

Técnicas para Sincronização de Sistemas Caóticos Fundamentadas na Aplicação das Teorias de Controle Robusto

Cláudio Dias Campos

Tese de doutorado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Reinaldo Martinez Palhares
Coorientadores: Leonardo Antônio Borges Tôrres
Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes

Cláudio Dias Campos

**Técnicas para Sincronização de Sistemas Caóticos
Fundamentadas na Aplicação das
Teorias de Controle Robusto**

Tese de doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais na área de concentração de Sinais e Sistemas e linha de pesquisa em Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não Lineares (MACSIN).

Orientador: Reinaldo Martinez Palhares

Coorientadores: Leonardo Antônio B. Tôrres

Eduardo Mazoni A. M. Mendes

Belo Horizonte

2012

C198t	<p>Campos, Cláudio Dias. Técnicas para sincronização de sistemas caóticos fundamentadas na aplicação das teorias de controle robusto [recurso eletrônico] / Cláudio Dias Campos. - 2012. 1 recurso online (96 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Reinaldo Martinez Palhares. Coorientadores: Leonardo Antônio Borges Tôrres, Eduardo Mazoni A. M. Mendes.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndices: f. 89-96.</p> <p>Bibliografia: f. 83-88. Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Controle robusto - Teses. 3. Desigualdades matriciais lineares - Teses. 4. Sincronização - Teses. 5. Sistemas caóticos - Teses. I. Palhares, Reinaldo Martinez. II. Tôrres, Leonardo Antônio Borges. III. Mendes, Eduardo Mazoni Andrade Marçal. IV. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. V. Título.</p>
	CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**ATA DA 152ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO do aluno **Cláudio Dias Campos** - registro de matrícula de número 2010717443. Às 09:00 horas do dia 18 do mês de dezembro de 2012, reuniu-se na Escola de Engenharia da UFMG a Comissão Examinadora da TESE DE DOUTORADO para julgar, em exame final, o trabalho intitulado "**Técnicas para Sincronização de Sistemas Caóticos Fundamentadas na Aplicação de Teorias de Controle Robusto**" da Área de Concentração em Sistemas de Computação e Telecomunicações. O Prof. Reinaldo Martinez Palhares, orientador do aluno, abriu a sessão apresentando os membros da Comissão e, dando continuidade aos trabalhos, informou aos presentes que, de acordo com o Regulamento do Programa no seu Art. 8.16, será considerado APROVADO na defesa da Tese de Doutorado o candidato que obtiver a aprovação unânime dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida deu início à apresentação do trabalho pelo Candidato. Ao final da apresentação seguiu-se a arguição do candidato pelos examinadores. Logo após o término da arguição a Comissão Examinadora se reuniu, sem a presença do Candidato e do público, e elegeu o Prof. ~~Reinaldo Martinez Palhares~~ ^{Reinaldo Martinez Palhares} para presidir a fase de avaliação do trabalho, constituída de deliberação individual de APROVAÇÃO ou de REPROVAÇÃO e expedição do resultado final. As deliberações individuais de cada membro da Comissão Examinadora foram as seguintes:

Membro da Comissão Examinadora	Instituição de Origem	Deliberação	Assinatura
Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares - Orientador	DELT (UFMG)	aprovado	
Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôrres - Co-Orientador	DELT (UFMG)	Aprovação	
Prof. Dr. Eduardo Mazoni A. Marçal Mendes - Co-Orientador	DELT (UFMG)	Aprovado	
Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi	DMAT (UFMG)	aprovado	
Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas	DELT (UFMG)	Aprovado	
Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira	DT (UNICAMP)	Aprovação	
Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli	C.A.P. (UFSJ)	APROVAÇÃO	

Tendo como base as deliberações dos membros da Comissão Examinadora a Tese de Doutorado foi ~~aprovada~~ ^{aprovada} O resultado final de ~~aprovado~~ ^{aprovado} foi comunicado publicamente ao Candidato pelo Presidente da Comissão, ressaltando que a obtenção do Grau de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA fica condicionada à entrega do TEXTO FINAL da Tese de Doutorado. O Candidato terá um prazo máximo de 30 (trinta) dias, a partir desta data, para fazer as CORREÇÕES DE FORMA e entregar o texto final da Tese de Doutorado na secretaria do PPGEE/UFMG. As correções de forma exigidas pelos membros da Comissão Examinadora deverão ser registradas em um exemplar do texto da Tese de Doutorado, cuja verificação ficará sob a responsabilidade do Presidente da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada pelo Presidente da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 18 de dezembro de 2012.

ASSINATURA DO PRESIDENTE DA COMISSÃO EXAMINADORA

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço à Deus, que sempre me abençoou e manteve perseverante; E à Nossa Senhora, minha intercessora junto a Ele, que me acompanha com a sua proteção e carinho em todos os instantes da minha vida.

Muito especialmente eu agradeço ao professor Reinaldo Martinez Palhares, a quem eu tenho máximas admiração e respeito, a quem eu tive a honra de ser orientado em todos os grandes trabalhos da minha formação científica, da graduação, passando pelo mestrado, e agora no doutorado. Reinaldo, sua seriedade, competência e, principalmente, o seu lado humano, marcou verdadeiramente a minha vida. Serei eternamente agradecido por tudo que você fez, e sempre está a fazer por mim. Muito obrigado!

Também com muita gratidão eu agradeço aos professores Leonardo Tôres e Eduardo Mazoni Mendes, pelo enorme apoio e incentivo em todas as etapas do desenvolvimento deste trabalho. Caminhar ao lado de vocês tem sido uma grande honra para mim.

Ao professor Walmir Caminhas, com quem tive a honra de construir uma amizade igualmente verdadeira, eu registro meu eterno agradecimento por todo o seu incentivo e cobranças para que eu pudesse concluir este trabalho de tese.

Registro ainda meu afetuoso agradecimento a todos meus amigos professores e alunos, que pela dádiva do convívio motivam-me a buscar novos conhecimentos: Petr Ya. Ekel, Márcio José da Silva, Eudes Weber Porto, Marcos Flávio D'Angelo, Marco Aurélio Birchall, Antonius Henricus Knecht, Leonardo Mozelli, Fernando Souza, e tantos outros que este restrito espaço me impede mencionar.

Finalizo agradecendo, de todo o meu coração, aos meus familiares, em especial à minha querida mãe Lídia e aos irmãos e sobrinhas, pelo incentivo e ânimo; Por fim, reservei meu agradecimento à minha esposa Patrícia, pelo seu carinho e amor que tornam a minha vida mais leve e alegre. Obrigado minha querida!

Resumo

Esta tese é dedicada ao estudo da sincronização de uma classe de sistemas não lineares denominada de sistemas do tipo Lur'e. Investiga-se a sincronização de sistemas Lur'e livres de incertezas paramétricas em um contexto de representação a tempo discreto, estando sujeitos, ou não, a apresentarem comportamento dinâmico caótico. Propõe-se uma metodologia de projeto sistemática envolvendo etapas de identificação e estimação paramétrica, discretização, e síntese de controladores de sincronização. Baseando-se em Técnicas de Controle Robusto \mathcal{H}_∞ com formulações em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs), duas abordagens foram desenvolvidas para a solução do problema de sincronização: a primeira aplica-se a sistemas lineares por partes, e faz uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros – Abordagem Poliquadrática; a segunda, menos restritiva que a primeira, fundamenta-se nas técnicas de controle nebuloso – Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno. A metodologia de projeto proposta será aplicada ao problema *benchmark* de Transmissão Segura de Informação via perturbação aditiva em osciladores caóticos. Serão apresentadas validações experimentais realizadas nas plataformas PCChua e PCChua-SPIICE. A plataforma PCChua-SPIICE baseia-se em métodos de computação analógica e está sendo proposta neste trabalho como uma alternativa viável e flexível à plataforma física PCChua.

Palavras-chave: sincronização; sistemas caóticos; controle robusto; controle nebuloso Takagi-Sugeno; desigualdades matriciais lineares (LMIs); desempenho \mathcal{H}_∞ ; circuito de Chua.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of the synchronization of nonlinear Lur'e systems. The synchronization of Lur'e systems is investigated in a context of discrete time precise parameters subject, or not, to chaotic behaviors. A systematic design methodology is proposed through the steps of system identification, discretization and synchronization controller synthesis. Based on \mathcal{H}_∞ Robust Control Techniques described in terms of linear matrix inequalities (LMIs), two approaches were developed to solve the synchronization problem: the first approach is based on parameter dependent Lyapunov functions and applies to piecewise linear systems – Poliquadratic Approach; the second is a less restrictive than the first one and is based on fuzzy control techniques – Fuzzy Takagi-Sugeno Approach. The proposed design methodology will be applied to the *benchmark* problem of Secure Information Transmission via additive disturbance in chaotic oscillators. Experimental validations will be performed and presented considering the PCChua and PCChua-SPICE platforms. The PCChua-SPICE platform is based on analogue computer methods and its being proposed as a viable and flexible alternative to the physical PCChua platform.

Keywords: synchronization; chaotic systems; Lur'e systems; robust control; fuzzy Takagi-Sugeno control; linear matrix inequalities (LMIs); \mathcal{H}_∞ performance; Chua's circuit.

Lista de abreviaturas e siglas

Benchmark	método/ação que visa comparar desempenhos
Fuzzy	termo relativo à lógica nebulosa (ou difusa)
ITVC	transmissão de informação via controle (<i>information transmission via control</i>)
LMI	desigualdade matricial linear (<i>linear matrix inequality</i>)
PCChua	protótipo para controle do circuito de Chua
PDC	compensação paralela distribuída (<i>parallel distributed compensation</i>)
SPICE	programa de simulação com ênfase em circuitos integrados (<i>simulation program with integrated circuit emphasis</i>)
TS	Takagi-Sugeno

Sumário

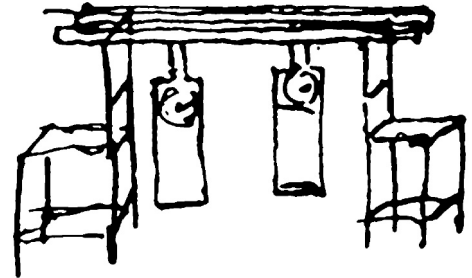
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	A Sincronização Observada por Huygens	15
1.2	Objeto de Estudo	16
1.3	Sincronização de Sistemas Caóticos	17
1.4	Motivação	18
1.5	Objetivos	19
1.6	Organização do Texto	19
2	FUNDAMENTAÇÃO DO PROBLEMA DE SINCRONIZAÇÃO	21
2.1	Estrutura de Sincronização Mestre-Escravo	21
2.1.1	Sistemas Tipo Lur'e	23
2.1.2	Representação Politópica	24
2.1.3	Representação Fuzzy Takagi-Sugeno	25
2.2	Análise do Erro de Sincronização	27
2.2.1	Desempenho Robusto \mathcal{H}_∞	27
2.3	Metodologia de Projeto	28
2.4	Aplicação <i>Benchmark</i>	29
2.4.1	Oscilador de Chua Controlado	29
2.4.2	Experimento de Transmissão Segura de Informação	30
3	ABORDAGEM POLIQUADRÁTICA PARA SINCRONIZAÇÃO	33
4	ABORDAGEM FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA SINCRONIZAÇÃO	37
5	PROCEDIMENTO DE PROJETO	45
5.1	Plataforma Experimental PCChua	45
5.1.1	Solução Baseada na Abordagem Poliquadrática	47
5.1.2	Solução Baseada na Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno	49
6	VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	53
6.0.1	Resultados via Abordagem Poliquadrática	53
6.0.1.1	Primeiro Experimento – Sinal Senoidal 1	53
6.0.1.2	Segundo Experimento – Sinal Senoidal 2	57
6.0.1.3	Terceiro Experimento – Sinal de Forma Arbitrária 1	60
6.0.2	Resultados via Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno	62
6.0.2.1	Quarto Experimento – Sinal Senoidal 3	62
6.0.2.2	Quinto Experimento – Sinal de Forma Arbitrária 2	65

7	PLATAFORMA DE SIMULAÇÃO – PCCHUA-SPICE	67
7.1	Implementação Eletrônica	67
7.2	Experimento de Sincronização Simulado	71
7.3	Resultado Experimental Simulado	74
7.4	Extensão de uso da Plataforma PCChua-SPICE	76
8	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	79
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICE A – CIRCUITOS COMPLEMENTARES	89

1 Introdução

1.1 A Sincronização Observada por Huygens

EM meados do século XVII, o cientista holandês Christiaan Huygens empenhava-se para solucionar um dos maiores problemas tecnológicos da sua época: – A determinação de longitude em mar aberto.



Huygens havia inventado o revolucionário relógio de pêndulo em 1657 e trabalhava em parceria com a Sociedade Real de Londres em um aparato envolvendo esses relógios. Seu objetivo era aperfeiçoar a precisão na marcação do tempo.

Em certa ocasião, Huygens observou um estranho comportamento¹ entre dois relógios que se encontravam colocados lado a lado. Os relógios funcionavam com a mesma cadência, porém os pêndulos desenvolviam movimentos oscilatórios em sentidos opostos. O mais intrigante era que, após se perturbar os relógios, estes recuperavam a sincronização em um período não superior a meia hora, e assim permaneciam sincronizados.

Huygens vislumbrou uma possível solução para minimizar o problema de imprecisão na marcação de tempo – uma vez sincronizados, os relógios funcionariam como elementos autorreguladores. A Sociedade Real de Londres, no entanto, interpretou as observações de Huygens sob outra ótica. Tal comportamento demonstrava certo grau de fragilidade, algo que colocaria em dúvida sua aplicabilidade em alto mar, uma vez que movimentações quase imperceptíveis teriam a capacidade de alterar de forma significativa a dinâmica de funcionamento dos relógios.

Embora Huygens não tenha avançado em suas propostas de solução para o problema em questão, notadamente suas observações foram pioneiras em uma área do conhecimento que hoje se destaca nos estudos da sincronização de osciladores não lineares. Os aspectos de sincronização observados por Huygens podem ser formalizados matematicamente e analisados em estudos de osciladores harmônicos acoplados.

Fenômenos similares àqueles observados por Huygens são de grande interesse científico e tecnológico, e têm sido estudados em diversas áreas da ciência. Na Física, por exemplo, investiga-se a sincronização em modelos climáticos; em atividades solares; em

¹ Huygens descreve o comportamento como “uma espécie de simpatia” entre os relógios, em carta ao pai Constantijn Huygens (Carta num. 1335 de 26 Fevereiro de 1665 - *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Publiées par la Société hollandaise des sciences*. La Haye: Martinus Nijhoff, 1893).

sistemas dinâmicos envolvendo lasers e supercondutores. Na área de ciências biológicas destacam-se estudos sobre atividades cerebrais; cadência respiratória; mobilidade humana. No campo das engenharias a sincronização de circuitos osciladores teve início com inúmeras aplicações nas áreas de telecomunicações e, posteriormente, se expandiu para outras áreas, como a área de eletrônica de potência, com aplicações voltadas a maximizar a eficiência de unidades de geração distribuída de energia elétrica.

1.2 Objeto de Estudo

Esse trabalho se volta a estudos de sincronização de sistemas caóticos. O contexto do estudo se restringe a uma classe de sistemas não lineares denominada de Sistemas Tipo Lur'e. Uma metodologia de projeto sistemática será proposta para a síntese de controladores de sincronização aplicáveis a sistemas osciladores não lineares. O foco será dado à sincronização de osciladores caóticos, mas as técnicas desenvolvidas serão gerais e igualmente aplicáveis a circuitos osciladores harmônicos.

Os sistemas investigados poderão ser representados através de duas formas de descrição no espaço de estados: A primeira consiste em uma descrição politópica onde o sistema deve assumir exclusivamente uma configuração linear por partes. Essa descrição é adequada à aplicação de técnicas difundidas na teoria de controle robusto baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. A segunda forma de descrição trata-se de uma abordagem mais ampla, que considera os sistemas de sincronização como uma combinação ponderada de subsistemas lineares locais. Os modelos locais, quando combinados apropriadamente, podem se aproximar da dinâmica original do sistema não linear de forma precisa. Essa última forma de descrição se baseia nas técnicas de modelagem e controle nebuloso (*fuzzy*) do tipo Takagi-Sugeno, [1,2].

Além do desenvolvimento de abordagens de síntese de controladores de sincronização, o trabalho apresentará a validação de suas contribuições através de resultados experimentais. Os experimentos a serem desenvolvidos dizem respeito a um problema clássico e amplamente investigado desde os primeiros trabalhos científicos apresentados sobre sincronização osciladores caóticos – o problema de Transmissão Segura de Informação. Este problema será formalizado nos detalhes de sua especificação de desempenho e será considerado como um *benchmark* para as abordagens de sincronização desenvolvidas nesse trabalho. A primeira forma de validação a ser realizada fará uso de uma plataforma laboratorial desenvolvida para testes de sincronização em osciladores caóticos de Chua – PCChua [3]. A segunda abordagem terá como fundamento os métodos de computação analógica. Um ambiente SPICE² será aplicado para os fins de modelagem e simulação eletrônica dos sistemas de sincronização investigados nesse trabalho.

² SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) são simuladores de circuitos eletrônicos.

1.3 Sincronização de Sistemas Caóticos

Entende-se por sistemas caóticos uma classe de sistemas determinísticos não lineares que apresentam grande sensibilidade à variação das condições iniciais, ou seja, para grande parte das condições iniciais, no domínio considerado, uma pequena incerteza no estado inicial do sistema poderá conduzir a estados muito diferentes no futuro. A dinâmica dos sistemas caóticos torna-se, portanto, de difícil predição a longo prazo.

A sincronização entre sistemas caóticos ocorre à medida que, por exemplo, dois ou mais sistemas caóticos são forçados a se comportarem dinamicamente de forma idêntica ao longo do tempo. Na prática esta condição idealizada de sincronização deverá incorporar alguma tolerância em função das inerentes perturbações exógenas e discrepâncias existentes entre os sistemas.

A técnica de sincronização objeto de estudo deste trabalho é denominada na literatura como Sincronização Mestre-Escravo. Um apanhado sobre os fundamentos da sincronização de sistemas caóticos envolvendo conceitos e aplicações de diferentes técnicas de sincronização pode ser visto no artigo de revisão de literatura [4]. Outras referências relevantes sobre o tema são apresentadas em [5] e [6], que propõem soluções de sincronização baseadas na abordagem de controle de sistemas dinâmicos.

O mecanismo de sincronização mestre-escravo será investigado sob a ótica de solução de um problema clássico da Teoria de Controle – o problema de estimação de estados [7]. A solução deste problema envolve o projeto de um sistema observador de estados, tal como proposto por David G. Luenberger [8].

A ideia fundamental desta técnica é ilustrada na Figura 1, que consiste na implementação de um sistema de controle realimentado. Nessa arquitetura o controlador de sincronização atua no sistema denominado escravo, forçando-o a se comportar como o sistema de referência – o sistema mestre. Em outras palavras, o sistema escravo é forçado a se sincronizar com o sistema mestre, de forma a convergir assintoticamente (preferencialmente) à sua mesma trajetória no espaço de estados. A ação de controle está relacionada à informação de discrepância entre as saídas dos sistemas mestre e escravo.

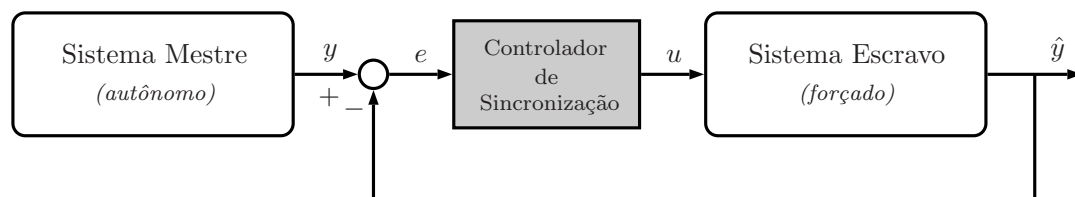


Figura 1 – Mecanismo de sincronização baseado em controle realimentado.

A estrutura de sincronização mestre-escravo será formalizada na Seção 2.1.

1.4 Motivação

Desde a publicação dos resultados pioneiros de Louis Pecora e Thomas Carroll, no início da década de noventa [9-11], a sincronização de sistemas caóticos tornou-se um tema de grande interesse da comunidade científica, motivados, sobretudo, pelas potencialidades de desenvolvimento de inovações tecnológicas.

As aplicações que mais motivaram os estudos iniciais sobre a sincronização de sistemas caóticos voltaram-se à área de telecomunicações, mais especificamente, em estudos relacionados à transmissão segura de informações. A principal ideia associada a este tipo de aplicação se fundamenta no comportamento de natureza imprevisível, tipo ruidoso, que é intrínseco aos sistemas caóticos. Pelo menos duas abordagens distintas podem ser associadas à ideia de transmissão segura de informação. A primeira abordagem diz respeito à proteção contra a violação da informação, ou seja, a aparente aleatoriedade comportamental é vista como mecanismo inibidor dos processos de decodificação da informação transmitida. Já a segunda abordagem explora o conceito de preservação da informação, e se fundamenta na distribuição da energia do sinal de informação ao longo de um amplo espectro de frequências do canal de transmissão. Particularmente a sincronização de sistemas caóticos acoplados por meio de lasers semicondutores é um tema atual de pesquisas, e abre perspectivas para novos conceitos de transmissão segura de dados em banda larga [12-14].

Se por um lado as teorias de controle voltadas aos estudos de sistemas lineares se encontram em um estado da arte que nos permitem classificá-las como teorias maduras, pode-se dizer que as teorias de controle aplicadas aos sistemas não lineares e caóticos ainda se encontram em crescimento acelerado.

Esse trabalho tem como proposta adaptar técnicas difundidas e validadas das teorias de controle robusto para o desenvolvimento de abordagens de síntese de controladores de sincronização aplicáveis a osciladores caóticos. Cabe destacar que Popov foi pioneiro ao utilizar este tipo de abordagem (aplicar teoria linear em contextos não lineares) na formulação do seu critério de análise de estabilidade absoluta para sistema do tipo Lur'e [15].

Os trabalhos desenvolvidos por Millerioux et al. [16-19] se destacam entre aqueles que inspiraram o desenvolvimento desse estudo. Estes trabalhos exploram as potencialidades das técnicas de controle robusto em formulações por desigualdades matriciais lineares (LMIs)³ aplicadas à sincronização de mapas caóticos. Em linhas gerais, as técnicas desenvolvidas por estes autores envolvem a geração e a sincronização de dinâmicas caóticas, com sugestões de aplicações na área de telecomunicações, por exemplo, como a utilização em mecanismos de modulação com espalhamento espectral. Também contribuíram para a base

³ As LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) aparecem como restrições em problemas de otimização convexa. O *LMI Control Toolbox* - Matlab[®] pode ser utilizado na solução de problemas de controle dessa natureza.

de conhecimento desse estudo os trabalhos [2], [20], [21] e [22], que propõem formulações LMIs de controle nebuloso TS aplicáveis à sincronização de sistemas não lineares.

Destacam-se como aspectos de motivação desse trabalho: i) a possibilidade de se combinar conteúdos de [22], [23] e [24] para a formulação da metodologia de projeto proposta para a sincronização de sistemas osciladores caóticos; ii) os aspectos de relevância das validações experimentais; iii) a intenção de confirmar a teoria apresentada em [25], que propõe uma técnica para transmissão de informação baseada no princípio ITVC⁴.

1.5 Objetivos

- Propor uma metodologia de projeto que sistematize a sequência de etapas necessárias à solução do problema de sincronização mestre-escravo de osciladores caóticos;
- Desenvolver abordagens LMIs para a síntese de controladores de sincronização;
- Validar experimentalmente a metodologia de projeto proposta;
- Contribuir com a geração ilustrações de aplicação que confirmem o princípio ITVC;
- Desenvolver um ambiente de simulação SPICE que permita reproduzir de forma fidedigna ensaios realizados na plataforma experimental PCChua;
- Estender as soluções de simulação via SPICE de forma a permitir a realização de simulações de sincronização baseadas em osciladores caóticos com memória.

1.6 Organização do Texto

- O capítulo 2 apresenta fundamentos e formalismos matemáticos envolvidos na solução do problema de sincronização mestre-escravo de osciladores caóticos, além de descrever a aplicação (*benchmark*) que será utilizada para validação de resultados;
- Os capítulos 3 e 4 desenvolvem as abordagens LMIs propostas para a síntese de controladores de sincronização aplicáveis a sistemas osciladores do tipo Lur'e;
- O capítulo 5 aplica a metodologia de projeto proposta para a solução do problema *benchmark* de Transmissão Segura de Informação baseado no princípio ITVC;
- O capítulo 6 apresenta resultados experimentais desenvolvidos no PCChua;
- O capítulo 7 desenvolve uma plataforma baseada em SPICE alternativa ao PCChua;
- O capítulo 8 sumariza as conclusões e propões temas de continuidade do trabalho;
- O Apêndice-A apresenta circuitos complementares da plataforma PCChua-SPICE.

⁴ ITVC (*Information Transmission Via Control*) diz respeito a uma técnica de transmissão de informação que se baseia no princípio de demodulação de informação via sinais de controle de sincronização.

2 Fundamentação do Problema de Sincronização

Este capítulo objetiva fundamentar o problema de sincronização em um cenário onde circuitos osciladores idênticos estarão acoplados unidirecionalmente em uma configuração mestre-escravo. O problema de sincronização em questão poderá ser interpretado como um problema de controle de rastreamento, no qual o sistema oscilador escravo será forçado a seguir a trajetória desenvolvida pelo oscilador mestre. A formulação proposta considera que estes circuitos serão passíveis de perturbações exógenas em suas entradas e saídas.

2.1 Estrutura de Sincronização Mestre-Escravo

A estrutura de sincronização mestre-escravo foi introduzida conceitualmente na Seção [1.3](#). Como um problema de controle realimentado, aquela estrutura generalizada não impõe restrições sobre a natureza do sistema escravo para que a sincronização possa ser estabelecida. Entretanto, ao considerar cenários reais de aplicação, a estrutura de sincronização deve ser explicitamente definida. Isto se faz necessário, uma vez que desta estrutura particular dependerá toda uma sequência de abordagens teóricas e técnicas aplicáveis à solução do problema de síntese do controlador de sincronização.

Este trabalho considera a investigação da sincronização que ocorre entre dois sistemas não lineares unidirecionalmente acoplados. Nesta configuração o sistema mestre será admitido autônomo, enquanto o sistema escravo consistirá de uma cópia controlada do sistema mestre. Matematicamente os sistemas mestre e escravo poderão ser descritos com a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
 \text{Mestre} \quad & \begin{cases} \delta[x_\tau] = f(x_\tau) + w_\tau, \\ y_\tau = h(x_\tau) + \eta_\tau, \end{cases} \\
 \text{Escravo} \quad & \begin{cases} \delta[\hat{x}_\tau] = f(\hat{x}_\tau) + u_\tau, \\ \hat{y}_\tau = h(\hat{x}_\tau), \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

podendo o operador $\delta[x_\tau]$ assumir as equivalências:

$$\begin{aligned}
 \delta[x_\tau] &:= \frac{dx(t)}{dt}, & \tau &:= t \in \mathbb{R}, & \text{para sistemas a tempo contínuo,} \\
 \delta[x_\tau] &:= x(k+1), & \tau &:= k \in \mathbb{N}, & \text{para sistemas a tempo discreto.}
 \end{aligned}$$

Nessa representação $x_\tau \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{x}_\tau \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, os vetores de estado dos sistemas mestre e escravo; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ corresponde a função vetorial de mapeamento

não linear dos estados; $y_\tau \in \mathbb{R}^m$ e $\hat{y}_\tau \in \mathbb{R}^m$ são vetores de saída determinados pela função vetorial $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $u_\tau \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de sinais de controle, responsável por garantir a sincronização do sistema escravo; w_τ e η_τ representam vetores de sinais exógenos que corrompem, respectivamente, a dinâmica do sistema mestre e as informações de saída de medição. Em geral seleciona-se uma das componente de $y_\tau \in \mathbb{R}^m$ como sinal de referência para a sincronização.

A concepção básica de projeto deste trabalho consistirá na implementação de uma lei de controle que forçará o sistema escravo a se comportar como o sistema mestre, em outras palavras, que o forçará a se sincronizar com o sistema mestre.

Tendo em vista a real impossibilidade de se obter uma sincronização exata, seja por influência de sinais exógenos que perturbam os sistemas, ou por imperfeições em suas descrições e realizações, torna-se conveniente definir um conceito prático para a sincronização entre os sistemas mestre e escravo.

Definição 1. Uma *Sincronização Prática* entre os sistemas mestre e escravo é estabelecida quando as trajetórias desenvolvidas por estes sistemas aproximam-se o suficiente uma da outra, independente das condições iniciais desses sistemas, tal que o erro de sincronização, definido como:

$$e_\tau = x_\tau - \hat{x}_\tau, \quad (2.2)$$

seja limitado: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|e_\tau\| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon_0 \in \mathbb{R}^n,$

sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana e ‘ ϵ ’ um valor limitante para o erro de sincronização ‘ e_τ ’. \square

Nesse trabalho serão desenvolvidas abordagens para a sincronização de uma classe de sistemas osciladores não lineares que admite representação em espaço de estados. Embora tenham particularidades os sistemas assim representados assumem um grau de generalidade considerável, mostrando-se práticos para aplicações reais.

Com o intuito de apresentar uma descrição generalizada sobre o problema de sincronização investigado, considere a seguinte representação em espaço de estados para a classe de sistemas não lineares em estudo:

$$\text{Sistema Generalizado} \quad \begin{cases} \delta[x_\tau] = \mathcal{A}(\rho_x) x_\tau + \mathcal{B}(\rho_x), \\ y_\tau = C x_\tau, \\ \rho_x = \varphi(y_\tau), \end{cases} \quad (2.3)$$

sendo $\mathcal{A}(\rho_x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz de funções dependentes de parâmetros – matriz da dinâmica; $\mathcal{B}(\rho_x) \in \mathbb{R}^n$ um termo afim – vetor de entrada de polarização; $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matriz de saída; $\rho_x \in \mathbb{R}^p$ um vetor de parâmetros definido pela função $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, que representa um mapeamento não linear do vetor de saída ‘ y_τ ’.

As dificuldades intrínsecas ao estabelecimento de condições gerais para a sincronização de sistemas não lineares, tal como descrito em (2.3), induzem a busca de soluções para sistemas de estrutura particular. Dada a sua importância, e caráter prático, a classe de sistemas do tipo Lur'e recebe grande atenção por parte da comunidade científica. Diversas abordagens como [26–29] foram formuladas para garantir a sincronização de circuitos osciladores representados através dessa estrutura. Nesse sentido, esse trabalho também será mais um a se limitar a investigar a sincronização da classe de sistemas Lur'e.

2.1.1 Sistemas Tipo Lur'e

Sistemas do tipo Lur'e são sistemas realimentados que apresentam comportamentos dinâmicos consequentes de não linearidades estáticas de saída [30]. Lur'e e Postnikov [31] foram pioneiros ao demonstrar a possibilidade de se aplicar as teorias de Lyapunov¹ na análise de estabilidade desta classe de sistemas. Em geral, o problema de análise de estabilidade de sistemas Lur'e é estudado considerando-se restrições do tipo setor para as não linearidades da realimentação, como ilustrado na Figura 2.

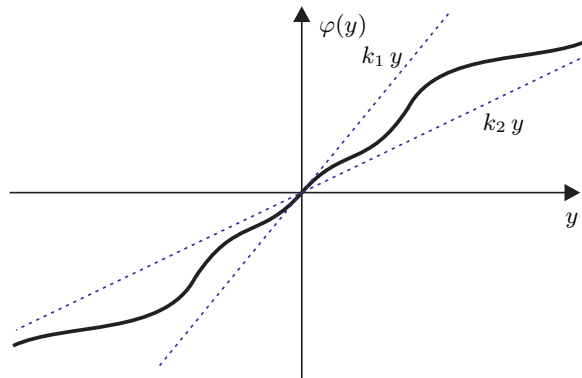


Figura 2 – Não linearidade $\varphi(y)$ restrita ao setor $[k_1, k_2]$.

A origem dos estudos envolvendo não linearidades do tipo setor talvez seja creditada a uma hipótese feita por Aizerman com base no seguinte raciocínio eurístico: Suponha que o sistema Lur'e seja assintoticamente estável para os casos de realimentação linear $\varphi(y) := K_1 y$ e $\varphi(y) := K_2 y$. Parece razoável esperar que o sistema também será estável para uma realimentação não linear $\varphi(y)$ contida no setor geometricamente limitado pelas funções lineares. A conjectura de Aizerman se mostrou falsa, mas ainda assim permitiu que um critério de suficiência para análise de estabilidade absoluta pudesse ser elaborado por Popov. Veja uma extensão do Critério de Popov em [32].

¹ O denominado Segundo Método de Lyapunov permite que se avalie a estabilidade de sistemas dinâmicos de forma direta, sem a necessidade de se proceder cálculos integrais em equações variacionais. Estes cálculos integrais, que formam a base dos métodos propostos por Poincaré, e o Primeiro Método de Lyapunov, em geral, podem ser considerados de difícil solução e algumas vezes impossíveis.

No contexto de sistemas de controle, estruturas do tipo Lur'e decorrem naturalmente de sistemas lineares que apresentam alguma parcela de realimentação com comportamento dinâmico não linear – em rigor tratam-se de sistemas não lineares. Alexander M. Letov [33] aplicou de forma sistematizada os trabalhos de Lur'e, estabelecendo formas canônicas para a solução de problemas de controle, por vezes, complexos e de grandes interesses práticos.

É interessante observar que, embora explicitamente os trabalhos seminais de Lur'e não formalizem desigualdades matriciais, os critérios de estabilidade por ele estabelecidos têm a forma de LMIs, e foram solucionados de forma analítica, através cálculos manuais.

Um método unificado, baseado em LMIs, que se volta à análise de estabilidade absoluta de sistemas do tipo Lur'e é apresentado em [34]. Este método visa prover resultados menos conservadores que aqueles obtidos por meio de critérios baseados no conceito de passividade, como o Critério do Círculo e o Critério de Popov [35]. Nesta abordagem os parâmetros que definem os setores aparecem explicitamente nas LMIs, e podem ser definidos de forma ótima, utilizando-se técnicas de programação convexa.

Admitindo-se que no sistema generalizado (2.3) a matriz da dinâmica, $\mathcal{A}(\rho_x)$, seja uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; que a entrada de polarização, $\mathcal{B}(\rho_x)$, seja uma contribuição aditiva de realimentação não linear, $B\varphi(y_\tau)$, com $B \in \mathbb{R}^n$; que a função não linear, $\varphi(\cdot)$, seja restrita ao setor $[k_1, k_2]$. Então a forma generalizada poderá ser especializada para descrever uma classe de sistemas Lur'e, com a seguinte descrição:

$$\begin{aligned} \text{Tempo Contínuo} & \begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = Ax_t + B\varphi(y_t), \\ y_t = Cx_t, \end{cases} \\ \text{Tempo Discreto} & \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\varphi(y_k), \\ y_k = Cx_k. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nesse trabalho duas formas de representação serão propostas para os sistemas sob estudo. A primeira representação será baseada em uma descrição em espaços de estados politópica. Esta representação será apropriada para sistemas em que a não linearidade do setor possa ser descrita por uma função linear por partes. A segunda forma de representação não impõe restrição à função $\varphi(\cdot)$, sendo formulada com base na teoria de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno.

2.1.2 Representação Politópica

Considere uma classe de sistemas Lur'e a tempo discreto, como apresentado em (2.4), em que a função de realimentação, $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, admita uma representação linear por partes de ' N ' seguimentos.

Para a formulação do problema de sincronização desta classe de sistemas, define-se uma função de chaveamento:

$$i = \phi(\varphi(y)), \quad (2.5)$$

onde $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ permite discriminar regiões indexadas, \mathfrak{R}_i , do espaço de estados.

A cada região \mathfrak{R}_i do espaço de estados corresponderá um único segmento linear da função $\varphi(\cdot)$ e, por consequência, será definida uma representação local, linear e invariante no tempo para o sistema. Em outras palavras, à cada região \mathfrak{R}_i será associado um vértice do polítopo que descreverá o sistema. Nestas condições, passa-se a adotar nesse trabalho a seguinte representação politópica para os sistemas mestre e escravo em tempo discreto:

$$\text{Vértice } \mathfrak{R}_i \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = A_i x_k + B_i, \\ y_k = C x_k, \\ i = \phi(\varphi(y_k)), \end{array} \right. \quad (2.6)$$

sendo A_i a matriz que descreve a dinâmica linear do sistema no i -ésimo vértice; $B_i \in \mathbb{R}^n$ representa um termo afim associado ao vértice, que atua como uma entrada de polarização; $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de ponderação, constante, que define o vetor de saída medida ' y_k '.

Assume-se que o sistema terá liberdade para excursionar na região \mathfrak{R} do espaço de estados formada pela união das regiões \mathfrak{R}_i $\left(\mathfrak{R} = \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{R}_i \subseteq \mathbb{R}^n \right)$. Assume-se ainda que o estado do sistema, ' x_k ', se restringirá a visitar uma única região \mathfrak{R}_i a cada instante de tempo, uma vez que estas regiões são consideradas disjuntas.

2.1.3 Representação Fuzzy Takagi-Sugeno

A representação nebulosa (*Fuzzy*) proposta por Takagi e Sugeno [1] permite que uma ampla classe de sistemas não lineares possa ser descrita como uma combinação convexa de subsistemas lineares [21].

A combinação de subsistemas lineares para a composição da representação nebulosa Takagi-Sugeno (TS) é realizada através de regras nebulosas do tipo SE-ENTÃO.

Cada subsistema considerado nesta representação descreve localmente o comportamento do sistema não linear. As representações locais poderão ser obtidas através da linearização do sistema em torno de pontos de operação particulares no espaço de estados.

Como pontos operacionais, consideram-se os pontos de operação nominal, os de operação crítica, ou mesmo qualquer outra coordenada generalizada do espaço de estados do sistema, em que uma descrição linear na sua vizinhança permita aumentar a precisão do modelamento.

Considere a possibilidade de se definir, de forma conveniente, um conjunto de ‘ N ’ modelos locais para a descrição do sistema não linear generalizado (2.3). Para cada modelo local considerado, a matriz $\mathcal{A}(\rho_x)$ e o vetor de funções $\mathcal{B}(\rho_x)$ deverão ser linearizados e, admitindo-se uma condição de invariância no tempo, representados como matriz e vetor constantes, A_i e B_i , respectivamente, de dimensões apropriadas.

A i -ésima regra para a representação TS do sistema (2.3) a tempo discreto assumirá o seguinte formato:

$$\text{Regra } i \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SE } (p_k^1 \text{ é } \mathcal{M}_i^1) \text{ E } (p_k^2 \text{ é } \mathcal{M}_i^2) \text{ E } \dots \text{ E } (p_k^P \text{ é } \mathcal{M}_i^P), \\ \text{ENTÃO } \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = A_i x_k + B_i, \\ y_k = C x_k, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

sendo \mathcal{M}_i^j o j -ésimo conjunto nebuloso da i -ésima regra TS, e p_k^j a sua respectiva variável premissa associada, no instante de tempo discreto k .

Em geral, as premissas p_k^j são definidas em função das variáveis de estado do sistema, ou em função de entradas exógenas, das saídas de medição, ou mesmo em função do tempo. A fim de simplificar a notação utilizada, considere $p_k = [p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^P]$ como um vetor de variáveis premissas.

A representação TS do sistema não linear em estudo será dada por:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k)(A_i x_k + B_i), \quad (2.8)$$

sendo

$$\alpha_i(p_k) = \frac{w_i(p_k)}{\sum_{i=1}^N w_i(p_k)} \quad (2.9)$$

uma ponderação normalizada correspondente ao grau de ativação das regras TS.

O grau de ativação de cada regra pode ser determinado a partir de uma conjunção produto (t -norma) das pertinências das variáveis premissas, $\mu_i^j(p_k^j)$, avaliadas em seus respectivos conjuntos nebulosos \mathcal{M}_i^j , portanto:

$$w_i(p_k) = \prod_{j=1}^P \mu_i^j(p_k^j). \quad (2.10)$$

Para a linearização dos sistemas em torno dos pontos de equilíbrio, a técnica de expansão em série de Taylor pode ser aplicada. Para outros pontos de interesse, o modelamento local poderá ser obtido com a técnica apresentada em [36], que permite descrever o sistemas de forma exata, ao custo de um aumento da quantidade de regras necessárias.

A qualidade da representação TS de um sistema não linear está condicionada não somente à quantidade de subsistemas locais considerados, mas também com o nível de exatidão dos modelamentos elaborados para descrever tais subsistemas [21, 37].

2.2 Análise do Erro de Sincronização

A base para se estabelecer formulações de garantia de sincronização prática (veja Def. 1, pág. 22) entre os sistemas mestre-escravo (2.1) advém da análise do comportamento dinâmico do erro de sincronização que se estabelece entre estes sistemas.

Considerando o erro de sincronização (2.2), seu comportamento dinâmico poderá ser investigado a partir da análise de estabilidade do sistema de erro de sincronização:

$$\delta[e_\tau] = f(x_\tau) - f(\hat{x}_\tau) - u_\tau + w_\tau, \quad (2.11)$$

sendo $u_\tau = f_c(y_\tau, \hat{y}_\tau)$ uma lei de controle de sincronização que reflete informações acerca da discrepância observada entre as saídas de medição dos sistemas mestre e escravo.

A síntese de uma lei de controle que garanta a estabilização assintótica do sistema (2.11) deverá atender uma relação de compromisso entre a sua velocidade de estabilização e o nível de erro admitido na sincronização. De fato, se por um lado um sinal de controle ‘ u_τ ’ mais enérgico pode aumentar a largura de faixa do sistema de erro, fazendo com que o sistema escravo convirja mais rapidamente ao sistema mestre, os inerentes aspectos de amplificação dos ruídos de medição contribuirão para o aumento do erro de sincronização.

Nos capítulos 3 e 4 serão apresentadas abordagens de solução para tratar o problema de estabilização do sistema de erro de sincronização (2.11), considerando as representações particulares, Politépica (2.1.2) e Fuzzy Takagi-Sugeno (2.1.3).

2.2.1 Desempenho Robusto \mathcal{H}_∞

O índice de desempenho robusto definido pela norma \mathcal{H}_∞ será utilizado nesse trabalho como uma métrica de qualidade para a sincronização. Embora os conceitos de normas para espaços de funções de variáveis complexas² não se apliquem de forma direta aos estudos de sistemas não lineares, a Relação de Parseval [7] permite que sejam realizadas reinterpretações e operacionalizações no domínio do tempo, por meio do computo de ganhos induzidos em relações de entrada e saída de sinais [7].

Os aspectos de degradação de desempenho de sincronização decorrem naturalmente da presença de perturbações exógenas, além de incertezas associadas as discrepâncias existentes entre os sistemas mestre e escravo. Estas incertezas estão relacionadas tanto à

² O espaço de Hardy \mathcal{H}_∞ contempla o universo de funções racionais de valor matricial, próprias, analíticas e limitadas no semiplano direito complexo fechado, que atendem a norma $\mathcal{H}_\infty = \sup_w \sigma_{max}\{G(jw)\}$.

incapacidade de se representar modelamentos com exatidão, quanto da impossibilidade de se realizar implementações físicas idênticas para os sistemas mestre e escravo.

A determinação de uma lei de controle que esteja em conformidade com a Definição 1, ou seja, que garanta a sincronização entre os sistemas mestre e escravo de forma robusta (pouco sensível estas perturbações), torna-se fundamental.

Nesse cenário em que a caracterização estatística dos sinais de perturbação se mostra difícil, ou inviável, a escolha pelo índice de desempenho \mathcal{H}_∞ se justifica pelo seu caráter prático, que permite tratar incertezas e perturbações sob a rege do pior caso, impondo apenas que estas perturbações sejam caracterizadas por sinais de energia limitada.

Restringindo-se aos estudos de sistemas a tempo discreto e sujeitos a perturbações exógenas de entrada, o sistema de erro de sincronização (2.11) pode ser reformulado como:

$$\begin{cases} e_{k+1} = f(x_k) - f(\hat{x}_k) - u_k + B_w w_k, \\ z_k = C_z e_k, \end{cases} \quad (2.12)$$

sendo w_k um sinal de perturbação exógena que afeta a dinâmica de sincronização nas direções definidas por $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. O sinal ‘ z_k ’ é definido de forma conveniente à partir da matriz $C_z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que permite ponderar o desempenho da sincronização através do erro.

Sob estas considerações, o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ pode ser definido como o limitante superior ‘ γ ’ do ganho induzido ℓ_2 que se estabelece da razão entre as energias dos sinais de desempenho da sincronização, z_k , e entrada de perturbação, w_k , tal como:

$$\mathcal{I}_\infty := \sup_{\|w_k\|_2 \neq 0} \frac{\|z_k\|_2}{\|w_k\|_2} < \gamma, \quad (2.13)$$

sendo $\|\cdot\|_2$ a norma $\ell_2[0, \infty)$ do subespaço de Lebesgue das sequências quadrado somáveis.

2.3 Metodologia de Projeto

A metodologia proposta para a sincronização mestre-escravo obedece as etapas:

Etapa 1 - Modelagem e Identificação dos Sistemas

Os sistemas mestre e escravo deverão ser descritos em suas naturezas físicas, ou de processos, através de modelos analíticos parametrizáveis. Para a estimação paramétrica destes sistemas sugere-se a aplicação das abordagens de identificação apresentadas em [38] e [39]. Estas abordagens se baseiam na aplicação do Filtro de Kalman Unscented – UKF e se mostram eficientes para estimativas recursivas em sistemas não lineares, mesmo em condições de incertezas e na presença de ruídos de medição.

Etapa 2 - Discretização e Representação em Espaço de Estados

Os modelos não lineares a tempo contínuo precisarão ser discretizados e representados em espaços de estados, conforme os formatos Politópico (2.1.2) e/ou TS (2.1.3). O método de discretização proposto em [24] mostra-se capaz de garantir a preservação dos pontos fixos originais do sistema não linear. Dessa forma, o método permite que a dinâmica do sistema seja reproduzida com boa fidelidade, mesmo para uma faixa alargada de tempo de integração.

Etapa 3 - Síntese do Controlador de Sincronização

Propõe-se aplicar a abordagem técnica desenvolvida no Capítulo 3, ou no Capítulo 4, aquela que se mostrar mais adequada ao modelamento e a representação dos sistemas de sincronização mestre-escravo sob investigação.

2.4 Aplicação Benchmark

O circuito oscilador de Chua, desde a sua aparição no trabalho [40], tem sido utilizado de forma massiva em experimentos de caos determinístico. (Veja um histórico da sua concepção em [41]). Isso se deve graças à sua simplicidade construtiva, robustez e riqueza dinâmica, que fazem desse circuito uma excelente plataforma *benchmark* para a validação de técnicas de controle e de sincronização de sistemas caóticos.

Esse trabalho se valerá de um experimento de transmissão segura de informação baseado em circuitos osciladores de Chua, para fins de ilustração e validação da metodologia de projeto proposta.

2.4.1 Oscilador de Chua Controlado

O circuito de Chua básico é constituído de uma rede passiva RLC acrescida de um diodo de Chua³, o único elemento não linear do circuito oscilador [40].

A dinâmica do oscilador de Chua controlado é descrita pelo conjunto de EDOs:

$$\text{Oscilador de Chua Controlado} \begin{cases} C1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{v_{C2}(t) - v_{C1}(t)}{R} - i_d(v_{C1}(t)) + u_1(t), \\ C2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_{C1}(t) - v_{C2}(t)}{R} + i_L(t) + u_2(t), \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = -v_{C2}(t) - r_L i_L(t) + u_3(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

sendo $C1$, $C2$ e R elementos passivos capacitivos e resistivo; ' r_L ' representa a resistência interna do indutor L ; ' $i_d(t)$ ' corresponde à corrente desenvolvida no diodo de Chua; $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ correspondem aos sinais manipulação/controlado do circuito oscilador.

³ Diodo de Chua é o nome usualmente associado ao circuito concebido por Leon Ong Chua que realiza funcionamento equivalente a um componente teórico de característica resistiva negativa e não linear.

A Figura 3 ilustra o circuito oscilador de Chua, onde foram acrescentadas duas fontes controladas de corrente e uma fonte controlada de tensão.

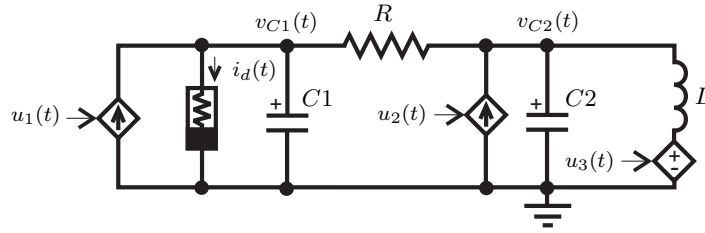


Figura 3 – Circuito oscilador de Chua controlado.

A curva característica I-V do diodo de Chua, mostrada na Figura 4, descreve um comportamento linear por partes, que pode ser representado analiticamente como:

$$i_d(v_{C1}) = \begin{cases} m_1 v_{C1} - B_p(m_0 - m_1) & \text{para } v_{C1} \leq -B_p, \\ m_0 v_{C1} & \text{para } -B_p < v_{C1} < +B_p, \\ m_1 v_{C1} + B_p(m_0 - m_1) & \text{para } v_{C1} \geq +B_p, \end{cases} \quad (2.15)$$

sendo ‘ m_0 ’ e ‘ m_1 ’ coeficientes angulares correspondentes à condutância do diodo de Chua nos distintos seguimentos da característica I-V, delimitados pelos limiares de tensão $\pm B_p$.

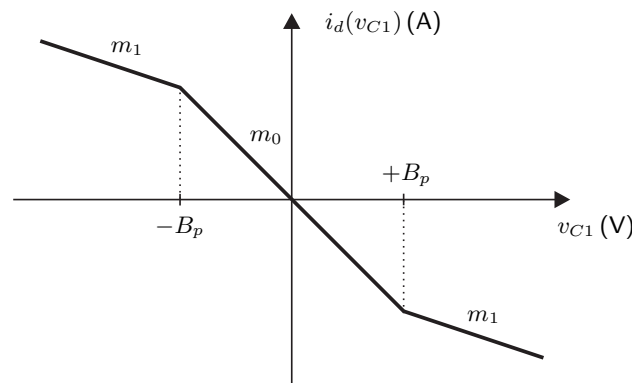


Figura 4 – Curva característica I-V do diodo de Chua.

2.4.2 Experimento de Transmissão Segura de Informação

Uma abordagem unificada para a transmissão segura de informação é proposta em [25]. Esta abordagem fundamenta-se no princípio ITVC que estabelece as condições necessárias para que a demodulação da informação transmitida em um mecanismos de sincronização mestre-escravo possa ser realizada via sinais de controle de sincronização.

A Figura 5 ilustra o mecanismo de transmissão de informação considerado nesta aplicação *benchmark*. O sistema de comunicação proposto é composto de dois circuitos osciladores de Chua em acoplamento unidirecional.

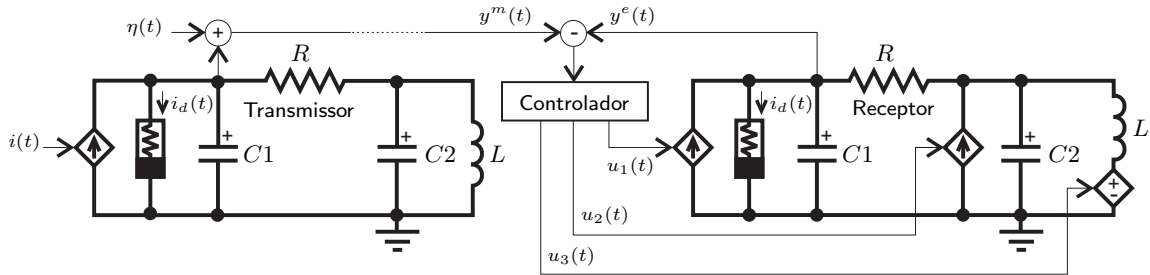


Figura 5 – Sistema de comunicação unidirecional.

Neste mecanismo de transmissão a informação a ser transmitida $i(t)$ é aplicada no circuito oscilador caótico ‘transmissor’ de forma a perturbar aditivamente seus estados. Matematicamente esta entrada exógena implica em uma modificação nas equações diferenciais que governam a dinâmica do sistema oscilador, tornando-o não autônomo. Um sinal escalar $y^m(t)$ é definido como sinal a ser transmitido. Este sinal se presta a ser uma portadora da informação a ser transmitida, além de servir como referência para a sincronização do circuito receptor, e estará sujeito a ruídos $\eta(t)$ no canal de transmissão.

O princípio ITVC estabelece que qualquer controlador que garanta uma sincronização idêntica (ou quase-idêntica) entre os circuitos osciladores transmissor e receptor poderá ser considerado um demodulador para o sinal de informação transmitida. Desta forma, se o controlador garantir a sincronização entre os sistemas transmissor (mestre) e receptor (escravo), conforme a definição de sincronização prática (Def. 1), então o sinal de informação $i(t)$ poderá ser recuperado através do sinal de controle $u_1(t)$.

A aplicação *benchmark* se propõe a solucionar o seguinte problema de controle:

Problema de Transmissão Segura de Informação: *Obter uma lei de controle que assegure uma sincronização prática com desempenho \mathcal{H}_∞ aos sistemas transmissor e receptor, considerando a presença de perturbações exógenas de entrada e a necessidade de se manter a proteção da informação transmitida contra acesso não autorizado.*

Considera-se nessa aplicação que o sistema transmissor possa ser representado pelo

seguinte equacionamento:

$$\text{Transmissor} \left\{ \begin{array}{l} C1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{v_{C2}(t) - v_{C1}(t)}{R} - i_d(v_{C1}(t)) + i(t) , \\ C2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{v_{C1}(t) - v_{C2}(t)}{R} + i_L(t) , \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = -v_{C2}(t) - r_L i_L(t) , \\ i_d(v_{C1}) = m_0 v_{C1} + \frac{(m_1 - m_0)(|v_{C1} + B_p| - |v_{C1} - B_p|)}{2} , \\ y^m(t) = v_{C1}(t) + \eta(t) , \end{array} \right. \quad (2.16)$$

sendo $C1$, $C2$, R , rL , L , m_0 , m_1 e B_p os parâmetros construtivos do circuito; $i(t)$ o sinal de informação modulante; $y^m(t)$ o sinal de informação transmitida e $\eta(t)$ o sinal de ruído do canal de transmissão.

O sistema receptor é constituído de um oscilador de Chua controlado que oferece acesso completo a manipulação das suas fontes de corrente e fonte de tensão. As ações de controle são exercidas no sistema através dos sinais $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ gerados pelo controlador de sincronização.

O sistema receptor é análogo ao sistema transmissor e tem a sua dinâmica regida pelo conjunto de equações:

$$\text{Receptor} \left\{ \begin{array}{l} C1^* \frac{dv_{C1^*}(t)}{dt} = \frac{v_{C2^*}(t) - v_{C1^*}(t)}{R^*} - i_d(v_{C1^*}(t)) + u_1(t) , \\ C2^* \frac{dv_{C2^*}(t)}{dt} = \frac{v_{C1^*}(t) - v_{C2^*}(t)}{R^*} + i_L^*(t) + u_2(t) , \\ L^* \frac{di_L^*(t)}{dt} = -v_{C2^*}(t) - r_L^* i_L^*(t) + u_3(t) , \\ i_d(v_{C1^*}) = m_0^* v_{C1^*} + \frac{(m_1^* - m_0^*)(|v_{C1^*} + B_p^*| - |v_{C1^*} - B_p^*|)}{2} , \\ y^e(t) = v_{C1^*}(t) , \end{array} \right. \quad (2.17)$$

sendo $C1^*$, $C2^*$, R^* , rL^* , L^* , m_0^* , m_1^* e B_p^* os parâmetros do circuito receptor; $u_{\{1,2,3\}}(t)$ são sinais de controle e $y^e(t)$ é o sinal de saída medida do circuito receptor.

Nota 1. O capítulo 5 fará referência aos desenvolvimentos aqui apresentados, ilustrando a aplicação da metodologia de projeto proposta em um experimento de transmissão segura de informação via ITVC.

3 Abordagem Poliquadrática para Sincronização

Esta abordagem aplica-se à sincronização de sistemas mestre-escravo descritos através da representação politópica apresentada na Seção 2.1.2. Considera-se que o sistema mestre seja perturbado por sinais exógenos nos seus estados e na saída de medição. Neste cenário ruidoso, a sincronização pode sofrer uma degradação no seu desempenho ou, no pior caso, ser completamente perdida, o que justifica a síntese de um controlador de sincronização robusto. Os critérios de estabilidade poliquadrática¹ formulados nesse desenvolvimento se baseiam na aplicação de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, com vistas a obter condições de estabilidade menos conservadoras.

Considere uma estrutura de sincronização mestre-escravo em que os sistemas possam ser descritos através de mapas discretos com a seguinte representação²:

$$\text{Mestre} \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_i x_k + B_i + E_i w_k, \\ y_k = C_i x_k + D_i w_k, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{Escravo} \quad \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_i \hat{x}_k + B_i + u_k, \\ \hat{y}_k = C_i \hat{x}_k. \end{cases}$$

Definindo o erro sincronização (erro de reconstrução de estados) $e_k := x_k - \hat{x}_k$ e adotando a lei de controle de sincronização: $u_k = L_i(y_k - \hat{y}_k)$, o sistema de erro de sincronização pode ser descrito como:

$$\text{Erro} \quad \begin{cases} e_{k+1} = (A_i - L_i C_i) e_k + (E_i - L_i D_i) w_k, \\ z_k = \tilde{C}_i e_k + \tilde{D}_i w_k, \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo $L_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de ganhos de sincronização, ‘ z_k ’ o sinal de desempenho do erro de sincronização e \tilde{C}_i e \tilde{D}_i as matrizes de ponderação de saída de dimensões apropriadas.

O problema de sincronização de (3.2) será investigado de forma análoga ao problema filtragem robusta \mathcal{H}_∞ apresentado em 42. O teorema que se segue fornece as condições de síntese dos ganhos de sincronização L_i do sistema de erro de sincronização (3.2).

¹ O termo *poliquadrático* foi cunhado nos trabalhos de Daafouz et al. e faz alusão ao uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros a fim de se afastar confusões com a terminologia usual de estabilidade quadrática, que faz uso de uma função de Lyapunov única.

² As descrições das matrizes e vetores foram omitidas por já terem sido apresentadas no texto.

Teorema 1. Considere o sistema de erro (3.2). Se existirem matrizes simétricas $P_i \succ \mathbf{0}$ e $P_j \succ \mathbf{0}$, quaisquer matrizes G e F_i de dimensões apropriadas e um escalar $\gamma \equiv \sqrt{\delta} > 0$ que solucionem o problema de otimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \delta \\ \delta, P_i, P_j, G, F_i \\ \text{sujeito a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} P_j - G^T - G & GA_i - F_i C_i & GE_i - F_i D_i \\ A_i^T G^T - C_i^T F_i^T & -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ E_i^T G^T - D_i^T F_i^T & \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\delta \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{array} \right] \prec \mathbf{0}, \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

então os ganhos de sincronizações serão dados por $L_i = V^{-1}F_i$. Além disso, o nível de atenuação dos distúrbios \mathcal{H}_∞ da entrada ' w_k ' para a saída de desempenho do erro de sincronização ' z_k ' será obtido como resultado do problema de otimização, fazendo $\gamma = \sqrt{\delta}$.

Antecedendo a demonstração de solução do problema de otimização (3.3) duas técnicas algébricas disseminadas no estudo de sistemas de controle robusto são apresentadas:

Definição 2. A técnica do Complemento de Schur [30] permite que os conjuntos de desigualdades matriciais não lineares (i) ou (ii):

$$(i) \quad R \succ \mathbf{0}, \quad Q - SR^{-1}S^T \succ \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$(ii) \quad Q \succ \mathbf{0}, \quad R - S^T Q^{-1}S \succ \mathbf{0},$$

sejam convertidos de forma equivalente à LMI:

$$\left[\begin{array}{cc} Q & S \\ S^T & R \end{array} \right] \succ \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

sendo $Q = Q^T$ e $R = R^T$ matrizes simétricas. \square

Definição 3. A Condição de Relaxação apresentada em [43] estabelece uma relação de equivalência entre as LMIs (i) e (ii):

$$(i) \quad A^T P A - P \prec \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

$$(ii) \quad \left[\begin{array}{cc} P & A^T G \\ G^T A & G + G^T - P \end{array} \right] \succ \mathbf{0},$$

sendo $P = P^T \succ \mathbf{0}$ e G uma matriz qualquer, sem restrição de simetria.

Esta técnica garante desvincular a variável de Lyapunov nas relações de produto cartesiano envolvendo a matriz dinâmica do sistema, permitindo formulações menos conservadoras para análises de estabilidade e sínteses de controladores robustos. \square

Demonstração: Considere o sistema de erro (3.2) representado em uma notação mais compacta que permite simplificar as manipulações algébricas desta demonstração:

$$\begin{cases} e_{k+1} = \tilde{A}_i e_k + \tilde{B}_i w_k, \\ z_k = \tilde{C}_i e_k + \tilde{D}_i w_k, \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo $\tilde{A}_i := (A_i - L_i C_i)$ e $\tilde{B}_i := (E_i - L_i D_i)$.

Tomando como base as condições de estabilidade robusta apresentadas em [43,44], propõe-se a seguinte função de Lyapunov dependente de parâmetro:

$$V(e_k, p_k) = e_k^T P(p_k) e_k, \quad P(p_k) \succ \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

sendo $P(p_k)$ parametrizada em função do chaveamento politópico (veja [2.5], pág. 25).

Definindo o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ conforme [45]:

$$\mathcal{I}_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0, \quad (3.9)$$

e a diferença finita de (3.8), como:

$$\Delta V(e_k, p_k) := V(e_{k+1}, p_{k+1}) - V(e_k, p_k), \quad (3.10)$$

a estabilidade e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ do sistema de erro (3.7) poderão ser assegurados, se a função quadrática:

$$\Delta V(e_k, p_k) + z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0, \quad (3.11)$$

for válida, considerando, sem perda de generalidade, condições iniciais nulas para o sistema de erro (3.7) para todo $(p_k \equiv i, p_{k+1} \equiv j) \in \{1, \dots, N\}$, $e_k \in \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathbb{R}^m$ em $\ell_2[0, \infty)$, e para um dado nível γ de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ .

Substituindo (3.7) e (3.8), considerando $P_i \equiv P(p_k)$ e $P_j \equiv P(p_{k+1})$, em (3.11) obtém-se:

$$(\tilde{A}_i e_k + \tilde{B}_i w_k)^T P_j (\tilde{A}_i e_k + \tilde{B}_i w_k) - e_k^T P_i e_k + z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0, \quad (3.12)$$

que pode ser representada em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} e_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \tilde{\Lambda} \begin{bmatrix} e_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0, \quad (3.13)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} := & \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P_j \tilde{A}_i - P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{A}_i^T P_j \tilde{B}_i + \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ \tilde{B}_i^T P_j \tilde{A}_i + \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{B}_i^T P_j \tilde{B}_i - \gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P_j \\ \tilde{B}_i^T P_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T & \tilde{B}_i \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P_j \\ \tilde{B}_i^T P_j \end{bmatrix} -P_j^{-1} \begin{bmatrix} P_j \tilde{A}_i^T & P_j \tilde{B}_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desenvolvendo (3.14) através do uso do Complemento de Schur ((3.4), caso (ii)), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -P_j & P_j \tilde{A}_i & P_j \tilde{B}_i \\ \tilde{A}_i^T P_j & -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ \tilde{B}_i^T P_j & \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.15)$$

A fim de aplicar a condição de relaxação (3.6) sobre a variável de Lyapunov P_j em (3.15) considere definir uma variável arbitrária $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Observe que a escolha $G = G^T = P_j$ não introduz conservadorismo ao processo (46). Multiplicando (3.15) à esquerda pela transformação de similaridade dada por $\text{diag}\{GP_j^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$, e à direita por sua transposta, $\text{diag}\{P_j^{-1}G^T, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -G P_j^{-1} G & G \tilde{A}_i & G \tilde{B}_i \\ \tilde{A}_i^T G^T & -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ \tilde{B}_i^T G^T & \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.16)$$

Sendo $P_j \succ \mathbf{0}$, então $(P_j - G) P^{-1} (P_j - G)^T \succeq \mathbf{0}$ implica diretamente na condição majorada $-(G + G^T - P_j) \succeq -G P^{-1} G^T$. Nestas condições de relaxação, expandindo \tilde{A}_i e \tilde{B}_i em (3.16), conforme a definição em (3.7), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P_j - G^T - G & G A_i - G L_i C_i & G E_i - G L_i D_i \\ A_i^T G^T - C_i^T L_i^T G^T & -P_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & \tilde{C}_i^T \tilde{D}_i \\ E_i^T G^T - D_i^T L_i^T G^T & \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.17)$$

Por fim, realizando a linearização da desigualdade matricial (3.17) através das mudanças de variáveis $F_i \equiv V L_i$ e $\delta \equiv \gamma^2$, obtém-se as restrições LMIs apresentadas no problema de otimização (3.3).

Dessa forma, conclui-se a demonstração. \square

4 Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno para Sincronização

Esta abordagem aplica-se à sincronização de sistemas mestre-escravo representados através da descrição nebulosa Takagi-Sugeno apresentada na Seção 2.1.3. Considera-se no desenvolvimento a existência de sinais exógenos que possam corromper os estados e as saídas do sistema mestre. O índice de desempenho \mathcal{H}_∞ novamente será adotado como métrica dos efeitos de degradação que comprometem a qualidade da sincronização.

Considere as seguintes representações em espaço de estados para a descrição nebulosa Takagi-Sugeno dos sistemas mestre e escravo:

$$\begin{aligned} \text{Mestre} \quad & \begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k)(A_i x_k + E_i w_k), \\ y_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k)(C_i x_k + D_i w_k), \end{cases} \\ \text{Escravo} \quad & \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) A_i \hat{x}_k + u_k, \\ \hat{y}_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) C_i \hat{x}_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo $\alpha_i(p_k)$ os coeficientes de ponderação dos modelos de dinâmica local. Demais matrizes e sinais seguem as mesmas descrições apresentadas anteriormente.

O desenvolvimento a ser apresentado busca determinar uma lei de controle baseada no princípio de compensação paralela distribuída (PDC) proposto em [37,47] que garanta a sincronização prática (veja Def. 1, pág. 22) entre os sistemas mestre e escravo, com a seguinte implementação:

$$u_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) L_i (y_k - \hat{y}_k), \quad (4.2)$$

em que $L_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ representa o ganho de sincronização do i -ésimo modelo local.

Analisando a lei de controle (4.2) observa-se que o sinal controle é resultante de uma combinação ponderada dos desvios observados entre as saídas dos sistemas mestre e escravo, que por sua vez são sinais gerados a partir de combinações nebulosas:

$$u_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) L_i \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) (C_j x_k + D_j w_k) - \sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) C_j \hat{x}_k \right). \quad (4.3)$$

A condição necessária para que a síntese da lei de controle (4.2) será realizável impõe que os sistemas mestre e escravo adotem variáveis premissas comuns. Uma interpretação

prática desta hipótese seria supor que os sistemas mestre e escravo mantêm comportamentos dinâmicos coerentes (aproximadas e suaves) durante a operação, garantindo a validade do mecanismo de inferência nebuloso.

Definindo o erro sincronização como a diferença entre os estados dos sistemas mestre e escravo (4.1), e considerando o sinal de controle de sincronização (4.3), o sistema de erro de sincronização pode ser representado como:

$$\text{Erro} \quad \begin{cases} e_{k+1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) \{ (A_i - L_i C_j) e_k + (E_i - L_i D_j) w_k \}, \\ z_k = \sum_{i=1}^r \alpha_i(p_k) (\tilde{C}_i e_k + \tilde{D}_i w_k). \end{cases} \quad (4.4)$$

A seguir serão apresentados os teoremas desenvolvidos para a análise de estabilidade do sistema de erro de sincronização (4.4) e para a síntese dos ganhos de sincronização (4.2). Este desenvolvimento estende os resultados apresentados em [22] com a inclusão das formulações de garantia de desempenho robusto \mathcal{H}_∞ .

Nota 2. A nomenclatura utilizada neste desenvolvimento procura ser idêntica àquela empregada anteriormente na Abordagem Poliquadrática, e será omitida quando não causar grandes dificuldades para o entendimento do texto.

Teorema 2. *Suponha conhecidas as matrizes de ganho de sincronização L_i , $i \in \{1, \dots, N\}$. O sistema de erro de sincronização (4.4) será assintoticamente estável e terá o mínimo nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma \equiv \sqrt{\delta}$, caso o seguinte problema de otimização seja factível:*

$$\begin{cases} \text{minimizar } \delta \\ \delta, P, T_{ijh}, R_{ij}, S_{ijh} \\ \text{sujeito a} \quad \begin{cases} K_h \prec 0, \quad P \succ 0, \quad T_{ijh} \succeq 0, \\ \forall (i, j, h) \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad i < j. \end{cases} \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo

$$K_h := \begin{bmatrix} Q_1 - Z_{1h} & Q_{12} + M_{12h} & \cdots & Q_{1r} + M_{1Nh} \\ Q_{12} + M_{21h} & Q_2 - Z_{2h} & \cdots & Q_{2N} + M_{2Nh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1N} + M_{N1h} & Q_{2N} + M_{r2h} & \cdots & Q_N - Z_{Nh} \end{bmatrix},$$

$$Q_i := \begin{bmatrix} -P & \tilde{A}_{ii}^T P & 0 & \tilde{C}_i^T \\ P\tilde{A}_{ii} & -P & P\tilde{B}_{ii} & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{ii}^T P & -\delta I & \tilde{D}_i^T \\ \tilde{C}_i & 0 & \tilde{D}_i & -I \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &:= A_i - L_i C_j, \\ \tilde{B}_{ij} &:= E_i - L_i D_j, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$Q_{ij} := \begin{bmatrix} -P & \Omega_{ij}^T P & 0 & \Gamma_{ij}^T \\ P\Omega_{ij} & -P & P\Pi_{ij} & 0 \\ 0 & \Pi_{ij}^T P & -\delta I & \Upsilon_{ij}^T \\ \Gamma_{ij} & 0 & \Upsilon_{ij} & -I \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Omega_{ij} &:= \frac{\tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ji}}{2}, \\ \Pi_{ij} &:= \frac{\tilde{B}_{ij} + \tilde{B}_{ji}}{2}, \\ \Gamma_{ij} &:= \frac{\tilde{C}_i + \tilde{C}_j}{2}, \\ \Upsilon_{ij} &:= \frac{\tilde{D}_i + \tilde{D}_j}{2}. \end{aligned}$$

tal que

$$M_{ijh} = \begin{cases} T_{ijh} + W_{ijh} + S_{ijh} - S_{ijh}^T & \text{se } i < j \\ T_{jih} + W_{jih} - S_{jih} + S_{jih}^T & \text{se } i > j \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$W_{ijh} = \begin{cases} R_{ij}, & \text{se } i = h \text{ ou } j = h \\ 0, & \text{se } i \neq h \text{ e } j \neq h \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_{ih} = \begin{cases} R_{ih}, & \text{se } i < h \\ R_{hi}, & \text{se } i > h \\ 0, & \text{se } i = h \end{cases}. \quad (4.8)$$

Demonstração: Para demonstrar que o problema de otimização (4.20) garante a estabilidade do sistema de erro de sincronização (4.4) e o mínimo nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ , considere a seguinte candidata à função de Lyapunov:

$$V(e_k) = e_k^T P e_k, \quad (4.9)$$

com a diferença finita definida por:

$$\Delta V(e_k) := e_{k+1}^T P e_{k+1} - e_k^T P e_k. \quad (4.10)$$

Definindo o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ conforme (4.5):

$$\mathcal{I}_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0, \quad (4.11)$$

e considerando condições iniciais nulas para o sistema de erro (4.4), pode-se estabelecer:

$$\Delta V(e_k) + z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0. \quad (4.12)$$

Adotando a notação simplificada:

$$A_i(\alpha) := \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) A_i, \quad (4.13)$$

que também se aplica às demais matrizes do problema: $E_i, L_i, C_j, D_j, \tilde{C}_i$ e \tilde{D}_i ; e considerando as seguintes propriedades algébricas envolvendo ponderações nebulosas normalizadas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) \sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) \right) \alpha_j(p_k) = \sum_{j=1}^N 1 \alpha_j(p_k) = 1, \end{aligned} \quad (4.14)$$

o sistema de erro de sincronização (4.4) poderá ser reescrito como:

$$\text{Erro} \quad \begin{cases} e_{k+1} &= \tilde{A}_{ij}(\alpha) e_k + \tilde{B}_{ij}(\alpha) w_k, \\ z_k &= \tilde{C}_i(\alpha) e_k + \tilde{D}_i(\alpha) w_k, \end{cases} \quad (4.15)$$

sendo $\tilde{A}_{ij}(\alpha) := A_i(\alpha) - L_i(\alpha)C_j(\alpha)$ e $\tilde{B}_{ij}(\alpha) := E_i(\alpha) - L_i(\alpha)D_j(\alpha)$.

Substituindo (4.15) e (4.10) em (4.12), obtém-se a seguinte restrição quadrática:

$$\begin{bmatrix} e_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} e_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

sendo

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T P \tilde{A}_{ij}(\alpha) - P + \tilde{C}_i(\alpha)^T \tilde{C}_i(\alpha) & \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T P \tilde{B}_{ij}(\alpha) + \tilde{C}_i(\alpha)^T \tilde{D}_i(\alpha) \\ \tilde{B}_{ij}(\alpha)^T P \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T + \tilde{D}_i(\alpha)^T \tilde{C}_i(\alpha)^T & -\gamma^2 I + \tilde{B}_{ij}(\alpha)^T P \tilde{B}_{ij}(\alpha) + \tilde{D}_i(\alpha)^T \tilde{D}_i(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Complemento de Schur (Def. 2, pág. 34), a matriz Λ pode ser expandida:

$$\Lambda := \begin{bmatrix} -P & 0 & \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T P & \tilde{C}_i(\alpha)^T \\ 0 & -\gamma^2 I & \tilde{B}_{ij}(\alpha)^T P & \tilde{D}_i(\alpha)^T \\ P \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T & P \tilde{B}_{ij}(\alpha) & -P & 0 \\ \tilde{C}_i(\alpha) & \tilde{D}_i(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -P & \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T P & 0 & \tilde{C}_i(\alpha)^T \\ P \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T & -P & P \tilde{B}_{ij}(\alpha) & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{ij}(\alpha)^T P & -\gamma^2 I & \tilde{D}_i(\alpha)^T \\ \tilde{C}_i(\alpha) & 0 & \tilde{D}_i(\alpha) & -I \end{bmatrix}.$$

Observe que as transformações elementares sucessivas de troca entre as linhas $\Lambda_{(L2 \rightarrow L3)}$ e as colunas $\Lambda_{(C2 \rightarrow C3)}$ não alteram as propriedades de positividade desta matriz. Esta transformação é de natureza apenas estética.

Redefinindo Λ a fim de retornar à notação original de (4.13), tem-se:

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \Sigma_{ij}(-P) & \Sigma_{ij}(\tilde{A}_{ij}(\alpha)^T P) & 0 & \Sigma_{ij}(\tilde{C}_i(\alpha)^T) \\ \Sigma_{ij}(P \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T) & \Sigma_{ij}(-P) & \Sigma_{ij}(P \tilde{B}_{ij}(\alpha)) & 0 \\ 0 & \Sigma_{ij}(\tilde{B}_{ij}(\alpha)^T P) & \Sigma_{ij}(-\gamma^2 I) & \Sigma_{ij}(\tilde{D}_i(\alpha)^T) \\ \Sigma_{ij}(\tilde{C}_i(\alpha)) & 0 & \Sigma_{ij}(\tilde{D}_i(\alpha)) & \Sigma_{ij}(-I) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo $\Sigma_{ij}(\cdot) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k)(\cdot)$.

Considerando as propriedades algébricas (4.14) e a ilustração de uso da notação Σ_{ij} :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}(\alpha)^T &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) A_i(\alpha) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) L_i(\alpha) \sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) C_j(\alpha) \\ &\equiv \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) A_i(\alpha) \right) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(p_k) L_i(\alpha) C_j(\alpha) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) A_i(\alpha) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) L_i(\alpha) C_j(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) (A_i(\alpha) - L_i(\alpha) C_j(\alpha)) \\ &\triangleq \Sigma_{ij} (A_i(\alpha) - L_i(\alpha) C_j(\alpha)), \end{aligned}$$

pode-se, sem perda de validade, impor a utilização de índices comuns para os termos da matriz Λ , de forma a descrevê-la como um somatório de matrizes:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) \begin{bmatrix} -P & \tilde{B}_{ij}^T P & 0 & \tilde{C}_i^T \\ P \tilde{B}_{ij} & -P & P \tilde{B}_{ij} & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{ij}^T P & -\gamma^2 I & \tilde{D}_i^T \\ \tilde{C}_i & 0 & \tilde{D}_i & -I \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Empregando as condições de relaxação propostas em [22], considere a seguinte representação particionada da matriz Λ , em relação aos seus termos indexados:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(p_k) Q_i + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) Q_{ij}, \quad (4.19)$$

sendo Q_i e Q_{ij} matrizes definidas conforme apresentado em (4.6).

Considere a validade das seguintes relações algébricas:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(p_k) Q_i + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) Q_{ij} \right) \\ &= \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(p_k) Q_i + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) \left(Q_{ij} + \left(\frac{S_{ijh} - S_{ijh}^T}{2} \right) + \left(\frac{S_{ijh}^T - S_{ijh}}{2} \right) \right) \right) \preceq \tilde{\Lambda}. \\ \tilde{\Lambda} &= \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(p_k) Q_i + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i(p_k) \alpha_j(p_k) \left(Q_{ij} + \left(\frac{S_{ijh} - S_{ijh}^T}{2} \right) + \left(\frac{S_{ijh}^T - S_{ijh}}{2} \right) + T_{ijh} \right) \right) \\ &= \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right] \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} + T_{12h} + (S_{12h} - S_{12h}^T) & \cdots & Q_{1P} + T_{1Ph} + (S_{1Ph} - S_{1Ph}^T) \\ Q_{12} + T_{12h} + (S_{12h}^T - S_{12h}) & Q_2 & \cdots & Q_{2P} + T_{2Ph} + (S_{2Ph} - S_{2Ph}^T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1P} + T_{1Ph} + (S_{1Ph}^T - S_{1Ph}) & Q_{2r} + T_{2rh} + (S_{2rh} - S_{2rh}^T) & \cdots & Q_P \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I} \\ \alpha_2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ \alpha_N \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right] \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) \Theta_h \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right]^T \\ &\equiv \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right] \sum_{h=1}^N \alpha_h(p_k) (\Theta_h + \mathcal{H}(a)) \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right]^T, \end{aligned}$$

sendo S_{ijh} matrizes arbitrárias¹, T_{ijh} matrizes simétricas semidefinidas positivas e $\mathcal{H}(a)$ uma matriz de efeito quadrático nulo² definida em conformidade ao (Lemma 1) em [22].

Definindo $K_h := (\Theta_h + \mathcal{H}(a))$ conforme (4.6), a factibilidade das desigualdades matriciais $K_h \prec 0$, na solução do problema (4.20), implica em $\Lambda \prec 0$, o que garante a estabilidade e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ ao sistema de erro sincronização (4.15).

Sendo o problema de otimização (4.20) convexo e linear nas suas variáveis e restrições, a factibilidade das LMIs asseguram o valor mínimo do nível γ de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ .

Dessa forma, conclui-se a demonstração. \square

¹ Observe que $S := S_{ijh} - S_{ijh}^T$ define uma matriz skew: $S = -S^T$ e $x^T S x = \mathbf{0}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

² O termo faz alusão à propriedade $\left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right] \mathcal{H}(a) \left[\alpha_1 \mathbf{I} \quad \alpha_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \alpha_N \mathbf{I} \right]^T = \mathbf{0}$.

Nota 3. As condições de análise de estabilidade propostas nos trabalhos [22, 48] são fundamentadas no uso da matriz de relaxação:

$$\mathcal{H}(a) := \begin{bmatrix} -\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N a_j R_{1j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^N a_j R_{j1} & (a_1 + a_2)\frac{1}{2}R_{12} & \cdots & (a_1 + a_N)\frac{1}{2}R_{1N} \\ (a_1 + a_2)\frac{1}{2}R_{12} & -\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N a_j R_{2j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^N a_j R_{j2} & \cdots & (a_2 + a_N)\frac{1}{2}R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1 + a_N)\frac{1}{2}R_{1N} & (a_2 + a_N)\frac{1}{2}R_{2N} & \cdots & -\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N a_j R_{Nj} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^N a_j R_{jN} \end{bmatrix},$$

sendo $R_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas arbitrárias, a_i ponderações nebulosas normalizadas, $\alpha_i(p_k) \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i(p_k) = 1$, $p_k = [p_k^1 \ p_k^2 \ \cdots \ p_k^N]$ um vetor de variáveis premissas, $a = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_N]^T$ um vetor variáveis de ponderação.

Sob estas condições de definição é possível mostrar (veja *Prova do Lema 1* - Apêndice A em [22]) que a matriz $\mathcal{H}(a)$ apresenta a seguinte propriedade algébrica de nulidade:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I} & \alpha_2 \mathbf{I} & \cdots & \alpha_N \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{H}(a) \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{I} & \alpha_2 \mathbf{I} & \cdots & \alpha_N \mathbf{I} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}.$$

Nesse trabalho os termos da matriz $\mathcal{H}(a)$ foram incorporados na definição de K_h em (4.6) através das variáveis definidas em (4.7) e (4.8). O sistema de indexação aqui adotado é compatível à aquele utilizado em [22], mas mantém distinção que facilita a programação de restrições LMIs para resolução em softwares de otimização convexa. \square

O Teorema apresentado a seguir estabelece as condições de síntese dos ganhos de sincronização L_i em (4.2) que garantem estabilidade e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ ao sistema de erro de sincronização (4.4).

Teorema 3. Considere o sistema de erro (4.4). Se o seguinte problema é factível

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \delta \\ \delta, P, T_{ijh}, R_{ij}, S_{ijh}, X_i \\ \text{sujeito a} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_h < 0, \quad P \succ 0, \quad T_{ijh} \succeq 0, \\ \forall (i, j, h) \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad i < j. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

sendo

$$\tilde{K}_h := \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 - Z_{1h} & \tilde{Q}_{12} + M_{12h} & \cdots & \tilde{Q}_{1r} + M_{1Nh} \\ \tilde{Q}_{12} + M_{21h} & \tilde{Q}_2 - Z_{2h} & \cdots & \tilde{Q}_{2N} + M_{2Nh} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}_{1N} + M_{N1h} & \tilde{Q}_{2N} + M_{r2h} & \cdots & \tilde{Q}_N - Z_{Nh} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_i := \begin{bmatrix} -P & Y_{ii}^T & 0 & \tilde{C}_i^T \\ Y_{ii} & -P & J_{ii} & 0 \\ 0 & J_{ii}^T & -\delta I & \tilde{D}_i^T \\ \tilde{C}_i & 0 & \tilde{D}_i & -I \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} Y_{ij} &:= PA_i - X_i C_j, \\ J_{ij} &:= PE_i - X_i D_j, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\tilde{Q}_{ij} := \begin{bmatrix} -P & \tilde{\Omega}_{ij}^T & 0 & \Gamma_{ij}^T \\ \tilde{\Omega}_{ij} & -P & \tilde{\Pi}_{ij} & 0 \\ 0 & \tilde{\Pi}_{ij}^T & -\delta I & \Upsilon_{ij}^T \\ \Gamma_{ij} & 0 & \Upsilon_{ij} & -I \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{\Omega}_{ij} &:= \frac{Y_{ij} + Y_{ji}}{2}, \\ \tilde{\Pi}_{ij} &:= \frac{J_{ij} + J_{ji}}{2}, \\ \Gamma_{ij} &:= \frac{\tilde{C}_i + \tilde{C}_j}{2}, \\ \Upsilon_{ij} &:= \frac{\tilde{D}_i + \tilde{D}_j}{2}. \end{aligned}$$

M_{ijh} e Z_{ih} seguem a mesma definição (4.7) e (4.8) da pág. 39.

então os ganhos de sincronização que garantem o mínimo valor do índice de desempenho \mathcal{H}_∞ são dados por $L_i = P^{-1}X_i$.

Demonstração: A demonstração do Teorema 3 será omitida uma vez que esta decorre de forma imediata do Teorema 2, necessitando apenas que se realize a linearização por mudança de variável, dada por $X_i := PL_i$. \square

5 Procedimento de Projeto

Neste capítulo será executado o procedimento de projeto baseado na metodologia proposta na Seção 2.3. A aplicação *benchmark* descrita na Seção 2.4 será solucionada com base neste procedimento de projeto, contribuindo para a ilustração de uso das técnicas de síntese desenvolvidas nos Capítulos 3 e 4.

O problema de transmissão segura de informação que será investigado a seguir foi introduzido na Seção 2.4.2. Em síntese deseja-se projetar controladores de sincronização para o sistema de comunicação do tipo mestre-escravo mostrado na (Fig. 5, pág. 31), que se baseia em circuitos osciladores de Chua.

O contexto dessa aplicação na área de telecomunicações foi amplamente abordado nos primeiros trabalhos técnicos envolvendo a sincronização de sistemas caóticos. Inúmeras estratégias foram desenvolvidas com a proposta de se garantir a segurança de inviolabilidade à informação transmitida. Nesse trabalho o problema de transmissão segura de informação será explorado como *benchmark* para as abordagens propostas para síntese de controladores de sincronização, não se atendo a análises e discussões aprofundadas que dizem respeito ao grau de segurança garantido na preservação da informação. Além disso, a transmissão de informação será avaliada apenas em níveis qualitativos e comparativos.

5.1 Plataforma Experimental PCChua

Considera-se neste desenvolvimento a utilização do circuito oscilador de Chua apresentado em [3]. Este circuito, denominado PCChua – Protótipo para Controle do Circuito de Chua, permite a implementação de estratégias de controle e de sincronização de dinâmicas caóticas em uma implementação eletrônica do circuito oscilador de Chua. A concepção construtiva dessa plataforma experimental faz uso de um microcomputador¹ operando como controlador de sincronização genérico, capaz de implementar estratégias de controle diversas, mediante a sua programação em Linguagem C.

Para contornar problemas relacionados ao cumprimento de restrições temporais severas em processamento de tempo real, adota-se nessa plataforma a implementação de um circuito oscilador de Chua com indutor emulado² por circuito eletrônico ativo. Esta alternativa construtiva permite ao circuito oscilador funcionar a baixas frequências sem comprometer a variedade e riqueza dinâmica do oscilador caótico de Chua.

A plataforma PCChua é gerenciada através de um software aplicativo dedicado

¹ Computador compatível com arquitetura IBM-PC.

² O termo *indutor simulado* também tem sido empregado para se referir a este tipo de circuito.

capaz de gerar os sinais de atuação para o circuito oscilador, realizar medições, registros e exibições simultâneas dos sinais adquiridos, executando em um sistema operacional Linux adaptado para aplicações de tempo real.

O primeiro passo de aplicação da metodologia de projeto consistirá na identificação dos parâmetros dos circuitos osciladores de Chua exibidos na figura (Fig. 5, pág. 31).

Utilizando a abordagem apresentada em [49], onde os parâmetros dos sistemas são determinados recursivamente, através de um algoritmo baseado no Filtro de Kalman Unscented, pôde-se estimar os valores listados na Tabela 1, para aos parâmetros³ do circuito oscilador da plataforma PCChua.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
R	1673,6 Ω	m_0	-0,801 mS
$C1$	30,14 μF	m_1	-0,365 mS
$C2$	185,66 μF	B_p	1,74 V
L	52,28 H	d	6.0 V
rl	0 Ω		

Tabela 1 – Parâmetros estimados para o circuito oscilador do PCChua.

O segundo passo da metodologia de projeto consiste na discretização dos sistemas transmissor (2.16) e receptor (2.17), e na representação destes sistemas em um formato que seja adequado às técnicas de projeto descritas nos capítulos 3 e 4.

O passo final da metodologia será executar o procedimento de síntese através do uso de algum pacote computacional voltado a otimização convexa com restrições por LMIs.

A seguir serão apresentados os procedimentos de projeto específicos relativos às abordagens Poliquadrática e Fuzzy Takagi-Sugeno desenvolvidas nesse trabalho.

Nota 4. Destaca-se que a plataforma PCChua implementa apenas um circuito oscilador de Chua. Os experimentos nela realizados são divididos em duas fases: (i) execução de transmissão - nesta fase o circuito oscilador será excitado com entradas exógenas (podendo, inclusive, ser utilizada uma entrada excitação nula), fazendo-se o registro digitalizado dos sinais de saída de medição do oscilador; (ii) execução de recepção/sincronismo - nesta segunda fase o oscilador será regido pela estratégia de controle sob avaliação considerando um dado sinal de referência para a sincronização (em geral utiliza-se o sinal registrado no experimento de transmissão). Ainda nesta fase registra-se em memória a evolução temporal dos sinais de saída de medição e de controle, de forma a permitir que sejam feitas análises *offline* do processo de sincronização e de recuperação da informação transmitida.

³ Neste trabalho m_0 é definido como a condutância do diodo de Chua para v_{C1} em torno de zero.

5.1.1 Solução Baseada na Abordagem Poliquadrática

Aplicando o método de discretização apresentado em [24] obtém-se a seguinte representação linear por partes para os sistemas transmissor e receptor:

$$\begin{aligned} \text{Transmissor} \quad & \begin{cases} X_{k+1}^m = A_i X_k^m + B_i + \underbrace{E_i w_k}_{\iota(k)} \\ y_k^m = C_i X_k^m + D_i w_k \end{cases} \\ \text{Receptor} \quad & \begin{cases} X_{k+1}^e = A_i X_k^e + B_i + u_k \\ y_k^e = C_i X_k^e \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo $\forall i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC1) - T m_0/C1 & T/(RC1) & 0 \\ T/(RC2) & 1 - T/(RC2) & T/C2 \\ 0 & -T/L & 1 - T rl/L \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC1) - T m_1/C1 & T/(RC1) & 0 \\ T/(RC2) & 1 - T/(RC2) & T/C2 \\ 0 & -T/L & 1 - T rl/L \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC1) - T m_0/C1 & T/(RC1) & 0 \\ T/(RC2) & 1 - T/(RC2) & T/C2 \\ 0 & -T/L & 1 - T rl/L \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} +T B_p(m_1 - m_0)/C1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -T B_p(m_1 - m_0)/C1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ E_i &= \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad D_i = 0.0001, \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta representação descreve a dinâmica dos circuitos osciladores de Chua considerando (3.1), na pág. 33, descrito através de três modelos lineares.

Aplicando o Teorema 1 ao sistema de sincronização (5.1), sendo considerados os valores paramétricos apresentados na Tabela 1, período de amostragem ($T := 10$ ms) e ganho de sincronização único ($K := L_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$), sintetiza-se o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 99,45 \times 10^{-3} \\ 2,93 \times 10^{-3} \\ 51,50 \times 10^{-9} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

que garante o nível $\gamma = 9,70 \times 10^{-4}$ para a atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ .

A adoção de um controlador de sincronização com ganho, K , único⁴ na resolução do Teorema 1 permite simplificar a implementação experimental do sistema de comunicação, pois dispensa a necessidade de transmissão do índice de chaveamento (veja (2.5), pág. 25) ao sistema receptor. O custo desta escolha técnica está relacionado ao potencial aumento de conservadorismo na solução do problema de otimização (3.3), uma vez que a redução das variáveis de otimização implica na redução dos graus de liberdade do problema.

Os vetores de peso E_i e D_i foram definidos com base nas amplitudes do sinal de informação a ser transmitida $i(t)$ e do sinal de ruído $\eta(t)$ presente no canal de transmissão. Considerou-se apenas a aplicação de informação na direção da variável de estado $v_{C1}(t)$ do sistema transmissor. Observe que o termo $\iota(k)$ assume o papel do sinal de informação a ser transmitida em instantes de tempo discreto, portanto $(\iota(k) \equiv \frac{T}{C1}i(kT))$.

No contexto de comunicação segura a garantia de estabilização e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ tem o propósito duplo de permitir maior proteção a informação a ser transmitida, bem como assegurar melhores condições para a sua recuperação. Isso é possível uma vez que a estabilização robusta \mathcal{H}_∞ do sistema de erro de sincronização (3.2) tende a minimizar o efeito do sinal de entrada exógena ‘ w_k ’ sobre o sinal de desempenho do erro de sincronização ‘ e_k ’. Como consequência, o sinal de informação $i(t)$ tem sua influência minimizada sobre o sinal transmitido $y^m(t)$ em modulação caótica.

A matrizes de ponderação \tilde{C}_i e \tilde{D}_i foram definidas de forma conveniente a se mensurar todas das componentes do sinal de erro de sincronização.

A fim de se implementar o mecanismo de comunicação na plataforma PCChua, os ganhos de sincronização (5.2) devem ser transformados de forma a incluir os efeitos dos seguradores de ordem zero dos atuadores desta plataforma. Com este cômputo garante-se que os sinais de compensação estarão compatíveis com o sistema (2.17).

Considere os ganhos de sincronização para uso na plataforma PCChua:

$$K^{PCChua} := \begin{bmatrix} C1 K(1)/T \\ C2 K(2)/T \\ L K(3)/T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,99 \times 10^{-3} \\ 0,54 \times 10^{-3} \\ 2,69 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

e as respectivas leis de controle de sincronização:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= K^{PCChua}(1) (y_1^m(t) - y_1^e(t)), \\ u_2(t) &= K^{PCChua}(2) (y_2^m(t) - y_2^e(t)), \\ u_3(t) &= K^{PCChua}(3) (y_3^m(t) - y_3^e(t)). \end{aligned} \quad (5.4)$$

⁴ O controlador único pode ser obtido impondo-se ($F_i := F, \forall i \in \{1, 2, 3\}$) nas LMIs do Teorema 1.

5.1.2 Solução Baseada na Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno

Esta solução tem início com a definição dos pontos de operação que deverão ser considerados no processo de linearização dos sistemas transmissor e receptor, em conformidade à representação nebulosa TS apresentada na Seção 2.1.3, pág. 25.

Considerando o típico comportamento da característica I-V do diodo de Chua (2.15), torna-se sugestivo estabelecer dois pontos de operação para os circuitos osciladores de Chua, um para baixas excursões de v_{C1} , e outro para excursões de mais alta amplitude.

Na Figura 6 duas funções lineares foram destacadas sobre a curva característica do diodo de Chua. Considere $Id_0(v_{C1})$ como a aproximação I-V para pequenas excursões e $Id_1(v_{C1})$ a aproximação para grandes excursões. Observe que estas escolhas são convenientes para a construção de uma representação nebulosa TS descrita com combinação de dois modelos lineares locais.

A curva $Id_0(v_{C1})$ é caracterizada pela própria condutância do diodo de Chua, enquanto a curva $Id_1(v_{C1})$ é uma aproximação para excursões em torno das tensões $\pm d$, assumindo que a tensão sobre o capacitor $C1$ seja limitada em $v_{C1} \in [-d, +d]$.

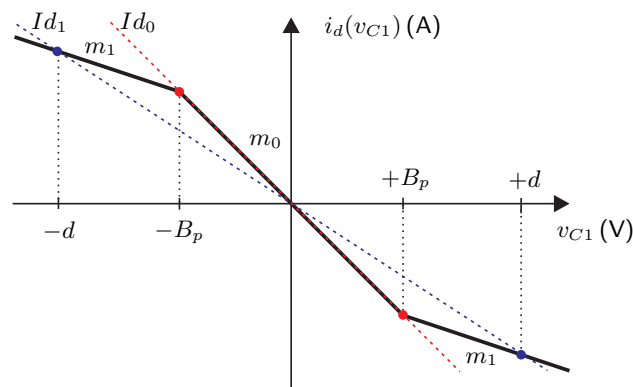


Figura 6 – Aproximação da curva característica do diodo de Chua.

Matematicamente $i_d(v_{C1})$ pode ser descrito como:

$$i_d(v_{C1}) \cong \begin{cases} Id_0(v_{C1}) = m_0 v_{C1}, & \text{Modelo } Id_0 \\ Id_1(v_{C1}) = m_e v_{C1}, \quad m_e := \left(m_1 + \frac{(m_0 - m_1)B_p}{d} \right), & \text{Modelo } Id_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Partindo destas considerações preliminares pode-se então estabelecer que apenas duas regras serão suficientes para a representação dos sistemas osciladores de Chua através da abordagem de modelamento via Takagi-Sugeno.

Substituindo (5.5) nos sistemas transmissor (2.16) e receptor (2.17) e aplicando a discretização conforme proposto em [24], obtém-se a seguinte representação nebulosa TS para o sistema de comunicação:

$$\begin{aligned} \text{Transmissor} \quad & \begin{cases} X_{k+1}^m = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(p_k)(A_i X_k^m + E_i w_k), \\ y_k^m = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(p_k)(C_i X_k^m + D_i w_k), \end{cases} \\ \text{Receptor} \quad & \begin{cases} X_{k+1}^e = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(p_k)(A_i X_k^e + u_k), \\ y_k^e = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(p_k)C_i X_k^e. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esta representação descreve a dinâmica dos circuitos osciladores de Chua através da combinação nebulosa TS de dois modelos lineares com a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC1) - T m_0/C1 & T/(RC1) & 0 \\ T/(RC2) & 1 - T/(RC2) & T/C2 \\ 0 & -T/L & 1 - T r l/L \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC1) - T m_e/C1 & T/(RC1) & 0 \\ T/(RC2) & 1 - T/(RC2) & T/C2 \\ 0 & -T/L & 1 - T r l/L \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As ponderações das regras nebulosas são definidas conforme apresentado em (2.9) e utilizam v_{C1} como variável premissa única. As funções de pertinência utilizadas serão aquelas propostas em [50] que garantem uma aproximação exata para o modelamento da característica I-V do diodo de Chua:

$$\text{Pertinências Fuzzy} \quad \begin{cases} w_1(v_{C1}) = \begin{cases} \left(\frac{-B_p v_{C1}}{d} - B_p \right) / \left(\left(1 - \frac{B_p}{d}\right) v_{C1} \right), & \text{p/ } v_{C1} \leq -B_p \\ 1, & -B_p < v_{C1} < +B_p \\ \left(\frac{-B_p v_{C1}}{d} + B_p \right) / \left(\left(1 - \frac{B_p}{d}\right) v_{C1} \right), & \text{p/ } v_{C1} \geq +B_p \end{cases} \\ w_2(v_{C1}) = 1 - w_1(v_{C1}) \end{cases} \quad (5.7)$$

A Figura 7 exibe o comportamento das funções de pertinência (5.7) definidas para o circuito oscilador da plataforma PCChua. A combinação das regras nebulosas realizadas fazendo uso destas funções de pertinência reproduz a característica I-V do diodo de Chua com um nível de erro desprezível.

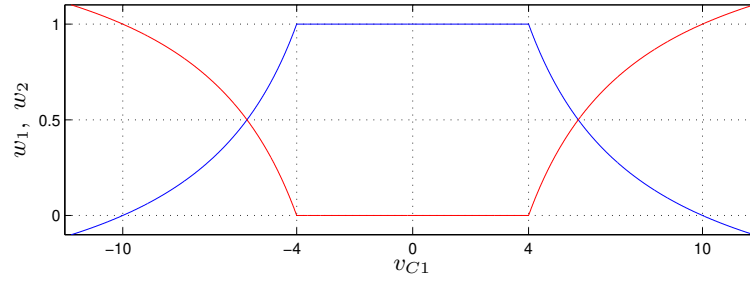


Figura 7 – Funções de pertinência definidas para $B_p = 1.74$ e $d = 10$.

Considere utilizar as mesmas definições feitas anteriormente para os vetores de peso das entradas exógenas e para as matrizes de ponderação do erro de sincronização:

$$E_i = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, D_i = 0.0001, \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Aplicando o Teorema 3 ao sistema (5.6), com a parametrização apresentada na Tabela 1, e as matrizes de ponderação (5.8), obtêm-se⁵ os seguintes ganhos de sincronização:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1,0668 \times 10^2 \\ 2,9186 \\ 5,4422 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 9,4710 \times 10^1 \\ 2,9188 \\ 5,4084 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

que garantem um nível de atenuação de distúrbios $\mathcal{H}_\infty \gamma = 9,06 \times 10^{-4}$.

Para a implementação do mecanismo de comunicação na plataforma PCChua, os ganhos de sincronização (5.9) deverão ser transformados tal como realizado em (5.3). Assim, os ganhos de sincronização para implementação na plataforma PCChua passam a ser definidos como:

$$L_1^{PCChua} := \begin{bmatrix} C1 L_1(1)/T \\ C2 L_1(2)/T \\ L L_1(3)/T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3215 \\ 0,0542 \\ 0,2845 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$L_2^{PCChua} := \begin{bmatrix} C1 L_2(1)/T \\ C2 L_2(2)/T \\ L L_2(3)/T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2855 \\ 0,0542 \\ 0,2828 \end{bmatrix}.$$

Por fim, assumindo que os osciladores mestre e escravo obedecem a uma mesma dinâmica, mesmo conjunto de regras e premissas, que as perturbações exógenas sejam

⁵ O pacote computacional *LMI Control Toolbox* - Matlab[®] foi utilizado na solução dos problemas de otimização convexa formulados nos teoremas deste trabalho.

aplicadas apenas na direção da variável de estado $v_{C1}(t)$ em (2.16) e, ainda, considerando que a variável de desempenho de sincronização ' z_k ' em (4.4), com os valores apresentados em (5.8), seja a soma de todas as componentes do erro de rastreamento, então o princípio (PDC) [2] poderá ser aplicado ao controlador de sincronização tipo Takagi-Sugeno (5.10) e os algoritmos das leis de controle de sincronização poderão ser programados para serem executados na plataforma PCChua.

6 Validação Experimental

Neste capítulo serão apresentados resultados experimentais realizados na plataforma PCChua, que foi introduzida na Seção 5.1. A preparação técnica para a realização destes experimentos foi desenvolvida no Capítulo 5, que resultou na síntese dos controladores de sincronização utilizados durante estes experimentos práticos. Objetiva-se que os resultados aqui apresentados contribuam de forma clara e objetiva em avaliações qualitativas e comparativas envolvendo as abordagens de síntese desenvolvidas nos Capítulos 3 e 4.

6.0.1 Resultados via Abordagem Poliquadrática

A série de experimentos práticos que serão apresentados a seguir dizem respeito ao Problema de Transmissão Segura de Informação proposto na Seção 2.4 como uma aplicação *benchmark*. Todos os experimentos foram realizados utilizando-se de uma mesma metodologia de execução, que pode ser sintetizada nos seguintes passos elementares:

- Selecionar os controladores de sincronização da abordagem poliquadrática em (5.3);
- Programar as leis de controle (5.4) no microcomputador controlador do PCChua;
- Realizar o experimento prático conforme a descrição apresentada na Nota 4, pág. 46.

6.0.1.1 Primeiro Experimento – Sinal Senoidal 1

Neste experimento um sinal de informação senoidal, com frequência 0,3 Hz e amplitude 0,12 mV, é aplicado no sistema oscilador PCChua via fonte de corrente controlada por tensão. A manipulação da corrente afeta diretamente a tensão sobre o capacitor C_1 , conforme ilustrado no sistema de comunicação da (Fig. 5, pág. 31).

O experimento tem início com a fase de modulação aditiva e registro do sinal de transmissão. A Figura 8 exibe o sinal de informação, $i(t)$, que é aplicado no oscilador mestre durante o intervalo de tempo de [30 a 90] segundos. Observa-se que o oscilador é mantido inativo até o instante de 15 segundos, quando é ativado e mantido em evolução livre de excitação (*free running*) até o início efetivo da modulação, no instante 30 segundos. A interrupção da modulação, bem como a desativação do oscilador segue um comportamento espelhado, que pode ser verificado na Figura 9, que exibe o registro temporal do sinal de saída, v_{C_1} , que será transmitido em um processo *offline* na fase 2 do experimento.

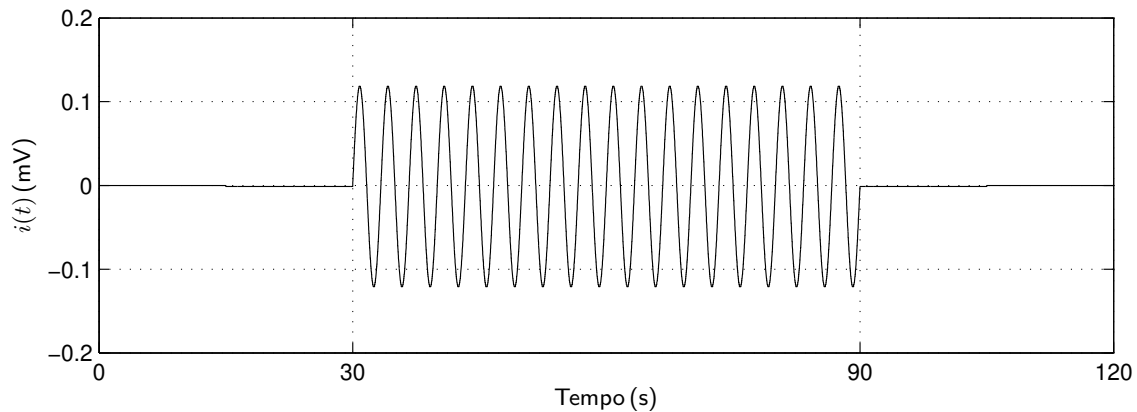


Figura 8 – [E1] Sinal de informação: $i(t) = 0,12 \sin(2 \pi 0,3 t)$ [mV]

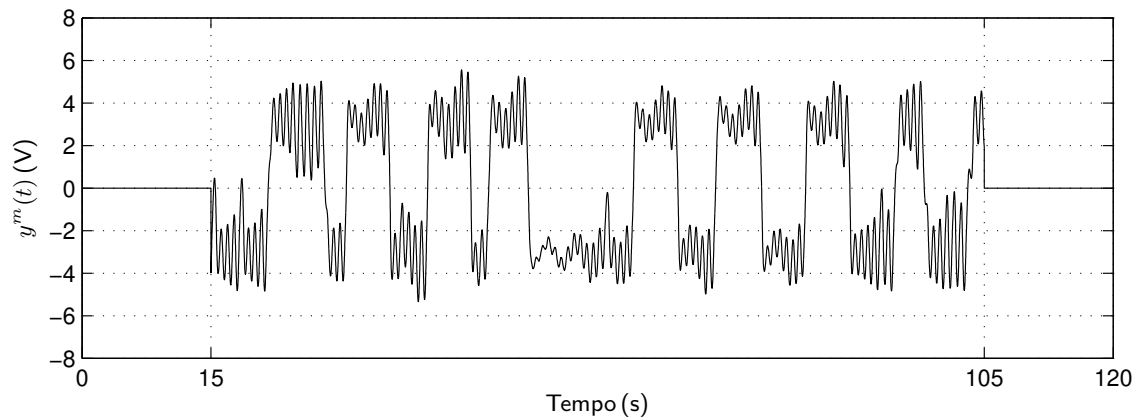


Figura 9 – [E1] Sinal transmitido.

Na segunda fase do experimento – fase de sincronização, o circuito oscilador é reinicializado e executa livremente por 15 segundos, quando então o sinal de controle exibido na Figura [10](#) entra em ação. Destaca-se que o efeito da informação transmitida só se manifesta efetivamente após transcorridos 30 segundos do experimento, o que é facilmente observável no padrão do sinal exibido nesta figura. O sinal de controle persiste em ação por mais 15 segundos após a extinção da informação modulante, aos 90 segundos, sendo portanto desativado no instante de 105 segundos. O registro de dados de medição e de controle permanecem sendo realizados até o instante de 120 segundos, quando o experimento é finalizado.

O erro de sincronização é mostrado na Figura [11](#). É importante destacar que até o instante de 15 seg. (idem após 105 seg.), o que se observa nesta figura é o valor complementar da saída de medição do oscilador escravo, uma vez que durante estes instantes de tempo a informação de referência para a sincronização (o sinal transmitido) permanece inativa.

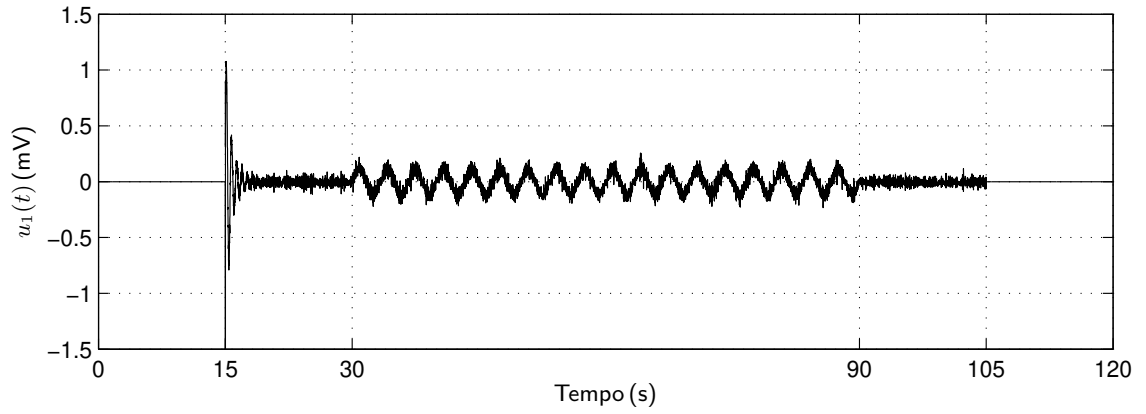


Figura 10 – [E1] Sinal de controle: componente $u_1(t)$.

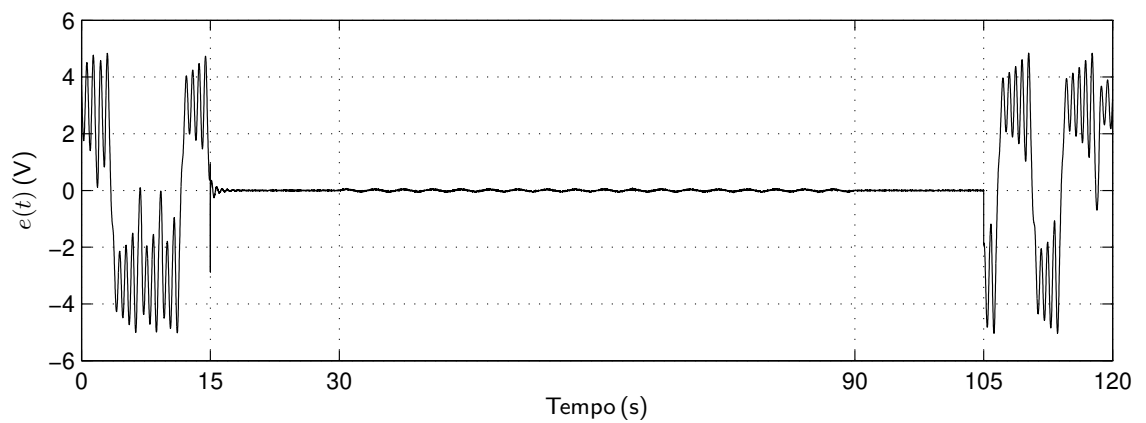
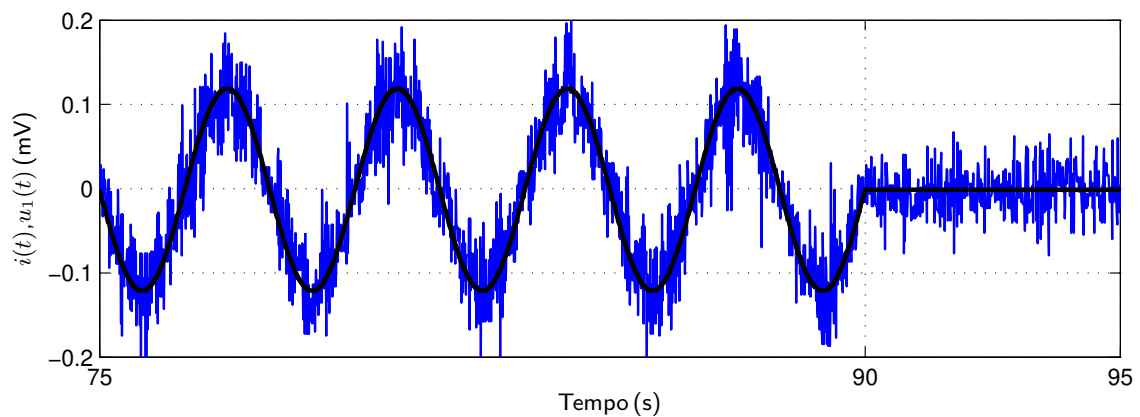
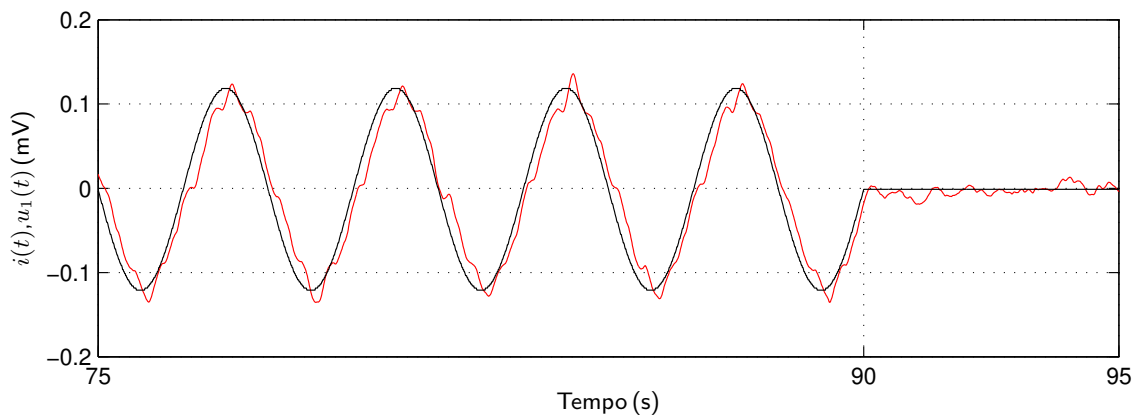


Figura 11 – [E1] Sinal de erro: $e(t) = y^m(t) - y^e(t)$.

A constatação de sucesso na recuperação da informação transmitida via princípio ITVC (veja Seção 2.4.2, pág. 30) é evidenciada na Figura 12, que exibe os sinais de informação transmitida e de sinal de controle (informação recuperada), sobrepostos com, e sem, pós-processamento de filtragem do sinal. O filtro implementado é do tipo Butterworth, passa-baixas, de segunda ordem, com frequência de corte $f_c = 2$ Hz. Observe que o filtro naturalmente introduz um defasamento ao sinal, mas este efeito em nada interfere nos processos de sincronização, uma vez que esta informação filtrada só está sendo utilizada para fins de exibição.



(a) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle $u_1(t)$ - azul



(b) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle filtrado $u_1(t)$ - vermelho

Figura 12 – [E1] Informação recuperada: (a) sem filtragem e (b) com filtragem.
(Filtro Butterworth: passa-baixas; segunda ordem; $f_c = 2$ Hz)

6.0.1.2 Segundo Experimento – Sinal Senoidal 2

Este experimento se propõe a avaliar o comportamento da sincronização em uma condição mais severa, sendo realizado com um sinal de informação com a frequência aumentada em dez vezes (x10 freq.) e com a amplitude duas vezes maior (x2 amplit.) que os valores utilizados no primeiro experimento: $i(t) = 0,24 \sin(2\pi 3,0t)$ [mV].

O procedimento experimental seguiu a mesma rotina relatada no experimento anterior. A Figura 13 exibe o sinal transmitido modulado com a informação de transmissão durante os instantes de 30 a 90 segundos. A Figura 14 exibe o comportamento do erro de sincronização. Nesta figura pouco se percebe o aumento na amplitude do sinal de erro, o que evidencia uma boa qualidade de sincronização. Observa-se que o aumento na amplitude do erro possivelmente seria mais perceptível caso a frequência do sinal de informação fosse mantida a mesma do experimento anterior, uma vez que circuito oscilador não deixa de apresentar um comportamento de banda limitada, apesar da sua dinâmica caótica tipo ruidosa. O sinal de controle de sincronização pode ser visto na Figura 15, enquanto a Figura 16 exibe os sinais de informação transmitida e recuperada. O filtro passa baixas utilizado no pós-processamento teve a sua frequência de corte aumentada para $f_c = 15$ Hz.

Observa-se que a hipótese de se impor maior grau de severidade à transmissão não se verificou neste experimento, uma vez que a sincronização apresentou, em níveis qualitativos, um ótimo desempenho.

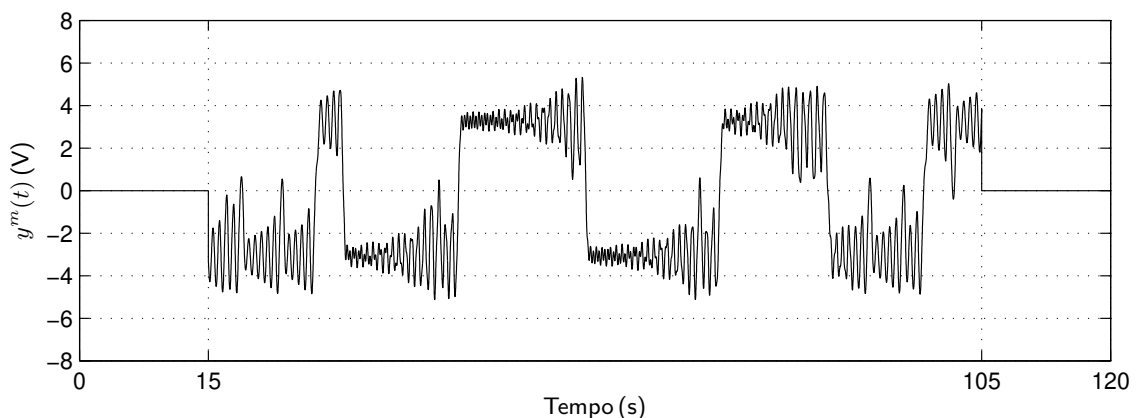


Figura 13 – [E2] Sinal transmitido.

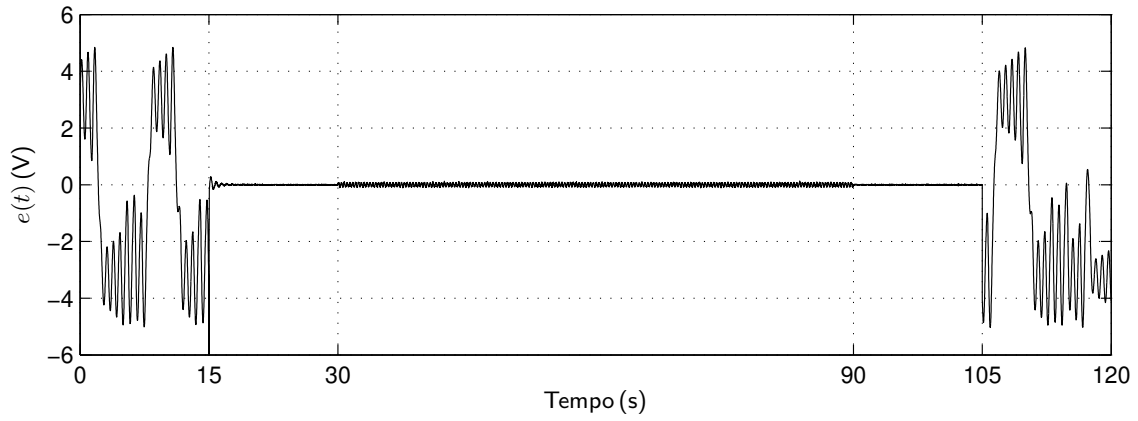


Figura 14 – [E2] Sinal de erro: $e(t) = y^m(t) - y^e(t)$.

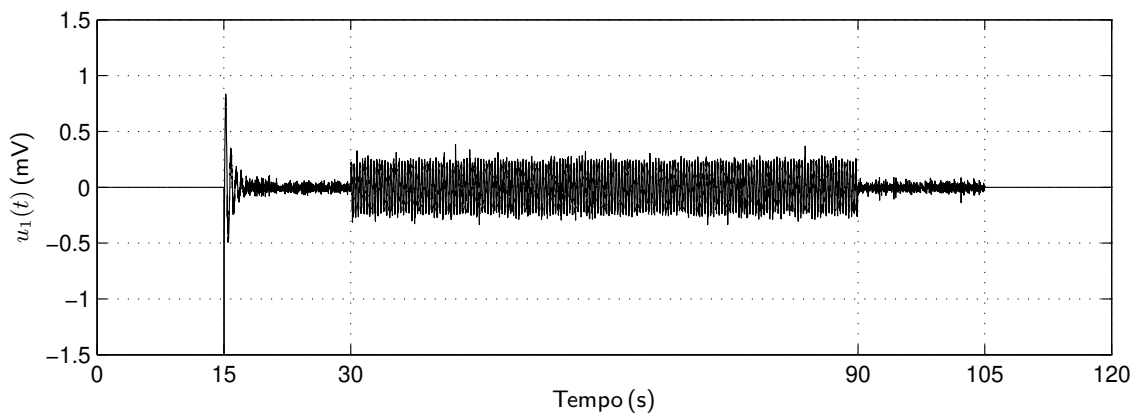
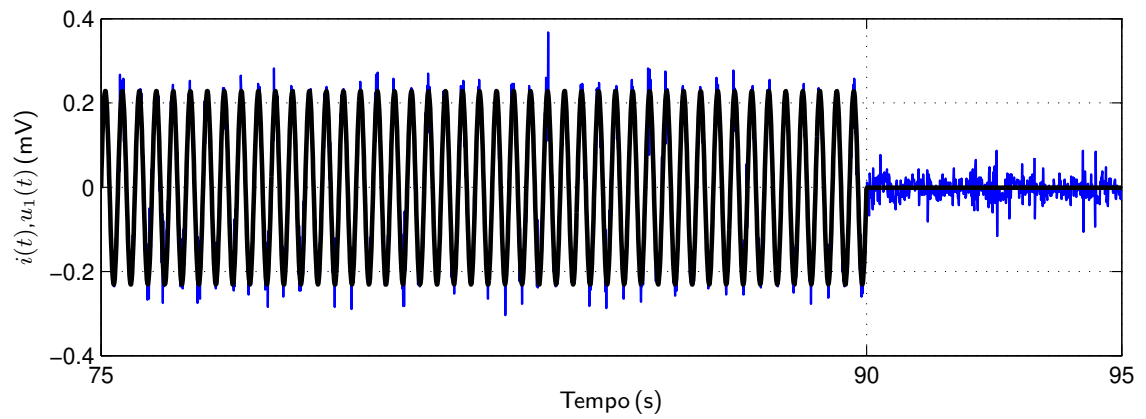
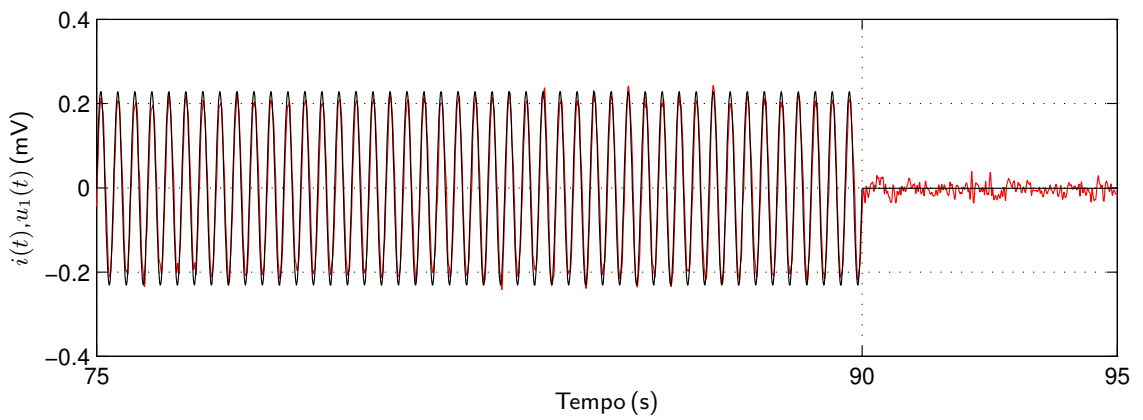


Figura 15 – [E2] Sinal de controle: componente $u_1(t)$.



(a) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle $u_1(t)$ - azul



(b) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle filtrado $u_1(t)$ - vermelho

Figura 16 – [E2] Informação recuperada: (a) sem filtragem e (b) com filtragem.
(Filtro Butterworth: passa-baixas; segunda ordem; $f_c = 15$ Hz)

6.0.1.3 Terceiro Experimento – Sinal de Forma Arbitrária 1

Neste último experimento realizado com base na abordagem de sincronização poli-quadrática buscou-se utilizar um sinal de informação arbitrária. Propôs-se a composição aditiva de sinais de forma de onda senoidal, quadrada e dente de serra, todos com 0,12 mV de amplitude e frequências respectivas de 0,40 Hz, 1,0 Hz e 1,50 Hz.

Novamente o procedimento seguiu a mesma rotina experimental anterior. O sinal transmitido pelo sistema mestre é exibido na Figura 17 e a Figura 18 exibe o sinal de erro de sincronização.

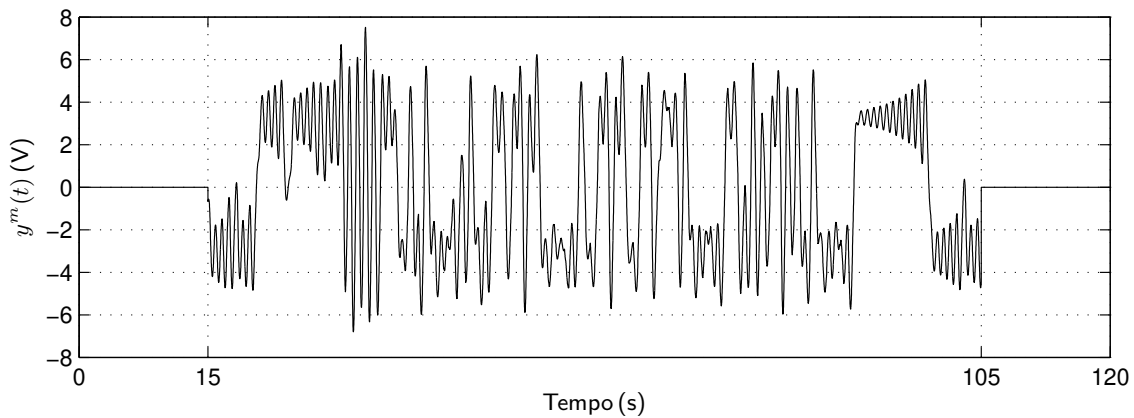


Figura 17 – [E3] Sinal transmitido.

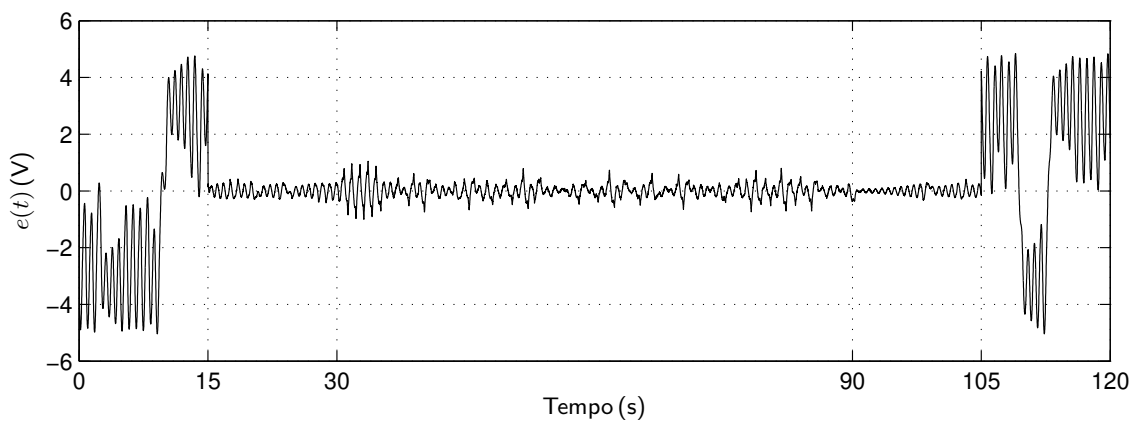
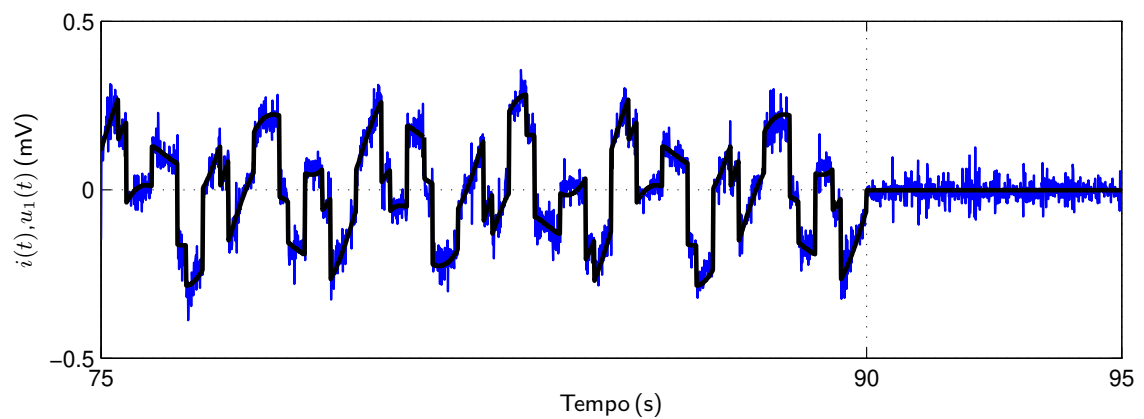


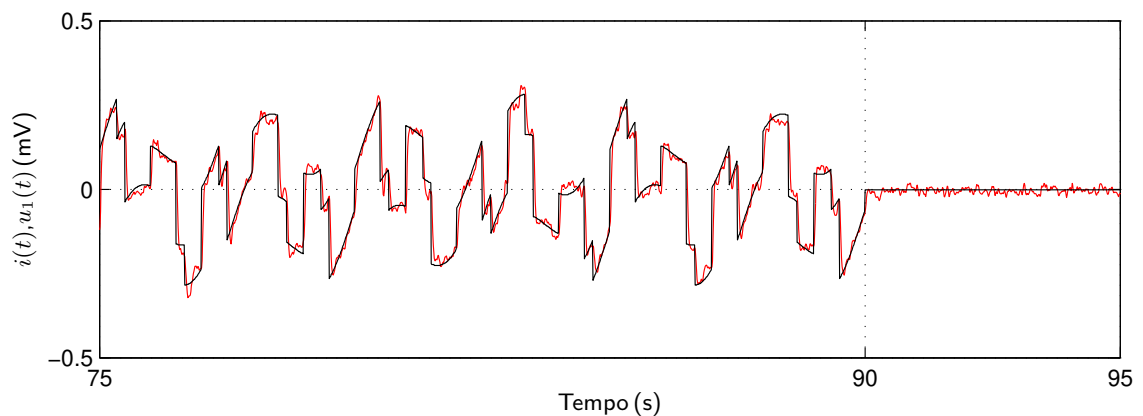
Figura 18 – [E3] Sinal de erro: $e(t) = y^m(t) - y^e(t)$.

Na Figura 19 o sinal de informação transmitida é exibido sobreposto ao sinal de controle de sincronização, este representa a informação demodulada via ITVC. Novamente o filtro Butterworth de pós-processamento teve a sua frequência de corte alterada: $f_c = 10$ Hz.

Visualmente pode-se constatar que a recuperação da informação transmitida foi bem sucedida, o que permite atestar que os controladores de sincronização, que foram sintetizados através da abordagem poliquadrática proposta no Capítulo 3, se mostraram bastante adequados ao uso como demoduladores de informação baseados em ITVC [25].



(a) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle $u_1(t)$ - azul



(b) Sinal de informação $i(t)$ - preto; Sinal de controle filtrado $u_1(t)$ - vermelho

Figura 19 – [E3] Informação recuperada: (a) sem filtragem e (b) com filtragem.
(Filtro Butterworth: passa-baixas; segunda ordem; $f_c = 10$ Hz)

6.0.2 Resultados via Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno

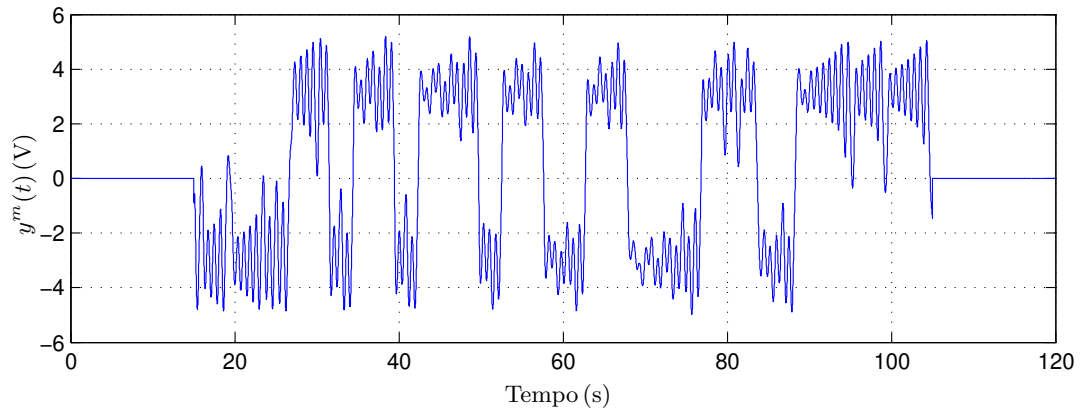
Os experimentos realizados com a abordagem nebulosa Takagi-Sugeno seguiram a mesma metodologia apresentada na Seção 6.0.1, com a devida consideração de se implementar as leis controle do PCChua baseadas em (5.10, pág. 51).

6.0.2.1 Quarto Experimento – Sinal Senoidal 3

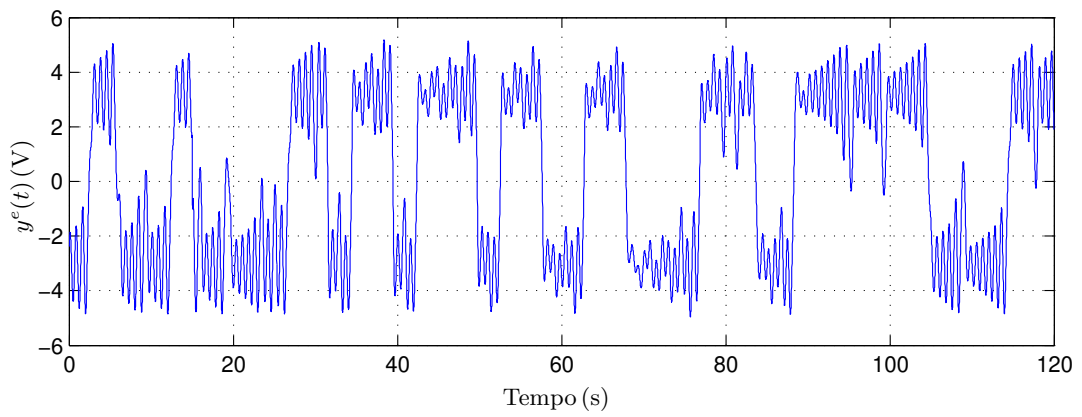
Este experimento foi realizado reproduzindo criteriosamente as mesmas temporalizações de excitação e de registro de dados descritas no primeiro experimento. Porém, o sinal de informação de transmissão utilizado é distinto em sua frequência, sendo um sinal senoidal com frequência de 0,5 Hz e mesmos 0,12 mV de amplitude.

A Figura 20 exibe os sinais de saída, v_{C1} , do oscilador PCChua registrados nas fases de transmissão e de sincronização. O erro de sincronização é exibido na Figura 21 durante o intervalo de tempo de 15 a 105 segundos em que o controle de sincronização permanece ativado. Na Figura 22 vê-se os sinais de informação transmitida e o sinal de controle, este equivalendo à informação recuperada via ITVC. Por fim, a Figura 23 certifica a eficácia do controlador TS em garantir a sincronização do oscilador PCChua operando na configuração mestre-escravo. Esta figura exibe sobrepostas as informações transmitida e recuperada via ITVC, após a aplicação de um filtro Butterworth passa-baixas de segunda ordem, com frequência de corte $f_c = 1$ Hz.

Observe que neste experimento o filtro sintonizado e aplicado em pós-processamento foi capaz de filtrar intensamente o padrão espúrio à informação presente no sinal de controle, mas novamente percebe-se o efeito colateral de defasamento. Reforçando apenas que este defasamento no contexto do experimento de transmissão *offline* torna-se irrelevante.

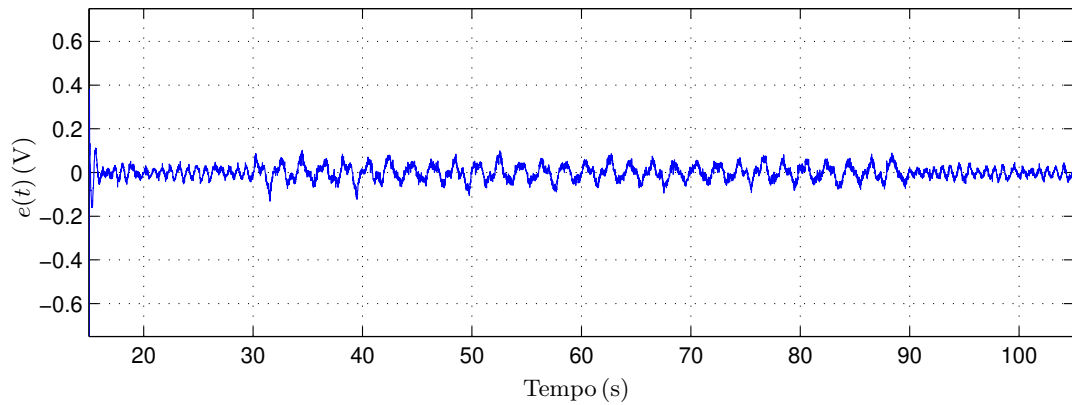


(a) Sinal transmitido.



(b) Sinal sincronizado.

Figura 20 – [E4] Sinal transmitido e sinal sincronizado.

Figura 21 – [E4] Sinal de erro: $e(t) = y^m(t) - y^e(t)$.

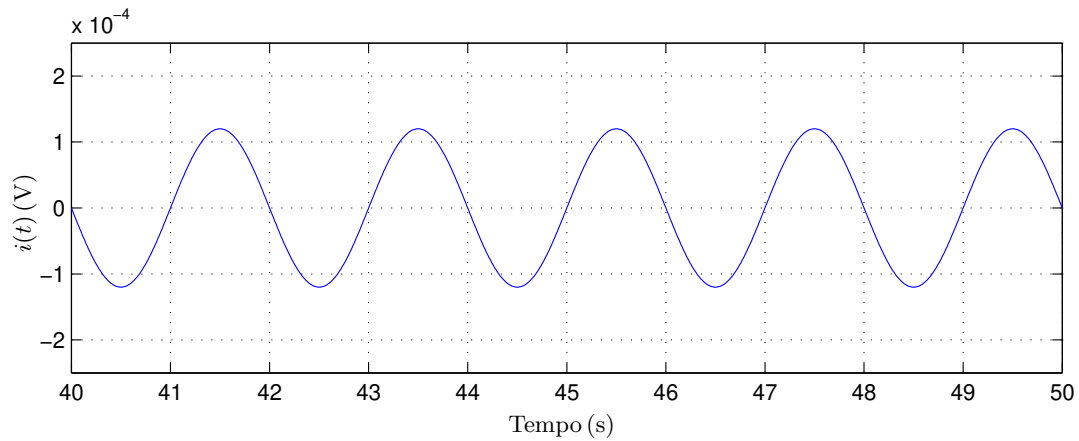
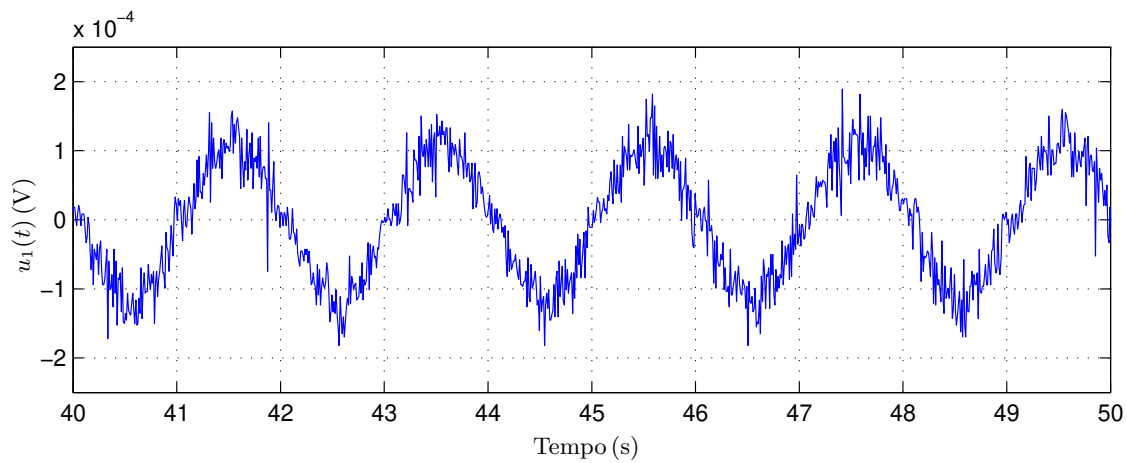
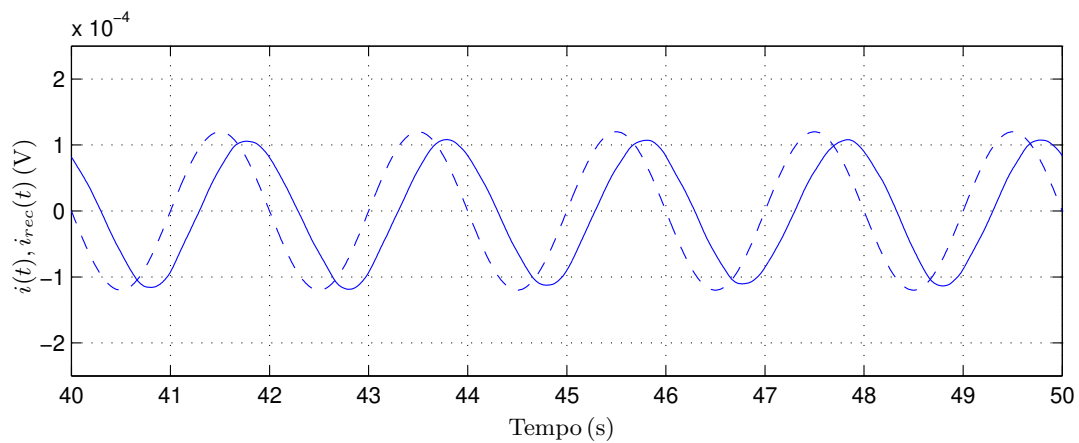
(a) Sinal de informação $i(t)$.(b) Sinal de controle $u_1(t)$ – informação recuperada.

Figura 22 – [E4] Sinal de informação: (a) transmitida e (b) recuperada.

Figura 23 – [E4] Sinal de informação: (--) transmitida e (–) recuperada filtrada.
(Filtro Butterworth: passa-baixas; segunda ordem; $f_c = 1$ Hz)

6.0.2.2 Quinto Experimento – Sinal de Forma Arbitrária 2

Neste último experimento prático realizado sobre a plataforma PCChua utilizou-se, aos moldes do terceiro experimento, um sinal de informação arbitrário, constituído da composição aditiva de sinais com as formas de onda senoidal, quadrada e dente de serra. Os sinais apresentam frequências e amplitudes distintas: senoidal (1,20 Hz, 0,08 mV); onda quadrada (2,10 Hz, 0,08 mV); dente de serra (1,30 Hz e 0,12 mV).

O sinal de erro de sincronização é mostrado na Figura 24. Observa-se uma elevação na magnitude deste sinal, quando comparado aos níveis observados no experimento anterior. Ainda que o erro tenha se mantido limitado a aproximados 5% do alcance, a robustez conferida pela abordagem de sincronização TS foi capaz de garantir a plena recuperação da informação transmitida, conforme pode ser verificado na Figura 25, que exhibe a informação transmitida e recuperada após condicionamento de filtragem.

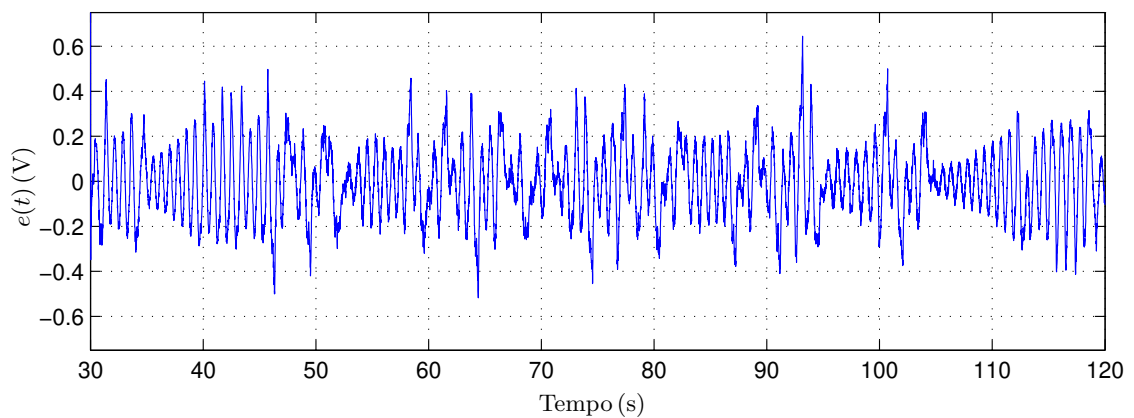


Figura 24 – [E5] Sinal de erro: $e(t) = y^m(t) - y^e(t)$.

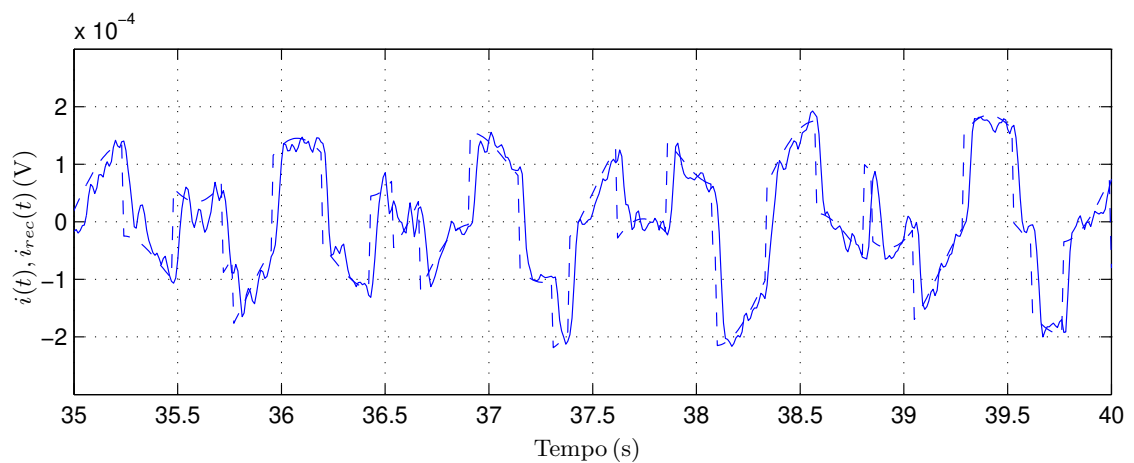


Figura 25 – [E5] Sinal de informação: (--) transmitida e (–) recuperada filtrada.
(Filtro Butterworth: passa-baixas; primeira ordem; $f_c = 10$ Hz).

7 Plataforma de Simulação Eletrônica

PCChua-SPICE

Este capítulo descreve o desenvolvimento da plataforma PCChua-SPICE proposta como uma alternativa ao PCChua [3]. Esta plataforma será implementada em SPICE e terá a capacidade de reproduzir experimentos de controle e de sincronização baseados no circuito oscilador de Chua.

Como ilustração de aplicação, a plataforma PCChua-SPICE será utilizada para implementar o sistema de comunicação unidirecional exibido na (Fig. 5, pág. 31) de forma a reproduzir o experimento prático de transmissão de informação de forma arbitrária apresentado na Seção 6.0.1.3.

A concepção desta plataforma levou em consideração dois aspectos norteadores:

- *A dificuldade de se ter acesso físico à plataforma PCChua, sobretudo por esta se tratar de uma implementação dedicada e não comercial.* Uma plataforma de simulação, implementada com base no uso de softwares livres de licença, tem grande potencial de contribuição, podendo ampliar o interesse e o acesso científico de comunidades acadêmicas afins à área de conhecimento desse trabalho.
- *A expectativa de proporcionar maior grau de convencimento sobre a validade das estratégias de sincronização propostas nesse trabalho, fazendo uso de simulações realistas de circuitos eletrônicos.* Simulações puramente algorítmicas são implementadas, em geral, livres da pretensão de refletir comportamentos transientes observados na interação complexa de dispositivos eletrônicos ativos e não lineares.

A plataforma PCChua-SPICE foi desenvolvida utilizando o ambiente de simulação LTspice IV da companhia *Linear Technology*. Este SPICE é livre de licença e oferece um nível de qualidade profissional para as simulações, além de uma biblioteca rica em modelos de componentes eletrônico comerciais.

7.1 Implementação Eletrônica

O desenvolvimento da plataforma PCChua-SPICE foi inspirado nos métodos de computação analógica (veja uma introdução em [51]), e utilizou como referência as implementações eletrônicas do circuito oscilador de Chua propostos em [52, 53].

A montagem física da plataforma PCChua apresentada em [3] faz uso de um único circuito oscilador de Chua controlado (veja Fig. 2.14, pág. 29) para implementar, de forma

concorrente no tempo, os sistemas mestre (transmissor) e sistema escravo (receptor). Esta limitação construtiva de um único circuito oscilador gera implicações diretas na usabilidade do sistema. (veja Nota 4, pág. 46) Por outro lado, por questões óbvias, essa mesma restrição se mostra como uma alternativa eficiente para o estudo de sistemas livres de incertezas.

A Figura 26 exibe a implementação eletrônica proposta para circuito oscilador de Chua, ainda sem a presença das fontes de corrente e de tensão, que são necessárias para o seu controle. Nesta implementação tanto o diodo de Chua, quanto o indutor, são implementados utilizando circuitos amplificadores operacionais de uso geral.

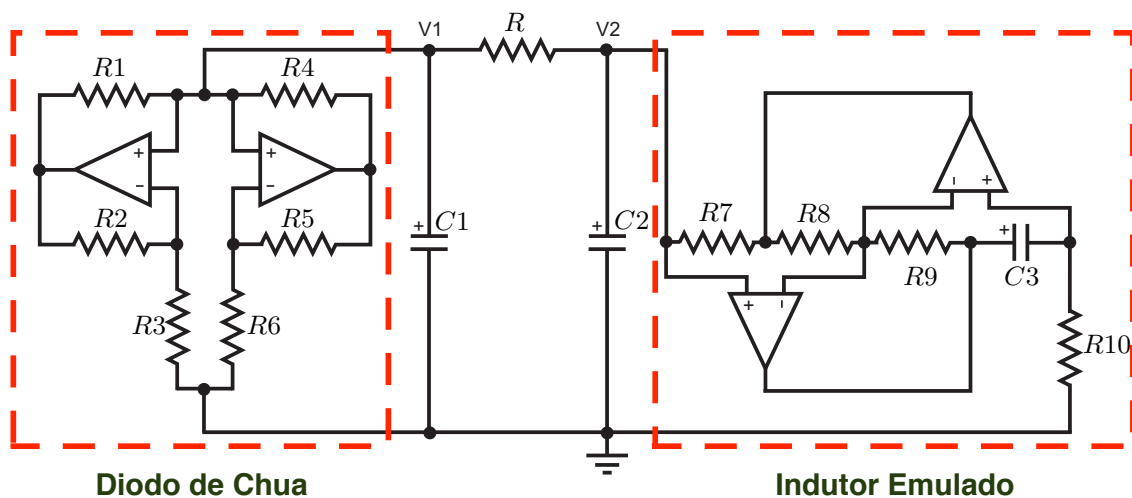


Figura 26 – Implementação Eletrônica do Oscilador de Chua.

A Figura 27a exibe a implementação eletrônica do diodo de Chua utilizado nas plataformas PCChua e PCChua-SPICE. A curva ideal da característica I-V do diodo de Chua é exibida na Figura 27b.

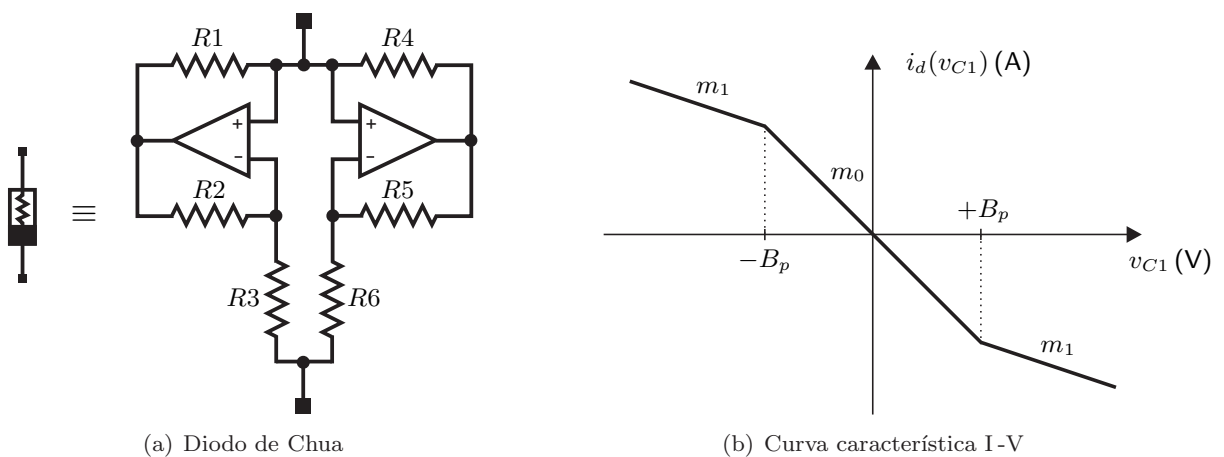


Figura 27 – Implementação eletrônica do diodo de Chua.

A Tabela 2 mostra os valores dos resistores utilizados na implementação do diodo de Chua. Estes valores foram sugeridos em [52], que apresenta em detalhes circuitos para uma implementação prática e robusta do circuito de Chua com amplificadores operacionais.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
R_1	220Ω	R_4	$22k\Omega$
R_2	220Ω	R_5	$22k\Omega$
R_3	$2.2k\Omega$	R_6	$3.3k\Omega$

Tabela 2 – Parâmetros resistivos utilizados na implementação do Diodo de Chua.

A implementação de um circuito ativo que emula o funcionamento de um indutor é exibida na Figura 28. (veja detalhes deste circuito em [54]) Este circuito fundamenta-se nas aplicações de circuitos giradores [55].

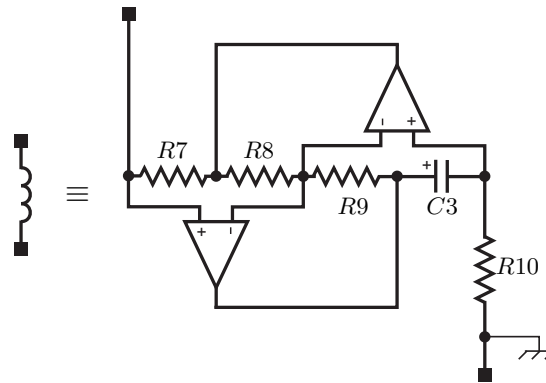


Figura 28 – Implementação eletrônica indutor emulado do PCChua.

Uma restrição desta topologia de circuito é a exigência de que um dos terminais de sinal do indutor emulador esteja conectado ao mesmo potencial de referência das fontes simétricas de alimentação dos seus amp-ops.

Na construção da plataforma PCChua utilizou-se de fontes independentes para a alimentação do circuito indutor emulado. Destaca-se a importância desta alternativa construtiva, que se faz necessária para permitir inserção da fonte de tensão controlada pelo sinal $u_3(t)$ (veja Fig. 2.14, pág. 29), entre o terminal de R_{10} e o ponto de aterramento.

A Figura 40 exhibe uma comparação entre as respostas em frequência de um dispositivo indutor real e um circuito indutor emulado, para o mesmo valor de indutância equivalente (42,3 henries) utilizado na implementação do PCChua. (Análise similar foi registrada em [56]). Pode-se constatar que o circuito indutor emulado se comporta próximo ao real na faixa de frequências até o limite de 3 kHz, o que excede amplamente a largura de banda que o circuito de Chua implementado irá operar. O circuito oscilador da plataforma física PCChua apresenta uma frequência de ressonância de $1,5 \pm 0,3$ Hz.

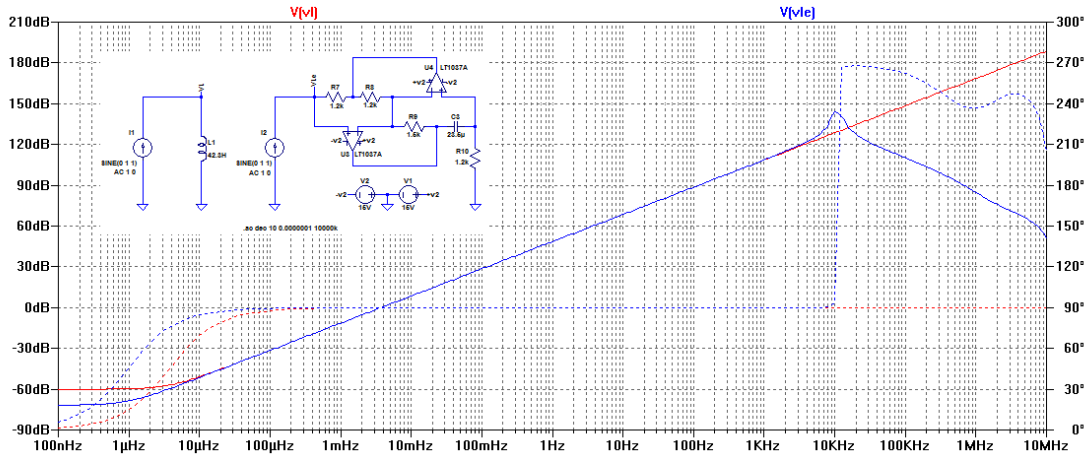


Figura 29 – Resposta em frequência: indutor passivo (vermelho); indutor emulado (azul).

A Figura 30 exibe uma captura de tela do ambiente de projeto e simulação LTspice IV. Observe na imagem a simulação do circuito oscilador de Chua proposto para a plataforma PCChua-SPICE. A parametrização utilizada é equivalente à configuração física do PCChua. O circuito encontra-se em execução livre de excitação forçada, exibindo comportamento dinâmico caótico. A ferramenta LTspice permite que se façam registros temporais (veja na parte inferior da imagem), além de oferecer recursos de análise espectral. A resposta em frequência deste sistema (veja canto superior direito da imagem) mostra sua predominância para operação em baixas frequências. Contudo, também é visível observar o típico espalhamento espectral, que confere comportamento tipo ruidoso a este circuito.

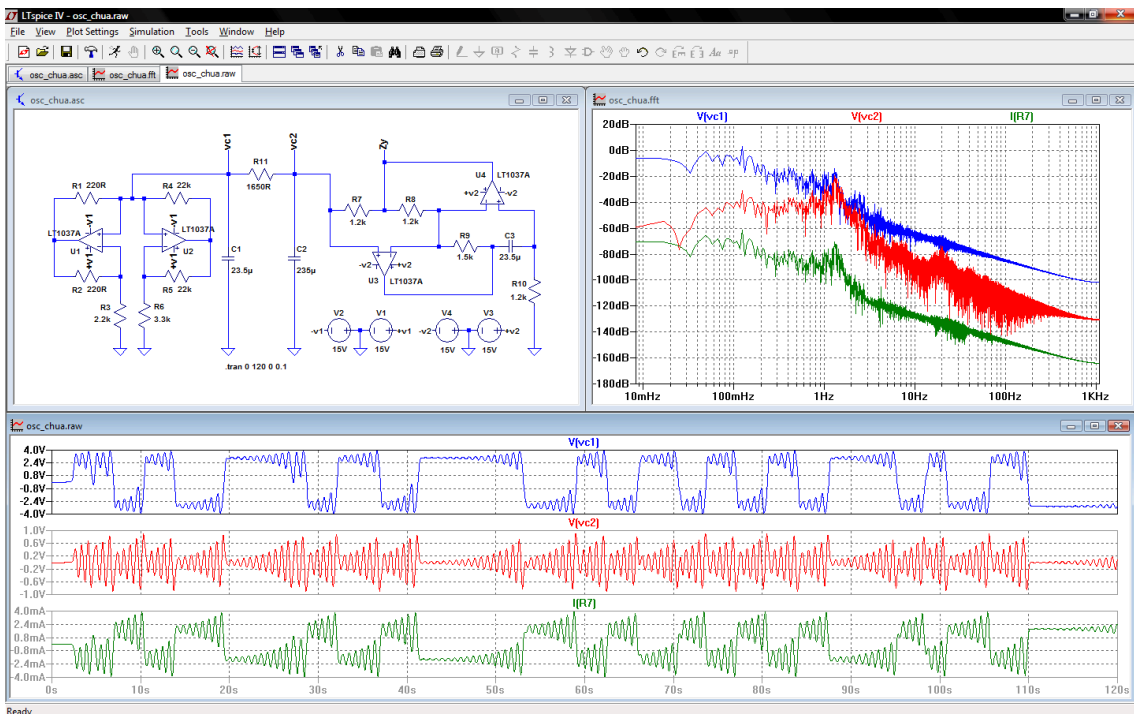


Figura 30 – Simulação do Circuito Oscilador de Chua utilizando o LTspice IV.

O detalhamento completo sobre os aspectos construtivos do PCChua, tais como as sugestões de valores dos componentes a serem utilizados, as parametrizações e ajustes dos circuitos, e os procedimentos operacionais de utilização do software de supervisão e controle da plataforma, entre outros detalhes, pode ser visto em [3].

7.2 Experimento de Sincronização Simulado

Este experimento de sincronização será realizado utilizando a plataforma PCChua-SPIICE exibida na Figura [31]. Para o melhor entendimento dos detalhes desta implementação, circuito será apresentado através dos seus módulos construtivos principais.

O circuito responsável pela determinação do erro de sincronização é exibido na Figura [32]. O sinal de erro é determinado pelo circuito subtrator (U21), que processa a diferença entre os sinais de transmissão (V_{x_mestre}) e recepção ($V_{x_escravo}$). Um circuito *sample-and-hold* realiza a tarefa de amostragem e retenção do sinal de erro a uma taxa de amostragem definida pelo bloco gerador de pulso (V7) ajustado para um período de amostragem de 10 ms. Uma chave comutadora se encarrega de permitir, ou não, a conexão do sinal de erro amostrado aos circuitos subsequentes que implementarão a lei de controle. Esta chave comutadora é controlada por meio do bloco de pulso (V3), que por sua vez é ajustado de forma conveniente a se automatizar o ensaio experimental simulado.

A Figura [33] exibe os circuitos de controle de sincronização, que são implementados através dos amplificadores (U12, U14 e U16), além dos circuitos atuadores, que correspondem às implementações das fontes de corrente (U13 e U17) e da fonte de tensão (U15). Como implementado na plataforma física PCChua, as fontes de corrente deste circuito apresentam ganho de -1 mA/V , e a fonte de tensão apresenta ganho de 1 V/V . Para os ajustes dos amplificadores que implementam as leis de controle, foram utilizados os ganhos de sincronização apresentados em [5.3, pág. 48]

A Figura [34] exibe o circuito oscilador de Chua mestre e o gerador sinal arbitrário. Observe que diferentes fontes de corrente foram ajustadas para compor o padrão do sinal de informação transmitida. Em destaque nesta imagem vê-se as implementações do diodo de Chua e do indutor emulado. Esta topologia de projeto mostrou-se mais estável para montagens complexas envolvendo dois circuitos osciladores de Chua. A resposta em frequência deste circuito indutor emulado pode ser vista no Apêndice [A].

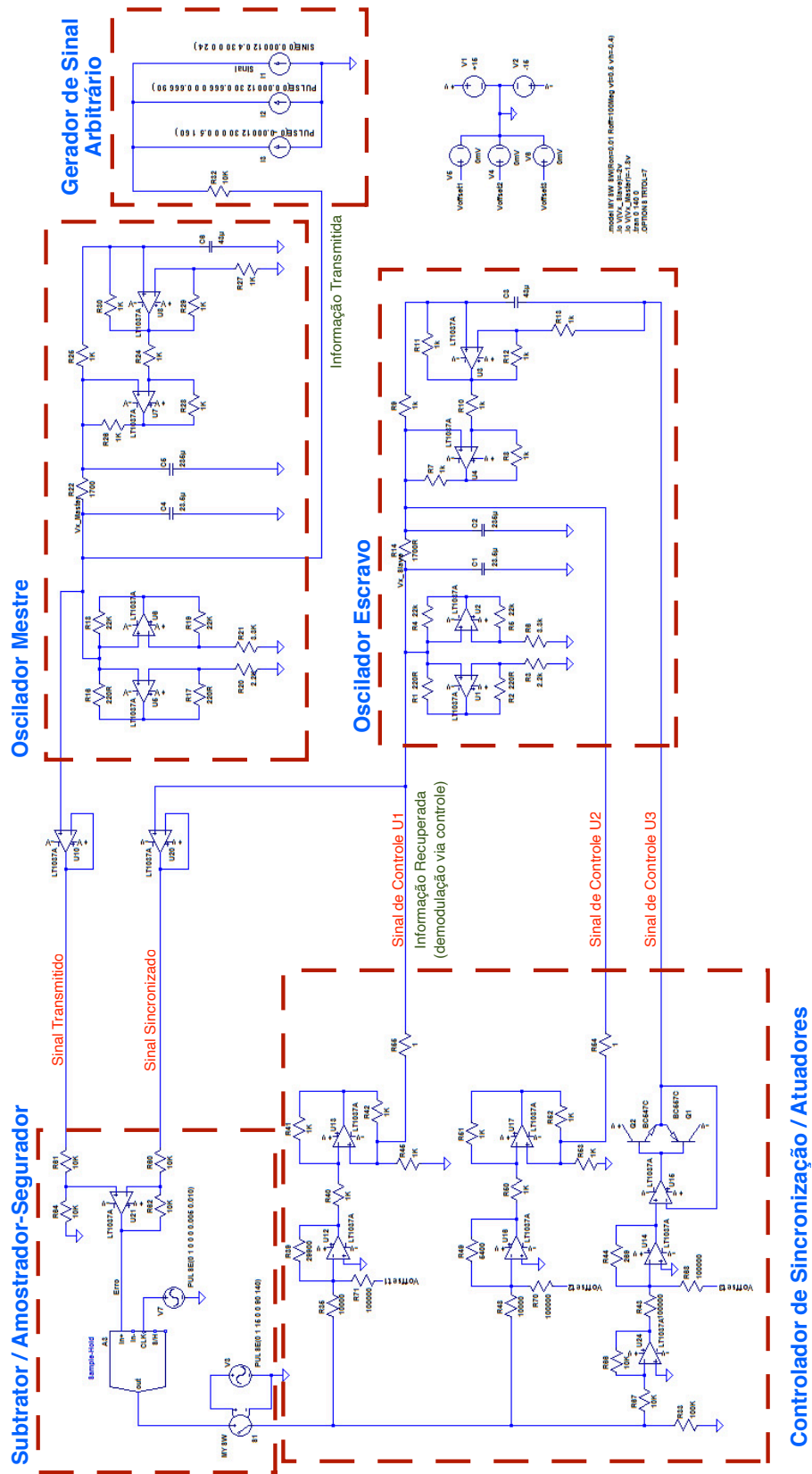


Figura 31 – Plataforma PCChua-SPICE.

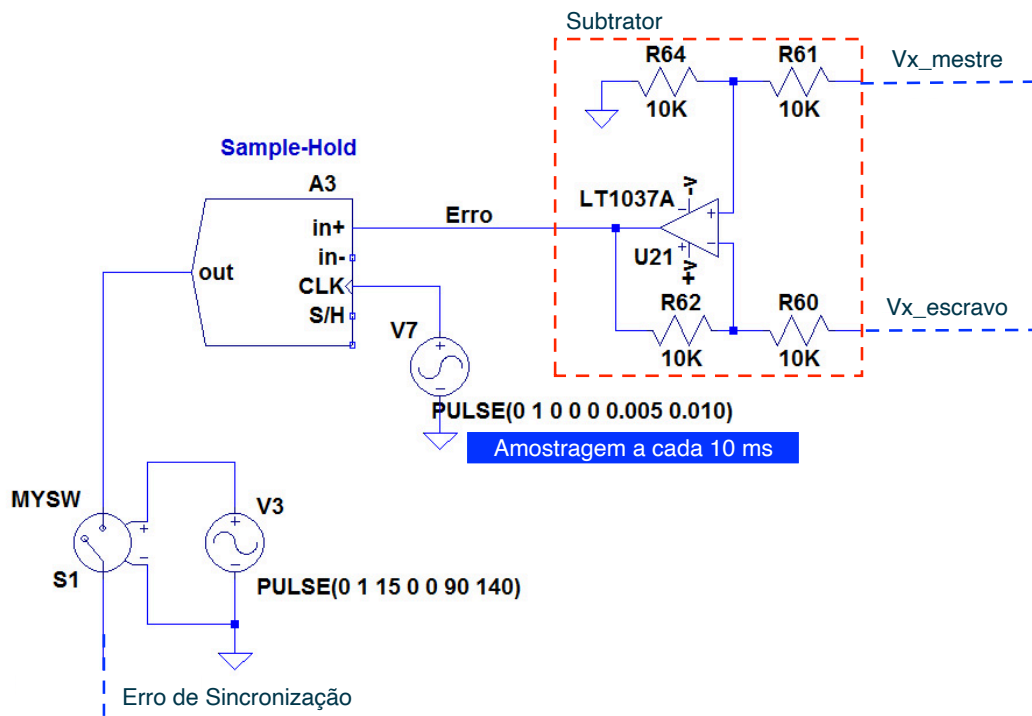


Figura 32 – Circuito subtrator com amostragem e retenção de 10 ms.

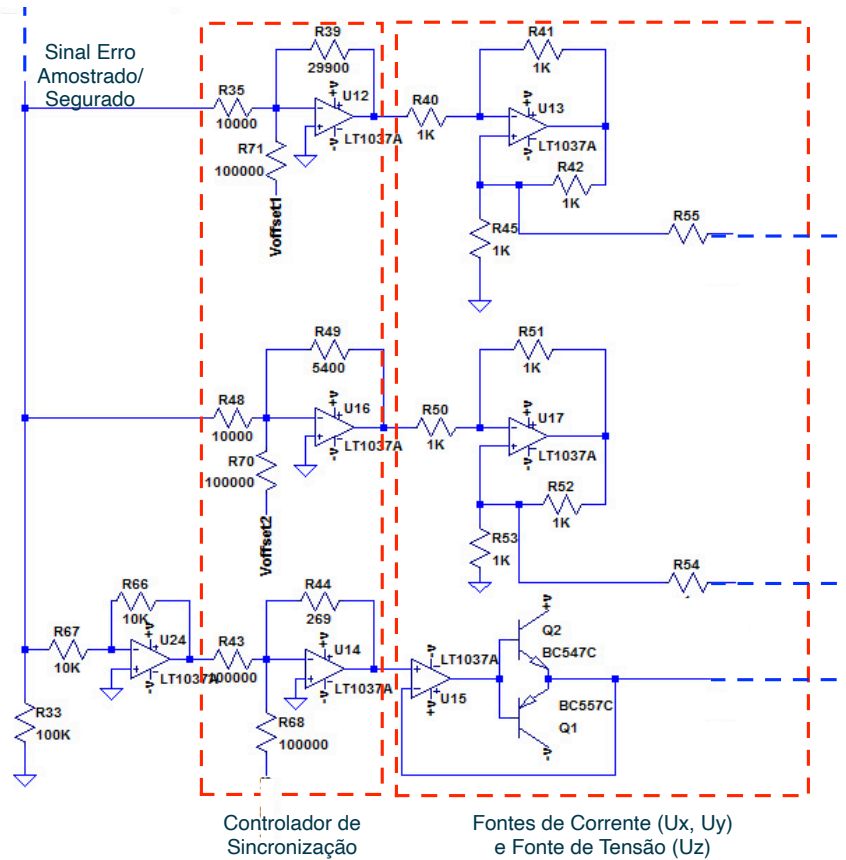


Figura 33 – Circuitos de ganho e de atuação.

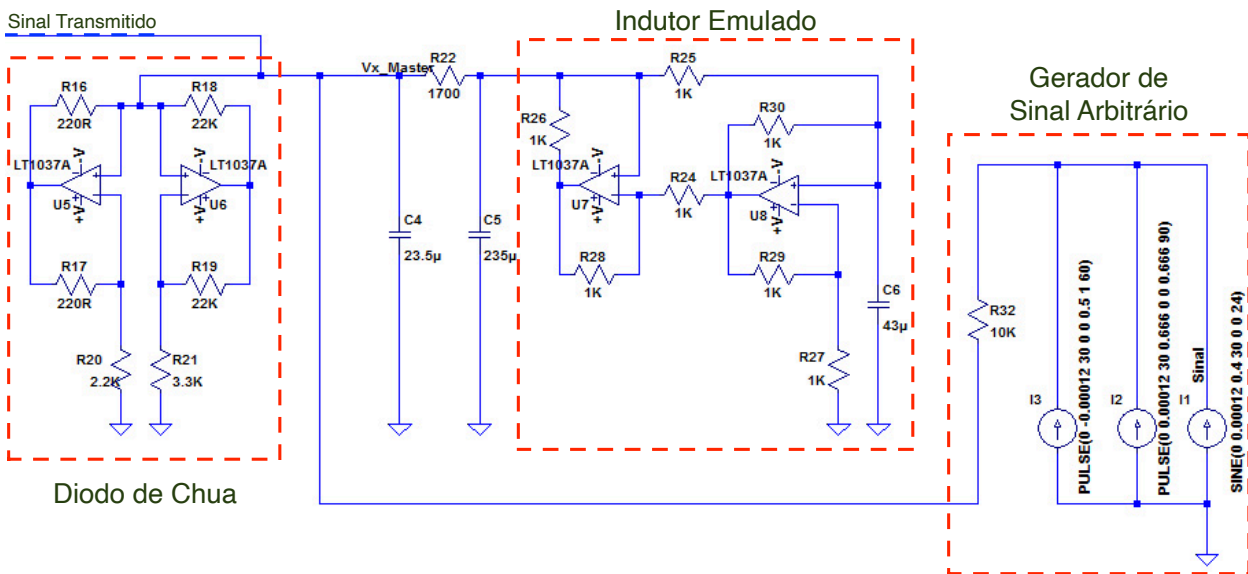


Figura 34 – Oscilador de Chua mestre da plataforma PCChua-SPICE.

7.3 Resultado Experimental Simulado

Com o propósito de se verificar a validade da plataforma PCChua-SPICE, um experimento de transmissão de informação foi reproduzido nesta plataforma de simulação eletrônica. As figuras Figura 35 e Figura 36 exibem os resultados de um experimento de transmissão de informação realizado com um sinal de forma de onda arbitrária, análogo àquele apresentado na Seção 6.0.1.3.

Pode-se constatar pela observação destas imagens que os resultados de simulação produzidos pela plataforma PCChua-SPICE foram muito fieis àqueles obtidos no experimento real, o que encoraja o uso desta plataforma como uma alternativa flexível e acessível para as pessoas não têm acesso direto a plataforma física PCChua.



Figura 35 – Experimento de sincronização realizado na plataforma PCChua-SPICE com a transmissão de um sinal de forma de onda arbitrária.



Figura 36 – Detalhes da sincronização realizada na plataforma PCChua-SPICE.

7.4 Extensão de uso da Plataforma PCChua-SPICE

Ainda com a intenção de demonstrar a flexibilidade e potenciais aplicações para a plataforma PCChua-SPICE, outras duas implementações para estudos de sincronização envolvendo controle com memória foram desenvolvidas e serão apresentadas no Apêndice [A](#).

Como aplicação ilustrativa considerou-se a utilização da abordagem apresentada em [57](#) para se determinar o máximo atraso suportado por um sistemas de sincronização mestre-escravo sujeitos a atrasos nas sinais de transmissão e sincronização. A Tabela [3](#) mostra a parametrização dos sistemas osciladores de Chua considerados na síntese do controlador de sincronização e na implementação da plataforma PCChua-SPICE.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
R	1700 Ω	r_L	0 Ω
C_1	23.5 μ F	m_0	-0.34mS
C_2	235 μ F	m_1	-0.39mS
L	43H	B_p	1.74V

Tabela 3 – Parâmetros utilizados no circuito de sincronização com memória.

O máximo atraso garantido pelo Teorema 2 de [57](#) foi de 63 ms, quando utilizado o controlador de sincronização dado por: $K^{PCChuaSPICE} = [0,6693, 0,6511, 0,1324]^T$.

Através de simulações realizadas na plataforma PCChua-SPICE com redes de atraso (veja circuito no Apêndice [A](#), pág. [90](#)), o máximo de atraso suportado pelo sistema de sincronização foi identificado como sendo 88 ms. É importante destacar a importância de uma validação prática dessa natureza, sobretudo em se tratando de sistemas osciladores caóticos e sujeitos a atrasos, que impõem grandes dificuldades construtivas, ou mesmo de simulação computacional não realista.

Os atratores caóticos dos sistemas mestre e escravo são exibidos na Figura [37](#) e Figura [38](#), respectivamente, para atrasos de 60 ms e 88 ms. Observe que o atraso de 88 ms gera uma completa a falta de sincronização entre os sistemas mestre e escravo.

Detalhes construtivos da plataforma PCChua-SPICE com redes de atraso fixo e de atraso variante no tempo são apresentados no Apêndice [A](#).

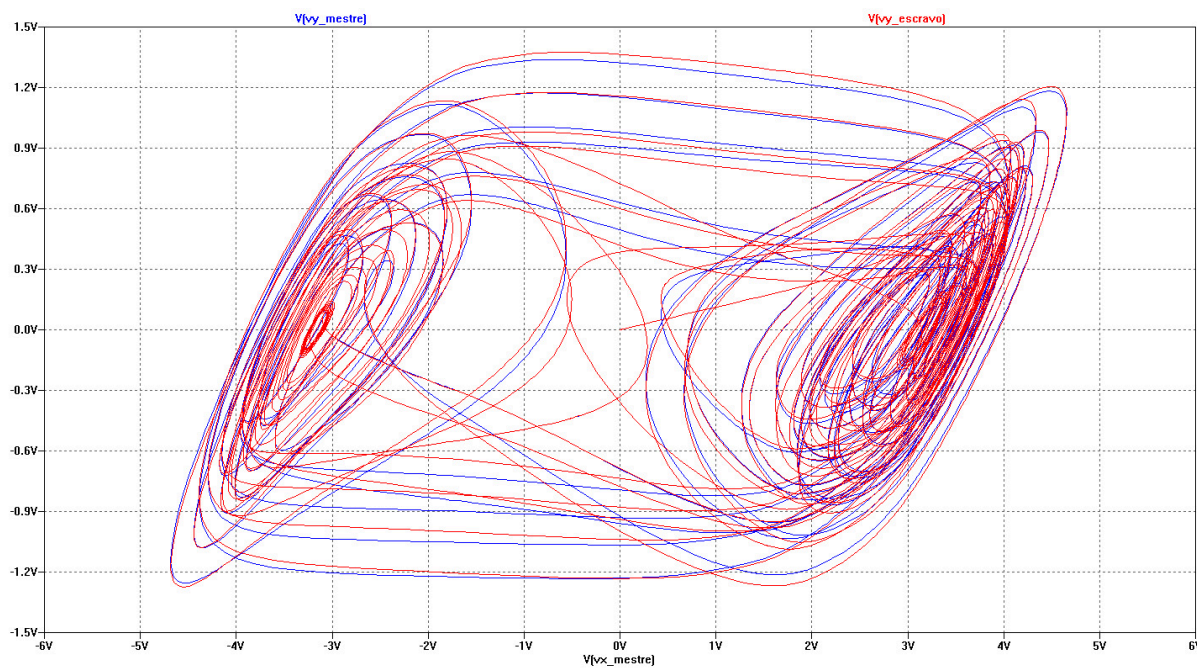


Figura 37 – Projeção dos atratores caóticos em sincronização. (atraso de 60 ms)

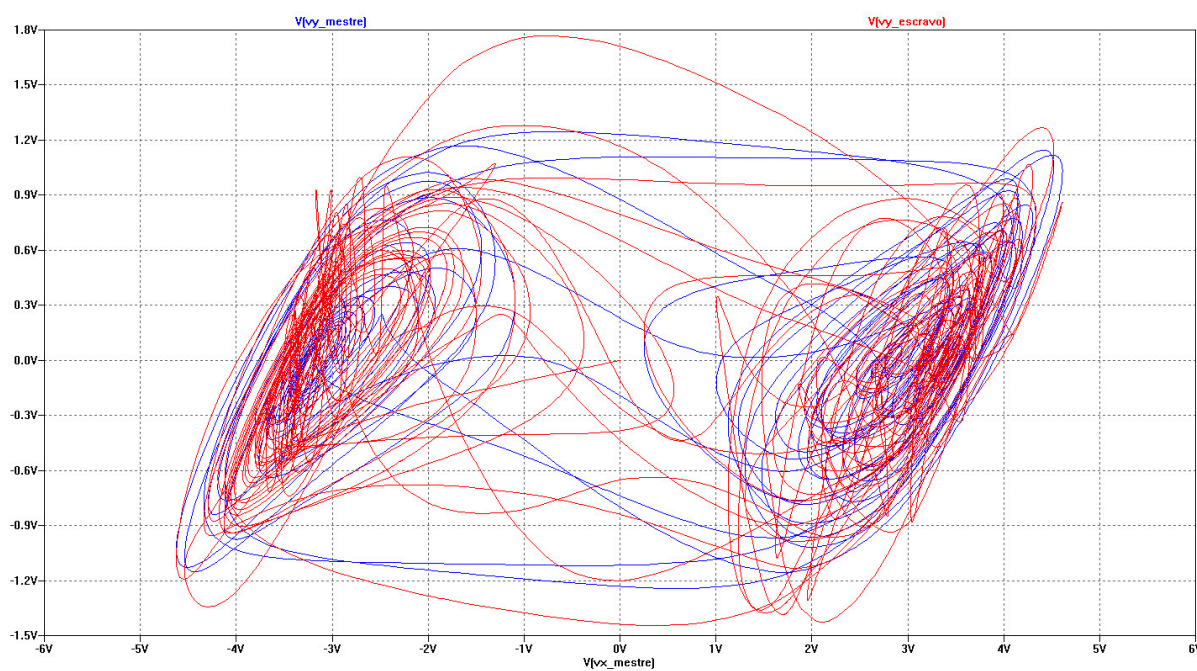


Figura 38 – Projeção dos atratores caóticos sem sincronização. (atraso de 88 ms)

8 Conclusão e Trabalhos Futuros

Disposições Gerais

Nesse trabalho o problema de sincronização de sistemas caóticos na configuração mestre-escravo foi estudado para a classe de sistemas não lineares do tipo Lur'e. Duas abordagens foram propostas para a sincronização desta classe de sistemas. A primeira restringiu-se aos sistemas Lur'e em que as não linearidades do setor são representadas por funções lineares por partes. A segunda abordagem não impõe restrições, permitindo modelar qualquer natureza de não linearidade, por ser baseada nas técnicas de controle nebuloso Takagi-Sugeno.

Para validar a metodologia de projeto proposta, além de permitir uma melhor comparação de desempenho entre as abordagens de síntese apresentadas, o Problema de Transmissão Segura de Informação foi utilizado como aplicação *benchmark*. O Capítulo 2 tratou de descrever este problema, além de detalhar os aspectos técnicos da especificação de desempenho desejada, que serviu para nortear os desenvolvimentos dos métodos de síntese apresentados no Capítulos 3 e Capítulo 4.

Uma série de experimentos de sincronização foram desenvolvidos com a utilização da plataforma de testes PCChua, ilustrando a solução do problema de transmissão de informação, com base no princípio ITVC. Nestes experimentos a informação transmitida é modulada via perturbação aditiva dos estados do sistema oscilador mestre, e a demodulação é realizada através dos sinais de controle de sincronização. A preparação para a execução dos experimentos práticos foi detalhada no Capítulo 5, que apresentou os procedimentos de projeto dos controladores de sincronização baseando-se nos teoremas de síntese, Teorema 1 e Teorema 3, desenvolvidos neste trabalho.

Dos Experimentos Práticos

Os resultados experimentais foram apresentados no Capítulo 6. O qualidade obtida nos processos de sincronização permitiram certificar a validade do princípio ITVC, que estabelece as condições necessárias para a garantia de recuperação da informação transmitida, tratando os cenários de sincronização ideais e reais. Nesse sentido, a definição de Sincronização Prática e a escolha do índice de desempenho robusto \mathcal{H}_∞ , propostos no Capítulo 2, foi bem sucedida, pois permitiu que as informações transmitidas fossem recuperadas com boa qualidade, mesmo para situações de teste extremas, em que se utilizou a presença de sinais de mais elevada amplitude e frequência, e até mesmo de sinais arbitrários, com a mesclagem de padrões variados de formas de onda, frequência e amplitude, como aqueles apresentados no terceiro e no quinto experimento do Capítulo 6.

Das Abordagens de Síntese

A síntese de controladores robustos, produzidos com as abordagens de sincronização propostas nesse trabalho, contribuíram para garantir maior grau de proteção à informação transmitida. Além disso, a concepção da síntese, que garante estabilidade assintótica aos sistemas de erro de sincronização, implica no atendimento da condição fundamental do princípio ITVC, que exige suavidade nas ações de controle para o sucesso na demodulação da informação transmitida.

É importante destacar que o aspecto de segurança da informação transmitida não foi investigado em profundidade neste trabalho, uma vez que o interesse pelo problema teve o propósito principal de se avaliar exclusivamente a sincronização.

O problema *benchmark* se mostrou como um exemplo de fácil verificação qualitativa e de bom nível de convencimento. Isto, graças ao elevado grau de exigência imposto à qualidade da sincronização, para que houvesse sucesso no processo de comunicação.

Da Qualidade das Sincronizações

Quanto ao nível de satisfação, observando a qualidade das sincronizações nos experimentos práticos, é possível afirmar que ambas abordagens, Abordagem Poliquadrática e Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno, se mostraram eficientes no processo de transmissão de informação, quando avaliadas em condições de testes similares. Pode-se ainda observar uma superioridade, se compararmos com os resultados apresentados nas exemplificações que inspiraram a realização destes experimentos em [25].

A Abordagem Poliquadrática, para o problema específico de sincronização de osciladores de Chua, se mostrou tão eficiente quanto a abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno, mas oferece a vantagem de um nível de dificuldade de implementação computacional menor, se comparado a implementação de controladores baseados em compensação paralela distribuída. Por outro lado, a abordagem nebulosa não impõe a restrição de se modelar apenas não linearidades representadas por funções lineares por parte. Portanto, a escolha entre um método ou outro deverá ser realizada pelo projetista, em compatibilidade à natureza do problema que estiver sendo solucionado.

Da Plataforma de Simulação Eletrônica

Ainda como uma contribuição desse trabalho, destaca-se o desenvolvimento da plataforma de simulação eletrônica – PCChua-SPICE – apresentada no Capítulo 7. Esta plataforma foi proposta como uma alternativa de virtualização para o PCChua, e foi inspirada nos conceitos de computação analógica. O potencial de aplicação desta plataforma foi

demonstrado com a reprodução de um experimento de transmissão de informação com sinal de forma arbitrária. A qualidade dos resultados obtidos com as simulações motivaram a sua extensão de uso para tratar o problema de sincronização com memória. Cabe destacar que esta implementação alternativa tem grande valia, uma vez que a realização de testes de sincronização com atraso na plataforma original PCChua não seriam implementáveis, dada a restrição de existência de um único circuito oscilador que se presta funcionar ora como mestre, ora como escravo.

Das Publicações Científicas

Por fim é importante destacar que durante o desenvolvimento deste trabalho foram produzidos trabalhos técnicos científicos publicados na sua área de competência. Estas publicações [58], [59], [60], [61] complementam a tese apresentando outros exemplos, argumentações e bibliografias.

Proposta para Trabalhos Futuros

- Complementar as abordagens de sincronização, Abordagem Poliquadrática e Abordagem Fuzzy Takagi-Sugeno, incluindo restrições de saturação ao sinais de controle de sincronização, com formulações em termos de LMIs.
- Implementar uma versão física da plataforma PCChua-SPICE, permitindo certificar a validade das simulações realizadas em LTspice.

Referências

- [1] Takagi, T. e M. Sugeno: *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*. IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics, 15:116–132, 1985. Citado 2 vezes nas páginas [16](#) e [25](#).
- [2] Tanaka, K., T. Ikeda e H. O. Wang: *A Unified Approach to Controlling Chaos via an LMI-based Fuzzy Control System Design*. IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, 45(10):1021–1040, 1998. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [19](#) e [52](#).
- [3] Tôrres, L. A. B. e L. A. Aguirre: *PCChua - A Laboratory setup for real-time control and synchronization of chaotic oscillations*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 15(8):2349–2360, 2005. Citado 4 vezes nas páginas [16](#), [45](#), [67](#) e [71](#).
- [4] Pecora, L. M., T. L. Carroll, G. A. Johnson e D. J. Mar: *Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications*. Chaos, 7(4):520–543, 1997. Citado na página [17](#).
- [5] Nijmeijer, Henk e Iven M.Y. Mareels: *An observer looks at synchronization*. IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental theory and applications, 44(10):882–890, 1997. Citado na página [17](#).
- [6] Nijmeijer, H.: *A dynamical control view on synchronization*. Phys. D, 154(3-4):219–228, 2001. Citado na página [17](#).
- [7] Zhou, Kemin, John C. Doyle e Keith Glover: *Robust and optimal control*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [27](#).
- [8] Luenberger, D. G.: *Observing the State of a Linear System*. IEEE Transactions on Military Electronics, 8(2):74–80, 1964. Citado na página [17](#).
- [9] Pecora, L. M. e T. L. Carroll: *Synchronization in chaotic systems*. Physical Review Letters, 64:821–823, 1990. Citado na página [18](#).
- [10] Pecora, L. M. e T. L. Carroll: *Driving systems with chaotic signals*. Physical Review A, 44(38):2374–2383, 1991. Citado na página [18](#).
- [11] Carroll, T. L. e L. M. Pecora: *Synchronizing Chaotic Circuits*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 38(4):453–456, 1991. Citado na página [18](#).
- [12] Deng, Tao, Guang Qiong Xia, Zheng Mao Wu, Xiao Dong Lin e Jia Gui Wu: *Chaos synchronization in mutually coupled semiconductor lasers with asymmetrical bias currents*. Opt. Express, 19(9):8762–8773, 2011. Citado na página [18](#).

- [13] Chen, H. F. e J. M. Liu: *Unidirectionally coupled synchronization of optically injected semiconductor lasers*. IEEE Journal of selected topics in Quantum Electronics, 10(5):918–926, 2004. Citado na página [18](#).
- [14] Abarbanel, H. D. I., M. B. Kennel, L. Illing, S. Tang, H. F. Chen e J. M. Liu: *Synchronization and communication using semiconductor lasers with optoelectronic feedback*. IEEE Journal of Quantum Electronics, 37(10):1301–1311, 2001. Citado na página [18](#).
- [15] Minorsky, Nicolai: *Theory of Nonlinear Control Systems*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1969. Citado na página [18](#).
- [16] Millerioux, G. e J. Daafouz: *Global chaos synchronization and robust filtering in noisy context*. IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, 48(10):1170–1176, 2001. Citado na página [18](#).
- [17] Millerioux, G. e C. Mira: *Finite-time global chaos synchronization for piecewise linear maps*. IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, 48(1):111–116, 2001. Citado na página [18](#).
- [18] Millerioux, G. e J. Daafouz: *An observer-based approach for input-independent global chaos synchronization of discrete-time switched systems*. IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, 50(10):1270–1279, 2003. Citado na página [18](#).
- [19] Millerioux, G. e J. Daafouz: *Polytopic observer for global synchronization of systems with output measurable nonlinearities*. International Journal of Bifurcations and Chaos, 13(3):703–712, 2003. Citado na página [18](#).
- [20] Tanaka, K. e H. O. Wang: *Fuzzy control of chaotic systems using LMIs: regulation, synchronization and chaos model following*. Em *IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings.*, volume 1, páginas 434–439, 1998. Citado na página [19](#).
- [21] Teixeira, M. C. M., E. Assunção e H. C. Pietrobom: *Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI*. Revista Controle & Automação, 11(1):37–48, 2000. Citado 3 vezes nas páginas [19](#), [25](#) e [27](#).
- [22] Teixeira, M. C. M., E. Assunção e R. G. Avellar: *On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 11(5):613–622, 2003. Citado 4 vezes nas páginas [19](#), [38](#), [42](#) e [43](#).
- [23] Daafouz, Jamal e Gilles Millerioux: *Poly-quadratic stability and global chaos synchronization of discrete time hybrid systems*. Mathematics and Computers in Simulation, 58(4):295–307, 2002. Citado na página [19](#).

- [24] Mendes, E. M. A. M. e S. A. Billings: *A note on discretization of nonlinear differential equations*. *Chaos*, 12(1):66–71, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 47 e 50.
- [25] Tôrres, L. A. B. e L. A. Aguirre: *Transmitting information by controlling nonlinear oscillators*. *Physica D - Nonlinear Phenomena*, 196(3-4):387–406, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 19, 30, 61 e 80.
- [26] Bowong, S., F. M. M. Kakmeni e R. Koina: *A new synchronization principle for a class of Lur'e systems with applications in secure communication*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(7):2477–2491, 2004. Citado na página 23.
- [27] Liao, X. e G. Chen: *Chaos synchronization of general Lur'e systems via time-delay feedback control*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(1):207–213, 2003. Citado na página 23.
- [28] Suykens, J. A. K., P. F. Curran e L. O. Chua: *Robust Synthesis for Master-Slave Synchronization of Lur'e Systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I*, 46(7):841–850, 1999. Citado na página 23.
- [29] Suykens, J. A. K., P. F. Curran, J. Vandewalle e L. O. Chua: *Robust nonlinear \mathcal{H}_∞ synchronization of chaotic Lur'e systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I*, 44(10):891–904, 1997. Citado na página 23.
- [30] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron e V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 de *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 34.
- [31] Lur'e, A. I. e V. N. Postnikov: *On the theory of stability of control systems*. *Applied mathematics and mechanics*, 8(3), 1944. Citado na página 23.
- [32] Blirnan, P. e A. M. Krasnosel'skii: *Popov absolute stability criterion for time-varying multivariable nonlinear systems*. Em *1999 European Control Conference (ECC)*, páginas 2731–2736, 1999. Citado na página 23.
- [33] Letov, Alexander. M.: *Stability in Nonlinear Control Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961. Citado na página 24.
- [34] Oliveira, M. C. de, L. Hsu e J. C. Geromel: *Uma formulação LMI para a análise de estabilidade com funções de Lyapunov do tipo Lur'e-Persidskii*. *Revista Controle & Automação*, 13(1):13–21, 2002. Citado na página 24.
- [35] Geromel, José C. e Rubens H. Korogui: *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. Blucher, São Paulo, 2011. Citado na página 24.

- [36] Taniguchi, T.: *Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 9(4):524–538, 2001. Citado na página [26](#).
- [37] Tanaka, K., T. Ikeda e H. O. Wang: *Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 6(2):250–265, 1998. Citado 2 vezes nas páginas [27](#) e [37](#).
- [38] Aguirre, L. A., B. O. S. Teixeira e L. A. B. Tôrres: *Using data-driven discrete-time models and the unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems*. Phys. Rev. E, 72:026226, 2005. Citado na página [28](#).
- [39] Sitz, A., U. Schwarz e J. Kurths: *The unscented Kalman filter, a powerful tool for data analysis*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 14(6):2093–2105, 2004. Citado na página [28](#).
- [40] Matsumoto, T.: *A chaotic attractor from Chua's circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 31(12):1055–1058, 1984. Citado na página [29](#).
- [41] Chua, L.: *The Genesis of Chua's circuit*. 1992. Citado na página [29](#).
- [42] Palhares, R. M. e P. L. D. Peres: *Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems-an LMI approach*. Em *ISIE '97 Proceeding of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 3, páginas 1120–1125, 1997. Citado na página [33](#).
- [43] Oliveira, M. C. de, J. Bernussou e J. C. Geromel: *A new discrete-time robust stability condition*. Systems and Control Letters, 37(4):261–265, 1999. Citado 2 vezes nas páginas [34](#) e [35](#).
- [44] Daafouz, Jamal e Jacques Bernussou: *Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties*. Systems & Control Letters, 43(5):355–359, 2001. Citado na página [35](#).
- [45] Palhares, R. M., R. H. C. Takahashi e P. L. D. Peres: *\mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems*. International Journal of Systems Science, 28(2):183–188, 1997. Citado 2 vezes nas páginas [35](#) e [40](#).
- [46] Oliveira, M. C. de e R. E. Skelton: *On stability tests for linear systems*. Em *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, 2002. Citado na página [36](#).
- [47] Tanaka, Kazuo e M. Sugeno: *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*. Fuzzy Sets and Systems, 45(2):135–156, 1992. Citado na página [37](#).

- [48] Teixeira, M. C. M., E. Assuncao e R. G. Avellar: *On relaxed LMI-based design for fuzzy controllers*. Em *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, páginas 704–707, 2001. Citado na página [43](#).
- [49] Junior, Hudson Bitencourt: *Métodos de Estimação Recursiva Baseados no Filtro de Kalman Aplicados a Sistemas Não-Lineares*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003. Citado na página [46](#).
- [50] Wang, H. O. e K. Tanaka: *An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its Application to Control of Chaos*. Em *Proceedings of 5th International Fuzzy Systems Conference*, páginas 1433–1438, New Orleans, LA, USA, 1996. Citado na página [50](#).
- [51] Thomason, J. G.: *An Introduction to Analogue Computer Methods*. The Computer Journal, 3(4):211–219, 1961. Citado na página [67](#).
- [52] Kennedy, Michael Peter: *Robust OP AMP Realization Of Chua's Circuit*. Frequenz, 46:66–80, 1992. Citado 2 vezes nas páginas [67](#) e [69](#).
- [53] Kiers, Ken, Tim Klein, Jeff Kolb, Steve Price e J. C. Sprott: *Chaos in a Nonlinear Analog Computer*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 14:2867–2873, 2004. Citado na página [67](#).
- [54] Kumar, Umesh, Sushil Kumar Shukla e Amiete: *Analytical Study of Inductor Simulation Circuits*. Active and Passive Electronic Components, 13(4):211–227, 1989. Citado na página [69](#).
- [55] Barazarte, R. Y., G. G. Gonzalez e M. Ehsani: *Generalized Gyrator Theory*. IEEE Transactions on Power Electronics, 25(7):1832–1837, 2010. Citado na página [69](#).
- [56] Tôrres, Leonardo e Luis Aguirre: *Inductorless Chua's circuit*. Electronics Letters, 36:1915–1916, 2000. Citado na página [69](#).
- [57] Souza, F. O., R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes e L. A. B. Tôrres: *Robust \mathcal{H}_∞ control for master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay feedback control*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 18(4):1161–1173, 2008. Citado na página [76](#).
- [58] Campos, C. D., R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, L. A. B. Tôrres e L. A. Mozelli: *Experimental Results on Chua's Circuit Robust Synchronization via LMIS*. I. J. Bifurcation and Chaos, 17(9):3199–3209, 2007. Citado na página [81](#).
- [59] Campos, C. D., R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, L. A. B. Tôrres e L. A. Mozelli: *Experimental Results on Chua's Circuit Robust Synchronization via LMIs*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 17(9), 2007. Citado na página [81](#).

- [60] Campos, C. D., R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, L. A. B. Tôrres e L. A. Mozelli: *Uma abordagem para sincronização de sistemas caóticos baseada em técnicas de controle robusto \mathcal{H}_∞ a tempo discreto*. Em *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA'2006*, páginas 2016–2021, Salvador, Brasil, 2006. Citado na página [81](#).
- [61] Campos, C. D., R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, L. A. B. Tôrres e L. A. Mozelli: *Sincronismo de osciladores caóticos e experimentos em transmissão de informação: Uma abordagem \mathcal{H}_∞ via modelagem nebulosa takagi-sugeno*. Em *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA'2006*, páginas 310–315, Salvador, Brasil, 2006. Citado na página [81](#).

APÊNDICE A – PCChua-SPICE

circuitos e simulações complementares

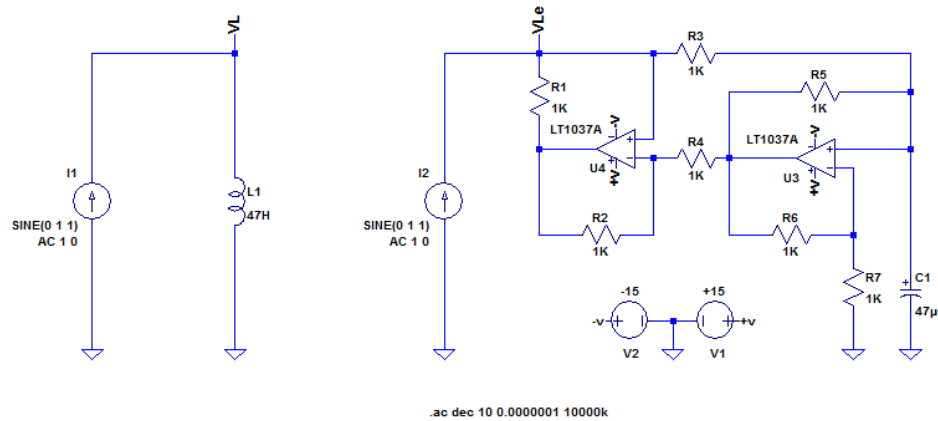


Figura 39 – Circuito indutor emulado implementado na PCChua-SPICE.

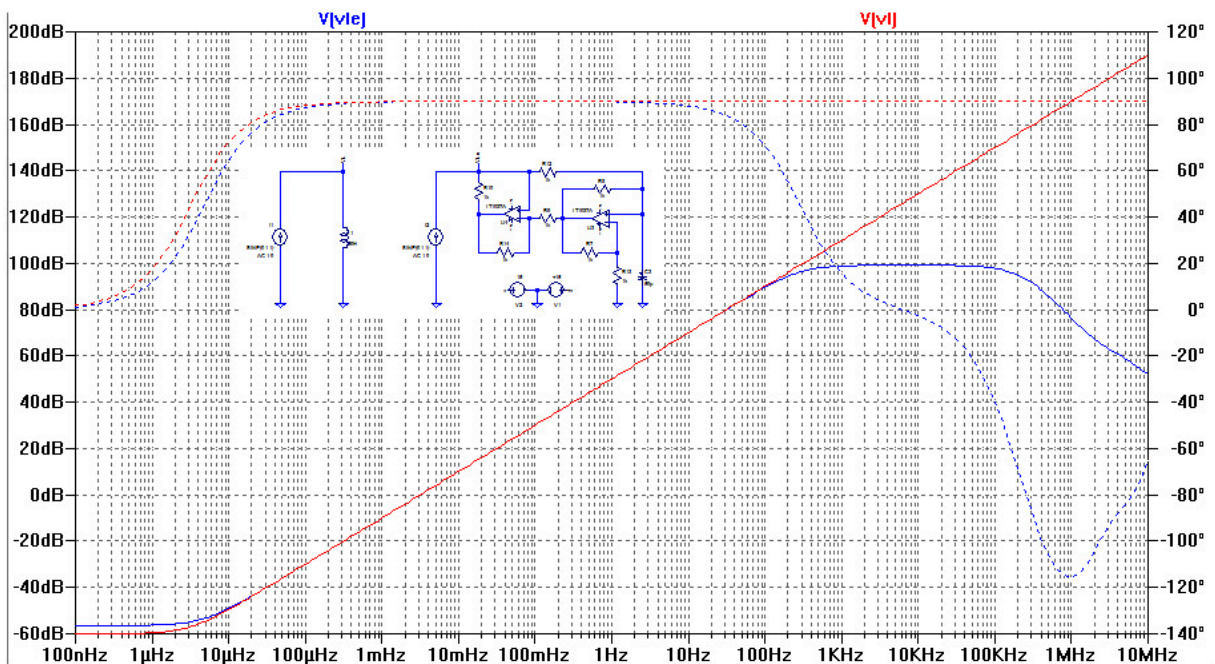


Figura 40 – Resposta em frequência do indutor emulado implementado na PCChua-SPICE.

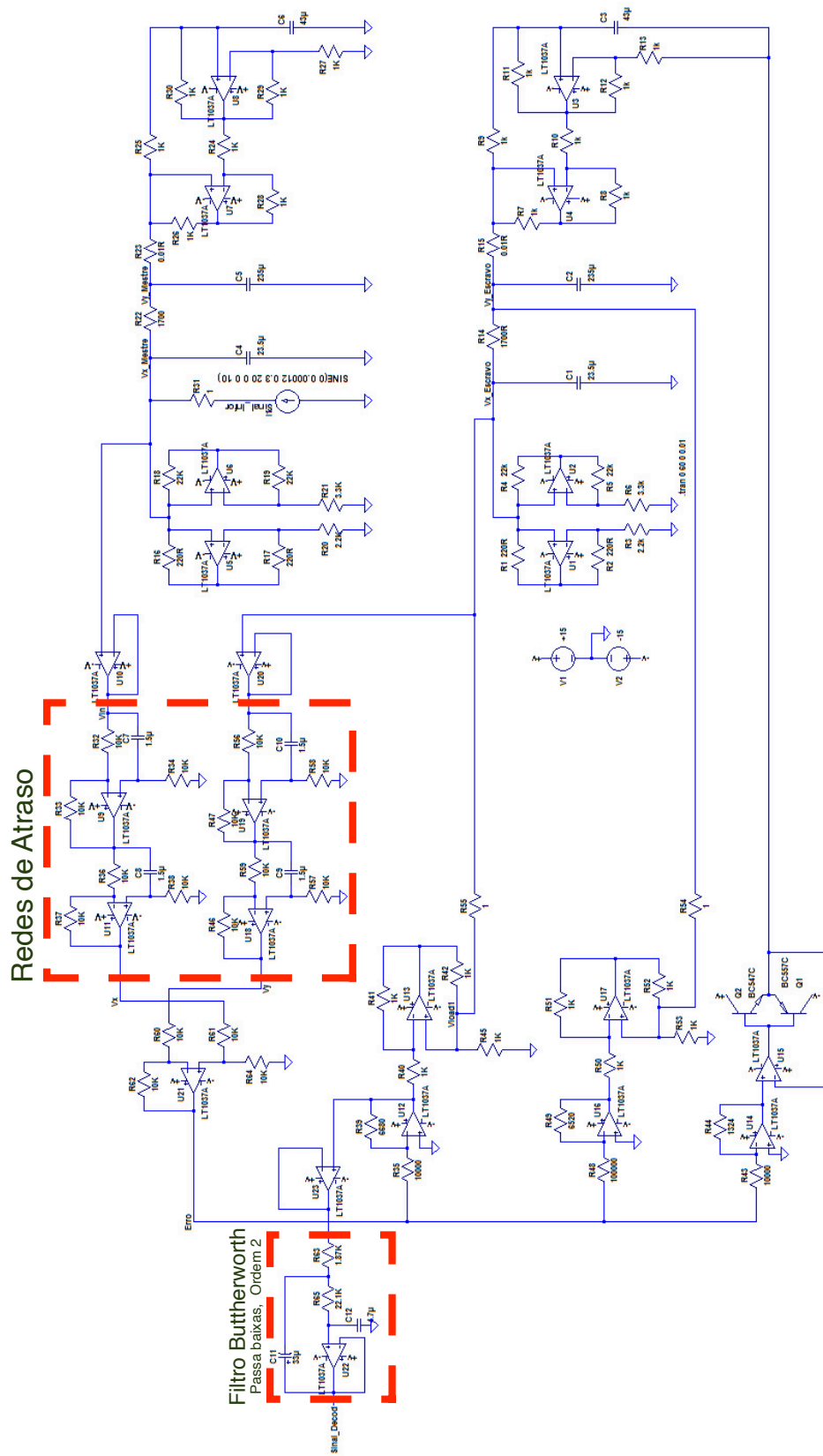


Figura 41 – Plataforma PCChua-SPICE com redes de atraso fixo.

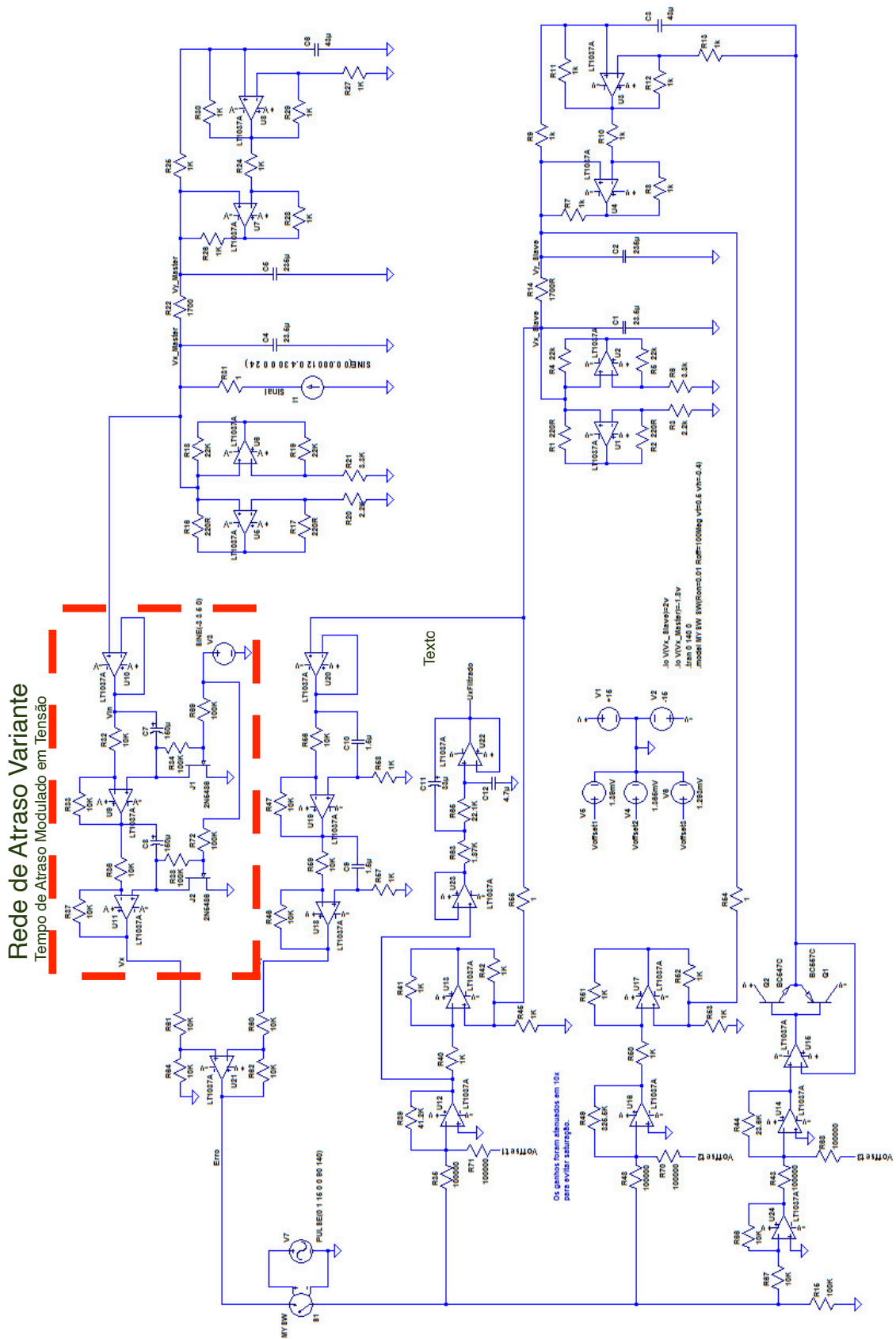


Figura 42 – Plataforma PCChua-SPICE com rede de atraso variante no tempo.

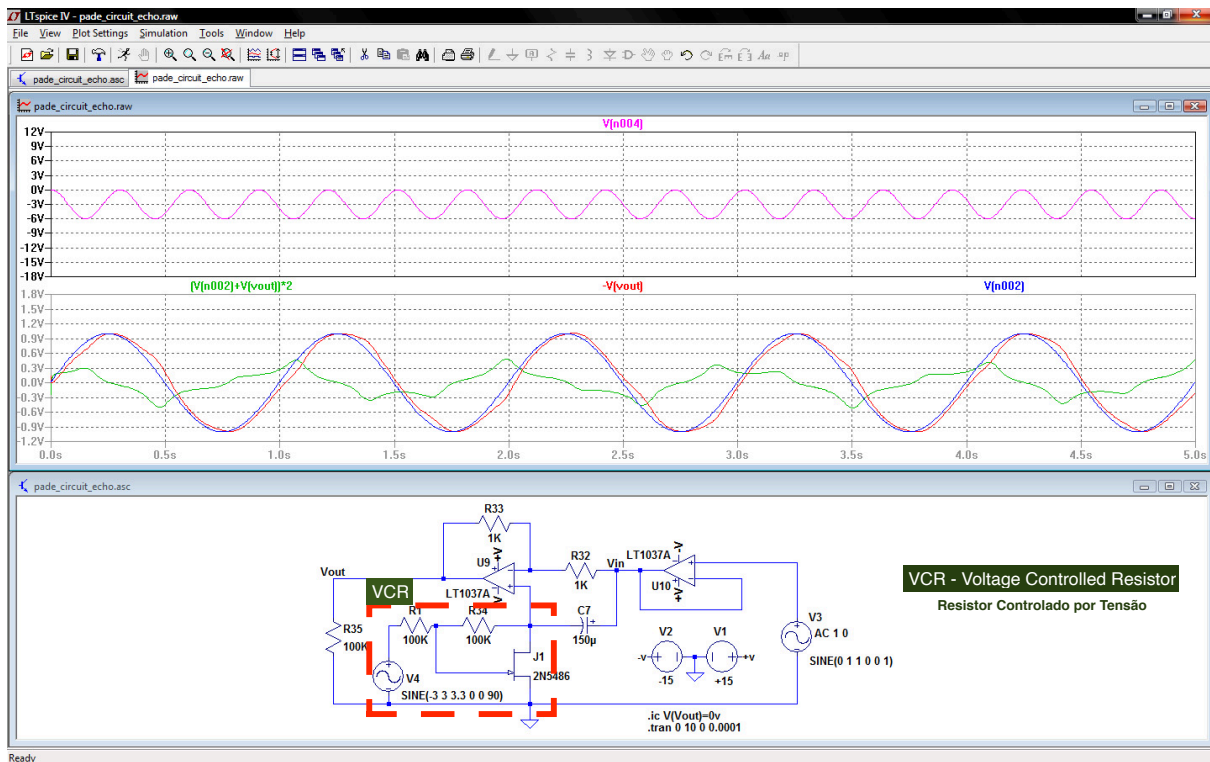


Figura 43 – Rede de atraso variante no tempo com aproximação de primeira ordem. (atraso modulado em tensão via sinal senoidal gerado em V4)

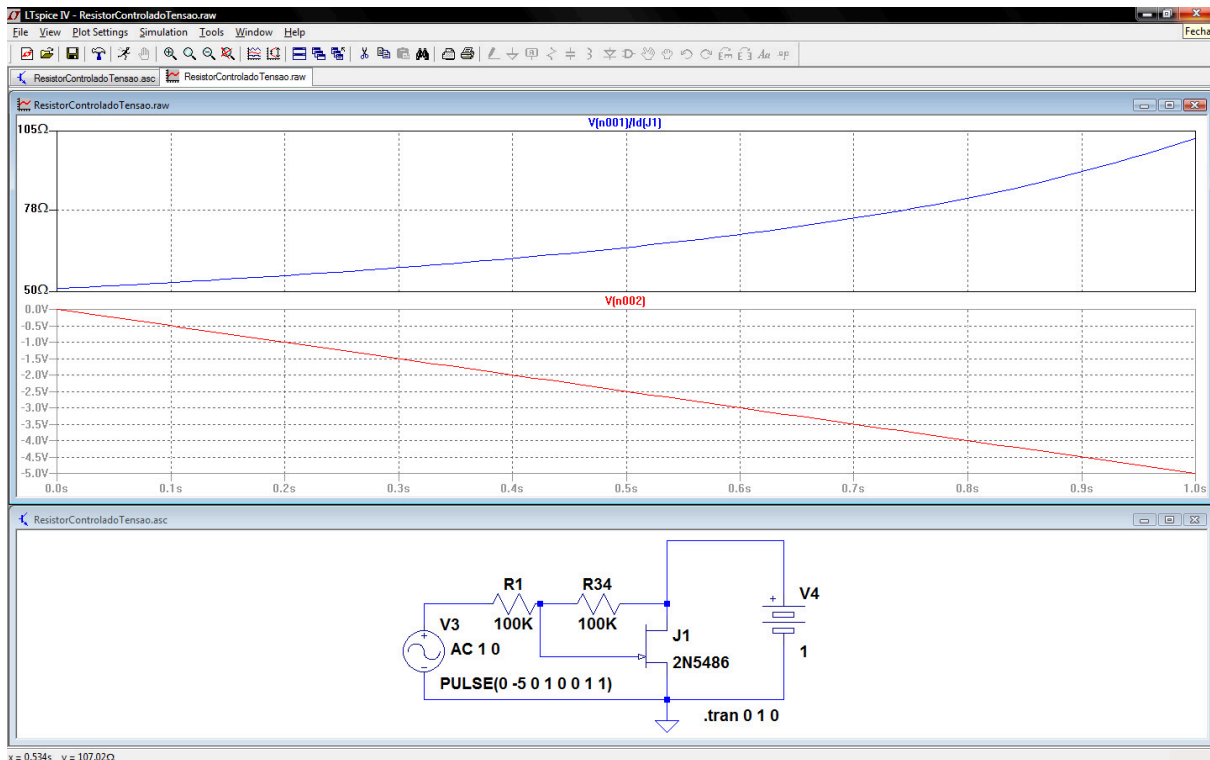


Figura 44 – Resistor controlado por tensão.

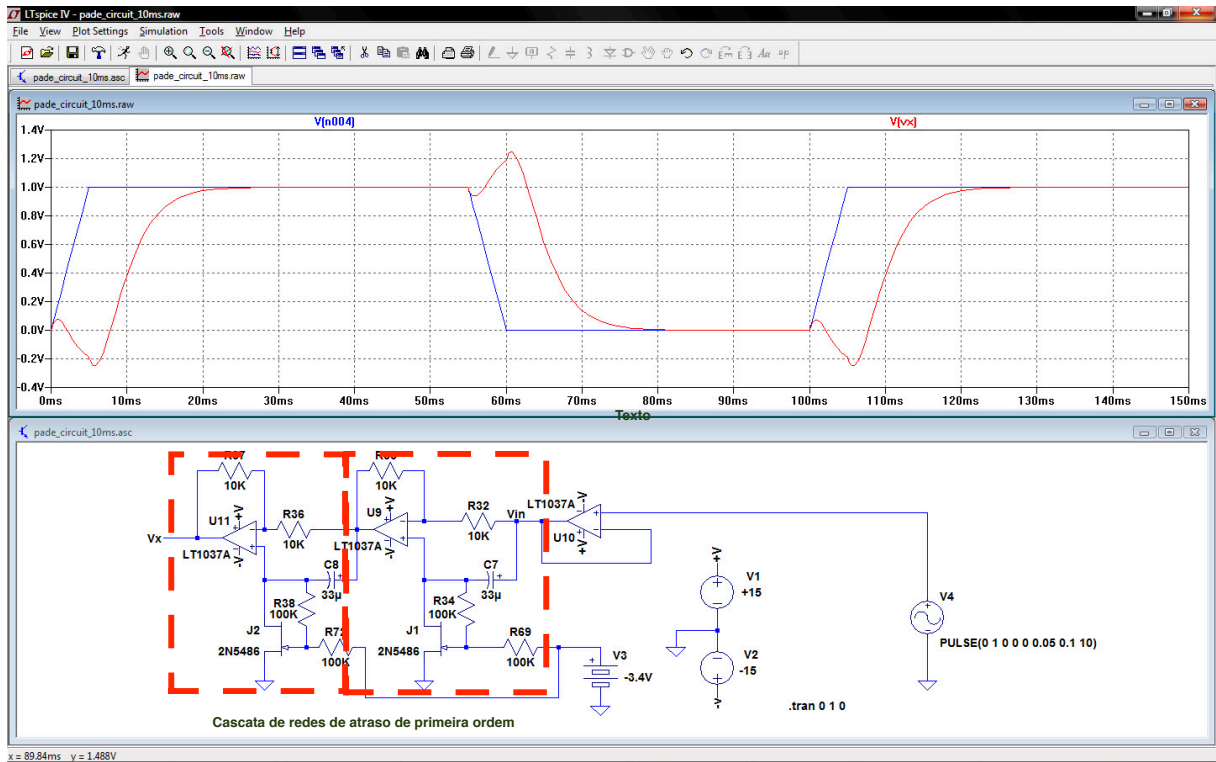


Figura 45 – Resposta ao degrau da rede de atraso de segunda ordem. (atraso de 10 ms)

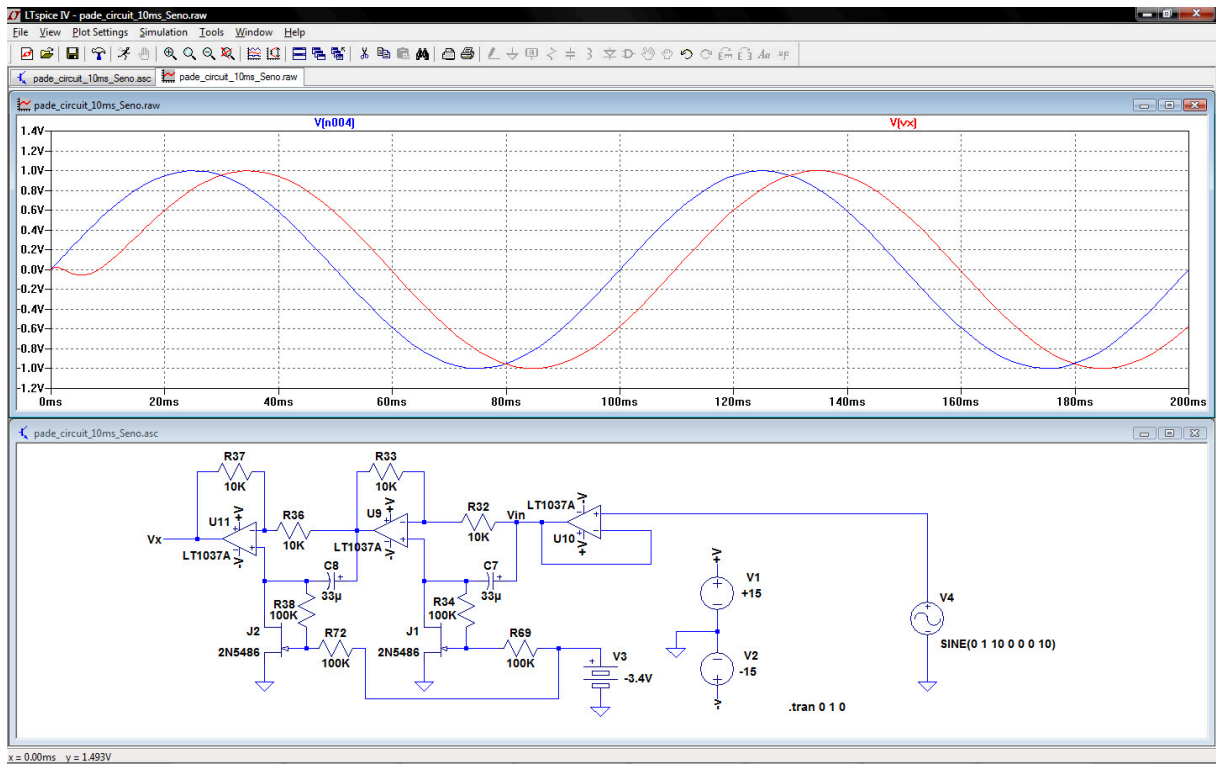


Figura 46 – Resposta harmônica da rede de atraso de segunda ordem. (atraso de 10 ms)

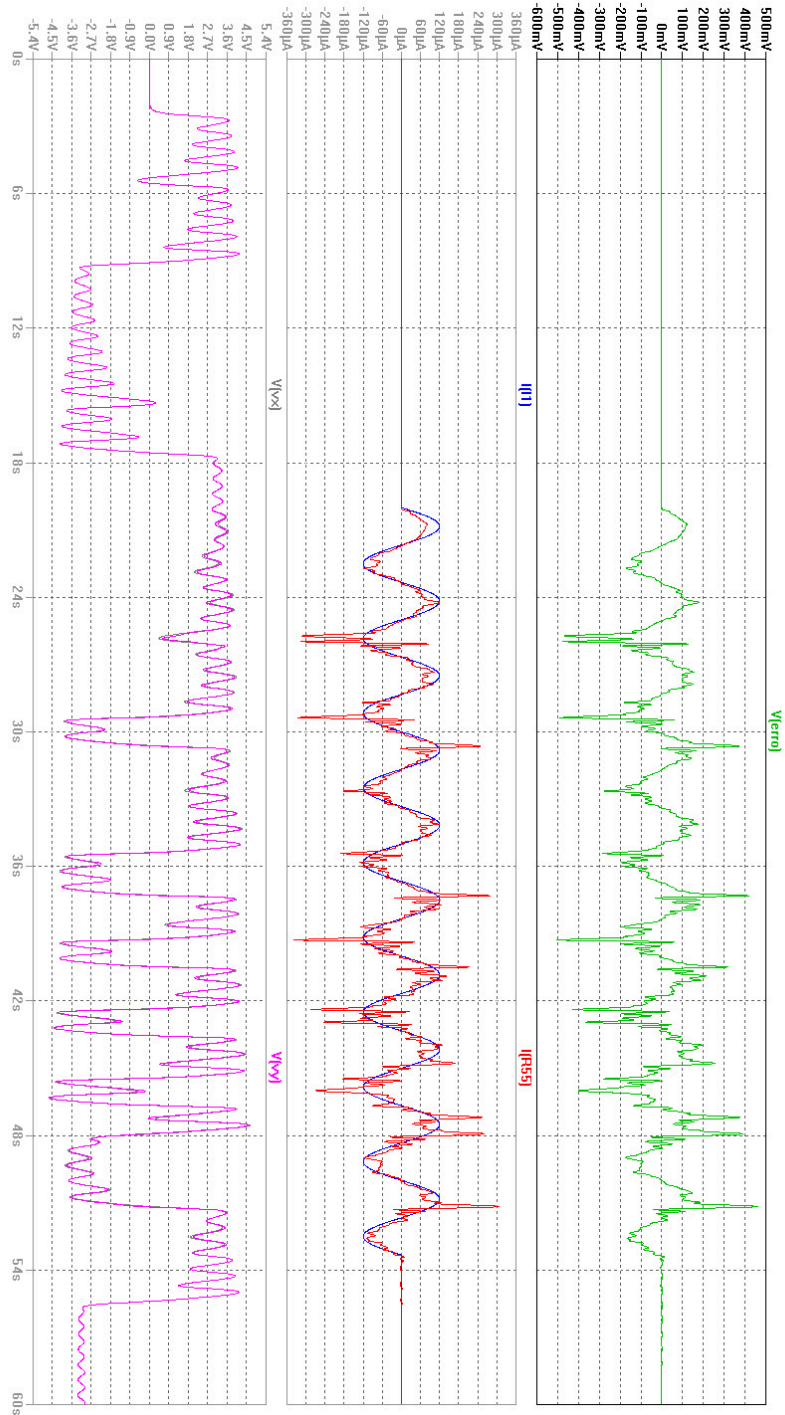


Figura 47 – Experimento de transmissão de sinal senoidal na PCChua-SPICE com atraso fixo de 60 ms nos canais de medição de informação.

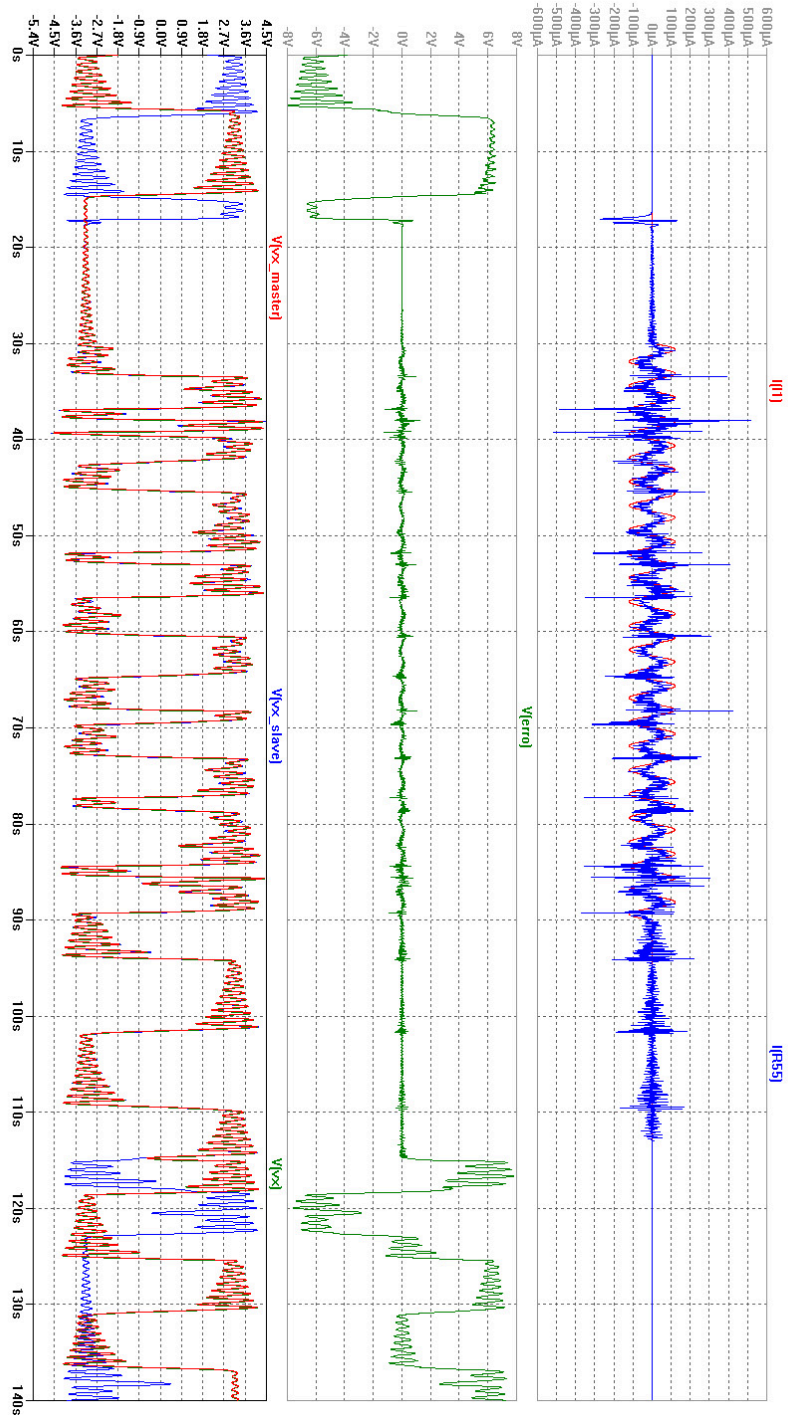


Figura 48 – Simulação ilustrativa de sincronização sujeita a atraso variante no tempo. (atraso modulado com padrão de tensão senoidal)

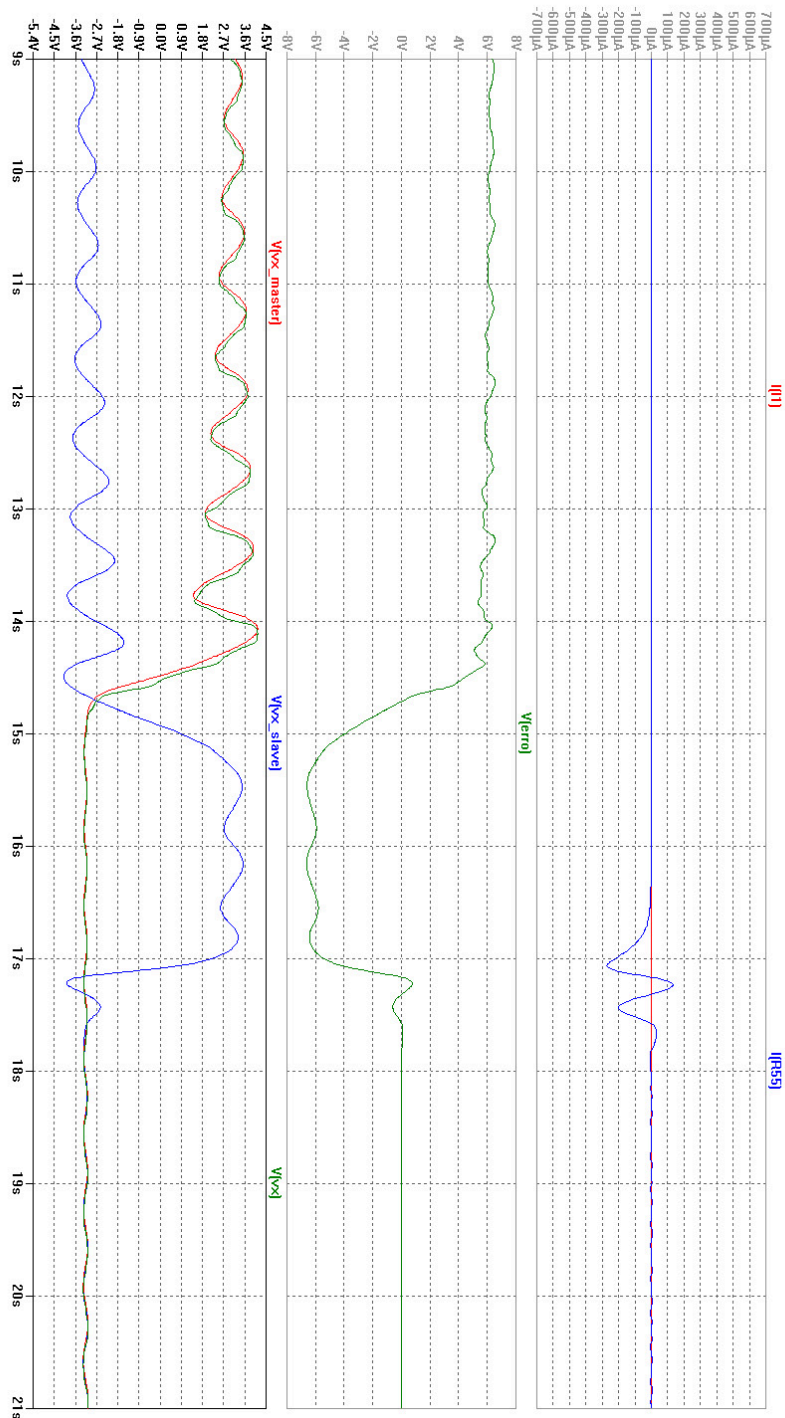


Figura 49 – Detalhes da simulação ilustrativa com atraso variante no tempo.

