EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

FÍSICA EXPERIMENTAL I

Wagner Corradi
Sérgio Luiz Araújo Vieira
Rodrigo Dias Társia
Ruth Marina Lemos Ribeiro
Karla Balzuweit

EDITORA UFMG

FÍSICA EXPERIMENTAL I

Wagner Corradi
Sérgio Luiz Araújo Vieira
Rodrigo Dias Társia
Ruth Marina Lemos Ribeiro
Karla Balzuweit

FÍSICA EXPERIMENTAL I

1ª reimpressão

Belo Horizonte
Editora UFMG
2008

F532 Física experimental I / Wagner Corradi ...[et al.] - Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

112 p. – il. (Educação a Distância)

ISBN: 978-85-7041-622-3

1. Física. 2. Mecânica. 3.Termodinânica. 4. Eletromagnetismo. I. Corradi, Wagner. II. Série.

CDD: 530
CDU: 53

Elaborada pela Central de Controle de Qualidade da Catalogação da Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE QUÍMICA: Amary César Ferreira
EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO: Lílian de Oliveira
REVISÃO DE PROVAS: Lílian de Oliveira, Maria do Rosário Alves Pereira
PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren M. Santos
PROJETO GRÁFICO e CAPA: Eduardo Ferreira
FORMATAÇÃO: Warren M. Santos

EDITORA UFMG
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: +55 31 3409-4650 - Fax: +55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br / editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: +55 31 3409-4054 - Fax: +55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

A Educação a Distância (EAD) é uma modalidade de ensino que busca promover inserção social pela disseminação de meios e processos de democratização do conhecimento. A meta é elevar os índices de escolaridade e oferecer uma educação de qualidade, disponibilizando uma formação inicial e/ou continuada, em particular, a professores que não tiveram acesso a esse ensino.

Não se pode ignorar que é fundamental haver, sempre, plena conexão entre educação e aprendizagem. A modalidade a distância é um tipo de aprendizagem que, em especial na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), já está concretizada como um ensino de qualidade. Hoje, a aprendizagem tornou-se, para todos os profissionais dessa universidade envolvidos no programa de Educação a Distância, sinônimo de esforço e dedicação de cada um.

Este livro visa desenvolver no curso a distância os mesmos conhecimentos proporcionados num curso presencial. Os alunos estudarão o material nele contido e muitos outros, que lhe serão sugeridos em bibliografia complementar. É importante terem em vista que essas leituras são de extrema importância para, com muita dedicação, avançarem em seus estudos.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas e, em cada uma delas, trata-se de determinado tema, que é explorado de diferentes formas – textos, apresentações, reflexões e indagações teóricas, experimentações ou orientações para atividades a serem realizadas pelos alunos. Os objetivos propostos em cada uma das aulas indicam as competências e habilidades que os alunos, ao final da disciplina, devem ter adquirido.

Os exercícios indicados ao final de cada aula possibilitam aos alunos avaliarem sua aprendizagem e seu progresso em cada passo do curso. Espera-se que, assim, eles se tornem autônomos, responsáveis, críticos e decisivos, capazes, sobretudo, de desenvolver a própria capacidade intelectual. Os alunos não podem se esquecer de que toda a equipe de professores e tutores responsáveis pelo curso estará, a distância ou presente nos polos, pronta a ajudá-los. Além disso, o estudo em grupo, a discussão e a troca de conhecimentos com os colegas serão, nessa modalidade de ensino, de grande importância ao longo do curso.

Agradeço aos autores e à equipe de produção pela competência, pelo empenho e pelo tempo dedicado à preparação deste e dos demais livros dos cursos de EAD. Espero que cada um deles possa ser valioso para os alunos, pois tenho certeza de que vão contribuir muito para o sucesso profissional de todos eles, em seus respectivos cursos, na área da educação em geral do país.

Ione Maria Ferreira de Oliveira
Coordenadora do Sistema Universidade Aberta do Brasil
(UAB/UFMG)

SUMÁRIO

Apresentação

A elaboração deste livro nasceu da vontade de se produzir um material didático adequado ao Ensino a Distância (EAD) de Física Experimental na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Mesmo na modalidade EAD, pela sua própria concepção, as disciplinas de laboratório de física ocorrem de maneira presencial. Contudo, algumas adaptações ainda se fazem necessárias nos textos usualmente empregados nos laboratórios de física.

O material utilizado como ponto de partida foi o livro de experimentos *Física Experimental Básica na Universidade*, publicado pela Editora UFMG, e elaborado pelos professores do Departamento de Física: dr. Agostinho Aurélio Campos, dr. Elmo Salomão Alves e dr. Nivaldo Lúcio Speziali, a partir de um conjunto de roteiros que vêm sendo elaborados, aprimorados e utilizados durante vários anos nas disciplinas de laboratório por grande parte dos professores do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais.

O trabalho de elaboração, adequação e preparação dos manuscritos e figuras que deram origem a este livro é de responsabilidade dos autores. Grande parte deste esforço contou com a colaboração imprescindível dos estudantes Marcelo Angelo Diniz Alessio e Wanderson Silva de Oliveira.

Os Autores

Informações Gerais

1. FÍSICA EXPERIMENTAL I NA MODALIDADE DE ENSINO A DISTÂNCIA

As atividades deste curso são propostas em três unidades, divididas em aulas que começam por uma pequena discussão sobre a atitude e o comportamento que se espera do estudante em um laboratório de física, bem como a apresentação de resultados dos experimentos. Também são discutidas as medições, a determinação das incertezas associadas, a construção e análise de gráficos e tabelas e a utilização de recursos computacionais. Em seguida é discutido o ajuste de curvas por regressão linear e não-linear. Essas informações são necessárias e suficientes para que o aluno faça corretamente as medidas, calcule as incertezas e suas propagações envolvidas, faça o tratamento de dados proposto nas atividades práticas e redija um relatório com qualidade e rigor científico. Por último, são propostos experimentos nos quais todas essas habilidades são necessárias ao mesmo tempo. A seqüência reflete a evolução na abordagem e na complexidade dos problemas de um experimento para o seguinte.

Os experimentos abrangem conteúdos distintos de Física Básica –Mecânica, Termodinâmica, Hidrostática, Eletricidade e Oscilações – respeitando-se seu nível introdutório. Em todos os experimentos supõe-se que o estudante tenha domínio dos conceitos de Física no nível do Ensino Médio, e naqueles mais complexos exige-se conhecimento de Cálculo, só estudado na universidade. Em cada roteiro, a introdução contém o embasamento necessário para o bom aproveitamento da atividade prática. Se um formalismo mais detalhado ou mais aprofundado for interessante para o aluno, indica-se uma referência bibliográfica extra.

A vivência nos laboratórios tem mostrado que, embora aulas expositivas e aulas de laboratório sejam complementares no processo de aprendizagem de um assunto, a sua ordem não tem, necessariamente, que priorizar a exposição teórica antes da atividade prática. Se, por um lado, a exposição teórica prévia prepara o aluno para uma melhor compreensão do conteúdo abordado em um experimento, por outro, a realização do experimento antes da abordagem do conteúdo em uma aula expositiva ressalta os aspectos fenomenológicos e inicia o aluno no seu estudo formal ao envolvê-lo com a aplicação das leis físicas relacionadas.

2. PROGRAMA DA DISCIPLINA

Unidade 1: **Obtenção e Tratamento de Dados**. Nessa unidade são enfatizados a atitude e o comportamento em um laboratório de física, o processo de medição, a expressão de resultados experimentais com avaliação das incertezas envolvidas, análise de gráficos e tabelas, bem como a confecção de um relatório técnico-científico.

Unidade 2: **Ajuste de Curvas pelos Processos de Regressão Linear e de Linearização**. Nessa unidade são enfatizados o cálculo da equação da melhor reta, pelo processo de regressão linear, e o processo de linearização de curvas.

Unidade 3: **Ajuste de Curvas por Regressão Não-linear**. Nessa unidade são enfatizados os processos de ajuste de curvas por regressão não-linear para os casos de dependência do tipo lei de potência, polinomial, exponencial e logarítmica.

Tabela 1
Atividades práticas propostas

UNIDADE 1	UNIDADE 2	UNIDADE 3
Uso de aparelhos de medida	Constante elástica de molas	Colisões inelásticas
Atrito estático	Módulo de flexão de uma haste	Movimento de um projétil
Elemento resistivo linear	Pêndulo simples	Lei de Newton para o resfriamento
Densidade de um líquido		Movimento combinado de translação e rotação
		Momento de inércia
		Deformação inelástica e processo irreversível

3. FUNCIONAMENTO DO LABORATÓRIO

Sugere-se que os alunos trabalhem em duplas, ou, no máximo, em grupos de três estudantes. No entanto, cada estudante deverá entregar o seu próprio relatório, pois consideramos que cada um tem de trabalhar sua própria habilidade de confeccionar um relatório técnico-científico. A avaliação será baseada nos relatórios semanais e nas provas, nas quais o aluno deverá realizar um determinado experimento.

As discussões em grupo são muito instrutivas e produtivas. Evite recorrer ao professor logo na primeira dúvida. Tente chegar à resposta e somente depois chame o seu professor.

Os detalhes do funcionamento da disciplina e o cronograma serão distribuídos no início do período letivo. Quaisquer dúvidas relacionadas à disciplina poderão ser endereçadas aos tutores locais, numa primeira instância, posteriormente, aos coordenadores do curso.

4. RECOMENDAÇÕES GERAIS AOS ALUNOS

1. O uso do material didático desta disciplina é imprescindível a partir da primeira aula.
2. O aluno deverá se inteirar, a partir da primeira aula, das instalações do laboratório, bem como de suas normas de funcionamento.
3. O material do laboratório deve ser usado sempre de maneira adequada.
4. Não é permitido fumar, comer ou beber no laboratório.
5. A bancada deve ser deixada limpa e organizada ao final de cada atividade.
6. Devem ser evitadas conversas em voz alta e assuntos alheios à aula.

5. INSTRUÇÕES PARA ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO TÉCNICO-CIENTÍFICO

A finalidade do relatório é fazer com que o aluno aprenda e/ou aperfeiçoe uma maneira de apresentar corretamente resultados obtidos em um experimento, dentro de uma estrutura adequada, em que estejam presentes as informações relevantes e necessárias ao entendimento do procedimento que foi desenvolvido. O relatório é o "primeiro artigo científico que se escreve". A redação deve ser feita de forma a permitir que uma pessoa (colega) que não tenha feito o experimento e não conheça o roteiro entenda o que foi feito.

A seguir é sugerida uma seqüência razoável para a confecção de um relatório.

a) Título do trabalho

b) Autor(es), turma, local e data

c) Objetivos da experiência

Deve conter uma descrição sucinta do que se pretende verificar e/ou aprender com o experimento.

d) Introdução

Deve ser feita uma breve apresentação do experimento: que fenômeno será estudado, que medidas serão feitas, que relações matemáticas são relevantes. Para tanto, deve-se consultar com antecedência a bibliografia sugerida.

e) Parte experimental e discussão

Este é um dos itens mais relevantes, sendo o corpo do relatório propriamente. É aqui que deverão ser descritos o material e instrumentos utilizados, os procedimentos experimentais, os métodos de medida e os cálculos envolvidos (cálculos intermediários não devem ser apresentados). Deve-se apresentar uma discussão dos resultados obtidos, relacionando-os com os modelos e métodos empregados para sua obtenção. A apresentação dos resultados das medidas realizadas e das grandezas relevantes encontradas deve ser feita de maneira clara (em tabelas e/ou gráficos, quando for o caso) salientando-se os valores obtidos para as grandezas mais relevantes. Sempre que se trabalha com medidas, é de fundamental importância a utilização do número correto de algarismos significativos para expressá-las assim como a indicação do erro (ou desvio) experimental e das unidades associadas a essas grandezas. É conveniente usar o Sistema Internacional de Unidades. No Anexo A são encontradas informações úteis sobre algumas constantes físicas.

f) Conclusões

É importante que no relatório sejam apresentadas conclusões contendo um sumário do que foi feito e dos resultados finais obtidos, tendo em vista os objetivos iniciais. Uma pergunta que se pode colocar ao redigir a conclusão é: “o que eu aprendi com esse experimento?”. Não cabem elucubrações do tipo: “como este experimento vai ser importante para a minha vida” ou pérolas do gênero.

6. CONSIDERAÇÕES PARA A CORREÇÃO DE UM RELATÓRIO

Podemos dividir os erros usualmente cometidos na confecção de um relatório em três níveis: **Erros leves (Δ)**, **Erros médios (∗)** e **Erros graves (Θ)**. A seguir indicamos como tais erros são considerados na correção:

A) APRESENTAÇÃO DO RELATÓRIO

(Δ) O relatório apresenta alguma parte ilegível e/ou apresenta erros de linguagem.

(Δ) Os resultados não foram apresentados em tabelas.

(∗) O relatório está incompleto (título, objetivos, introdução, procedimentos, discussão, conclusão).

(∗) Os gráficos não foram apresentados corretamente (escalas adequadas, títulos nos eixos e unidades).

(Θ) Os procedimentos não foram descritos de forma clara, não revelando o que foi feito (ou foi feita uma cópia do roteiro).

(Θ) Há erros recorrentes em relação a relatórios anteriores.

B) PARTE EXPERIMENTAL

(∗) As medidas não foram apresentadas com seus respectivos erros (estimados ou calculados).

(∗) As medidas não estão corretas quanto ao número de algarismos significativos e/ou unidades.

(∗) A quantidade de observações (medidas) foi insuficiente.

(Θ) Não foram apresentadas todas as medidas e/ou valores de grandezas necessárias.

(Θ) As medidas estão incorretas (pouco cuidado nas medições ou não se entendeu o que deveria ser feito).

(Θ) Não foram realizados todos os itens da experiência.

C) DISCUSSÃO

(∗) A discussão/interpretação dos resultados está confusa, incompleta ou contraditória.

(∗) Não foram respondidas todas as questões contidas no roteiro.

(Θ) Há erros conceituais na discussão/interpretação dos resultados.

(Θ) Há resultados que não foram explicados e/ou discutidos.

(Θ) Há algum resultado MUITO diferente do esperado ou muito fora do bom senso.

UNIDADE 1
Obtenção e tratamento de dados

OBJETIVOS DESTA UNIDADE

- Discutir a atitude e o comportamento esperados do estudante no laboratório de física.
- Aprender a expressar resultados experimentais com avaliação das incertezas envolvidas.
- Analisar gráficos e tabelas.
- Elaborar um relatório técnico-científico.

AULA 1

Medidas e resultados em experimentos

OBJETIVOS
- Aprender a se comportar diante de um experimento envolvendo coleta e análise de dados em física.
- Aprender a realizar medidas e expressar corretamente seus valores e respectivas incertezas.

1.1 ATITUDE E COMPORTAMENTO

A disciplina Física Experimental I tem o objetivo de introduzir o aluno em técnicas de obtenção, tratamento e análise de dados em experimentos de Física, bem como discutir a apresentação de resultados na forma de um relatório técnico-científico. Pretende-se que o estudante adquira e desenvolva atitudes corretas frente a um problema experimental, dando-se ênfase a: utilização de instrumentos de medida, cuidado na aquisição de dados, atenção para incertezas nas medidas diretas e indiretas, métodos de tratamento numérico de dados e apresentação final dos resultados. Os recursos computacionais devem ser considerados parte integrante do laboratório e devem ser utilizados sempre que possível – em particular, na construção e análise de gráficos.

Para tanto, é imprescindível que se elabore uma seqüência de trabalho. De início, deve-se ter clareza sobre o problema que se pretende estudar, sendo fundamental que se consiga elaborar os objetivos pretendidos. Antes de se realizar propriamente o experimento, deve-se preparar o material necessário a sua montagem: equipamentos e instrumentos, ferramentas de cálculo e tratamento de medidas. Após a determinação das etapas a serem desenvolvidas e a maneira de desenvolvê-las, ou seja, após se estabelecer o procedimento a ser seguido, passa-se a sua execução. Geralmente, a obtenção de informações é feita através da realização de um conjunto de medidas de grandezas relacionadas direta ou indiretamente com o fenômeno em questão.

O conjunto de dados coletados passa por uma análise, devendo, então, ser preparado para apresentação – tabelas, gráficos, tratamento matemático. Após essa parte inicial de experimentação, é fundamental que se faça uma interpretação dos resultados e uma análise crítica de tudo o que foi feito para se chegar às conclusões apresentadas. O registro desse conjunto de atividades é feito na forma de um relatório, que precisa ser suficientemente claro e completo para permitir que uma pessoa que o leia compreenda o que foi feito, como foi feito, por que foi feito e qual a relevância dos resultados encontrados.

1.2 MEDIDAS E RESULTADOS EM EXPERIMENTOS

Na seqüência deste texto será apresentado um resumo da terminologia e das regras relativas à avaliação e à expressão de medidas. No que segue, serão discutidas as incertezas de medição. Também serão apresentados processos de análise de resultados, com tratamento gráfico e métodos numéricos de ajustes de curvas. Pretende-se, aqui, fornecer informações básicas para a abordagem de problemas experimentais simples, nos níveis dos experimentos contidos nesta obra, em que as incertezas nos resultados são originadas apenas dos procedimentos de medidas e dos dados obtidos. Optou-se pela apresentação de métodos simplificados, mas que, ainda assim, satisfazem os propósitos gerais do livro.

1.2.1- O significado de uma medida e sua incerteza

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra, de mesma natureza, escolhida como unidade. O resultado dessa comparação, denominado *medida da grandeza*, contém as seguintes informações: *o valor da grandeza*, *a precisão da medição* – expressa pelo número de algarismos significativos e pela incerteza – e *a unidade*. No Brasil, o sistema legal de unidades é o SI – Sistema Internacional –, em que são definidos padrões para comprimento, massa, tempo e outras unidades básicas.

Toda medida está sujeita a incertezas, que podem ser devidas ao processo de medição, às características dos equipamentos utilizados e ao operador. É importante expressar o resultado de uma medida de maneira que outras pessoas o entendam e saibam com que confiança ele foi obtido. Ao se expressar um resultado experimental, a incerteza dá o indicativo quantitativo de sua precisão.

A menor graduação do instrumento representa o menor valor que ele é capaz de medir com confiança. Por exemplo, não faz sentido querer medir o diâmetro de um fio de cabelo usando uma régua graduada em milímetros; a maior precisão que se pode ter de uma medida realizada com essa régua é uma precisão de milímetro, podendo-se estimar o valor entre duas divisões da escala.

Ao se medir o diâmetro d de uma moeda de R$ 1,00 com uma régua graduada em milímetros, uma pessoa pode escrever d = 27,2 mm. Aqui o valor numérico da grandeza é 27,2, e a unidade é o milímetro; esse resultado tem 3 algarismos significativos, sendo o último incerto ou duvidoso – em geral, escreve-se um resultado com apenas um algarismo duvidoso. Essa pessoa poderia escrever seu resultado usando outra unidade de comprimento, por exemplo o metro; nesse caso ela deveria escrever d = 0,0272 m = 2,72 x 10^{-2} m. Em ambos os casos, o resultado apresenta 3 algarismos significativos, com 1 duvidoso, e com a precisão na casa dos décimos de milímetro. Ou seja, o simples fato de mudar a unidade escolhida para descrever um resultado não pode alterar a sua precisão. Os algarismos zero que aparecem antes do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos; depois, sim. Dessa forma, não é correto escrever d = 27,20 mm pois, nesse caso, teríamos 4 algarismos significativos com o algarismo duvidoso sendo o zero; nessa situação o resultado expressaria uma precisão – centésimo de milímetro – que a régua não tem! Poder-se-ia dizer que numericamente é "a mesma coisa", mas do ponto de vista científico não é: **não se pode alterar a precisão de um resultado acrescentando algarismos significativos a ele.**

ATIVIDADE 1

Meça o diâmetro de uma moeda de 10 centavos com uma régua milimetrada e expresse o resultado com a quantidade correta de números significativos. Indique o algarismo duvidoso.

____

____

1.2.2- Medidas diretas e indiretas

No exemplo dado anteriormente o diâmetro da moeda foi obtido com uma medida direta usando-se uma régua milimetrada. O perímetro p da moeda de R$ 1,00 pode ser calculado a partir da medida do seu diâmetro, utilizando-se a relação $p = 2\pi r$, sendo r o raio da moeda, e obtendo-se p = 85,5 mm. Pode-se dizer que foi feita uma medida indireta do perímetro da moeda. Seria possível medir diretamente seu perímetro utilizando-se uma fita métrica flexível, mas não foi esse o caso. Outra grandeza que poderia ser encontrada a partir da medida do diâmetro da moeda é a área da sua face, $S = \pi r^2$. Assim, teríamos S = 581 mm^2, que é a área da face da moeda, obtida indiretamente.

1.2.3- Valor mais provável

O valor do diâmetro da moeda apresentado é o resultado de uma única medida feita por uma única pessoa. É possível, e provável, que outras pessoas encontrem valores ligeiramente diferentes. Mesmo a própria pessoa, ao realizar a medida várias vezes, pode encontrar um conjunto de valores diferindo entre si, distribuídos em torno de um determinado valor. Em situações desse tipo, o que se faz comumente é encontrar o valor médio e utilizá-lo como o *valor mais provável* para a grandeza. Suponha que 4 medidas do diâmetro d da moeda tenham fornecido os valores 27,2 mm;

27,0 mm; 27,2 mm; e 27,1 mm. Nesse caso o valor numérico mais provável seria $d = 27{,}125$ mm. (**Atenção**: por enquanto, foi apresentado apenas o valor numérico; a maneira de se apresentar o resultado correto, considerando-se o número de algarismos significativos e a incerteza, será apresentada nas próximas seções.) Aqui foi feita uma média aritmética simples para se encontrar o valor mais provável. Há situações em que são utilizados métodos estatísticos mais complexos; alguns casos serão apresentados nas próximas aulas.

ATIVIDADE 2

Pegue duas folhas de papel A4. Corte uma delas ao meio e descarte uma das metades. Faça uma bolinha com a folha inteira e outra bolinha com a metade restante. Utilizando um paquímetro meça o diâmetro de cada uma delas em 5 posições diferentes. Anote os resultados e expresse o valor mais provável do diâmetro de cada bolinha. Pergunte a seu tutor como utilizar corretamente um paquímetro!

____

____

____

____

1.3 INCERTEZA, PRECISÃO E ACURÁCIA

1.3.1- Erro de leitura e desvio médio em medidas diretas

Repetindo-se a medida de uma grandeza várias vezes, pode acontecer de serem encontrados valores diferentes. As flutuações podem ser devidas tanto à habilidade do operador quanto ao instrumento utilizado, ao método empregado, às dificuldades intrínsecas ao processo etc. Elas podem ocorrer de maneira sistemática ou aleatória. As primeiras, chamadas também de *erros sistemáticos*, são devidas a problemas de calibração ou fabricação de um aparelho ou a um erro de procedimento. Quando acontece esse tipo de erro, os valores encontrados nas medidas são afetados sistematicamente para mais ou sistematicamente para menos. As flutuações aleatórias, ou *erros aleatórios*, também chamados *erros estatísticos*, afetam desordenadamente a medida, às vezes para mais, às vezes para menos. A flutuação aleatória é intrínseca a qualquer processo de medida.

Quando se realiza uma única medida de uma grandeza, a incerteza pode ser encontrada usando-se diferentes procedimentos, mas é sempre importante usar o bom senso. Uma regra amplamente difundida é a de que a incerteza de uma medida isolada (erro de leitura) deve ser a metade da menor divisão da escala do instrumento de medida. Por exemplo, para se medir a largura *l* de uma folha de papel A4, com uma régua de 300 mm, alguém poderia considerar como incerteza a metade de uma unidade correspondente à menor divisão, ou seja, 0,5 mm. Assim, a medida da largura da folha seria escrita como $l = (211{,}5 \pm 0{,}5)$ mm. O resultado escrito dessa maneira indica que há uma incerteza de 0,5 mm na determinação da largura da folha. Entretanto, se essa régua for usada para medir a altura da porta da sala de aula, é claro que a incerteza não mais poderá ser de 0,5 mm. O procedimento de posicionar a régua várias vezes para completar a medida eleva muito a incerteza, que deverá ser da ordem de centímetro. **Portanto, essa regra tão difundida de que a incerteza é a metade da menor divisão da escala deve ser usada com muito cuidado, sendo poucas as vezes em que ela pode ser aplicada corretamente.**

Quando se usa, por exemplo, um voltímetro analógico ou qualquer instrumento com ponteiro, é preciso verificar se a leitura é estável ou se o ponteiro oscila em torno de um valor. Se o aparelho indicar um valor fixo, pode-se considerar como incerteza a própria precisão do instrumento. No caso de não se ter essa informação, deve-se usar uma unidade da menor divisão da escala utilizada. Se houver oscilação, é mais razoável calcular a incerteza a partir de seus limites: o resultado de uma medida poderá ser qualquer valor dentro da faixa de oscilação. No caso de aparelhos digitais, pode acontecer de o resultado se apresentar sem flutuações ou se apresentar oscilando. A avaliação do desvio deverá, então, ser feita como no caso anterior.

Freqüentemente é possível e aconselhável realizar várias medidas da mesma grandeza para se encontrar um resultado mais preciso. Quando se realizam *N* medidas de uma mesma grandeza, deve-se encontrar o seu valor médio – o qual será o *valor mais provável* – e tomar como incerteza a média dos valores absolutos das diferenças entre o valor mais provável e cada valor individual das *N* medidas. O exemplo a seguir ilustra uma situação desse tipo.

EXEMPLO DE CÁLCULO DO VALOR MAIS PROVÁVEL

Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda t, pode-se calcular a altura h a partir da relação cinemática $h = ½\, g\, t^2$, em que g é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo, e os valores t_i obtidos em 8 medidas estão mostrados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1
Valores obtidos para o tempo de cada pedra jogada do alto de uma cachoeira

I	t_i (s)
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

A dispersão dos valores, entre 1,03 s e 1,31 s, deve-se à dificuldade intrínseca do processo particular de medida e ao fato de que a precisão do cronômetro (centésimo de segundo) é bem maior do que a capacidade das pessoas de medir tempo com tal instrumento.

Para encontrar o valor mais confiável para a altura h deve-se, então, usar o valor mais provável de tempo $\langle t \rangle$ e o respectivo desvio Δt. Numericamente teremos:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i =$$

$$= \frac{1}{8}\,(1{,}30 + 1{,}09 + 1{,}13 + 1{,}27 + 1{,}18 + 1{,}31 + 1{,}24 + 1{,}15)\ \text{s} = 1{,}196\ \text{s}$$

$$\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left| \, t_i - \langle t \rangle \, \right| =$$

$$= \frac{1}{8}\,(0{,}104 + 0{,}106 + 0{,}066 + 0{,}074 + 0{,}016 + 0{,}114 + 0{,}044 + 0{,}046)\ \text{s}$$

$$= 0{,}071\ \text{s}$$

Usando o critério de se escrever a incerteza com um algarismo significativo, a resposta correta para o resultado encontrado para o tempo de queda é:

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t = (1{,}20 \pm 0{,}07) \text{ s.}$$

Utilizando esse resultado e considerando $g = (9{,}784 \pm 0{,}001)$ m/s^2, chega-se ao valor $h = (7{,}0 \pm 0{,}8)$ m. A incerteza de 0,8 m foi encontrada empregando processos descritos mais adiante.

Deve-se observar que a repetição da medição de uma grandeza pode melhorar a precisão na sua determinação, mas esta não deve ir além da precisão do instrumento utilizado para medi-la.

1.3.2- Erro absoluto, erro relativo e erro tolerável

Nos resultados encontrados anteriormente, estão expressos os valores das grandezas e as respectivas incertezas absolutas. No valor médio do tempo obteve-se uma incerteza de 0,07 s em 1,20, e na determinação da altura a incerteza foi de 0,8 m em 7,0. É muito comum e muito útil expressar resultados da incerteza em valores relativos: $\Delta t / \langle t \rangle = 0{,}058$ no caso do tempo, e $\Delta h / h = 0{,}117$ no caso da altura. Uma maneira de indicar mais claramente a precisão de um resultado é expressar a incerteza relativa em termos percentuais. No caso da altura da cachoeira, ela é de aproximadamente ~6% para o tempo, e de aproximadamente ~12% para a altura. Comparando as incertezas relativas, é possível perceber qual grandeza foi determinada com maior precisão.

Ao escrever o valor de uma grandeza com a sua respectiva incerteza, indica-se um intervalo de valores aceitáveis para ela, de acordo com o procedimento em questão. O valor mais provável de tempo $\langle t \rangle$ e o respectivo desvio Δt definem um intervalo $[\ \langle t \rangle - \Delta t\ ,\ \langle t \rangle + \Delta t\ ]$ tal que a probabilidade de uma observação estar nesse intervalo é de 68%. Isso significa que, se o número de medidas for muito grande, 68% das medidas estarão compreendidas naquele intervalo. Desse modo, o valor de Δt é uma estimativa da precisão das medidas. Isso é verdade quando a grandeza possui um valor verdadeiro, como no nosso exemplo do tempo de queda de um corpo. Se a grandeza não possui um valor verdadeiro, o desvio é relacionado à forma com que a grandeza varia em torno da média. Como exemplo dessa última situação, poderíamos tomar as notas de uma classe. Não existe um valor verdadeiro das notas, mas sim um valor médio e sua "distribuição" em torno da média.

Muitas vezes é necessário utilizar um critério para a eliminação de dados que porventura se apresentem com um erro muito grande. Se uma medida tem seu desvio maior que 2 vezes o desvio da média (no exemplo acima, $\Delta t_i > 2\Delta t$), diz-se que tal medida discorda mais que 95% do valor mais provável. Para isso, utiliza-se o erro tolerável, definido como 2 a 3 vezes o desvio absoluto. Nesse último caso, uma medida discordaria mais que 99,7% do valor mais provável.

1.3.3- Precisão e acurácia

A distinção entre precisão e acurácia é facilmente exemplificada por meio da Figura 1.1. Note que na figura à esquerda há uma precisão ruim, pois os dados se encontram espalhados em torno do valor médio, mas a acurácia é boa, pois a média encontra-se perto do centro. Na figura à direita, os dados agora apresentam boa precisão, pois se encontram bem agrupados, mas a acurácia é ruim, pois na média eles se encontram afastados do valor mais provável.

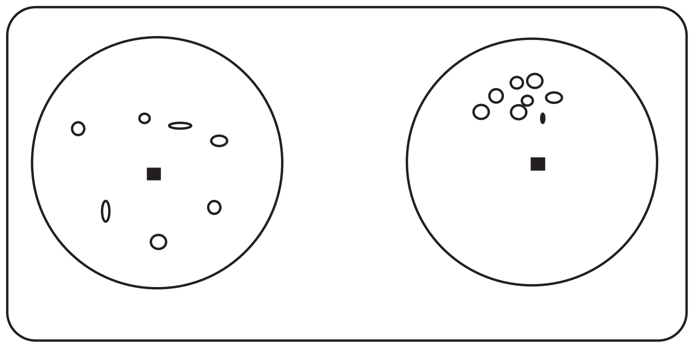


FIGURA 1.1 - Comparação entre acurácia e precisão. Uma medida com boa acurácia mas precisão ruim (esquerda). Uma medida com pouca acurácia mas boa precisão (direita)

1.4 ATIVIDADE PRÁTICA: USO DE APARELHOS DE MEDIDA

Introdução

A operação correta de instrumentos de medidas é de vital importância na vida de um cientista, uma vez que a maneira como se opera o aparelho pode afetar o resultado obtido. Além disso, mesmo que operado com eficiência, é preciso saber o grau de confiabilidade do aparelho utilizado e como ele se adapta ao experimento a ser executado.

Uma maneira de se obter resultados mais confiáveis é repetir a medida várias vezes, trabalhar com valores médios e ver como as medidas obtidas se desviam desse valor médio, obtendo-se dessa forma o erro médio.

Objetivo

Operar vários aparelhos de medida, verificando sua precisão, e calcular valores médios com o respectivo erro médio.

Material utilizado

Cronômetro, termômetros, fita métrica, bolas de tênis, balança de comparação de massa, balança digital, pesos-padrão, aquecedor de água, gelo.

Procedimentos

Parte 1 – Tempo de queda

Algumas medidas, por exemplo a medida do tempo, não se reproduzem, pois dependem de reflexos na partida e na parada do cronômetro. Nesse caso o valor verdadeiro da grandeza não pode ser conhecido, devendo o resultado ser representado pelo valor mais provável.

Determine o tempo de queda de uma bola de tênis de uma altura de 1,5 metros. Faça 10 medidas e calcule o tempo médio e o desvio médio. Expresse o resultado da maneira correta ($\bar{x} \pm \delta \bar{x}$).

Parte 2 – Determinação de massas

Utilizando os pesos-padrão, verifique a aferição das balanças de comparação de massa e digital.

Existe algum erro nas duas? Em caso afirmativo, expresse o mesmo utilizando valores percentuais.

Meça a massa dos dois pesos desconhecidos utilizando as duas balanças.

Expresse os resultados de maneira correta, utilizando o valor da medida e a precisão.

Parte 3 – Medindo temperaturas

Utilize os termômetros disponibilizados para medir as seguintes temperaturas:

1) água + gelo;

2) água quente;

3) água a temperatura ambiente.

Faça as medidas com os dois termômetros e expresse os resultados de maneira correta, utilizando o valor da medida e a precisão.

AULA 2

Propagação de erros

OBJETIVOS
- Calcular a incerteza de grandezas medidas indiretamente.
- Elaborar seu primeiro relatório técnico-científico.

2.1 PROPAGAÇÃO DE ERROS

Uma medida é indireta quando é obtida a partir de expressões matemáticas que a relacionam com outras grandezas medidas diretamente. De maneira geral, uma grandeza f será função de outras grandezas x, y, z, t etc., cada uma com seu respectivo erro Δx, Δy, Δz etc., ou seja,

$$f = f\,(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta\, z, t \pm \Delta t, \ldots)$$

Ao se expressar o resultado de f obtido indiretamente a partir de cálculos, é importante apresentar qual é a incerteza associada a esse resultado, ou seja, qual é a conseqüência da propagação das incertezas. A seguir, é apresentado um exemplo que ilustra uma situação desse tipo.

Um corpo se desloca em linha reta com aceleração constante, de tal forma que a distância percorrida x (em metros) varia com o tempo t (em segundos) de acordo com a equação

$$x = 5t^2$$

Coloca-se a seguinte questão: após um tempo medido $t = (7{,}5 \pm 0{,}4)$ s, qual a distância percorrida pelo corpo? A resposta trivial para a questão é $x = 281{,}25$ m. Entretanto, essa resposta está incompleta e incorreta. Considerando que a medida de tempo tem uma incerteza de $\pm 0{,}4$ s, o valor calculado da distância deverá levar isso em conta. Então, qual incerteza Δx deve ser atribuída à distância calculada x? Para responder a esta questão, será dada aqui uma apresentação simples de propagação de incertezas. Existem várias maneiras de acompanhar a propagação dos erros em medidas indiretas; ilustraremos aqui dois métodos.

2.1.1- Método dos valores-limite

Uma maneira de se estimar a incerteza de uma grandeza *f* obtida indiretamente é calculando os valores-limite que *f* pode assumir a partir dos valores máximos – $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, … – e mínimos – $x - \Delta x$, $y - \Delta y$, … – das grandezas x, y, z, …

EXEMPLO DO MÉTODO DOS VALORES-LIMITE

Em um experimento de movimento retilíneo com aceleração a constante, uma partícula percorre uma distância d, em um tempo t tal que

$$a = \frac{2d}{t^2} \ .$$

Foram medidos dois valores para a distância e o tempo com incertezas Δd e Δt respectivamente, ou seja, $(d \pm \Delta d)$ e $(t \pm \Delta t)$, encontrando-se (12,0 ± 0,4) m e (4,0 ± 0,2) s. Então, os valores-limite para a aceleração serão

$$a_{\text{máx}} = \frac{2(d + \Delta d)}{(t - \Delta t)^2} = 2 \text{ x } (12{,}4 \text{ m}) / (3{,}8 \text{ s})^2 = 1{,}7175 \text{ m/ s}^2$$

$$a_{\text{mín}} = \frac{2(d - \Delta d)}{(t + \Delta t)^2} = 2 \text{ x } (11{,}6 \text{ m}) / (4{,}2 \text{ s})^2 = 1{,}3152 \text{ m/ s}^2$$

O valor médio da aceleração (ainda sem considerar o número correto de algarismos significativos) será

$$a = \frac{a_{\text{máx}} + a_{\text{mín}}}{2} = (1{,}7175 + 1{,}3152) / 2 = 1{,}5163 \text{ m/ s}^2$$

e a incerteza em a é dada por

$$\Delta a = \frac{a_{\text{máx}} - a_{\text{mín}}}{2} = (1{,}7175 - 1{,}3152) / 2 = 0{,}2 \text{ m/ s}^2$$

O valor para a aceleração deverá ser expresso como

$$a = (1{,}5 \pm 0{,}2) \text{ m / s}^2 \quad \text{ou} \quad 1{,}5 \text{ m / s}^2 \ \text{ com 13\% de incerteza.}$$

Fazendo o cálculo da incerteza propagada, tem-se uma idéia do quão sensível é o resultado à medida de cada uma das variáveis. Neste exemplo, a incerteza no valor da aceleração é mais sensível à incerteza na medida de tempo – dependência com o quadrado – do que o é a incerteza na medida de distância – dependência linear.

2.1.2- Método baseado no cálculo diferencial

A maneira formal utilizada no cálculo de propagação de incertezas é baseada no cálculo diferencial. Para ilustrar este método, utiliza-se um processo mais ou menos intuitivo, deixando o rigor e o detalhamento matemático para o estudo de diferenciais e derivadas parciais abordado em disciplinas de Cálculo Matemático. A Figura 2.1 mostra o gráfico da distância percorrida x em função do tempo t. Considera-se que as medidas individuais de tempo foram todas tomadas com a mesma incerteza $\Delta t = \pm 0{,}4$ s.

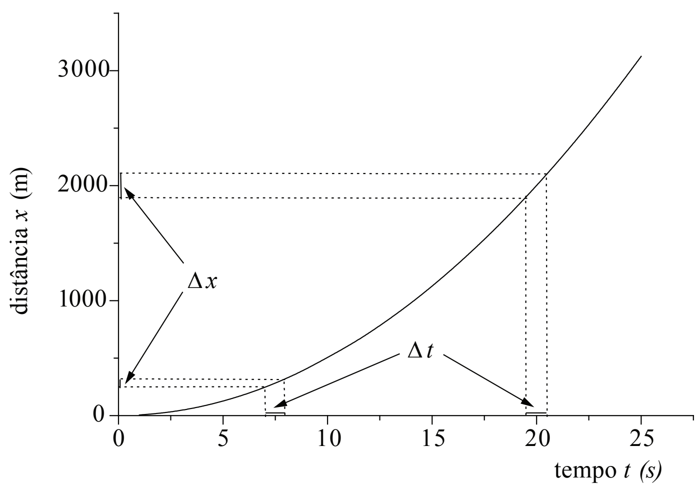


FIGURA 2.1- Gráfico da distância x em função do tempo t para $x = 5t^2$

Então, para tempos diferentes, por exemplo $t_1 = 7{,}5$ s e $t_2 = 20{,}0$ s, a mesma incerteza Δt resulta em incertezas bastante diferentes nos valores correspondentes de distâncias, conforme se vê na Figura 2.1. Quanto maior a inclinação da curva, ou seja, a sua derivada, mais significativa é a conseqüência da incerteza na variável tempo para a função distância. A associação da derivada de uma função com a propagação de incertezas permite se fazer uma analogia útil no cálculo da incerteza no caso em que uma grandeza é função de outras.

A derivada $f'(x)$ de uma função pode ser escrita como o quociente entre os diferenciais da função e da variável:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow df(x) = f'(x)\,.\,dx$$

É razoável usar a aproximação de que a diferencial – acréscimo infinitesimal – de uma grandeza pode ser tomada como uma incerteza – acréscimo mensurável – nessa grandeza. Assim, pode-se escrever:

$$\Delta f(x) \cong |f'(x)|\,\Delta x \qquad (2.1)$$

em que o valor absoluto $|f'(x)|$ é tomado para garantir sempre um valor positivo para o erro Δf, que determinará a faixa de valores possíveis de f.

A partir dessas considerações, pode-se aplicar a equação (2.1) no cálculo da propagação do erro para o presente exemplo, ou seja, encontrar o erro Δx a partir do erro $\Delta t = 0{,}4$s. Tem-se, então,

$$\Delta x \cong |x'(t)|\,\Delta t = 10t\,\Delta t$$

já que a derivada de $x = 5t^2$ em relação a t é $10t$ e, conseqüentemente,

$$\Delta x = (10 \text{ x } 7{,}5 \text{ x } 0{,}4)\text{m} = 30\text{m} = (3 \text{ x } 10) \text{ m, para } t_1;$$

$$\Delta x = (10 \text{ x } 20{,}0 \text{ x } 0{,}4)\text{m} = 80\text{m} = (8 \text{ x } 10) \text{ m, para } t_2\,.$$

Os valores para as distâncias serão

$$x_1 = 5\,t_1^2 = 5 \text{ x } 56{,}25 = 281{,}25 \text{ m}$$

$$x_2 = 5\,t_2^2 = 5 \text{ x } 400 = 2000 \text{ m}$$

e os resultados corretos, usando-se apenas um algarismo significativo para a incerteza, deverão ser escritos como

$$x_1 = (2{,}8 \pm 0{,}3) \text{ x } 10^2 \text{ m}$$

$$x_2 = (2{,}00 \pm 0{,}08) \text{ x } 10^3 \text{ m}$$

Foi necessário usar potência de dez para expressar o resultado corretamente, pois os números 30 e 80 possuem dois algarismos significativos. Na forma de incertezas relativas, os resultados acima seriam $x_1 = 2{,}8 \text{ x } 10^2$ m, com uma incerteza de 11%, e $x_2 = 2{,}00 \text{ x } 10^3$ m, com uma incerteza de 4%. **Deve-se observar que o número de algarismos significativos do valor da grandeza tem que respeitar a precisão dada pela incerteza absoluta calculada a partir da incerteza percentual; por exemplo, NÃO É CORRETO escrever $x_1 = (2{,}81 \text{ x } 10^2 \text{ m} \pm 11\%)$.**

Esse processo pode ser estendido aos casos nos quais a grandeza a ser determinada depende de muitas variáveis, ou seja, depende da medida de várias outras grandezas com suas respectivas incertezas. Seja a função f dependente de x, y, z, t etc. Essas variáveis são grandezas medidas, logo, cada uma delas tem uma incerteza experimental Δx, Δy, Δz, Δt etc.

$$f = f(x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y,\ z \pm \Delta z,\ t \pm \Delta t,\ \ldots)$$

Para encontrar a incerteza Δf no valor da função f, basta generalizar o resultado obtido para uma variável – equação (2.1) – para essa situação de várias variáveis, podendo-se escrever

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\Delta t + \ldots \qquad (2.2)$$

em que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ representa a derivada parcial de f com relação a x e, equivalentemente, para as outras variáveis. A derivada parcial de uma função com relação a uma de suas variáveis é calculada como uma derivada normal, considerando todas as outras como constantes.

EXEMPLO DE CÁLCULO DA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Como um exemplo de aplicação de propagação de incertezas em uma grandeza calculada através de outras duas ou mais grandezas, considere-se a situação em que foram medidas a massa m e a velocidade v de um carro e deseja-se calcular qual é sua energia cinética E.

Sejam $m = (1{,}2 \pm 0{,}1) \times 10^3$ Kg, e $v = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ m/s.

A energia cinética E é dada pela fórmula $E = ½\, m\, v^2$. Usando a equação (2.1), a incerteza em E será:

$$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right|\Delta v \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{v^2}{2}\Delta m + mv\Delta v$$

Efetuando-se os cálculos com os valores de m e v, tem-se 2×10^4 J para a incerteza, e 24×10^4 J para o valor da energia cinética e, então, o resultado escrito corretamente é

$$E = (24 \pm 2) \times 10^4 \text{ J} = (2{,}4 \pm 0{,}2) \times 10^5 \text{ J}$$

A título de exemplo de aplicação da equação (2.1) em outros casos, faça a demonstração das seguintes afirmações:

- Se f é a **soma** ou **subtração** de grandezas x, y, z, …, então $\Delta f = \Delta x + \Delta y + \Delta z + \ldots$ (a incerteza absoluta em f é a soma das incertezas absolutas das grandezas x, y, z, …).

- Se f é a **multiplicação** de uma grandeza x por uma constante k, então $\Delta f = k\Delta x$ (a incerteza absoluta em f é k vezes a incerteza absoluta da grandeza x).

- Se f é a **divisão** de uma grandeza x por uma constante k, então $\Delta f = \Delta x / k$ (a incerteza absoluta em f é a incerteza absoluta da grandeza x dividida por k).

- Se f é a **multiplicação** ou **divisão** de grandezas x, y, z, …, então $\Delta f / f = \Delta x/x + \Delta y/y + \Delta z/z + \ldots$ (a incerteza relativa em f é a soma das incertezas relativas das grandezas x, y, z …).

- Se f é a **potência** n de uma grandeza x, então $\Delta f / f = n\ \Delta x/x$ (a incerteza relativa em f é n vezes a incerteza relativa da grandeza x).

2.2 ATIVIDADE PRÁTICA: ATRITO ESTÁTICO

Introdução

Quando duas superfícies deslizam ou tendem a deslizar uma sobre a outra, atua uma força de atrito. Quando se aplica uma força a um objeto, geralmente uma força de atrito reduz a força resultante e a conseqüente aceleração. O atrito é causado pelas irregularidades nas superfícies em contato mútuo e depende dos tipos de materiais e da força que os mantém em contato. Mesmo as superfícies que aparentam ser muito lisas apresentam irregularidades microscópicas que se opõem ao movimento.

O sentido da força de atrito é sempre oposto ao do movimento relativo. Um objeto escorregando para baixo numa rampa experimenta um atrito que aponta rampa acima; um objeto que escorrega para a direita experimenta um atrito direcionado para a esquerda. Assim, se um objeto deve se movimentar com velocidade constante, então deve-se aplicar sobre ele uma força igual e oposta ao atrito para que as duas se anulem mutuamente. Uma força resultante nula não proporciona aceleração alguma.

Não existe atrito sobre um caixote que está em repouso sobre um piso. Mas se ele for empurrado horizontalmente, aparecerá o atrito. Se o caixote ainda estiver em repouso, o atrito que se opõe ao movimento é o suficiente para cancelar a força aplicada. Se a força horizontal for de, digamos, 70 N, o atrito será igual a 70 N. Se a força for maior, digamos, 100 N, e o caixote estiver na iminência de deslizar, a força de atrito entre ele e o piso será de 100 N. Se 100 N for o máximo que as superfícies podem manter, e a força aumentar só mais um pouco, a aderência cederá, e o caixote começará a deslizar.

O atrito de deslizamento, denominado atrito cinético, é ligeiramente menor que o atrito estático. A força de atrito é calculada pela expressão

$$F = \mu N \tag{2.3}$$

em que N é a reação normal, que tem o valor da força de contato entre as duas superfícies; μ é o coeficiente de atrito e depende dos dois tipos de superfícies que estão em contato. É importante ressaltar que a força de atrito não depende da área de contato. Se você mudar a área de deslizamento por uma menor, a diferença é que o peso estará concentrado em uma área menor, mas a força de atrito será a mesma. Assim, os pneus extralargos que se vêem em alguns carros não fornecem mais atrito; o propósito da maior área de contato é diminuir o aquecimento e o desgaste.

Para um corpo em equilíbrio sobre um plano inclinado, as forças que atuam são o peso e a força de atrito. Devido à inclinação, o peso é decomposto em duas componentes: uma na direção da rampa e outra perpendicular à rampa (Figura 2.2). Indique as componentes na figura.

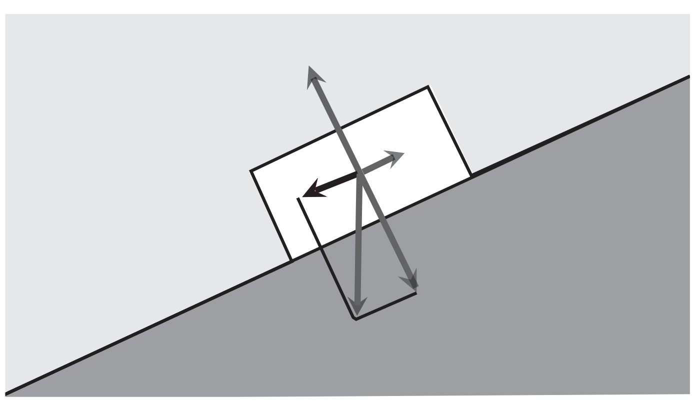


FIGURA 2.2 - A componente na direção da rampa é denominada P_x e a perpendicular à rampa P_y. Como P_y mantém o corpo em contato com a rampa, a reação normal é igual a P_y

Para o corpo em equilíbrio, P_x deve ser igual à força de atrito. Nesta situação teremos

Na dedução ao lado, θ é o ângulo de inclinação do plano, e μ é o coeficiente de atrito estático.

$$F_{at} = P_x$$
$$\mu N = P\,sen\,\theta$$
$$\mu P\cos\theta = P\,sen\,\theta$$
$$\mu = tg\,\theta$$

Objetivos

- Determinar o coeficiente de atrito estático entre diferentes superfícies.
- Estudar a dependência do coeficiente de atrito estático com a rugosidade, com a área de contato entre as superfícies, e com a força normal.

Material utilizado

- Base, transferidor, bloco de metal polido em forma de paralelepípedo, três lâminas de diferentes materiais, quatro objetos com suporte para fixar-se um no outro e flanela.

Procedimentos

- Fixe uma das lâminas na base e coloque o bloco sobre ela, como mostrado na Figura 2.3.
- Incline a base, lentamente, até que o bloco esteja prestes a se mover. Meça o valor do ângulo de inclinação e, utilizando a equação $\mu = tg\,\theta$, determine o coeficiente de atrito estático entre as superfícies do bloco e da lâmina.

  Repita esse procedimento algumas vezes e obtenha um valor médio de μ_e.

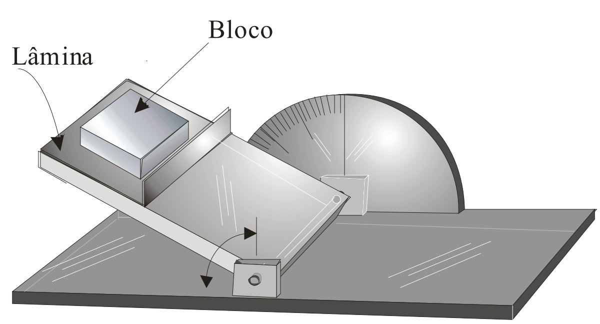


FIGURA 2.3 - Um bloco é colocado sobre uma superfície plana, que é inclinada até que ele comece a deslizar

- Repita o procedimento utilizando a mesma face do bloco e as lâminas de materiais diferentes fornecidas. Determine os coeficientes de atrito entre a superfície de cada uma delas e a do bloco. Verifique se os valores obtidos, comparativamente, correspondem à sua expectativa.
- Em seguida, analise a influência da área de contato entre as superfícies sobre a força de atrito. Para isso, determine o coeficiente de atrito estático entre uma das lâminas e cada uma das três faces de diferentes áreas do bloco. Verifique se o resultado encontrado está de acordo com a equação (2.3).
- Agora, analise a dependência do coeficiente de atrito estático com a força normal à superfície. Para variar essa força, coloque, gradativamente, os objetos de massa conhecida fornecidos sobre a superfície e determine o coeficiente de atrito estático para cada valor da força normal. Verifique se o resultado encontrado está de acordo com a equação (2.3).

Utilizando as instruções contidas na seção 5 das Informações Gerais, elabore seu primeiro relatório técnico-científico.

AULA 3

Análise de gráficos e tabelas

OBJETIVOS

• Apresentar o resultado de uma série de medidas na forma de gráficos e tabelas.

3.1 CONFECÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS

O primeiro estágio de apresentação de uma série de medidas resultantes de um experimento é fazendo-se uso de tabelas, que em geral já são montadas durante o processo de obtenção de dados. O exemplo a seguir ilustra bem um tipo de tabela adequado à maioria dos experimentos feitos nas disciplinas experimentais de Física.

Em um experimento para se determinar a resistência de um resistor elétrico, aplica-se nele uma tensão elétrica V, entre 10 e 50 V, e mede-se a corrente I gerada. A Tabela 3.1 mostra uma forma conveniente de apresentar os valores obtidos:

Tabela 3.1
Valores da tensão V aplicada no resistor e a corrente I correspondente

V (V) ± 1%	I (x 10^{-3} A)
11,3	22,5 ± 0,2
15,8	31,8 ± 0,3
19,5	40,0 ± 0,4
22,7	44,4 ± 0,4
29,1	59,2 ± 0,6
38,4	76,1 ± 0,8
42,3	83,8 ± 0,8
50,0	99,3 ± 0,9

Deve-se observar que:

- toda tabela deve ter uma legenda;
- no cabeçalho da tabela, é importante vir a especificação das grandezas que foram medidas, com suas unidades e incertezas, absolutas ou relativas; se cada medida apresentar uma incerteza diferente, deve-se especificá-la após cada uma;
- o número de algarismos significativos das medidas deve ser compatível com as incertezas especificadas.

A construção de gráficos que associe as grandezas medidas em um experimento é muito importante, pois permite uma visualização rápida do tipo de dependência existente entre essas grandezas. O tipo de gráfico mais comum em trabalhos de Física é aquele que relaciona as duas grandezas em escalas lineares. O gráfico a seguir ilustra o relacionamento entre as grandezas tensão e corrente elétricas representadas na Tabela 3.1.

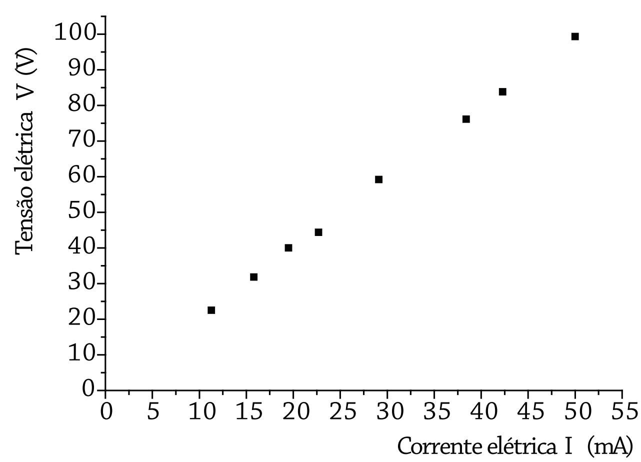


FIGURA 3.1 - Exemplo de um gráfico: tensão elétrica V *versus* corrente I em um circuito

Uma observação rápida da Figura 3.1 permite identificar uma relação linear entre as duas grandezas analisadas, V e I.

Uma comparação entre um gráfico mal elaborado e outro bem elaborado é dado na Figura 3.2.

Um gráfico deve conter:

- título e/ou legenda;
- boa utilização do espaço disponível para o traçado do gráfico;
- nome da grandeza em cada eixo com sua respectiva unidade;
- dimensionamento correto da escala (cada divisão das escalas deve ser múltiplo de 1, 2, 5, 10...).

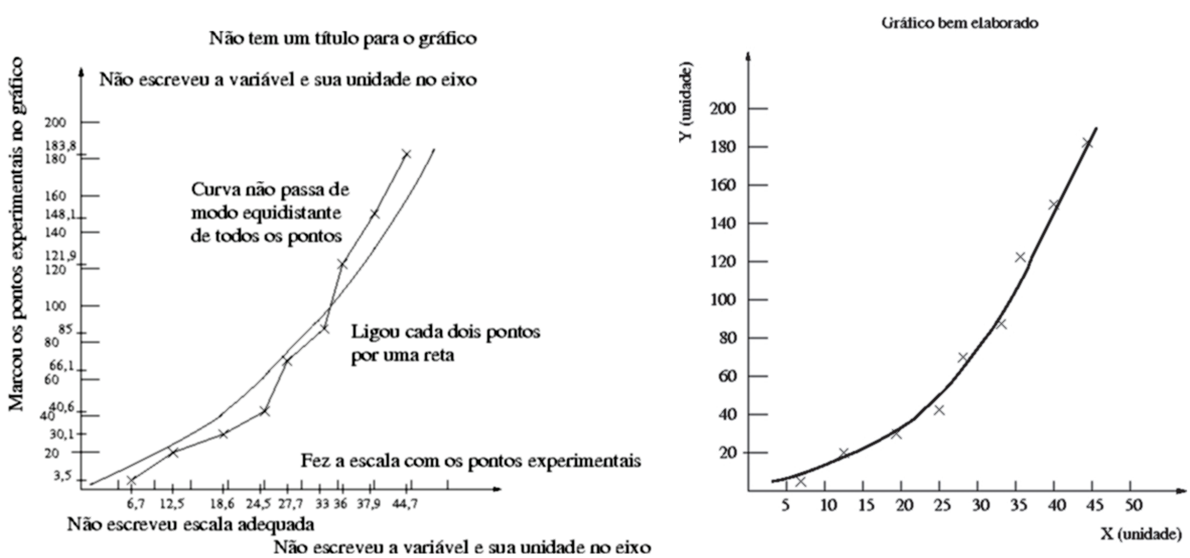


FIGURA 3.2 - Exemplo de um gráfico mal elaborado (à esquerda). Exemplo de um gráfico bem elaborado (à direita)
Fonte dos dados: MACEDO, Z. S.; VALÉRIO, M. E. G. Apostilas do laboratório de física. Disponíveis em: <http://www.fisica.ufs.br>

3.2 ATIVIDADE PRÁTICA: ELEMENTO RESISTIVO LINEAR

Introdução

Quando um componente de um circuito elétrico é submetido a uma diferença de potencial V, aparece nele uma corrente I. A resistência elétrica R desse elemento é definida pelo quociente entre a diferença de potencial aplicada e a corrente resultante:

$$R = V / I.$$

O comportamento de I em função de V depende das características do componente elétrico. Quando a relação V / I é constante para qualquer valor de V, o elemento é chamado de resistor linear. Essa situação corresponde à Lei de Ohm, segundo a qual a corrente em um resistor é diretamente proporcional à diferença de potencial, ou tensão elétrica, aplicada nele. Os resistores lineares são, também, chamados de resistores ôhmicos.

É muito comum encontrarem-se, em um dado circuito, resistores associados em série e em paralelo. Sabe-se que

- a resistência equivalente R_s, na associação de dois resistores R_1 e R_2 em série, é dada por $R_1 + R_2$; e
- a resistência equivalente R_p, capaz de substituir a associação de dois resistores R_1 e R_2 em paralelo, é dada por

$$(1/R_p) = (1/R_1) + (1/R_2).$$

Objetivos

- Encontrar o valor da resistência de resistores em circuitos puramente resistivos.
- Praticar a utilização de um multímetro digital.

Material utilizado

- Fonte de tensão contínua, multímetro digital, miliamperímetro analógico, resistor R_1 com código de cores, resistor R_2 "desconhecido", painel para ligações, cabos para conexões, tabela com código de cores e papel milimetrado.

Procedimentos

Utilização de um multímetro

Medidas de tensão, corrente e resistências elétricas são, comumente, feitas com multímetros em que se pode selecionar a função voltímetro, amperímetro e ohmímetro (veja também o Apêndice D). Os multímetros digitais atuais são instrumentos de boa precisão e de fácil manuseio. Para usá-los com segurança, devem ser observadas as seguintes regras básicas:

- escolha, na chave seletora do aparelho, o tipo de medida a ser feita;
- escolha a escala de medida apropriada, caso o aparelho não tenha seleção automática de escala;
- conecte os cabos no multímetro – o conector COM será comum para todos os tipos de medida;
- conecte apropriadamente o aparelho no circuito – em geral, é dado um esquema para ser seguido.

Para utilizar um multímetro como voltímetro, deve-se ligá-lo em paralelo com o elemento elétrico (Figura 3.3a). Para utilizá-lo como amperímetro, deve-se ligá-lo em série com o elemento elétrico (Figura 3.3b).

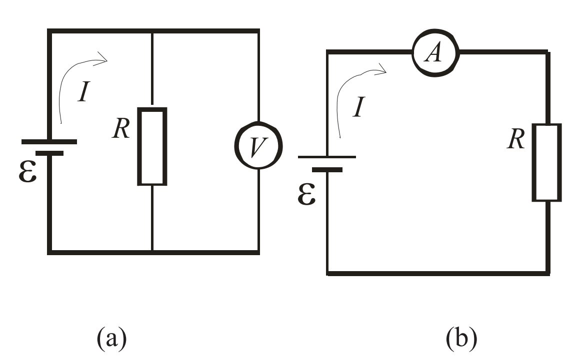


FIGURA 3.3 - Circuito constituído de uma fonte de tensão elétrica ε, um resistor R e um multímetro; em (a), o multímetro, na função voltímetro, está conectado em paralelo com o resistor; em (b), o multímetro, na função amperímetro, está conectado em série com o resistor

Determinação da resistência elétrica de resistores

a) Resistência de um resistor

Nesta etapa do experimento, você deverá determinar a resistência de um resistor, R_1 , e sua respectiva incerteza de três maneiras:

i) identificando o valor da resistência fornecido pelo fabricante, por meio de consulta ao código de cores fornecido no Anexo B;

ii) fazendo a medida diretamente com o multímetro na função ohmímetro;

iii) medindo valores de corrente para diferentes tensões aplicadas.

Faça as etapas **i** e **ii** e, em seguida, monte o circuito mostrado na Figura 3.4 para realizar a etapa **iii**.

Atenção: Antes de iniciar as medidas, chame o professor para conferir o circuito.

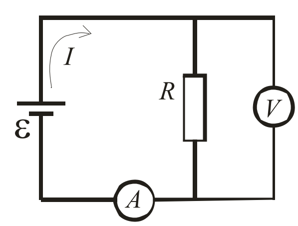


FIGURA 3.4 - Circuito constituído de uma fonte de tensão ε, um resistor *R*, um multímetro utilizado como voltímetro *V* e um miliamperímetro analógico *A*

- Obtenha pares de valores *V*, *I*, variando a tensão no resistor. **Não ultrapasse o limite de corrente estabelecido!** Trace o gráfico *V x I* com os dados obtidos em uma folha de papel milimetrado. Só vale no papel milimetrado!! Se você acha que é fácil...
- Determine a equação da reta que melhor se ajusta a esses pontos. Utilizando o método dos valores-limite, especifique o valor da resistência do resistor com sua respectiva incerteza.
- Compare e comente, do ponto de vista de confiabilidade e precisão, os valores da resistência desse primeiro resistor encontrados nos três processos. Indique o melhor resultado para o valor da resistência.

b) Associação de resistores em série e em paralelo

- Conecte os dois resistores R_1 e R_2 em série no painel de ligações. Com o multímetro na posição ohmímetro, meça o valor da resistência R_s do conjunto. Conecte, agora, os resistores em paralelo e meça o valor da resistência R_p do conjunto.

- Use as equações de associação de resistores para determinar a resistência do resistor "desconhecido" R_2, com sua respectiva incerteza. Em seguida, meça essa resistência com o ohmímetro. Indique o melhor resultado.

Utilizando as instruções contidas na seção 5 das Informações Gerais, elabore seu segundo relatório técnico-científico. Discuta com o seu tutor os erros cometidos no primeiro relatório. A partir de agora você deverá sempre entregar um relatório ao final de cada aula.

AULA 4

Uso de recursos computacionais

OBJETIVOS
- Construir e analisar gráficos utilizando recursos computacionais.

4.1 ELABORAÇÃO DE GRÁFICOS USANDO RECURSOS COMPUTACIONAIS

Sempre que fazemos um experimento científico obtemos um resultado numérico, que representamos em uma tabela, sendo esse resultado "função" da variação de um parâmetro. O parâmetro que variamos é chamado *variável independente* e aquele que medimos, *variável dependente*.

Se os resultados obtidos com as medidas forem representados em um gráfico, a visualização do experimento será muito mais clara, e poderemos obter informações importantes do mesmo. Observe o exemplo abaixo.

Para averiguar a dependência do tempo de escoamento em relação ao tamanho do orifício, foi escoada através de orifícios circulares de diferentes diâmetros, relativamente pequenos, a água contida em quatro grandes recipientes cilíndricos de igual tamanho. Para verificar a dependência do tempo de escoamento em relação à quantidade de água, verteu-se esse líquido para os mesmos recipientes de três alturas diferentes. Observe a Tabela 4.1.

Tabela 4.1
Exemplo do tempo de escoamento em relação ao tamanho do orifício

Diâmetro do orifício *d* (cm)	Tempo de escoamento		
	h = 30cm	h = 10cm	h = 4cm
	t (s)	t (s)	t (s)
1,5	73,0	43,5	26,7
2	41,2	23,7	15,0
3	18,4	10,5	6,9
5	6,8	3,9	2,2

As colunas de tempo de escoamento são para as seguintes alturas de líquido: 30 cm, 10 cm e 4 cm. Observe que em um gráfico é muito mais fácil visualizar o comportamento do fenômeno observado.

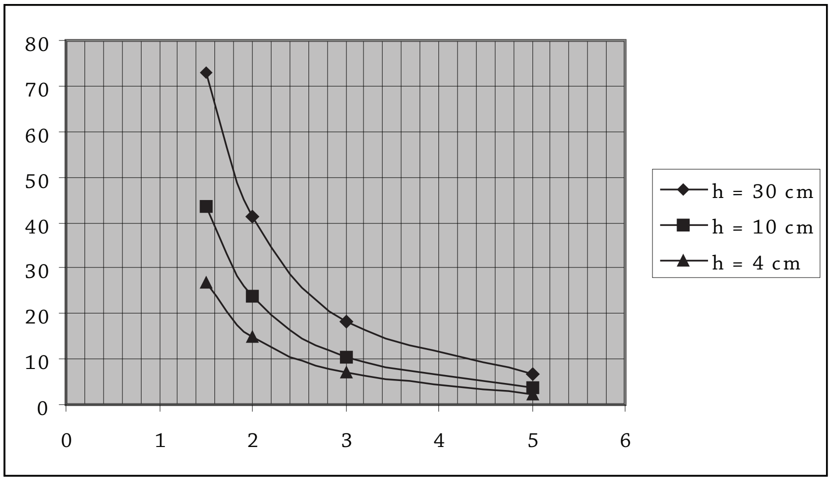


FIGURA 4.1 - Gráfico do tempo de escoamento em relação ao diâmetro do orifício

O gráfico da Figura 4.1 foi construído utilizando o programa *Excel*, que é prático para fazer traçados simples de gráficos. Dois outros programas muito utilizados são o *Origin* e o *XMGrace*, este último gratuito e operacionalizável em ambiente Linux (plataforma de *software* livre).

4.2 APRENDENDO A FAZER UM GRÁFICO COM O PROGRAMA *ORIGIN*

No exemplo a seguir iremos utilizar o programa *Origin*, que, além de desenhar os gráficos, permite-nos obter informações do mesmo através da determinação da função matemática que descreve o experimento.

1. Abra o *Origin*;
2. Na janela DATA1 acrescente uma coluna e preencha com os dados da Tabela 4.2.

Tabela 4.2
Exemplo de tempo gasto (coluna A) para percorrer uma determinada distância (coluna B) e a suposta distância ideal (coluna C)

A	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
B	1,40	2,10	2,65	2,86	3,45	4,06	4,40
C	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50

3. Faça o gráfico *distância versus tempo* com os dados DATA1 da seguinte forma:
   a) escolha *plot* e depois *scatter*;
   b) transfira tempo para *x* e altitude para *y;*
   c) mude os nomes (dos eixos), *x* para t(s) e *y* para h(m).
4. Explore as opções dos eixos e símbolos.

5. Imprima o gráfico. Um bom gráfico deve apresentar um *layout* claro e informativo, além de conter as seguintes informações (necessárias para sua interpretação):

   Título: com nome da experiência (e dos alunos, no nosso caso).

   Legenda: com o nome do gráfico e os parâmetros de ajuste.

   Eixos: com unidades e algarismos significativos adequados.

6. Faça um novo gráfico utilizando a coluna C em vez da B. Essa coluna representa a distância ideal. Você nota alguma diferença entre os gráficos?
7. Refaça o gráfico da Figura 4.1, apresentando-o de maneira correta, conforme descrito no item 5.

4.3 APRENDENDO A FAZER UM GRÁFICO COM O PROGRAMA *EXCEL*

Observe o exemplo a seguir, que mostra a concentração de etanol no sangue em função do tempo. Vamos construir o gráfico da Tabela 4.3, que mostra os valores da concentração *C* de etanol no sangue em função do tempo *t*, após a ingestão de etanol:

Tabela 4.3
Exemplo da concentração *C* de etanol no sangue, em função do tempo *t*, após a ingestão de etanol

C (mg/dl)	134	120	106	93	79	65	50
t (min)	90	120	150	180	210	240	270

FONTE: DURAN, I. E. R. *Biofísica*: fundamentos e aplicações. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

Siga o seguinte procedimento para criar o gráfico:

1. Abra o programa *Excel* e digite a tabela;
2. Marque as duas colunas e clique no ícone para construção de gráficos (assistente de gráfico).

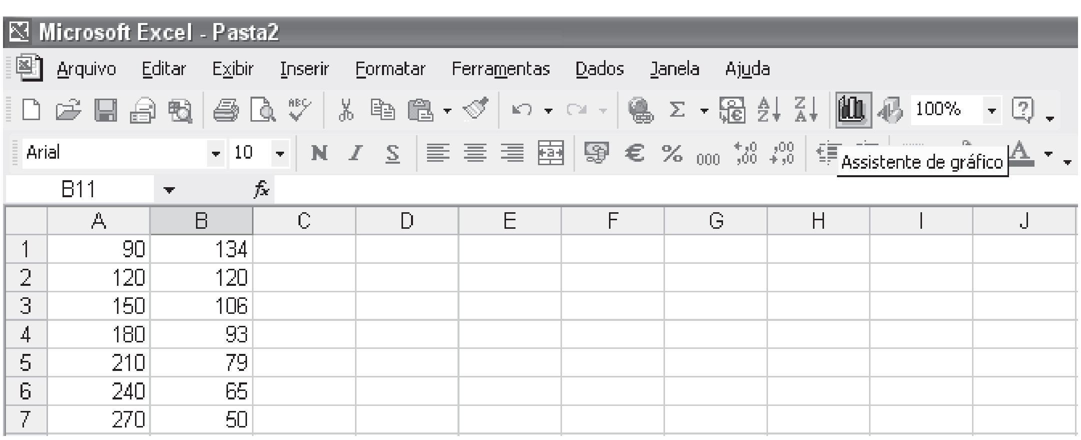


FIGURA 4.2 - Exemplo da janela do *Excel* para entrada dos dados

3. Após esse passo será aberta uma janela para que você escolha o tipo de gráfico. Como não sabemos qual é o tipo de comportamento observado, devemos escolher um gráfico de dispersão com pontos ligados por linhas suaves.

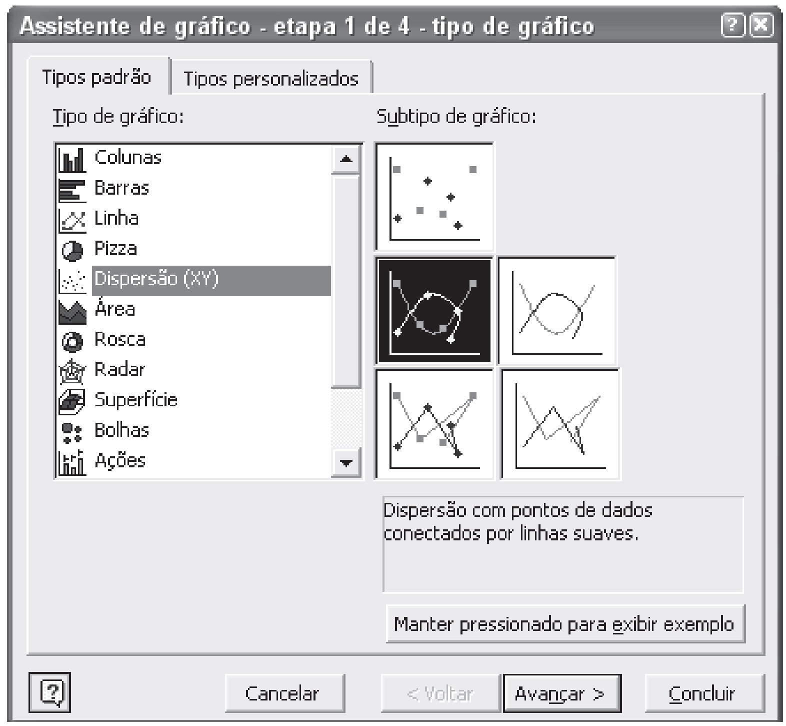


FIGURA 4.3 - Exemplo da janela do *Excel* para escolha do tipo de gráfico

4. Escolhido o tipo de gráfico, clique em avançar. Em seguida, clique em avançar novamente para que se inicie o processo de edição do gráfico.

5. No menu que irá aparecer você pode escolher:

   - No submenu *Linhas de Grade* você pode traçar linhas de grade, que lhe darão a referência de onde se encontram os pontos **(é mais elegante não fazê-lo, pois os dados já se encontram na tabela, para que a visualização do gráfico não fique poluída!)**.
   - No submenu *Título*, você dará título aos eixos e ao gráfico.
   - O submenu *Eixos* distribui automaticamente os valores dos eixos X e Y (não é necessário alterá-lo).
   - No submenu *Legenda*, você retira o nome da legenda (que geralmente para uma única seqüência de dados é igual ao título do gráfico).
   - Não é necessário alterar parâmetros no submenu *Rótulo de Dados*.

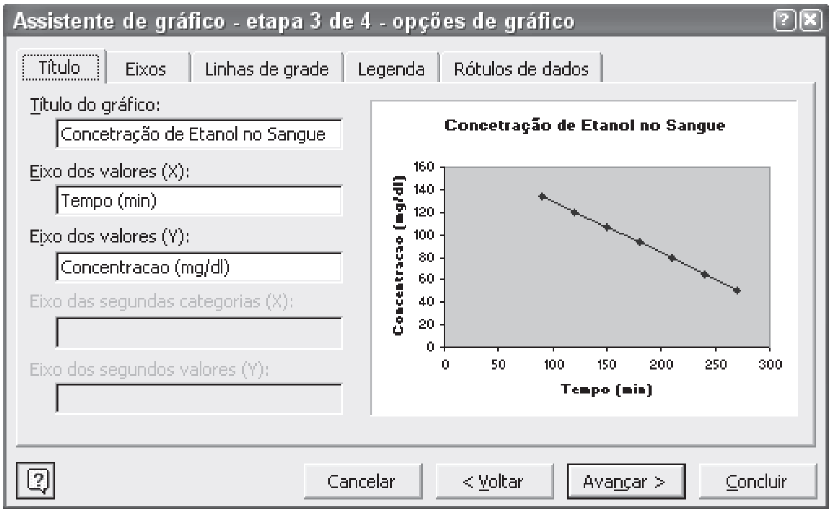


FIGURA 4.4 - Exemplo da janela do *Excel* para detalhamento do gráfico

6. Clique em avançar e depois salve o gráfico como um objeto na planilha (opção padrão) para que possa continuar a ser editado e depois copiado para outro documento.

O processo de edição dos eixos se dá através de um duplo clique sobre o eixo *X* ou *Y* e então será aberto um menu de edição onde você poderá mudar a escala (faixa de valores) dos eixos. Por exemplo, coloque os eixos *X* e *Y* começando e terminando nos valores-limite da tabela.

Em um gráfico, os eixos *X* e *Y* não precisam se cruzar na origem. Podemos alterar a escala e o ponto de cruzamento para melhorarmos a visualização do fenômeno estudado.

Após esta etapa, seu gráfico terá uma aparência semelhante à mostrada a seguir (para economizar na impressão, você pode mudar a cor de fundo do gráfico para branco; basta dar um duplo clique na superfície cinza e escolher cor nenhuma).

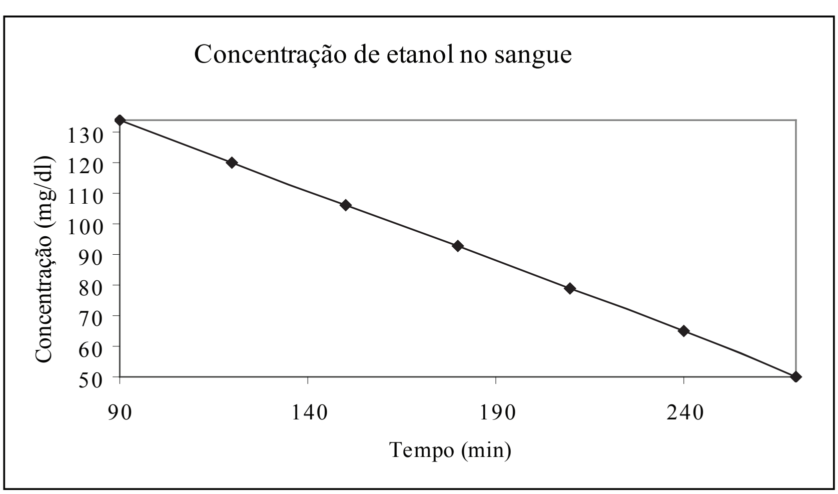


FIGURA 4.5 - Exemplo de gráfico produzido com o *Excel*

4.4 ATIVIDADE PRÁTICA: DENSIDADE DE UM LÍQUIDO

Introdução

Um objeto, ao ser mergulhado em um fluido qualquer, fica sujeito a uma força para cima devido à diferença entre as pressões nas suas partes superior e inferior. O módulo E dessa força, chamada de empuxo, é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto, ou seja,

$$E = \rho g V \ ,$$

em que ρ é a densidade do fluido, g é a aceleração da gravidade e V é o volume do fluido deslocado pelo objeto. Esse resultado é conhecido como Princípio de Arquimedes.

Considere o objeto pendurado em um dinamômetro, como mostrado na Figura 4.6a. Nessa situação, a leitura no dinamômetro é P. Em seguida, esse objeto é imerso em um líquido e, ao atingir o equilíbrio, a leitura no dinamômetro passa a ser P', como apresentado na Figura 4.6b.

Mostre que, nessa situação,

$$P' = P - \rho g V \ .$$

Então, medindo-se o peso aparente P' e o volume V submerso do objeto, é possível determinar a densidade do líquido.

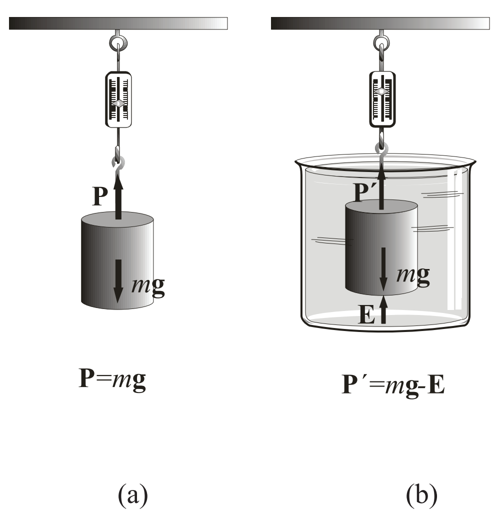


FIGURA 4.6 - Representação das forças que agem sobre o objeto. Em (a), o dinamômetro indica o peso P; em (b), o dinamômetro indica o peso aparente P'

Objetivo

- Determinar a densidade de um líquido.

Material utilizado

- Cilindro de alumínio graduado, dinamômetro, recipiente transparente contendo líquido de densidade desconhecida, haste com suporte e régua.

Procedimentos

- Utilizando o dinamômetro e a régua, determine o peso e o volume do cilindro de alumínio.
- Mergulhe o cilindro, ainda pendurado no dinamômetro, gradualmente no líquido. Para cada graduação do cilindro, registre o valor do peso aparente P' e o do volume mergulhado V.
- Faça o gráfico de P' em função de V utilizando o programa *Origin* ou *Excel*. A relação linear entre essas grandezas pode ser representada pela equação de uma reta,

$$P' = a + b\,V\,.$$

  Especifique as grandezas físicas que correspondem às constantes a e b.
- Com os resultados obtidos, determine os valores dessas duas constantes. Estime as incertezas através do método dos valores-limite.
- Compare os resultados encontrados neste experimento com aqueles mostrados na Tabela 4.3 e veja se é possível identificar o líquido utilizado.

Tabela 4.3
Densidades de alguns líquidos, em g/cm^3, à temperatura ambiente (20º C)

Líquido	Densidade
Água	1,00 ± 0,01
Benzeno	0,90 ± 0,01
Etanol	0,80 ± 0,02
Éter	1,49 ± 0,01
Glicerina	1,26 ± 0,01
Mercúrio	13,6 ± 0,1

UNIDADE 2
Ajuste de curvas pelos processos de regressão linear e de linearização

OBJETIVOS DESTA UNIDADE

- Calcular a equação da melhor reta pelo processo de regressão linear.
- Utilizar o processo de linearização de curvas.
- Usar recursos computacionais para obter os coeficientes da regressão linear.
- Elaborar um relatório técnico-científico.

AULA 5

Ajuste de curvas por regressão linear

OBJETIVOS

- Utilizar o método da regressão linear para calcular a equação da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais relacionados por uma dependência linear.
- Utilizar recursos computacionais para cálculo dos coeficientes da regressão linear.

5.1 AJUSTE DE CURVAS POR REGRESSÃO LINEAR

O gráfico da Aula 3 (Figura 3.1) sugere, visualmente, que existe uma relação linear entre a tensão aplicada no resistor e a corrente que passa por ele. Isso significa que, se procurarmos uma relação matemática que associe a corrente I no resistor sujeito a uma tensão V, essa relação deve ser a equação de uma reta, ou seja, uma equação do tipo:

$$y = a\,x + b, \tag{5.1}$$

em que a constante a representa a inclinação da reta e a constante b, o valor da grandeza y quando $x = 0$. Para o caso de um resistor, podemos escrever especificamente

$$V = A + B\,I$$

É possível traçar no gráfico, uma reta que, visualmente, passe melhor pelos pontos medidos e, então, determinar os valores de A e B. Entretanto, existem processos matemáticos que estabelecem a equação da melhor reta que se ajusta aos pontos medidos. O processo mais utilizado com esse intuito é chamado *regressão linear*.

Esse processo operacional de ajuste, ou seja, a obtenção das constantes A e B que definem a reta, é geralmente feito na calculadora ou no computador. No entanto, é interessante ter conhecimento da origem das fórmulas empregadas e da facilidade com que se consegue calcular as variáveis e suas respectivas incertezas.

5.1.1- Regressão linear

Pode-se dizer que a regressão linear é a determinação da equação de uma reta que melhor se sobrepõe aos resultados experimentais, relacionando grandezas linearmente dependentes. Para exemplificar uma aplicação desse processo, considere-se a série de pontos experimentais genéricos (x_i , y_i) colocados na Tabela 5.1 e no gráfico da Figura 5.1.

TABELA 5.1
Resultados de medidas de duas grandezas *x* e *y*

y	x
y_1	x_1
y_2	x_2
.	.
.	.
.	.
y_n	x_n

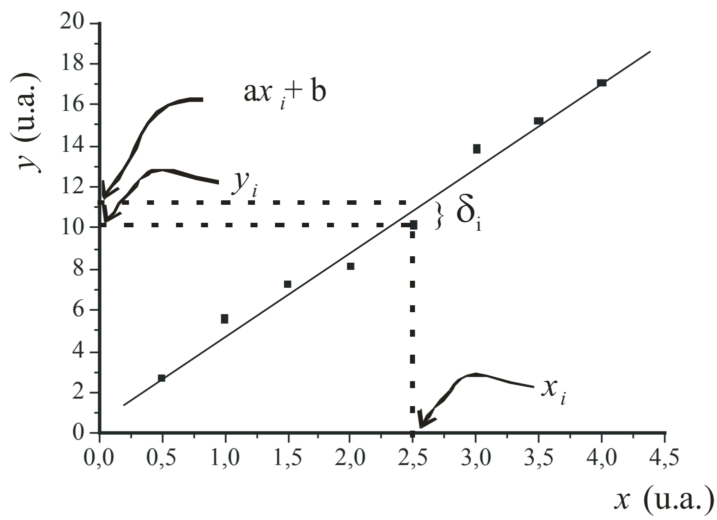


FIGURA 5.1 - Pontos experimentais definindo uma reta; δ_i é a diferença entre a ordenada y_i medida para x_i e o correspondente valor calculado pela equação da reta

Se a melhor curva que passa por esses pontos é a reta desenhada, pode-se escrever sua equação na forma $y = a\,x + b$.

Observando-se o gráfico da Figura 5.1, nota-se que, para o ponto x_i, o valor experimental correspondente é y_i , mas, pela reta escolhida, a ordenada correspondente a x_i será:

$$a\,x_i + b$$

Dessa forma, para cada ponto x_i existe uma diferença, ou resíduo,

$$\delta_i = y_i - (a\,x_i + b),$$

entre a medida e o valor de y calculado pela reta. Alguns resíduos são positivos e outros negativos. Uma grandeza que dá uma visão de "quão boa" é a reta, é

$$D = \sum (\delta_i)^2 = \sum [\, y_i - (a\, x_i + b)]^2 \;; \tag{5.2a}$$

$$D = \sum y_i^{\,2} + a^2 \sum x_i^{\,2} + Nb^2 - 2a\sum x_i y_i - 2b\sum y_i + 2ab\sum x_i^{\,2}\,, \tag{5.2b}$$

que representa a *soma dos quadrados dos resíduos de todos os N pares de valores experimentais* $(x_i\,, y_i)$. A melhor reta que se ajusta aos pontos experimentais é aquela que minimiza D, ou seja, deve-se encontrar os valores de a e b tais que D seja mínimo. Como D é uma função de a e b, para que ele seja mínimo deve-se ter:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D}{\partial b} = 0$$

Derivando-se a equação (5.2), tem-se:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2 \sum [\, y_i - a x_i - b]\, x_i \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2 \sum [\, y_i - a x_i - b]$$

Assim, para que D seja mínimo, deve-se ter

$$\sum [\, y_i - a x_i - b] = 0 \tag{5.3a}$$

$$\sum [\, y_i - a x_i - b]\, x_i = 0 \tag{5.3b}$$

A solução de (5.3) é simples e dá como resultado os seguintes valores para a e b:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \tag{5.4a}$$

$$b = \frac{1}{N}[\sum y_i - \sum x_i] = \frac{\sum x_i^{\,2} \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^{\,2} - (\sum x_i)^2} \tag{5.4b}$$

Todos os somatórios apresentados aqui são para i de 1 até N, onde N é o número de pares de valores experimentais $(x_i\,, y_i)$.

Uma descrição mais completa dos cálculos permitiria, ainda, determinar estatisticamente as incertezas associadas às constantes *a* e *b* calculadas. São apresentados a seguir os resultados dos cálculos dessas incertezas:

$$\Delta b = \frac{D}{(N-2)\sqrt{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{5.5a}$$

$$\Delta a = \frac{D}{(N\text{-}2)}\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{5.5b}$$

Obs. 1) O cálculo dos erros fica muito mais simples e direto se usamos para o cálculo de D a equação (5.2b), em que os valores já calculados dos somatórios entram diretamente.

Obs. 2) Existe um parâmetro estatístico, chamado coeficiente de determinação, que permite avaliar a qualidade do ajuste. Quanto mais próximo de 1 mais próximo de uma reta.

Obs. 3) No método da regressão linear, todos os pares ordenados têm a mesma importância. Em alguns casos, condições físicas impõem que alguns pontos tenham mais importância que outros (muitas vezes, por exemplo, a reta deve passar pela origem). Neste caso, pode-se entrar com os correspondentes pares de valores várias vezes para aumentar sua importância nos cálculos; a reta tenderá a passar mais próxima desse ponto.

5.1.2- Outras considerações

O processo de ajustar uma curva descrita por uma equação a um conjunto de pontos experimentais não se aplica apenas quando a relação entre as grandezas é linear. Sempre que existir algum modelo ou previsão teórica para a relação matemática entre as grandezas, é possível encontrar os parâmetros que ajustem a curva correspondente com os resultados experimentais. O método matemático genérico que permite esse tipo de ajuste é chamado de Método de Mínimos Quadrados pois, como foi exemplificado no caso particular do ajuste da reta, são procurados os parâmetros que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos δ_i (equação 5.2). Muitos programas de tratamento de dados permitem fazer um ajuste diretamente de uma função matemática estabelecida pelo usuário. Na Unidade 3 faremos vários experimentos em que esse tipo de situação ocorre.

5.2 REGRESSÃO LINEAR COM O PROGRAMA *EXCEL*

Como acabamos de estudar, a regressão linear usa métodos estatísticos para obter a equação da reta para a qual os pontos experimentais encontram-se eqüidistantes da reta traçada. Podemos usar o *Excel* para determinar os parâmetros A e B de uma função do primeiro grau. Utilizaremos o exemplo da concentração *C* de etanol no sangue, em função do tempo *t*, após a ingestão de etanol. Veja como é feita a regressão linear:

1) **Refaça os passos descritos na Seção 4.3.** Depois clique com o botão direito do *mouse* sobre os pontos e, na caixa que aparecer, escolha a opção "adicionar linha de tendência".

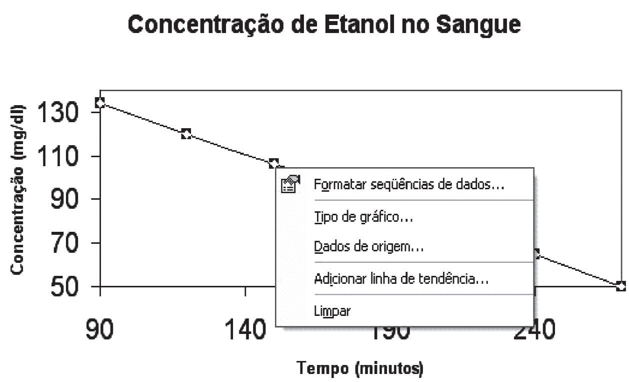


FIGURA 5.2 - Exemplo de regressão linear com o *Excel*

2) Na caixa aberta, escolha o tipo "Linear".

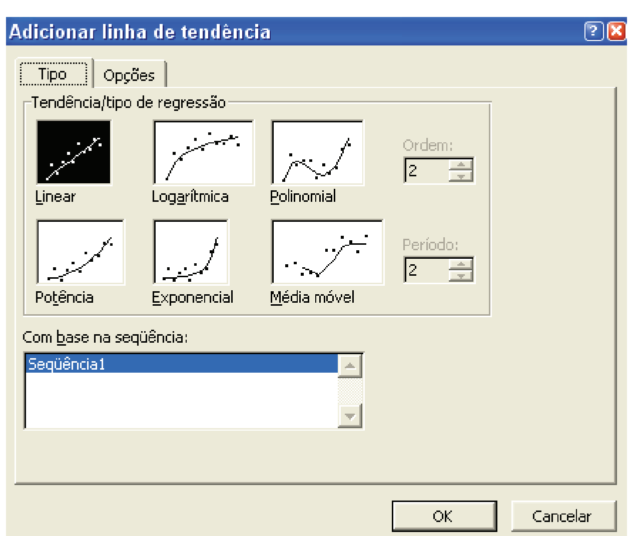


FIGURA 5.3 - Exemplo da janela do *Excel* para adição de linha de tendência

3) Na barra "Opções" escolha: "Linha de tendência automática" e "Exibir equação no gráfico".

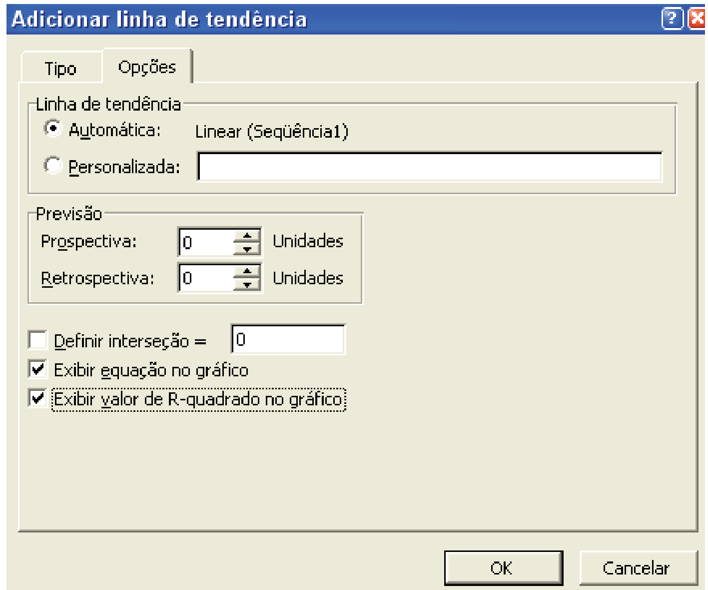


FIGURA 5.4 - Exemplo da janela do *Excel* para personalização da linha de tendência

4) Após esses passos, a equação será escrita em seu gráfico.

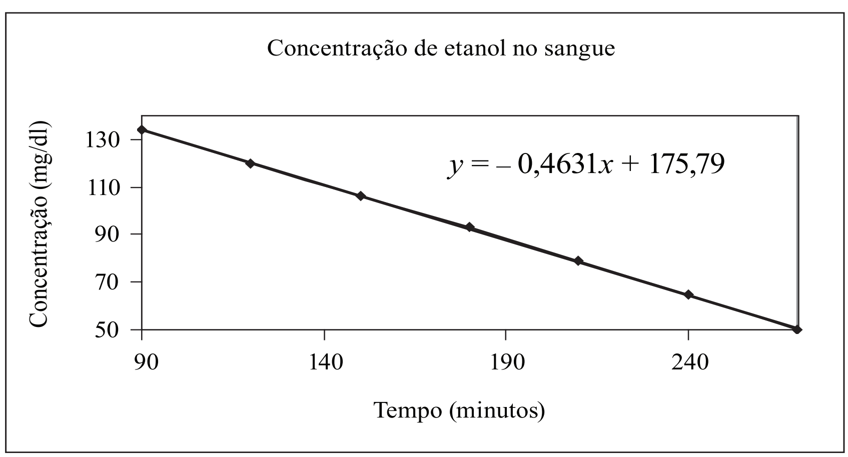


FIGURA 5.5 - Exemplo de gráfico com regressão linear usando o *Excel*

5.3 ATIVIDADE PRÁTICA: CONSTANTE ELÁSTICA DE MOLAS

Introdução

Sob a ação de uma força de tração ou de compressão, todo objeto sofre alterações em sua forma, tamanho, ou em ambos. As alterações dependem de características intrínsecas (arranjos dos átomos e o tipo de ligação entre eles no material) do objeto sobre o qual atua a força.

Uma mola distende-se quando um peso é pendurado nela. Um peso adicional a estica ainda mais. Se o peso for retirado, a mola volta a ter o mesmo comprimento original. Nesse caso, dizemos que a mola é um objeto elástico. A elasticidade é a propriedade pela qual a forma se altera quando uma força deformante é aplicada sobre o objeto, mas retorna à forma original quando a força deformante é retirada.

Em geral, existe um limite para o valor da força a partir do qual acontece uma deformação permanente no corpo. Dentro do limite elástico, há uma relação linear entre a força aplicada e a deformação, linearidade esta que expressa uma relação geral conhecida como Lei de Hooke:

$$F = kx, \tag{5.6}$$

em que F é o valor da força, k é a constante elástica e x é a deformação da mola.

A constante elástica mede a "dureza" da mola, que é a resistência da mola a ser deformada (esticada ou comprimida). Ela é medida em N/m (newtons por metro) e nos informa qual a força (quantos newtons) necessária para deformar a mola de um metro. Uma mola de um feixe de molas de caminhão é muito mais dura que a de uma caneta esferográfica, ou seja, possui uma constante k bem maior.

A força elástica é sempre contrária à força que deformou a mola; dessa forma a força elástica é também denominada força restauradora, podendo aparecer um sinal negativo na Lei de Hooke. O sistema clássico utilizado para ilustração dessa lei é o sistema massa-mola em situações de equilíbrio estático, que é apresentado a seguir.

A Figura 5.6 mostra uma mola helicoidal, de massa desprezível, pendurada por uma de suas extremidades (a); ao se colocar um objeto de massa m na outra extremidade, aparece um alongamento x na mola (b).

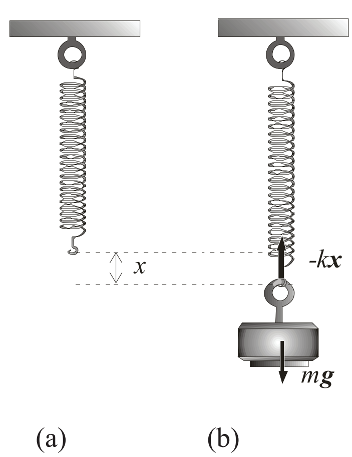


FIGURA 5.6 - Em (a), a mola não está alongada; em (b), a mola está alongada de x, em relação à posição inicial, devido ao peso do objeto de massa m; o peso do objeto é equilibrado pela força $-kx$, que a mola exerce nele

A força **F** aplicada na mola é o peso do corpo. Dentro do limite elástico, tem-se

$$F = mg = kx. \tag{5.7}$$

Associando-se duas molas, a constante elástica do conjunto passa a ter outro valor, o qual depende da maneira como foi feita a associação. A Figura 5.7 mostra um objeto suspenso por duas molas associadas em série (a) e em paralelo (b).

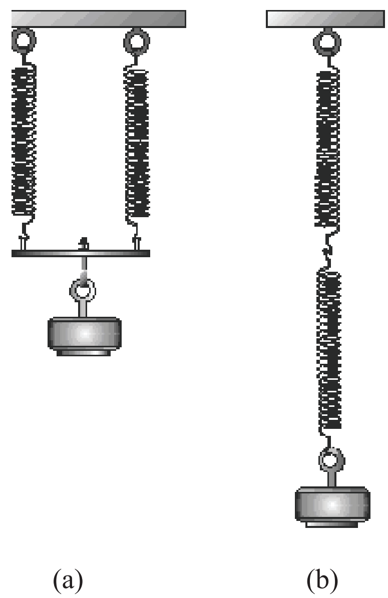


FIGURA 5.7 - Associação de duas molas, em paralelo (a) e em série (b)

Alongar as molas associadas em série é "mais fácil" do que alongar as molas associadas em paralelo (veja Anexo C).

Objetivos

- Determinar a constante elástica de uma mola.
- Determinar a constante elástica de uma combinação de molas.

Material utilizado

- Suporte e régua milimetrada, duas molas, objetos de massa $(m_i \pm \Delta m_i)$.

Procedimentos

Neste experimento serão feitas medidas dos alongamentos x de uma mola (ou de uma associação de molas) em função da força **F** aplicada em sua extremidade.

- Pendure uma mola no suporte colocando em sua extremidade livre o suporte para objetos de massa. Meça com a régua o alongamento inicial da mola, x_o, decorrente do peso do suporte.

  Essa medida pode ser usada como referência, x_o, de modo que as medidas seguintes dos alongamentos x são tomadas em relação a essa referência, ou seja,

$$x = x_f - x_o \tag{5.8}$$

- Acrescente os objetos de massa medindo para cada um o alongamento x da mola.
- Faça uma tabela com os valores das forças **F** aplicadas e dos alongamentos x correspondentes.
- Após registrar todos os dados na tabela, verifique se a deformação da mola foi elástica retirando todos os objetos que foram colocados.
- Faça o gráfico F *versus* x para a primeira mola. Pode-se observar que existe uma relação linear entre F e x:

$$F = \mathrm{A}x + \mathrm{B}, \tag{5.9}$$

  em que A e B são coeficientes que definem a reta nessa situação.

ATIVIDADE 1

Por meio do processo de regressão linear, calcule os somatórios e obtenha os valores de A e B, de acordo com as equações (5.4a) e (5.4b), para a primeira mola. Calcule as incertezas ΔA e ΔB com as equações (5.5a) e (5.5b).

$\Sigma x =$	$\Sigma y =$	$(\Sigma x)^2 =$	$(\Sigma y)^2 =$
$\Sigma xy =$	$\Sigma x^2 =$	$\Sigma y^2 =$	
A =	B =	ΔA =	ΔB =

Não utilize o *Origin* ou o *Excel* para obter esses resultados!!!

- Retire o suporte para os objetos de massa e pendure ao seu lado outra mola, obtendo assim uma associação de molas em paralelo, conforme esquematizado na Figura 5.7a.
- Repita todos os procedimentos anteriores de medição para essa associação de molas.
- Faça uma associação de molas em série como ilustra a Figura 5.7b. Repita os procedimentos anteriores para medição dessa associação de molas.
- Faça os gráficos F *versus* x para cada uma das duas combinações, em série e em paralelo.

ATIVIDADE 2

Utilize agora o programa *Excel* ou o *Origin* para determinar por regressão linear os valores dos parâmetros A e B com suas respectivas incertezas, para as associações em série e em paralelo.

Bem mais rápido, não?

- Pelo modelo físico utilizado, comparando a equação $F = kx$ com a equação (5.9) $F = Ax + B$, comente sobre o significado físico do parâmetro A (inclinação da reta) para cada uma das montagens. Comente também sobre o valor encontrado para o parâmetro B. Pelo modelo teórico, qual deveria ser o seu valor? Explique.
- Utilizando os parâmetros dos outros dois gráficos, que correspondem às associações de molas em série e em paralelo, determine as constantes elásticas k_1 e k_2 das duas molas com suas respectivas incertezas.
- Tendo em vista os valores de k_1 e k_2 das constantes elásticas obtidas no experimento, qual associação, em série ou em paralelo, tem uma constante elástica maior? Neste caso o conjunto ficou mais "duro" ou mais "macio"? Explique.

AULA 6

Ajuste de curvas pelo processo de linearização

OBJETIVOS
- Usar o processo de linearização quando a dependência entre os dados não for linear.

6.1 LINEARIZAÇÃO

Quando duas grandezas x e y se relacionam linearmente, ou seja, $y = ax + b$, é possível, a partir da regressão linear dos pares de resultados obtidos (x, y), encontrar as constantes a e b da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, conforme descrito no capítulo anterior. Usando os valores dessas constantes, é possível obter informações importantes relativas ao experimento.

Há, obviamente, experimentos em que a relação entre as grandezas estudadas não é linear, o que significa que essas grandezas não estão relacionadas por uma equação de reta. Em situações como esta, a obtenção de informações relevantes ao experimento pode ser feita de mais de uma maneira. Apresenta-se a seguir o procedimento de linearização, usando a Lei de Coulomb como exemplo.

6.1.1- Procedimento de linearização

Duas pequenas esferas carregadas positivamente com cargas q_1 e q_2 estão separadas de uma distância r; existe uma repulsão elétrica mútua entre elas com forças iguais e opostas $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, como indicado na figura abaixo.

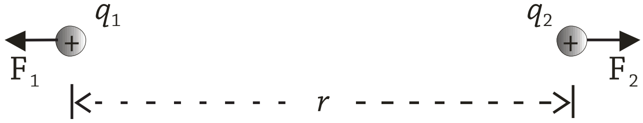


FIGURA 6.1 - Duas cargas positivas q_1 e q_2 separadas por uma distância r, repelem-se com forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$

Foi realizado um experimento, dispondo-se de um equipamento apropriado, no qual se variou a distância r entre as cargas e mediu-se o valor do módulo F da força de repulsão. Os resultados encontram-se na Tabela 6.1, e um gráfico de F *versus* r é mostrado na Figura 6.2.

Tabela 6.1
Valores da força F em função da distância r entre duas pequenas esferas com cargas q_1 e q_2

F (± 0,004 N)	r (± 0,1 x 10^{-2} m)
2,913	1,0
2,489	1,2
1,412	1,5
0,957	1,8
0,783	2,0
0,513	2,5
0,357	3,0
0,199	4,0
0,128	5,0
0,089	6,0
0,065	7,0
0,050	8,0
0,039	9,0
0,032	10,0

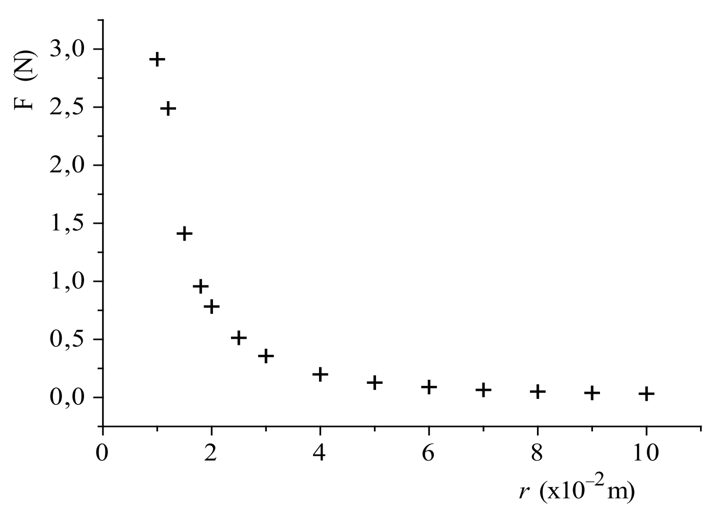


FIGURA 6.2 – Módulo da força F de repulsão elétrica entre duas pequenas esferas de cargas q_1 e q_2 em função da distância r de separação entre elas

Uma abordagem formal desse problema de força elétrica entre duas cargas pontuais mostra que a relação matemática entre F, q_1, q_2 e r é:

$$F = K\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \tag{6.1}$$

em que K é uma constante que vale 9,0 x 10^9 N.m^2/C. Esta relação é conhecida como Lei de Coulomb.

Considerando que as cargas q_1 e q_2 nas esferas não variam, deve-se esperar que a força entre elas varie com o inverso do quadrado da distância. Pode-se levantar, então, a seguinte questão: como verificar se os dados experimentais concordam com a previsão teórica?

Essa questão já foi respondida anteriormente em situações em que a relação entre as grandezas estudadas é linear e o método de regressão linear pôde ser usado para se achar a equação da reta que melhor se ajusta aos dados obtidos. No presente caso, a relação entre F e r não é linear; logo, não se pode aplicar esse método diretamente. Existem maneiras de se ajustar qualquer tipo de equação a dados experimentais (veja Unidade 3); entretanto, aqui será mostrado um método que aproveita os conhecimentos já empregados no uso da regressão linear. Primeiramente, é preciso passar o gráfico obtido por um processo de linearização. Tal procedimento consiste em se encontrarem novas grandezas, que sejam funções das grandezas originais e que tenham entre si uma relação linear.

A Lei de Coulomb afirma que a força elétrica entre duas cargas pontuais varia com o inverso do quadrado da distância entre elas, ou seja, para valores de cargas constantes, pode-se escrever a lei física que deve corresponder ao presente experimento na forma:

$$F = C\,\frac{1}{r^2}$$

em que $\mathrm{C} = \mathrm{K}\, q_1\, q_2$ = constante.

Definindo-se uma outra variável X igual ao inverso do quadrado de r, tem-se uma relação entre F e X que é linear. Ou seja, definindo-se uma grandeza $X = 1/r^2$, tem-se $F = \mathrm{A}X$. Assim, construindo-se o gráfico de F (ordenada) em função de X (abscissa), encontra-se uma reta, sendo possível, então, fazer uma regressão linear entre os valores de F e X. Resumindo, tem-se

$$Y = \mathrm{A}X + B \text{ em que } \begin{cases} Y' = F \\ X' = \dfrac{1}{r^2} \\ \mathrm{B}' \approx 0 \\ \mathrm{A}' = \mathrm{C} \end{cases}$$

Os resultados desse processo são apresentados na figura a seguir.

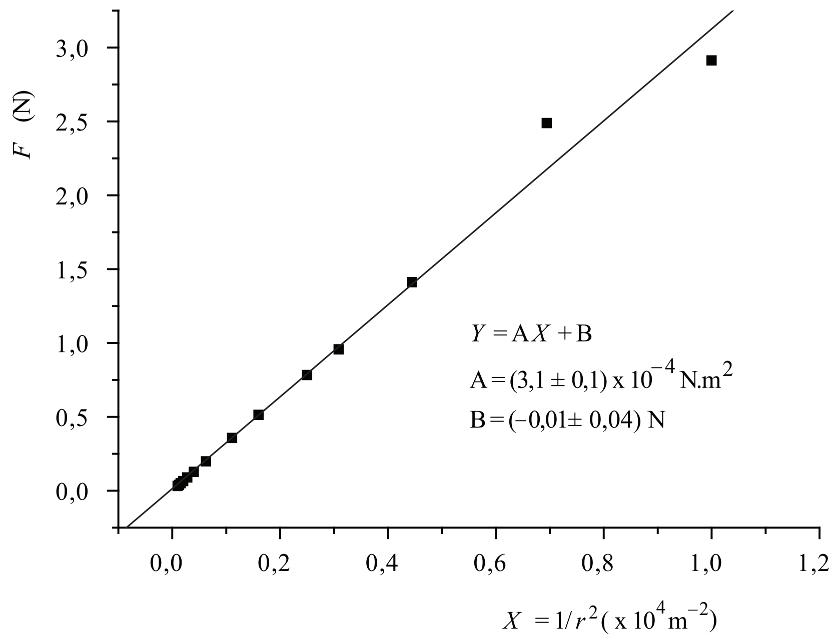


FIGURA 6.3 – A força F entre duas cargas elétricas é linear com o inverso do quadrado da distância entre elas $X = 1/r^2$. Os parâmetros do ajuste por regressão linear estão incluídos no gráfico

O procedimento para se linearizar um gráfico depende de cada situação, pois as equações envolvidas na análise do problema é que irão dar a "receita" do que deve ser feito para se encontrarem novas variáveis, funções das anteriores, que tenham relação linear entre si. No caso aqui apresentado, o procedimento foi simplesmente representar a força e o inverso do quadrado da distância.

6.1.2- Uso da função logaritmo

Uma maneira muito comum de se procurarem relações que linearizem um gráfico é aplicar a função logaritmo. Entretanto, deve-se ter o cuidado em utilizar esse expediente apenas em situações em que pelo menos uma das variáveis envolvidas no experimento esteja no expoente. Por exemplo, vários fenômenos físicos têm uma descrição formal entre as variáveis x e y do tipo

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 e^{\alpha_2 x} \quad \text{ou} \quad y = \beta_0 + \beta_1{}^{\beta_2/x},$$

em que α_i e β_i são constantes, as quais necessitam da função logaritmo para a linearização.

O uso do logaritmo na situação do exemplo anterior de força entre cargas elétricas pode levar a um mascaramento do comportamento das grandezas. Por exemplo, tomando-se o logaritmo de ambos os lados da equação (6.1) tem-se uma nova relação matemática correspondente ao experimento:

$$\ln F = -2\ln r + \ln C \quad \text{com} \quad C = K\, q_1\, q_2$$

A equação anterior tem a forma de equação de uma reta

$$Y' = A' + B'X' \ \text{ onde, agora, } \begin{cases} Y' = \ln F \\ X' = \ln r \\ B' \approx -2 \\ A' = \ln C \end{cases}$$

Ao se fazer a regressão linear nos novos dados, o parâmetro B' será ajustado por métodos de mínimos quadrados, podendo ser encontrado um valor diferente de –2. Isso é feito pois, ao buscar o mínimo da soma dos quadrados das diferenças δ_i, o método leva as flutuações naturais a qualquer processo de coleta de dados, para os parâmetros ajustáveis A' e B'. Entretanto, sabe-se muito bem que o expoente da distância entre as cargas pontuais na Lei de Coulomb é 2 (exatamente!), não havendo sentido para se ajustar esse valor. Portanto, esta não é uma variável no problema.

É importante chamar a atenção de que o processo de linearização de um gráfico consiste simplesmente em encontrar as ordenadas e abscissas adequadas, de modo que a relação entre elas seja linear. Em várias situações o uso da função logaritmo pode ser o processo mais conveniente, mas não é sempre assim. A escolha da maneira mais conveniente para se fazer a linearização de um gráfico deve ser orientada no sentido de se obterem, da maneira mais simples, as constantes procuradas.

6.2 ATIVIDADE PRÁTICA: MÓDULO DE FLEXÃO DE UMA HASTE

Introdução

Para um arqueiro atirar uma flecha, ele flexiona mais o arco, o qual retorna a sua posição original quando a flecha é liberada. Esse fato exemplifica como funciona um objeto elástico. A elasticidade é a propriedade pela qual a forma se altera quando uma força deformante é aplicada sobre o objeto, a qual retorna à forma original quando a força deformante é retirada.

Esse tipo de deformação ocorre, por exemplo, quando as vigas são usadas horizontalmente, quando tendem a vergar-se sob cargas pesadas. Quando uma viga horizontal é sustentada por uma ou por ambas as extremidades, ela se encontra tanto sob tensão (puxada) como sob compressão (empurrada), devido à carga que ela sustenta e ao seu próprio peso.

Considere a viga horizontal sustentada por uma das extremidades na Figura 6.4 (conhecida como "viga em balanço" ou "viga cantilever"). Ela verga devido ao próprio peso e ao peso da carga que ela sustenta na extremidade livre. Basta pensar um pouco para perceber que o lado superior da viga está sendo distendido.

Seus átomos foram afastados além do normal. O lado superior é um pouco mais comprido do que o lado inferior, pois está sob tensão. Seguindo o raciocínio, percebe-se que o lado inferior da viga está sob compressão. Seus átomos foram aproximados uns dos outros além do normal. Ela é um pouco mais curta no lado de baixo do que no lado de cima devido à maneira como foi vergada. A parte superior está sob tensão e a parte inferior, sob compressão. Você consegue perceber que entre o lado superior e o inferior existe uma região onde não existem esforços no interior do material, nem tensão nem compressão? Essa região é denominada camada neutra.

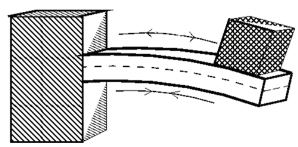


FIGURA 6.4

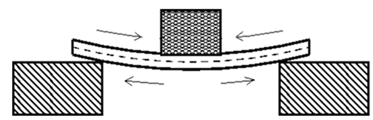


FIGURA 6.5

A viga horizontal mostrada na Figura 6.5, conhecida como "viga simples", é sustentada por ambas as extremidades e suporta o peso de uma carga situada no meio. Nesta situação, existe compressão no lado superior da viga e tensão no lado inferior da mesma. Novamente, existe uma camada neutra ao longo da parte central da espessura da barra, ao longo de todo seu comprimento.

Com a camada neutra em mente, podemos compreender a razão pela qual a seção transversal de vigas de aço possui o formato da letra I (Figura 6.6). A maioria do material nessas vigas com seção transversal em "I" está concentrada nas bordas do topo e do fundo da seção transversal; o pedaço de material que une as duas bordas, denominado alma de viga, contendo a camada neutra, pode ser muito menos largo do que as bordas. Assim, quando a viga é usada horizontalmente numa construção, o esforço está concentrado nas bordas superior e inferior da viga, e não na parte central, cuja função principal é manter unidas as bordas.[1]

[1] Sobre este assunto, cf. HEWIT, P. G. *Física conceitual*. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

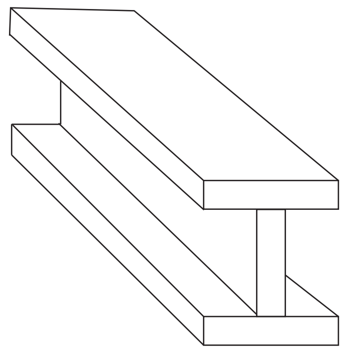


FIGURA 6.6 – Uma viga em "I" é como uma barra sólida em que parte do aço foi escavada na sua região central, onde era menos necessário. A viga obtida é, portanto, mais leve e possui a mesma resistência

A grandeza que mede como um determinado material reage a uma força que tende a flexionar o objeto é o Módulo de Young para Flexão E – ou simplesmente Módulo de Flexão. No caso de uma haste, abaixo de um valor-limite para a flexão, define-se uma constante de flexão k_f, que se relaciona com o módulo de flexão E pela equação

$$k_f = \frac{Ele^3}{x^3}\ , \tag{6.2}$$

em que E é o módulo de flexão; l, a largura da barra; e, a espessura da barra; e x é o comprimento da barra.

Dentro de um certo limite, ao ser aplicada uma força F na sua extremidade livre de uma haste, esta irá apresentar uma flexão y que é diretamente proporcional à força aplicada. Essa relação, já observada pelo físico britânico Robert Hooke, em meados do século XVII, é denominada Lei de Hooke:

$$F = k_f\, y\ . \tag{6.3}$$

Levando essa expressão de k_f para a equação (6.3), pode-se escrever

$$F = k_f\, y = \frac{Ele^3}{x^3}\, y$$

Assim, em um experimento em que se pretende medir a flexão y de uma haste em função de seu comprimento x, se forem mantidas constantes todas as outras grandezas (a força aplicada, a largura, a espessura e o material da haste), os dados experimentais obtidos devem corresponder à equação

$$y = Kx^3\ , \tag{6.4}$$

em que $K = \dfrac{F}{Ele^3}$ é uma constante.

Objetivo

- Determinar o módulo de elasticidade E de um material.

Material utilizado

- Haste de aço, prendedores, suportes, objeto com massa ($m \pm \Delta m$), régua milimetrada e paquímetro.

Procedimentos

- Determine a espessura e a largura da haste utilizada, com suas respectivas incertezas, usando régua e paquímetro.
- Faça uma montagem semelhante à esquematizada pela Figura 6.7.

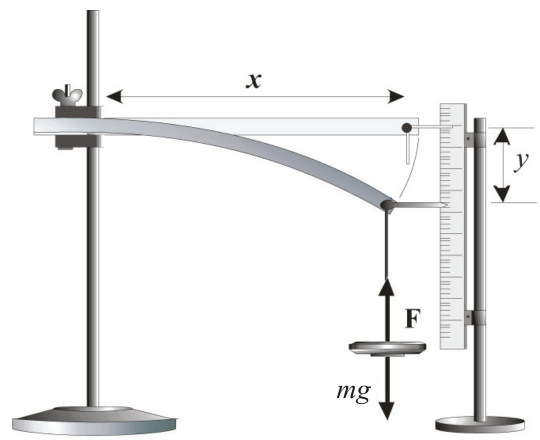


FIGURA 6.7 – Deformação de flexão y de uma barra sujeita a uma força **F**, aplicada a uma distância x da extremidade fixa; a flexão y é dependente da distância de aplicação da força

- Adicione o suporte com os objetos de massa na extremidade livre da haste. Não coloque mais que 700 g em sua extremidade.
- Faça medidas da flexão y para vários comprimentos x da haste, como ilustra a Figura 6.7, e registre-as numa tabela.
- Utilize os dados registrados em sua tabela para fazer o gráfico da flexão y da haste em função do comprimento x. Observe que a relação entre y e x não é linear.
- Faça uma linearização, ou seja, faça um gráfico de y *versus* x^3, e em seguida uma regressão linear para determinar o Módulo de Flexão E da sua haste e sua incerteza ΔE.
- Explique por que o valor encontrado para a incerteza ΔE do Módulo de Flexão teve um valor alto.
- Compare e comente o resultado encontrado no experimento com o valor médio do Módulo de Flexão para vários tipos de aço, que é de $(4{,}5 \pm 0{,}5) \times 10^{10}$ N/m^2 .

AULA 7

Atividade prática de avaliação

OBJETIVOS
• Realizar uma atividade prática para avaliação das habilidades desenvolvidas até o momento.

7.1 ATIVIDADE PRÁTICA: PÊNDULO SIMPLES

Introdução

Na natureza, existe um grande número de fenômenos em que se observam eventos periódicos, ou seja, que se repetem em intervalos regulares de tempo. As ondas sonoras, a vibração de uma corda de um instrumento musical, as radiações eletromagnéticas e o movimento dos elétrons em um campo elétrico alternado são alguns exemplos. Embora a natureza dessas oscilações seja bastante diversa, as formulações matemáticas utilizadas para descrevê-las são parecidas, divergindo na sua complexidade.

Um sistema de descrição matemática simples e muito útil para compreender as características gerais dos movimentos oscilatórios e periódicos é o *pêndulo simples*.

Um pêndulo simples é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme suspenso por um fio inextensível de massa desprezível (Figura 7.1). Quando o corpo puntiforme é puxado lateralmente a partir da sua posição de equilíbrio e a seguir libertado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. As seguintes situações familiares podem ser modeladas como pêndulo simples: uma bola de demolição presa no cabo de um guindaste, o peso da extremidade de um fio de prumo e uma criança sentada em um balanço.

A trajetória do corpo puntiforme (algumas vezes chamado de peso) não é uma linha reta, mas um arco de circunferência de raio L igual ao comprimento do fio. Usaremos como coordenada a distância x medida ao longo do arco. Para que a oscilação seja um movimento harmônico simples, é necessário que a força restauradora seja diretamente proporcional à distância x ou a θ (porque $x = L\theta$).

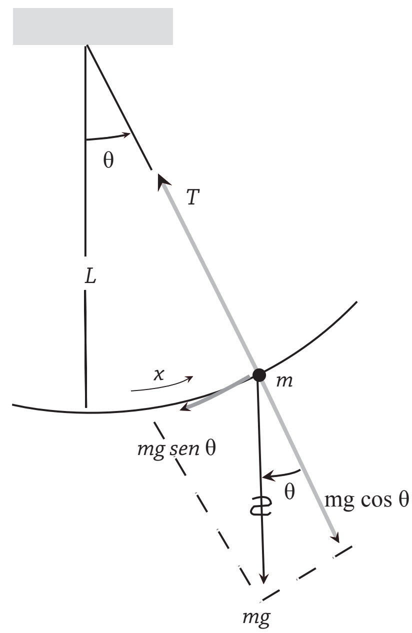


FIGURA 7.1 - Pêndulo simples

A força restauradora é fornecida pela gravidade: a tensão T atua meramente para fazer o peso puntiforme se deslocar ao longo de um arco (Figura 7.1). A força restauradora não é proporcional a θ mas sim a $sen\theta$; logo, o movimento não é harmônico simples. Contudo, quando o ângulo θ é pequeno, $sen\theta$ é aproximadamente igual ao ângulo θ em radianos. Por exemplo, quando $\theta = 0{,}1$ rad (aproximadamente igual a 6°), $sen\theta = 0{,}0998$, uma diferença de apenas 0,2%. Dessa forma, a força restauradora é dada pela expressão

$$F = mg\frac{x}{L} \ .$$

Observe que a força é proporcional ao deslocamento x. Esta é a condição básica para que o movimento seja um movimento harmônico simples, cujo período será dado pela expressão $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Nesse caso, a constante k será igual a $\frac{mg}{L}$. Substituindo k na expressão do período, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7.1}$$

É importante ressaltar que o movimento de um pêndulo simples é aproximadamente harmônico simples. Quando a amplitude é grande, o período é determinado em uma série infinita dada pela equação (7.2).

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2^2} sen^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3}{4^2} sen^4 \frac{\theta_0}{2} + ...\right) \qquad (7.2)$$

em que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; e g é a aceleração da gravidade.

Para se verificar a validade dessa aproximação, pode-se calcular o valor do período para $\theta = 15^o$ e verificar que o período real é cerca de 0,5% maior que o período aproximado, calculado pela equação (7.1).

Objetivo

- Determinar o valor da aceleração da gravidade através de medidas do período de um pêndulo simples.

Material utilizado

- Barbante fino, esfera de metal, cronômetro e régua.

Procedimentos

O experimento consiste em medir o período do pêndulo variando seu comprimento. Para isso, você deve usar uma montagem como a mostrada na Figura 7.2.

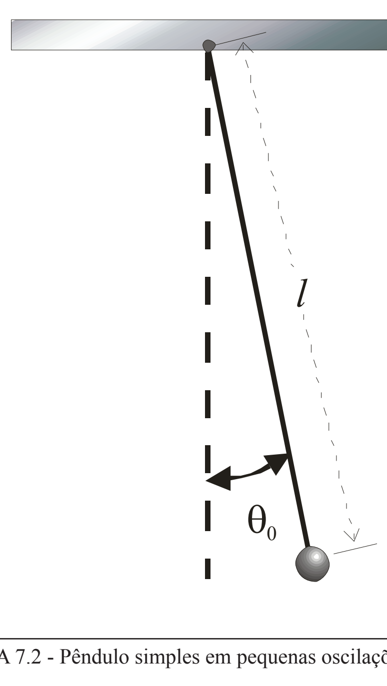


FIGURA 7.2 - Pêndulo simples em pequenas oscilações ($\theta_0 \leq 10°$)

- Estabeleça um comprimento inicial $l \cong 2{,}00$ m e meça o período T do pêndulo. Reflita sobre a melhor maneira de se realizar essa medida a fim de se obter um bom valor para T.
- Repita o procedimento para diferentes valores de comprimento do fio e construa uma tabela com os dados obtidos. Tenha o cuidado de obter valores de l bem distribuídos, incluindo $l \cong 0{,}20$ m; 0,30 m; . . ., a fim de perceber, claramente, o caráter não-linear da relação entre T e l.
- Construa um gráfico de T *versus* l. Observe que os pontos registrados no gráfico não se situam sobre uma reta, como era de se esperar, de acordo com a equação (7.2).
- Utilizando um processo de linearização e fazendo, em seguida, uma regressão linear nos dados, determine o valor da aceleração da gravidade com seu respectivo erro.
- Compare seus resultados em relação ao valor de g local conhecido por meio de outros processos.

Problema experimental (opcional)

Calcule qual deve ser o comprimento de um pêndulo simples cujo período é de 1,0 s. Construa esse pêndulo, meça o período e comente o resultado. Determine a precisão máxima de um relógio construído com base em um pêndulo com esse comprimento.

UNIDADE 3
Ajuste de curvas por regressão não-linear

OBJETIVOS DESTA UNIDADE

- Calcular a melhor função de ajuste pelo processo de regressão não-linear.
- Usar recursos computacionais para obter diretamente os coeficientes de um ajuste envolvendo regressão não-linear para os casos de uma lei de potência, um polinômio, uma função exponencial e uma função logarítmica.
- Elaborar um relatório técnico-científico.

AULA 8

Lei de potência

OBJETIVOS
- Utilização do processo de regressão não-linear para o caso de um comportamento descrito por uma lei de potência.

8.1 DEPENDÊNCIA NÃO-LINEAR

Por muitas vezes a dependência teórica entre as variáveis X e Y é conhecida, sendo descrita por uma das formas abaixo:

exponencial	$y = ke^{ax}$	(8.1)
polinomial	$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots zx^n$	(8.2)
logarítmica	$y = k \log(ax)$	(8.3)
lei de potência	$y = k\, cte^{ax}$	(8.4)

Nesse caso, uma opção para a técnica de linearização consiste em se determinar diretamente os parâmetros k e a da função em questão. Como antecipamos na seção 5.1.2 (ver Aula 5), o método matemático genérico que permite esse tipo de ajuste é chamado de Método de Mínimos Quadrados. A idéia é procurar parâmetros que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos δ_i para a função desejada, como foi feito na equação (5.2) para o caso particular do ajuste de retas.

8.1.1 Regressão não-linear com o *Excel*

A seguir, mostraremos como isso pode ser feito usando-se o *Excel*. Procedimento semelhante pode ser realizado tanto com o programa *Origin* quanto com o *XMGrace*.

De fato, a execução deve seguir os mesmos passos da seção 5.2, exceto no item 2 (veja Figura 5.3), em que se escolheria a opção de linha de tendência "exponencial", "polinomial", "logarítmica" ou "lei de potência".

Quando não se sabe bem qual é a dependência entre os pontos, pode-se tentar ajustar várias funções ao conjunto de pares experimentais e buscar qual delas produz o menor resíduo. Contudo, é importante ter atenção especial para não tentar ajustar coeficientes que são conhecidos e exatos, como foi o caso do expoente "2" da Lei de Coulomb, como discutido na seção 6.1.2 da Aula 6, sobre linearização.

ATIVIDADE 1

Use os dados da Tabela 8.1 e determine os valores das constantes indicadas.

Tabela 8.1
Dados para ajuste de regressão não linear usando o *Excel*

Determine o valor de *k* e *a*

Lei: $Y(t) = k\ e^{(a*t)}$

Tempo t (h)	Atividade Y(t)
0	1
2	0,79
4	0,63
6	0,5
8	0,4
10	0,32
12	0,25

Lei: $N(t) = k\ e^{(a*t)}$

Tempo t (min)	Número de Bactérias N(t)
0	2
20	4
40	8
60	16
80	32

Lei: $R(M) = KM^{a}$

Massa M (kg)	Taxa Metabólica R(M) (kcal/h)
0,7	2,5
2	5,4
3	7,3
15	24,3
80	85,5

8.2 ATIVIDADE PRÁTICA: COLISÃO INELÁSTICA

Introdução

Colisão é o encontro entre dois ou mais corpos. Nesta prática, estudaremos a colisão entre dois corpos, a saber: uma bola de borracha e o chão.

Colisões são classificadas em dois tipos a partir da análise da energia cinética do sistema antes e depois da colisão. Dizemos que a colisão é *elástica* quando há conservação da energia cinética (E_c). Outra característica da colisão elástica é que não há deformação dos corpos. Eles interagem sem sofrer deformações. Um exemplo é a colisão entre bolas de bilhar.

Já no outro tipo de colisão, a *inelástica*, não se verifica a conservação da energia cinética. Na verdade, parte dessa energia é utilizada na deformação dos corpos. Nesse tipo de colisão, há uma situação extrema, que é quando os corpos permanecem unidos após a colisão. Neste caso, dizemos que a colisão é perfeitamente inelástica.

Análise de uma situação: uma bola em queda livre

Considere uma bola de borracha que, ao ser solta de uma altura h_i, chega ao chão com velocidade v_i, como representado na Figura 8.1a. Durante o contato com o chão, a bola comprime-se e perde parte de sua energia cinética; em seguida, salta, com velocidade v_j, atingindo uma altura h_j, como representado na Figura 8.1b.

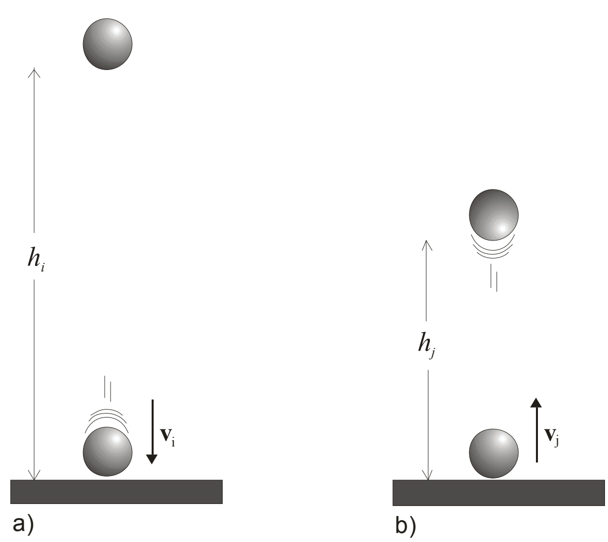


FIGURA 8.1 – Em (a) uma bola de borracha, solta de uma altura h_i, chega ao solo com velocidade v_i. Em (b), após a colisão, ela salta com velocidade v_j, atingindo uma altura h_j

Para essa situação, vamos definir que E_i seja a energia cinética com que a bola atinge o chão e E_j a energia cinética com que a bola sobe após tocar o chão. Por se tratar de uma colisão inelástica, a energia cinética não se conserva. Então, podemos escrever que: $E_j = E_i - \Delta E$, em que ΔE é a perda de energia cinética durante a colisão. Ou seja,

$$\Delta E = \frac{1}{2}\, mV_i^{\,2} - \frac{1}{2}\, mV_j^{\,2} = \frac{1}{2}\, m\,(V_i^{\,2} - V_j^{\,2})$$

Definindo uma grandeza $r = V_j/V_i$ e dividindo o segundo termo por V_i^2, temos:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\, mV_i^{\,2}\,(1 - r^2)$$

O termo $r = \dfrac{V_j}{V_i}$ é chamado de *coeficiente de restituição*.

Da definição de r e de colisão elástica e inelástica, é fácil verificar que, para *colisões elásticas*, $\Delta E = 0$ e, conseqüentemente, $r = 1$. Já nas *colisões inelásticas*, parte da energia cinética é dissipada e, portanto, $r < 1$.

Em cada colisão com o chão, a bola perde parte de sua energia cinética e atinge, sucessivamente, alturas cada vez menores. É possível determinar o coeficiente de restituição medindo-se as alturas h_i e h_j . Considerando-se que há conservação de energia mecânica nos intervalos antes e após cada colisão, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} mV_i^2 = mgh_i \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} mV_j^2 = mgh_j$$

Portanto, o coeficiente de restituição é dado por

$$r = \frac{V_j}{V_i} = \sqrt{\frac{h_j}{h_i}} \qquad \text{ou} \qquad r^2 = \frac{h_j}{h_i}$$

Dessa forma, a altura que a bola atinge após colidir com o chão será sempre uma fração fixa da altura inicial da qual ela foi solta.

Objetivo

- Determinar o coeficiente de restituição de um material. No caso, uma bola de borracha colidindo com o chão.

Material utilizado

- Fita métrica fixada na parede e bola de borracha com alto coeficiente de restituição.

Procedimentos

- Solte a bola de uma altura inicial $h_0 \approx 2$ m e anote a altura h_1 que ela atinge após a primeira colisão com o chão. Repita essa operação, pelo menos, cinco vezes e determine o valor médio de h_1 e o desvio Δh_1. Antes de começar a fazer as medidas, treine algumas vezes a maneira de observar e medir para possibilitar um melhor resultado, com menor desvio.
- Em seguida, solte a bola da altura h_1 e determine a altura h_2; essa altura é a mesma que a bola atingiria após a segunda colisão com o chão, quando solta da altura h_0.
- Repita o procedimento até, pelo menos, a altura h_6 e anote os dados em uma tabela.
- Faça o gráfico de h_n em função de n com o número de repiques dados pela bola. Observe que, no gráfico que você obteve, os pontos não se situam sobre uma reta.
- Utilizando a relação $r^2 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = \ldots \frac{h_n}{h_{n-1}}$, demonstre

  que

$$h_n = h_0 \; r^{2n} \tag{8.5}$$

- Uma maneira de obter o coeficiente de restituição r consiste em linearizar o gráfico. Faça uma linearização do gráfico obtido e, em seguida, com base na equação (8.5), faça uma regressão linear para determinar o coeficiente de restituição e seu respectivo erro. Compare o valor de h_0 encontrado a partir do gráfico com o valor medido.
- Outra maneira de obter o coeficiente de restituição r consiste em ajustar diretamente uma função ao conjunto de pares experimentais. Com base na equação (8.5), faça uma regressão não-linear ajustando uma lei de potência para determinar o coeficiente de restituição e seu respectivo erro.
- Utilizando o valor do coeficiente de restituição encontrado, determine a fração percentual da energia cinética dissipada em cada colisão da bola com o chão.

LINEARIZAÇÃO *versus* REGRESSÃO NÃO-LINEAR

Compare os valores de r obtidos pelos métodos de linearização e de regressão não-linear e discuta os resultados obtidos.

AULA 9

Lei polinomial

OBJETIVOS

- Utilização do processo de regressão não-linear para o caso de um comportamento descrito por um polinômio de grau *n*.

9.1 ATIVIDADE PRÁTICA: MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL

Introdução

Conforme proposto por Galileu, em seu livro *Diálogos sobre duas novas ciências*, o movimento de um projétil na superfície da Terra se faz em um plano vertical e pode ser decomposto em um movimento na direção horizontal e em outro na vertical. Desprezando as forças de atrito, sabemos que sobre o projétil atua apenas a força da gravidade, cuja direção é vertical e, portanto, não exerce influência sobre o movimento na direção horizontal. Assim, próximo da superfície da Terra, um projétil se move com velocidade constante ao longo da horizontal e com aceleração constante ao longo da vertical. Isso resulta em uma trajetória parabólica.

Considere a trajetória de um objeto lançado na superfície da Terra com uma velocidade V_0 que faz um ângulo θ com a horizontal, como representada na Figura 9.1. Nessa mesma figura, também estão representados os eixos cartesianos com origem no ponto de lançamento. Nessa situação, as coordenadas x e y da posição do objeto, em função do tempo, são

$$x(t) = v_0\,(\cos\theta).t \quad \text{e} \quad y(t) = v_0\,(\text{sen}\theta).t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{9.1}$$

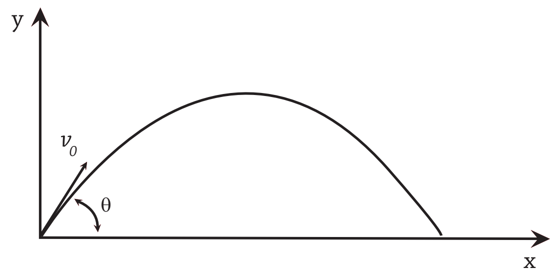


FIGURA 9.1 – Trajetória de um projétil lançado com velocidade v_o em uma direção cujo ângulo com a horizontal é θ

ATIVIDADE 1

Verifique que a trajetória do objeto é parabólica, ou seja, descrita por uma função $Y(x) = Ax^2 + Bx + C$. Especifique as constantes A, B e C em função de v_0, θ e g.

Objetivos

- Estudar a trajetória de um projétil.
- Determinar a velocidade inicial, o ângulo de lançamento e ponto de contato com o chão.

Material utilizado

- Anteparo retangular, folha de papel em branco, canaleta para lançamento, folha de papel-carbono, esfera de aço, trena e transferidor.

Procedimentos

O experimento consiste em fazer com que uma esfera de aço que desliza sobre uma canaleta se choque com um anteparo colocado a uma certa distância, como ilustra a Figura 9.2. O movimento desse projétil é analisado pela trajetória das marcas deixadas pela esfera na folha de papel colocada sobre o anteparo, que pode ser deslocado nas direções x e z.

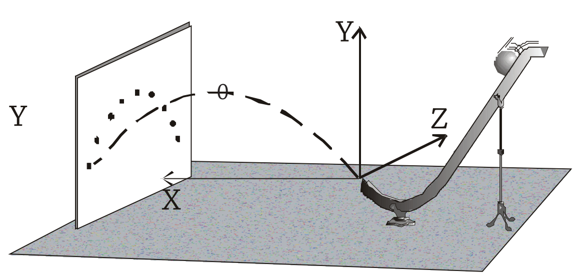


FIGURA 9.2 – Montagem utilizada para registrar a trajetória de uma esfera; se a cada vez que o anteparo for afastado da canaleta a uma distância x ele também for deslocado, da mesma distância, na direção $-z$, as marcas dos impactos registrarão as coordenadas x e y da esfera; desse modo, a trajetória real do projétil é transferida para a folha, no anteparo

- Faça alguns lançamentos preliminares para se familiarizar com o processo de medidas que serão feitas. É importante obter uma altura de lançamento da esfera sobre a canaleta que gere uma parábola compatível com o tamanho do anteparo.
- Fixe sobre o anteparo uma folha de papel em branco coberta com uma folha de papel-carbono para que fique marcada a posição onde a esfera se chocar com o anteparo.
- A primeira medida deve ser feita com o anteparo junto à canaleta. Portanto, esse ponto corresponde à origem do sistema de coordenadas (0,0).
- Lance a esfera no mínimo 4 vezes, para o registro de cada marca, a fim de se evitar erros aleatórios, comuns nesse processo de medidas. Tendo a posição desses 4 pontos (para cada marca), estime a posição média entre eles para adotá-lo como a coordenada do choque.
- Depois de ter feito a primeira medida, desloque o anteparo cerca de 2 cm na direção x e 2 cm na direção $-z$. Solte a esfera da canaleta (no mínimo 4 vezes) obtendo assim a segunda marca. Repita esse procedimento até obter o registro completo de uma trajetória parabólica, como a representada na Figura 9.2.
- Retire a folha de papel em branco do anteparo e com o auxílio de uma régua milimetrada trace os eixos x e y com a origem na primeira medida.
- Meça as coordenadas de cada ponto construindo uma tabela com os valores de y e x obtidos.
- Utilizando um programa de computador adequado, trace, com esses pontos, um gráfico y *versus* x. Em seguida, determine a função do tipo $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ que melhor se ajusta aos dados experimentais obtidos.
- Com essa função, determine o módulo da velocidade de lançamento da esfera.
- Calcule também o ângulo θ. Compare o valor desse ângulo com o medido, experimentalmente, por meio da inclinação da canaleta no ponto de lançamento da esfera e, também, no registro da trajetória da esfera.

VALIDADE DOS RESULTADOS

Para verificar a validade da equação obtida para a trajetória da esfera, calcule a posição em que a esfera atinge o chão do laboratório ao ser lançada com a extremidade da canaleta da borda da mesa. Em seguida, localize esse ponto no chão. Fixe sobre ele uma folha de papel em branco, cubra-a com papel-carbono e solte a esfera pela canaleta, pelo menos, três vezes. Compare o resultado medido com o previsto segundo a equação.

AULA 10

Lei exponencial

OBJETIVOS

• Utilização do processo de regressão não-linear para o caso de um comportamento descrito por uma lei exponencial.

10.1 ATIVIDADE PRÁTICA: LEI DE NEWTON PARA O RESFRIAMENTO

Introdução

Quando dois objetos, com temperaturas diferentes, são colocados em contato térmico, há transferência de calor do objeto mais quente para o mais frio, até ambos atingirem a mesma temperatura.

Para um sólido em contato térmico com um fluido, a taxa de resfriamento é dada por

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -k\Delta t\ ,$$

em que ΔT é a diferença entre a temperatura da superfície do sólido e a da massa principal do fluido. A constante k depende de vários fatores: de a superfície ser plana ou curva, ou ainda, de ser vertical ou horizontal; de o fluido ser um gás ou um líquido; da densidade, da viscosidade, do calor específico e da condutividade térmica do fluido; entre outros. Essa relação é conhecida como Lei de Newton para o resfriamento.

ATIVIDADE 1

Sendo ΔT_o a diferença de temperatura entre o objeto e a vizinhança no instante inicial $t = 0$, mostre que, após um tempo t, a diferença de temperatura ΔT entre eles é

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-kt} \quad \text{ou} \quad T = T_a + \Delta T_0 e^{-kt} \qquad (10.1)$$

em que T é a temperatura do objeto e T_a é a temperatura do ambiente em torno dele.

Objetivo

- Determinar a curva de resfriamento de um termômetro e verificar a validade da Lei de Newton para o resfriamento.

Material utilizado

- Termômetro comum (ou termômetro digital conectado a um computador, para aquisição automática de dados), sistema para aquecimento da ponta do termômetro (~60ºC) e recipiente com água.

Procedimentos

- Meça a temperatura ambiente.
- Aqueça a água até que ela entre em ebulição.
- Mergulhe o termômetro na água, aguarde alguns minutos e anote a temperatura.
- Retire o termômetro da água e acione o cronômetro, simultaneamente.
- Leia a temperatura nos instantes indicados no Quadro l e registre.
- Construa o gráfico ΔT em função do tempo.
- Obtenha a constante k fazendo um ajuste exponencial, supondo que seja aplicável a Lei de Newton para o resfriamento.
- Repita os procedimentos para a água fria.
- Comente a validade da Lei de Newton para o resfriamento para os dois casos.

QUESTÃO

Observe os valores de K para o resfriamento na água e no ar. Com base nesses valores, conclua onde uma pessoa sentirá mais frio: dentro ou fora da água, estando ambos a 20ºC?

Quadro 1 (Ar)

t (s)	T (ºC)	ΔT
0		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
40		
50		
60		
80		
100		
120		
150		
210		
230		
250		
270		
300		

Quadro 2 (Água)

t (s)	T (ºC)	ΔT
0		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
40		
50		
60		
80		
100		
120		
150		
210		
230		
250		
270		
300		

AULA 11

Atividade prática I

OBJETIVOS
• Utilizar as habilidades adquiridas até o momento na solução de um problema experimental.

11.1 MOVIMENTOS COMBINADOS DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

Introdução

Neste experimento, será analisado o movimento de um pequeno volante que desce, rolando, por uma calha inclinada, como mostrado na Figura 11.1.

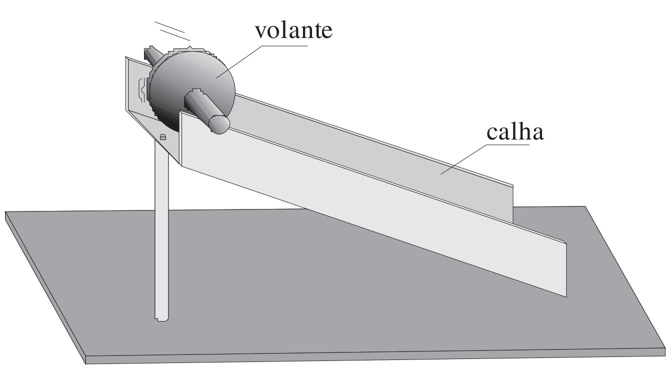


FIGURA 11.1 - Um pequeno volante desce rolando por uma calha inclinada

Sejam m a massa, R o raio do volante, r o raio de seu eixo e θ o ângulo de inclinação da calha em relação à horizontal. Durante o movimento desse volante, as forças que atuam nele são o seu peso P, a força de atrito F_a e a força normal N que a calha exerce em cada um de seus eixos. Essas grandezas estão representadas na Figura 11.2.

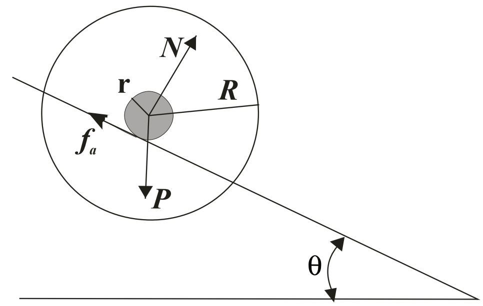


FIGURA 11.2 - As forças que atuam no volante são o seu peso P, a força de atrito F_a e a força N que a calha exerce em cada eixo

A força peso atua no centro de gravidade do volante e a normal, no ponto de contato do eixo do volante com a calha. Uma vez que essas forças atuam ao longo de linhas que passam pelo eixo de rotação do volante, elas não produzem torque. Por sua vez, a força de atrito é perpendicular a essas linhas e, portanto, produz o torque que faz o volante girar.

Dependendo da inclinação da calha e do atrito entre ela e o volante, podem ocorrer dois tipos de movimento do volante – com deslizamento ou sem deslizamento.

Movimento com deslizamento

Quando a força de atrito entre o volante e a calha é muito pequena, o torque total é nulo e o volante desliza pela calha, sem girar. Nesse caso, o movimento do volante é idêntico ao de uma partícula de mesma massa que ele, localizada em seu centro de massa.

Mostre que, nessa situação, a aceleração a_{cm} do centro de massa do volante é paralela ao plano inclinado e seu módulo é

$$a_{cm} = g\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{11.1}$$

Considere que o volante, inicialmente em repouso, é solto de uma altura h em relação à base da calha. Desprezando-se todas as formas de atrito, a energia mecânica é conservada e o volante chega ao final da calha com velocidade v_{cm}, tal que

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \tag{11.2}$$

ou seja,

$$v_{cm} = (2gh)^{1/2} \ .$$

Movimento sem deslizamento

No início do movimento, é a força de atrito cinético f_a que atua sobre o corpo, e é menor que a força de atrito estático máxima, ou seja,

Além disso, o volante desliza pela calha. Ao mesmo tempo, a força de atrito (que atua sobre os pontos de contato da superfície do corpo e do plano

$$f_a \leq \mu_e\, mg\cos\theta\,.$$

inclinado), exerce um momento em relação ao centro de massa do corpo. Esse momento faz o corpo adquirir um movimento de rotação acelerado em torno do centro de massa. Há, então, os movimentos de translação e de rotação do volante; ele gira com velocidade angular ω (crescente) em torno de seu eixo, enquanto seu centro de massa se desloca com velocidade

$$v = \omega r \,,$$

em que r é a distância do centro de massa ao ponto de contato com a superfície. Neste caso, r é o raio do eixo do volante, como mostrado na Figura 11.2.

Quando a velocidade linear do ponto do corpo, em contato com a superfície, chegar ao valor igual à velocidade de translação do centro de massa, esse ponto passará a ficar em repouso relativamente à superfície do plano inclinado; então, a força de atrito que atua sobre o corpo nesse ponto passa a ser a de estático máxima e, a partir desse instante, o movimento de translação e rotação do corpo pode ser descrito com a conservação da energia (explique por quê).

Considere que o volante é solto de uma altura h e chega ao final da calha com velocidade v_{cm}. Se não houver deslizamento, temos quê:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \left(\frac{v_{cm}}{r} \right)^2 \,,$$

em que I_{cm} é o momento de inércia do volante em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa.

Então,

$$v_{cm} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{I_{cm}}{mr^2}} \right)^{1/2} . \qquad (11.3)$$

Durante a descida, a aceleração a_{cm} do centro de massa do volante é constante – por quê? –, portanto,

$$v_{cm}^2 = v_o^2 + 2a_{cm} d \,,$$

em que $v_o = 0$ é a velocidade inicial do volante. Assim,

$$a_{cm} = \frac{gh/d}{1 + \frac{I_{cm}}{mr^2}} . \qquad (11.4)$$

Mostre que, se $r << R$, o momento de inércia do volante é, aproximadamente,

$$I_{cm} \cong \frac{1}{2} mR^2 \ .$$

Objetivos

- Medir a aceleração e a velocidade final do centro de massa de um volante que desce, rolando, por uma calha inclinada.
- Estudar o movimento do volante em duas situações: com deslizamento (modelo de partícula) e sem deslizamento (modelo de corpo rígido). Comparar os resultados experimentais com os calculados.

Material utilizado

- Calha, volante, trena e cronômetro.

Procedimentos

- Incline a calha de maneira que uma de suas extremidades esteja alguns centímetros mais alta do que a outra formando um ângulo de aproximadamente 4º em relação à mesa.
- Posicione o volante na calha e solte-o. Meça o tempo gasto pelo volante para atingir o final da calha. Repita, algumas vezes, a medida, de maneira a obter um valor médio do tempo de descida.
- Meça a distância percorrida pelo volante.
- Sendo a aceleração do centro de massa constante, de acordo com as equações da Cinemática para o movimento retilíneo uniformemente acelerado, a aceleração e a velocidade do centro de massa do volante estarão relacionadas com a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la por meio das equações

$$x = \tfrac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad \text{e} \quad v_{cm} = a_{cm} \ .$$

  Com base nas medidas do item anterior, determine os valores experimentais da aceleração e da velocidade final do centro de massa do volante com suas respectivas incertezas.

- Considere duas situações: o volante desliza (modelo de partícula), ou não desliza (modelo de corpo rígido), enquanto desce pela calha. Para cada uma dessas situações, calcule a aceleração e a velocidade final do volante. Não há necessidade de calcular as incertezas.
- Compare os valores calculados com os obtidos experimentalmente e discuta qual dos dois modelos é o mais adequado para descrever a situação analisada.

- Agora, altere o ângulo de inclinação da calha para aproximadamente 30º e repita os procedimentos descritos nos itens anteriores.

QUESTÃO

Discuta as diferenças entre os resultados encontrados em cada um dos dois ângulos de inclinação da calha.

AULA 12

Atividade prática II

OBJETIVOS
- Utilizar as habilidades adquiridas até o momento na solução de um problema experimental.

12.1 MOMENTO DE INÉRCIA

Introdução

O movimento de rotação e translação combinados – chamado de rolamento – é muito comum no dia-a-dia; as rodas dos veículos, por exemplo, rodam – movimento de rotação – ao mesmo tempo em que se deslocam para frente ou para trás – movimento de translação.

Pode-se mostrar que objetos com distribuição de massa com simetria cilíndrica ou esférica têm o momento de inércia dado pela expressão

$$I = \beta MR^2 \, , \tag{12.1}$$

em que M é a massa, R seu raio e β é um parâmetro que depende apenas da simetria de distribuição de massa do objeto, sendo igual a 2/5 para uma esfera, a 1/2 para um cilindro e a 1 para um aro.

Considere a situação de um objeto de seção circular que desce uma rampa, rolando sem deslizar, como ilustrado na Figura 12.1.

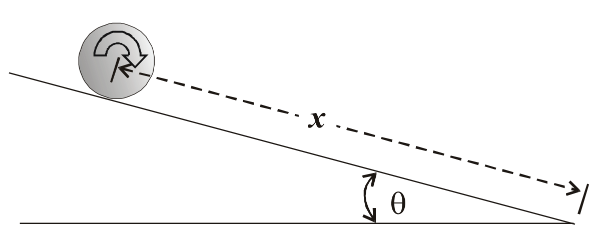


FIGURA 12.1 - Um objeto de seção circular desce um plano inclinado

Utilizando a equação de conservação da energia mecânica, mostre que, se o objeto é colocado para rolar a partir do repouso, o módulo v de sua velocidade, após percorrer uma distância x, medida a partir do ponto de que o objeto foi solto, será dada por

$$v^2 = \frac{2g\,\text{sen}\,\theta}{1+\beta}\,x\,, \qquad (12.2)$$

em que g é a aceleração da gravidade. Note que, nessa expressão, a velocidade com que um corpo de seção circular atinge o final da rampa não depende de sua massa ou raio, mas apenas da maneira como essa massa é distribuída (β) em torno de um eixo central, que passa pelo centro de massa.

Se a rampa é reta e considerando a força de atrito a mesma durante todo o percurso, a força resultante sobre o volante será constante e, portanto, sua aceleração também será constante. Isso possibilita o cálculo da velocidade e da aceleração do volante pelas fórmulas da Cinemática para o movimento uniformemente variado.

$$x = \tfrac{1}{2}\,a t^2 \qquad \text{e} \qquad v = a t$$

Assim, a velocidade do objeto, em função da posição e do tempo, será dada por

$$v = \frac{2x}{t}\,. \qquad (12.3)$$

Mostre que a partir das equações (12.2) e (12.3) a posição do objeto em função do tempo pode ser escrita como

$$x = \frac{g\,sen\,\theta}{2(1+\beta)}\,t^2 \qquad (12.4)$$

Objetivo

- Determinar, experimentalmente, o parâmetro β para um aro, ou cilindro, e para uma esfera.

Material utilizado

- Rampa de comprimento l (~1,5m) com suporte para elevação de um dos lados; esfera e aro, ou cilindro; trena; cronômetro, preferencialmente com detector de início e fim de movimento.

Procedimentos

- Incline a rampa de forma que ela faça um ângulo de cerca de 5º com a horizontal. Especifique o ângulo escolhido.
- Antes de iniciar as medidas, familiarize-se com a medição de tempo, especialmente se o experimento contar com um dispositivo para detectar início e fim de movimento. Para isso, solte algumas

vezes a esfera ou o aro na rampa observando a marcação de início e de término na contagem de tempo. Faça ajustes na instrumentação caso seja necessário.

- Faça medidas de distância e de tempo de percurso para a esfera e para o aro. Use, pelo menos, cinco distâncias diferentes para cada um deles. Para cada distância, meça, pelo menos, cinco vezes o tempo de percurso, e calcule o tempo de percurso médio, de maneira a minimizar erros aleatórios. O valor de β é bastante sensível à precisão das medidas de tempo e de distância. Procure obter essas medidas com desvios percentuais de no máximo 2%.
- A partir das medidas das distâncias e dos respectivos tempos médios, e levando em conta a equação (12.1), obtenha, por meio de uma análise gráfica, os coeficientes β da esfera e do aro com suas respectivas incertezas. Compare-os com os valores esperados.

QUESTÃO

Solte na rampa, simultaneamente, a esfera e o aro e veja qual chega primeiro à base. A observação está compatível com os valores de β encontrados?

AULA 13

Atividade prática III

OBJETIVOS

- Utilizar as habilidades adquiridas até o momento na solução de um problema experimental.

13.1 DEFORMAÇÃO INELÁSTICA E PROCESSO IRREVERSÍVEL

Introdução

Duas características observadas no comportamento elástico de um sólido são a linearidade e a reversibilidade. A linearidade relaciona-se à proporcionalidade entre a força aplicada ao sólido e a conseqüente deformação deste. A reversibilidade significa que, aplicando uma força crescente e, em seguida, decrescente em um sólido, este se alonga e, depois, volta à situação inicial pelo mesmo caminho, isto é, por uma mesma curva em um gráfico de força *versus* alongamento. Do ponto de vista das energias envolvidas, em um processo reversível, o sólido, ao retornar ao seu estado inicial, realiza sobre o agente aplicador da força o mesmo trabalho que este realizou sobre ele para alongá-lo.

Existem sistemas que não apresentam essas características; em alguns casos, a dependência entre força e alongamento pode, até mesmo, não ter uma expressão analítica, podendo ser conhecida apenas experimentalmente. O trabalho realizado nesses sistemas, além de produzir deformações mecânicas, é utilizado para promover reações químicas, modificações estruturais, transformações moleculares e aquecimento, entre outros. Assim, não é possível ao sistema devolver toda a energia cedida ao agente aplicador da força, sendo o processo de deformação irreversível.

Lembremos que o trabalho realizado por uma força constante que provoca um deslocamento *x* é dado pela expressão:

$$W = F\,x\,cos\theta$$

Sendo a força na mesma direção no deslocamento, θ = 0, a relação se reduz a:

$$W = F\,x$$

Para uma força **F** qualquer, aplicada a um corpo que, sob a ação dessa força **F**, se desloca de *x*, a área do gráfico **F** *versus x* representa o trabalho realizado pelo agente que aplicou a força. Veja a Figura 13.1.

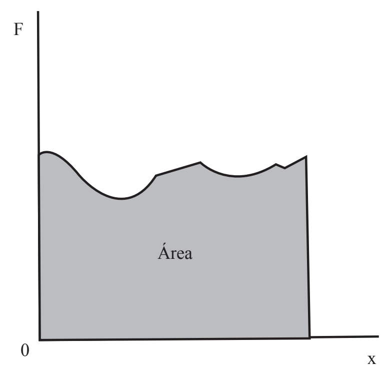


FIGURA 13.1 - Trabalho como Área sob o gráfico de força *versus* deslocamento

Troquemos agora a mola por um fio e analisemos a nova situação. Quando submetido à tração, um fio deforma-se, de início, elasticamente. Porém, avançando além do limite da elasticidade, a proporcionalidade entre a força e a deformação não mais se verifica. Se formos reduzindo agora a tração, o material não retorna às suas dimensões originais, permanecendo uma deformação residual. Tal fato denomina-se *histerese mecânica*. O comportamento do material pode ser representado, qualitativamente, pelo gráfico a seguir.

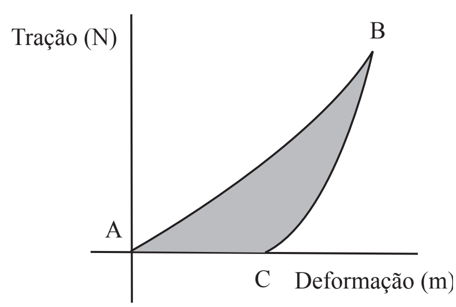


FIGURA 13.2 - Tração *versus* deformação

Na Figura 13.2, o aumento de tração corresponde ao trecho AB; a redução de tração, ao trecho BC, e a deformação residual é AC.

Se a partir do ponto C aumentarmos novamente a tração, o fato se repetirá e assim por diante. Isso fará com que a energia perdida a cada vez, sob forma de calor para o ambiente, deixe o corpo extremamente debilitado, rompendo-se com facilidade. Assim, a histerese mecânica representa uma energia perdida durante o processo, a qual pode ser calculada através da área ABC do gráfico.

Um exemplo simples de uma situação desse tipo ocorre com uma gominha de borracha ao ser esticada. Nesse caso, observa-se uma não-linearidade entre a força aplicada e o alongamento produzido, bem como uma irreversibilidade do processo.

A gominha de borracha é constituída por um conjunto de cadeias poliméricas com uma estrutura fibrilar central e ramificações laterais. O fato de o trabalho total realizado no ciclo ser diferente de zero, deve-se à ruptura de ligações químicas entre as cadeias de moléculas da gominha no processo de carga; ao se reverter esse processo, fazendo-se a descarga, as ligações não se refazem.

Objetivo

- Estudar a deformação produzida em gominhas de borracha.

Material utilizado

- Cronômetro, suporte e objetos de massa de aproximadamente 50 g, haste de sustentação, régua milimetrada, base e duas gominhas de borracha.

Procedimento

Este experimento possui duas etapas. Na primeira parte são feitas medidas do alongamento de uma gominha em função do tempo, mantendo uma força constante aplicada em sua extremidade. Na segunda parte são feitas medidas do alongamento em função da força aplicada em sua extremidade nos processos de carga e descarga.

1ª Parte: Alongamento da gominha em função do tempo

- Coloque a gominha na haste de sustentação e pendure em sua extremidade livre o suporte com os objetos de massa de aproximadamente 500 g, conforme ilustrado na Figura 13.3.

  ATENÇÃO: Ao colocar o suporte com os objetos de massa na extremidade da gominha, segure-a para evitar que ela oscile.

- Quando o suporte se equilibrar sozinho, meça imediatamente o comprimento z_o da gominha.
- A cada 20 s meça o comprimento z da gominha até aproximadamente 2 minutos.
- Utilize uma folha de papel ofício e uma régua para esboçar o gráfico do alongamento Δz da gominha em função do tempo.
- Lembre-se

$$\Delta z = z - z_o$$

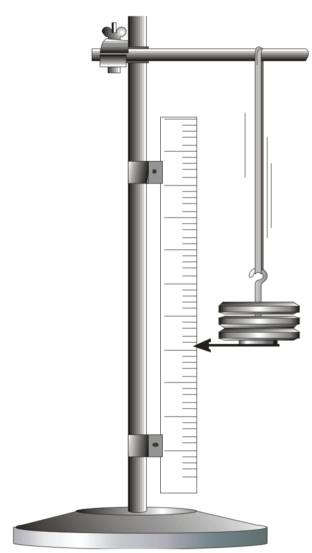


FIGURA 13.3 - Objetos de massas conhecidas pendurados na extremidade de uma gominha

2ª Parte: Alongamento da gominha em função da força aplicada nos processos de carga e descarga

- Troque a gominha utilizada anteriormente por outra nova. Coloque o suporte para os objetos de massa em sua extremidade livre.
- Adicione os objetos de massa ao suporte medindo para cada um o alongamento Δz correspondente. Não ultrapasse a carga máxima de 700 g. Novamente segure o suporte enquanto adiciona os objetos de massa para evitar que a gominha oscile.

  ATENÇÃO: Observe o gráfico esboçado anteriormente e estime o tempo necessário para se fazer a leitura do alongamento da gominha em função dos pesos dos objetos colocados em sua extremidade.
- Comece a fazer agora o processo de descarga. Retire, um por um, os objetos de massa medindo o alongamento Δz correspondente.
- Registre os valores da força aplicada e alongamento correspondente em uma tabela para os processos de carga e descarga.
- Com os dados registrados em sua tabela, faça o gráfico da força F aplicada em função do alongamento Δz da gominha para os dois processos.
- Observe o gráfico e comente sobre a linearidade entre F e Δz e sobre a reversibilidade do processo.
- Determine o trabalho líquido realizado depois de um ciclo de carga e descarga. Comente sobre esse valor encontrado tendo em mente a irreversibilidade do processo. Se o processo fosse reversível, qual deveria ser o valor do trabalho líquido realizado?
- Compare o valor encontrado para o trabalho com a energia necessária para ferver 0,5 litro de água na temperatura ambiente.

QUESTÃO

Estime o número de ligações químicas que foram rompidas na gominha neste experimento. Compare o resultado com o número de Avogrado N_A ($6{,}02 \times 10^{23}$ /mol). Para isso, considere que a energia cinética média no ponto de fusão da gominha ~ 400 K (~ 130 °C) é da mesma ordem de grandeza da energia necessária para romper uma ligação química entre as cadeias do polímero que constituem a gominha. A energia cinética média por grau de liberdade é igual a (1/2) kT, em que k é a constante de Boltzmann ($k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K) e T é a temperatura em Kelvin.

ANEXO A
Valores de grandezas e constantes físicas

Grandezas e constantes físicas

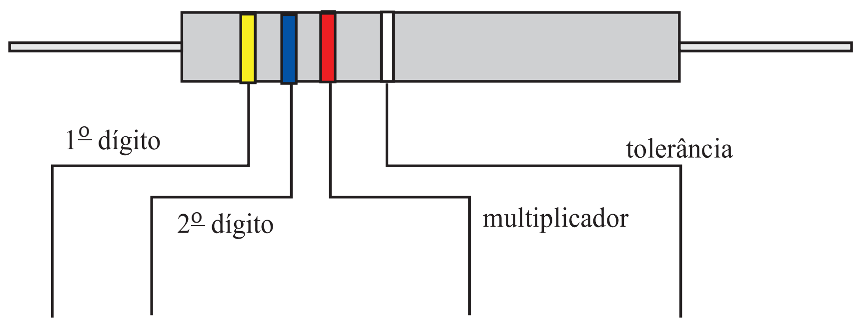
Símbolo	Descrição	Valor
g	Aceleração da gravidade no laboratório	$9{,}78\ m/s^2$
R	Constante universal dos gases ideais	$8{,}31$ J/mol K
e	Carga do elétron	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C
m_e	Massa de repouso do elétron	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
N_A	Constante de Avogadro	$6{,}023 \times 10^{23}\ mol^{-1}$
k	Constante de Boltzmann	$1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K
ε_0	Permissividade elétrica no vácuo	$8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m
μ_o	Permeabilidade magnética do vácuo	$4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A
h	Constante de Planck	$6{,}626 \times 10^{-34}$ Js
c	Velocidade da luz no vácuo	$3{,}00 \times 10^{8}$ m/s

Prefixos

Símbolo	Nome	Valor
m	Mili	10^{-3}
μ	Micro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}
p	Pico	10^{-12}
k	Quilo	10^{3}
M	Mega	10^{6}
G	Giga	10^{9}
T	Tera	10^{12}

ANEXO B

Código de cores para valores de resistências



0	0	Preto	⇒	x 100 Ω = x 1 Ω	Ouro: 5%
1	1	Marrom	⇒	X 10^{1} Ω	Prata: 10%
2	2	Vermelho	⇒	X 10^{2} Ω	Sem banda: 20%
3	3	Laranja	⇒	X 10^{3} Ω	
4	4	Amarelo	⇒	X 10^{4} Ω	
5	5	Verde	⇒	X 10^{5} Ω	
6	6	Azul	⇒	X 10^{6} Ω	
7	7	Lilás	⇒	X 10^{7} Ω	
		Ouro	⇒	X 10^{-1} Ω	

ANEXO C

Constante elástica em associação de molas

Considerem-se duas molas de massas desprezíveis e de constantes elásticas k_1 e k_2 associadas em série, como mostrado na Figura C.1. Uma força **F**, de módulo F, aplicada na extremidade do conjunto atua igualmente em cada uma das molas e cada qual sofrerá um alongamento dado por:

$$x_1 = \frac{F}{k_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{F}{k_2}$$

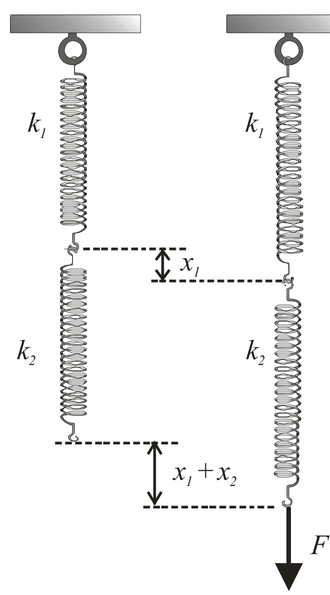


FIGURA C.1 – Na associação de duas molas em série, a força **F** atua nas duas e o alongamento de uma é independente do da outra

O alongamento total do conjunto será dado por

$$x_{série} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_{série}}$$

e, então,

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{série}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k_{série}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Com um raciocínio análogo, é fácil chegar a uma relação geral para associação de *n* molas em série:

$$\frac{1}{k_{série}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \ldots + \frac{1}{k_n} \ .$$

Na associação em paralelo (Figura C.2), a força F aplicada ao conjunto é dividida entre as duas molas, com valores F_1 e F_2, e elas se alongam de uma mesma quantidade x

$$F = F_1 + F_2 = k_{paral.}\, x =$$

$$= k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2)\, x$$

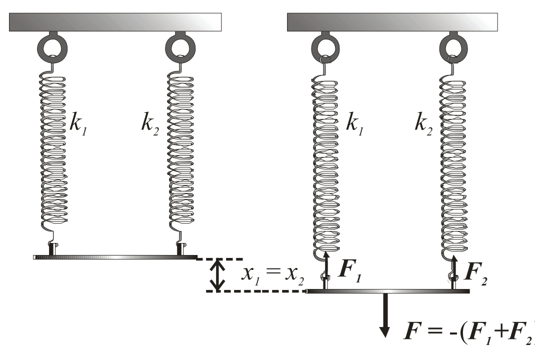


FIGURA C.2 - Na associação de duas molas em paralelo, a força aplicada é distribuída nas duas e o alongamento de uma é igual ao da outra

Então, $k_{paral.} = k_1 + k_2$

Analogamente, chega-se a uma relação geral para associação de *n* molas em paralelo:

$$k_{paral.} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \ .$$

ANEXO D

Medida de grandezas dinâmicas com aparelhos de leitura estática: valor eficaz

É muito comum a situação de se medir o valor de correntes ou tensões elétricas alternadas empregando um aparelho de medidas estáticas. Nessas situações, a leitura que o aparelho indica é uma média temporal da grandeza medida e é chamada de valor eficaz.

Seja $V(t) = V_0 \,\mathrm{sen}(2\pi ft)$ uma tensão alternada senoidal de amplitude V_0 e freqüência f aplicada a um resistor R. A potência instantânea $p(t)$ dissipada no resistor é, então, dada por:

$$p(t) = \frac{V_0^2}{R}\left[sen(2\pi\, ft)\right]^2$$

O valor médio da potência P_{med} é obtido integrando-se $p(t)$ no intervalo de um período $T = 1/f$, isto é:

$$P_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \; = \; \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^2}{R} sen^2(2\pi\, ft)dt$$

que se reduz a:

$$P_{med} = \frac{1}{T}\frac{V_0^2}{R}\int_0^T sen^2(2\pi ft)\,dt = \frac{V_0^2}{2R}\;.$$

O valor eficaz de uma tensão alternada V_{eficaz} corresponde a uma *tensão contínua* que, aplicada ao mesmo resistor R, resulta na mesma potência dissipada. Ou seja, é a tensão contínua que tem a mesma “eficácia” na geração de energia que uma tensão alternada senoidal de amplitude V_0.

A potência P dissipada por um resistor R, sujeito a uma tensão contínua V_{eficaz} é dada por

$$P = \frac{V_{eficaz}^2}{R}$$

Assim, igualando as duas potências, tem-se

$$\frac{V_{eficaz}^2}{R} = \frac{V_0^2}{2R} \quad \text{ou} \quad V_{eficaz} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad ;$$

ou seja, no caso de tensão senoidal, o valor eficaz é o valor de pico (amplitude) sobre raiz quadrada de 2.

Em uma situação geral de uma grandeza alternada periódica v de período T, de forma qualquer o seu valor eficaz é dado por:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t) \cdot dt}$$

Por isso, o valor eficaz é também conhecido por valor RMS (*Root Mean Squared*).

A presente edição foi composta pela Editora UFMG e impressa pela Finaliza acabamentos gráficos, em sistema offset, papel offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em maio de 2010.

ISBN 978-85-7041-622-3

Centro de apoio à educação a distância UFMG

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS