reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\xi_\beta(k)) (A_{ij}x(k) + B_{ij}u(k)) + F_c \omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + G_c \omega(k) \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que $F_c = [B_d \ 0]$, $G_c = [0 \ D_s]$ e matrizes constantes B_d , C e D_s .

Para sistemas em tempo discreto, o erro de integração com relação a referência $r(k)$ é dado por

$$e_{ci}(k) = \sum_{\ell=0}^k e_c(\ell) \quad (3.65a)$$

$$e_c(k) = r(k) - y(k) \quad (3.65b)$$

em que $e_{ci}(k)$ é o erro integral, $e_c(k)$ é o erro atual, $y(k)$ é a saída controlada e $r(k)$ é a referência desejada. Ao considerar o erro de estimativa do UIO dado por (2.13), o sinal de controle para o sistema com integrador é representado por

$$u(k) = \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) K_{mn} \hat{x}(k) + M_{mn} e_{ci}(k), \quad (3.66)$$

em que M_{mn} representa sua matriz de ganhos do integrador.

Desse modo, (3.64) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\xi_\beta(k)) [\bar{A}_{ij} \bar{x}(k) + \bar{B}_{ij} u(k)] + H_c \bar{\omega}(k) \\ y(k) &= \bar{C} \bar{x}(k) + T_c \bar{\omega}(k), \end{aligned} \quad (3.67)$$

sendo que

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ e_{ci}(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}(k) = \begin{bmatrix} \omega(k) \\ r(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_c = \begin{bmatrix} F_c & 0 \\ -G_c & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [-C \ \lambda I], \quad T_c = [-G_c \ I]$$

O Teorema 3.3 apresenta o projeto do controlador para seguimento de referência em degrau com custo garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas TS discretos no tempo.

Teorema 3.3. *O sistema em malha fechada com integrador (3.67) é estável para seguimento de referência em degrau com custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ_c se existirem matrizes $W_{ij} = W_{ij}^T > 0$, S_{mn} , U_{mn} , Υ , $i = 1, \dots, r_\alpha$, $j = 1, \dots, r_\beta$ e escalares $\rho \in [-1, 1]$, $\gamma_c > 0$, $\eta_o > 0$, $\mu > 0$ e $\varphi > 0$ tais que*

$$Q_{ijmnpq} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 - W_{ij} & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{A}_{ij}\Upsilon + \bar{B}_{ij}S_{mn} - \rho\Upsilon^T & W_{pq}^+ - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * & * & * & * \\ \rho H_c^T & H_c^T & -\gamma_c^2 I & * & * & * & * & * \\ -\rho U_{mn}^T \bar{B}_{ij}^T & -U_{mn}^T \bar{B}_{ij}^T & 0 & -\bar{\eta}_o^2 I - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * & * \\ \bar{C}\Upsilon & 0 & T_c & 0 & -I & * & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T & \bar{N}_{ij}^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu E \Upsilon & 0 & 0 & -\varphi I & * \end{bmatrix} < 0, \quad (3.68)$$

Dado que,

$$Q_{ijijpq} < 0, \quad \forall i, p = 1, \dots, r_\alpha, j, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.69a)$$

$$Q_{ijmnpq} + Q_{mniqpj} < 0, \quad \forall 1 \leq i < m \leq r_\alpha, 1 \leq j < n \leq r_\beta, p = 1, \dots, r_\alpha, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.69b)$$

em que $\Lambda_1 = \rho \bar{A}_{ij} \Upsilon + \rho \bar{B}_{ij} \bar{K}_{mn} + \rho \Upsilon^T A_{ij}^T + \rho \Upsilon^T \bar{K}_{mn}^T B_{ij}^T$ e neste caso o ganho de controle é dado por $\bar{K}_{mn} = \Upsilon^{-1} S_{mn}$.

Demonstração. Realizando as mesmas manipulações apresentadas no projetos do UIO e PDC para descasamento da pertinência, inclusão de variáveis de folga e aplicação do Teorema do Valor Médio, é obtida a seguinte representação da dinâmica do sistema TS com integrador

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta}) E e_o(k) + \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) (\bar{A}_{ij} \bar{x}(k) + \bar{B}_{ij} u(k)) \\ &+ H_c \bar{\omega}(k) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ao colocar o erro de estimativa $e_o(k)$ em evidência, (3.66) pode ser reescrito como

$$u(k) = \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) (\bar{K}_{mn} \bar{x}(k) - K_{mn} e_o(k)), \quad (3.71)$$

em que $\bar{K}_{mn} = [K_{mn} \quad M_{mn}]$, o que permite representar o sistema em malha fechada como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} \sum_{m=1}^{r_\alpha} \sum_{n=1}^{r_\beta} \alpha_i(\xi_\alpha(k)) \beta_j(\hat{\xi}_\beta(k)) \alpha_m(\xi_\alpha(k)) \beta_n(\hat{\xi}_\beta(k)) \left((\bar{A}_{ij} + \bar{B}_{ij} \bar{K}_{mn}) \bar{x}(k) \right. \\ &+ \left. (\bar{N}_{ij} \bar{\Delta} E - \bar{B}_{ij} K_{mn}) e_o(k) \right) + H_c \bar{\omega}(k). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Como considerado na seção anterior para o projeto do PDC, tomando uma condição similar ao BRL, podemos escrever

$$\Delta V(k) + y^T(k) y^T(k) - \gamma_c^2 \bar{\omega}^T(k) \bar{\omega}(k) - \eta_o^2 e_o^T(k) e_o(k) < 0. \quad (3.73)$$

Ao implementar o Lema 2.8, escolher $\bar{\Delta}^T \bar{\Delta} \leq \eta^2 I$, aplicar a transformação de Congruência e realizar as devidas manipulações como apresentado no projeto do PDC, a seguinte LMI é obtida

$$Q_{ijmnpq} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 - W_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ \bar{A}_{ij}\Upsilon + \bar{B}_{ij}S_{mn} - \rho\Upsilon^T & W_{pq}^+ - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * & * & * \\ \rho H_c^T & H_c^T & -\gamma_c^2 I & * & * & * & * \\ -\rho U_{mn}^T \bar{B}_{ij}^T & -U_{mn}^T \bar{B}_{ij}^T & 0 & -\bar{\eta}_o^2 I - \Upsilon - \Upsilon^T & * & * & * \\ \bar{C}\Upsilon & 0 & T_c & 0 & -I & * & * \\ \rho \bar{N}_{ij}^T & \bar{N}_{ij}^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu E \Upsilon & 0 & 0 & -\varphi I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.74)$$

em que $\Upsilon = X^{-T}$, $W_{ij} = \Upsilon^T P_{ij} \Upsilon$, $W_{pq}^+ = \Upsilon^T P_{pq} \Upsilon$, $S_{mn} = \bar{K}_{mn} \Upsilon$, $\Lambda_1 = \rho \bar{A}_{ij} \Upsilon + \rho \bar{B}_{ij} \bar{K}_{mn} + \rho \Upsilon^T A_{ij}^T + \rho \Upsilon^T \bar{K}_{mn}^T B_{ij}^T$, $\varphi = \mu/\eta^2$, $\bar{\eta}_o = 1/\eta_o$.

Ao considerar o somatório quádruplo *fuzzy* para (3.72), a condição de síntese do controlador PDC com integrador será

$$Q_{ijijpq} < 0, \quad \forall i, p = 1, \dots, r_\alpha, j, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.75a)$$

$$Q_{ijmnpq} + Q_{mnijsq} < 0, \quad \forall 1 \leq i < m \leq r_\alpha, 1 \leq j < n \leq r_\beta, p = 1, \dots, r_\alpha, q = 1, \dots, r_\beta, \quad (3.75b)$$

□

4 Controle do Sistema de Rotor Duplo

Este capítulo apresenta o controle baseado em observador UIO nebuloso para um sistema de rotor duplo de múltiplas entradas e saídas (do inglês, *Twin Rotor MIMO System* – TRMS). Para tanto, é apresentado o modelo nebuloso TS do sistema, os projetos do observador e controladores, bem como, resultados de simulação para condições iniciais não nulas e seguimento de referência em degrau.

4.1 Descrição do Problema

O TRMS é um sistema composto por uma estrutura fixada em uma base que pode se movimentar livremente nos planos vertical e horizontal, denominados ângulos de arfagem (ψ) e guinada (ϕ), respectivamente. Para que esta movimentação seja possível, o sistema é composto por dois rotores, que são constituídos por dois motores de corrente contínua (CC) que acionam as hélices. Desse modo, o TRMS é um sistema com dois graus de liberdade (2-DOF).

Os rotores são denominados rotor principal e rotor de cauda, com a função de determinar a força propulsora do sistema em cada direção. O braço que conecta fisicamente os rotores possui um contrapeso fixado em seu centro e as pás dos rotores possuem ângulos fixos. A Figura 1 apresenta o sistema em estudo.



Figura 1 – Twin Rotor MIMO System - TRMS

Fonte: Adaptado de Feedback Instruments Ltd. (2006).

Devido ao acoplamento entre os rotores, o sistema apresentado na Figura 1 possui comportamento não linear em sua dinâmica, e o torna desafiador para controle. De acordo com as informações apresentadas no manual técnico do fabricante *Feedback Instruments Ltd.* 2006, o modelo não linear do TRMS pode ser obtido com base em sua dinâmica eletromecânica. As equações que determinam a dinâmica do rotor principal com

relação ao eixo vertical são

$$I_1 \ddot{\psi} = M_1 - M_{FG} - M_{B\psi} - M_G, \quad (4.1a)$$

$$M_1 = a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1, \quad (4.1b)$$

$$M_{FG} = M_G \sin(\psi), \quad (4.1c)$$

$$M_{FG} = B_{1\psi} \dot{\psi} + B_{2\psi} \text{sign}(\dot{\psi}), \quad (4.1d)$$

$$M_G = K_{gy} M_1 \dot{\phi} \cos(\psi), \quad (4.1e)$$

sendo I_1 é o momento de inércia do rotor principal, M_1 o comportamento não linear estático, M_{FG} o torque gravitacional, $M_{B\psi}$ o torque referente às forças de atrito, M_G o torque do giroscópio. O torque referente ao motor CC do rotor principal é dado por

$$\tau_1 = \frac{k_1}{T_{11}s + T_{10}} u_1(t) \quad (4.2)$$

Por sua vez, as equações que determinam a dinâmica do rotor de cauda com relação ao eixo horizontal podem ser representadas por

$$I_2 \ddot{\phi} = M_2 - M_{B\phi} - M_R, \quad (4.3a)$$

$$M_2 = B_{1\phi} \dot{\phi} + B_{2\phi} \text{sign}(\dot{\phi}) \quad (4.3b)$$

$$M_R = \frac{k_c(T_0s + 1)}{(T_p s + 1)} \tau_1 \quad (4.3c)$$

sendo I_2 é o momento de inércia do rotor de cauda, M_2 o comportamento não linear estático, M_R o torque referente ao acoplamento e o torque referente ao motor CC do rotor de cauda é dado por

$$\tau_2 = \frac{k_2}{T_{21}s + T_{20}} u_2(t). \quad (4.4)$$

Informações detalhadas sobre a modelagem e especificações técnicas do sistema podem ser encontradas no manual técnico do fabricante *Feedback Instruments Ltd.* 2006.

Com base nos modelos de dinâmica elétrica e mecânica do TRMS, a representação em espaço de estados para modelo não linear da planta é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{I_1} ((1 - K_{gy} x_4(t) \cos(x_1(t)))(a_1 + b_1)x_5(t) - M_g \sin(x_1(t)) - B_{1\psi} x_2(t) - B_{2\psi} \tanh(\mathbf{c}x_2(t))) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{I_2} ((a_2 + b_2)x_6(t) - B_{1\phi} x_2(t) - B_{2\phi} \tanh(\mathbf{c}x_4(t)) - b_f x_5(t)) \\ \dot{x}_5(t) &= \frac{1}{T_{11}} (k_1 u_1(t) - T_{10} x_5(t)) \\ \dot{x}_6(t) &= \frac{1}{T_{21}} (k_2 u_2(t) - T_{20} x_6(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo $x_1(t)$ o ângulo de arfagem, $x_2(t)$ a velocidade angular da arfagem, $x_3(t)$ o ângulo de guinada, $x_4(t)$ a velocidade angular da guinada, $x_5(t)$ o torque do rotor principal e $x_6(t)$, o torque do rotor de cauda.

Ao analisar (4.1d) e (4.3b), nota-se a existência de uma função $\text{sign}(\cdot)$, que possui limites estabelecidos para o intervalo $[-1, 1]$, mas descontínua em $x = 0$. Dessa forma, para tratar este problema de descontinuidade, a alternativa é utilizar outra função de classe \mathcal{C}^1 , com comportamento suave para derivada contínua. Portanto, a função $\text{sign}(\cdot)$ é aproximada por $\tanh(\cdot)$.

A Tabela 1 apresenta os intervalos de operação para cada estado

Tabela 1 – Intervalo de operação do TRMS

Estado	Intervalo
$x_1(t)$	$[-\pi/3 \quad \pi/3]$
$x_2(t)$	$[-3 \quad 3]$
$x_3(t)$	$[-\pi \quad \pi]$
$x_4(t)$	$[-3 \quad 3]$
$x_5(t)$	$[0 \quad 2]$
$x_6(t)$	$[0 \quad 1]$

e a Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados na simulação do sistema não linear.

Tabela 2 – Parâmetros técnicos do TRMS

Parâmetro	Descrição	Valor
I_1	Momento de inércia no eixo vertical	$6,8 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
I_2	Momento de inércia no eixo horizontal	$2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
a_1	Parâmetro de característica estática	0,0135
b_1	Parâmetro de característica estática	0,0924
a_2	Parâmetro de característica estática	0,02
b_2	Parâmetro de característica estática	0,09
M_G	Torque gravitacional	$0,32 \text{ N} \cdot \text{m}$
$B_{1\psi}$	Parâmetro do torque de atrito	$6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
$B_{2\psi}$	Parâmetro do torque de atrito	$1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$
$B_{1\phi}$	Parâmetro do torque de atrito	$1 \times 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
$B_{2\phi}$	Parâmetro do torque de atrito	$1 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$
K_{gy}	Constante do torque do giroscópio	$0,05 \text{ s}/\text{rad}$
k_1	Ganho do Motor CC do rotor principal	8,5
k_2	Ganho do Motor CC do rotor de cauda	6,5
T_{11}	Parâmetro do denominador do motor CC do rotor principal	1,1
T_{10}	Parâmetro do denominador do motor CC do rotor principal	1
T_{21}	Parâmetro do denominador do motor CC do rotor cauda	1
T_{20}	Parâmetro do denominador do motor CC do rotor cauda	1
T_p	Ganho do acoplamento cruzado	2
T_0	Ganho do acoplamento cruzado	3,5
k_c	Ganho do torque do acoplamento cruzado	-0,2
b_f	Coefficiente de atrito viscoso	$11,5 \times 10^{-3}$

Para as simulações considerou-se os ganhos de atuador k_1 e k_2 apresentados nos trabalhos de Nejari *et al.* (2011), Rotondo *et al.* (2013), Tastemirov *et al.* (2017), pois indicam os ganhos das especificações técnicas do fabricante dos motores CC do rotor principal e rotor de cauda. Além disso, para o coeficiente de atrito viscoso utilizou-se o valor apresentado no trabalho de Galindo (2017).

Desta forma, o sistema em tempo contínuo pode representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_d(t)d(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D_s(t)d_s(t)\end{aligned}\quad (4.6)$$

em que $A(t)$, $B(t)$, $B_d(t)$, $C(t)$ e $D_s(t)$ são matrizes conhecidas com dimensões apropriadas.

4.2 Modelo Takagi–Sugeno do Sistema de Rotor Duplo

Para fins de validação dos projetos de observador e de controlador apresentados no Capítulo 3, será considerado que somente os estados $x_1(t)$ e $x_3(t)$ são medidos pelo sistema. Com base nesta suposição, obtêm-se a representação TS para o TRMS baseado em suas não linearidades.

As matrizes da dinâmica do sistema, entrada de controle, entrada desconhecida, saída e ruído de medição são dadas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(M_g/I_1)z_{1\alpha} & -(B_{1\psi} + B_{2\psi}z_{2\beta})/I_1 & 0 & 0 & (1 - K_{gy}z_{3\beta})(a_1x_5 + b_1)/I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -B_{1\varphi}/I_2 & 0 & -B_{2\varphi}z_{4\beta}/I_2 & -b_f/I_2 & a_2x_6/I_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{10}/I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{20}/I_2 \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1/T_{11} & 0 \\ 0 & k_2/T_{21} \end{bmatrix}, \quad B_d(t) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,01 \\ 0,1 & 0,02 \\ 0,03 & 0,5 \\ 0,01 & 0,2 \\ k_1/T_{11} & 0,01 \\ 0,01 & k_2/T_{21} \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s(t) = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix},$$

e com base em (4.5) percebe-se que existem 4 não linearidades no sistema, indicando que o sistema não linear será representado por 16 vértices. A matriz de entradas desconhecidas $B_d(t)$ foi escolhida de modo que a magnitude de seus elementos seja compatível com a das demais matrizes do modelo. Dessa forma, as não linearidades do sistema são representadas por

$$\begin{aligned}z_{1\alpha} &= \frac{\sin(x_1)}{x_1}, & z_{3\beta} &= x_4 \cos(x_1), \\ z_{2\beta} &= \frac{\tanh(\mathbf{c}x_2)}{x_2}, & z_{4\beta} &= \frac{\tanh(\mathbf{c}x_4)}{x_4}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

sendo x_1 medido e x_2 e x_4 integram o grupo de variáveis-premissa desconhecidas, o que resulta em $r_\alpha = 2$ e $r_\beta = 8$. Por meio dos intervalos de operação apresentados na Tabela 1

e das não linearidades, as funções de pertinência com os respectivos limitantes são obtidas para representar o sistema TS, as quais são apresentadas na sequência.

$$\begin{cases} a_1^1 = \max(z_{1\alpha}) = 1 & a_1^2 = \min(z_{1\alpha}) \approx 0,8269 \\ w_1^1 = \frac{z_{1\alpha} - a_1^2}{a_1^1 - a_1^2} & w_1^2 = 1 - w_1^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 = \max(z_{2\beta}) = 1 & a_2^2 = \min(z_{2\beta}) \approx 0,3333 \\ w_1^2 = \frac{z_{2\beta} - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} & w_2^2 = 1 - w_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^3 = \max(z_{3\beta}) = 3 & a_2^3 = \min(z_{3\beta}) = -3 \\ w_1^3 = \frac{z_{3\beta} - a_2^3}{a_1^3 - a_2^3} & w_2^3 = 1 - w_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^4 = \max(z_{4\beta}) = 1 & a_2^4 = \min(z_{4\beta}) \approx 0,3333 \\ w_1^4 = \frac{z_{4\beta} - a_2^4}{a_1^4 - a_2^4} & w_2^4 = 1 - w_1^4 \end{cases}$$

Conforme estabelecido pelo Lema 2.7, ao considerar que somente x_1 e x_3 são medidos, tem-se que

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que possui a estrutura indicada, visto que a não linearidade $z_{3\beta}$ é formada pelo produto entre a variável-premissa medida x_1 e a variável-premissa desconhecida x_4 .

Para aplicar as metodologias propostas no Capítulo 3, utilizou-se uma aproximação de primeira ordem de Euler para obter um modelo discretizado para o sistema, utilizando um tempo de amostragem $T_s = 0,01$ s. As matrizes do sistema discretizado são dadas por

$$A = I + T_s A(t), \quad (4.8a)$$

$$B = T_s B(t), \quad (4.8b)$$

$$B_d = T_s B_d(t), \quad (4.8c)$$

e as demais matrizes permanecem inalteradas.

As perturbações externas $d(k)$ que afetam a dinâmica do sistema foram modeladas por meio de uma soma de senoides em harmônicas diferentes e com defasagem,

de forma a representar rajadas de vento ou turbulências. Dessa forma, $d(k)$ é dado por

$$d(k) = 0,05 \sin(\omega_d k) + 0,035 \sin(3\omega_d k + \pi/2) + 0,02 \sin(5\omega_d k - \pi/2),$$

em que foi escolhido $\omega_d = 0,15\pi$.

Com o objetivo de evidenciar o efeito do ruído de medição, considerou-se a presença de ruído branco, com amplitude limitada a 0,01, nos sensores de posição dos ângulos de arfagem (ψ) e guinada(ϕ).

4.3 Resultados e Simulações

Utilizando os Teoremas 3.1 e 3.2, apresentados no Capítulo 3, o controle baseado no observador UIO Takagi-Sugeno foi aplicado ao TRMS. Considerando $\eta = 0,05$ e $\rho = 0,985$, obteve-se um limitante $\gamma_o = 4,6224$ no projeto do UIO. Para o controlador PDC, considerando $\eta_o = 4,6224$, $\eta = 1,8$, $\mu = 1$ e $\rho = 0,985$, obteve-se um limitante $\gamma_c = 0,9560$. Para tanto, foram utilizados o Matlab 2024a, *parser* YALMIP e o *solver* Mosek. Os seguintes ganhos L_1 foram obtidos para o observador

$$L_{1(1,1)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3559 & 0,0031 \\ -0,0264 & -0,0753 \\ 0,1945 & -0,1225 \\ 2,7402 & -0,2691 \\ -0,8317 & -0,5424 \end{bmatrix}, L_{1(1,2)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3478 & 0,0028 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1944 & -0,1280 \\ 2,7402 & -0,2678 \\ -0,8318 & -0,5483 \end{bmatrix}, L_{1(1,3)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3559 & 0,0032 \\ -0,0264 & -0,0756 \\ 0,1944 & -0,1273 \\ 2,7402 & -0,2688 \\ -0,8318 & -0,5471 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(1,4)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3477 & 0,0027 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1944 & -0,1280 \\ 2,7402 & -0,2677 \\ -0,8318 & -0,5484 \end{bmatrix}, L_{1(1,5)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1649 & -0,0021 \\ -0,0265 & -0,0757 \\ 0,1944 & -0,1279 \\ 2,7402 & -0,2677 \\ -0,8318 & -0,5490 \end{bmatrix}, L_{1(1,6)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1568 & -0,0020 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1944 & -0,1266 \\ 2,7402 & -0,2682 \\ -0,8318 & -0,5503 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(1,7)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1649 & -0,0021 \\ -0,0265 & -0,0757 \\ 0,1944 & -0,1280 \\ 2,7402 & -0,2677 \\ -0,8318 & -0,5491 \end{bmatrix}, L_{1(1,8)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1567 & -0,0013 \\ -0,0264 & -0,0754 \\ 0,1944 & -0,1239 \\ 2,7402 & -0,2703 \\ -0,8318 & -0,5508 \end{bmatrix}, L_{1(2,1)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3559 & 0,0034 \\ -0,0264 & -0,0754 \\ 0,1949 & -0,1241 \\ 2,7401 & -0,2738 \\ -0,8317 & -0,5437 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(2,2)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3478 & 0,0029 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1275 \\ 2,7402 & -0,2702 \\ -0,8318 & -0,5474 \end{bmatrix}, L_{1(2,3)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3559 & 0,0035 \\ -0,0264 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1269 \\ 2,7402 & -0,2711 \\ -0,8318 & -0,5465 \end{bmatrix}, L_{1(2,4)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,3477 & 0,0028 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1275 \\ 2,7402 & -0,2702 \\ -0,8318 & -0,5475 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(2,5)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1649 & -0,0017 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1274 \\ 2,7402 & -0,2701 \\ -0,8318 & -0,5479 \end{bmatrix}, L_{1(2,6)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1568 & -0,0018 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1259 \\ 2,7402 & -0,2706 \\ -0,8318 & -0,5502 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(2,7)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1649 & -0,0017 \\ -0,0265 & -0,0756 \\ 0,1949 & -0,1274 \\ 2,7402 & -0,2701 \\ -0,8318 & -0,5479 \end{bmatrix}, L_{1(2,8)} = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,0059 \\ -0,1567 & -0,0005 \\ -0,0265 & -0,0757 \\ 0,1949 & -0,1219 \\ 2,7402 & -0,2757 \\ -0,8319 & -0,5628 \end{bmatrix},$$

e as demais matrizes de projeto são obtidas a partir das relações (3.9)-(3.13). Os ganhos obtidos para o controlador PDC são

$$K_{11}^T = \begin{bmatrix} -16,9229 & -3,9161 \\ -7,7854 & 6,3966 \\ -7,1876 & -29,0723 \\ -3,0874 & -13,7953 \\ -3,1270 & 0,8080 \\ -0,2502 & -1,7774 \end{bmatrix}, K_{12}^T = \begin{bmatrix} -16,9400 & -4,0562 \\ -7,8670 & 6,4182 \\ -7,2263 & -29,2247 \\ -3,1121 & -13,8970 \\ -3,1875 & 0,8056 \\ -0,2747 & -1,8368 \end{bmatrix}, K_{13}^T = \begin{bmatrix} -17,1597 & -3,9786 \\ -7,9131 & 6,4443 \\ -7,2588 & -29,3423 \\ -3,1346 & -13,9835 \\ -3,2348 & 0,8043 \\ -0,2941 & -1,8838 \end{bmatrix},$$

$$K_{14}^T = \begin{bmatrix} -17,1607 & -4,1111 \\ -7,9872 & 6,4649 \\ -7,2890 & -29,4639 \\ -3,1569 & -14,0747 \\ -3,2898 & 0,8027 \\ -0,3155 & -1,9357 \end{bmatrix}, K_{15}^T = \begin{bmatrix} -17,1838 & -4,0404 \\ -7,9135 & 6,5063 \\ -7,3510 & -29,6180 \\ -3,1933 & -14,1863 \\ -3,2782 & 0,7426 \\ -0,3421 & -2,0031 \end{bmatrix}, K_{16}^T = \begin{bmatrix} -17,3186 & -4,1967 \\ -8,0439 & 6,5474 \\ -7,3988 & -29,8312 \\ -3,2247 & -14,3321 \\ -3,3772 & 0,7392 \\ -0,3842 & -2,1016 \end{bmatrix},$$

$$K_{17}^T = \begin{bmatrix} -17,8796 & -4,1786 \\ -8,2751 & 6,6264 \\ -7,4383 & -30,1943 \\ -3,2456 & -14,5564 \\ -3,5540 & 0,7350 \\ -0,4553 & -2,2655 \end{bmatrix}, K_{18}^T = \begin{bmatrix} -52,9070 & -11,5720 \\ -24,4919 & 14,3539 \\ -15,2832 & -67,7956 \\ -6,1306 & -31,6087 \\ -14,5462 & 0,9112 \\ -5,6440 & -16,3092 \end{bmatrix}, K_{21}^T = \begin{bmatrix} -53,1206 & -11,4812 \\ -24,5951 & 14,3895 \\ -15,2402 & -67,8821 \\ -6,0879 & -31,5808 \\ -14,6422 & 0,9631 \\ -5,6263 & -16,3156 \end{bmatrix},$$

$$K_{22}^T = \begin{bmatrix} -17,7280 & -4,2717 \\ -8,2638 & 6,6185 \\ -7,4668 & -30,1826 \\ -3,2349 & -14,4490 \\ -3,6429 & 0,7797 \\ -0,4619 & -2,2635 \end{bmatrix}, K_{23}^T = \begin{bmatrix} -17,5263 & -4,0972 \\ -8,0874 & 6,5419 \\ -7,3985 & -29,8147 \\ -3,1967 & -14,2185 \\ -3,4716 & 0,7888 \\ -0,3863 & -2,0996 \end{bmatrix}, K_{24}^T = \begin{bmatrix} -17,2092 & -4,1456 \\ -8,0057 & 6,4925 \\ -7,3391 & -29,5995 \\ -3,1595 & -14,0708 \\ -3,3746 & 0,7933 \\ -0,3433 & -2,0014 \end{bmatrix},$$

$$K_{25}^T = \begin{bmatrix} -16,9969 & -4,0024 \\ -7,8036 & 6,4700 \\ -7,3176 & -29,4516 \\ -3,1386 & -13,9627 \\ -3,2134 & 0,7383 \\ -0,3141 & -1,9347 \end{bmatrix}, K_{26}^T = \begin{bmatrix} -16,8001 & -4,0804 \\ -7,7669 & 6,4394 \\ -7,2799 & -29,3281 \\ -3,1126 & -13,8705 \\ -3,1589 & 0,7396 \\ -0,2924 & -1,8831 \end{bmatrix},$$

$$K_{27}^T = \begin{bmatrix} -16,8119 & -3,9516 \\ -7,7084 & 6,4184 \\ -7,2480 & -29,2116 \\ -3,0898 & -13,7846 \\ -3,1091 & 0,7405 \\ -0,2729 & -1,8357 \end{bmatrix}, K_{28}^T = \begin{bmatrix} -16,5839 & -4,0203 \\ -7,6519 & 6,3874 \\ -7,2049 & -29,0587 \\ -3,0633 & -13,6835 \\ -3,0517 & 0,7423 \\ -0,2477 & -1,7769 \end{bmatrix}.$$

Para esta experimento, considerou-se o vetor de condições iniciais $x(0) = [0.015 \ 0 \ 0.0349 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Os resultados de simulação obtidos são apresentados na Figura 2 e percebe-se que o sistema alcança a estabilidade assintótica em malha fechada para o controle de realimentação de estados.

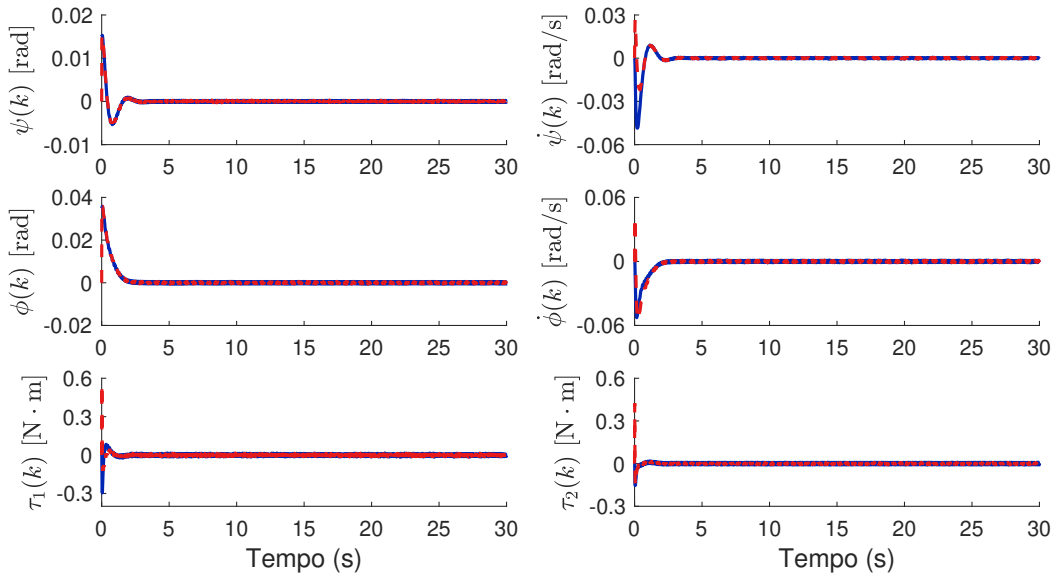


Figura 2 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

A Figura 3 apresenta uma visualização ampliada do resultado obtido para o intervalo de 0 s e 2 s.

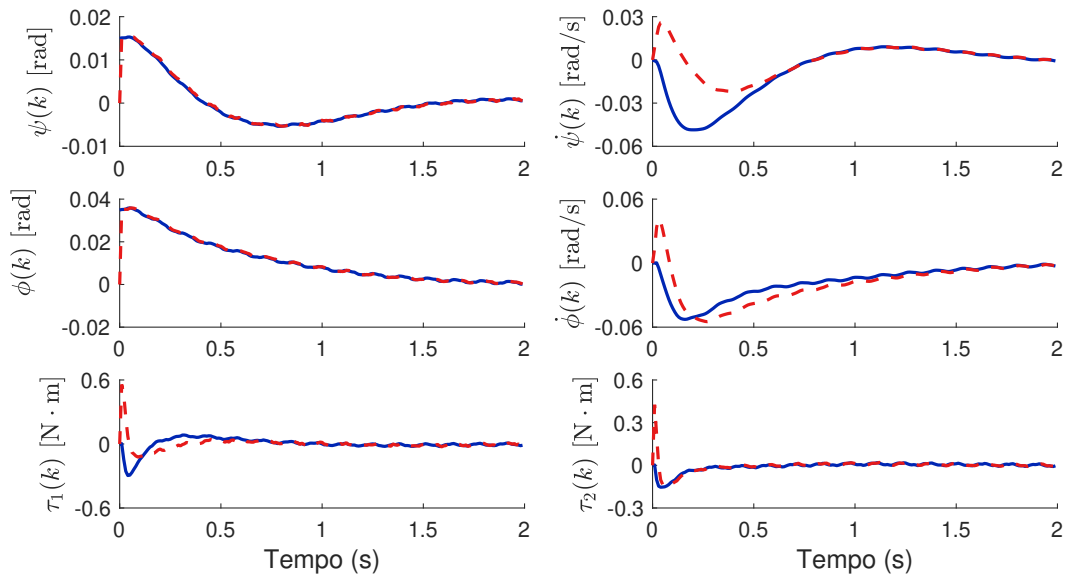


Figura 3 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Percebe-se que todos os estados alcançam a convergência de estimativa em aproximadamente 1,5 s. Portanto, o observador projetado consegue obter estimativas que possibilitam calcular a lei de controle que garante a estabilidade do sistema não linear em malha fechada. Os erros de estimativa para os estados do sistema são apresentados na Figura 4.

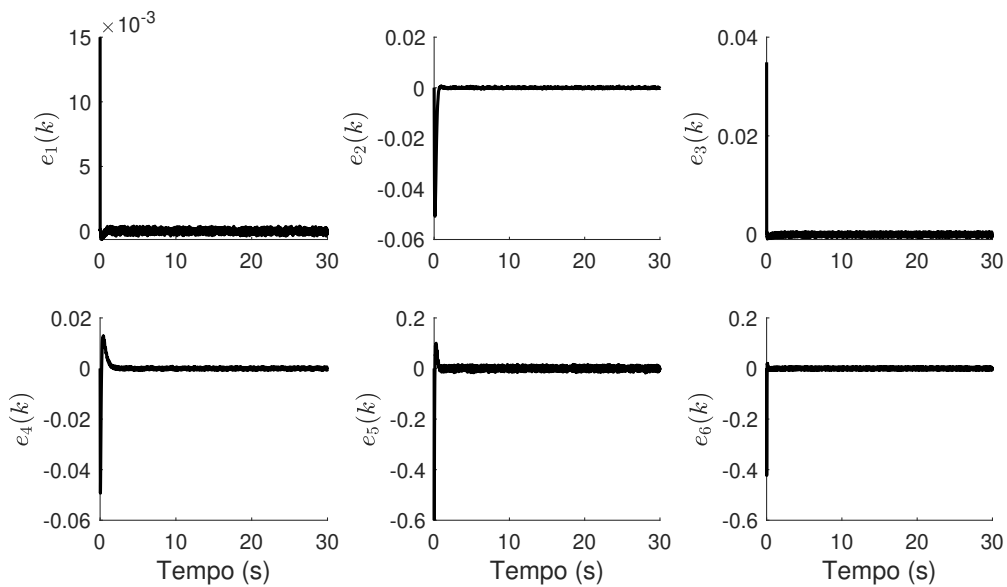


Figura 4 – Erro de estimação obtidos pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada.

A Tabela 3 demonstra que o RMS de estimativa é baixo para as estimativas, e que o maior erro é do estado x_4 . No entanto, este estado recebe um maior nível de perturbação, o que pode indicar tal variação. Além disso, ao analisar a Figura 3 percebe-se que este é o último estado estimado pelo UIO a alcançar a convergência para o estado real.

Tabela 3 – Erro RMS para o TRMS

Estado	RMS
$x_1(k)$	0,0017
$x_2(k)$	0,0013
$x_3(k)$	0,0032
$x_4(k)$	0,0096
$x_5(k)$	0,0094
$x_6(k)$	0,0049

Ao analisar erros de estimação $e_o(k)$ obtidos para cada estado, verifica-se que todos convergem assintoticamente para a origem, o que reforça o resultado teórico esperado para a metodologia de projeto proposta para o observador. Dessa forma, nota-se que o dispositivo consegue desacoplar os efeitos da entrada desconhecidas do erro de estimativa para os estados.

A Figura 5 apresenta o sinal de controle para o sistema em malha fechada.

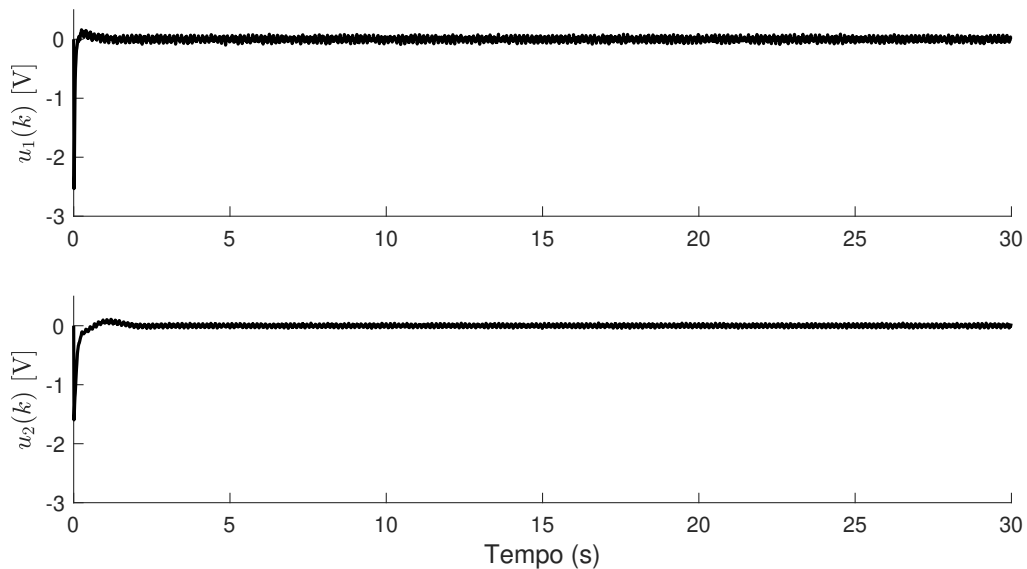


Figura 5 – Sinal de controle para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada.

De acordo com as especificações técnicas apresentadas, o sinal de controle $u(k)$ está dentro do intervalo de operação. No entanto, é necessário pontuar que o sistema poderá ser operado em saturação nos atuadores, mesmo que por um intervalo pequeno de

tempo. Desse modo, percebe-se que a saturação nos atuadores deve ser considerada no projeto de controle para que seja possível obter condições mais próximas do comportamento real do sistema.

4.4 Sistema de Rotor Duplo – Seguimento de Referência

Para o seguimento de referência utilizou-se o Teorema 3.3, considerando $\eta_o = 4,6224$, $\eta = 1,8$, $\mu = 1$, $\rho = 0,985$ e $\lambda = 0,01$, em que obteve-se um limitante $\gamma_c = 2,8970$ para o controlador. Os ganhos obtidos no projeto para o controlador são

$$K_{11}^T = \begin{bmatrix} -216,7792 & -27,7835 \\ -40,5163 & 3,8351 \\ -75,5274 & -246,8442 \\ -12,9954 & -41,7384 \\ -4,7836 & 0,5207 \\ -0,6231 & -2,2425 \end{bmatrix}, K_{12}^T = \begin{bmatrix} -217,1127 & -27,9563 \\ -40,6755 & 3,8280 \\ -75,5899 & -247,0520 \\ -13,0010 & -41,7612 \\ -4,8178 & 0,5194 \\ -0,6394 & -2,2834 \end{bmatrix}, K_{13}^T = \begin{bmatrix} -217,7441 & -27,9338 \\ -40,6737 & 3,8420 \\ -75,5696 & -246,9911 \\ -12,9929 & -41,7419 \\ -4,8367 & 0,5197 \\ -0,6512 & -2,3132 \end{bmatrix},$$

$$K_{14}^T = \begin{bmatrix} -217,7930 & -28,0524 \\ -40,7729 & 3,8344 \\ -75,5196 & -246,8295 \\ -12,9805 & -41,7041 \\ -4,8666 & 0,5186 \\ -0,6641 & -2,3446 \end{bmatrix}, K_{15}^T = \begin{bmatrix} -214,3335 & -27,9613 \\ -40,0008 & 3,8590 \\ -75,4785 & -246,5808 \\ -12,9544 & -41,6474 \\ -4,6525 & 0,5110 \\ -0,6814 & -2,3844 \end{bmatrix}, K_{16}^T = \begin{bmatrix} -214,8175 & -28,1237 \\ -40,1476 & 3,8538 \\ -75,3629 & -246,2101 \\ -12,9264 & -41,5634 \\ -4,6945 & 0,5098 \\ -0,7050 & -2,4418 \end{bmatrix},$$

$$K_{17}^T = \begin{bmatrix} -216,6713 & -28,2419 \\ -40,3632 & 3,8755 \\ -75,1884 & -245,9455 \\ -12,8800 & -41,4779 \\ -4,7709 & 0,5079 \\ -0,7432 & -2,5394 \end{bmatrix}, K_{18}^T = \begin{bmatrix} -359,5489 & -47,3551 \\ -65,3878 & 6,0972 \\ -113,2535 & -375,6132 \\ -18,4770 & -60,4507 \\ -9,5537 & 0,6614 \\ -3,2873 & -9,4785 \end{bmatrix}, K_{21}^T = \begin{bmatrix} -371,4598 & -48,6330 \\ -67,6578 & 5,8515 \\ -112,8114 & -375,5630 \\ -18,3532 & -60,3006 \\ -10,2436 & 0,6303 \\ -3,3111 & -9,4829 \end{bmatrix},$$

$$K_{22}^T = \begin{bmatrix} -218,0861 & -28,4246 \\ -40,6883 & 3,8504 \\ -75,1132 & -245,9349 \\ -12,8302 & -41,3287 \\ -5,1380 & 0,5135 \\ -0,7415 & -2,5402 \end{bmatrix}, K_{23}^T = \begin{bmatrix} -217,0550 & -28,1230 \\ -40,4200 & 3,8555 \\ -75,3361 & -246,1964 \\ -12,8886 & -41,4250 \\ -5,0489 & 0,5169 \\ -0,7033 & -2,4422 \end{bmatrix}, K_{24}^T = \begin{bmatrix} -216,6670 & -28,1038 \\ -40,4891 & 3,8408 \\ -75,4511 & -246,5657 \\ -12,9203 & -41,5107 \\ -5,0151 & 0,5168 \\ -0,6802 & -2,3847 \end{bmatrix},$$

$$K_{25}^T = \begin{bmatrix} -213,9496 & -27,9634 \\ -39,8647 & 3,8515 \\ -75,5452 & -246,8138 \\ -12,9322 & -41,5682 \\ -4,6478 & 0,5091 \\ -0,6663 & -2,3449 \end{bmatrix}, K_{26}^T = \begin{bmatrix} -213,9273 & -27,9968 \\ -39,9793 & 3,8361 \\ -75,5832 & -246,9750 \\ -12,9446 & -41,6063 \\ -4,6172 & 0,5093 \\ -0,6539 & -2,3135 \end{bmatrix},$$

$$K_{27}^T = \begin{bmatrix} -214,0448 & -27,8677 \\ -39,9209 & 3,8446 \\ -75,5952 & -247,0374 \\ -12,9502 & -41,6256 \\ -4,5917 & 0,5100 \\ -0,6418 & -2,2836 \end{bmatrix}, \quad K_{28}^T = \begin{bmatrix} -213,4339 & -27,8533 \\ -39,9046 & 3,8275 \\ -75,5307 & -246,8282 \\ -12,9451 & -41,6020 \\ -4,5671 & 0,5105 \\ -0,6259 & -2,2428 \end{bmatrix}.$$

e os ganhos obtidos para o integrador são

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5,6688 & 2,2204 \\ 0,6910 & 7,2782 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 5,6908 & 2,2216 \\ 0,6958 & 7,2826 \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 5,6922 & 2,2205 \\ 0,6969 & 7,2794 \end{bmatrix}, \quad M_{14} = \begin{bmatrix} 5,7060 & 2,2185 \\ 0,7003 & 7,2731 \end{bmatrix},$$

$$M_{15} = \begin{bmatrix} 5,6055 & 2,2166 \\ 0,7000 & 7,2637 \end{bmatrix}, \quad M_{16} = \begin{bmatrix} 5,6259 & 2,2123 \\ 0,7052 & 7,2499 \end{bmatrix}, \quad M_{17} = \begin{bmatrix} 5,6575 & 2,2049 \\ 0,7108 & 7,2360 \end{bmatrix}, \quad M_{18} = \begin{bmatrix} 9,3632 & 3,2587 \\ 1,2449 & 10,8568 \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 9,6652 & 3,2432 \\ 1,2788 & 10,8561 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 5,7102 & 2,2025 \\ 0,7153 & 7,2347 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 5,6707 & 2,2114 \\ 0,7059 & 7,2486 \end{bmatrix}, \quad M_{24} = \begin{bmatrix} 5,6775 & 2,2159 \\ 0,7028 & 7,2624 \end{bmatrix},$$

$$M_{25} = \begin{bmatrix} 5,5961 & 2,2192 \\ 0,6983 & 7,2718 \end{bmatrix}, \quad M_{26} = \begin{bmatrix} 5,6088 & 2,2209 \\ 0,6973 & 7,2782 \end{bmatrix}, \quad M_{27} = \begin{bmatrix} 5,6010 & 2,2217 \\ 0,6937 & 7,2815 \end{bmatrix}, \quad M_{28} = \begin{bmatrix} 5,5971 & 2,2204 \\ 0,6916 & 7,2770 \end{bmatrix}.$$

Os resultados para o sistema em malha fechada para referências em degrau para os ângulos de arfagem e guinada são apresentados na Figura 6.

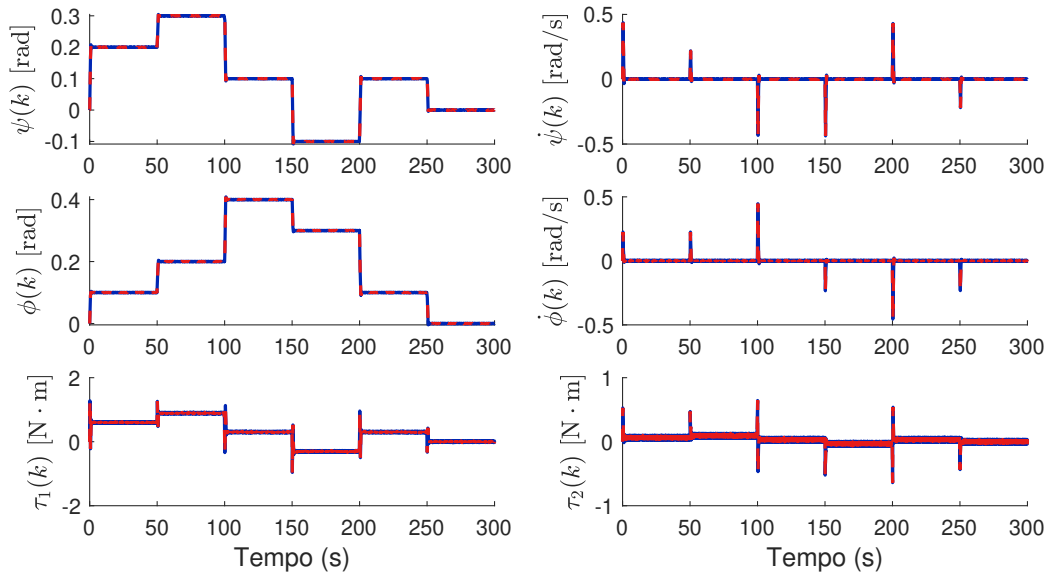


Figura 6 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS com condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

A Figura 7 apresenta uma visualização ampliada do resultado obtido para o intervalo de 0 s e 3 s. Percebe-se que assim como no problema de estabilização, todos os estados estimados convergem para os estados reais do sistema não linear.

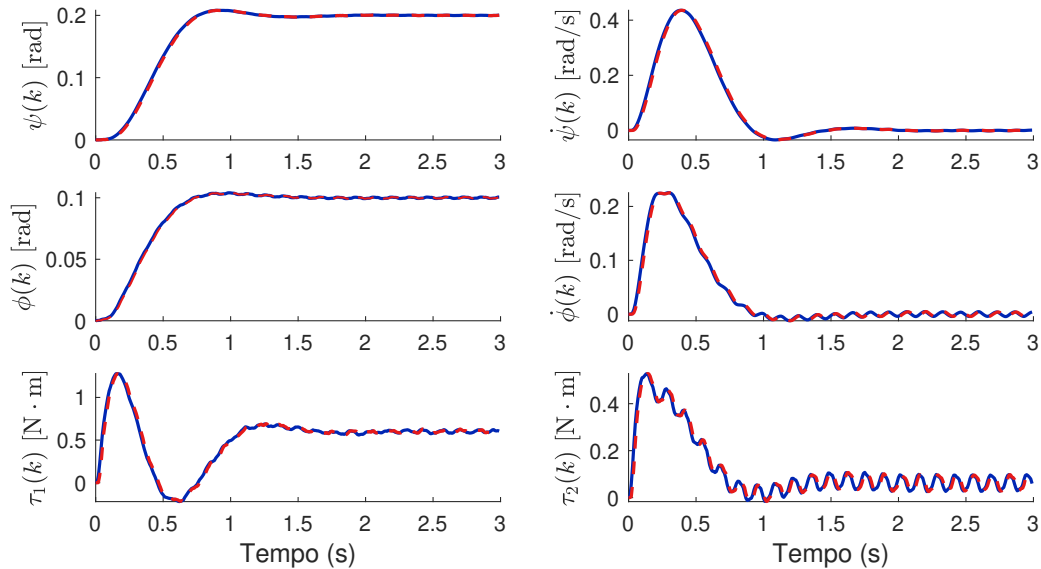


Figura 7 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o TRMS em malha fechada e seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Ao analisar a Tabela 4, que apresenta o erro RMS para cada estado, e o resultado do erro de estimativa apresentado na Figura 8, percebe-se que os maiores erros ocorrem na variação da referência, mas que o observador consegue rastrear de forma adequada a estimativa para o novo estado do sistema e que, no pior caso, o erro será 10^{-1} para a estimativa de estados $\hat{x}_5(k)$ e $\hat{x}_6(k)$.

Tabela 4 – Erro RMS para o TRMS – Seguimento de Referência

Estado	RMS
$x_1(k)$	0,0035
$x_2(k)$	0,0013
$x_3(k)$	0,0036
$x_4(k)$	0,0019
$x_5(k)$	0,0110
$x_6(k)$	0,0131

Desse modo, nota-se, novamente, que o dispositivo consegue desacoplar o efeito da entrada desconhecida no erro de estimação, o que reforça o resultado teórico esperado para o projeto.

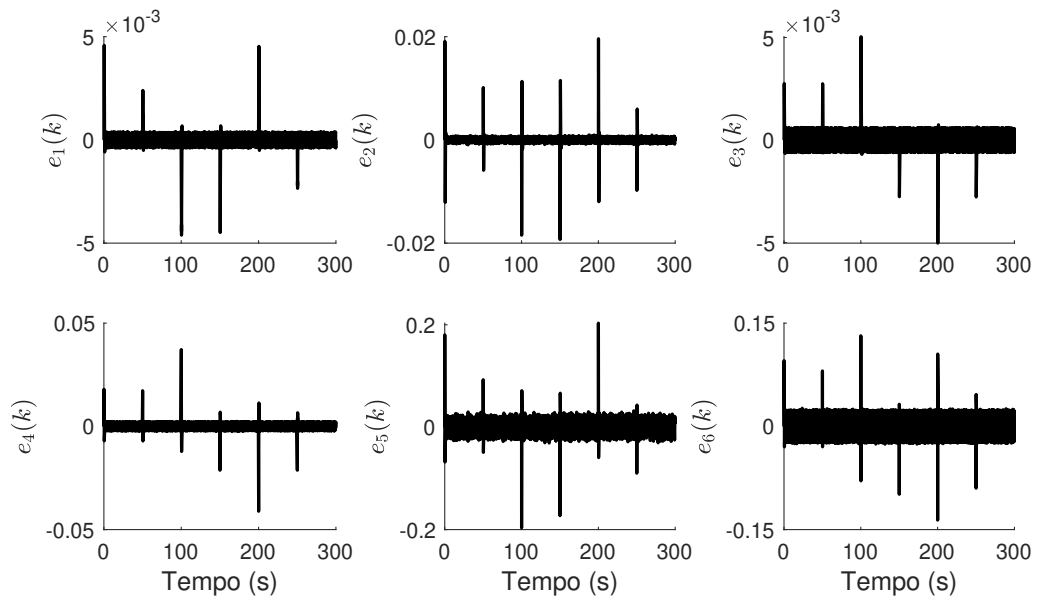


Figura 8 – Erro de estimação obtidos pelo UIO para o TRMS com seguimento de referência.

Para fins de comparação, as Figuras 9 e 10 apresentam as saídas controladas do sistema e os respectivos sinais de referência aplicados para os ângulos de arfagem e guinada, em que nota-se o efeito da atenuação do ruído de medição.

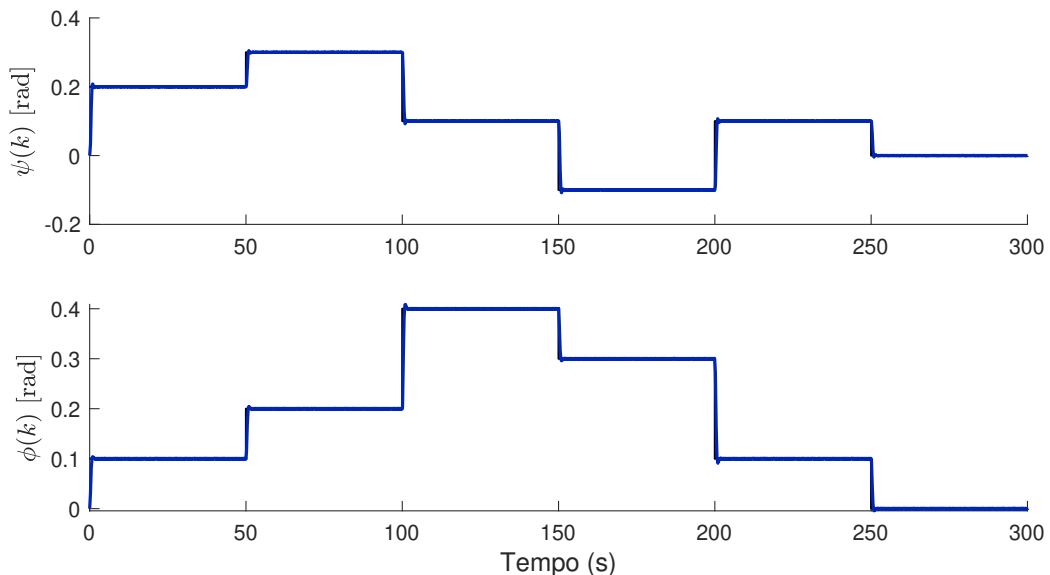


Figura 9 – Comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para o seguimento de referência dos ângulos de arfagem (ψ) e guinada (ϕ).

Ao analisar os resultados para seguimento de referência, percebe-se que o controlador projetado consegue rastrear adequadamente as referências em degrau e atua de

forma satisfatória para manter o sistema na referência indicada, mesmo na presença da entrada desconhecida que afeta sua dinâmica.

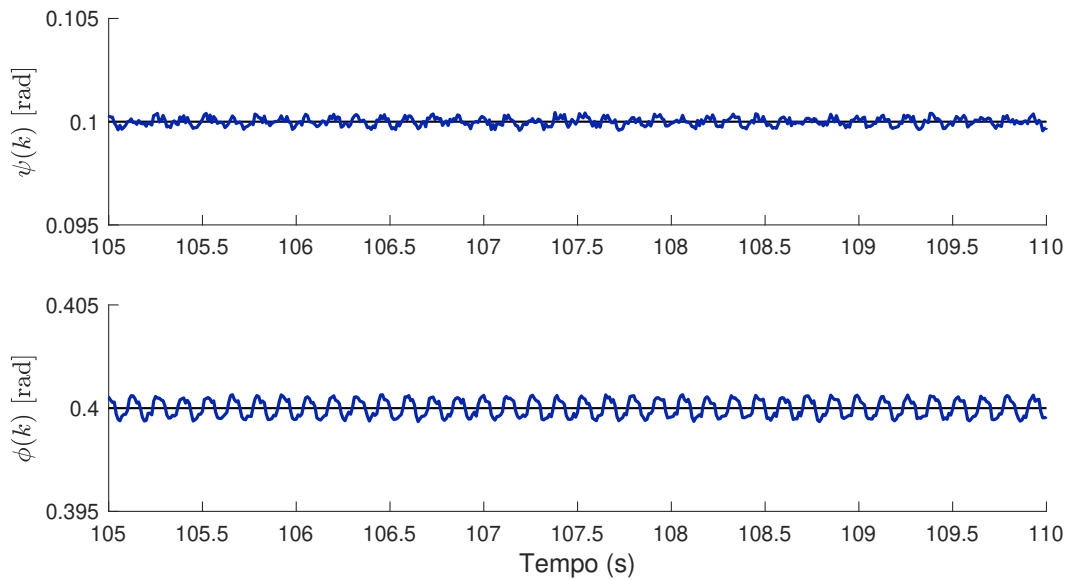


Figura 10 – Visão ampliada da comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para os ângulos de arfagem (ψ) e guinada (ϕ) no intervalo de 105 a 110 s.

Além disso, pode-se notar que o sinal de controle opera dentro da especificação técnica estabelecida, mas que poderá saturar no instante de variação em degrau.

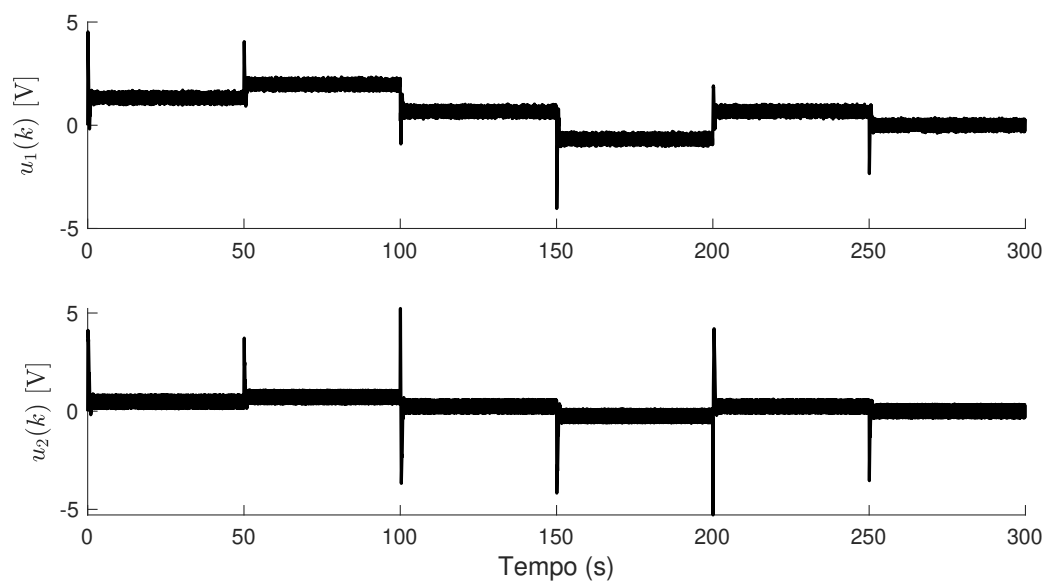


Figura 11 – Sinal de controle para o seguimento de referência no TRMS.

5 Controle de Quatro Tanques Acoplados

Este capítulo apresenta o controle de nível baseado em observador UIO nebuloso para um sistema de quatro tanques acoplados. Assim como no capítulo anterior, é apresentado o modelo nebuloso TS do sistema, os projetos do observador e controladores, bem como, resultados de simulação para condições iniciais não nulas e seguimento de referência em degrau.

5.1 Descrição do Problema

O controle de sistemas baseado em observador possui aplicações diversas em contexto industrial. O controle dessas plantas, se torna desafiador devido ao forte comportamento não linear existente em contexto prático. Dentre as diversas aplicações de controle de processos industriais, o controle de nível é amplamente abordado na literatura para exemplificar o projeto de controladores e estimadores de estados para plantas reais. Nesta linha de pensamento, a metodologia proposta nesta dissertação é aplicada a um sistema com quatro tanques acoplados. A Figura 12 apresenta uma representação gráfica do sistema não linear em estudo.

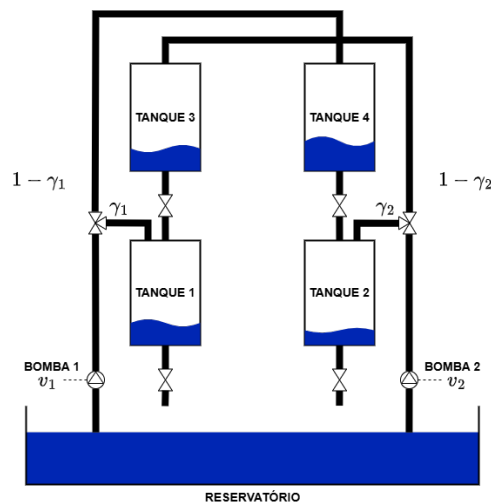


Figura 12 – Sistema para Controle de Nível com Quatro Tanques Acoplados

Adaptado de Johansson *et al.* (1999).

Inicialmente proposto por Johansson *et al.* (1999), Johansson (2000), esse sistema é naturalmente desafiador pois pode operar em fase mínima e não mínima com base na configuração de abertura das válvulas. Sendo assim, dentre os diversos trabalhos na literatura que abordam essa aplicação para controle de nível, pode-se citar Dormido e Esquembre (2003), Neves *et al.* (2016), Azam (2017) e Neto *et al.* (2019).

Conforme descrito por Johansson *et al.* (1999), o modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema é obtido por meio das equações de balanço de massa com representação em espaço de estados dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{A_1}(a_3\sqrt{2gx_3} + \gamma_1\kappa_1v_1 - a_1\sqrt{2gx_1}) \\
 \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{A_2}(a_4\sqrt{2gx_4} + \gamma_2\kappa_2v_2 - a_2\sqrt{2gx_2}) \\
 \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{A_3}((1 - \gamma_2)\kappa_2v_2 - a_3\sqrt{2gx_3}) \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{A_4}((1 - \gamma_1)\kappa_1v_1 - a_4\sqrt{2gx_4})
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que $x_i(t)$ representa o nível (h_i) de cada tanque, com $i = 1, \dots, 4$ e seus parâmetros são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros técnicos do sistema com quatro tanques acoplados

Parâmetro	Descrição	Valor
$A_i, i = 1 \dots 4$	Áreas da seção transversal dos tanques	254,47 cm ²
a_1 e a_2	Área da seção transversal do orifício de saída dos tanques 1 e 2	0,4657 cm ²
a_3 e a_4	Área da seção transversal do orifício de saída dos tanques 3 e 4	0,3421 cm ²
$\kappa_i, i = 1 \dots 2$	Ganho das Bombas	18 cm ³ /V · s
g	Aceleração gravitacional	9,81 m/s ²
$\min(h_i), i = 1 \dots 4$	Nível mínimo	0,1 cm
$\max(h_i), i = 1 \dots 4$	Nível máximo	40 cm

5.2 Modelo Takagi–Sugeno do Sistema Quatro Tanques Acoplados

As matrizes da dinâmica do sistema, entrada de controle, entrada desconhecida, saída e ruído de medição são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1}z_{1\alpha} & 0 & \frac{a_3\sqrt{2g}}{A_1}z_{3\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2\sqrt{2g}}{A_2}z_{2\alpha} & 0 & \frac{a_4\sqrt{2g}}{A_2}z_{4\beta} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3\sqrt{2g}}{A_3}z_{3\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4\sqrt{2g}}{A_4}z_{4\beta} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1\kappa_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2\kappa_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)\kappa_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)\kappa_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,08 \\ 0,06 & 0,2 \\ 0,1 & 0,03 \\ 0,04 & 0,15 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}$$

Neste sistema, o comportamento não linear associado ao nível de cada tanque é explorado para obter o modelo TS. Neste trabalho será considerado que somente os

níveis dos tanques 1 e 2 são medidos, e se faz necessário estimar os níveis dos tanques 3 e 4 para implementar o controle por realimentação de estados baseado em observador. As não linearidades são dadas por

$$z_{1\alpha} = \frac{\sqrt{x_1}}{x_1}, \quad z_{2\alpha} = \frac{\sqrt{x_2}}{x_2}, \quad z_{3\beta} = \frac{\sqrt{x_3}}{x_3}, \quad z_{4\beta} = \frac{\sqrt{x_4}}{x_4}.$$

Portanto, ao considerar estas suposições, o sistema TS é descrito por 16 vértices, sendo que $r_\alpha = 4$ e $r_\beta = 4$. Por meio dos intervalos de operação apresentados na Tabela 5 e das não linearidades existentes, as funções de pertinência com os respectivos limitantes são obtidas para representar o sistema TS, as quais são apresentadas na sequência.

$$\begin{cases} a_1^1 = \max(z_{1\alpha}) = 3,1623 & a_1^2 = \min(z_{1\alpha}) = 0,1581 \\ w_1^1 = \frac{z_{1\alpha} - a_1^2}{a_1^1 - a_1^2} & w_1^2 = 1 - w_1^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 = \max(z_{2\alpha}) = 3,1623 & a_2^2 = \min(z_{2\alpha}) = 0,1581 \\ w_1^2 = \frac{z_{2\alpha} - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} & w_2^2 = 1 - w_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^3 = \max(z_{3\beta}) = 3,1623 & a_2^3 = \min(z_{3\beta}) = 0,1581 \\ w_1^3 = \frac{z_{3\beta} - a_2^3}{a_1^3 - a_2^3} & w_2^3 = 1 - w_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^4 = \max(z_{4\beta}) = 3,1623 & a_2^4 = \min(z_{4\beta}) = 0,1581 \\ w_1^4 = \frac{z_{4\beta} - a_2^4}{a_1^4 - a_2^4} & w_2^4 = 1 - w_1^4 \end{cases}$$

Conforme estabelecido pelo Lema 2.7, ao considerar que somente x_1 e x_2 são medidos, tem-se que

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim como no caso do TRMS, foi aplicada ao sistema (5.1) uma aproximação de primeira ordem de Euler com tempo de amostragem de $T_s = 0,1$ s.

Para a entrada desconhecida $d(k)$ considerou-se um ruído branco de amplitude 0,5 para representar interferências na dinâmica do modelo e, além disso, foi considerada a existência de um ruído branco com amplitude 0,1 nos sensores de nível dos tanques 1 e 2. Para as simulações, considerou-se as porcentagens $\gamma_1 = 0,55$ e $\gamma_2 = 0,54$ para abertura das válvulas, as quais definem a distribuição de vazão entre os tanques e caracterizam a operação em fase mínima do sistema (JOHANSSON *et al.*, 1999; JOHANSSON, 2000).

5.3 Resultados e Simulações

Utilizando os Teoremas 3.1 e 3.2, apresentados no Capítulo 3, o controle baseado no observador UIO Takagi-Sugeno foi aplicado ao sistema de 4 tanques acoplados. Considerando $\eta = 0,035$ e $\rho = 0,985$, obteve-se um limitante $\gamma_o = 0,6269$ no projeto do UIO. Para o controlador PDC, foram considerados $\eta_o = 0,6269$, $\eta = 0,02$, $\mu = 1$ e $\rho = 0,985$, resultando no limitante $\gamma_c = 7,9555$. Os ganhos L_1 obtidos para o observador são

$$L_{1(1,1)} = \begin{bmatrix} -0,0759 & 0,0191 \\ 0,0001 & -0,1211 \\ -0,0769 & 0,0585 \\ 0,0029 & -0,0859 \end{bmatrix}, L_{1(1,2)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0194 \\ -0,0000 & -0,1211 \\ -0,0273 & 0,0454 \\ 0,0013 & -0,0855 \end{bmatrix}, L_{1(1,3)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0192 \\ 0,0001 & -0,1210 \\ -0,0767 & 0,0538 \\ 0,0004 & -0,0601 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(1,4)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0192 \\ 0 & -0,1210 \\ -0,0269 & 0,0398 \\ -0,0012 & -0,0597 \end{bmatrix}, L_{1(2,1)} = \begin{bmatrix} -0,0775 & 0,0200 \\ 0,0001 & -0,1171 \\ -0,1069 & 0,0581 \\ 0,0047 & -0,0823 \end{bmatrix}, L_{1(2,2)} = \begin{bmatrix} -0,0761 & 0,0193 \\ 0 & -0,1212 \\ -0,0559 & 0,0453 \\ 0,0029 & -0,0856 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(2,3)} = \begin{bmatrix} -0,0793 & 0,0194 \\ 0,0002 & -0,1206 \\ -0,1087 & 0,0540 \\ 0,0031 & -0,0597 \end{bmatrix}, L_{1(2,4)} = \begin{bmatrix} -0,0761 & 0,0192 \\ 0 & -0,1210 \\ -0,0555 & 0,0398 \\ 0,0004 & -0,0597 \end{bmatrix}, L_{1(3,1)} = \begin{bmatrix} -0,0760 & 0,0191 \\ 0,0001 & -0,1209 \\ -0,0769 & 0,0662 \\ 0,0030 & -0,1041 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(3,2)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0194 \\ 0 & -0,1209 \\ -0,0273 & 0,0532 \\ 0,0013 & -0,1037 \end{bmatrix}, L_{1(3,3)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0192 \\ 0,0001 & -0,1210 \\ -0,0767 & 0,0617 \\ 0,0005 & -0,0787 \end{bmatrix}, L_{1(3,4)} = \begin{bmatrix} -0,0762 & 0,0192 \\ 0 & -0,1210 \\ -0,0269 & 0,0476 \\ -0,0012 & -0,0782 \end{bmatrix},$$

$$L_{1(4,1)} = \begin{bmatrix} -0,0759 & 0,0334 \\ -0,0006 & -0,1114 \\ -0,1048 & 0,0798 \\ 0,0040 & -0,0964 \end{bmatrix}, L_{1(4,2)} = \begin{bmatrix} -0,0761 & 0,0193 \\ 0 & -0,1210 \\ -0,0559 & 0,0531 \\ 0,0030 & -0,1037 \end{bmatrix}$$

$$L_{1(4,3)} = \begin{bmatrix} -0,0797 & 0,0194 \\ 0,0005 & -0,1204 \\ -0,1093 & 0,0617 \\ 0,0033 & -0,0783 \end{bmatrix}, L_{1(4,4)} = \begin{bmatrix} -0,0761 & 0,0192 \\ 0 & -0,1210 \\ -0,0555 & 0,0477 \\ 0,0004 & -0,0783 \end{bmatrix}$$

e as demais matrizes são obtidas a partir das relações (3.9)-(3.13). Os ganhos obtidos para o controlador PDC são

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -151,6310 & -21,3914 & -0,2065 & -0,0595 \\ -22,2836 & -152,4400 & -0,0574 & -0,2059 \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} -151,7095 & -21,4530 & -4,6876 & -0,0415 \\ -22,3703 & -152,4030 & 0,0101 & -0,2065 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_{13} &= \begin{bmatrix} -151,5616 & -21,4464 & -0,2085 & -0,0155 \\ -22,3683 & -152,4879 & -0,0481 & -4,7916 \end{bmatrix} & K_{14} &= \begin{bmatrix} -225,9050 & -2,9384 & -4,7442 & -0,0643 \\ -3,4169 & -250,1523 & -0,0711 & -4,8179 \end{bmatrix} \\
K_{21} &= \begin{bmatrix} -145,4375 & -21,5297 & -0,2072 & -0,0600 \\ -22,4542 & -152,5046 & -0,0562 & -0,2076 \end{bmatrix} & K_{22} &= \begin{bmatrix} -145,6384 & -21,6274 & -4,6919 & -0,0464 \\ -22,5228 & -152,5466 & 0,0075 & -0,2066 \end{bmatrix} \\
K_{23} &= \begin{bmatrix} -145,5593 & -21,6230 & -0,2065 & -0,0029 \\ -22,6024 & -152,6951 & -0,0419 & -4,7791 \end{bmatrix} & K_{24} &= \begin{bmatrix} -145,7034 & -21,8863 & -4,7095 & 0,0319 \\ -22,7124 & -152,6338 & 0,0305 & -4,7944 \end{bmatrix} \\
K_{31} &= \begin{bmatrix} -151,6618 & -21,7065 & -0,2089 & -0,0607 \\ -22,5515 & -146,1534 & -0,0567 & -0,2095 \end{bmatrix} & K_{32} &= \begin{bmatrix} -151,9104 & -21,6944 & -4,6975 & -0,0446 \\ -22,5023 & -146,2059 & 0,0053 & -0,2037 \end{bmatrix} \\
K_{33} &= \begin{bmatrix} -151,6912 & -21,5587 & -0,2075 & 0,0070 \\ -22,4470 & -146,2222 & -0,0449 & -4,7756 \end{bmatrix} & K_{34} &= \begin{bmatrix} -151,5199 & -21,3731 & -4,6926 & 0,0463 \\ -22,1485 & -145,9286 & 0,0431 & -4,7765 \end{bmatrix} \\
K_{41} &= \begin{bmatrix} -228,5229 & -1,2118 & -0,1753 & -0,1040 \\ -1,4970 & -212,4711 & -0,0897 & -0,1738 \end{bmatrix} & K_{42} &= \begin{bmatrix} -145,3755 & -21,4269 & -4,6978 & -0,0485 \\ -22,3232 & -145,8762 & 0,0060 & -0,2033 \end{bmatrix} \\
K_{43} &= \begin{bmatrix} -145,2982 & -21,3982 & -0,2049 & 0,0115 \\ -22,3076 & -145,9454 & -0,0455 & -4,7765 \end{bmatrix} & K_{44} &= \begin{bmatrix} -145,0998 & -21,1260 & -4,6850 & 0,0512 \\ -21,9607 & -145,7921 & 0,0497 & -4,7690 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A Figura 13 apresenta os resultados obtidos em simulação para o sistema não linear em estudo, em que foi considerado o vetor de condições iniciais $x(0) = [30 \ 20 \ 25 \ 15]^T$.

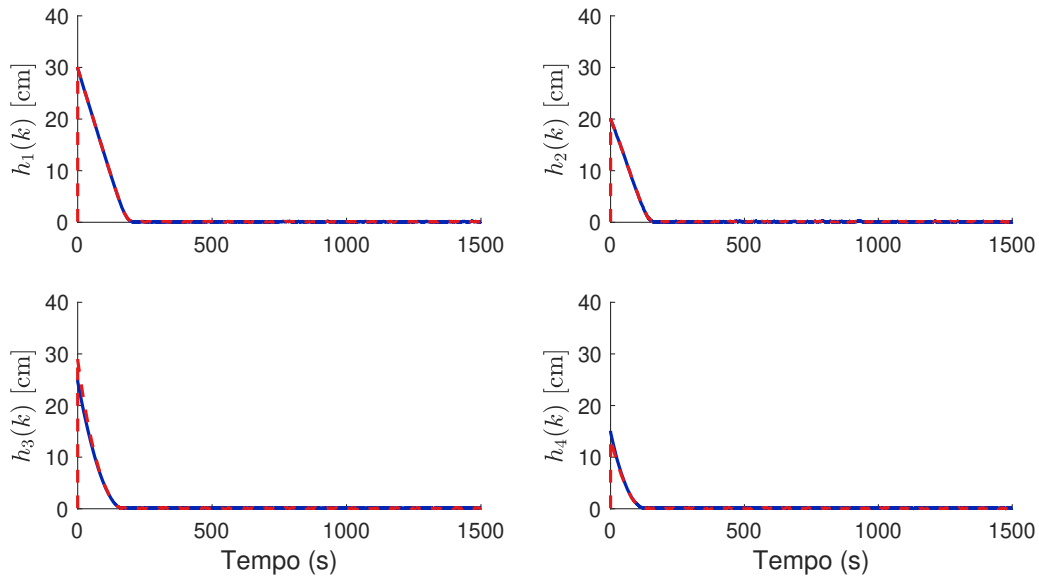


Figura 13 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Nota-se que o sistema alcança a estabilidade para o controle baseado no observador projetado. Percebe-se que as estimativas convergem ao estado real, o que indica que as especificações de projeto são atendidas para o sistema em estudo. Para fins de comparação, a Figura 14 apresenta uma visão ampliada do resultado apresentado na Figura 13.

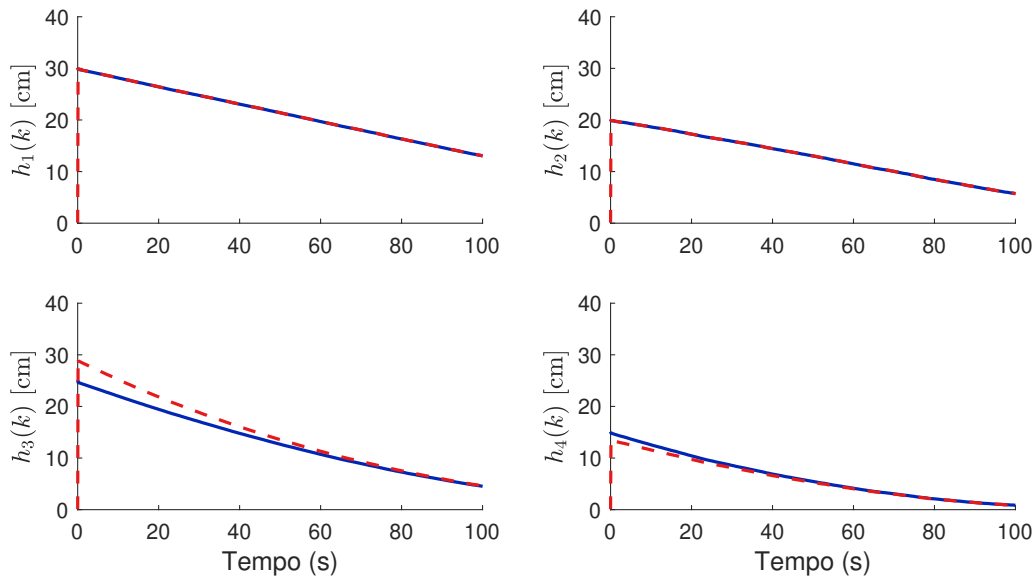


Figura 14 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC no intervalo de 0 a 100 s. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Ao analisar a Figura 14 nota-se que as estimativas $\hat{x}(k)$ convergem para os estados $x(k)$, o que indica convergência assintótica para o erro de estimativa e estabilidade do sistema em malha fechada por meio do controlador projetado. Nota-se que a convergência de todos os estados ocorre em 60 segundos, aproximadamente.

A Figura 15 apresenta uma visão ampliada para o intervalo de 205 a 210 s, em que verifica-se atraso de pelo menos um instante de amostragem na estimativa $\hat{x}(k)$, mas que não afeta bruscamente a convergência assintótica do sistema. Desse modo, por meio do resultado apresentado, nota-se que esse comportamento para a estimativa gerada pelo UIO evidencia a necessidade do uso de técnicas que considerem o efeito do atraso no tempo nas estimativas dos estados, que pode ser crítico para determinadas aplicações e, conseqüentemente, comprometer a estabilidade do sistema e o controle baseado em observador.

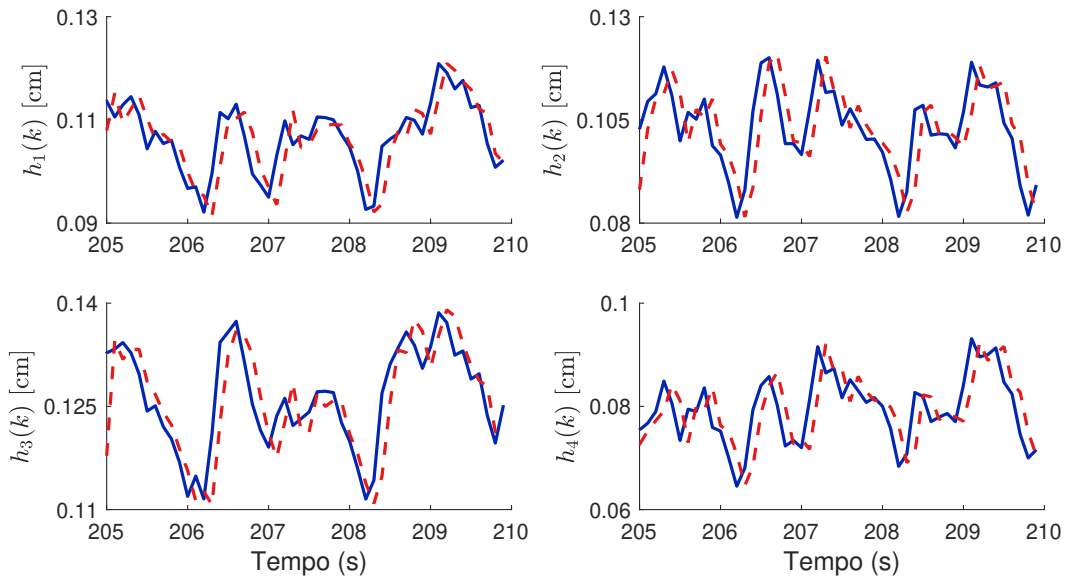


Figura 15 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada com o controlador PDC no intervalo de 205 a 210 s. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Os erros de estimativas são apresentados nas Figuras 16 e o RMS é apresentado na Tabela 6. Por meio destes resultados nota-se uma boa concordância entre os valores estimados e os valores reais dos estados do sistema.

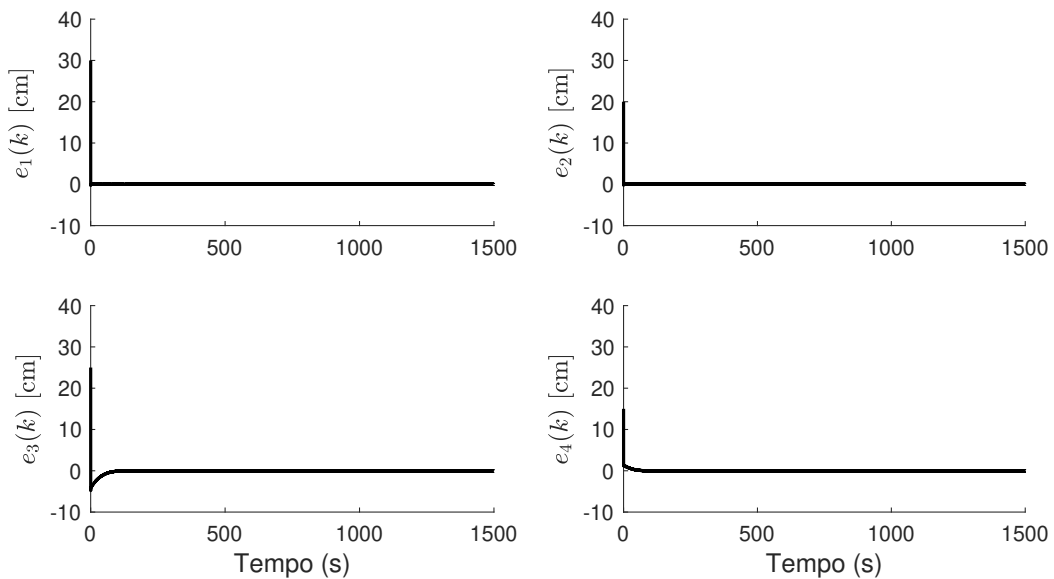


Figura 16 – Erros de estimação obtidos pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados e condições iniciais não nulas em malha fechada.

Tabela 6 – Erro RMS para o sistema com quatro tanques acoplados

Estado	RMS
$x_1(k)$	0,2450
$x_2(k)$	0,1635
$x_3(k)$	0,4939
$x_4(k)$	0,1809

Ao analisar a Tabela 6, que apresenta o erro RMS para cada estado, e o resultado para o erro de estimativa apresentado na Figura 16, percebe-se que os maiores erros ocorrem para o estado x_3 , pois este é o último estado estimado pelo UIO a alcançar a convergência para o estado real. Além disso, o efeito do atraso, citado anteriormente, pode indicar tal variação.

Ao analisar a Figura 17, nota-se que o sinal de controle permanece dentro da faixa de operação de 0 a 10 V e indica que as bombas não atuarão em saturação para garantir a estabilidade assintótica do sistema. Além disso, o controle permanece ativado devido ao efeito da entrada desconhecida nos atuadores do sistema.

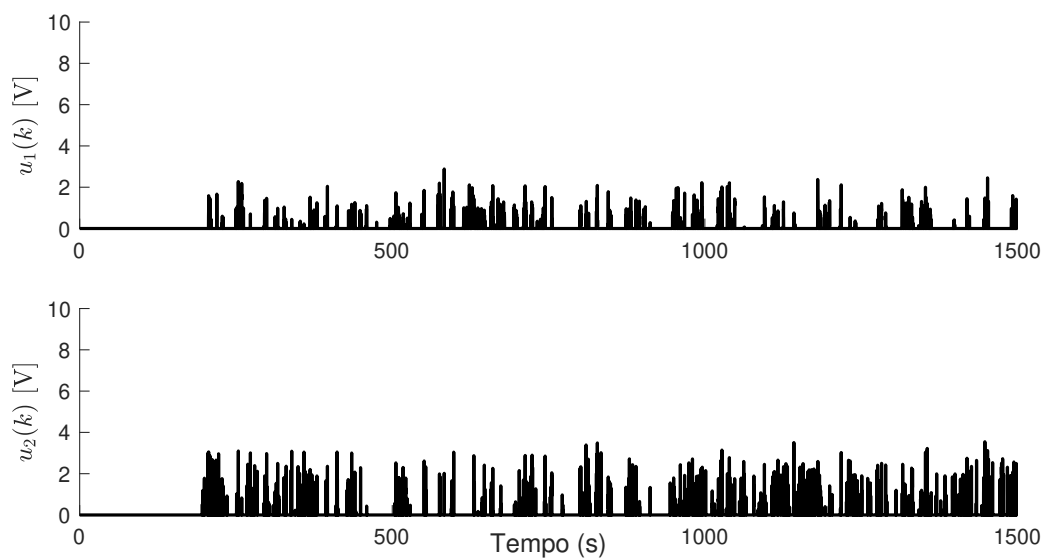


Figura 17 – Sinal de controle $u(k)$ para o sistema não linear com quatro tanques acoplados.

5.4 Sistema com Quatro Tanques Acoplados – Seguimento de Referência

Para o seguimento de referência utilizou-se o Teorema 3.3, considerando $\eta_o = 0,6269$, $\eta = 0,02$, $\mu = 1$, $\rho = 0,985$ e $\lambda = 0,01$, em que obteve-se um limitante $\gamma_c = 10,9671$ para o controlador. Os ganhos obtidos no projeto para o controlador são

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -137,6423 & -0,2028 & -0,2449 & -0,0045 \\ -0,2153 & -140,3585 & -0,0042 & -0,2490 \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} -137,5876 & -0,1943 & -4,8441 & -0,0034 \\ -0,2182 & -140,3119 & 0,0006 & -0,2492 \end{bmatrix},$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -137,4733 & -0,1946 & -0,2449 & -0,0023 \\ -0,2063 & -140,2192 & -0,0032 & -4,9336 \end{bmatrix}, K_{14} = \begin{bmatrix} -251,4125 & 0,0633 & -4,8387 & -0,0062 \\ 0,0599 & -255,9192 & -0,0056 & -4,9275 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -131,3390 & -0,2045 & -0,2450 & -0,0043 \\ -0,2019 & -140,2985 & -0,0037 & -0,2495 \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} -131,3502 & -0,1980 & -4,8426 & -0,0052 \\ -0,2076 & -140,3133 & 0,0006 & -0,2486 \end{bmatrix},$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} -131,3371 & -0,2080 & -0,2437 & -0,0017 \\ -0,2026 & -140,2957 & -0,0036 & -4,9311 \end{bmatrix}, K_{24} = \begin{bmatrix} -131,2262 & -0,2071 & -4,8413 & -0,0007 \\ -0,2062 & -140,1745 & -0,0007 & -4,9308 \end{bmatrix},$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} -137,4622 & -0,1923 & -0,2451 & -0,0042 \\ -0,2180 & -133,8111 & -0,0039 & -0,2498 \end{bmatrix}, K_{32} = \begin{bmatrix} -137,5795 & -0,1911 & -4,8412 & -0,0038 \\ -0,2179 & -133,9382 & -0,0000 & -0,2475 \end{bmatrix},$$

$$K_{33} = \begin{bmatrix} -137,5939 & -0,1984 & -0,2443 & -0,0004 \\ -0,2111 & -133,9456 & -0,0046 & -4,9302 \end{bmatrix}, K_{34} = \begin{bmatrix} -137,5904 & -0,1964 & -4,8423 & -0,0006 \\ -0,2150 & -133,9354 & -0,0005 & -4,9317 \end{bmatrix},$$

$$K_{41} = \begin{bmatrix} -241,2946 & 4,5053 & -0,2485 & -0,0099 \\ 4,5815 & -242,3840 & -0,0087 & -0,2522 \end{bmatrix}, K_{42} = \begin{bmatrix} -131,2146 & -0,1966 & -4,8378 & -0,0045 \\ -0,2054 & -133,8214 & -0,0006 & -0,2474 \end{bmatrix},$$

$$K_{43} = \begin{bmatrix} -131,3429 & -0,1986 & -0,2433 & -0,0002 \\ -0,2004 & -133,9348 & -0,0046 & -4,9301 \end{bmatrix}, K_{44} = \begin{bmatrix} -131,4048 & -0,1954 & -4,8429 & -0,0008 \\ -0,2038 & -133,9978 & -0,0004 & -4,9324 \end{bmatrix},$$

e os ganhos do integrador são dados por

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1,7411 & 0,0020 \\ 0,0023 & 1,7755 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} 1,7403 & 0,0019 \\ 0,0024 & 1,7747 \end{bmatrix}, M_{13} = \begin{bmatrix} 1,7388 & 0,0021 \\ 0,0023 & 1,7737 \end{bmatrix}, M_{14} = \begin{bmatrix} 3,1846 & -0,0024 \\ -0,0022 & 3,2414 \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1,7405 & 0,0021 \\ 0,0022 & 1,7747 \end{bmatrix}, M_{22} = \begin{bmatrix} 1,7406 & 0,0020 \\ 0,0023 & 1,7747 \end{bmatrix}, M_{23} = \begin{bmatrix} 1,7403 & 0,0023 \\ 0,0021 & 1,7746 \end{bmatrix}, M_{24} = \begin{bmatrix} 1,7389 & 0,0023 \\ 0,0023 & 1,7728 \end{bmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1,7388 & 0,0020 \\ 0,0023 & 1,7733 \end{bmatrix}, M_{32} = \begin{bmatrix} 1,7401 & 0,0019 \\ 0,0024 & 1,7745 \end{bmatrix}, M_{33} = \begin{bmatrix} 1,7402 & 0,0022 \\ 0,0023 & 1,7748 \end{bmatrix}, M_{34} = \begin{bmatrix} 1,7402 & 0,0020 \\ 0,0023 & 1,7745 \end{bmatrix},$$

$$M_{41} = \begin{bmatrix} 3,1359 & -0,0586 \\ -0,0594 & 3,1508 \end{bmatrix}, M_{42} = \begin{bmatrix} 1,7387 & 0,0023 \\ 0,0025 & 1,7729 \end{bmatrix}, M_{43} = \begin{bmatrix} 1,7403 & 0,0022 \\ 0,0022 & 1,7746 \end{bmatrix}, M_{44} = \begin{bmatrix} 1,7411 & 0,0019 \\ 0,0021 & 1,7753 \end{bmatrix},$$

Para a simulação considerou-se referências em degrau no intervalo 0 a 1500 segundos, iniciando em 2 e 3 cm nos tanques 1 e 2. A Figura 18 apresenta os resultados

obtidos e as respectivas estimativas de $\hat{x}(k)$, e uma visualização ampliada é apresentada na Figura 19 para o intervalo de 205 a 210 s.

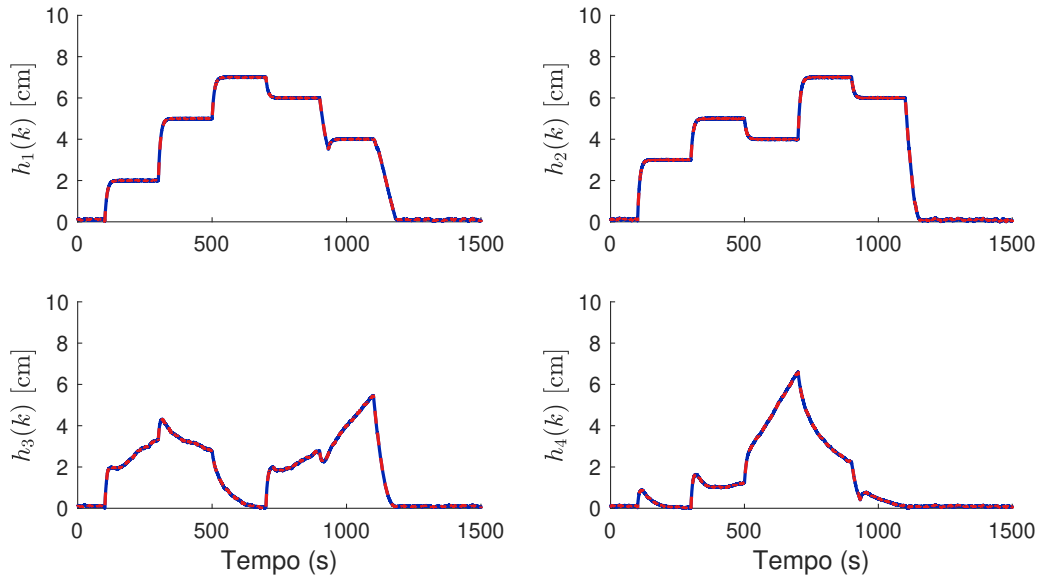


Figura 18 – Comparação entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com controlador para seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

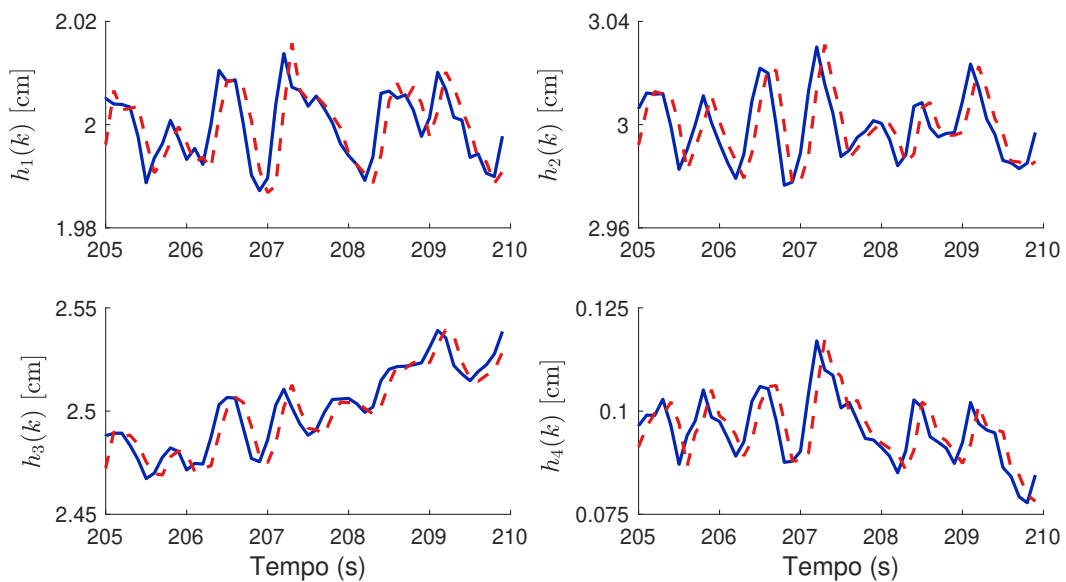


Figura 19 – Visão ampliada entre estados reais e estados estimados pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com controlador para seguimento de referência. Os estados $x(k)$ do sistema são apresentados na cor azul e os estados estimados $\hat{x}(k)$ obtidos pelo UIO são apresentados na cor vermelha.

Ao analisar os resultados, percebe-se que o sistema consegue rastrear as referências em degrau aplicadas, o que demonstra êxito do controle baseado em observador para o seguimento de referência. Por meio do resultado apresentado na Figura 19, nota-se que esse cenário de controle para seguimento de referência também possui atraso no tempo, mas que não compromete o controle para o sistema permanecer na referência estabelecida.

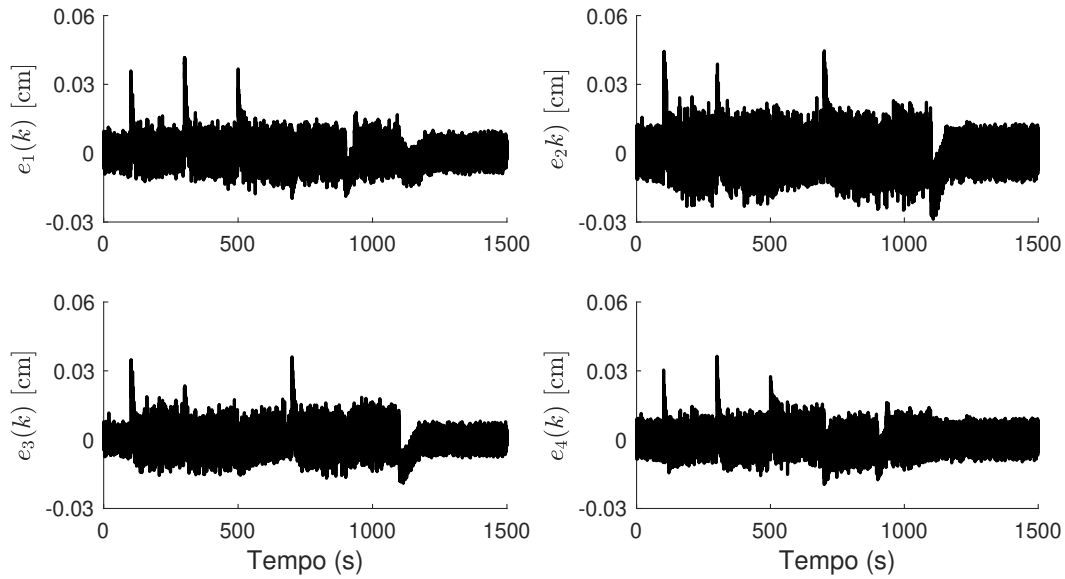


Figura 20 – Erros de estimação obtidos pelo UIO para o sistema com quatro tanques acoplados com seguimento de referência.

Nota-se que os estados estimados do vetor $\hat{x}(k)$ convergem para os estados $x(k)$ do sistema não linear, como fica evidenciado pelos erros de estimativa Figura 20. A Tabela 7 apresenta o erro RMS para cada estado do sistema.

Tabela 7 – Erro RMS para o sistema com quatro tanques acoplados – Seguimento de Referência

Estado	RMS
$x_1(k)$	0,0056
$x_2(k)$	0,0083
$x_3(k)$	0,0058
$x_4(k)$	0,0056

Ao analisar a Tabela 7 e o resultado erro de estimativa apresentado na Figura 20, percebe-se que os maiores erros ocorrem na variação da referência, mas que o observador consegue rastrear de forma adequada a estimativa para o novo estado do sistema.

Para fins de comparação, as Figuras 21 e 22 apresentam as saídas controladas do sistema e os respectivos sinais de referência aplicados aos tanques 1 e 2.

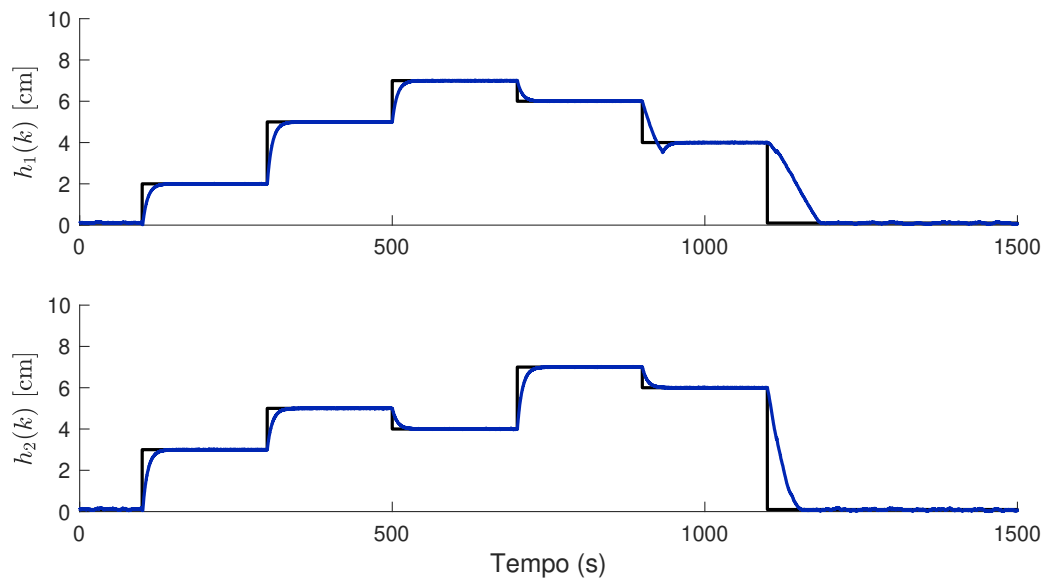


Figura 21 – Comparação entre saídas controladas e referências aplicadas para o seguimento de referência nos tanque 1 e 2.

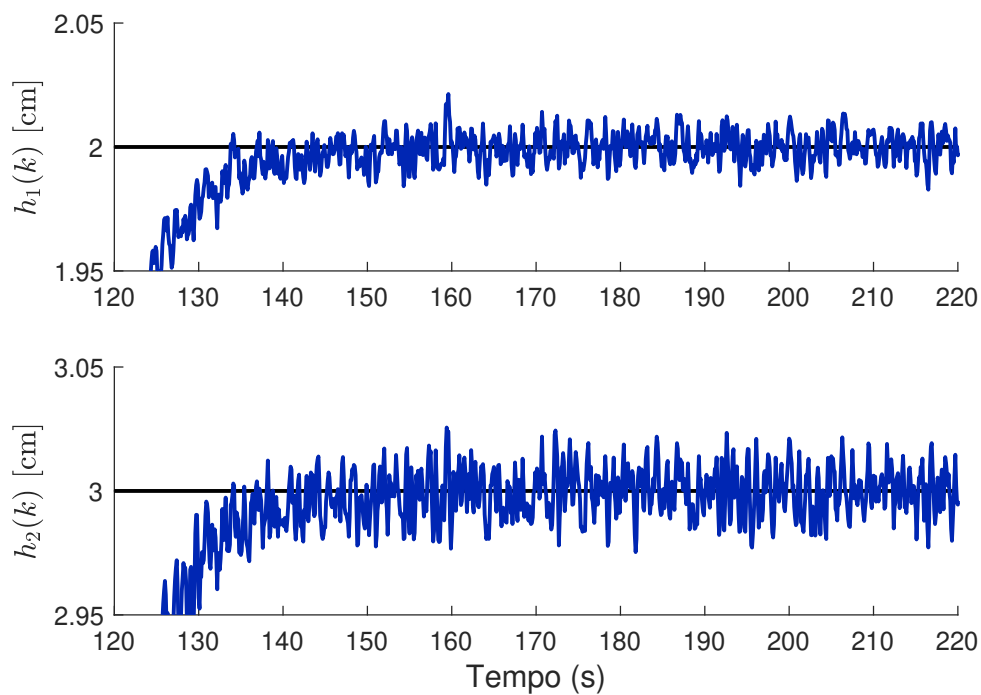


Figura 22 – Visão ampliada da comparação entre saídas controladas e referências aplicadas nos tanques 1 e 2 no intervalo de 120 a 220 s.

Nota-se que o sistema em malha fechada consegue seguir a referência estabelecida, mesmo com a presença de ruído de medição, e que os níveis dos tanques acoplados

são estimados adequadamente, obtendo a ação de controle necessária para garantir o seguimento da referência aplicada. A ação de controle é apresentada na Figura 23.

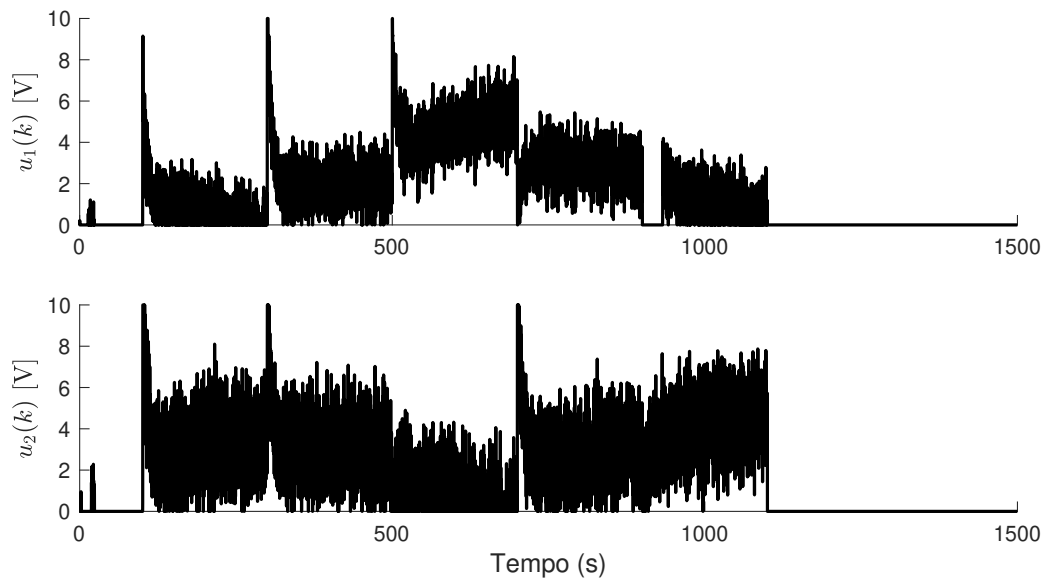


Figura 23 – Sinal de controle $u(k)$ para o sistema não linear com quatro tanques acoplados com integrador para seguimento de referência.

Pela ação de controle, observa-se que o sistema trabalha em saturação em alguns instantes, sobretudo nos instantes de transição entre níveis diferentes, mas reduz rapidamente a ação de controle e permanece em torno de uma tensão média necessária para garantir a estabilidade do sistema para a referência indicada. Além disso, devido ao intervalo de operação das bombas, as ações de controle negativas foram desconsideradas para o problema de estabilidade e seguimento de referência.

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi proposto o controle por realimentação de estados baseado em observador de entradas desconhecidas para sistemas não lineares discretos no tempo, representados por modelos nebulosos Takagi–Sugeno. Para tanto, os estados do sistema foram considerados como variáveis-premissa e, a fim de lidar com o descasamento das funções de pertinência quando estas dependem de variáveis-premissa não mensuráveis, aplicou-se o Teorema do Valor Médio no projeto do observador e dos controladores. Além disso, variáveis de folga foram adicionadas aos projetos por meio do Lema de Finsler, o que permitiu reduzir o nível de conservadorismo nos projetos. Este capítulo apresenta as conclusões do trabalho e alguns direcionamentos para possíveis trabalhos futuros.

6.1 Considerações Gerais

Por meio dos resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5, percebe-se que o observador consegue estimar os estados do sistema de forma satisfatória, pois as estimativas convergem ao valor real, mesmo na presença de entradas desconhecidas. Para tanto, o uso do Teorema 3.1 demonstra que um observador UIO nebuloso pode ser obtido para estimar de forma adequada os estados não medidos do sistema, mesmo quando o sistema TS depende dessas variáveis-premissas desconhecidas.

Os Teoremas 3.2 e 3.3 apresentaram condições para projetar o sistema em malha fechada e para o seguimento de referência, mesmo que na presença de perturbações externas ao sistema. Além disso, nota-se redução do efeito do ruído de medição nas saídas dos sistemas ao utilizar o critério robusto de custo garantido \mathcal{H}_∞ .

A seguir, são tecidas algumas conclusões acerca da aplicação do método aos dois sistemas estudados.

6.2 Aplicação para Controle do Sistema de Rotor Duplo

Devido às componentes eletromecânicas e conjuntos de não linearidades existentes, o TRMS é um sistema desafiador e complexo. Ao utilizar a metodologia proposta, o sistema não linear foi descrito em 16 vértices e obteve êxito para o controle baseado em observador UIO nebuloso no cenário de estabilidade e seguimento de referência. É importante ressaltar que os ganhos dos atuadores (k_1 , k_2) são diferentes daqueles apresentados no manual do fabricante, pois possibilitaram obter resultados mais próximos do comportamento esperado da ação de controle do que os valores apresentados no manual do fabricante.

Além disso, é necessário ressaltar que o sistema poderá operar em saturação, o que incentiva propor novos projetos de controladores considerando a saturação dos atuadores como um limitador de ganho.

6.3 Aplicação para Controle do Sistema com Quatro Tanques Aco- plados

Ao apresentar o controle de nível para um sistema com quatro tanques acoplados é possível demonstrar como o projeto de observadores e controladores nebulosos podem contribuir no cenário dos processos industriais. O sistema não linear foi representado por 16 vértices e o observador proposto obteve êxito em estimar de forma adequada os níveis dos tanques 3 e 4, o que permitiu utilizar essas estimativas para o controle baseado em observador UIO nebuloso no cenário de estabilidade e seguimento de referência. Nota-se que as estimativas produzidas pelo UIO possuem atraso no tempo, de pelo menos 1 instante de amostragem, mas que não afeta bruscamente a estimativa dos estados. Esse comportamento, evidencia a necessidade de considerar o atraso no tempo no projeto do observador, o que motiva novas pesquisas para este tema. Também é importante ressaltar que as ações de controle negativas geradas pelo controlador PDC não foram consideradas, pois os valores foram saturados em zero para estar em concordância com as características operacionais das bombas.

6.4 Artigo Desenvolvido

Um artigo sobre a utilização de UIO para o controle tolerante a falhas, intitulado "*Projeto de observadores de entradas desconhecidas e controladores tolerantes a falhas para sistemas discretos Takagi–Sugeno*" foi aceito e apresentado no *XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)* ocorrido na cidade de São João del Rei em 2025.

6.5 Trabalhos Futuros

A metodologia proposta neste trabalho possui algumas linhas de pesquisa que podem ser estendidas em trabalhos futuros. A primeira proposta é utilizar a metodologia apresentada do UIO nebuloso para projetar um módulo de diagnóstico e isolamento de falhas em sistemas discretos no tempo. Para tanto, a proposta poderá ser direcionada à estimação da entrada desconhecida, representada pelas falhas. Este é um tema recente na literatura e desafiador para as aplicações de controle, o que motiva o uso de UIO nebuloso para lidar com falhas aditiva e multiplicativa e aumentar a confiabilidade das aplicações.

Desse modo, será possível projetar um controlador tolerante a falhas, o que permite um ajuste da ação de controle nos cenários de falhas de sensores e atuadores.

A segunda proposta é considerar atrasos no tempo para sistemas discretos, o que exigirá outra abordagem para tratar as incertezas do projeto. Este é um cenário interessante e desafiador, pois atualmente os sistemas de controle são interconectados e o atraso no tempo é uma característica inerente de tais conexões.

Outra proposta para evolução desta pesquisa, é considerar a saturação no projeto dos controladores, o que permitirá obter outras condições de projeto e ampliar o cenário de controle baseado no UIO nebuloso.

Por fim, outra proposta é realizar a estimativa do domínio de atração para compreender os efeitos associados ao espaço de soluções possíveis para os projetos.

Essas propostas demonstram aumento no nível de confiabilidade das aplicações em engenharia, o que é um desafio atual para os sistemas ciber-físicos, os quais, em contexto prático, apresentam comportamento não linear. Dessa forma, torna-se possível explorar o uso de sistemas Takagi–Sugeno e de UIO nebulosos como técnicas de projeto relevantes, considerando as propostas apresentadas anteriormente, para a evolução desta pesquisa.

Referências

- ABDELMALEK, I.; GOLÉA, N.; HADJILI, M. L. A New Fuzzy Lyapunov Approach to Non-Quadratic Stabilization of Takagi–Sugeno Fuzzy Models. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Uniwersytet Zielonogórski. Oficyna Wydawnicza, v. 17, n. 1, p. 39–51, 2007. Citado na página 17.
- ALVES, W. H.; CAMPOS, V. C.; FREZZATO, L. Projeto de Observadores de Entradas Desconhecidas e Controladores Tolerantes a Falhas para Sistemas Discretos Takagi–Sugeno. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI*. São João del Rei, MG, Brasil: SBAI, 2025. Citado na página 19.
- AZAM, S. N. Linear Discrete–Time State Space Realization of a Modified Quadruple Tank System With State Estimation Using Kalman Filter. In: IOP PUBLISHING. *13th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD 2016)*. Lille, France: IOP Publishing, 2017. v. 783, n. 1, p. 012013. Citado na página 64.
- BERGSTEN, P.; PALM, R.; DRIANKOV, D. Observers for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 32, n. 1, p. 114–121, 2002. Citado na página 18.
- BHATTACHARYYA, S. Observer Design for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 3, p. 483–484, 1978. Citado na página 18.
- BOUASSEM, K.; SOULAMI, J.; ASSOUDI, A. E.; YAAGOUBI, E. E. Unknown Input Observer Design for a Class of Takagi–Sugeno Descriptor Systems. *Nonlinear Analysis and Differential Equations*, v. 4, n. 10, p. 477–492, 2016. Citado na página 19.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 31.
- CAMPOS, V. Costa da S.; NGUYEN, A.; PALHARES, R. M. LMI–Based Adaptive Control for Uncertain Polytopic Systems. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2016. p. 3222–3227. Citado na página 17.
- CAO, Y.; FRANK, P. Robust H_∞ Disturbance Attenuation for a Class of Uncertain Discrete–Time Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, n. 4, p. 406–415, 2000. Citado na página 29.
- CHADLI, M.; GUERRA, T. M. LMI Solution for Robust Static Output Feedback Control of Discrete Takagi–Sugeno Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 20, n. 6, p. 1160–1165, 2012. Citado na página 29.
- CHADLI, M.; KARIMI, H. On the Robust Design of Unknown Inputs Takagi–Sugeno Observer. In: *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Maui, HI, USA: IEEE, 2012. p. 4770–4773. Citado na página 19.

- CHEN, B.; TSENG, C.; UANG, H. Mixed H_2 / H_∞ Fuzzy Output Feedback Control Design for Nonlinear Dynamic Systems: An LMI Approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, n. 3, p. 249–265, 2000. Citado na página 17.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York: Oxford University Press, 1999. ISBN 0-19-511777-8. Citado 3 vezes nas páginas 25, 30 e 46.
- CHEN, J.; PATTON, R. J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. USA: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- CHEN, J.; PATTON, R. J.; ZHANG, H.-Y. Design of Unknown Input Observers and Robust Fault Detection Filters. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 63, n. 1, p. 85–105, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207179608921833>>. Citado na página 19.
- CHEN, J.; ZHANG, H. Robust Detection of Faulty Actuators Via Unknown Input Observers. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 22, n. 10, p. 1829–1839, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- CHEN, W.; SAIF, M. Unknown Input Observer Design for a Class of Nonlinear Systems: An LMI Approach. In: *2006 American Control Conference*. Minneapolis, MN, USA: IEEE, 2006. p. 5 pp.–. Citado na página 19.
- CHEN, W.; SAIF, M. Fuzzy Nonlinear Unknown Input Observer Design With Fault Diagnosis Applications. *Journal of Vibration and Control*, v. 16, n. 3, p. 377–401, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546309106525>>. Citado na página 19.
- CHOI, H. H.; VU, N. T.; JUNG, J. Design and Implementation of a Takagi–Sugeno Fuzzy Speed Regulator for a Permanent Magnet Synchronous Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 59, n. 8, p. 3069–3077, 2012. Citado na página 17.
- DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; XU, S. Full-Order Observers for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 3, p. 606–609, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- DORMIDO, S.; ESQUEMBRE, F. The Quadruple-Tank Process: An Interactive Tool for Control Education. In: *2003 European Control Conference (ECC)*. Cambridge, UK: IEEE, 2003. p. 3267–3272. Citado na página 64.
- DU, X.; ZHAO, H.; CHANG, X. Unknown Input Observer Design for Fuzzy Systems With Uncertainties. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 266, p. 108–118, 2015. Citado na página 19.
- ESTRADA-MANZO, V.; LENDEK, Z.; GUERRA, T. Unknown Input Estimation for Nonlinear Descriptor Systems via LMIs and Takagi–Sugeno Models. In: *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Osaka, Japan: IEEE, 2015. p. 6349–6354. Citado na página 19.
- FLORES-HERNÁNDEZ, A.; REYES-REYES, J.; ASTORGA-ZARAGOZA, C.; OSORIO-GORDILLO, G.; GARCÍA-BELTRÁN, C. Temperature Control of an Alcoholic Fermentation Process Through the Takagi–Sugeno Modeling. *Chemical Engineering Research and Design*, Elsevier, v. 140, p. 320–330, 2018. Citado na página 17.

- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. The LMI Control Toolbox. In: *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, USA: IEEE, 1994. v. 3, p. 2038–2041 vol.3. Citado na página 22.
- GAINO, R.; COVACIC, M. R.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; CARVALHO, A. A. D.; BIAZETO, A. R.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete Takagi–Sugeno Fuzzy Models Applied to Control the Knee Joint Movement of Paraplegic Patients. *IEEE Access*, v. 8, p. 32714–32726, 2020. Citado na página 17.
- GALINDO, J. A. D. Active Disturbance Rejection Control Applied to a Twin–Rotor System. Universidade Federal de Minas Gerais, 2017. Citado na página 51.
- GUADARRAMA-ESTRADA, A. R.; OSORIO-GORDILLO, G. L.; VARGAS-MÉNDEZ, R. A.; REYES-REYES, J.; ASTORGA-ZARAGOZA, C. M. Cyber–Physical System Attack Detection and Isolation: A Takagi–Sugeno Approach. *Mathematical and Computational Applications*, MDPI, v. 30, n. 1, p. 12, 2025. Citado na página 17.
- GUAN, Y.; SAIF, M. A Novel Approach to the Design of Unknown Input Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 5, p. 632–635, 1991. Citado na página 18.
- GUERRA, T.; PERRUQUETTI, W. Non–Quadratic Stabilisation of Discrete Takagi Sugeno Fuzzy Models. In: *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. (Cat. No.01CH37297)*. Melbourne, VIC, Australia: IEEE, 2001. v. 3, p. 1271–1274 vol.2. Citado na página 17.
- GUERRA, T. M.; MÁRQUEZ, R.; KRUSZEWSKI, A.; BERNAL, M. H_∞ LMI–Based Observer Design for Nonlinear Systems via Takagi–Sugeno Models With Unmeasured Premise Variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 26, n. 3, p. 1498–1509, 2017. Citado 11 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 29, 31, 32, 36, 37, 38 e 40.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. Control Laws for Takagi–Sugeno Fuzzy Models. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 120, n. 1, p. 95–108, 2001. Citado na página 17.
- HAMMOUDI, M. Y.; BENBOUZID, M. E. H.; RIZOUG, N.; ALLAG, A. New State Observer Based on Takagi–Sugeno Fuzzy Controller of Induction Motor. In: *2015 4th International Conference on Systems and Control (ICSC)*. Sousse, Tunisia: IEEE, 2015. p. 145–150. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- HOU, M.; MULLER, P. Design of Observers for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 6, p. 871–875, 1992. Citado na página 19.
- HUANG, X.; CHANG, C.; LI, J.; XIAO, S.; SU, Q. Cooperative Interaction Observer–Based Security Control for T–S Fuzzy Cyber–Physical Systems Against Sensor and Actuator Attacks. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 73, n. 4, p. 1982–1992, 2024. Citado na página 17.
- HUŠEK, P.; NARENATHREYAS, K. Aircraft Longitudinal Motion Control Based on Takagi–Sugeno Fuzzy Model. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 49, p. 269–278, 2016. Citado na página 17.

- JI, Z.; ZHOU, Y.; SHEN, Y. Stabilization of a Class of Fuzzy Control Systems via Piecewise Fuzzy Lyapunov Function Approach. In: *2007 American Control Conference*. New York, NY, USA: IEEE, 2007. p. 4065–4070. Citado na página 17.
- JOHANSSON, K. The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process With an Adjustable Zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 66.
- JOHANSSON, K.; HORCH, A.; WIJK, O.; HANSSON, A. Teaching Multivariable Control Using the Quadruple-Tank Process. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*. Phoenix, AZ, USA: IEEE, 1999. v. 1, p. 807–812 vol.1. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 66.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. v. 82, p. 35–45, 1960. Citado na página 18.
- KAMAL, E.; AITOUICHE, A.; OUEIDAT, M. Fuzzy Fault-Tolerant Control of Wind-Diesel Hybrid Systems Subject to Sensor Faults. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, v. 4, n. 4, p. 857–866, 2013. Citado na página 17.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2002. Citado na página 16.
- KHIAR, D.; LAUBER, J.; FLOQUET, T.; COLIN, G.; GUERRA, T. M.; CHAMAILLARD, Y. Robust Takagi-Sugeno Fuzzy Control of a Spark Ignition Engine. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 15, n. 12, p. 1446–1456, 2007. Citado na página 17.
- KIM, E.; LEE, H. New Approaches to Relaxed Quadratic Stability Condition of Fuzzy Control Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000. Citado na página 17.
- KISS, A. N.; MARX, B.; MOURROT, G.; SCHUTZ, G.; RAGOT, J. Observers Design for Uncertain Takagi-Sugeno Systems With Unmeasurable Premise Variables and Unknown Inputs. Application to a Wastewater Treatment Plant. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 21, n. 7, p. 1105–1114, 2011. Citado na página 17.
- KORBICZ, J.; WITCZAK, M.; PUIG, V. LMI-Based Strategies for Designing Observers and Unknown Input Observers for Non-Linear Discrete-Time Systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, Polska Akademia Nauk, v. 55, n. 1, 2007. Citado na página 19.
- KUDVA, P.; VISWANADHAM, N.; RAMAKRISHNA, A. Observers for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 25, n. 1, p. 113–115, 1980. Citado na página 18.
- LAN, J.; PATTON, R. J. Integrated Design of Fault-Tolerant Control for Nonlinear Systems Based on Fault Estimation and T-S Fuzzy Modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 25, n. 5, p. 1141–1154, 2017. Citado na página 17.
- LI, S.; AITOUICHE, A.; WANG, H.; CHRISTOV, N. Sensor Fault Estimation of PEM Fuel Cells Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model. *International Journal of Hydrogen Energy*, Elsevier, v. 45, n. 19, p. 11267–11275, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

- LIU, J.; YIN, T.; CAO, J.; YUE, D.; KARIMI, H. R. Security Control for T–S Fuzzy Systems With Adaptive Event–Triggered Mechanism and Multiple Cyber–Attacks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 51, n. 10, p. 6544–6554, 2021. Citado na página 17.
- LIU, Q.; LONG, Y.; LI, T.; CHEN, C. L. P. Attack Resilient Fault Tolerant Control for T–S Fuzzy Cyber–Physical Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 32, n. 4, p. 2017–2028, 2024. Citado na página 19.
- LIU, X.; GAO, Z.; CHEN, M. Z. Q. Takagi–Sugeno Fuzzy Model Based Fault Estimation and Signal Compensation With Application to Wind Turbines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 64, n. 7, p. 5678–5689, 2017. Citado na página 19.
- LIU, X.; ZHANG, Q. Approaches to Quadratic Stability Conditions and H_∞ Control Designs for T–S Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 11, n. 6, p. 830–839, 2003. Citado na página 17.
- LOFBERG, J. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004. p. 284–289. Citado na página 22.
- LOPEZ-TORIBIO, C.; PATTON, R. Takagi–Sugeno Fuzzy Fault–Tolerant Control for a Non–Linear System. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*. Phoenix, AZ, USA: IEEE, 1999. v. 5, p. 4368–4373 vol.5. Citado na página 17.
- LTD., F. S. *Twin Rotor MIMO System Control Experiments*. Crowborough, UK, 2006. Manual Técnico. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- LUENBERGER, D. Observers for Multivariable Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, n. 2, p. 190–197, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 26.
- LUENBERGER, D. G. Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, v. 8, n. 2, p. 74–80, 1964. Citado 3 vezes nas páginas 18, 24 e 26.
- MA, X.; SUN, Z.; HE, Y. Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 6, n. 1, p. 41–51, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.
- MA, Y.; YANG, P.; ZHANG, Q. Robust H_∞ Control for Uncertain Singular Discrete T–S Fuzzy Time–Delay Systems With Actuator Saturation. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 353, n. 13, p. 3290–3311, 2016. Citado na página 17.
- MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *International Journal of Man–Machine Studies*, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 1–13, 1975. Citado na página 16.
- MEDITCH, J. S.; HOSTETTER, G. H. Observers for Systems With Unknown and Inaccessible Inputs. In: *1973 IEEE Conference on Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes*. San Diego, CA, USA: IEEE, 1973. p. 120–124. Citado na página 18.

- MOHAMED, K.; CHADLI, M.; CHAABANE, M. Unknown Inputs Observer for a Class of Nonlinear Uncertain Systems: An LMI Approach. *International Journal of Automation and Computing*, Springer, v. 9, n. 3, p. 331–336, 2012. Citado na página 19.
- MONDAL, S.; CHAKRABORTY, G.; BHATTACHARYY, K. LMI Approach to Robust Unknown Input Observer Design for Continuous Systems With Noise and Uncertainties. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 8, n. 2, p. 210–219, 2010. Citado na página 19.
- MORENO-SÁENZ, J.; CHEN, Y.; TANAKA, K.; ARAGÓN, J. L.; QUIROZ-JUÁREZ, M. A. A Takagi–Sugeno Fuzzy–Model–Based Tracking Framework to Regulate Heart Rhythm Dynamics. *IEEE Access*, v. 11, p. 47223–47235, 2023. Citado na página 17.
- MOSEK APS. Mosek Optimization Toolbox for Matlab. *User’s Guide and Reference Manual, Version*, v. 4, n. 1, p. 116, 2019. Citado na página 22.
- MU, Y.; ZHANG, H.; SU, H.; REN, H. Unknown Input Observer Synthesis for Discrete–Time T–S Fuzzy Singular Systems With Application to Actuator Fault Estimation. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 100, n. 4, p. 3399–3412, 2020. Citado na página 19.
- NEJJARI, F.; ROTONDO, D.; PUIG, V.; INNOCENTI, M. LPV Modelling and Control of a Twin Rotor MIMO System. In: *2011 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)*. Corfu, Greece: IEEE, 2011. p. 1082–1087. Citado na página 51.
- NETO, A. W.; TOGNETTI, E. S.; FORTALEZA, E. L. Estudo Comparativo Entre Filtros de Kalman Clássicos e Fuzzy Takagi–Sugeno em um Processo de Benchmark de Quatro Tanques. In: *Congresso Brasileiro de Automática–CBA*. João Pessoa, PB, Brasil: SBA, 2019. v. 1, n. 1. Citado na página 64.
- NEVES, G. P. das; BARBOSA, F. S.; COSTA, P. S.; ANGÉLICO, B. A. Discrete Time LQG/LTR Applied to a Practical Quadruple Tank System. In: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. Buenos Aires, Argentina: IEEE, 2016. p. 1232–1237. Citado na página 64.
- NGUYEN, A.; CAMPOS, V.; GUERRA, T.; PAN, J.; XIE, W. Takagi–Sugeno Fuzzy Observer Design for Nonlinear Descriptor Systems With Unmeasured Premise Variables and Unknown Inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 31, n. 17, p. 8353–8372, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- NGUYEN, A.; DINH, T. Q.; GUERRA, T.; PAN, J. Takagi–Sugeno Fuzzy Unknown Input Observers to Estimate Nonlinear Dynamics of Autonomous Ground Vehicles: Theory and Real–Time Verification. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 26, n. 3, p. 1328–1338, 2021. Citado na página 19.
- NGUYEN, A.; PAN, J.; GUERRA, T.; WANG, Z. Avoiding Unmeasured Premise Variables in Designing Unknown Input Observers for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems. *IEEE Control Systems Letters*, v. 5, n. 1, p. 79–84, 2021. Citado na página 19.
- NGUYEN, A.; TANIGUCHI, T.; ECIOLAZA, L.; CAMPOS, V.; PALHARES, R.; SUGENO, M. Fuzzy Control Systems: Past, Present and Future. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, v. 14, n. 1, p. 56–68, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.

- OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Fuzzy Modeling Via Sector Nonlinearity Concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 10, n. 4, p. 333–341, 2003. Citado na página 28.
- OLIVEIRA, M. C. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 32.
- OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability Tests for Constrained Linear Systems. In: *Perspectives in Robust Control*. London: Springer, 2001. p. 241–257. Citado na página 31.
- PAN, J.; NGUYEN, T. A.; WANG, S.; DENG, H.; ZHANG, H. Fuzzy Unknown Input Observer for Estimating Sensor and Actuator Cyber-Attacks in Intelligent Connected Vehicles. *Automotive Innovation*, v. 6, n. 2, p. 164–175, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- PATTON, R. J.; CHEN, J. Observer-Based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 5, n. 5, p. 671–682, 1997. Citado na página 19.
- PEIXOTO, M. L.; NGUYEN, A.; GUERRA, T.; PALHARES, R. M. Unknown Input Observers for Time-Varying Delay Takagi-Sugeno Fuzzy Systems With Unmeasured Nonlinear Consequents. *European Journal of Control*, Elsevier, v. 72, p. 100830, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- QUADROS, M. M.; LEITE, V. J.; PALHARES, R. M. Robust Fault Hiding Approach for T-S Fuzzy Systems With Unmeasured Premise Variables. *Information Sciences*, Elsevier, v. 589, p. 690–715, 2022. Citado na página 17.
- RODRÍGUEZ, J. I. B.; HERNÁNDEZ-DE-LEÓN, H. R.; MARÍN, J. A.; SANTIAGO, A. M.; GÓMEZ, E. N. E.; ZAPATA, B. Y. L.; GUZMÁN-RABASA, J. A. Fault Diagnosis for Takagi-Sugeno Model Wind Turbine Pitch System. *IEEE Access*, v. 12, p. 25296–25308, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- ROTONDO, D.; NEJJARI, F.; PUIG, V. Quasi-LPV Modeling, Identification and Control of a Twin Rotor MIMO System. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 21, n. 6, p. 829–846, 2013. Citado na página 51.
- SAIFIA, D.; CHADLI, M.; LABIOD, S. H_∞ Control of Multiple Model Subject to Actuator Saturation: Application to Quarter-Car Suspension System. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Springer, v. 69, n. 1, p. 81–90, 2011. Citado na página 17.
- SAIFIA, D.; CHADLI, M.; LABIOD, S.; GUERRA, T. M. Robust H_∞ Static Output-Feedback Control for Discrete-Time Fuzzy Systems With Actuator Saturation Via Fuzzy Lyapunov Functions. *Asian Journal of Control*, Wiley Online Library, v. 22, n. 2, p. 611–623, 2020. Citado na página 17.
- SCHERER, C.; WEILAND, S. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. Citado na página 24.

- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Citado na página 22.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 26.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A Multiple Lyapunov Function Approach to Stabilization of Fuzzy Control Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003. Citado na página 17.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 29.
- TANAKA, K.; NISHIMURA, M.; WANG, H. Multi-Objective Fuzzy Control of High Rise/High Speed Elevators Using LMIs. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)*. Philadelphia, PA, USA: IEEE, 1998. v. 6, p. 3450–3454 vol.6. Citado na página 17.
- TANAKA, K.; SANO, M. Fuzzy Stability Criterion of a Class of Nonlinear Systems. *Information Sciences*, Elsevier, v. 71, n. 1-2, p. 3–26, 1993. Citado na página 22.
- TANAKA, K.; SANO, M. On the Concepts of Regulator and Observer of Fuzzy Control Systems. In: *Proceedings of 1994 IEEE 3rd International Fuzzy Systems Conference*. Orlando, FL, USA: IEEE, 1994. p. 767–772 vol.2. Citado na página 29.
- TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 23, 29 e 30.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001. Citado 9 vezes nas páginas 16, 17, 18, 26, 27, 28, 29, 30 e 46.
- TASTEMIROV, A.; LECCHINI-VISINTINI, A.; MORALES-VIVIESCAS, R. M. Complete Dynamic Model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) With Experimental Validation. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 66, p. 89–98, 2017. Citado na página 51.
- TEIXEIRA, M.; ASSUNCAO, E.; AVELLAR, R. On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 29.
- TIAN, E.; YUE, D.; ZHANG, Y. Delay-Dependent Robust H_∞ Control for T–S Fuzzy System With Interval Time-Varying Delay. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 160, n. 12, p. 1708–1719, 2009. Citado na página 17.
- VU, V.; WANG, W.; ZURADA, J. M.; CHEN, H.; CHIU, C. Unknown Input Method Based Observer Synthesis for a Discrete Time Uncertain T–S Fuzzy System. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 26, n. 2, p. 761–770, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

- WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model. In: *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Yokohama, Japan: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538 vol.2. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.
- WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.
- WANG, S.; WANG, E.; DORATO, P. Observing the States of Systems With Unmeasurable Disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 20, n. 5, p. 716–717, 1975. Citado na página 18.
- WU, H.; CAI, K. H_2 Guaranteed Cost Fuzzy Control for Uncertain Nonlinear Systems via Linear Matrix Inequalities. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 148, n. 3, p. 411–429, 2004. Citado na página 17.
- WU, H.; CAI, K. H_2 Guaranteed Cost Fuzzy Control Design for Discrete-Time Nonlinear Systems With Parameter Uncertainty. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 7, p. 1183–1188, 2006. Citado na página 17.
- YANG, F.; WILDE, R. Observers for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 7, p. 677–681, 1988. Citado na página 18.
- YANG, W.; TONG, S. Output Feedback Robust Stabilization of Switched Fuzzy Systems With Time-Delay and Actuator Saturation. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 164, p. 173–181, 2015. Citado na página 17.
- YEH, S.; CHANG, W.; WANG, W. Unknown Input Based Observer Synthesis for Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *IET Control Theory & Applications*, Wiley Online Library, v. 9, n. 5, p. 729–735, 2015. Citado na página 19.
- ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. Citado 3 vezes nas páginas 16, 26 e 27.
- ZENG, K.; ZHANG, N.; XU, W. A Comparative Study on Sufficient Conditions for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems as Universal Approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, n. 6, p. 773–780, 2000. Citado na página 26.
- ZHANG, K.; JIANG, B.; CHEN, F.; YANG, X. Piecewise Fault Estimation Observer Design for Discrete-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. In: *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai, China: IEEE, 2011. p. 4182–4187. Citado na página 17.