

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Daniel Fabrício Nascimento Dalmazio

Multiplicadores de Fourier Vetoriais e Estabilidade Polinomial de C_0 -Semigrupos

Belo Horizonte - MG

2025

Daniel Fabrício Nascimento Dalmazio

Multiplicadores de Fourier Vetoriais e Estabilidade Polinomial de C_0 Semigrupos

Versão final da dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho.
Coorientador: Prof. Dr. Genilson Soares de Santana

Belo Horizonte - MG

2025

2025, Daniel Fabrício Nascimento Dalmazio.
Todos os direitos reservados

Dalmazio, Daniel Fabrício Nascimento.

D148m Multiplicadores de Fourier vetoriais e estabilidade polinomial de C_0 -semigrupo [recurso eletrônico] / Daniel Fabrício Nascimento Dalmazio. Belo Horizonte — 2025. 1 recurso online (101 f. il.): pdf.

Orientador: Silas Luiz de Carvalho.
Coorientador: Genilson Soares de Santana.

Disertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 86-88

1. Matemática – Teses. 2. Equações diferenciais parciais – Teses. 3. Semigrupos – Teses. 4. Fourier, Operadores integrais de – Teses. 5. Banach, Espaços de. I. Carvalho, Silas Luiz de. II. Santana, Genilson Soares de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Multiplicadores de Fourier Vetoriais e Estabilidade
Polinomial de C_0 -Semigrupos*

DANIEL FABRICIO NASCIMENTO DALMAZIO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Silas Luiz de Carvalho
Orientador - UFMG

Prof. Genilson Soares de Santana
Coorientador - UESB

Prof. Marcos da Silva Montenegro
UFMG

Prof. Pedro Tavares Paes Lopes
USP

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2025.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: <http://www.mat.ufmg.br/pgmat>

Agradecimentos

Agradeço a todos os amigos e professores da UFMG que, de diferentes formas, contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, expresso minha profunda gratidão ao professor Silas, meu orientador de longa data, pela dedicação e por toda a ajuda desde a época da graduação, quando me orientou na elaboração da monografia.

Ao Genilson, por sua valiosa contribuição, desde sua época como doutorando até a coorientação nesta dissertação e por ter me convencido a estudar a área de C_0 -semigrupos, obrigado "irmões".

Ao Jhon, pela amizade, por todos os rolês e pelas discussões, dentro e fora da UFMG, que tanto enriqueceram minha formação acadêmica. Sou especialmente grato pelas horas de estudo compartilhadas, principalmente durante a época do nosso exame de qualificação, pelo incentivo constante e pela sinceridade.

À professora Jussara, por me fazer apaixonar pela matemática ainda enquanto eu era graduando em Física, e por ser uma inspiração, especialmente no que diz respeito à didática em sala de aula. Com toda certeza, se algum dia recebi elogios pela minha didática, grande parte disso se deve à ela.

Agradeço também a todos os meus alunos de Cálculo I, que me ensinaram tanto quanto espero ter ensinado a eles. Acredito profundamente que lecionar transforma vidas. Aos professores que cruzaram meu caminho ao longo desses anos, especialmente aos professores Marcelo e Rodrigo, sou imensamente grato. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Ao pessoal da Magic pelo apoio, incentivo, rolês e eventos, que trouxeram momentos de alegria ao longo dessa jornada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Nunca pensei que fosse chegar até aqui, obrigado por tudo pessoal.

“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante”.

O Pequeno Príncipe

Resumo

Estudamos a estabilidade polinomial de C_0 -semigrupos utilizando duas ferramentas principais: os multiplicadores de Fourier e o tipo de Fourier de um espaço de Banach. Para esse estudo, apresentamos todos os pré-requisitos necessários e consideramos o resolvente do gerador de um C_0 -semigrupo, bem como suas potências, como um multiplicador de Fourier a valores em um espaço de Banach. A caracterização da estabilidade polinomial de um C_0 -semigrupo é então obtida por meio de certos multiplicadores de Fourier. Como consequência, estudamos o decaimento polinomial para espaços de Banach que possuem tipo de Fourier $p \in [1, 2]$.

Palavras Chaves: taxas de decaimentos; C_0 -semigrupos; multiplicadores de fourier; tipo de fourier.

Abstract

We study the polynomial stability of C_0 -semigroups using two main tools: Fourier multipliers and the Fourier type of a Banach space. For this study, we present all the necessary prerequisites and consider the resolvent of the generator of a C_0 -semigroup, as well as its powers, as a Fourier multiplier taking values in a Banach space. The characterization of the polynomial stability of a C_0 -semigroup is then obtained through certain Fourier multipliers. As a consequence, we study the polynomial decay for Banach spaces that have Fourier type $p \in [1, 2]$.

Keywords: decay rates; C_0 -semigroups; fourier multipliers; fourier type.

Lista de Figuras

1.1	Os três primeiros termos da sequência de Rademacher	24
2.1	Região Ω da Proposição 2.3.1	67

Notação Seleccionada

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{C}_\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \gtrless 0\}$

$p' = p/(p-1)$	Conjugado de Hölder.
X	Espaço de Banach Complexo.
$\ \cdot\ = \ \cdot\ _X$	Norma em um espaço de Banach X
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espaço dos operadores lineares e limitados de X para Y .
$\mathcal{D}(A)$	Domínio de um operador linear A .
$\operatorname{Ran}(A)$	Imagem de um operador linear A .
$\sigma(A)$	Espectro de um operador linear A .
$\rho(A)$	Conjunto resolvente de um operador linear A .
$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$	Operador resolvente de A em $\lambda \in \rho(A)$.
$(T(t))_{t \geq 0}$	C_0 -semigrupo.
\mathcal{F}	Transformada de Fourier.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$	Espaço de Schwartz vetorial.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}; X)$	Espaço das distribuições temperadas vetoriais.
C_c^∞	Espaço das funções teste.
$f(t) \lesssim g(t)$	$\exists C, t_0 \geq 0$ tal que para cada $t \geq t_0$, $f(t) \leq Cg(t)$.
$f(t) \simeq g(t)$	Se $f(t) \lesssim g(t) \lesssim f(t)$
$S_\omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \omega\}$	Setor aberto de ângulo ω .

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	17
1.1 Integração Vetorial e Espaços de Bochner	17
1.2 R-Limitação	24
1.3 Cálculo Funcional	33
1.4 Multiplicadores de Fourier Parte I	41
2 Estabilidade de C_0-semigrupos e Multiplicadores de Fourier vetoriais	50
2.1 Multiplicadores de Fourier parte II	50
2.2 Preliminares sobre estabilidade de C_0 -semigrupos	59
2.3 Algumas Estimativas Sobre o Resolvente	65
2.4 Estabilidade Polinomial via Multiplicadores Vetoriais	71
2.4.1 Demonstração do Teorema 2.4.1	78
Referências	86
A Teoria de Semigrupos	89
B Tópicos de Interpolação de Operadores	94

Introdução

Contexto Histórico

Uma questão importante no estudo das equações diferenciais consiste em determinar o comportamento assintótico das soluções. Nesse contexto, surge uma pergunta natural: a solução de uma determinada equação atinge o equilíbrio? E, em caso afirmativo, com qual velocidade?

Para equações diferenciais parciais que podem ser reescritas como equações de evolução lineares, é bem conhecido que o comportamento das soluções ao longo do tempo pode ser analisado por meio das propriedades espectrais do gerador infinitesimal do semigrupo associado. A teoria assintótica de semigrupos fornece ferramentas relevantes para estudar a convergência das soluções do problema abstrato de Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & t \geq 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (1)$$

Sabemos que a equação (1) possui uma única solução para cada $x \in X$, onde X é um espaço de Banach, e que essa solução depende continuamente do dado inicial x se, e somente se, $-A$ for o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , (para mais detalhes veja [16]). Nesse caso, a solução única de (1) é dada por $u(t) = T(t)u(0)$, $\forall t \geq 0$. Além disso, se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $u \in C^1([0, \infty); X)$ (Proposição II.6.2 de [16]).

Na teoria clássica das equações diferenciais ordinárias, em que X possui dimensão finita, o critério de estabilidade de Lyapunov (Teorema 2.10 de [16]) é uma ferramenta poderosa para estudar o comportamento assintótico de (1). No entanto, esse critério não se aplica, em geral, quando X é de dimensão infinita. Nesse contexto, o comportamento assintótico pode ser analisado por meio das propriedades espectrais do gerador infinitesimal A e do comportamento da norma do operador resolvente, um exemplo importante é o Teorema de Gearhart-Prüss, no caso de X ser um espaço de Hilbert (veja o Teorema 2.2.2)

Teorema 1. *Seja X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado, sendo A seu gerador infinitesimal. Então $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|R(is, A)\| < \infty$.*

É importante observar que uma cota uniforme para o resolvente não é suficiente para garantir estabilidade exponencial em espaços de Banach gerais (Veja o contraexemplo IV.2.7 de [16]). Nos trabalhos [13], [23] e [24] foi levantada a questão sobre a relação entre o crescimento da norma do resolvente do gerador e o decaimento do semigrupo. Mais precisamente, assumindo que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$ em (1), mas $\|R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow \infty$ a medida que $|s| \rightarrow \infty$, conclui-se que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável.

Até 2010, muita atenção foi dedicada à investigação de taxas de decaimento polinomiais para semigrupos. Em [5], foi demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 2. (Teorema 3.5 em [5]) *Seja X um espaço de Banach e $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo limitado definido em X com gerador infinitesimal $-A$ tal que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Seja $s \geq 0$ e ponha*

$$M(s) := \sup_{|\xi| \leq s} \|(i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Se existem $C, \beta > 0$ tais que $M(s) \leq C(1 + s)^\beta$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que, para cada $t > 0$

$$\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\varepsilon t^{-\frac{1}{\beta} + \varepsilon}$$

Em [25], foram obtidas estimativas melhores para o Teorema 2 no caso em que X é um espaço de Hilbert.

Teorema 3. (Teorema 2.1 em [25]) *Seja X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$, A e M como no Teorema 2. Então, se existem $C, \beta > 0$ tais que $M(s) \leq C(1 + s)^\beta$, vale*

$$\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(\frac{\log(2 + t)^{\frac{1}{\beta} + 1}}{t^{\frac{1}{\beta}}}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Em [6], foi estendido o Teorema 2 para o caso em que a norma do operador resolvente possui crescimento arbitrário

Teorema 4. (Teorema 1.5 de [6]) *Sejam X um espaço de Banach e $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo limitado em X com gerador $-A$ tal que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Seja $M : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dada por $M(s) = \sup_{|\xi| \leq s} \|(i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(\frac{1}{M_{\log}^{-1}(Ct)}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

onde M_{\log}^{-1} é a inversa a direita de $M_{\log}(s) := M(s)(\log(1 + M(s)) + \log(1 + s))$. Em particular, se $M(s) \leq C(1 + s)^\beta$ para todo $\beta > 0$ e $C > 0$, então

$$\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O\left(\frac{\log(t)}{t}\right)^{1/\beta}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ainda em [6], foi conjecturado que a correção logarítmica poderia ser removida no caso de espaços de Hilbert, embora não se pudesse esperar taxas melhores que $(M_{\log}^{-1}(Ct))^{-1}$ em espaços

de Banach gerais. Em [10], essa conjectura foi parcialmente resolvida, demonstrou-se que, no caso em que a norma do operador resolvente possui crescimento dado por alguma lei de potência, a correção logarítmica é de fato ótima em espaços de Banach gerais. No entanto, para o caso de espaços de Hilbert, foi demonstrado que a correção logarítmica pode ser descartada conforme mostra o seguinte Teorema:

Teorema 5. (Teorema 2.4 de [10]) *Sejam X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado com gerador $-A$ tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, dado $\beta > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $\|(is + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(|s|^\beta)$, $|s| \rightarrow \infty$.
2. $\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(t^{-\frac{1}{\beta}})$, $t \rightarrow \infty$.

Procurando responder a tal conjectura para uma classe maior de funções, em [7] foi obtido o seguinte resultado

Teorema 6. (Teorema 1.1 de [7]) *Sejam X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado em X com gerador $-A$ tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Sejam $\beta > 0$ e $b > 0$, então são equivalentes*

1. (a) $\|(is + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(|s|^\beta \log(|s|)^{-b})$, $|s| \rightarrow \infty$.
 (b) $\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(t^{-\frac{1}{\beta}} \log(t)^{-\frac{b}{\beta}})$, $t \rightarrow \infty$.
2. Se $\|(is + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(|s|^\beta \log(|s|)^b)$, $|s| \rightarrow \infty$. Então, para cada $\varepsilon > 0$

$$\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(t^{-\frac{1}{\beta}} \log(t)^{\frac{b}{\beta} + \varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Finalmente, em [31], o resultado do Teorema 6 foi estendido para uma classe mais geral de funções, a saber, as de crescimento positivo. Diz-se que uma função contínua crescente $M : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ é de crescimento positivo se existem $\alpha > 0$, $C \in (0, 1]$ e $s_0 > 0$ tais que

$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq C\lambda^\alpha, \quad \lambda \geq 1, \quad s \geq s_0$$

Teorema 7. (Teorema 3.2 de [31]) *Sejam X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado definido em X com gerador $-A$, e seja $M : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função de crescimento positivo. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e $\|(is + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(M(|s|))$, $|s| \rightarrow \infty$.
2. $\|T(t)(1 + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(M^{-1}(t))$, $t \rightarrow \infty$.

Até o momento esses são os principais resultados da teoria assintótica de C_0 -semigrupos limitados. A literatura disponível sobre decaimento polinomial ou outros tipos de decaimento trata quase exclusivamente de semigrupos uniformemente limitados. O primeiro resultado sobre decaimento polinomial para semigrupos não limitados foi obtido por [5]. Para o que se segue $\omega_0(T) := \lim_{t \rightarrow \infty} (\log(\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)})t^{-1}$.

Teorema 8. (Proposição 3.4 de [5]) Sejam X um espaço de Banach e $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo definido em X com gerador $-A$ tal que existe $\beta > 0$ de forma que $\lambda \mapsto (\lambda + A)^{-1}(1 + A)^{-\beta}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0(T)$ possui extensão holomorfa limitada para $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$. Então, existe $C_{n,\delta} > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, 1]$ e $t > 0$ vale

$$\|T(t)(1 + A)^{-\beta(n+1)-1-\delta}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{n,\delta} t^{-n} \quad (2)$$

Ainda em [5], acreditava-se que seria possível melhorar os resultados do Teorema 8 caso alguma propriedade geométrica do espaço de Banach fosse admitida. Algum tempo depois, descobriu-se que, de fato, caso alguma propriedade geométrica fosse considerada, como por exemplo o Tipo de Fourier do espaço (veja a Definição 2.1.2), a estimativa em (2) poderia ser melhorada, conforme demonstra Rozendaal e Veraar em [30]. Para isso, estabeleceu-se uma relação entre a estabilidade polinomial e certos multiplicadores de Fourier (veja a Definição 2.1.7), possibilitando melhorias na taxa de decaimento em (2). Em [30], os seguintes resultados foram demonstrados, para mais detalhes do que se segue veja as seções 2.1 e 2.4 do presente texto.

Teorema 9. (Teorema 4.6 de [30]) Seja $-A$ o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , suponha que A tem resolvente de crescimento (α, β) para algum $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja Y um espaço (A, n) -Admissível. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. $\sup_{t \geq 0} \|t^n T(t)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$.
2. Existem $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$ e $q \in [p, \infty]$ tais que

$$\begin{aligned} \psi(\cdot)R(i \cdot, A)^k &\in \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)), \\ (1 - \psi(\cdot))R(i \cdot, A)^k &\in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)) \end{aligned}$$

para todo $k \in \{n - 1, n, n + 1\} \cap \mathbb{N}$.

Mais ainda, se vale (1) ou (2), então $R(i \cdot, A)^k \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X))$ para

- (i) $n \geq 2$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$,
- (ii) $k = n \geq 1$ e $1 \leq p < q \leq \infty$,
- (iii) $k = n + 1$, $p = 1$ e $q = \infty$.

Como consequência do Teorema 9 temos a seguinte estabilidade polinomial.

Teorema 10. (Teorema 4.9 de [30]) Sejam $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ e A um operador setorial injetivo com resolvente de crescimento (α, β) definido em um espaço de Banach X com tipo de Fourier $p \in [1, 2]$. Seja $r \in [1, \infty]$ tal que $1/r = 1/p + 1/p'$, e seja $\sigma, \tau \in [0, \infty)$ tais que $\sigma > \alpha - 1$ e $\tau > \beta + 1/r$. Então, para cada $\rho \in [0, \min(\frac{\sigma+1}{\alpha} - 1, \frac{\tau-r-1}{\beta} - 1))$, existe uma constante $C_\rho \in [0, \infty)$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\rho^\tau, X)} \leq C_\rho t^{-\rho}, \quad (t \in [1, \infty)). \quad (3)$$

Se $p = 2$, então (3) também vale para $\tau \geq \beta$ e $\rho \in [0, \infty)$ com $\rho < \frac{\sigma+1}{\alpha} - 1$ e $\rho \leq \frac{\tau}{\beta} - 1$.

Em 2024, [34], combinando as técnicas de [30] e [7], consideraram resolventes de crescimentos mais gerais e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 11. (Teorema 1.13 de [34]) *Sejam $\beta > 0$, $b \geq 0$ e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo definido no espaço de Banach X sendo $-A$ seu gerador infinitesimal. Suponha que X possui tipo de Fourier $p \in [1, 2]$ e que $\overline{\mathbb{C}}_- \subset \rho(A)$ e que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$,*

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim (1 + |\lambda|)^\beta (\log(2 + |\lambda|))^b.$$

Sejam $r \in [1, \infty]$ tal que $1/r = 1/p - 1/p'$, e $\tau > 0$ tal que $\tau > \beta + 1/r$. Então, para cada $\delta > 0$, existem constantes $C_{\delta, \tau} \in [0, \infty)$ e $t_0 \geq 1$ tais que para cada $t \geq t_0$,

$$\|T(t)(1 + A)^{-\tau}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{\delta, \tau} t^{1 - \frac{\tau - r^{-1}}{\beta}} \log(1 + t)^{\frac{b(\tau - r^{-1})}{\beta} + \frac{1 + \delta}{r}} \quad (4)$$

Uma questão importante é a obtenção de taxas mais precisas que (4), ou seja, se é possível remover o fator logarítmico obtido em [34]. Em [15], utilizando técnicas de análise harmônica em espaços de Besov e estimativas envolvendo multiplicadores de Fourier, foi demonstrado que é possível remover o fator logarítmico mesmo em espaços de Banach gerais, conforme o seguinte Teorema.

Teorema 12. (Teorema 1.1 de [15]) *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ definido em um espaço de Banach X . Suponha que X possui tipo de Fourier $p \in [1, 2]$, que $\mathbb{C}_+ \subset \rho(A)$ e que existem constantes $\beta > 0$ e $C \geq 0$ tais que*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + |\lambda|)^\beta \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Seja $\rho \geq 0$ e ponha $\tau := (\rho + 1)\beta + 1/p - 1/p'$. Então existe $C_\rho \geq 0$ tal que, para todo $t \geq 1$

$$\|T(t)(1 + A)^{-\tau}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\rho t^{-\rho}.$$

O objetivo desta dissertação é estudar as ferramentas necessárias para a análise dos Teoremas 9 e 10, o que inclui certas técnicas com multiplicadores de Fourier desenvolvidas em [29]. Além disso, busca-se oferecer um texto introdutório e didático sobre o tema, incluindo o estudo de resultados adicionais que, embora não sejam indispensáveis para a compreensão dos Teoremas 9 e 10, enriquecem a formação e entendimento do leitor sobre o assunto.

O texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos os pré-requisitos para os Teoremas principais. Na Seção 1.1, discutimos alguns resultados sobre a integração de funções com valores em um espaço de Banach, parte essencial para quase toda a teoria moderna de semigrupos. Na Seção 1.2, abordamos o conceito de R -limitação, uma ferramenta importante em análise harmônica vetorial. Esse conceito é útil tanto no estudo de certos multiplicadores de Fourier vetoriais quanto na análise de taxas de decaimento de semigrupos. Na Seção 1.3,

apresentamos o cálculo funcional, especificamente o cálculo funcional de Dunford-Riesz, que tem se mostrado uma ferramenta crucial na teoria de semigrupos. O gerador de um C_0 -semigrupo é um operador setorial, conforme o Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.2.1). Na Seção 1.4, iniciamos o estudo sobre multiplicadores de Fourier, começando pela teoria escalar e pelo Teorema de Mikhlin (Teorema 1.4.2).

O Capítulo 2 concentra-se nos resultados principais. Na Seção 2.1, damos continuidade ao estudo de multiplicadores de Fourier, agora no contexto vetorial. Na Seção 2.2, apresentamos dois resultados clássicos sobre a estabilidade de C_0 -semigrupos: o Teorema de Hille-Yosida e o Teorema de Gearhart-Prüss. Na Seção 2.3, estudamos algumas estimativas sobre o operador resolvente do gerador de um C_0 -semigrupo, utilizando o conceito de R -limitação. Finalmente, na Seção 2.4, reunimos a teoria desenvolvida anteriormente e aplicamos na demonstração dos resultados principais sobre estabilidade polinomial de C_0 -semigrupos. Algumas informações elementares sobre semigrupos estão no Apêndice A, e alguns resultados sobre interpolação, usados na demonstração do Teorema de Mikhlin, são apresentados no Apêndice B.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as ferramentas básicas que utilizaremos ao longo do texto. Desenvolveremos uma teoria de integração para funções que assumem valores em um espaço de Banach X . Vamos apresentar os chamados espaços de Bochner e como esses espaços generalizam os espaços L^p .

1.1 Integração Vetorial e Espaços de Bochner

Um dos operadores mais importantes em análise é o operador transformada de Fourier que é definido, para o caso de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, como

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx. \quad (1.1)$$

Ao longo do texto iremos alternar entre as notações $\mathcal{F}f$ e \hat{f} sempre que for conveniente. Um resultado importante, conhecido como teorema de Plancherel [1],[17], afirma que esse operador é um isomorfismo em $L^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Essa primeira seção se dedica a estudar propriedades relacionadas à integrabilidade de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ onde X é um espaço de Banach qualquer, ou seja, queremos estudar funções que assumem valores vetoriais. Surge uma pergunta natural: será que podemos definir a transformada de Fourier para uma função desse tipo? E quais são as condições para que tal transformada esteja bem definida?

Podemos definir tal operador de forma análoga ao caso escalar; entretanto, neste caso, $f(x)$ representa um vetor no espaço de Banach X , enquanto $e^{-ix \cdot \xi}$ representa um número complexo. Portanto, trabalharemos com espaços de Banach sobre o corpo dos complexos, e a integral que aparece em (1.1) é chamada de integral de Bochner. A referência principal para esta seção é [36].

Começemos por um primeiro exemplo de função vetorial. Sejam (Ω, \mathcal{A}) um espaço mensurável, i.e, um conjunto Ω munido com uma σ -álgebra, X um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função escalar e $x \in X$ um vetor qualquer, defina $f \otimes x : \Omega \rightarrow X$ como

$$(f \otimes x)(s) = f(s)x, \quad s \in \Omega.$$

A ideia dessa função vetorial é colocar a função $f(s)$ na "direção" do vetor x . Note que $(f \otimes x)(s) \in \text{span}(x)$ para todo $s \in \Omega$ pois, dado $s \in \Omega$, $(f \otimes x)(s)$ é um múltiplo de x .

Definição 1.1.1. *Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ será simples, se existirem $S_1, \dots, S_N \subset \Omega$ conjuntos mensuráveis e disjuntos, e vetores não nulos $x_1, \dots, x_N \in X$ tais que*

$$f = \sum_{n=1}^N \chi_{S_n} \otimes x_n, \quad (1.2)$$

em que χ_A denota a função característica do conjunto A . Vamos denotar por $\Sigma(\Omega; X)$ o espaço vetorial das funções simples.

Observe que, por (1.2), $f(s) \in \text{span}\{x_1, \dots, x_N\}$ para todo $s \in \Omega$.

Definição 1.1.2. 1. *$f : \Omega \rightarrow X$ é mensurável se para todo conjunto de Borel $B \subset X$, $f^{-1}(B)$ é mensurável, i.e, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

2. *$f : \Omega \rightarrow X$ é fortemente mensurável (ou Bochner mensurável) se f é o limite pontual de funções simples, i.e, se existe $(f_n) \subset \Sigma(\Omega, X)$ tal que $f_n(s) \rightarrow f(s)$ para todo $s \in \Omega$.*

3. *$f : \Omega \rightarrow X$ é fracamente mensurável se para todo funcional linear contínuo $x^* \in X^*$ a função escalar $\langle f, x^* \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável¹.*

Definição 1.1.3. *Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow X$ assume valores separáveis, se existe um subespaço $X' \subset X$ separável e fechado tal que $f(\Omega) \subset X'$.*

Com isso podemos enunciar o Teorema de mensurabilidade de Pettis

Teorema 1.1.1. (Pettis) *Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é fortemente mensurável se, e somente se, for fracamente mensurável e assume valores separáveis.*

Demonstração. Suponha que f é fortemente mensurável, então f é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis, e portanto mensurável. Da continuidade dos elementos de X^* segue que f é fracamente mensurável. Resta mostrar que f assume valores separáveis. Seja (f_n) uma sequência de funções simples tal que $f_n \rightarrow f$ pontualmente; defina $X_n = \text{span}(f_n(\Omega))$, nesse caso $\dim(X_n) < \infty$. Em particular, X_n é separável, e definindo $X' = \overline{\text{span}(\bigcup_n X_n)}$, temos que X' é separável. Como $f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)$ e X' é fechado, segue-se que $f(s) \in X'$, e portanto f assume valores separáveis.

¹A notação $\langle f, x^* \rangle$ representa a ação do funcional x^* no vetor $f(s)$, i.e, $\langle f, x^* \rangle(s) = \langle f(s), x^* \rangle$

Suponha agora que f é fracamente mensurável e assume valores separáveis. Seja (x_n) uma sequência densa em X , e para todo $n \in \mathbb{N}$, defina $\varphi_n : X \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $\forall x \in X$, $\|x - \varphi_n(x)\|_X = \min_{1 \leq j \leq n} \|x - x_j\|_X$, se por acaso mais de um elemento atingir o mínimo, escolha o de menor índice. Como (x_n) é denso em X , vale que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq n} \|x - x_j\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \varphi_n(x)\|_X,$$

concluindo que $\lim \varphi_n(x) = x$ para todo $x \in X$. Defina a sequência $f_n : \Omega \rightarrow X$ por $f_n(s) = \varphi_n(f(s))$ para todo $s \in \Omega$, então nesse caso $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = f(s)$. Mostremos que f_n é mensurável; para isso, note que

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(x_k) &= \{s \in \Omega \mid \varphi_n(f(s)) = x_k\} \\ &= \{s \in \Omega \mid \|f(s) - x_k\|_X = \min_{1 \leq j \leq n} \|f(s) - x_j\|_X\}. \end{aligned}$$

Usando a separabilidade de X e o Teorema de Hahn-Banach [33], podemos obter uma sequência (x_n^*) em X^* tal que $\|x\|_X = \sup |\langle x, x_n^* \rangle|$. Logo,

$$s \mapsto \|f(s) - x_j\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f(s) - x_j, x_n^* \rangle|$$

é um supremo enumerável de funções mensuráveis, pois f é fracamente mensurável, concluindo que

$$s \mapsto \min_{1 \leq j \leq n} \|f(s) - x_j\|_X$$

é mensurável, o que mostra que $f_n^{-1}(x_k)$ é mensurável. Uma vez que f_n assume valores em um espaço de dimensão finita, f_n é simples e isso conclui a demonstração. \square

O próximo resultado será útil quando definirmos a transformada de Fourier vetorial.

Proposição 1.1.1. *Se $f : \Omega \rightarrow X$ é fortemente mensurável e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ é mensurável, então $\varphi f : \Omega \rightarrow X$ definida por $(\varphi f)(s) = \varphi(s)f(s)$ é fortemente mensurável*

Demonstração. Ao invés de usarmos aproximação por funções simples, vamos usar o Teorema 1.1.1. Precisamos mostrar que φf é fracamente mensurável e que assume valores em um espaço separável. Para a parte fracamente mensurável, podemos fazer

$$\langle \varphi f, x^* \rangle(s) = \langle \varphi(s)f(s), x^* \rangle = \varphi(s) \langle f(s), x^* \rangle.$$

Como, por hipótese φ é mensurável e f é fortemente mensurável (logo fracamente mensurável) segue-se que φf é fracamente mensurável. Além disso, como f é fortemente mensurável, pelo Teorema 1.1.1, existe $X' \subset X$ separável tal que $f : \Omega \rightarrow X'$, portanto $(\varphi f)(s) = \varphi(s)f(s) \in X'$ para todo $s \in \Omega$. \square

Definição 1.1.4. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e $f, g : \Omega \rightarrow X$. Dizemos que $f = g$ em quase todo ponto, ou μ -q.t.p, se $\mu(\{s \in \Omega; f(s) \neq g(s)\}) = 0$, diremos que $f = g$ fracamente em quase todo ponto, ou fracamente μ -q.t.p, se $\forall x^* \in X^*$ valer $\langle f, x^* \rangle(s) = \langle g, x^* \rangle(s)$ μ -q.t.p.*

Lema 1.1.1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, $f, g : \Omega \rightarrow X$ funções fortemente mensuráveis. Então $f = g$ μ -q.t.p se, e somente se, $f = g$ fracamente μ -q.t.p*

Demonstração. \Rightarrow) Trivial.

\Leftarrow) Para cada $x^* \in X^*$, considere o conjunto

$$N_{x^*} = \{s \in \Omega | \langle f(s), x^* \rangle \neq \langle g(s), x^* \rangle\},$$

que por hipótese satisfaz $\mu(N_{x^*}) = 0$. Como N_{x^*} depende do funcional x^* e como o dual de X em geral, não é enumerável, pode ocorrer que uma união arbitrária de conjuntos de medida nula ser um conjunto de medida positiva. Para contornar tal problema usaremos o Teorema 1.1.1. Sabemos que f, g são funções fortemente mensuráveis, segue-se do Teorema 1.1.1 que existem X'_f e X'_g espaços separáveis e fechados tais que $f : \Omega \rightarrow X'_f$ e $g : \Omega \rightarrow X'_g$. Defina $X' = \overline{\text{span}(X'_f \cup X'_g)}$ e note que $f, g : \Omega \rightarrow X'$, com X' separável e fechado. Usando a definição de separabilidade e o Teorema de Hahn-Banach, existe $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ em X^* que separa pontos de X' , i.e, se $\langle x'_1, x_n^* \rangle = \langle x'_2, x_n^* \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x'_1 = x'_2$. Vamos usar essa sequência de funcionais para definir o conjunto

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{x_n^*};$$

note que $\mu(N) = 0$ pois N é uma união enumerável de conjuntos de medida nula. Além disso, se $s \notin N$, então $\langle f(s), x_n^* \rangle = \langle g(s), x_n^* \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$; pelo Teorema de Hahn-Banach, segue-se que $f(s) = g(s)$ concluindo que $f = g$ μ -q.t.p \square

Estamos em condições de definir o que chamamos de espaços de Bochner $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$, que generalizam os espaços $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função qualquer. Defina

$$\begin{aligned} \|f\|_X : \Omega &\rightarrow [0, \infty) \\ s &\mapsto \|f(s)\|_X. \end{aligned}$$

Se f for mensurável, então $\|f\|_X$ é mensurável, pois é a composição de uma função mensurável f com a função contínua $\|\cdot\|_X$.

Definição 1.1.5. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, X um espaço de Banach e $p \in [1, \infty]$. Definimos o conjunto $L^p(\mathcal{A}, \Omega, \mu; X)$ como o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow X$ fortemente*

mensuráveis tais que $\|f\|_X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)} = \left\| \|f\|_X \right\|_{L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} \|f(s)\|_X^p d\mu(s) \right)^{1/p}, & \text{se } p \neq \infty \\ \text{ess. sup}_{s \in \Omega} \|f(s)\|_X, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

Os espaços $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$ são chamados de espaços de Bochner e iremos abreviar $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$ para $L^p(\Omega; X)$ sempre que estiver claro quais a σ -álgebra e a medida que serão usadas. Além disso, identificaremos duas funções $f, g \in L^p(\Omega; X)$ se $f = g$ μ -q.t.p.

Observação 1.1.1. Usando a mesma prova para o caso escalar $L^p(\Omega)$, podemos provar que $L^p(\Omega; X)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.2. Denote por $\Sigma(\Omega, X)$ o conjunto das funções simples como na Definição 1.1.1; então, $\forall p \in [1, \infty)$, $\Sigma(\Omega, X) \cap L^p(\Omega; X)$ é denso em $L^p(\Omega; X)$

Para $p \in [1, \infty]$ definimos o expoente conjugado de p como $p' = p/(p-1)$ ou dizemos que p e p' são expoentes conjugados quando $1/p + 1/p' = 1$. Por convenção 1 e ∞ são expoentes conjugados. No caso escalar, sabemos que o dual de $L^p(\Omega)$ é $L^{p'}(\Omega)$ para $p \in (1, \infty)$. mostremos que toda função $g \in L^{p'}(\Omega, X^*)$ induz um funcional em $L^p(\Omega, X)$, que iremos denotar por Φ_g e que age da seguinte forma:

$$\forall f \in L^p(\Omega; X), \quad \langle f, \Phi_g \rangle = \int_{\Omega} \langle f(s), g(s) \rangle d\mu(s).$$

Repare que do lado esquerdo temos a dualidade em $L^p(\Omega, X)$ e $L^{p'}(\Omega, X^*)$ enquanto que do lado direito temos a dualidade em $L^p(\Omega)$ e $L^{p'}(\Omega)$. Para mostrar a continuidade de Φ , note que

$$|\langle f, \Phi_g \rangle| \leq \int_{\Omega} |\langle f(s), g(s) \rangle| d\mu(s) \leq \int_{\Omega} \|f(s)\|_X \|g(s)\|_{X^*} d\mu(s) \leq \|f\|_{L^p(\Omega; X)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega; X^*)}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder, já que $\|f\|_X \in L^p(\Omega)$ e $\|g\|_{X^*} \in L^{p'}(\Omega)$. Assim,

$$\|\Phi_g\|_{L^p(\Omega, X)^*} \leq \|g\|_{L^{p'}(\Omega, X^*)}.$$

o que mostra que $\Phi : L^{p'}(\Omega; X^*) \rightarrow L^p(\Omega; X)^*$ é contínuo.

No caso em que $X = \mathbb{K}$ e $p \in [1, \infty)$, Φ é um isomorfismo isométrico, i.e, toda $\varphi \in L^p(\Omega)^*$ é da forma $\Phi_g = \varphi$ para alguma $g \in L^{p'}(\Omega)$ e $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$. Isso sugere uma pergunta natural: para quais espaços de Banach X , Φ é um isomorfismo isométrico? A resposta para essa pergunta está relacionada aos espaços que possuem a propriedade de Radon-Nikodym, mas não iremos entrar em detalhes sobre esse assunto (referimos a [36] para mais detalhes).

Estamos em condições de definir a integral de Bochner, que será o substituto da integral de Lebesgue para o caso de funções vetoriais. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e X um espaço

de Banach. Para uma função simples $f = \sum \chi_{S_n} \otimes x_n$, definimos

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^N \mu(S_n) x_n$$

A demonstração de que essa definição não depende de como representamos f , que $\|\int_{\Omega} f d\mu\|_X \leq \int_{\Omega} \|f\|_X d\mu$ e que $\int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$ são totalmente análogas ao caso escalar. Agora vamos definir a integral de Bochner, objeto esse que será muito importante para o restante deste trabalho

Definição 1.1.6. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função fortemente mensurável. A função f será Bochner integrável com respeito a medida μ se existir uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \rightarrow X$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\|_X d\mu = 0.$$

Observe que $s \mapsto \|f(s) - f_n(s)\|_X$ é mensurável, logo faz sentido a definição acima; além disso,

$$\left\| \int_{\Omega} (f_n - f_m) d\mu \right\|_X \leq \int_{\Omega} \|f_n - f_m\|_X d\mu \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X d\mu + \int_{\Omega} \|f - f_m\|_X d\mu,$$

ou seja, a sequência $\int_{\Omega} f_n d\mu$ é Cauchy em X , e como X é Banach, segue-se que tal sequência é convergente.

Definição 1.1.7. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função Bochner integrável, Definimos a integral de Bochner de f com respeito a medida μ como*

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Além disso, se f é Bochner integrável e se $f = g$ μ -q.t.p, então g é Bochner integrável e a integral de Bochner de f e g coincidem

Proposição 1.1.3. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função fortemente mensurável. f é Bochner integrável com respeito a medida μ se, e somente se, $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$, e nesse caso vale*

$$\left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\|_X \leq \int_{\Omega} \|f\|_X d\mu.$$

Demonstração. \Leftarrow) Suponha $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$; como f é fortemente mensurável, podemos tomar uma sequência de funções simples f_n com $f_n \rightarrow f$ q.t.p e $\|f_n\|_X \leq \|f\|_X$. Nesse caso, usando o Teorema da Convergência Dominada clássico do caso escalar, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X d\mu = 0$$

concluindo que f é Bochner integrável.

\Rightarrow) Suponha agora que f é Bochner integrável. Seja então (f_n) uma sequência de funções simples como na Definição 1.1.6. Nesse caso, para n suficientemente grande temos

$$\int_{\Omega} \|f\|_X d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\|_X d\mu + \int_{\Omega} \|f_n\|_X d\mu < \infty,$$

o que mostra que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; X)$. Agora note que pela desigualdade triangular, se f é uma função simples, vale $\|\int_{\Omega} f d\mu\|_X \leq \int_{\Omega} \|f\|_X d\mu$, e o resultado geral segue-se por densidade. \square

Os clássicos teoremas de convergência nos espaços de Lebesgue também possuem versões para o caso vetorial, enunciaremos o teorema mais importante nessa direção

Teorema 1.1.2. (*Convergência Dominada*) *Seja $f_n : \Omega \rightarrow X$ uma sequência de funções Bochner integráveis. Se existem $f : \Omega \rightarrow X$ e uma função não negativa $g \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ tais que f_n converge para f μ -q.t.p e $\|f_n\|_X \leq g$ μ -q.t.p, então f é Bochner integrável e vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X d\mu = 0.$$

Em particular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Demonstração. Basta notar que $\|f_n - f\|_X \leq 2g$ μ -q.t.p, e aplicar o Teorema da Convergência Dominada para o caso escalar. \square

Observação 1.1.2. *Note que se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear e limitado entre dois espaços de Banach, então $Tf : \Omega \rightarrow Y$ é Bochner integrável e, pelas Definições 1.1.6 e 1.1.7, vale*

$$T \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} Tf d\mu;$$

em particular, se $x^ \in X^*$ é um funcional linear limitado qualquer, então*

$$\left\langle \int_{\Omega} f d\mu, x^* \right\rangle = \int_{\Omega} \langle f, x^* \rangle d\mu.$$

Essa observação terá importantes aplicações quando T for um operador fechado.

1.2 R-Limitação

Nesta seção estudaremos o conceito de família de operadores R -limitado. Tal conceito é muito útil para enfraquecer certas hipóteses sobre decaimento e/ou diferenciabilidade de certos multiplicadores de Fourier (como veremos no Capítulo 2) e também no estudo de taxas de decaimento para semigrupos que veremos mais adiante. Vamos começar com a definição de sequência de Rademacher.

Definição 1.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência de funções $r_n : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ definida por

$$r_n(t) = \text{sign}(\text{sen}(2^n \pi t))$$

é chamada de sequência de Rademacher.

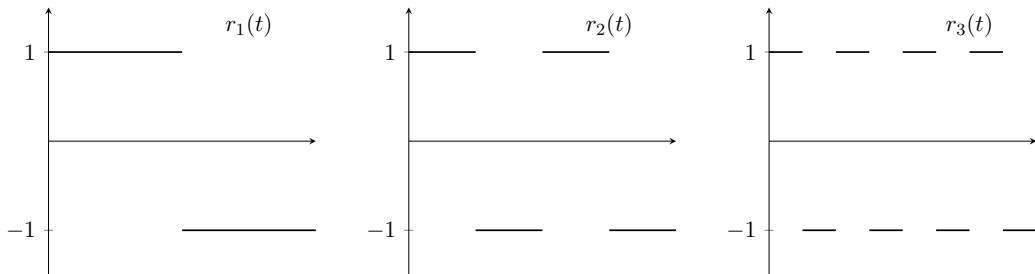


Figura 1.1: Os três primeiros termos da sequência de Rademacher

Note que, $r_n(t)$ induz uma partição do intervalo $[0, 1]$ em 2^n partes, e pela Figura 1, vemos que $r_n(t)$ é uma sequência ortonormal em $L^2[0, 1]$ mas não uma base ortonormal, pois $\cos(2\pi t)$ é um exemplo de função ortogonal a $r_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos como usar a sequência de Rademacher para estimar certas normas L^p , vamos começar com o seguinte resultado

Teorema 1.2.1. (Desigualdade de Khinchine) Para cada $p \in [1, \infty)$ existe uma constante $C(p)$ tal que para toda sequência $(a_n)_{n=1}^N \subset \mathbb{C}$ vale

$$\frac{1}{C(p)} \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n=1}^N r_n(\cdot) a_n \right\|_{L^p([0,1])} \leq C(p) \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração. Vamos dividir em casos.

• **Caso $p = 2$.** O resultado se segue do fato que r_n é uma sequência ortogonal em $L^2([0, 1])$ com $C(2) = 1$.

• **Caso $p > 2$.** Vamos supor, sem perda de generalidade que $\sum_{n=1}^N |a_n|^2 = 1$ e considere $f(t) = \sum_{n=1}^N a_n r_n(t)$, mostremos que

$$\int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq 2e^{\frac{1}{2}}.$$

Note que

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \exp\left(\sum_{n=1}^N a_n r_n(t)\right) dt = \prod_{n=1}^N \int_0^1 e^{a_n r_n(t)} dt = \prod_{n=1}^N \frac{e^{a_n} + e^{-a_n}}{2}.$$

Observe que $e^\beta + e^{-\beta} \leq 2e^{\frac{\beta^2}{2}}$ (basta comparar os coeficientes das séries de potência), portanto

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt \leq \prod_{n=1}^N e^{\frac{a_n^2}{2}} = \exp\left(\sum_{n=1}^N \frac{a_n^2}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

e esta estimativa vale para $|f(t)| = -f(t)$.

Seja $p \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$, então (novamente comparando os termos das séries de potência)

$$|y|^p < p!(1 + |y|^p/p!) \leq p!e^{|y|} \quad (1.3)$$

Portanto, fazendo $|f(t)| = y$ em (1.3) e integrando, obtemos

$$\left\| \sum_{n=1}^N r_n a_n \right\|_{L^p([0,1])} = \int_0^1 |f(t)|^p dt \leq p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq 2p!e^{\frac{1}{2}}$$

o que mostra que $\|f\|_{L^p([0,1])} \leq C(p) = (2p!e^{1/2})^{1/p}$, por propriedades da norma L^p , concluímos que $\|f\|_{L^p} \leq C(p)\|f\|_{L^2}$. Para obter a outra desigualdade lembre-se que, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, então valem as inclusões $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ sempre que $p \geq q$, portanto para $p \in \mathbb{N}$ com $p \geq 2$ vale $\|f\|_{L^2([0,1])} \leq \|f\|_{L^p([0,1])}$ o que conclui para o caso em que $p \in \mathbb{N}$ e $p > 2$. Se $p \in (2, \infty)$ então, pondo $q = [p] + 1$ ($[x]$ denota o menor inteiro maior ou igual a x) pelo que foi mostrado anteriormente, concluímos que $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \leq C(p)\|f\|_{L^2}$ isso demonstra a desigualdade para $p \geq 2$.

•**Caso** $1 \leq p < 2$. Tome $\theta \in (0, 1)$ de forma que $2 = \theta p + (1 - \theta)4$, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} \cdot |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^\theta \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta} \\ &= \|f\|_{L^p}^{p\theta} \|f\|_{L^4}^{4(1-\theta)}. \end{aligned}$$

Note que já demonstramos a desigualdade $\|f\|_{L^4} \leq C(4)\|f\|_{L^2}$, portanto,

$$\|f\|_{L^p}^{p\theta} \|f\|_{L^4}^{4(1-\theta)} \leq C(4)^{4(1-\theta)} \|f\|_{L^p}^{p\theta} \|f\|_{L^2}^{4(1-\theta)}$$

dividindo ambos os membros por $C(4)^{4(1-\theta)} \|f\|_{L^2}^{4(1-\theta)}$ concluímos um dos lados da desigualdade, enquanto que o outro novamente se segue pela inclusão dos espaços L^p já mencionada e isso conclui a demonstração. \square

Note que a desigualdade de Khinchine pode ser interpretada da seguinte forma, se denotarmos por rad_p o espaço das séries $\sum r_n a_n$ que convergem na norma $L^p([0, 1])$, então tal espaço é isomorfo ao espaço ℓ^2 para todo $p \in [1, \infty)$, i.e, em rad_p todas as normas $L^p([0, 1])$ são equivalentes.

Gostaríamos de obter uma versão da desigualdade de Khinchine para o caso vetorial, i.e, queremos trocar a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ por uma sequência de vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, para X um espaço de Banach, mas note que a desigualdade é falsa para o caso vetorial, como mostra o seguinte contraexemplo.

Exemplo 1.2.1. Tome $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$, considere $S = \sum_{n=1}^N r_n(t)x_n$, com $r_n(t)$ a sequência de Rademacher e $x_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, nesse caso

$$\sum_{n=1}^N r_n(t)x_n = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t), 0, \dots)$$

e vale o seguinte

$$\left\| \sum r_n(\cdot)x_n \right\|_{L^p([0,1], \ell^\infty(\mathbb{N}))} = \left(\int_0^1 \left\| \sum r_n(t)x_n \right\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 1 dt \right)^{1/p} = 1$$

isso mostra que, $\forall p \in [1, \infty)$, $\left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^p([0,1], \ell^\infty(\mathbb{N}))} = 1$ por outro lado, note que

$$\left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{N}$$

logo, não vale a desigualdade de Khinchine para o caso vetorial, já que um termo é constante e igual a 1 enquanto o outro termo cresce com \sqrt{N} .

Na verdade, o Teorema 1.2.1 vale para o caso vetorial com $p = 2$ se, e somente se, X for um espaço de Hilbert [37], mas queremos obter alguma estimativa desse tipo para o caso vetorial geral, i.e, para o caso em que X é um espaço de Banach qualquer.

Denotemos por $Rad_p(X)$ o espaço de Banach das somas $\sum r_n x_n$ com $x_n \in X$ que convergem no espaço de Bochner $L^p([0, 1], X)$, com $p \in [1, \infty)$. Observe que, se $\sum x_n r_n = 0$, então para todo $x^* \in X^*$ vale $\sum \langle x_n, x^* \rangle r_n = 0$ e como r_n são ortogonais em $L^2([0, 1])$ segue que $\langle x_n, x^* \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema de Hahn-Banach, $x_n = 0 \forall n$. Isso nos mostra que, para cada elemento de $Rad_p(X)$ existe uma única sequência $x_n \in X$ tal que a soma $\sum x_n r_n$ converge em $L^p([0, 1], X)$ para o tal elemento ou seja, os elementos de $Rad_p(X)$ estão bem definidos. Vamos identificar $Rad_p(X)$ com o espaço das sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ com a norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{Rad_p(X)} = \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^p([0,1], X)}$$

ou seja

$$Rad_p(X) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \mid \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{Rad_p(X)} < \infty\}$$

Vejamos o análogo da desigualdade de Khinchine, Teorema 1.2.1, para o caso vetorial.

Teorema 1.2.2. *Seja $p \in [1, \infty)$, então existe uma constante $C(p)$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ vale*

$$\frac{1}{C(p)} \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^2([0,1],X)} \leq \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} \leq C(p) \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^2([0,1],X)}$$

i.e, $Rad_p(X)$ são isomorfos para todo $p \in [1, \infty)$.

A demonstração do Teorema 1.2.2 é análoga ao Teorema 1.2.1, porém a desigualdade

$$\int_0^1 e^{\|f(t)\|} dt \leq C$$

com $f(t) = \sum r_n(t)x_n$ é muito mais delicada, sugerimos [22] para uma demonstração detalhada do Teorema 1.2.2.

Teorema 1.2.3. *(Princípio de Contração de Kahane) Seja $N \in \mathbb{N}$. Para toda sequência $(\alpha_n)_{n=1}^N \subset \mathbb{C}$ com $|\alpha_n| \leq 1$ e para toda sequência $(x_n)_{n=1}^N \subset X$ vale*

$$\left\| \sum r_n \alpha_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} \leq 2 \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)}. \quad (1.4)$$

Demonstração. Primeiro vamos considerar o caso em que $\alpha_n = \pm 1 \forall n \in \{1, \dots, N\}$. Note que $r_n(t)\alpha_n \in \{-1, 1\}$, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, já que $r_n(t)$ é uma sequência de Rademacher, nesse caso

$$\left\| \sum r_n \alpha_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} = \left\| \sum r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)}. \quad (1.5)$$

Agora considere $\alpha_n \in \mathbb{R}$ com $|\alpha_n| \leq 1$, nesse caso $(\alpha_n)_{n=1}^N$ é um vetor em \mathbb{R}^N que pertence ao cubo \mathcal{Q} com vértices no conjunto $V = \{v = (v_1, \dots, v_N) \mid v_n = \pm 1, n = 1, \dots, N\}$, note que o cubo \mathcal{Q} é o fecho convexo de seus vértices, i.e, se $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^N \in \mathcal{Q}$ então existe $(\lambda_v)_{v \in V} \subset [0, 1]$ tal que $\sum_{v \in V} \lambda_v = 1$ e $\alpha_n = \sum_{v \in V} \lambda_v v_n$ com $v_n = \pm 1$, ou seja, cada ponto em \mathcal{Q} é uma combinação convexa dos vértices de \mathcal{Q} , assim temos

$$\left\| \sum_{n=1}^N r_n \sum_{v \in V} \lambda_v v_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} \leq \sum_{v \in V} \lambda_v \left\| \sum_{n=1}^N r_n v_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} = \sum_{v \in V} \lambda_v \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)}$$

onde usamos (1.5) uma vez que $v_n = \pm 1$, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$. Por fim, se $\alpha_n \in \mathbb{C}$ com $|\alpha_n| \leq 1$, podemos usar o fato de que $|\operatorname{Re}(\alpha_n)| \leq |\alpha_n| \leq 1$ e $|\operatorname{Im}(\alpha_n)| \leq |\alpha_n| \leq 1$, nesse caso teremos duas somas, o que resulta no fator 2 que parece em (1.4). \square

Agora estamos em condições de definir a R -Limitação de uma família de operadores lineares e limitados.

Definição 1.2.2. *Sejam X, Y espaços de Banach e $\tau \subset \mathcal{L}(X, Y)$ uma família de operadores lineares e limitados. τ é R -limitado se, e somente se, para algum $p \in [1, \infty)$ (e portanto todos) existir uma constante $C(p) < \infty$ tal que para toda coleção finita $T_1, \dots, T_N \in \tau$ e $x_1, \dots, x_N \in X$*

vale

$$\left\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \right\|_{L^p([0,1],Y)} \leq C(p) \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} \quad (1.6)$$

A menor constante $C(p)$ tal que vale (1.6) será denotada por $R(\tau)$

Exemplo 1.2.2. Pelo Teorema 1.2.3 o conjunto $\tau = \{aI; |a| \leq 1\}$ é R -imitado, além disso qualquer coleção composta por um único operador limitado é sempre um conjunto R -limitado, observe também que, qualquer família de operadores R -limitados é uniformemente limitado, bastando tomar $N = 1$ na Definição 1.2.2 e usar o princípio de limitação uniforme para concluir que $\sup_{T \in \tau} \|T\| \leq R(\tau)$.

O próximo lema é uma reformulação das desigualdades $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$, $\|RT\| \leq \|R\| \cdot \|T\|$ no contexto de conjuntos R -limitados.

Lema 1.2.1. Sejam X, Y e Z espaços de Banach, se τ e σ são subconjuntos R -Limitados de $\mathcal{L}(X, Y)$, e ρ um subconjunto R -limitado de $\mathcal{L}(Y, Z)$, então os conjuntos

$$\tau + \sigma = \{T + S; T \in \tau, S \in \sigma\} \text{ e } \rho \circ \tau = \{U \circ T; T \in \tau, U \in \rho\}$$

são R -limitados e vale

$$R(\tau + \sigma) \leq R(\tau) + R(\sigma) \text{ e } R(\rho \circ \tau) \leq R(\tau)R(\rho)$$

Demonstração. Sejam $T_n \in \tau$, $S_n \in \sigma$ e $U_n \in \rho$, então o resultado se segue das seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \left\| \sum r_n (T_n + S_n) x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} &\leq \left\| \sum r_n T_n x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} + \left\| \sum r_n S_n x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} \\ \left\| \sum r_n U_n T_n x_n \right\|_{L^1([0,1],Z)} &\leq R(\rho) \left\| \sum r_n T_n x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} \end{aligned}$$

□

Na maioria dos casos de interesse, $X = L^p(\Omega, \mu)$, onde (Ω, μ) é um espaço de medida σ -finito e $p \in [1, \infty)$. Vamos reformular o conceito de R -limitação para esse caso. Seja f_1, \dots, f_N vetores

em X então

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \right\|_{L^2([0,1], L^p(\Omega))} &\lesssim \left\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \right\|_{L^p([0,1], L^p(\Omega))} \\
&= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n \right\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \right|^p d\mu(\omega) \right) dt \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \right|^p dt \right) d\mu(\omega) \right)^{1/p} \\
&\lesssim \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\omega) \right)^{1/p} = \left\| \left(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema 1.2.2, o Teorema de Fubini e a desigualdade de Khinchine (Teorema 1.2.1), já que $f_n(\omega)$ é uma sequência numérica. Podemos então reformular o conceito de R -limitação no caso em que $X = L^p(\Omega)$, dizendo que $\tau \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ é R -limitado se, e somente se, existe uma constante C tal que

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^N |T_n f_n(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left\| \left(\sum_{n=1}^N |f_n(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.7)$$

Exemplo 1.2.3. *Seja $\tau \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega))$, suponha que os operadores em τ sejam dominados por um operador positivo (que mapeia funções positivas em funções positivas) $S \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ no seguinte sentido*

$$|Tf| \leq S|f|, \forall T \in \tau, f \in L^p(\Omega).$$

Nesse caso τ é R -limitado

Demonstração. Seja $T_1, \dots, T_N \in \tau$ e $f_1, \dots, f_N \in L^p(\Omega)$. Então

$$\left\| \left(\sum |T_n f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\| \left(\sum (S|f_n|)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \left\| \sum r_n S|f_n| \right\|_{L^p([0,1], L^p(\Omega))}$$

onde usamos a desigualdade de Khinchine (Teorema 1.2.1), e como S é um operador fixo e limitado segue que

$$\left\| \sum r_n S|f_n| \right\|_{L^p([0,1], L^p(\Omega))} \lesssim \|S\| \left\| \sum r_n |f_n| \right\|_{L^p([0,1], L^p(\Omega))} \lesssim \|S\| \left\| \left(\sum |f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

onde usamos novamente a desigualdade de Khinchine (Teorema 1.2.1). Por (1.7) segue-se que τ é R -limitado. \square

O Exemplo 1.2.3 possui importantes aplicações para estudar conjuntos R -limitados dados por integrais, i.e, operadores do tipo

$$T_k f(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f(s) ds.$$

Se T_{k_0} é limitado em $L^p(\Omega)$ para alguma função k_0 positiva fixa, então o conjunto $\{T_k \mid |k| \leq k_0\}$ é um conjunto R -limitado em $\mathcal{L}(L^p(\Omega))$. Se $(T_t)_{t \geq 0}$ é um semigrupo positivo em $L^p(\Omega)$, veja [27], segue que, se $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$, então o operador resolvente é positivo e vale $|R(\lambda, A)f| \leq R(\lambda_0, A)|f|$ com $Re(\lambda) \geq Re(\lambda_0)$, pelo Exemplo 1.2.3 o conjunto $\tau = \{R(\lambda, A) \mid Re(\lambda) \geq \lambda_0\}$ é R -limitado.

Vejamos um exemplo de conjunto que não é R -limitado

Exemplo 1.2.4. *Seja $X = L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2) \cup (2, \infty)$ e considere $\tau \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ o conjunto dos operadores de translação, i.e, $T_n f(\cdot) = f(\cdot - n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ e tome $f_n = \chi_{[0,1]}$ então*

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{m-1} |T_n f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} = \|\chi_{[0,m]}\|_{L^p(\Omega)} = m^{1/p}$$

enquanto que

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{m-1} |f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} = \|m^{1/2} \chi_{[0,1]}\|_{L^p(\Omega)} = m^{1/2}$$

logo, para $p \in [1, 2)$ não podemos ter $m^{1/p} \leq C m^{1/2}$ para todo m e para uma constante fixa C , contradizendo (1.7), e da mesma maneira concluímos para $p \in (2, \infty)$.

Teorema 1.2.4. *Seja $\tau \subset \mathcal{L}(X, Y)$ um conjunto R -limitado. Denotaremos por $co(\tau)$ o fecho convexo de τ , i.e, o menor fechado convexo que contém τ , e o fecho absoluto convexo, $absco(\tau) = \{\sum_{i=1}^N \lambda_i T_i \mid T_i \in \tau, \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ com } \sum_{i=1}^N |\lambda_i| = 1\}$. Então, $co(\tau)$ e $absco(\tau)$ são R -limitados e vale*

$$R(co(\tau)) \leq R(\tau) \quad R(absco(\tau)) \leq 2R(\tau)$$

Demonstração. Sejam A e B subconjuntos quaisquer em um espaço vetorial complexo. Primeiro vamos provar que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B). \tag{1.8}$$

Seja $\sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i, b_i)$ com $(a_i, b_i) \in A \times B$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$,

uma vez que $\sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i, b_i) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^N \lambda_i b_i \right)$, observe que a primeira coordenada é um elemento de $co(A)$, enquanto que a segunda coordenada é um elemento de $co(B)$, isso mostra que $co(A \times B) \subset co(A) \times co(B)$. Para a outra inclusão tome $(a, b) \in co(A) \times co(B)$, nesse caso vale

$$a = \sum_i a_i \lambda_i \quad b = \sum_j b_j \gamma_j$$

com $\sum \lambda_i = \sum \gamma_j = 1$, $a_i \in A$ e $b_i \in B$ e note que $\sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j = 1$, nesse caso vale

$$(a, b) = \left(\sum_i a_i \lambda_i, \sum_j b_j \gamma_j \right) = \left(\sum_j \gamma_j \sum_i a_i \lambda_i, \sum_i \lambda_i \sum_j b_j \gamma_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j (a_i, b_j)$$

e como $\sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j = 1$ segue que $(a, b) \in \text{co}(A \times B)$ o que conclui a demonstração de (1.8). Aplicando esse processo n vezes concluímos que vale $\text{co}(A_1) \times \cdots \times \text{co}(A_n) = \text{co}(A_1 \times \cdots \times A_n)$, vamos usar esse fato para demonstrar o Teorema 1.2.4.

Sejam $T_1, \dots, T_n \in \text{co}(\tau)$, tome $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \tau$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, $\lambda_j \geq 0$ com $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ e $T_{kj} \in \tau$ para $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$ tal que

$$T_k = \sum_{j=1}^N \lambda_j T_{kj} \quad .$$

Para $x_1, \dots, x_n \in X$ vale o seguinte:

$$\left\| \sum_{k=1}^n r_k T_k x_k \right\|_{L^2([0,1],Y)} \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j \left\| \sum_{k=1}^n r_k T_{kj} x_k \right\|_{L^2([0,1],Y)} \leq \left(\sum_j \lambda_j \right) R(\tau) \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L^2([0,1],X)}$$

concluindo que $R(\text{co}(\tau)) \leq R(\tau)$. Agora observe que, pelo princípio de contração de Kahane (Teorema 1.2.3) e o Exemplo 1.2.2, $\tau' = \{\lambda T ; T \in \tau, |\lambda| \leq 1\}$ é R -limitado e nesse caso $\text{co}(\tau') = \text{absc}(\tau)$ logo $R(\text{absc}(\tau)) \leq 2R(\tau)$. \square

Relembre que a topologia forte em $\mathcal{L}(X, Y)$ é a topologia gerada por conjuntos da forma

$$\{S \in \mathcal{L}(X, Y); \|(S - T)x\|_Y < \varepsilon\}$$

com $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, além disso T_n converge para T na topologia forte se, e somente se, $\lim T_n x = T x$ para todo $x \in X$, onde o limite é tomado na topologia da norma de Y .

Teorema 1.2.5. *Seja $\tau \subset \mathcal{L}(X, Y)$ um conjunto R -limitado, então o fecho de τ na topologia forte é um conjunto R -limitado e vale*

$$R(\bar{\tau}^s) \leq R(\tau).$$

Demonstração. Seja $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_N \in \bar{\tau}^s$ e $x_1, \dots, x_N \in X$, fixe $\varepsilon > 0$, pela definição da topologia forte podemos escolher $T_1, \dots, T_N \in \tau$ tais que para cada $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\|\bar{T}_n x_n - T_n x_n\| \leq 2^{-n} \varepsilon.$$

Escrevendo $\bar{T}_n = \bar{T}_n + T_n - T_n$ e usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N r_n \bar{T}_n x_n \right\|_{L^p([0,1],Y)} &\leq \left\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \right\|_{L^p([0,1],Y)} + \sum_{n=1}^N \|\bar{T}_n x_n - T_n x_n\|_Y \\ &\leq R(\tau) \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_{L^p([0,1],X)} + \varepsilon \end{aligned}$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. Em particular $R(\overline{co(\tau)^s}) \leq R(\tau)$ e $R(\overline{absco(\tau)^s}) \leq 2R(\tau)$. \square

Como consequência dos Teoremas 1.2.4 e 1.2.5 temos o seguinte resultado

Proposição 1.2.1. *Seja $\tau \subset \mathcal{L}(X, Y)$ um conjunto R -limitado, sejam $N : \Omega \rightarrow \tau$ uma função fortemente mensurável definida em um espaço de medida σ -finito (Ω, μ) e $h \in L^1_\mu(\Omega)$, defina o operador $T_{N,h} \in \mathcal{L}(X, Y)$ por*

$$T_{N,h} = \int_{\Omega} h(\omega) N(\omega) d\mu(\omega). \quad (1.9)$$

Então, $\Xi = \{T_{N,h} ; \|h\|_{L^1} \leq 1\}$ é R -limitado.

Demonstração. Sejam $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Uma vez que $N : \Omega \rightarrow \tau$ é fortemente mensurável, podemos aproximar a função mensurável $M : \Omega \rightarrow X^n$ dada por $M(\omega) = (N(\omega)x_k)_{k=1}^n$, por funções características em $L^\infty(\Omega, X^n)$, e com isso obter uma partição $(V_j)_{j=1}^m$ de Ω onde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, e $\omega_j \in V_j$ de forma que para todo j :

$$\|N(\omega)x_k - N(\omega_j)x_k\|_X \leq \varepsilon, \quad \mu - q.t.p \ \omega_j \in V_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

pondo

$$S = \sum_{j=1}^m \left(\int_{V_j} h(\omega) d\mu(\omega) \right) N(\omega_j)$$

nesse caso, por (1.9) segue que $\|T_{N,h}x_k - Sx_k\|_X \leq \varepsilon$ para $k = 1, \dots, n$, e portanto, S pertence a vizinhança de $T_{N,h}$ na topologia forte determinada por x_1, \dots, x_n e $\varepsilon > 0$, além disso, como $\|h\|_{L^1} \leq 1$ segue-se que $S \in \overline{absco(\tau)^s}$ o que implica em $\Xi \subset \overline{absco(\tau)^s}$, logo pelos Teoremas 1.2.4 e 1.2.5 segue-se que Ξ é um conjunto R -Limitado. \square

Proposição 1.2.2. *Seja $N : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ uma função fortemente mensurável, definida no espaço de medida (Ω, μ) σ -finito tal que para alguma constante C vale*

$$\int_{\Omega} \|N(\omega)x\|_Y d\mu(\omega) \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (1.10)$$

Seja $h \in L^\infty(\Omega, \mu)$, defina o operador $T_h \in \mathcal{L}(X, Y)$ como em (1.9), nesse caso o conjunto $\tau = \{T_h \mid \|h\|_{L^\infty} \leq 1\}$ é R -limitado e $R(\tau) \leq 2C$.

Demonstração. De fato, sejam $h_1, \dots, h_m \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h_n\|_{L^\infty} \leq 1$, $n \in \{1, \dots, m\}$ e

$x_1, \dots, x_m \in X$, vale o seguinte

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^m r_n T_{h_n} x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} &= \left\| \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^m r_n h_n(\omega) N(\omega) x_n \right) d\mu \right\|_{L^1([0,1],Y)} \\
&\leq \int_{\Omega} \left\| \sum_{n=1}^m r_n h_n(\omega) N(\omega) x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} d\mu \\
&\leq 2 \int_{\Omega} \left\| N(\omega) \sum_{n=1}^m r_n x_n \right\|_{L^1([0,1],Y)} d\mu \\
&\leq 2C \left\| \sum_{n=1}^m r_n x_n \right\|_{L^1([0,1],X)}
\end{aligned}$$

onde usamos o princípio de contração de Kahane (Teorema 1.2.3), já que $\|h_n\|_{L^\infty} \leq 1$ para $n \in \{1, \dots, m\}$, e a hipótese em (1.10). \square

Esses resultados sobre famílias de operadores integrais R -limitados terão aplicações quando estivermos discutindo algumas estimativas do operador resolvente do gerador de um C_0 -semigrupo (Proposição 2.3.1).

1.3 Cálculo Funcional

Nesta seção estudaremos o cálculo funcional conhecido como cálculo funcional de Dunford-Riesz para operadores setoriais. Veremos mais adiante que não há perda de generalidade em desenvolver essa teoria sobre operadores setoriais pois, nas aplicações que estudaremos sobre estimativas de C_0 -semigrupos, o gerador será um operador setorial. Vamos começar definindo esse conceito.

Definição 1.3.1. Para $0 < \varphi < \pi$, seja o setor

$$S_\varphi = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ e } |\arg(z)| < \varphi\}, & \text{se } \varphi \in (0, \pi) \\ (0, \infty), & \text{se } \varphi = 0 \end{cases}$$

Dizemos que um operador $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ definido em um espaço de Banach X , limitado ou não, é setorial de ângulo φ se satisfaz as seguintes condições:

1. $\sigma(A) \subset \overline{S_\varphi}$,
2. $M(A, \varphi') := \sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\varphi'}}\} < \infty$ para todo $\varphi' \in (\varphi, \pi)$

Denotaremos o conjunto dos operadores setoriais de ângulo φ por $Sect(\varphi, X)$. Portanto, se A é um operador setorial de ângulo φ , escrevemos $A \in Sect(\varphi, X)$. Dado um operador setorial A , definimos

$$\varphi_A := \min\{0 \leq \varphi < \pi \mid A \in Sect(\varphi, X)\}.$$

como o ângulo espectral (ou ângulo de setorialidade) de A . Uma família $(A_l)_l$ é dita uniformemente setorial de ângulo $\varphi \in [0, \pi)$ se $A_l \in \text{Sect}(\varphi, X)$ para cada l , e $\sup_l M(A_l, \varphi') < \infty$ para todo $\varphi' \in (\varphi, \pi)$.

Vejam algumas propriedades de operadores setoriais.

Proposição 1.3.1. *Seja X um espaço de Banach, e $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ um operador fechado, então*

1. *Se $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ e*

$$M(A, \pi) = \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| < \infty$$

então $M(A, \pi) \geq 1$ e $A \in \text{sect}(\pi - \arcsen(M(A, \pi)^{-1}), X)$.

2. *Se A é injetivo e $A \in \text{Sect}(\varphi, X)$ para algum $\varphi \in [0, \pi)$, então $A^{-1} \in \text{Sect}(\varphi, X)$ e vale a identidade fundamental*

$$\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = I - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + A \right)^{-1}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular, $M(A^{-1}, \varphi') \leq 1 + M(A, \varphi')$ para todo $\varphi' \in (\varphi, \pi)$.

3. *A família de operadores $(A + \delta)_{\delta \geq 0}$ é uniformemente setorial de ângulo φ . De fato,*

$$M(A + \delta, \varphi') \leq C(\varphi')M(A, \varphi') \quad (\delta > 0, \varphi' \in (\varphi, \pi))$$

onde $C(\varphi') = (\text{sen}(\varphi'))^{-1}$ se $\varphi' \in (0, \pi/2]$ e $C(\varphi') = 1$ se $\varphi' \in [\pi/2, \pi)$.

A família de operadores $\{(A + \delta)(A + \varepsilon + \delta)^{-1} \mid \varepsilon > 0, \delta \geq 0\}$ é uniformemente setorial de ângulo φ

Demonstração. 1. Denote $M(A, \pi) = M$ e seja $x \in \mathcal{D}(A)$, note que, para cada $\lambda > 0$

$$x = \frac{\lambda}{\lambda}(\lambda + A)^{-1}(\lambda + A)x = \left(\lambda(\lambda + A)^{-1} + \frac{\lambda}{\lambda}(\lambda + A)^{-1}A \right) x,$$

portanto,

$$\|x\| \leq \frac{1}{\lambda}M\|Ax\| + M\|x\| \tag{1.11}$$

tomando o limite quando $\lambda \rightarrow \infty$ em (1.11), temos $\|x\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e portanto $M \geq 1$. Agora seja $\lambda_0 < 0$ e $M' > M$, para cada $\mu \in \mathbb{C}$, com $|\mu - \lambda_0| \leq \frac{|\lambda_0|}{M'}$ temos que $\mu \in \rho(A)$, pois o conjunto resolvente é um aberto de \mathbb{C} e podemos usar um argumento de expansão em série de potência em torno de λ_0 e escrever

$$R(\mu, A) = \sum_{n \geq 0} (\mu - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}$$

e nesse caso, segue que

$$\begin{aligned}
|\mu| \|R(\mu, A)\| &\leq |\mu| \sum_{n \geq 0} |\mu - \lambda_0|^n \|R(\lambda_0, A)\|^{n+1} \\
&\leq |\mu| \sum_{n \geq 0} |\mu - \lambda_0|^n \frac{M^{n+1}}{|\lambda_0|^{n+1}} \\
&= \frac{M|\mu|}{|\lambda_0|} \sum_{n \geq 0} |\mu - \lambda_0|^n \frac{M^n}{|\lambda_0|^n} \\
&\leq \frac{M|\mu|}{|\lambda_0|} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{M}{M'}\right)^n
\end{aligned}$$

usando $|\mu| = |\mu + \lambda_0 - \lambda_0| \leq |\mu - \lambda_0| + |\lambda_0|$ e a série geométrica, temos

$$M \frac{|\mu|}{|\lambda_0|} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{M}{M'}\right)^n \leq \left(1 + \frac{|\mu - \lambda_0|}{|\lambda_0|}\right) \frac{M}{1 - \frac{M}{M'}} \leq \left(1 + \frac{1}{M'}\right) \frac{MM'}{M' - M} = \frac{(M' + 1)M}{M' - M}.$$

Tome $\varphi' > \pi - \arcsen(1/M)$ e defina $M' = 1/\sen(\pi - \varphi')$ nesse caso $M' > M$. Escolha $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi' \leq |\arg(\mu)| \leq \pi$ e defina $\lambda_0 = \text{Re}(\mu)$, nesse caso² $\lambda_0 < 0$ e $|\mu - \lambda_0| \leq |\lambda_0|/M'$. Portanto, vale o cálculo feito acima, ou seja,

$$\|\mu R(\mu, A)\| \leq \frac{(M' + 1)M}{M' - M}$$

concluindo o item 1.

2. Tome $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e note que

$$\begin{aligned}
(\lambda + A^{-1})(\lambda + A^{-1})^{-1} &= \lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} + A^{-1}(\lambda + A^{-1})^{-1} = I \\
\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} &= I - A^{-1}(\lambda + A^{-1})^{-1} = I - ((\lambda + A^{-1})A)^{-1}
\end{aligned}$$

colocando um fator λ^{-1} em evidência na última igualdade chegamos em

$$\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = I - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + A\right)^{-1}. \quad (1.12)$$

A desigualdade do item 2 segue-se usando a desigualdade triangular em (1.12).

3. Seja $A_\delta = (A + \delta)$ e observe que, para $\varphi' \in (\varphi, \pi)$, se $\lambda \in S_{\pi - \varphi'}$ então $\lambda + \delta \in S_{\pi - \varphi'}$ e vale

$$\lambda(\lambda + A_\delta)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} (\lambda + \delta)(A + \lambda + \delta)^{-1},$$

logo tomando o supremo em λ obtemos $M(A_\delta, \varphi') \leq M(A, \varphi') \sup_{\lambda \in S_{\pi - \varphi'}} \frac{|\lambda|}{|\lambda + \delta|}$, concluindo

²Note que $\varphi' > \pi/2$ já que $0 \leq 1/M < 1$

que $\sup_{\delta>0} M(A_\delta, \varphi') < \infty$, calculando o supremo mencionado chegamos em $C(\varphi')$ que aparece na primeira parte do item 3. Para a segunda parte, note que, se $\lambda \in S_{\pi-\varphi'}$, então $\lambda(1+\lambda)^{-1}\varepsilon + \delta \in S_{\pi-\varphi'}$, além disso

$$\begin{aligned} \lambda + A_\delta(A_\delta + \varepsilon)^{-1} &= \lambda(A_\delta + \varepsilon)(A_\delta + \varepsilon)^{-1} + A_\delta(A_\delta + \varepsilon)^{-1} \\ &= (\lambda(A_\delta + \varepsilon) + A_\delta)(A_\delta + \varepsilon)^{-1} \\ &= (\lambda + 1) \left(A_\delta + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} \right) (A_\delta + \varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

uma vez que o último termo da cadeia de igualdades acima é invertível, segue-se que $\lambda + A_\delta(A_\delta + \varepsilon)^{-1}$ é invertível e com isso

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + A_\delta(A_\delta + \varepsilon)^{-1})^{-1} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} (A_\delta + \varepsilon) \left(A_\delta + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} \right)^{-1} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(A_\delta + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} + \frac{\varepsilon}{1+\lambda} \right) \left(A_\delta + \frac{\lambda}{1+\lambda}\varepsilon \right)^{-1} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda} I + \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} \left(A_\delta + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

e como A_δ é uniformemente setorial, segue-se que $A_\delta(A_\delta + \varepsilon)^{-1}$ é uniformemente setorial. \square

Veremos que existe uma classe de funções na qual é possível definir um cálculo funcional através da fórmula integral de Cauchy. Se A é um operador setorial, vamos estudar a classe de funções que permite definir o seguinte operador:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)R(z, A)dz \quad (1.13)$$

onde Γ é a fronteira do setor S_φ . Para fazer sentido a integral acima, precisamos que f tenha alguma propriedade de decaimento em 0 e em ∞ . Vejamos as propriedades necessárias para isso.

Definição 1.3.2. *Seja $\varphi \in [0, \pi)$ e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa³ em S_φ .*

1. *f possui limite polinomial $c \in \mathbb{C}$ em 0 se existe $\alpha > 0$ tal que $f(z) - c = \mathcal{O}(|z|^\alpha)$ quando $z \rightarrow 0$.*
2. *f possui limite polinomial ∞ em 0 se $1/f$ possui limite polinomial 0 em 0.*
3. *f possui limite polinomial $d \in \mathbb{C}_\infty$ em ∞ se $f(z^{-1})$ possui limite polinomial d em 0.*
4. *f possui limite polinomial finito em 0 (em ∞) se existe $c \in \mathbb{C}$ tal que f possui limite polinomial c em 0 (em ∞).*
5. *Se f possui limite polinomial 0 em 0 (em ∞), dizemos que f tem decaimento regular em 0 (em ∞).*

³Holomorfa em S_φ com exceção de polos

Vamos definir a classe de Dunford-Riesz em S_φ como

$$H_0^\infty = \{f \in H^\infty(S_\varphi) \mid f \text{ tem decaimento regular em } 0 \text{ e em } \infty\}$$

Onde

$$H^\infty(S_\varphi) = \{f : S_\varphi \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa e limitada em } S_\varphi\}$$

equipado com a norma $\|f\|_{\infty, S_\varphi} = \sup\{|f(z)| \mid z \in S_\varphi\}$.

O lema a seguir reúne alguns exemplos de funções na classe de Dunford-Riesz

Lema 1.3.1. *Seja $\varphi \in (0, \pi]$ e $f : S_\varphi \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, então são equivalentes*

1. $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$.
2. Existem $C \geq 0$ e $s > 0$ tais que $|f(z)| \leq C \min\{|z|^s, |z|^{-s}\}$ para todo $z \in S_\varphi$.
3. Existem $C \geq 0$ e $s > 0$ tais que $|f(z)| \leq C \frac{|z|^s}{1+|z|^{2s}}$ para todo $z \in S_\varphi$.
4. Existem $C \geq 0$ e $s > 0$ tais que $|f(z)| \leq C \left(\frac{|z|}{1+|z|^2} \right)^s$ para todo $z \in S_\varphi$.

Demonstração. 1) \implies 2) Se $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$, então f tem decaimento regular em 0, o que significa que $f(z)$ tem limite polinomial 0 em 0, e portanto existe $\alpha > 0$ tal que $|f(z)| \leq C_1|z|^\alpha$ para $z \rightarrow 0$. f também possui decaimento regular em ∞ , o que significa que $f(z)$ tem limite polinomial 0 em ∞ , que por sua vez significa que $f(z^{-1})$ tem limite polinomial 0 em 0, logo existe $\beta > 0$ tal que $|f(z^{-1})| \leq C_2|z|^\beta$, trocando z por $1/z$ segue-se que $|f(z)| \leq C_2|z|^{-\beta}$ para $z \rightarrow \infty$. Tome $s = \min(\alpha, \beta)$, nesse caso, $s \leq \alpha$ e $s \leq \beta$ o que implica, para $z \rightarrow 0$, em $|z|^\alpha \leq |z|^s$, e para $z \rightarrow \infty$, vale $|z|^{-\beta} \leq |z|^{-s}$ implicando em $|f(z)| \leq C \min(|z|^s, |z|^{-s})$.

2) \implies 3) Note que, para $z \rightarrow 0$ temos $\frac{|z|^s}{1+|z|^{2s}} \leq |z|^s$ enquanto para $z \rightarrow \infty$ temos $\frac{|z|^s}{1+|z|^{2s}} \leq \frac{|z|^s}{|z|^{2s}} = |z|^{-s}$ e portanto existe $C > 0$ tal que $\min(|z|^s, |z|^{-s}) \leq C \frac{|z|^s}{1+|z|^{2s}}$.

3) \implies 4) Basta comparar $1 + |z|^{2s}$ e $(1 + |z|^2)^s$.

4) \implies 1) Consequência direta da definição. □

Para o caso de funções em $H_0^\infty(S_\varphi)$ a integral de Cauchy definida em (1.13) fica bem definida pois, se A for um operador setorial, então podemos usar o item (2) do Lema 1.3.1 para fazer o

seguinte cálculo

$$\begin{aligned}
\|f(A)x\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| \|R(z, A)x\| |dz| \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(re^{i\theta})| \frac{1}{|r|} dr \|x\| \\
&\leq C \left(\int_0^1 r^{s-1} dr + \int_1^{\infty} r^{-s-1} dr \right) \|x\| \\
&\leq C \|x\|.
\end{aligned}$$

o que mostra que $f(A)$ é um operador limitado.

Vamos considerar agora a chamada classe de Dunford-Riesz estendida. Note que a função racional $(1+z)^{-1}$ e as funções constantes não são elementos de $H_0^\infty(S_\varphi)$. Definimos, então, a classe de Dunford-Riesz estendida como

$$\mathcal{E}(S_\varphi) = H_0^\infty(S_\varphi) \oplus \langle (1+z)^{-1} \rangle \oplus \langle \mathbf{1} \rangle$$

Observação 1.3.1. *Note que, se $f : S_\varphi \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa, tiver decaimento regular no infinito e possuir continuação analítica em uma vizinhança da origem, então $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ já que, pela continuação analítica, existe C tal que $|f(z) - f(0)| \leq C|z|$ para z próximo da origem, o que implica em f possuir limite polinomial finito em 0, com essas hipóteses, vale $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$, já que a função $g(z) = f(z) - f(\infty) - (f(0) - f(\infty))/(1+z) \in H_0^\infty(S_\varphi)$*

Um exemplo importante de função em $H_0^\infty(S_\varphi)$ que usaremos mais adiante está contida no seguinte Lema:

Lema 1.3.2. *Seja $0 < \operatorname{Re}(\beta) < \operatorname{Re}(\alpha)$. Então, para todo $\varphi \in (0, \pi)$*

$$\frac{z^\beta}{(1+z)^\alpha} \in H_0^\infty(S_\varphi)$$

Lema 1.3.3. *Seja $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$ e defina*

$$h(z) = \int_0^1 f(sz) \frac{ds}{s} \quad e \quad g(z) = \int_1^\infty f(sz) \frac{ds}{s}. \quad (1.14)$$

para $z \in S_\varphi$. Então $h, g \in \mathcal{E}(S_\varphi)$, $h(0) = g(\infty) = 0$ e

$$h(z) + g(z) = \int_0^\infty f(sz) \frac{ds}{s}$$

é constante.

Demonstração. Veja em [18] □

Vamos enunciar uma proposição (Proposição 2.6.11 de [18]) que iremos usar na demonstração da desigualdade dos momentos.

Proposição 1.3.2. *Seja $\varphi \in (0, \pi]$ e $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$. Então existe uma constante $C_f > 0$ tal que*

$$\sup_{t>0} \|f(tA)\| \leq C_f M(A, \varphi)$$

para cada operador setorial $A \in \text{Sect}(w, X)$, $w \in (0, \varphi)$. Além disso, dado $\theta \in [0, \varphi - w)$ temos

$$\|f(\lambda A)\| \leq C_f M(A, \varphi - \theta)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, com $|\arg \lambda| \leq \theta$.

Teorema 1.3.1. *(Desigualdade dos Momentos) Seja A um operador setorial definido em um espaço de Banach X , sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma < \beta < \alpha$ e $\gamma \geq 0$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ vale⁴*

$$\|A^\beta x\| \leq \frac{C}{\theta(1-\theta)} \|A^\gamma x\|^{1-\theta} \|A^\alpha x\|^\theta.$$

sendo $\theta := (\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)^{-1}$.

Demonstração. Seja $\psi(z) \in H_0^\infty(S_\varphi)$ e note que $z^\alpha \psi(z)$ e $z^{-\alpha} \psi(z)$ são limitadas. Sejam $h(z)(h(z) + g(z))^{-1}$ e $g(z)(h(z) + g(z))^{-1}$ onde $g(z)$ e $h(z)$ são as funções definidas no Lema 1.3.3 por (1.14). Ponha $\tilde{h}(z) = z^{-(\alpha-\beta)} h(z)$ e $\tilde{g}(z) = z^{\beta-\gamma} g(z)$ e note que \tilde{h} e \tilde{g} são elementos de $H_0^\infty(S_\varphi)$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ e $t > 0$ temos o seguinte

$$A^\beta x = h(tA)A^\beta x + g(tA)A^\beta x = \tilde{h}(tA)(tA)^{\alpha-\beta} A^\beta x + \tilde{g}(tA)(tA)^{-(\beta-\gamma)} A^\beta x$$

tomando a norma, usando a desigualdade triangular, reescrevendo $(\alpha - \beta) = (\alpha - \gamma)(1 - \theta)$ e $-\beta + \gamma = -(\alpha - \gamma)\theta$ e usando a Proposição 1.3.2 temos

$$\|A^\beta x\| \leq C_{\tilde{h}} t^{(\alpha-\gamma)(1-\theta)} \|A^\alpha x\| + C_{\tilde{g}} t^{-(\alpha-\gamma)\theta} \|A^\gamma x\|$$

calculando o ínfimo para $t > 0$ chegamos em

$$\|A^\beta x\| \leq C_{\tilde{h}} \left(\frac{\theta \|A^\gamma x\|}{(1-\theta) \|A^\alpha x\|} \right)^{(1-\theta)} \|A^\alpha x\| + C_{\tilde{g}} \left(\frac{(1-\theta) \|A^\alpha x\|}{\theta \|A^\gamma x\|} \right)^\theta$$

rearranjando os termos concluímos que

$$\|A^\beta x\| \leq C \left[\left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^\theta + \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)^{1-\theta} \right] \|A^\gamma x\|^{1-\theta} \|A^\alpha x\|^\theta.$$

o resultado se segue notando que o termo entre colchete é limitado por $(\theta(1-\theta))^{-1}$, e $C = \max\{C_{\tilde{g}}, C_{\tilde{h}}\}$. \square

Pelo Lema 1.3.2, se $\alpha, \beta, \eta \in (0, \infty)$, a função $f(z) = z^\alpha (\eta + z)^{-\alpha-\beta} \in H_0^\infty(S_\varphi)$ logo podemos

⁴Definimos a potência A^α como $A^\alpha := (1+A)^n A^\alpha (1+A)^{-n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ com $0 < \text{Re}(\alpha) < n$.

definir o operador

$$A^\alpha(\eta + A)^{-\alpha-\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_\theta} \frac{z^\alpha}{(\eta + z)^{\alpha+\beta}} R(z, A) dz \quad (1.15)$$

onde ∂S_θ é a fronteira do setor S_θ com $\theta \in (\varphi, \pi)$ orientada positivamente. Observe que, para um operador setorial A , e $\alpha, \beta \in [0, \infty)$, o operador $A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-\beta}$ é limitado, vamos usar a notação $\Phi_\beta^\alpha(A) := A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-\beta}$, nesse caso temos $\Phi_0^\alpha(A) = (A(1 + A)^{-1})^\alpha$ e se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, \infty)$, então (Proposição 3.1.1 de [18])

$$\Phi_{\beta_1}^{\alpha_1}(A)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A) = \Phi_{\beta_1+\beta_2}^{\alpha_1+\alpha_2}(A)$$

Denote por X_β^α o conjunto imagem de Φ_β^α , i.e, $X_\beta^\alpha = \text{Im}(\Phi_\beta^\alpha(A))$ sendo $X^\alpha = X_0^\alpha$ e $X_\beta = X_\beta^0$. Se A for um operador injetivo, então X_β^α é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_{X_\beta^\alpha} = \|x\|_X + \|\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x\|_X = \|x\|_X + \|(1 + A)^{\alpha+\beta}A^{-\alpha}x\|_X$$

onde $x \in X_\beta^\alpha$, para isso basta notar que $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_{X_\beta^\alpha}$, logo se $(x_n)_n$ é Cauchy em X_β^α , as sequências $(x_n)_n$ e $(\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x_n)_n$ serão Cauchy em X , além do mais, no nosso contexto, $-A$ é gerador de um C_0 -semigrupo e portanto, é um operador fechado (Proposição A.0.2), logo se $x_n \rightarrow x$ e $\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x_n \rightarrow y$, então $\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x = y$ e X_β^α é Banach. Note que $\Phi_\beta^\alpha(A) : X \rightarrow X_\beta^\alpha$ é um isomorfismo no seguinte sentido: existe $C \geq 0$ tal que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)} \leq \|T\Phi_\beta^\alpha(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)} \quad (1.16)$$

onde $T \in \mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)$, para justificar (1.16) basta notar que

$$\|Tx\|_X = \|T\Phi_\beta^\alpha(A)\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x\|_X \leq \|T\Phi_\beta^\alpha(A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\Phi_\beta^\alpha(A)^{-1}x\|_X \leq \|T\Phi_\beta^\alpha(A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{X_\beta^\alpha}$$

o que implica em $\|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)} \leq \|T\Phi_\beta^\alpha(A)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Note agora que

$$\begin{aligned} \|T\Phi_\beta^\alpha(A)x\|_X = \|Ty\|_X &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)}\|y\|_{X_\beta^\alpha} \\ &= \|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)}(\|\Phi_\beta^\alpha(A)x\|_X + \|x\|_X) \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X_\beta^\alpha, X)}(\|\Phi_\beta^\alpha(A)\|_{\mathcal{L}(X)} + 1)\|x\|_X \end{aligned}$$

donde se segue (1.16).

1.4 Multiplicadores de Fourier Parte I

Nesta seção vamos dar início ao estudo dos multiplicadores de Fourier, objetos que terão importância para os resultados principais deste trabalho. Começaremos discutindo um pouco sobre operadores que são invariantes por translação, abordando inicialmente o caso escalar, e na Parte II iremos desenvolver essa teoria para o caso vetorial.

Operadores invariantes por translação aparecem naturalmente em matemática aplicada; em Física, por exemplo, existe o princípio da relatividade, que nos diz que os fenômenos físicos são os mesmos em qualquer referencial inercial; ou seja, são fenômenos invariantes por troca de coordenada, e qualquer teoria matemática que tenha sucesso em descrevê-los deve levar em conta essa invariância.

Multiplicadores de Fourier são funções m para as quais o operador $T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)$ faz sentido. Em geral, estamos interessados em saber quando tal operador é limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^q(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ (o caso $p > q$ é trivial, como veremos na Proposição 1.4.1). No artigo clássico de Hörmander [21], foi demonstrado que a classe dos operadores T_m , também chamados de operadores multiplicadores de Fourier, coincide com a classe dos operadores singulares do tipo convolução $f \mapsto K * f$, onde $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Os casos mais simples ocorrem quando $p = q = 2$ (Teorema 1.4.1), $p = q = 1$ e $p = q = \infty$; nesses dois últimos casos, os multiplicadores são dados por transformadas de Fourier de medidas limitadas [17]. Os casos $p, q \in (1, \infty) \setminus \{2\}$ são altamente não triviais e em geral, sabemos apenas condições sobre m para que T_m seja limitado.

Hörmander mostrou que para $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, se $m \in L^r_{weak}$ (veja a Definição B.0.1), com $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$, então $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ é limitado. Também foi demonstrado que a condição $p \leq 2 \leq q$ é necessária. Ainda em [21], foram introduzidas condições de integrabilidade/suavidade no kernel K , que permitem extrapolar a limitação de $T_m : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p_0 \leq q_0 < \infty$, para $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p \leq q < \infty$, onde os expoentes satisfazem $p^{-1} - q^{-1} = p_0^{-1} - q_0^{-1}$; tais condições levariam as extensões da teoria de Calderón-Zygmund [14]. Para o caso em que $p_0 = q_0$, foi mostrado que a condição de suavidade no kernel K pode ser traduzida na condição de suavidade no multiplicador m , o que é suficiente para demonstrar o Teorema de Mihlin (Teorema 1.4.2).

Vamos começar definindo operadores que são invariantes por translação.

Definição 1.4.1. *Um operador linear e limitado $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translação se*

$$\tau_h T = T \tau_h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

onde $\tau_h f(x) = f(x - h)$ é o operador de translação.

Exemplo 1.4.1. *Sejam $p \in [1, \infty]$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e considere o operador $T_f : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$T_f(g)(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Então, T_f é linear, limitado e comuta com a translação.

Demonstração. O fato de ser linear vem da linearidade da integral. Para mostrarmos a limitação, vamos usar a desigualdade de Minkowski para integrais [17]

$$\|T_f(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(\cdot - y)dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora, para mostrar que T_f comuta com a translação, basta notar que

$$\tau_h T_f(g)(x) = T_f(g)(x - h) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - h - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_h g(x - y)dy = T_f(\tau_h g)(x)$$

□

Em geral, queremos estudar operadores $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $p, q \in [1, \infty]$ são quaisquer, e que comutam com a translação. Mostremos inicialmente que se por acaso $p > q$, então o único operador linear e limitado que comuta com a translação é o operador nulo.

Proposição 1.4.1. *Sejam $p > q$ e $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ linear, limitado e que comuta com a translação. Se $p < \infty$, então $T \equiv 0$, e se $p = \infty$, então T restrito ao espaço das funções limitadas que vão para zero no infinito é o operador nulo.*

Demonstração. Seja $p < \infty$. Como T é limitado, existe $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Afirmamos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|f + \tau_h f\|_{L^p} = 2^{1/p} \|f\|_{L^p};$$

de fato, dado $\varepsilon > 0$, escreva $f = f_1 + f_2$, onde f_1 possui suporte compacto e $\|f_2\|_{L^p} < \varepsilon/(2 + 2^{1/p})$. Se por acaso $|h|$ é grande o suficiente, então f_1 e $\tau_h f_1$ possuem suportes disjuntos, de forma que

$$\begin{aligned} \|f_1 + \tau_h f_1\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) + \tau_h f_1(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h f_1(x)|^p dx \right)^{1/p} = 2^{1/p} \|f_1\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Agora, usando esse resultado para $|h|$ suficientemente grande junto com a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \|f + \tau_h f\|_{L^p} - 2^{1/p} \|f\|_{L^p} \right| &= \left| \|f + \tau_h f\|_{L^p} - \|f_1 + \tau_h f_1\|_{L^p} + 2^{1/p} \|f_1\|_{L^p} - 2^{1/p} \|f\|_{L^p} \right| \\ &\leq \left| \|f + \tau_h f\|_{L^p} - \|f_1 + \tau_h f_1\|_{L^p} \right| + 2^{1/p} \left| \|f_1\|_{L^p} - \|f\|_{L^p} \right| \\ &\leq \|f_2 - \tau_h f_2\|_{L^p} + 2^{1/p} \|f_2\|_{L^p} \leq \frac{2\varepsilon}{2 + 2^{1/p}} + \frac{2^{1/p}\varepsilon}{2 + 2^{1/p}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação. Note que, pela hipótese de T ser linear e comutar com a

translação, temos

$$\|T(f + \tau_h f)\|_{L^q} = \|Tf + \tau_h Tf\|_{L^q}.$$

Portanto, tomando o limite quando $|h| \rightarrow \infty$, segue-se do argumento anterior que

$$\|Tf + \tau_h Tf\|_{L^q} \rightarrow 2^{1/q} \|Tf\|_{L^q}.$$

Agora, usando a hipótese de T ser limitado, obtemos $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$\|T(f + \tau_h f)\|_{L^q} \leq C \|f + \tau_h f\|_{L^p}$$

e novamente tomando o limite quando $|h| \rightarrow \infty$, chegamos a

$$2^{1/q} \|Tf\|_{L^q} \leq C 2^{1/p} \|f\|_{L^p} \implies \|Tf\|_{L^q} \leq \frac{C}{2^{1/q-1/p}} \|f\|_{L^p}.$$

Isso mostra que a constante que aparece na limitação de T pode ser melhorada, já que $p > q \implies 1/p < 1/q$ repetindo o processo concluímos que tal constante pode ser tomada arbitrariamente pequena, concluindo que T é o operador nulo. Se $p = \infty$ podemos repetir o argumento usando o fato de que f é limitada e vai a zero no infinito. \square

A Proposição 1.4.1 reduz os casos de interesse em operadores invariantes por translação apenas para $p \leq q$.

Note que a Transformada de Fourier transforma convolução em produto pontual [17], e pelo Exemplo 1.4.1, a convolução é um operador invariante por translação; logo, faz sentido considerar o seguinte operador

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \hat{f}(\xi)),$$

onde $m(\xi)$ é uma função limitada.

Definição 1.4.2. *Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então dada $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, defina o operador $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ por*

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \hat{f}(\xi)) \tag{1.17}$$

m é chamado de multiplicador de Fourier (L^p, L^q) , ou simplesmente multiplicador de Fourier, se existe C_p tal que

$$\|T_m f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

O conjunto de multiplicadores de Fourier (L^p, L^q) será denotado por $\mathcal{M}^{p,q}$.

Observação 1.4.1. *Pela Proposição 1.4.1, o conjunto $\mathcal{M}^{p,q} = \{0\}$ se $p > q$.*

Um caso de interesse são os multiplicadores de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.4.1. *Seja $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Então $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, dado por (1.17) é limitado se, e somente se, $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, vale*

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Suponha que $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $m(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e como $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria sobrejetiva, segue-se que $\mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\hat{f}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como

$$\begin{aligned} \|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\hat{f}(\xi))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|m(\xi)\hat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

segue-se que $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Suponha agora que T_m seja limitado, sabemos que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é isomorfismo linear, então basta provar que o operador de multiplicação $M : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por $M\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ é limitado se, e somente se, $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por hipótese, $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é limitado, portanto $\mathcal{F}T_m\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ também é limitado por ser a composição de operadores limitados. Além disso, temos que $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}T_m\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(m(\xi)f(\xi))) = m(\xi)f(\xi),$$

Agora, observe que apesar do dual de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ não ser $L^1(\mathbb{R}^n)$, ainda assim é possível calcular a norma de uma vetor em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ usando a "dualidade" [11]

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in L^1, \|h\|_{L^1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)h(\xi)d\xi = \sup_{h \in L^1, \|h\|_{L^1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)||h(\xi)|d\xi, \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Assim,

$$\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 = \||m|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|h\|_{L^1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|h(\xi)|d\xi.$$

Faça $g(\xi) := |h(\xi)|^{1/2}$. Como $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue-se que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, de modo que

$$\sup_{\|h\|_{L^1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|h(\xi)|d\xi = \sup_{\|g\|_{L^2}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|g(\xi)|^2d\xi.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|g(\xi)|^2d\xi \leq \|M\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

tomando-se o supremo com $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, segue-se que $\|m\|_{L^\infty}^2 \leq \|M\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}^2$, o que conclui a demonstração. \square

Exemplo 1.4.2. Se $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $m(\xi) = \hat{k}(\xi) \in C_b^0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e nesse caso, $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por $T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\hat{f}(\xi)) = k * f$, vale

$$\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Exemplo 1.4.3. Seja $m_j(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$. Então, como $|\xi_j| \leq |\xi|$, temos $\|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$, e portanto $R_j = T_{m_j} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é limitado. R_j é chamado de

operador de Riesz, e é possível mostrar que

$$R_j f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy.$$

Observe que a integral acima pode ser vista como a convolução de f com $k_j(x) = x_j/|x|^{n+1}$. Como $k_j \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, esse é um típico exemplo de operador integral singular.

Em geral, gostaríamos de caracterizar os espaços $\mathcal{M}^{p,q}$. Já vimos que $\mathcal{M}^{p,q} = \{0\}$ se $p > q$ e que $\mathcal{M}^{2,2} = L^\infty$. Os casos $p = q \in (1, \infty) \setminus \{2\}$ são bem mais delicados, como mencionado no início desta seção. Vejamos um exemplo importante.

Teorema 1.4.2. (Multiplicador de Mikhlin) *Seja $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe $C^{n+2}(\mathbb{R}^n)$ tal que existe uma constante A que satisfaz*

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq A|\xi|^{-|\alpha|} \quad (1.18)$$

para todo $\xi \neq 0$ e $|\alpha| \leq n + 2$. Então para todo $p \in (1, \infty)$, o operador $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\hat{f}(\xi))$$

é limitado.

Para a demonstração desse Teorema, iremos precisar de alguns resultados preliminares. Vamos começar discutindo um pouco sobre partições diádicas da unidade. Usualmente, uma partição diádica da unidade em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma partição da unidade $\varphi_j(\xi), j \in \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que

$$\text{supp}(\varphi_j(\xi)) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid c2^j \leq |\xi| \leq C2^j\}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

onde $c, C > 0$ são escolhidas de maneira adequada, no nosso caso vamos tomar $c = 1/2$ e $C = 2$. Tal partição pode ser construída escolhendo uma função não negativa $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\psi(\xi) > 0 \iff 1/2 < |\xi| < 2$; então, definindo $\psi_j(\xi) := \psi(2^{-j}\xi)$, $j \in \mathbb{Z}$, defina

$$\phi(\xi) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\xi) > 0, \quad \xi \neq 0,$$

e então fazemos $\varphi_j(\xi) := \phi(\xi)^{-1}\psi_j(\xi)$. Isso define uma partição da unidade com as propriedades mencionadas. Nesse caso observe que $\phi(2^{-j}\xi) = \phi(\xi)$, ou seja, ϕ é invariante por reescala diádica. De fato, temos

$$\phi(2^{-j}\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k(2^{-j}\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^{-(j+k)}\xi),$$

e pela mudança de variável $l = k + j$, temos

$$\phi(2^{-j}\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^{-l}\xi) = \phi(\xi),$$

donde se segue que

$$\varphi_0(2^{-j}\xi) = \frac{\psi(2^{-j}\xi)}{\phi(2^{-j}\xi)} = \frac{\psi(2^{-j}\xi)}{\phi(\xi)} = \varphi_j(\xi),$$

ou seja, $\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi)$ (ao invés de olharmos para o termo j , podemos olhar para o termo zero e dilatar por 2^{-j}). Disto se segue a estimativa

$$|\partial^\alpha \varphi_j(\xi)| = |\partial^\alpha \varphi_0(2^{-j}\xi)| \leq C |\partial^\alpha \varphi_0| 2^{-j|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, j \in \mathbb{Z}. \quad (1.19)$$

A principal ideia presente na demonstração do Teorema 1.4.2 consiste em usar a partição diádica para decompor $m(\xi)$ como

$$m(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) m(\xi), \quad \forall \xi \neq 0,$$

e então usar a hipótese (1.18) junto com a estimativa (1.19) para obter

$$|\partial^\alpha m_j(\xi)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} \varphi_j(\xi)| |\partial^\beta m(\xi)| \leq C 2^{-j|\alpha|}.$$

Agora, para cada $m_j(\xi)$ vale que

$$T_{m_j} f = \mathcal{F}^{-1}(m_j(\xi) \hat{f}(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x-y) f(y) dy, \quad x \notin \text{supp}(f)$$

onde $k_j = \mathcal{F}^{-1}(m_j) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (pois $\text{supp}(m_j)$ é compacto). Formalmente, temos

$$T_m f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_{m_j} f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x-y) f(y) dy,$$

precisamos mostrar que a soma que aparece acima converge em algum sentido para uma função que satisfaz certas hipóteses. Vamos começar pelo seguinte resultado.

Lema 1.4.1. *Sejam $N \in \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função em $C_c^N(\mathbb{R}^n)$. Então vale a seguinte estimativa:*

$$|(\mathcal{F}^{-1}g)(x)| \leq C_N \mu(\text{supp}(g)) |x|^{-N} \sup_{|\beta|=N} \|\partial^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad x \neq 0$$

em que C_N é uma constante que não depende de g .

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\beta| = N$. Então [17],

$$(-ix)^\beta (\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\partial^\beta g)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|x^\beta| |(\mathcal{F}^{-1}g)(x)| &= |\mathcal{F}^{-1}(\partial^\beta g)(x)| \leq \|\partial^\beta g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta g(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta g(\xi)| \chi_{\text{supp}(g)}(\xi) d\xi \\
&\leq \|\partial^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu(\text{supp}(g)) \leq \sup_{|\beta|=N} \|\partial^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mu(\text{supp}(g)).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, com $|\beta| = N$, é arbitrário, concluímos que

$$|x|^N |(\mathcal{F}^{-1}g)(x)| \leq \mu(\text{supp}(g)) \sup_{|\beta|=N} \|\partial^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Lema 1.4.2. *Sejam $m(\xi)$ como no Teorema 1.4.2 e $m_j(\xi) = \varphi_j(\xi)m(\xi)$ com $\varphi_j(\xi)$ uma partição diádica da unidade em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então, $k_j(x) = (\mathcal{F}^{-1}m_j)(x)$ satisfaz a estimativa*

$$|\partial^\alpha k_j(x)| \leq C_\alpha 2^{j(n+|\alpha|-M)} |x|^{-M},$$

para todos $x \neq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, $M = 0, \dots, n+2$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, sendo C_α independente de x e j .

Demonstração. Observe que

$$\partial^\alpha k_j(x) = \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^\alpha m_j(\xi))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, j \in \mathbb{Z}.$$

Agora vamos mostrar que $(i\xi)^\alpha m_j(\xi)$ é de classe $C^N(\mathbb{R}^n)$ para algum N e depois usar o Lema 1.4.1 com $(i\xi)^\alpha m_j(\xi)$ no lugar de g (observe que m_j tem suporte compacto)

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta (i\xi)^\alpha m_j(\xi)| &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^{\beta-\gamma} (i\xi)^\alpha| |\partial^\gamma m_j(\xi)| \\
&\leq C_{\alpha,\beta} \sum_{\gamma \leq \beta} |\xi|^{|\alpha|-(|\beta|-|\gamma|)} 2^{-j|\gamma|} \chi_{\{\xi \mid 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}} \\
&\leq C'_{\alpha,\beta} 2^{j(|\alpha|-|\beta|)}, \quad \forall |\beta| \leq n+2
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.4.1 com $N = M = 0, \dots, n+2$, obtemos

$$|\partial^\alpha k_j(x)| = |\mathcal{F}^{-1}((i\xi)^\alpha m_j(\xi))(x)| \leq C_{\alpha,n} \mu(\text{supp}(\varphi_j)) |x|^{-M} 2^{j(|\alpha|-M)}.$$

Como a medida do anel $\{2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ é $C_n 2^{nj}$, temos que

$$|\partial^\alpha k_j(x)| \leq C_\alpha |x|^{-M} 2^{j(n+|\alpha|-M)}, \quad \forall x \neq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

□

Proposição 1.4.2. *Seja m como no Teorema 1.4.2. Então, existe $k \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que*

$$|\partial^\alpha k(x)| \leq C|x|^{-n-|\alpha|}, \quad x \neq 0, |\alpha| \leq 1,$$

e

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy, \quad \forall x \notin \text{supp}(f), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Primeiro note que precisamos de $x \notin \text{supp}(f)$, pois do contrário teríamos que avaliar $k(0)$ em algum momento. Para demonstrar esse resultado vamos novamente usar a partição diádica, a saber $k_j(x) = \mathcal{F}^{-1}(m_j(\xi))(x)$ e mostrar que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial^\alpha k_j(x)$ converge absolutamente e uniformemente em todo compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para uma função $k(x)$ que satisfaz $|\partial^\alpha k(x)| \leq C|x|^{-n-|\alpha|}$. Para tanto dividiremos soma $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial^\alpha k_j(x)$ em duas partes

$$\sum_{2^j \leq |x|^{-1}} \partial^\alpha k_j(x) \quad e \quad \sum_{2^j > |x|^{-1}} \partial^\alpha k_j(x)$$

e mostraremos a estimativa desejada separadamente. Para a primeira soma, vamos usar o Lema 1.4.2 com $|\alpha| \leq 1$ e $M = 0$ (o menor valor de M) para obter

$$\sum_{2^j \leq |x|^{-1}} |\partial^\alpha k_j(x)| \leq C \sum_{2^j \leq |x|^{-1}} 2^{j(n+|\alpha|)} \leq C'|x|^{-n-|\alpha|}.$$

Para a segunda soma vamos escolher $M = n + |\alpha| + 1$, $|\alpha| \leq 1$ (o maior valor de M), nesse caso

$$\begin{aligned} \sum_{2^j > |x|^{-1}} |\partial^\alpha k_j(x)| &\leq C \sum_{2^j > |x|^{-1}} 2^{j(n+|\alpha|-(n+|\alpha|+1))} |x|^{-n-|\alpha|-1} \\ &= C \sum_{2^j > |x|^{-1}} 2^{-j} |x|^{-n-|\alpha|-1} \leq C'|x|^{-n-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial^\alpha k_j(x)$ satisfaz a estimativa e converge absolutamente e uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para uma função $k(x)$ que satisfaz $|\partial^\alpha k(x)| \leq C|x|^{-n-|\alpha|}$ para todo $|\alpha| \leq 1$.

Resta mostrar que $k(x)$ satisfaz

$$T_m f = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy.$$

Primeiro note que

$$m(\xi)\hat{f}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j(\xi)\hat{f}(\xi)$$

e como $\sum |m_j(\xi)|$ é uniformemente limitada e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (já que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), por convergência dominada segue que a série converge na norma L^1 para $m(\xi)\hat{f}(\xi)$. Além disso, note que, usando

a relação entre convolução e a transformada de Fourier, temos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} T_{m_j} f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y) dy$$

onde usamos o fato da série convergir uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, o que conclui a demonstração. \square

Para concluir a demonstração do Teorema de Mihlin, basta usar o Teorema B.0.4, já que a Proposição 1.4.2 implica em (B.15) que por sua vez implica na condição de Hörmander (B.14).

Capítulo 2

Estabilidade de C_0 -semigrupos e Multiplicadores de Fourier vetoriais

2.1 Multiplicadores de Fourier parte II

Gostaríamos de obter uma versão vetorial dos resultados da Seção (1.4). No contexto vetorial, foi demonstrado [9] que a extrapolação dos resultados de [21] que mencionamos no começo da seção (1.4) ainda são válidos para o caso $p = q$. Porém, mesmo para o caso $p = q = 2$, não vale $T_m \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; X))$ se $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a menos que X seja um espaço de Hilbert, o que restringiria muito nossos propósitos.

Em [12], foi mostrado que $T_m \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n; X))$ para $m(\xi) = \text{sign}(\xi)$ se o espaço X satisfaz a propriedade UMD; não iremos entrar em muitos detalhes sobre essa propriedade (para maiores referências sobre a propriedade UMD, recomendamos [36] e [37]), mas vale mencionar que a maioria dos espaços de interesse a satisfazem.

No contexto vetorial é natural permitir que m assumam valores em $\mathcal{L}(X, Y)$; em [4], foi mostrado que o análogo natural do teorema de Mihlin não se estende para esse cenário vetorial a menos que X tenha cotipo 2 e Y tenha tipo 2 (não iremos entrar em detalhes sobre tipo e cotipo de um espaço de Banach; para tal discussão, recomendamos [37]).

Ainda assim seria interessante obter a versão vetorial dos resultados sobre multiplicadores de Fourier, pois sua grande utilidade foi confirmada no estudo de problemas da teoria de regularidade e equações de evolução [2], [20] e [38]. O que precisamos para tal extensão é o conceito de R -limitação, veremos como formalizar essas ideias.

Vale notar que as noções sobre multiplicadores a valores em $\mathcal{L}(X, Y)$ foram originalmente motivadas pela teoria de estabilidade e regularidade; nesta dissertação, iremos aplicar certos resultados para estabilidade de C_0 -semigrupos, mas suas aplicações não se restringem a isso; existem aplicações no cálculo \mathcal{H}^∞ para geradores de C_0 -grupos [28] e também, na teoria de equações dispersivas, a clássica estimativa de Strichartz pode ser vista como um teorema sobre multiplicadores a valores em $\mathcal{L}(X, Y)$ [35].

Vamos começar definindo a transformada de Fourier vetorial. Lembre-se que tal transformada envolve a multiplicação por uma exponencial complexa, e assim nesse caso precisamos que o espaço de Banach considerado seja definido no corpo dos complexos. Além do mais, note que tal exponencial complexa é uma função mensurável, pois é contínua, e pelos resultados da Seção (1.1) (mais precisamente a Proposição 1.1.1), podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 2.1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Definimos a transformada de Fourier de f como*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde a integral acima representa a integral de Bochner.

Alguns resultados válidos para $L^1(\mathbb{R}^n)$ se estendem para o caso vetorial.

Teorema 2.1.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$, então $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n; X)$ e $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; X)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X)}$.*

Demonstração. Podemos usar o fato de que $L^1(\mathbb{R}^n) \otimes X$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n; X)$ e repetir a demonstração do Lema de Riemann Lebesgue escalar para concluir que $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ se $|\xi| \rightarrow \infty$. Para a demonstração da continuidade, basta usar o Teorema da Convergência Dominada. Por fim a estimativa $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; X)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X)}$ é trivial. \square

Grande parte da teoria da transformada de Fourier inversa se faz de maneira análoga ao caso escalar; vamos apenas mencionar alguns resultados que serão úteis para a versão vetorial do Teorema de Plancherel (para mais detalhes, sugerimos [36]).

Lema 2.1.1. *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(\mathbb{R}^n; X)$ e $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, a convolução*

$$\phi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x - y) dy$$

está bem definida enquanto uma integral de Bochner para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, e vale

$$\|\phi * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; X)} \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; X)}.$$

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Para todo $p \in [1, \infty)$, o espaço $C_c(\mathbb{R}^n; X)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n; X)$.*

Proposição 2.1.2. *Sejam $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n; X)$ e $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \phi(x\varepsilon^{-1})$. Então,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi_\varepsilon * f = f,$$

onde o limite acima se dá na norma $L^p(\mathbb{R}^n; X)$.

Proposição 2.1.3. *Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$ seja tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Então, $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)$ em todos os pontos de Lebesgue de f .*

Demonstração. É um resultado bem conhecido que $g(x) = \exp(-|x|^2/2)$ é autovetor de \mathcal{F} com autovalor $(2\pi)^{n/2}$. Usaremos, na demonstração, a teoria de aproximações da identidade. Defina $g_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}g(x/\varepsilon)$; nesse caso, se $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de Lebesgue de f , então $g_\varepsilon * f \rightarrow f$ pontualmente se $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e portanto vale

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(y) f(x-y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} g(\varepsilon\xi) e^{iy \cdot \xi} d\xi \right) f(x-y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} g(\varepsilon\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y) \cdot \xi} f(x-y) dy \right) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} g(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Agora observe que $g(\varepsilon\xi) \rightarrow g(0) = 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, e como por hipótese \hat{f} é integrável, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x)$. \square

Para o que se segue, vamos introduzir o seguinte subespaço de $L^\infty(\mathbb{R}^n; X)$:

$$\check{L}^1(\mathbb{R}^n; X) := \{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n; X) \mid g = \check{f} \text{ para alguma } f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)\}.$$

Lema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach. A transformada de Fourier em $\check{L}^1(\mathbb{R}^n; X)$ está bem definida, e para funções em $L^1(\mathbb{R}^n; X) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; X)$, esta coincide com a transformada definida em $L^1(\mathbb{R}^n; X)$.*

Demonstração. Suponha que $f = \check{g} = \check{h}$ com $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Definindo $k := g - h$, segue-se que $k \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$ e $\check{k} = \check{g} - \check{h} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Agora, pela Proposição 2.1.3, $k = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}k) = \hat{0} = 0$, logo $g = h$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; X)$, então $f = \check{h}$ com $h \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$, e novamente pela Proposição 2.1.3, vale $h = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}h) = \hat{f}$. \square

Lema 2.1.3. *Para todo $p \in [1, \infty)$ temos a validade das seguintes afirmações.*

1. $L^p(\mathbb{R}^n; X) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; X)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n; X)$.
2. $L^1(\mathbb{R}^n; X) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; X)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n; X) \cap L^1(\mathbb{R}^n; X)$.

Teorema 2.1.2. *(Teorema de Plancherel) Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in L^2(\mathbb{R}^n; H) \cap L^1(\mathbb{R}^n; H)$. Então, $\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; H)$ e vale*

$$(2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n; H)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n; H)}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Vamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de H . Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n; H)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \hat{f}(x), g(x) \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), \check{g}(x) \rangle dx.$$

Note que para funções em $L^1(\mathbb{R}^n; H) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; H)$, (2.1) se segue tomando $g = \hat{f}$ e usando a Proposição 2.1.3. O teorema se segue por densidade já que, pelo Lema 2.1.3, $L^1(\mathbb{R}^n; H) \cap \check{L}^1(\mathbb{R}^n; H)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n; H) \cap L^1(\mathbb{R}^n; H)$. \square

Vale notar que o Teorema 2.1.2 não vale caso H não seja um espaço de Hilbert (Veja o Exemplo 2.1.15 de [36]).

Usando interpolação vetorial, é possível mostrar que a transformada de Fourier se estende a um operador linear e limitado de $L^p(\mathbb{R}^n; H)$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^n; H)$ para todo $p \in [1, 2]$ onde $1/p + 1/p' = 1$, de onde surge a pergunta: para quais espaços de Banach X , a transformada de Fourier se estende a um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}^n; X)$ para $L^{p'}(\mathbb{R}^n; X)$? Isso nos leva a definição de tipo de Fourier de um espaço de Banach.

Definição 2.1.2. *Seja $p \in [1, 2]$. Diremos que um espaço de Banach X possui tipo de Fourier p se a transformada de Fourier for um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}^n; X)$ para $L^{p'}(\mathbb{R}^n; X)$. Diremos que X possui cotipo de Fourier $p \in [2, \infty]$ se X possuir tipo de Fourier p' .*

Exemplo 2.1.1. *Pelo Teorema 2.1.1, se X é um espaço de Banach, então X tem tipo de Fourier 1.*

Exemplo 2.1.2. *Pelo Teorema 2.1.2, se X é um espaço de Hilbert, então X tem tipo de Fourier 2.*

Exemplo 2.1.3. *Por interpolação vetorial ([36]), se X é um espaço de Banach com tipo de Fourier $p \in [1, 2]$, então X tem tipo de Fourier r para todo $r \in [1, p]$.*

Exemplo 2.1.4. *Sejam X espaço de Banach e $r \in [1, \infty)$. Se X possui tipo de Fourier $p \in [1, 2]$, então o espaço $L^r(\mathbb{R}^n; X)$ possui tipo de Fourier $\min(p, r, r')$.*

Demonstração. Para demonstrar tal resultado, precisaremos da desigualdade de Minkowski vetorial (Proposição 1.2.22 de [36]), que diz basicamente que se $1 \leq p \leq q < \infty$, então existe uma imersão contínua de $L^p(\mathbb{R}^n; L^q(\mathbb{R}^n; X))$ em $L^q(\mathbb{R}^n; L^p(\mathbb{R}^n; X))$; em outras palavras, vale

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n; L^p(\mathbb{R}^n; X))} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; L^q(\mathbb{R}^n; X))}.$$

Suponha que $r \in [p, p']$; então, $r' \in [p, p']$ e nesse caso $\min(p, r, r') = p$. Para toda $f : \mathbb{R}^n \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n; X)$, usando a Proposição 1.2.22 de [36], temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n; L^r(\mathbb{R}^n; X))} &\leq \|\mathcal{F}f\|_{L^r(\mathbb{R}^n; L^{p'}(\mathbb{R}^n; X))} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\mathcal{F}f(t)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n; X)}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^{p'}(\mathbb{R}^n; X))} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n; X)}^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^{p'}(\mathbb{R}^n; X))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; L^r(\mathbb{R}^n; X))}, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a Proposição 1.2.22 de [36] com $r \leq p'$, na segunda desigualdade usamos o fato de X possuir tipo de Fourier p e na terceira usamos novamente a Proposição 1.2.22 de [36] com $p \leq r$.

Supondo agora $r \notin [p, p']$, vale $\min(p, r, r') < p$. Nesse caso existem duas possibilidades: se $\min(p, r, r') = r$, então $1 \leq r \leq p$, uma vez que todo espaço de Banach possui tipo de Fourier 1, e por hipótese, X possui tipo de Fourier p , por interpolação segue-se que X tem tipo de Fourier $\min(p, r, r') = r$. A demonstração do caso $\min(p, r, r') = r'$ é análoga. \square

Definição 2.1.3. *Seja X um espaço de Banach. O espaço de Schwartz vetorial é o espaço*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; X) \mid \|f\|_{\alpha, \beta} := \|x \mapsto x^\beta \partial^\alpha f(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n; X)} < \infty \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}\}.$$

De maneira análoga ao caso escalar, a família de seminormas $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$ define uma métrica que torna $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$ um espaço métrico completo, a saber

$$d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta} 2^{-|\alpha| - |\beta|} \frac{\|f - g\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha, \beta}}.$$

Também é verdade que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n; X)$ para todo $p \in [1, \infty)$ [36] e vale o seguinte resultado, cuja demonstração segue as mesmas ideias do caso escalar.

Teorema 2.1.3. *Seja X um espaço de Banach. Então $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$ é uma bijeção contínua com inversa contínua.*

Vamos definir a transformada de Hilbert e comentar sobre alguns resultados que generalizam o Teorema 1.4.2 para o caso vetorial.

Definição 2.1.4. *Sejam $p \in [1, \infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R})$. Definimos a transformada de Hilbert truncada de f como*

$$(H^\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

e a transformada de Hilbert de f como

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H^\varepsilon f)(x), \tag{2.2}$$

sempre que o limite acima existir.

Para o caso vetorial, estamos interessados em saber para quais espaços de Banach X a função $(Hf)(x)$ existe para toda $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$. Isso nos leva a seguinte definição

Definição 2.1.5. *Diremos que um espaço de Banach X satisfaz a propriedade UMD se para toda $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ o limite em (2.2) existe e vale*

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}.$$

Todos os subespaços de $L^p(\mathbb{R})$ para $p \in (1, \infty)$ satisfazem a propriedade UMD; já o espaço $L^1(\mathbb{R})$ e o espaço das funções contínuas $C(K)$, com $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, não satisfazem tal propriedade; para mais detalhes, sugerimos [36].

Observação 2.1.1. *A definição geral da propriedade UMD é a seguinte:*

Definição 2.1.6. *Diremos que um espaço de Banach X possui a propriedade da diferença de martingale incondicional (unconditional martingales difference), se para todo $p \in (1, \infty)$ existir uma constante $\beta \geq 0$ (dependendo de p e X) tal que, sempre que (S, \mathcal{A}, μ) for um espaço de medida σ -finito, $(\mathfrak{F}_n)_{n=0}^N$ for uma filtração σ -finita, e $(f_n)_{n=0}^N$ for um martingale finito em $L^p(S; X)$, então para todos escalares $|\mathcal{E}_n| = 1$, $n = 1, \dots, N$, vale*

$$\left\| \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_n df_n \right\|_{L^p(S; X)} \leq \beta \left\| \sum_{n=1}^N df_n \right\|_{L^p(S; X)}.$$

A Definição 2.1.5 é uma equivalência da definição acima (Teorema 5.1.1 de [36]).

Vamos estudar multiplicadores de Fourier vetoriais. A partir de agora vamos nos concentrar em \mathbb{R}^n com $n = 1$.

Definição 2.1.7. *Sejam $p, q \in [1, \infty]$, X e Y espaços de Banach e considere $m : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ fortemente mensurável. Dizemos que m é um multiplicador de Fourier $(L^p(\mathbb{R}; X), L^q(\mathbb{R}; Y))$, ou simplesmente multiplicador de Fourier (L^p, L^q) , se existir uma constante $C > 0$ tal que $T_m f := \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\hat{f}(\xi)) \in L^q(\mathbb{R}; Y)$ sempre que $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ e valer*

$$\|T_m f\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X).$$

No caso $p \in [1, \infty)$, T_m se estende para um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}; X)$ para $L^q(\mathbb{R}; Y)$.

Vamos denotar o conjunto dos multiplicadores de Fourier (L^p, L^q) por $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$.

Exemplo 2.1.5. *No caso de m constante, i.e., $m(\xi) = m_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, pela Observação 1.1.2, $m \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ e $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; Y))} = \|m\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$, já que $T_m f = m_0 f$ para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$.*

Vejam algumas propriedades dos multiplicadores. Para o que se segue, vamos considerar $p \in [1, \infty)$ e $q \in [p, \infty]$.

- Proposição 2.1.4.**
1. *Suponha $m_i \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, $i \in \{1, 2\}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então, $m_1 + m_2 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, $c \cdot m_1 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ e valem $T_{m_1+m_2} = T_{m_1} + T_{m_2}$ e $T_{c \cdot m_1} = c T_{m_1}$.*
 2. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach e suponha $m_1 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, $m_2 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, Z))$. Então $m_2 \cdot m_1 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Z))$ e vale $T_{m_2 \cdot m_1} = T_{m_2} T_{m_1}$.*
 3. *Suponha $m \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$. Então $\tau_a m(\xi) = m(\xi - a) \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e vale $\|T_{\tau_a m}\| = \|T_m\|$, ou seja, $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ é invariante por translações.*

4. Sejam $m_n \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ uma seqüência de multiplicadores de Fourier (L^p, L^q) e $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ mensurável tal que para cada $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$,

$$m(\xi)x = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\xi)x, \quad \|m_n(\xi)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C_1, \quad \|T_{m_n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^q(\mathbb{R}; Y))} \leq C_2.$$

Então, $m \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, com $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^q(\mathbb{R}; Y))} \leq C_2$.

Demonstração. 1. Se $m_1 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, então $T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m_1 \hat{f})$ é limitado. Sendo c uma constante e \mathcal{F}^{-1} linear, segue-se que

$$T_{cm_1} f = \mathcal{F}^{-1}(cm_1 \hat{f}) = c\mathcal{F}^{-1}(m_1 \hat{f}) = cT_{m_1} f,$$

e portanto $cm_1 \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$.

Se $m_i \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ com $i \in \{1, 2\}$, note que

$$T_{m_1+m_2} f = \mathcal{F}^{-1}((m_1 + m_2)\hat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(m_1 \hat{f}) + \mathcal{F}^{-1}(m_2 \hat{f})$$

é limitado por ser a soma de operadores limitados.

2. Basta notar que

$$T_{m_2}(T_{m_1} f) = \mathcal{F}^{-1}(m_2(\mathcal{F}(T_{m_1} f))) = \mathcal{F}^{-1}(m_2(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(m_1 \hat{f}))) = \mathcal{F}^{-1}(m_2 m_1 \hat{f}) = T_{m_2 m_1} f$$

3. Basta usar as seguintes propriedades da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(e^{-ia(\cdot)} f(\cdot))(\xi) = \hat{f}(\xi + a), \quad e^{iat}(\mathcal{F}^{-1} f)(t) = \mathcal{F}^{-1}(f(\cdot - a))(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{iat} T_m(e^{-ia(\cdot)} f(\cdot))(t) &= e^{iat} \mathcal{F}^{-1}(m(\cdot) \mathcal{F}(e^{-ia(\cdot)} f(\cdot)))(t) \\ &= e^{iat} \mathcal{F}^{-1}(m(\cdot) \hat{f}(\cdot + a))(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tau_a m \hat{f})(t) = T_{\tau_a m} f, \end{aligned}$$

e como $e^{\pm iat}$ é limitada, segue-se que

$$\|T_{\tau_a m} f\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)} \leq \|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^q(\mathbb{R}; Y))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}.$$

4. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$. Por convergência dominada, $m_n \hat{f} \rightarrow m \hat{f}$ em $L^1(\mathbb{R}; Y)$, já que $\|m_n(\xi) \hat{f}(\xi)\|_Y \leq C_1 \|\hat{f}(\xi)\|_X$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}; X)$, i.e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \|m_n(\xi) \hat{f}(\xi)\|_Y d\xi = \int_{\mathbb{R}} \|m(\xi) \hat{f}(\xi)\|_Y d\xi,$$

e como $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}; X) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}; Y)$ é limitado, segue-se que $T_{m_n} f \rightarrow T_m f$ em $L^\infty(\mathbb{R}; Y)$.

Por fim, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \|T_m f\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)}^q &= \int_{\mathbb{R}} \|T_m f(t)\|_Y^q dt \\ &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}} \|T_{m_n} f(t)\|_Y^q dt \leq C_2^q \|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}^q. \end{aligned}$$

□

Vamos relembra as ideias da demonstração do Teorema 1.4.2: primeiramente, demonstramos que cada $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um multiplicador de Fourier L^2 já que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo (Teorema 1.4.1), depois, demonstramos a estimativa L^1_{weak} para T_m (Teorema B.0.4), usamos interpolação de Marcinkiewicz (Teorema B.0.2) e dualidade para concluir o Teorema 1.4.2. No caso vetorial, essa estratégia não funciona, pois $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n; X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; X)$ não é um operador limitado se X não for um espaço de Hilbert.

A estratégia para obter uma versão do Teorema 1.4.2 no caso vetorial é partir da transformada de Hilbert. É um resultado bem conhecido sobre a transformada de Hilbert que $\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -i \cdot \text{sign}(\xi) \hat{f}(\xi)$ (veja [17]), definindo $m_H(\xi) := -i \cdot \text{sgn}(\xi)$, temos $Hf = \mathcal{F}^{-1}(m_H(\xi) \hat{f}(\xi))$, e portanto, se H for um operador limitado, segue-se que m_H é um multiplicador de Fourier (L^p, L^p), i.e, $m_H \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$. A nossa estratégia é ir modificando esse multiplicador até obtermos uma função m que cumpra certas condições. Diante disso, é natural supormos que os espaços de Banach envolvidos satisfaçam a propriedade UMD.

Nossa pergunta inicial é: que tipo de multiplicadores de Fourier podemos construir a partir do multiplicador básico relacionado com a transformada de Hilbert, a saber

$$m_H = \chi_{(-\infty, 0]} - \chi_{(0, \infty)},$$

assumindo que X satisfaz a propriedade UMD? Primeiro note que

$$\|T_{m_H}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; Y))} \geq 1,$$

já que $Id_{\mathbb{R}} = m_H^2$ e $\|A^2\| \leq \|A\|^2$ qualquer que seja A um operador limitado. Usando a Proposição 2.1.4, temos que as seguintes funções também são multiplicadores:

1. $\chi_{(0, \infty)} = \frac{1}{2}(Id_{\mathbb{R}} - m_H)$,
2. $\chi_{(-\infty, 0]} = \frac{1}{2}(Id_{\mathbb{R}} + m_H)$,
3. $\chi_{(a, \infty)}(t) = \chi_{(0, \infty)}(t - a)$,
4. $\chi_{(-\infty, b]}(t) = \chi_{(-\infty, 0]}(t - b)$.

Portanto, se $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ for da forma $m(\cdot) = \chi_I A$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então $T_m f = A(T_{\chi_I} f)$ para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$, e portanto $m \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$, com $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; Y))} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|T_{\chi_I}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; Y))}$.

O próximo resultado é a versão vetorial do Teorema 1.4.2.

Teorema 2.1.4. *Sejam X e Y espaços de Banach que satisfazem a propriedade UMD e $1 < p < \infty$. Seja $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{L}(X, Y))$ uma função que satisfaz as seguintes condições*

1. $\tau_1 = \{m(t) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ é R -Limitado com $R(\tau_1) = C_1$,
2. $\tau_2 = \{tm'(t) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ é R -Limitado com $R(\tau_2) = C_2$.

Então, $m \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$ e existe uma constante C que depende apenas de X, Y e p , tal que $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; Y))} \leq C \max(C_1, C_2)$.

Para uma demonstração detalhada do Teorema 2.1.4, sugerimos [22] ou [36]. No entanto, alguns comentários são pertinentes.

Primeiramente, observe que todo conjunto R -limitado é limitado em norma, o que implica em $\|m'(t)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \frac{C}{t}$. Embora m' não seja necessariamente integrável, vale

$$\int_{2^i}^{2^{i+1}} \|m'(t)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} dt \leq C \ln(2), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

A ideia da demonstração do Teorema 2.1.4 é parecida com a do Teorema 1.4.2. Baseado em (2.3) e nos multiplicadores obtidos a partir de m_H , tentamos decompor $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ na série formal $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n f$, onde

$$\text{supp}(\mathcal{F}(P_n f)) \subset I_n := \{t \in \mathbb{R} \mid 2^{n-1} \leq |t| \leq 2^n\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lembrando que, nesse contexto, estamos supondo que X satisfaz a propriedade UMD, logo

$$P_n := T_{\chi_{I_n}} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^p(\mathbb{R}; X)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Primeiramente, precisamos mostrar que $\sum P_n f$ converge para f em $L^p(\mathbb{R}; X)$. Em seguida, para cada $n \in \mathbb{Z}$, aplicamos T_m a $P_n f$, o que equivale a aplicar $T_m P_n$ a f . Mostramos que $T_m P_n$ é limitado e, posteriormente, precisamos demonstrar que $\sum T_m P_n f$ converge em $L^p(\mathbb{R}; Y)$. Essa é a parte mais delicada do teorema, pois não basta que $\sum P_n f$ seja convergente em $L^p(\mathbb{R}; X)$; é necessária uma convergência mais forte, que corresponde à convergência incondicional. Em termos de análise harmônica, precisamos da decomposição de Littlewood-Paley.

Após essas etapas preliminares, usamos uma partição diádica da unidade, como no Teorema 1.4.2, e por fim, estimamos $\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}; Y)}$. Vale comentar que a condição 1 no Teorema 2.1.4 é necessária, enquanto 2 é uma condição conveniente e suficiente mas não necessária. Mais precisamente, vale o seguinte: sejam X e Y espaços de Banach, e seja $m \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$. Denotando por $L(m)$ o conjunto dos pontos de Lebesgue de m , se $T_m \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, X); L^p(\mathbb{R}, Y))$ para algum $p \in (1, \infty)$, então $\{m(t) \mid t \in L(m)\}$ é R -limitado em $\mathcal{L}(X, Y)$.

Para encerrar essa seção, vamos enunciar e demonstrar um resultado que relaciona o tipo de Fourier de um espaço com um multiplicador em $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$.

Teorema 2.1.5. *Sejam X espaço de Banach com tipo de Fourier $p \in [1, 2]$ e Y um espaço de Banach com cotipo de Fourier $q \in [2, \infty]$, e seja $r \in [1, \infty]$ tal que $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$. Seja*

$m : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ fortemente mensurável tal que $\|m(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \in L^r(\mathbb{R})$. Então, T_m se estende a um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}; X)$ para $L^q(\mathbb{R}; Y)$ com

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^q(\mathbb{R}; Y))} \leq \mathcal{F}_{p, X} \mathcal{F}_{q', Y} \| \|m(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|_{L^r(\mathbb{R})},$$

onde $\mathcal{F}_{p, X} := \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X), L^{p'}(\mathbb{R}; X))}$ e $\mathcal{F}_{q', Y} := \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^{q'}(\mathbb{R}; Y), L^q(\mathbb{R}; Y))}$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; X)$. Observe que $1/r = 1/p - 1/q$ implica $1/r = 1/q' - 1/p'$, logo

$$1 = \frac{1}{r/q'} + \frac{1}{p'/q'},$$

e portanto, podemos usar a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \|m\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}; Y)}^{q'} &= \int_{\mathbb{R}} \|m\hat{f}\|_Y^{q'} \leq \int_{\mathbb{R}} \|m\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^{q'} \|\hat{f}\|_X^{q'} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\|m\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^{q'} \right)^{r/q'} \right)^{q'/r} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\|\hat{f}\|_X^{q'} \right)^{p'/q'} \right)^{q'/p'} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \|m\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^r \right)^{q'/r} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \|\hat{f}\|_X^{p'} \right)^{q'/p'}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros a potência q' , obtemos

$$\|m\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}; Y)} \leq \|m\|_{L^r(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X, Y))} \|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}; X)} \leq \mathcal{F}_{p, X} \|m\|_{L^r(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X, Y))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}, \quad (2.4)$$

onde na última desigualdade, usamos a hipótese de X possuir tipo de Fourier p . Observe que $\|\mathcal{F}^{-1}g\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)} = \|\mathcal{F}g\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)}$ para $g \in L^{q'}(\mathbb{R}; Y)$, e portanto

$$\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R}; Y)} \leq \mathcal{F}_{q', Y} \|m\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}; Y)}. \quad (2.5)$$

Combinando (2.4) e (2.5), segue-se que $m \in \mathcal{M}^{p, q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$. \square

2.2 Preliminares sobre estabilidade de C_0 -semigrupos

Nesta seção apresentaremos dois resultados da teoria clássica de C_0 -semigrupos, sendo o Teorema de Hille-Yosida um teorema de caracterização e o Teorema de Gearhart-Prüss de estabilidade. Historicamente, até onde sabemos, o Teorema de Gearhart-Prüss foi o primeiro resultado na teoria de estabilidade de C_0 -semigrupos.

Pelo Teorema A.0.2, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -Semigrupo, então existem $M \geq 1$ e $w > 0$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}$; se $w = 0$, então $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado e se $M = 1$, então $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado semigrupo de contrações. Os lemas a seguir auxiliarão na demonstração do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.2.1).

Lema 2.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ um operador linear tal que*

1. A é fechado em $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

2. O conjunto resolvente de A contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$ vale

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}; \quad (2.6)$$

então,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad x \in X$$

Demonstração. Uma vez que vale (1), podemos mostrar o resultado para $\mathcal{D}(A)$ e depois estendemos ao fecho. Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X = \|(\lambda R(\lambda, A) - I)x\|_X = \|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X = \|R(\lambda, A)Ax\|_X \leq \frac{\|Ax\|_X}{\lambda}.$$

Tomando o limite quando $\lambda \rightarrow \infty$, o resultado se segue para $x \in \mathcal{D}(A)$. Sejam agora $x \in X$ e $\varepsilon > 0$; pelo item (1), existe $\tilde{x} \in \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x - \tilde{x}\|_X < \varepsilon/3$, e assim, por (2) e para λ suficientemente grande,

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_X \leq \|\lambda R(\lambda, A)(x - \tilde{x})\|_X + \|\lambda R(\lambda, A)\tilde{x} - \tilde{x}\|_X + \|x - \tilde{x}\|_X < \varepsilon.$$

□

Definição 2.2.1. Seja $\lambda > 0$. Definimos a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \quad (2.7)$$

O próximo lema justifica o termo "aproximação".

Lema 2.2.2. Seja A um operador definido em um espaço de Banach X satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 2.2.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Demonstração. Para $x \in \mathcal{D}(A)$, basta usar o Lema 2.2.1 e (2.7)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda A R(\lambda, A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

□

Lema 2.2.3. Seja A um operador definido em um espaço de Banach X satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 2.2.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é gerador do semigrupo uniformemente contínuo de contrações $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. Além disso, $\forall x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ vale

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.$$

Demonstração. Como $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$, para cada $\lambda > 0$, A_λ é limitado e portanto, gera

um semigrupo uniformemente contínuo¹ $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. Além disso, para cada $t \geq 0$, por (2.6),

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1,$$

logo, $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ é semigrupo de contrações.

Da definição da exponencial de um operador limitado, e^{tA_λ} , e^{tA_μ} , A_λ e A_μ comutam entre si, e portanto

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (tA_\lambda x) + e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (-tA_\mu x)\|_X ds \\ &= \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\|_X ds \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X. \end{aligned}$$

□

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Hille-Yosida.

Teorema 2.2.1. (Hille-Yosida) *Um operador A definido em um espaço de Banach X é gerador de um C_0 -semigrupo (veja a Definição A.0.2) de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

1. A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. O conjunto resolvente de A contém \mathbb{R}^+ , e para todo $\lambda > 0$ vale

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. \implies) Suponha que A seja gerador de um C_0 -semigrupo de contrações. Nesse caso, pela Proposição A.0.2, A é fechado e $\mathcal{D}(A)$ é denso em X .

Para $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (2.8)$$

Como $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua (Proposição A.0.1) e limitada, a integral (2.8) existe como integral imprópria e define um operador linear limitado que satisfaz

$$\|R_\lambda x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\|_X dt \leq \|x\|_X \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{\|x\|_X}{\lambda}$$

o que implica $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/\lambda$. Além disso, se $h > 0$ temos

$$\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R_\lambda x = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t+h)x - T(t)x) dt. \quad (2.9)$$

¹Todo operador limitado A gera o semigrupo uniformemente contínuo $\exp(tA)$ [27].

Ainda,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] = \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\
& = \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\
& = \frac{1}{h} \left[(e^{\lambda h} - 1) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\
& = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Combinando (2.9) e (2.10), fazendo $h \rightarrow 0^+$, e usando as propriedades de limites e o Teorema A.0.2, chegamos a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T(h) - I)}{h} R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \tag{2.11}$$

Isso mostra que para todos $x \in X$ e $\lambda > 0$ vale $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$, e pela definição do domínio do gerador de um C_0 -semigrupo², $AR_\lambda = \lambda R_\lambda - I$, o que implica $(\lambda I - A)R_\lambda = I$. Vamos mostrar que também vale $R_\lambda(\lambda I - A) = I$ o que conclui a demonstração de que R_λ é o operador resolvente de A em $\lambda > 0$. Note que se $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$R_\lambda Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x dt = A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) = AR_\lambda x,$$

e portanto $R_\lambda A = AR_\lambda$. Agora, pela identidade (2.11),

$$(\lambda I - A)R_\lambda = R_\lambda(\lambda I - A) = I.$$

\Leftrightarrow

Para a volta, vamos usar os Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3. Seja $x \in \mathcal{D}(A)$; então,

$$\|(e^{tA_\mu} - e^{tA_\lambda})x\|_X \leq t\|A_\mu x - A_\lambda x\|_X \leq t\|A_\mu x - Ax\|_X + t\|Ax - A_\lambda x\|_X.$$

Agora, pelo Lema 2.2.2, $\|A_\mu x - Ax\|_X$ e $\|A_\lambda x - Ax\|_X$ convergem para zero quando λ e μ tendem para infinito o que mostra que $\{e^{tA_\lambda}\}$ converge quando $\lambda \rightarrow \infty$ e a convergência é uniforme em compactos. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, podemos estender ao fecho, e assim definimos $T : X \rightarrow X$ pela lei

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x, \quad \forall x \in X. \tag{2.12}$$

Da identidade (2.12), $T(t)$ satisfaz a propriedade de semigrupo com $T(0) = I$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. Além disso, note que $t \mapsto T(t)x$ é o limite uniforme de $t \mapsto e^{tA_\lambda} x$, e portanto $t \mapsto T(t)x$ é contínua, isso conclui que $T(t)$ é C_0 -Semigrupo de contrações. Resta mostrar que A é de fato seu gerador.

²Lembre-se que, uma vez que $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$, podemos aplicar o operador A em $R_\lambda x$ e por definição, a ação de A em um vetor qualquer de seu domínio é dado pelo limite que aparece no item 2 da Definição A.0.2.

Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Por (2.12) e pelo Teorema A.0.2, temos

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds, \quad (2.13)$$

onde usamos a continuidade uniforme em intervalos limitados para comutar o limite com a integral. Seja agora B o gerador de $T(t)$. Vamos mostrar que $B = A$. Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Segue-se de (2.13) que

$$\left(\frac{T(t) - I}{t} \right) x = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds,$$

e fazendo $t \rightarrow 0^+$ temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(t) - I}{t} \right) x = T(0)Ax = Ax.$$

Isso mostra que $x \in \mathcal{D}(B)$ e $Bx = Ax$, portanto B contém A .

Como B é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações, pela ida do Teorema 2.2.1, $1 \in \rho(B)$. Por outro lado, estamos assumindo que $1 \in \rho(A)$ e como B contém A , vale que

$$(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - B|_{\mathcal{D}(A)})\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A).$$

Uma vez que $(I - A) : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ é invertível com inversa limitada, $(I - A)\mathcal{D}(A) = X$, e como $(I - B) : \mathcal{D}(B) \rightarrow X$ também é invertível, $(I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(B)$, portanto

$$(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A) = X \implies \mathcal{D}(A) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(B) \implies A = B.$$

□

O teorema a seguir é um dos primeiros resultados da Teoria de Estabilidade de C_0 -semigrupos. Este teorema fornece condições necessárias e suficientes para o decaimento exponencial da função $[t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}]$. Primeiro vamos enunciar um resultado que será usado em sua demonstração (Proposição V.1.7 de [16]).

Proposição 2.2.1. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável, i.e, existem $\omega > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega t}$.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Teorema 2.2.2. *(Gearhart-Prüss) Sejam X um espaço de Hilbert e $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado, sendo A seu gerador infinitesimal. Então, $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.*

Demonstração. \implies Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ exponencialmente estável. Nesse caso, existem $\omega > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega t}$. Note que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $Re(\lambda) > -\omega$, então podemos definir

o operador resolvente de A por (2.8), e pela demonstração do Teorema de Hille-Yosida,

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)+\omega)t} dt,$$

e a integral acima é convergente se, e somente se $\operatorname{Re}(\lambda) > -\omega$. Em particular, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e vale

$$\|R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \int_0^\infty e^{-\omega t} dt = M \frac{1}{\omega}$$

o que implica $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\omega^{-1} < \infty$.

(\Leftarrow) Sejam $K := \sup_{t \geq 0} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $\alpha > 0$, defina $T_\alpha(t) := e^{-\alpha t} T(t)$, $t \geq 0$ e observe que

$$\|T_\alpha(t)x\|_X^2 = \|T_\alpha(t - \tau + \tau)x\|_X^2 = \|T_\alpha(t - \tau)T_\alpha(\tau)x\|_X^2,$$

donde se segue que

$$\|T_\alpha(t)x\|_X^2 = \frac{1}{t} \int_0^t \|T_\alpha(t - \tau)T_\alpha(\tau)x\|_X^2 d\tau.$$

Agora, fazendo $K := \sup_{t \geq 0} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$

$$\frac{1}{t} \int_0^t K^2 \|T_\alpha(\tau)x\|_X^2 d\tau \leq \frac{K^2}{t} \int_0^\infty \|T_\alpha(\tau)x\|_X^2 d\tau. \quad (2.14)$$

Seja agora $C := \sup_{s \in \mathbb{R}} \|R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$; usando a identidade do resolvente

$$\alpha R(\alpha + is, A)R(is, A) = R(is, A) - R(\alpha + is, A),$$

obtemos

$$\|R(\alpha + is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|R(is, A) - \alpha R(\alpha + is, A)R(is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C + \alpha C \|R(\alpha + is, A)\|_{\mathcal{L}(X)},$$

o que mostra que $\|R(\alpha + is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (\omega - \alpha)^{-1}$ para todo $\alpha \in (0, \omega)$, onde $\omega = C^{-1}$.

Usando agora a identidade do resolvente

$$R(\alpha + is, A) - R(\omega + is, A) = (\omega - \alpha)R(\alpha + is, A)R(\omega + is, A),$$

obtemos

$$\|R(\alpha + is, A)x\|_{\mathcal{L}(X)} = \|R(\omega + is, A)x + (\omega - \alpha)R(\alpha + is, A)R(\omega + is, A)x\|_{\mathcal{L}(X)},$$

usando $\|R(\alpha + is, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq (\omega - \alpha)^{-1}$ concluímos que

$$\|R(\alpha + is, A)x\|_X \leq 2\|R(\omega + is, A)x\|_X, \quad \forall \alpha \in (0, \omega). \quad (2.15)$$

Tomando mais uma vez $\alpha \in (0, \omega)$ e $x \in X$, se estendermos $(T_\alpha(t))_{t \geq 0}$ a 0 em \mathbb{R}^- , então

$s \mapsto R(\alpha + is, A)x$ é a transformada de Fourier de $t \mapsto T_\alpha(t)x$; usando o Teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|T_\alpha(\tau)x\|_X^2 d\tau &= \int_{\mathbb{R}} \|R(\alpha + is, A)x\|_X^2 ds \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} \|R(\omega + is, A)x\|_X^2 ds = 4 \int_{\mathbb{R}} \|T_\omega(\tau)x\|_X^2 d\tau \leq c\|x\|_X^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Combinando (2.14) e (2.16) obtemos $\|T_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Kct^{-1/2}$ para todo $\alpha \in (0, \omega)$ e $t > 0$, e fazendo $\alpha \rightarrow 0^+$ temos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{Kc}{t^{1/2}}.$$

Por fim, fazendo $t \rightarrow \infty$ concluímos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável. \square

2.3 Algumas Estimativas Sobre o Resolvente

Nesta seção vamos apresentar algumas estimativas sobre o operador resolvente usando R -limitação. Os resultados a seguir podem ser demonstrados usando cotas uniformes, mas a forma que iremos apresentar permitirá deduzir isso a partir da R -limitação. Antes porém, iremos precisar do seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Sejam $\varphi \in (0, \pi/2)$ e $\theta \in (\pi - \varphi, \pi)$. Seja $\Omega := \overline{\mathbb{C}_+} \setminus (S_\varphi \cup \{0\})$ e seja $\Gamma := \{re^{i\theta} \mid r \in [0, \infty)\} \cup \{re^{-i\theta} \mid r \in [0, \infty)\}$ orientada de $\infty e^{i\theta}$ para $\infty e^{-i\theta}$. Então, para todos $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$, $\eta \in (0, 1]$ e $\lambda \in \Omega$, vale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(\eta + z)^{\alpha+\beta}(z + \lambda + \eta - 1)} dz = \frac{(1 - \eta - \lambda)^\alpha}{(1 - \lambda)^{\alpha+\beta}}. \quad (2.17)$$

Além disso, para todos $\gamma \in [1, \infty)$ e $\delta \in [0, \infty)$, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\frac{|z|^\gamma}{|z + 1|^{\gamma+\delta}} \frac{|1 - \lambda|}{|z + \lambda|} \leq C \quad e \quad \frac{1 + |\lambda|}{|\frac{1}{2} + z|^\delta |z + \lambda - \frac{1}{2}|} \leq C \quad (2.18)$$

para todos $z \in \Gamma$ e $\lambda \in \Omega$.

Demonstração. Para $r \in (0, \text{Im}(\lambda)/2)$ e $R \geq 2|\lambda| + 2$, defina $\Gamma_+ := \{se^{i\theta} \mid s \in [r, R]\}$, $\Gamma_- := \{se^{-i\theta} \mid s \in [r, R]\}$, $\Gamma_r := \{re^{i\nu} \mid \nu \in [-\theta, \theta]\}$ e $\Gamma_R := \{Re^{i\nu} \mid \nu \in [-\theta, \theta]\}$, e considere $\Gamma_{r,R} := \Gamma_+ \cup \Gamma_r \cup \Gamma_- \cup \Gamma_R$ orientada no sentido anti-horário. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{|z|^\alpha}{|\eta + z|^{\alpha+\beta} |z + \lambda + \eta - 1|} d|z| &= \int_{-\theta}^{\theta} \frac{|R|^{\alpha+1}}{|\eta + Re^{i\nu}|^{\alpha+\beta} |Re^{i\nu} + \lambda + \eta - 1|} d\nu \\ &= R^{-\beta} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{|\frac{\eta}{R} + e^{i\nu}|^{\alpha+\beta} |e^{i\nu} + \frac{\lambda + \eta - 1}{R}|} d\nu; \end{aligned} \quad (2.19)$$

agora note que

$$\left| \frac{\eta}{R} + e^{i\nu} \right| \geq 1 - \frac{\eta}{R} \geq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{|\frac{\eta}{R} + e^{i\nu}|^{\alpha+\beta}} \leq 2^{\alpha+\beta} \quad (2.20)$$

e

$$|\lambda + \eta - 1| \leq |\lambda| + |\eta - 1| \leq |\lambda| + 1 \leq \frac{R}{2}, \quad (2.21)$$

e portanto

$$\left| e^{i\nu} + \frac{\lambda + \eta - 1}{R} \right| \geq 1 - \frac{|\lambda + \eta - 1|}{R} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.22)$$

Usando (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.19), segue-se que

$$R^{-\beta} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{\left| \frac{\eta}{R} + e^{i\nu} \right|^{\alpha+\beta} \left| e^{i\nu} + \frac{\lambda+\eta-1}{R} \right|} d\nu \leq R^{-\beta} \theta 2^{2+\alpha+\beta}$$

fazendo $R \rightarrow \infty$, segue-se que a integral em Γ_R converge para 0. De maneira análoga, também se mostra que a integral em Γ_r converge para 0 quando $r \rightarrow 0^+$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

com $f(z) = z^{\alpha}(z+\eta)^{-\alpha-\beta}$, concluímos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{z^{\alpha}}{(z+\eta)^{\alpha+\beta}(z+\eta+\lambda-1)} dz = \frac{(1-\eta-\lambda)^{\alpha}}{(1-\lambda)^{\alpha+\beta}},$$

o que demonstra a identidade (2.17). Agora observe que $|z+\lambda| = ||z|e^{\pm i\theta} + \lambda| = |z| |e^{\pm i\theta} + \lambda'|$ para algum $\lambda' \in \Omega$; como a distância de $e^{\pm i\theta}$ para $-\Omega$ é positiva, existe uma constante $C_1 \in (0, \infty)$ tal que $|z+\lambda| \geq C_1|z|$. Logo,

$$\frac{|z|^{\gamma}}{|1+z|^{\gamma+\delta}} \frac{|1-\lambda|}{|z+\lambda|} \leq \frac{|z|^{\gamma}}{|1+z|^{\gamma+\delta}} \left(\frac{|1+z|}{|z+\lambda|} + 1 \right) \leq \frac{|z|^{\gamma}}{|1+z|^{\gamma+\delta}} \left(\frac{1}{C_1|z|} + \frac{1}{C_1} + 1 \right),$$

e o último termo da desigualdade é limitado uniformemente em $z \in \Gamma$. Para a segunda estimativa em (2.18), note que as distâncias de $z-1/2$ a Γ (e portanto a $-\Omega$) e entre $z+1/2$ e 0 são limitadas uniformemente por uma constante $C_2 > 0$. Logo, $|z+\lambda-1/2| \geq C_2$ e $|1/2+z| \geq C_2$ para todo $z \in \Gamma$ e $\lambda \in \Omega$ o que mostra que é suficiente limitar $\frac{|\lambda|}{|z+\lambda-1/2|}$ uniformemente. Seja $\nu \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\lambda = |\lambda|e^{i\nu}$, e ponha $w := \frac{z}{|\lambda|} \in \Gamma$. Então,

$$\frac{|\lambda|}{|z+\lambda-1/2|} = \frac{1}{|w+e^{i\nu}-\frac{1}{2|\lambda|}|},$$

e o resultado se segue da observação geométrica

$$\left| \left(w - \frac{1}{2|\lambda|} \right) - (-e^{i\nu}) \right| \geq \text{dist}(\Gamma, -e^{i\nu}) \geq \text{dist}(\Gamma, -e^{i\varphi}).$$

□

Proposição 2.3.1. *Sejam $\alpha \in \{0\} \cup [1, \infty)$, $\beta \in [0, \infty)$ e $\beta_0 \in [0, 1]$, e seja A um operador setorial injetivo definido no espaço de Banach X . Seja $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, considere o domínio $\Omega := \overline{\mathbb{C}_+} \setminus (S_{\varphi} \cup \{0\})$ e suponha que $-\Omega \subset \rho(A)$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. O conjunto

$$\{\lambda^\alpha(\lambda + A)^{-1} | \lambda \in \Omega, |\lambda| \leq 1\} \subset \mathcal{L}(X) \quad (2.23)$$

é R -limitado se, e somente se, o conjunto

$$\{(\lambda + A)^{-1} | \lambda \in \Omega, |\lambda| \leq 1\} \subset \mathcal{L}(X^\alpha, X) \quad (2.24)$$

é R -limitado,

2. O conjunto

$$\{\lambda^{-\beta}(\lambda + A)^{-1} | \lambda \in \Omega, |\lambda| \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é R -limitado se, e somente se, o conjunto

$$\{\lambda^{\beta_0}(\lambda + A)^{-1} | \lambda \in \Omega, |\lambda| \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_{\beta+\beta_0}, X)$$

é R -imitado,

3. O conjunto

$$\{(1 - \lambda)^{\beta_0}(\lambda + A)^{-1} A^\alpha (1 + A)^{-\alpha - \beta - \beta_0} - \frac{(-\lambda)^\alpha}{(1 - \lambda)^{\alpha + \beta}} (\lambda + A)^{-1} | \lambda \in \Omega\} \quad (2.25)$$

é R -limitado em $\mathcal{L}(X)$.

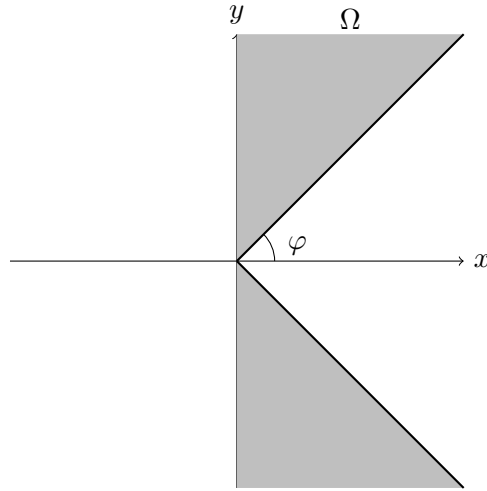


Figura 2.1: Região Ω da Proposição 2.3.1

Demonstração. 1. Primeiro fixe $\theta \in (\max(\omega_A, \pi - \varphi), \pi)$ e seja $\Gamma := \{re^{i\theta} | r \in [0, \infty)\} \cup \{re^{-i\theta} | r \in [0, \infty)\}$ orientada de $\infty e^{i\theta}$ para $\infty e^{-i\theta}$.

Vamos dividir a prova do item 1 para o caso em que $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$, já que no caso $\alpha = 0$ os conjuntos são idênticos. Primeiro note que o conjunto em (2.24) é R -limitado se, e somente se, $\{(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^\alpha(A)\} \subset \mathcal{L}(X)$ é R -limitado, já que $\Phi_0^\alpha : X^\alpha \rightarrow X$ é isomorfismo; usando

$(\lambda + A)(\lambda + A)^{-1} = I$ e a identidade do resolvente, temos

$$\begin{aligned}
(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^1(A) &= (\lambda + A)^{-1}A(1 + A)^{-1} \\
&= (I - \lambda(\lambda + A)^{-1})(1 + A)^{-1} \\
&= (1 + A)^{-1} - \lambda(\lambda + A)^{-1}(1 + A)^{-1} \\
&= (1 + A)^{-1} - \lambda \left(\frac{(\lambda + A)^{-1}}{1 - \lambda} - \frac{(1 + A)^{-1}}{1 - \lambda} \right) \\
&= \frac{1}{1 - \lambda}(1 + A)^{-1} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}(\lambda + A)^{-1} \\
&= \frac{1}{1 - \lambda} \left((1 + A)^{-1} - \lambda(\lambda + A)^{-1} \right). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Agora observe que o singlete $\{(1 + A)^{-1}\}$ é R -limitado, e portanto seu fecho convexo também o é (Teorema 1.2.4). Além disso, a função $\lambda \mapsto (1 - \lambda)^{-1}$ é limitada superior e inferiormente em Ω , e portanto o termo $\{(1 - \lambda)^{-1}(1 + A)^{-1}\}$ é R -limitado. Como a soma de conjuntos R -limitados é R -limitado (Lema 1.2.1), segue-se que $\{(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^1(A)\}$ é R -limitado em $\mathcal{L}(X)$ se, e somente se, $\{\lambda(\lambda + A)^{-1}\}$ é R -limitado em $\mathcal{L}(X)$. Agora, por (2.26), segue-se a equivalência do item 1 para o caso $\alpha = 1$.

Se $\alpha > 1$, note que

$$\begin{aligned}
(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^\alpha(A) &= (\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha} \\
&= (\lambda + A)^{-1}(1 + A)A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1};
\end{aligned}$$

usando a identidade do resolvente

$$(\lambda + A)^{-1} = (1 + A)^{-1} + (1 - \lambda)(\lambda + A)^{-1}(1 + A)^{-1},$$

temos

$$\begin{aligned}
(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^\alpha(A) &= (I + (1 - \lambda)(\lambda + A)^{-1})A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} \\
&= A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} + (1 - \lambda)(\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Observe agora que o singlete $\{A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1}\} \subset \mathcal{L}(X)$ é R -limitado; usando o isomorfismo $\Phi_0^\alpha(A)$, concluímos que $(\lambda + A)^{-1}$ é R -limitado em $\mathcal{L}(X^\alpha, X)$ se, e somente se,

$$(1 - \lambda)(\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1}$$

for R -limitado em $\mathcal{L}(X)$. Por (1.15),

$$\begin{aligned} (\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} (\lambda + A)^{-1}R(z, A)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} \frac{(\lambda + A)^{-1}}{(z + \lambda)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} \frac{R(z, A)}{(z + \lambda)} dz \\ &= \frac{(-\lambda)^\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} (\lambda + A)^{-1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} \frac{R(z, A)}{(z + \lambda)} dz, \end{aligned}$$

onde usamos a identidade do resolvente na segunda igualdade e o Lema 2.3.1 na terceira igualdade. Então, $\forall \lambda \in \Omega$ temos

$$(1 - \lambda)(\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} = \frac{(-\lambda)^\alpha}{(1-\lambda)^\alpha} (\lambda + A)^{-1} + S_\lambda,$$

onde

$$S_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} \frac{(1-\lambda)}{(z + \lambda)} R(z, A) dz.$$

Para estimar essa integral vamos usar o Lema 2.3.1: fixe $\varepsilon \in (0, \min\{\alpha - 1, 1\}]$ e note que pelo Lema 2.3.1 se $f(z) = \frac{z^\varepsilon}{(1+z)^{2\varepsilon}}$, então a função $f(z)R(z, A)$ é integrável em Γ (note que podemos multiplicar o integrando que aparece em S_λ por $\frac{f(z)}{f(z)}$), e pelo Lema 2.3.1

$$\sup \left\{ \frac{|z|^{\alpha-\varepsilon}}{|1+z|^{\alpha+1-2\varepsilon}} \frac{|1-\lambda|}{|z+\lambda|} \mid \lambda \in \Omega, z \in \Gamma \right\} < \infty.$$

Definindo

$$h_\lambda(z) := \frac{|z|^{\alpha-\varepsilon}}{|1+z|^{\alpha+1-2\varepsilon}} \frac{|1-\lambda|}{|z+\lambda|},$$

segue-se das Proposições 1.2.1 e 1.2.2, com $N(z) = f(z)R(z, A)$ e $h(z) = h_\lambda(z)$, que o conjunto

$$\{S_\lambda; \lambda \in \Omega\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é R -limitado. Portanto

$$(\lambda + A)^{-1}\Phi_0^\alpha(A) = A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} + \frac{(-1)^\alpha}{(1-\lambda)^\alpha} \lambda^\alpha (\lambda + A)^{-1} + S_\lambda,$$

e como $(-1)^\alpha(1-\lambda)^{-\alpha}$ é limitado inferiormente e superiormente, concluímos que a R -limitação de (2.23) é equivalente à R -limitação de (2.24).

2. Para a demonstração do item 2, note que se $\beta + \beta_0 = 0$, então os conjuntos são idênticos; portanto, podemos supor $\beta + \beta_0 > 0$. Usando o isomorfismo $\Phi_{\beta+\beta_0}^0(A)$ e a identidade

$(\lambda + A)^{-1} + (z - (1/2 + A))^{-1} = (z + \lambda - 1/2)(\lambda + A)^{-1}(z - (1/2 + A))^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} (\lambda + A)^{-1}\Phi_{\beta+\beta_0}^0(A) &= (\lambda + A)^{-1}(1 + A)^{-\beta-\beta_0} = (\lambda + A)^{-1}(1/2 + (1/2 + A))^{-\beta-\beta_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1/2 + z)^{\beta+\beta_0}} (\lambda + A)^{-1} R(z, 1/2 + A) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1/2 + z)^{\beta+\beta_0}(z + \lambda - 1/2)} dz (\lambda + A)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1/2 + z)^{\beta+\beta_0}(z + \lambda - 1/2)} R(z, 1/2 + A) dz \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.1,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1/2 + z)^{\beta+\beta_0}(z + \lambda - 1/2)} dz = \frac{1}{(1 - \lambda)^{\beta+\beta_0}},$$

e portanto

$$(1 - \lambda)^{\beta_0} (\lambda + A)^{-1} \Phi_{\beta+\beta_0}^0(A) = \frac{1}{(1 - \lambda)^{\beta}} (\lambda + A)^{-1} + (1 - \lambda)^{\beta_0} T_{\lambda}, \quad (2.28)$$

onde

$$T_{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1/2 + z)^{\beta+\beta_0}(z + \lambda - 1/2)} R(z, 1/2 + A) dz.$$

Para estimar essa integral, fixe $\varepsilon \in (0, \beta + \beta_0)$ e note que se $f(z) = (z + 1/2)^{-\varepsilon}$, então $f(z)R(z, 1/2 + A)$ é integrável em Γ (novamente, podemos multiplicar o integrando em T_{λ} por $f(z)/f(z)$), e pelo Lema 2.3.1 vale

$$\sup \left\{ \frac{1 + |\lambda|}{|1/2 + z|^{\beta+\beta_0-\varepsilon}|z + \lambda - 1/2|} \mid \lambda \in \Omega, z \in \Gamma \right\} < \infty.$$

Denotando por $h_{\lambda}(z)$ o termo que aparece no supremo acima e sabendo que $f(z)R(z, (1/2 + A))$ é integrável em Γ , podemos usar as Proposições 1.2.1 e 1.2.2, com $N(z) = f(z)R(z, (1/2 + A))$ e $h(z)$ como acima, para concluir que $\{(1 + |\lambda|)T_{\lambda} \mid \lambda \in \Omega\}$ é R -limitado, uma vez que $|1 - \lambda|^{\beta_0} \leq 1 + |\lambda|$ para todo $\lambda \in \Omega$, concluímos o item 2.

3. Para o item 3, vamos supor $\alpha > 1$ e $\beta > 0$; os outros casos seguem de forma análoga às demonstrações dos itens 1 e 2. Em (2.25) vamos somar e subtrair o termo $(1 - \lambda)^{-\beta}(\lambda + A)^{-1}A^{\alpha}(1 + A)^{-\alpha}$ e assim obter

$$\begin{aligned} &A^{\alpha}(1 + A)^{-\alpha} \left[(1 - \lambda)^{\beta_0} (\lambda + A)^{-1} (1 + A)^{-\beta-\beta_0} - (1 - \lambda)^{-\beta} (\lambda + A)^{-1} \right] \\ &+ (1 - \lambda)^{-\beta} \left[(\lambda + A)^{-1} A^{\alpha} (1 + A)^{-\alpha} - \frac{(-\lambda)^{\alpha}}{(1 - \lambda)^{\alpha}} (\lambda + A)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Denotemos os termos entre colchetes de V_{λ}^1 e V_{λ}^2 respectivamente. Agora, basta mostrar que $\{V_{\lambda}^i \mid \lambda \in \Omega\} \subset \mathcal{L}(X)$ é R -limitado para $i \in \{1, 2\}$. Observe que pela demonstração do item

2, e em particular por (2.28), segue-se que

$$R(\{V_\lambda^1 \mid \lambda \in \Omega\}) = R(\{(1 - \lambda)^{\beta_0} T_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}) < \infty.$$

Para V_λ^2 , note que por (2.27) e (2.28), vale $V_\lambda^2 = A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1} + S_\lambda$. Portanto, a demonstração do item 1 nos dá

$$R(\{V_\lambda^2 \mid \lambda \in \Omega\}) \leq \|A^\alpha(1 + A)^{-\alpha-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + R(\{S_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}) < \infty.$$

□

Proposição 2.3.2. *Sejam $\alpha \in [1, \infty)$, $\alpha_0 \in (0, \alpha)$ e A um operador setorial injetivo definido no espaço de Banach X tal que $i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$ e que satisfaz*

$$\sup\{\|\lambda^\alpha(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \mid \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\lambda| \leq 1\} < \infty.$$

Então,

$$\sup\{\|\lambda^{\alpha-\alpha_0}(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^{\alpha_0}, X)} \mid \lambda \in i\mathbb{R} \setminus 0, |\lambda| \leq 1\} < \infty.$$

Demonstração. Pelas Proposições 2.2.1f e 3.1.9 de [18], o operador $A(1 + A)^{-1}$ é setorial e $A^{\alpha_0}(1 + A)^{-\alpha_0} = (A(1 + A)^{-1})^{\alpha_0}$. Agora, usando a desigualdade dos momentos (Teorema 1.3.1) e a Proposição 3.1.9 de [18], temos

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{\alpha-\alpha_0}(\lambda + A)^{-1}A^{\alpha_0}(1 + A)^{-\alpha_0}x\|_X \\ &= |\lambda|^{\alpha-\alpha_0} \|(A(1 + A)^{-1})^{\alpha_0}(\lambda + A)^{-1}x\|_X \\ &\lesssim |\lambda|^{\alpha-\alpha_0} \|(\lambda + A)^{-1}(A(1 + A)^{-1})^{\alpha_0}x\|_X^{\frac{\alpha_0}{\alpha}} \|(\lambda + A)^{-1}x\|_X^{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha}} \\ &\leq \|(\lambda + A)^{-1}A^\alpha(1 + A)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{\alpha_0}{\alpha}} \|\lambda^\alpha(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha}} \|x\|_X. \end{aligned}$$

para todos $\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x \in X$. O resultado é consequência do item 1 da Proposição 2.3.1. □

2.4 Estabilidade Polinomial via Multiplicadores Vetoriais

Esta é a seção principal do texto, iremos reunir as ideias apresentadas até agora e aplicar no estudo de estabilidade polinomial de C_0 -semigrupos e demonstraremos os Teoremas 9 e 10. Começemos com algumas definições

Definição 2.4.1. *Seja $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Um operador A definido no espaço de Banach X possui resolvente de crescimento (α, β) se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $-A$ é gerador de um C_0 -Semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X .
2. $\overline{\mathbb{C}_-} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$, e o conjunto

$$\left\{ \frac{\lambda^\alpha}{(1 + \lambda)^{\alpha+\beta}} (\lambda + A)^{-1} \mid \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathcal{L}(X)$$

for uniformemente limitado.

Diremos que um operador A tem R -resolvente de crescimento (α, β) se A tiver resolvente de crescimento (α, β) e o conjunto

$$\left\{ \lambda^{-\beta}(\lambda + A)^{-1} \mid \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}, |\lambda| \geq 1 \right\} \subset \mathcal{L}(X)$$

for R -limitado.

O próximo lema será usado para interpolação de taxas de decaimento.

Lema 2.4.1. *Seja A um operador setorial injetivo definido no espaço de Banach X tal que $-A$ é gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X . Para $j \in \{1, 2\}$, seja $\alpha_j, \beta_j \in [0, \infty)$ tais que $\alpha_1 \geq \alpha_2$ e $\beta_1 \geq \beta_2$, e seja $f_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ funções tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\beta_j}^{\alpha_j}, X)} \leq f_j(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$. Então para cada $\theta \in [0, 1]$ existe $C_\theta \in [0, \infty)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2}^{\theta\alpha_1+(1-\theta)\alpha_2}, X)} \leq C_\theta (f_1(t))^\theta (f_2(t))^{1-\theta} \quad (t \in [0, \infty)). \quad (2.29)$$

Mais ainda, suponha que $f_1(t) = Ct^{-\mu}$ para algum $C, \mu \in [0, \infty)$ e $t \in [1, \infty)$. Então para cada $\theta \in [1, \infty)$, existe $C_\theta \in [0, \infty)$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\theta\beta_1}^{\theta\alpha_1}, X)} \leq C_\theta t^{-\mu\theta} \quad (t \in [1, \infty)). \quad (2.30)$$

Demonstração. Seja $t \in [0, \infty)$, usando (1.16)

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2}^{\theta\alpha_1+(1-\theta)\alpha_2}, X)} \leq \|T(t)\Phi_{\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2}^{\theta\alpha_1+(1-\theta)\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(t)\Phi_{\theta(\beta_1-\beta_2)}^{\theta(\alpha_1-\alpha_2)}(A)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

Seja $c := \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2$. Então, note que

$$\Phi_{\frac{\beta_1-\beta_2}{c}}^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(A) = A^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(1+A)^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{c}-\frac{(\beta_1-\beta_2)}{c}} = A^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(1+A)^{-1}$$

e pela proposição 3.10 de [7], o operador $A^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(1+A)^{-1}$ é setorial. Usando as regras de composição de funções do cálculo funcional (proposição 2.1.4 de [18]) temos

$$\Phi_{\theta(\beta_1-\beta_2)}^{\theta(\alpha_1-\alpha_2)}(A) = A^{\theta(\alpha_1-\alpha_2)}(1+A)^{-\theta c} = \left[\Phi_{\frac{\beta_1-\beta_2}{c}}^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(A) \right]^{c\theta}$$

agora usando a desigualdade dos momentos com $\gamma = 0$, $\alpha = c$ e $\beta = \theta\alpha$ temos

$$\left\| \left[\Phi_{\frac{\beta_1-\beta_2}{c}}^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(A) \right]^{c\theta} x \right\|_X \lesssim \left\| \left[\Phi_{\frac{\beta_1-\beta_2}{c}}^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(A) \right]^c x \right\|_X^\theta \|x\|_X^{1-\theta} = \|\Phi_{\beta_1-\beta_2}^{\alpha_1-\alpha_2}(A)x\|_X^\theta \|x\|_X^{1-\theta}$$

para $x \in \mathcal{D}(\Phi_{\beta_1-\beta_2}^{\alpha_1-\alpha_2}A)$. Vamos combinar os resultados acima para demonstrar a desigualdade em

(2.29)

$$\begin{aligned}
\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2}, X)} &\leq \|T(t)\Phi_{\theta(\beta_1-\beta_2)}^{\theta(\alpha_1-\alpha_2)}(A)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \left\| \left[\Phi_{\frac{\beta_1-\beta_2}{c}}^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{c}}(A) \right]^{c\theta} T(t)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\lesssim \|\Phi_{\beta_1-\beta_2}^{\alpha_1-\alpha_2}(A)T(t)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}^\theta \|T(t)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}^{(1-\theta)} \\
&= \|T(t)\Phi_{\beta_1}^{\alpha_1}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}^\theta \|T(t)\Phi_{\beta_2}^{\alpha_2}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}^{(1-\theta)} \\
&\lesssim \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}^{\alpha_1}, X)}^\theta \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\beta_2}^{\alpha_2}, X)}^{(1-\theta)} \leq (f_1(t))^\theta (f_2(t))^{(1-\theta)}
\end{aligned}$$

o que demonstra (2.29). Para demonstrar (2.30), seja $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{n\beta_1}^{n\alpha_1}, X)} &\leq \|T(t)\Phi_{n\beta_1}^{n\alpha_1}(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\left(\frac{t}{n}\right)\Phi_{\beta_1}^{\alpha_1}(A)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \\
&\lesssim \left(f_1\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = C^n n^{\mu n} t^{-\mu n}.
\end{aligned}$$

isso conclui (2.30) para o caso de $\theta \in \mathbb{N}$. Agora basta usar (2.29) para interpolar entre $(n\alpha_1, n\beta_1)$ e $((n+1)\alpha_1, (n+1)\beta_1)$ o que conclui (2.30) para $\theta \in [1, \infty)$. \square

Proposição 2.4.1. *Sejam $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ e A um operador setorial injetivo com resolvente de crescimento (α, β) definido em um espaço de Banach X . Seja $\sigma, \tau \in [0, \infty)$ tais que $\sigma > \alpha - 1$ e $\tau > \beta + 1$. Então para cada $\rho \in [0, \min(\frac{\sigma+1}{\alpha} - 1, \frac{\tau-1}{\beta} - 1))$ existe $C_\rho \in [0, \infty)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau^\sigma, X)} \leq C_\rho t^{-\rho} \quad (t \in [1, \infty)).$$

Demonstração. Vamos demonstrar a seguinte afirmação mais geral: para todo $s \geq 0$ e $\delta, \varepsilon > 0$, existe uma constante $C_{s, \delta, \varepsilon} \geq 0$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)} \leq C_{s, \delta, \varepsilon} t^{-s} \quad (t \in [1, \infty)), \quad (2.31)$$

onde $\mu = \max((s+1)\alpha - 1 + \delta, 0)$ e $\nu = (s+1)\beta + 1 + \varepsilon$. A Proposição 2.4.1 segue tomando $s = p$, $\mu = \sigma$ e $\nu = \tau$. Pelo Lema 2.4.1, basta demonstrar (2.31) para $n = s \in \mathbb{N}_0$.

Seja $x \in X_{\nu+1}^\mu$ e ponha $y := \Phi_\nu^\mu(A)x = A^{-\mu}(1+A)^{\mu+\nu}x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$g(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} R(\lambda, A) y d\lambda$$

é um vetor bem definido em X para todo $t \geq 0$ já que pela Definição 2.4.1, o integrando é uma

função em $H_0^\infty(S_\varphi)$. Note que $g(t)$ é diferenciável e vale

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} (-\lambda R(\lambda, A)) y d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} (-I - AR(\lambda, A)) y d\lambda \\ &= -Ag(t). \end{aligned}$$

Além disso,

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} R(\lambda, A) y d\lambda = A^\mu (1+A)^{-\mu-\nu} y = x.$$

Portanto, pela unicidade de solução do problema de Cauchy, $g(t) = T(t)x$. Usando integração por partes

$$\begin{aligned} t^n T(t)x &= \frac{t^n}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} R(\lambda, A) y d\lambda \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} e^{-\lambda t} \right) \frac{\lambda^\mu}{(1+\lambda)^{\mu+\nu}} (-\lambda R(\lambda, A)) y d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{-\lambda t} p(\lambda; A) y d\lambda \end{aligned}$$

sendo $p(\lambda; A)$ uma combinação linear finita de termos da forma

$$\frac{\lambda^{\mu-j}}{(1+\lambda)^{\mu+\nu+(k-j)}} R(\lambda, A)^{n-k+1}$$

para $0 \leq j \leq k \leq n$, onde $j = 0$ se $\mu = 0$. Portanto

$$\|t^n T(t)x\|_X \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|p(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X d|\lambda| \lesssim \|(-A)^{-\mu} (1+A)^{\mu+\nu} x\|_X \leq \|x\|_{X_\nu^\mu}$$

com constantes implícitas que são independentes de t e x . O resultado se segue do fato de $X_{\nu+1}^\mu$ ser denso em X_ν^μ . \square

O próximo resultado leva em conta o crescimento de $(T(t))_{t \geq 0}$ em X e estende a Proposição 2.4.1 com taxas de decaimento em X_τ^σ para $\sigma \in [0, \alpha - 1]$ e $\tau \in [0, \beta + 1]$.

Proposição 2.4.2. *Sejam $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ e A um operador setorial injetivo com resolvente de crescimento (α, β) definido em um espaço de Banach X . Sejam $\sigma, \tau \in [0, \infty)$, então para cada $\rho \in [0, \min(\sigma/\alpha, \tau/\beta))$ existe uma constante $C_\rho \in [0, \infty)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau^\sigma, X)} \leq C_\rho \max(1, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) t^{-\rho}$$

para $t \in [1, \infty)$.

Demonstração. Vamos demonstrar a seguinte afirmação mais geral: Para todo $s \geq 0$, $\delta, \varepsilon > 0$,

existe uma constante $C_{s,\delta,\varepsilon} \geq 0$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)} \leq C_{s,\delta,\varepsilon} \max(1, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) t^{-s}$$

com $\mu = s\alpha + \delta$ e $\nu = s\beta + \varepsilon$. Seja $\tilde{\varepsilon} > 0$ e ponha $\tilde{s} := s/\theta$, para $\theta \in (0, 1)$, $\tilde{\mu} := \max((\tilde{s} + 1)\alpha - 1 + \tilde{\varepsilon}, 0)$ e $\tilde{\nu} := (\tilde{s} + 1)\beta + 1 + \varepsilon$. Pelo Lema 2.4.1 e por (2.31)

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_{\tilde{\nu}\theta}^{\tilde{\mu}\theta}, X)} \lesssim \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^{1-\theta} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)}^\theta \lesssim \max(1, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) t^{-s}.$$

para todo $t \geq 1$. Observe que $\tilde{\mu}\theta = \max(s\alpha + \theta(\alpha - 1 + \tilde{\varepsilon}), 0)$ e $\tilde{\nu}\theta = s\beta + \theta(\beta + 1 + \tilde{\varepsilon})$. Agora basta tomar $\theta \in (0, 1)$ tal que $\tilde{\mu}\theta \leq s\alpha + \varepsilon$ e $\tilde{\nu}\theta \leq s\beta + \varepsilon$. \square

Definição 2.4.2. *Seja $-A$ o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , e seja $n \in \mathbb{N}_0$. Um espaço de Banach Y que está continuamente imerso em X é (A, n) -Admissível, se valem as seguintes condições:*

1. *Existe uma constante $C_T \in [0, \infty)$ tal que $T(t)Y \subset Y$ e*

$$\|T(t)|_Y\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C_T \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \quad (t \in [0, \infty));$$

2. *Existe um subespaço denso $Y_0 \subset Y$ tal que $[t \mapsto t^n T(t)y] \in L^1([0, \infty); X)$ para todo $y \in Y_0$.*

Exemplo 2.4.1. *Seja $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ e seja A um operador setorial injetivo com resolvente de crescimento (α, β) . Então $Y = X_\tau^\sigma$ é (A, n) -Admissível para todo $\sigma, \tau \in [0, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}_0$ pela Proposição 2.4.1.*

Teorema 2.4.1. *(Caracterização Polinomial via multiplicadores de Fourier) Seja $-A$ o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , suponha que A tem resolvente de crescimento (α, β) para algum $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja Y um espaço (A, n) -Admissível. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- 1) $\sup_{t \geq 0} \|t^n T(t)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$.

- 2) *Existem $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$ e $q \in [p, \infty]$ tais que*

$$\begin{aligned} \psi(\cdot)R(i \cdot, A)^k &\in \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)), \\ (1 - \psi(\cdot))R(i \cdot, A)^k &\in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)) \end{aligned}$$

para todo $k \in \{n - 1, n, n + 1\} \cap \mathbb{N}$.

Mais ainda, se vale (1) ou (2), então $R(i \cdot, A)^k \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X))$ para

- i) $n \geq 2$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$
- ii) $k = n \geq 1$ e $1 \leq p < q \leq \infty$;

iii) $k = n + 1$, $p = 1$ e $q = \infty$.

Antes de demonstrar o Teorema 2.4.1, precisaremos de dois resultados, o primeiro deles é a seguinte lema

Lema 2.4.2. *Sejam X um espaço de Banach, $-A$ o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ definido em X , $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Suponha que $-i\xi \in \rho(A)$ e que a função $[t \mapsto t^n T(t)x] \in L^1([0, \infty); X)$, então*

$$\mathcal{F}[t \mapsto t^n T(t)x](\xi) = n!(i\xi + A)^{-n-1}x.$$

Demonstração. Basta notar que

$$(i\xi + A) \int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x dt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{-i\xi t} T(t)x dt + A \int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x dt.$$

Pelo Lema 3.1.9 de [26], tem-se $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \infty$, usando esse fato, integração por partes e o Teorema A.0.2 obtemos

$$(i\xi + A) \int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x dt = -e^{-i\xi t} T(t)x \Big|_0^\infty = x$$

portanto

$$\int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x dt = (i\xi + A)^{-1}x$$

repetindo o processo n vezes obtemos

$$\int_0^\infty e^{-i\xi t} t^n T(t)x dt = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x dt = n!(i\xi + A)^{-n-1}x.$$

□

Um outro resultado que precisaremos é a seguinte proposição

Proposição 2.4.3. *Seja X um espaço de Banach e $Y \subset X$ continuamente imerso em X e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $-A$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X com $i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$ e que existem $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$ e $q \in [1, \infty]$ tais que, para $j \in \{n-1, n\} \cap \mathbb{N}$, temos*

$$\begin{aligned} m_1^j(\cdot) &:= \psi(\cdot)R(i\cdot, A)^j \in \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)), \\ m_2^j(\cdot) &:= (1 - \psi(\cdot))R(i\cdot, A)^j \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X)). \end{aligned}$$

Então $T_{R(i\cdot, A)^n} : L^p(\mathbb{R}; Y) \cap L^1(\mathbb{R}; Y) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}; X)$ é limitado e $\|T_{R(i\cdot, A)^n}\| \leq 2MC_n$, onde $M = \sup\{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \mid t \in [0, 2]\}$, e

$$C_n = \sum_{j=n-1}^n \|T_{m_1^j}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}; Y), L^\infty(\mathbb{R}; X))} + \|T_{m_2^j}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y), L^q(\mathbb{R}; X))}$$

para $n > 1$ e

$$C_1 = \|T_{m_1^n}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R};Y),L^\infty(\mathbb{R};X))} + \|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} + \|I_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Demonstração. Seja $K \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_K \in \dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \hat{f}^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0\}$ e $x_1, \dots, x_K \in Y$ e ponha $f := \sum_{k=1}^K f_k \otimes x_k$. Pelas propriedades do espaço de Schwartz, segue que $T_{m_1^n}(f) \in C_b(\mathbb{R}; X)$, e por hipótese

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T_{m_1^n}(f)(t)\|_X \leq \|T_{m_1^n}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R};Y),L^\infty(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^1(\mathbb{R};Y)}. \quad (2.32)$$

e

$$\|T_{m_2^n}(f)\|_{L^q(\mathbb{R};X)} \leq \|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}. \quad (2.33)$$

Afirmamos que para cada $l \in \mathbb{Z}$, existe $t \in [l, l+1]$ tal que

$$\|T_{m_2^n}(f)(t)\|_X \leq 2\|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}. \quad (2.34)$$

De fato, supondo por absurdo que seja falso, então para todo $t \in [l, l+1]$ vale

$$\|T_{m_2^n}(f)(t)\|_X > 2\|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}.$$

integrando ambos os membros em t , comparando a norma L^q em \mathbb{R} com a norma L^q em $[l, l+1]$ obtemos

$$\|T_{m_2^n}(f)(t)\|_{L^q(\mathbb{R};X)} \geq \left(\int_l^{l+1} \|T_{m_2^n}(f)(t)\|_X^q dt \right)^{1/q} > 2\|T_{m_2^n} f\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}$$

contradizendo (2.33).

Fixado $l \in \mathbb{Z}$, seja $t \in [l, l+1]$ tal que vale (2.34), nesse caso, fazendo $R(i \cdot, A) = R(i \cdot, A) + \psi(\cdot)R(i \cdot, A) - \psi(\cdot)R(i \cdot, A) = m_2(\cdot) + m_1(\cdot)$, (2.32) implica

$$\begin{aligned} \|T_{R(i \cdot, A)^n}(f)(t)\|_X &\leq 2\|T_{m_1^n}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R};Y),L^\infty(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^1(\mathbb{R};Y) \cap L^p(\mathbb{R};Y)} \\ &\quad + 2\|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};Y),L^q(\mathbb{R};X))} \|f\|_{L^1(\mathbb{R};Y) \cap L^p(\mathbb{R};Y)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Seja $\tau \in [0, 2]$ e observe que o Lema 2.4.2 nos dá

$$\int_0^\tau e^{i\xi r} T(r)x dr = e^{i\xi \tau} T(\tau)R(i\xi, A)x - R(i\xi, A)x$$

para todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x \in X$, portanto

$$\begin{aligned} T(\tau)T_{R(i, A)^n}(f)(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(t-\tau)} e^{i\xi\tau} T(\tau)R(i\xi, A)^n \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(t-\tau)} R(i\xi, A)^n \hat{f}(\xi) d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau e^{i\xi(t-\tau)} e^{i\xi r} T(t)R(i\xi, A)^{n-1} \hat{f}(\xi) dr d\xi \\ &= T_{R(i, A)^n}(f)(t - \tau) + \int_0^\tau T(r)T_{R(i, A)^{n-1}}(f)(t - \tau + r) dr. \end{aligned}$$

Agora usando (2.35) e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|T_{R(i, A)^n}(f)(t - \tau)\|_X &\leq M(\|T_{R(i, A)^n}(f)(t)\|_X + \int_0^\tau \|T_{R(i, A)^{n-1}}(f)(t - \tau + r)\|_X dr) \\ &\leq 2M(\|T_{m_1^n}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}; Y), L^\infty(\mathbb{R}; X))} + \|T_{m_2^n}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y), L^q(\mathbb{R}; X))}) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}; Y) \cap L^p(\mathbb{R}; Y)} \\ &+ M(\tau \|T_{m_1^{n-1}}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}; X)} + \tau^{1/q'} \|T_{m_2^{n-1}}(f)\|_{L^q(\mathbb{R}; X)}) \\ &\leq 2M \left(\sum_{j=n-1}^n \|T_{m_1^j}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}; Y), L^\infty(\mathbb{R}; X))} + \|T_{m_2^j}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y), L^q(\mathbb{R}; X))} \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}; Y) \cap L^p(\mathbb{R}; Y)} \end{aligned}$$

para $n > 1$. O caso $n = 1$ é análogo, a diferença é que podemos estimar diretamente

$$\int_0^\tau \|f(t - \tau - r)\|_X dr \leq \|I_Y\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}; Y)}.$$

Uma vez que $\tau \in [0, 2]$, $l \in \mathbb{Z}$ é arbitrário e $\dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \otimes Y \subset L^p(\mathbb{R}; Y) \cap L^1(\mathbb{R}; Y)$ é denso, concluímos a demonstração. \square

2.4.1 Demonstração do Teorema 2.4.1

Demonstração. (2) \implies (1): Usando o Teorema A.0.1, seja $\omega, M_\omega \geq 1$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{t(\omega-1)}$ para todo $t \geq 0$ e ponha

$$m(\xi) := n!(i\xi + A)^{-n}(I_X + \omega(i\xi + A)^{-1}) \in \mathcal{L}(Y, X) \quad (\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Como $(i \cdot + A)^{-1} = -R(-i \cdot, A)$, pela Proposição 2.4.3

$$T_m : L^p(\mathbb{R}; Y) \cap L^1(\mathbb{R}; Y) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}; X)$$

é limitado com

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y) \cap L^1(\mathbb{R}; Y), L^\infty(\mathbb{R}; X))} \leq 2Mn!(C_n + \omega C_{n+1}) \quad (2.36)$$

onde $M := \sup_{t \in [0,2]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e C_k como o da Proposição 2.4.3 para $k \in \mathbb{N}$ e $C_0 := \|I_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$. Seja $Y_0 \subset Y$ como na Definição 2.4.2 e fixe $x \in Y_0$. Pelo Lema 2.4.2

$$\mathcal{F}[t \mapsto t^n T(t)x](\cdot) = n!(i \cdot + A)^{-n-1}x. \quad (2.37)$$

Ponha $f(t) := e^{-\omega t}T(t)x$ para $t \geq 0$ e $f \equiv 0$ em $(-\infty, 0)$, nesse caso

$$\|f(t)\|_Y \leq \|e^{-\omega t}T(t)\|_{\mathcal{L}(Y)}\|x\|_Y \leq C_T \|e^{-\omega t}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_Y \quad (t \in [0, \infty)). \quad (2.38)$$

Portanto $f \in L^1(\mathbb{R}; Y) \cap L^\infty(\mathbb{R}; Y)$ e, por interpolação, $\|f\|_{L^r(\mathbb{R}; Y)} \leq C_T M_\omega \|x\|_Y$ para todo $r \in [1, \infty]$. Aplicando o Lema 2.4.2 para o semigrupo $e^{-\omega t}T(t)$ cujo gerador infinitesimal é $-A - \omega I$, obtemos $\hat{f}(\cdot) = (\omega + i \cdot + A)^{-1}x$. Usando a identidade do resolvente $(i\xi + A)^{-1} - (\omega + i\xi + A)^{-1} = \omega(i\xi + A)^{-1}(\omega + i\xi + A)^{-1}$ obtemos

$$m(\xi)\hat{f}(\xi) = n!(i\xi + A)^{-n-1}x \quad (\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Combinando (2.37) e (2.38) com (2.36) temos

$$\sup_{t \geq 0} \|t^n T(t)x\|_X \leq \|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y) \cap L^1(\mathbb{R}; Y), L^\infty(\mathbb{R}; X))} (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}; Y)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}; Y)}) \leq C \|x\|_Y$$

onde $C = 4Mn!C_T M_\omega (C_n + \omega C_{n+1})$. Agora basta estender para Y já que $Y_0 \subset Y$ é denso.

(1) \implies (2): Ponha $K_n := \sup_{t \geq 0} \|t^n T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ e seja $Y_0 \subset Y$ como na Definição 2.4.2. Seja $f \in \dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \otimes Y_0$ e defina a convolução entre f e $t \mapsto t^n T(t)$

$$S_k(f)(s) := \int_0^\infty t^k T(t)f(s-t)dt, \quad s \in \mathbb{R}, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Note que a integral acima é convergente, pois $t^n T(t)y \in L^1([0, \infty); X)$ para todo $y \in Y_0$. Observe também que, pelo Lema 2.4.2, e pela relação entre a convolução e a transformada de Fourier, podemos escrever

$$S_k(f) = k! \mathcal{F}^{-1}((i \cdot + A)^{-k-1} \hat{f}(\cdot)) = k! T_{(i \cdot + A)^{-k-1}}(f). \quad (2.39)$$

Agora, para $n \geq 2$, $k \in \{0, \dots, n-2\}$ e $r \in [1, \infty]$, defina $\tilde{M} := \sup_{t \in [0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ temos

$$\|t \mapsto t^k T(t)\|_{L^r([0, \infty); \mathcal{L}(Y,X))} \leq \tilde{M} + K_n \|t \mapsto t^{-2}\|_{L^r(1, \infty)} \leq \tilde{M} + K_n. \quad (2.40)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|t^k T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^r dt &= \int_0^1 \|t^k T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^r dt + \int_1^\infty \|t^k T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^r dt \\
&\leq \left(\sup_{t \in [0,1]} t^k \right)^r \tilde{M}^r + \int_1^\infty t^{(k-n)r} \|t^n T(t)\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^r dt \\
&\leq \tilde{M}^r + K_n^r \int_1^\infty t^{-2r} dt \\
&\leq \tilde{M}^r + K_n^r.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, para $n \geq 1$ e $r \in (1, \infty]$,

$$\|t \mapsto t^{n-1} T(t)\|_{L^r([0,\infty); \mathcal{L}(Y,X))} \leq \tilde{M} + \frac{K_n}{(r-1)^{1/r}}. \quad (2.41)$$

Combinando (2.39) e (2.40) (trocando k por $k-1$) com a desigualdade de Young vetorial (Proposição 1.3.5 de [3]) obtemos, para $p \in [1, \infty)$ e $q \in [p, \infty]$,

$$\begin{aligned}
\|T_{(i \cdot + A)^{-k}}(f)\|_{L^q([0,\infty); X)} &= \frac{1}{(k-1)!} \|S_{k-1}(f)(\cdot)\|_{L^q([0,\infty); Y)} \\
&\leq \frac{1}{(k-1)!} \|[t \mapsto t^{k-1} T(t)]\|_{L^r([0,\infty); \mathcal{L}(Y,X))} \|f\|_{L^p([0,\infty); Y)} \\
&\leq \frac{\tilde{M} + K_n}{(k-1)!} \|f\|_{L^p([0,\infty); Y)}, \quad (n \geq 2, k \in \{1, \dots, n-1\}),
\end{aligned}$$

O que mostra que

$$\|T_{(i \cdot + A)^{-k}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y); L^q(\mathbb{R}; X))} \leq \frac{\tilde{M} + K_n}{(k-1)!} \quad (n \geq 2, k \in \{1, \dots, n-1\}). \quad (2.42)$$

Portanto $(i \cdot + A)^{-k} \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(Y, X))$, e de maneira análoga, com o auxílio de (2.41), temos

$$\|T_{(i \cdot + A)^{-n}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; Y); L^q(\mathbb{R}; X))} \leq \frac{\tilde{M} + (r-1)^{-1/r} K_n}{(n-1)!} \quad (n \geq 1, p < q), \quad (2.43)$$

$$\|T_{(i \cdot + A)^{-n-1}}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}; Y); L^\infty(\mathbb{R}; X))} \leq \frac{K_n}{n!}. \quad (2.44)$$

Concluindo que $(i \cdot + A)^{-n} \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(Y, X))$ e $(i \cdot + A)^{-n-1} \in \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(Y, X))$. Agora (2.42), (2.43) e (2.44) resultam nos itens (i) – (iii) do Teorema 2.4.1 para $(i \cdot + A)^{-1}$, e por reflexão, vale também para $R(i \cdot, A)$. Finalmente, para (2), seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e note que $\mathcal{F}^{-1}(\psi(\cdot)(i \cdot + A)^{-1} \hat{f}(\cdot)) = (\mathcal{F}^{-1}(\psi)) * S_0(f)$, pela desigualdade de Young e (2.44), segue-se que $\psi(\cdot)R(i \cdot, A)^k \in \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(Y, X))$ para todo $k \in \{1, \dots, n+1\}$, e obtemos (2.44) para $\psi(\cdot)R(i \cdot, A)$ com o fator $\|\mathcal{F}^{-1}\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}$ adicional multiplicativo. Por fim, (2.42) é válida para $(1 - \psi(\cdot))R(i \cdot, A)$ já que a soma de multiplicadores ainda é um multiplicador. \square

Observação 2.4.1. A hipótese feita no Teorema 2.4.1 de que A possui resolvente de crescimento (α, β) para algum $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ é feita apenas para garantir que $T_{R(i \cdot, A)}$ esteja bem definido, a

escolha específica de α e β não é relevante.

Por fim, como consequência do Teorema 2.4.1, temos o próximo resultado sobre estabilidade polinomial usando o tipo de Fourier do espaço de Banach envolvido.

Teorema 2.4.2. (*Caracterização polinomial via tipo de Fourier*) Sejam $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ e A um operador setorial injetivo com resolvente de crescimento (α, β) definido no espaço de Banach X . Suponha que X possui tipo de Fourier $p \in [1, 2]$ e sejam $r \in [1, \infty]$, com $1/r = 1/p - 1/p'$, e $\sigma, \tau \in [0, \infty)$ tais que $\sigma > \alpha - 1$ e $\tau > \beta + 1/r$. Então, para cada $\rho \in [0, \min(\frac{\sigma+1}{\alpha} - 1, \frac{\tau-r^{-1}}{\beta} - 1))$ existe $C_\rho \in [0, \infty)$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau^r, X)} \leq C_\rho t^{-\rho} \quad (t \in [1, \infty)). \quad (2.45)$$

Se $p = 2$, então (2.45) também vale para $\tau \geq \beta$ e $\rho \in [0, \infty)$ com $\rho < \frac{\sigma+1}{\alpha} - 1$ e $\rho \leq \frac{\tau}{\beta} - 1$.

Demonstração. Vamos demonstrar a seguinte afirmação: para todo $s \geq 0$, $\delta, \varepsilon > 0$ existe uma constante $C_{s, \delta, \varepsilon} \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\mu^\nu, X)} \leq C_{s, \delta, \varepsilon} t^{-s} \quad (t \in [1, \infty)),$$

onde $\mu = \max((s+1)\alpha - 1 + \delta, 0)$, $\nu = (s+1)\beta + \frac{1}{r} + \varepsilon$ para $p \in [1, 2)$, e $\nu = (s+1)\beta$ para $p = 2$. Vamos usar o Lema 2.4.1 e demonstrar o caso $n := s \in \mathbb{N}_0$.

Primeiro note que se $p = 1$, então o Teorema 2.4.2 se segue da Proposição 2.4.1 já que todo espaço de Banach possui tipo de Fourier 1.

Para $p \in (1, 2)$ vamos definir $\beta_0 := 1/r + \varepsilon$, e para $p = 2$ vamos fazer $\beta_0 = 0$. Vamos assumir $\beta_0 \in [0, 1)$. Observe que, pela hipótese de A possuir resolvente de crescimento (α, β) vale

$$\sup \left\{ \frac{|\lambda|^\alpha}{(1+|\lambda|)^{\alpha+\beta}} \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \mid \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} < \infty. \quad (2.46)$$

Afirmamos que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sup \{ \|R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(X_{n\beta}^{\alpha, X})} \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \} < \infty. \quad (2.47)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|R(i\xi, A)^k A^{n\alpha} (1+A)^{-n\alpha-n\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|R(i\xi, A)^k A^{(n-k+k)\alpha} (1+A)^{-(n-k+k)(\alpha+\beta)}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|(R(i\xi, A) A^\alpha (1+A)^{-\alpha-\beta})^k (A^\alpha (1+A)^{-(\alpha+\beta)})^{n-k}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|R(i\xi, A) A^\alpha (1+A)^{-\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)}^k \|(A^\alpha (1+A)^{-(\alpha+\beta)})^{n-k}\|_{\mathcal{L}(X)} \end{aligned}$$

o termo $A^\alpha (1+A)^{-\alpha-\beta}$ é uniformemente limitado para $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vamos mostrar que o termo $R(i\xi, A) A^\alpha (1+A)^{-\alpha-\beta}$ também é uniformemente limitado.

Por (2.46), se $|\xi| \leq 1$, então o conjunto

$$\{|\xi|^\alpha R(i\xi, A) \mid |\xi| \leq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é uniformemente limitado. Usando o item 1 da Proposição 2.3.1, o conjunto

$$\{R(i\xi, A)A^\alpha(1+A)^{-\alpha} \mid |\xi| \leq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é uniformemente limitado.

Para $|\xi| \geq 1$, (2.46) implica que o conjunto

$$\{|\xi|^{-\beta} R(i\xi, A) \mid |\xi| \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é uniformemente limitado. Usando o item 2 da Proposição 2.3.1, segue-se que o conjunto

$$\{R(i\xi, A)(1+A)^{-\beta} \mid |\xi| \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$$

é uniformemente limitado. Portanto, para $|\xi| \leq 1$ vale

$$\|R(i\xi, A)A^\alpha(1+A)^{-\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)} \|(1+A)^{-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

e para $|\xi| \geq 1$ vale

$$\|R(i\xi, A)A^\alpha(1+A)^{-\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X_\beta, X)} \|A^\alpha(1+A)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

o que demonstra (2.47).

Defina $h(\xi) := |\xi|^{1-\delta}(1+|\xi|)^{-1+\delta+\beta_0}$ e observe que, para cada $k \in \{1, \dots, n+1\}$ temos

$$\begin{aligned} \|R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)} &\lesssim \|R(i\xi, A)^k A^{(n+1)\alpha-1+\delta}(1+A)^{-(n+1)\alpha+1-\delta-(n+1)\beta-\beta_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|R(i\xi, A)^{k-1} \Phi_{n\beta}^{n\alpha}(A) R(i\xi, A) A^{\alpha-1+\delta}(1+A)^{-\alpha+1-\beta-\delta-\beta_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|R(i\xi, A)^{k-1} \Phi_{n\beta}^{n\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \|R(i\xi, A) A^{\alpha-1+\delta}(1+A)^{-\alpha+1-\delta-\beta-\beta_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\lesssim \|R(i\xi, A)^{k-1}\|_{\mathcal{L}(X_{n\beta}^{n\alpha}, X)} \|R(i\xi, A) A^{\alpha-1+\delta}(1+A)^{-\alpha+1-\delta-\beta-\beta_0}\|_{\mathcal{L}(X)}. \end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $h(\xi)$, e procedendo de maneira análoga na demonstração de (2.47), segue-se que

$$\left\{ \frac{|\xi|^{1-\delta}}{(1+|\xi|)^{1-\delta-\beta_0}} R(i\xi, A)^k \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathcal{L}(X_\nu^\mu, X) \quad (2.48)$$

é uniformemente limitado. Agora seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi \equiv 1$ em $[-1, 1]$. Usando (2.48) temos

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(\xi)| \|R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(\xi)| \frac{(1+|\xi|)^{1-\delta-\beta_0}}{|\xi|^{1-\delta}} d\xi \lesssim \int_0^{\xi_0} \frac{1}{|\xi|^{1-\delta}} d\xi,$$

para algum $\xi_0 > 0$, e como $1 - \delta < 1$, a integral de $|\xi|^{\delta-1}$ é convergente. Agora usando novamente (2.48) temos

$$\int_{\mathbb{R}} \|(1 - \psi(\xi))R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)}^r d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |1 - \psi(\xi)|^r \frac{(1 + |\xi|)^{r-\delta r - \beta_0 r}}{|\xi|^{r-r\delta}} d\xi \lesssim \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^{1+\tilde{\varepsilon}}},$$

como $\psi(\xi) = 1$ para $\xi \in [-1, 1]$, basta limitar a integral acima a partir de $\xi_1 > 0$, de fato, como $\beta_0 r = 1 + \tilde{\varepsilon} > 1$, para $\tilde{\varepsilon} = r\varepsilon > 0$ segue-se que a integral de $(1 + |\xi|)^{-\tilde{\varepsilon}-1}$ é convergente. Usando o Teorema 2.1.5 e as estimativas acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \psi(\cdot)R(i\cdot, A)^k &\in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)) \subset \mathcal{M}^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)), \\ (1 - \psi(\cdot))R(i\cdot, A)^k &\in L^r(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)) \subset \mathcal{M}^{p,p'}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X_\nu^\mu, X)). \end{aligned}$$

Note que usamos o fato de X_ν^μ possuir tipo de Fourier p já que é isomorfo ao espaço X . Para concluir a demonstração basta aplicar o Teorema 2.4.1. \square

Vejamos um exemplo de aplicação dos resultados apresentados.

Exemplo 2.4.2. Fixe $a \in (0, \infty)$ e $b \in (0, 1)$ com $a + b \geq 1$. Defina $\varphi(s) := s^{-a} + is^b$ para $s \in (1, \infty)$ e sejam $X = W^{1,2}(1, \infty)$ e A o operador de multiplicação definido em X , associado a função φ , i.e, $(Af)(s) = \varphi(s)f(s)$. Nesse caso, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$ e $-A$ é gerador do C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por $T(t)f(s) = e^{-t\varphi(s)}f(s)$ para $t \in [0, \infty)$, $f \in W^{1,2}(1, \infty)$ e $s \in (1, \infty)$. Vamos demonstrar que A possui resolvente de crescimento $(0, \frac{b-1+2a}{b})$, mostrando que $\|(\eta - i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim |\xi|^{\frac{b-1+2a}{b}}$ para cada $\eta \in [0, \infty)$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Note que o operador $(\eta - i\xi + A)^{-1}$ é o operador de multiplicação em $W^{1,2}(1, \infty)$ associado com a função $s \mapsto (\eta + s^{-1} + i(s^b - \xi))^{-1}$. Pela Teorema II.3.8 (Forma geral do Teorema de Hille-Yosida) em [16], existem $M \geq 1$ e ω_0 tais que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\text{Re } \lambda > \omega_0$,

$$\|R(\lambda, -A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\text{Re } \lambda - \omega_0}. \quad (2.49)$$

Seja $\omega > 0$ com $\omega > \omega_0$, então para todo $\eta > \omega$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, por (2.49),

$$\|R(\eta + i\xi, -A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(\eta + i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\eta - \omega_0},$$

assim,

$$\sup\{\|(\eta + i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \mid \eta > \omega, \xi \in \mathbb{R}\} < \infty. \quad (2.50)$$

Como $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$, então $\mathbb{C}_- \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A)$ é analítica, logo pela compacidade $[-\omega, 0] \times \left[-\left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}, \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}\right]$, assim

$$\sup\left\{\|(\eta + i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \mid -\eta \in [-\omega, 0] \times \left[-\left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}, \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}\right]\right\} < \infty. \quad (2.51)$$

Combinando (2.50) e (2.51)

$$\sup \left\{ \|R(-\eta + i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \mid \eta \geq 0, \xi \in \left[-\left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}, \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)} \right] \right\} < \infty.$$

Agora, para $\xi \in \mathbb{R}$ com $|\xi| > \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}$, vamos estimar $\{\|R(-\eta + i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}\}$ pelo supremo de $s \mapsto (\eta + s^{-a} + i(s^b - \xi))^{-1}$ e sua derivada, ou seja,

$$\begin{aligned} & \sup_{s>1} \frac{1}{|\eta + s^{-a} + i(s^b - \xi)|} + \sup_{s>1} \frac{as^{-a-1} + bs^{b-1}}{|\eta + s^{-a} + i(s^b - \xi)|^2} \\ & \leq 2 \sup_{s>1} \frac{1}{s^{-a} + |s^b - \xi|} + 2 \sup_{s>1} \frac{as^{-a-1} + bs^{b-1}}{s^{-2a} + |s^b - \xi|^2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Note que

$$\sup_{1 < s \leq |\xi|^{1/b}} \frac{1}{s^{-a} + |s^b - \xi|} \leq |\xi|^{a/b} \leq g(\xi)$$

e $s \mapsto \frac{1}{s^{-a} + |s^b - \xi|}$ é decrescente em $s > |\xi|^{1/b} > \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(a+b)}$, logo a primeira parcela de (2.52) é majorada por $g(\xi)$ para $|\xi| > \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)}$. Para a segunda parcela, com $|\xi| > \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(a+b)} > 1$ e $s \in (1, (|\xi| + 1/2)^{1/b})$, temos

$$\frac{as^{-a-1} + bs^{b-1}}{s^{-2a} + |s^b - \xi|^2} \leq as^{a-1} + bs^{b-1+2a} \leq C|\xi|^{\frac{b-1+2a}{b}},$$

e para $s > (|\xi| + 1/2)^{1/b}$,

$$\frac{as^{-a-1} + bs^{b-1}}{s^{-2a} + |s^b - \xi|^2} \lesssim \frac{1}{(s^b - \xi)^2} \lesssim g(\xi).$$

Assim, combinando as estimativas anteriores, para cada $\eta > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\|(\eta - i\xi + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim |\xi|^{\frac{b-1+2a}{b}}.$$

Agora seja $t \in [1, \infty)$, temos então

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} & \simeq \sup_{k \in \{0,1\}} \sup_{s \in (1, \infty)} \left| \frac{d^k}{ds^k} e^{-t\varphi(s)} \right| \simeq \sup_{s \in (1, \infty)} |ibs^{b-1}te^{-ts^{-a}} - as^{-a-1}te^{-ts^{-a}}| \\ & \simeq \sup_{s \in (1, \infty)} s^{b-1}te^{-ts^{-a}} \simeq t^{1-\frac{1-b}{a}}, \end{aligned}$$

para constantes implícitas que não dependem de t . Pela Proposição 2.4.2, para todo $t \in [1, \infty)$ e para cada $\tau \in [0, \infty)$ e $\rho \in [0, \tau b/(b-1+2a))$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau, X)} \lesssim t^{1-\frac{1-b}{a}-\rho}.$$

Por outro lado, de maneira explícita, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau, X)} \simeq \sup_{k \in \{0,1\}} \sup_{s \in (1, \infty)} \left| \frac{d^k}{ds^k} \left(e^{-t\varphi(s)} \varphi(s)^{-\tau} \right) \right| \simeq \sup_{s \in (1, \infty)} s^{b-1-b\tau} t e^{-ts^{-a}} \simeq t^{1-\frac{1-b+\tau b}{a}}.$$

o que mostra que $\|T(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X_\tau, X)}$ decai mais rapidamente do que o resultado da Proposição 2.4.2 prevê, observe também que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_\tau, X)} \in L^1[0, \infty)$ se, e somente se, $\tau > \frac{b-1+2a}{b}$.

Referências

- [1] H. Abels. Pseudodifferential and Singular Integral Operators: An Introduction with Applications, Berlin, Boston: De Gruyter, 2012.
- [2] H. Amann. Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications. *Math. Nachr.* 186, 5–56 (1997)
- [3] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, in: Volume 96 of *Monographs in Mathematics*, second ed., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [4] W. Arendt and S. Bu. The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity. *Math. Z.*, 240(2):311–343, 2002.
- [5] A. Bátkai, K.-J. Engel, J. Prüss and R. Schnaubelt. Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachrichten.* 279.13-14: 1425-1440 (2006).
- [6] C. Batty and T. Duyckaerts. Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces. *J. Evol. Equ.* 8.4: 765-780 (2008).
- [7] C. Batty, R. Chill and Y. Tomilov. Fine scales of decay of operator semigroups. *J. Eur. Math. Soc.(JEMS)* 18.4: 853-929 (2016).
- [8] C. Batty, A. Gomilko and Y. Tomilov. Functional calculi for sectorial operators and related function theory. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 22.3: 1383-1463 (2023).
- [9] A. Benedek, A.-P. Calderón, and R. Panzone. Convolution operators on Banach space valued functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 48, 356–365 (1962)
- [10] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.* 347: 455-478 (2010).
- [11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.
- [12] D.L. Burkholder. A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions. In: *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II* (Chicago, Ill., 1981), Wadsworth Mathematics Series, pp. 270–286. Wadsworth, Belmont (1983)

- [13] N. Burq. Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Math.* 180: 1–29 (1998).
- [14] A.P. Calderon and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.* 88, 85–139 (1952)
- [15] C. Deng, J. Rozendaal, and M. Veraar. Improved polynomial decay for unbounded semigroups. Preprint, 2024. Available at arXiv:2407.09323.
- [16] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [17] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, in: Volume 249 of Graduate Texts in Mathematics, third ed., Springer, New York, 2014.
- [18] M. Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [19] C. Hao. *Lecture Notes on Harmonic Analysis*. Institute of Mathematics, AMSS, Chinese Academy of Sciences. Updated: April 28, 2020.
- [20] M. Hieber. *Operator valued Fourier multipliers*. In: *Topics in Nonlinear Analysis. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, vol. 35, pp. 363–380. Birkhäuser, Basel (1999)
- [21] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.* 104 (1960) 93–140.
- [22] P. C. Kunstmann and L. Weis. Maximal L^p -Regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞ -functional Calculus. In *Functional Analytic Methods for Evolution Equations (Levico Terme 2001)*, volume 1855 of *Lecture Notes in Math.*, pages 65–312. Springer, Berlin, 2004.
- [23] G. Lebeau. Équation des ondes amorties. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, volume 19 of *Math. Phys. Stud.*, pp. 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [24] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'Équation des ondes par le bord. *Duke Mathematical Journal*, 86(3):465–491 (1997).
- [25] Z. Liu and B. Rao. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Z. Angew. Math. Phys.* 56.4: 630-44(2005).
- [26] J. V. Neerven. *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators*, volume 88 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

- [27] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Vol. 44. Springer Science & Business Media, (2012).
- [28] J. Rozendaal. Functional calculus for C_0 -groups using type and cotype. Q. J. Math., 70(1):17–47, 2019
- [29] J. Rozendaal and M. Veraar. Fourier Multiplier Theorems Involving Type and Cotype. J. Fourier Anal. Appl. 24: 583-619 (2018).
- [30] J. Rozendaal and M. Veraar. Stability theory for semigroups using (L^p, L^q) Fourier multipliers. J. Funct. Anal. 275.10: 2845-2894 (2018).
- [31] J. Rozendaal, D. Seifert and R. Stahn. Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces. Adv. Math. 346: 359-388 (2019).
- [32] J. Rozendaal. Operator-valued (L_p, L_q) Fourier multipliers and stability theory for evolution equations. Indag. Math. 34.1: 1-36 (2023).
- [33] W. Rudin. Functional analysis. McGraw-Hill, (1991).
- [34] G. Santana and S. L. Carvalho. Refined decay rates of C_0 -semigroups on Banach spaces. J. Evol. Equ., 24(2):Paper No. 28, 59, 2024.
- [35] T. Tao, Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis, in: Volume 106 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2006.
- [36] H.Tuomas, M.Veraar, J.Van Neerven, and L.Weis. Analysis in Banach Spaces: Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory. (2016).
- [37] H.Tuomas, M.Veraar, J.Van Neerven, and L.Weis. Analysis in Banach Spaces: Volume II: Martingales and Littlewood-Paley Theory. (2016).
- [38] L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity. Math. Ann. 319.4: 735-758 (2001).

Apêndice A

Teoria de Semigrupos

Neste apêndice vamos apresentar os resultados elementares da teoria de Semigrupos de operadores lineares.

Definição A.0.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $T(t)$ a um parâmetro $t \in [0, \infty)$, onde $T(t) : X \rightarrow X$ é linear e limitado é um C_0 -semigrupo se*

1. $T(0) = I$
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo)
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$ (propriedade de continuidade)

Definição A.0.2. *Um operador linear $A : X \rightarrow X$ definido por*

1.

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

2.

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$

Teorema A.0.1. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo. Então existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad 0 \leq t < \infty$$

Demonstração. Vamos mostrar que existe $t_1 > 0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $t \in [0, t_1]$. Pelo princípio de limitação uniforme, $T(t)$ é pontualmente limitado pois é um semigrupo de operadores lineares e limitados, logo é uniformemente limitado, o que implica

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Como $T(0) = I$ e $\|T(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, segue-se que $M \geq 1$. Agora, defina $\omega := \ln(M)/t_1 \geq 0$; dado $t \geq 0$, escreva $t = nt_1 + \delta$, onde $\delta \in [0, t_1]$. Pela propriedade de semigrupo, segue-se que

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(nt_1 + \delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|T(nt_1)T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|T^n(t_1)T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T(t_1)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^n M = M^{n+1}. \end{aligned}$$

Agora note que $n = \frac{t}{t_1} - \frac{\delta}{t_1}$, o que implica $n \leq \frac{t}{t_1}$, e como $M \geq 1$, segue-se que $M^n \leq M^{\frac{t}{t_1}}$. Uma vez que $\omega = \ln(M)/t_1$, temos $M^{\frac{1}{t_1}} = e^\omega$, o que implica $M^{\frac{t}{t_1}} = e^{t\omega}$ \square

Proposição A.0.1. *Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo, então $\forall x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $[0, \infty) \rightarrow X$.*

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$ e note que

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X = \|T(h)T(t)x - T(t)x\|_X \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h)x - x\|_X \leq M e^{\omega t} \|T(h)x - x\|_X;$$

fazendo $h \rightarrow 0^+$ e usando a propriedade (3) de semigrupos o resultado se segue. \square

Teorema A.0.2. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então*

i) *Para $x \in X$, vale*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

ii) *Para $x \in X$, valem*

$$\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$$

e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

iii) *Para $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e vale*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

iv) *Para $x \in \mathcal{D}(A)$, vale*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Demonstração. Note que as propriedades (ii) e (iv) são análogas aos teoremas do cálculo para funções reais.

i) Note que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\|_X \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|_X ds.$$

Como $t \mapsto T(t)x$ é contínua, segue-se que a medida que $h \rightarrow 0$, $s \rightarrow t$ (já que $t \leq s \leq t+h$), e portanto $\|T(s)x - T(t)x\|_X \rightarrow 0$. Por continuidade uniforme,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\|_X \rightarrow 0.$$

ii) Sejam $x \in X$ e $h > 0$, e observe que

$$\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = \frac{1}{h} \int_0^t T(h+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo $h+s = s'$ na primeira integral do lado direito acima, temos

$$\frac{1}{h} \int_0^t T(h+s)x ds = \frac{1}{h} \int_h^{h+t} T(s)x ds.$$

Agora vamos usar as identidades

$$\int_h^{t+h} = \int_0^{t+h} - \int_0^h \quad e \quad \int_0^t = \int_0^{t+h} - \int_t^{t+h}$$

para reescrever as integrais em (A.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^t T(h+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} T(s)x ds - \int_0^h T(s)x ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} T(s)x ds - \int_t^{t+h} T(s)x ds \right). \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds,$$

e tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, temos

$$\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

iii) Sejam agora $x \in \mathcal{D}(A)$ e $h > 0$. Então,

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} = \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} = T(t) \frac{T(h) - I}{h} x,$$

e tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, temos $A(T(t)x) = T(t)Ax$ e $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Note que esse cálculo também mostra que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

onde $\frac{d^+}{dt}$ indica a derivada a direita. Vamos verificar que a derivada a esquerda também

existe e vale $AT(t)x$. Se $t > 0$, então

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} \right) - AT(t)x \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{T(t+h-h)x - T(t-h)x}{h} \right) + T(t-h)Ax - T(t-h)Ax - AT(t)x \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + \lim_{h \rightarrow 0^+} (T(t-h)Ax - T(t)Ax). \end{aligned}$$

O primeiro limite na última igualdade é zero, pois $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado em $0 \leq h \leq t$, enquanto que o segundo limite é zero, pois $T(t-h)$ é contínua.

iv) Usando o item *iii*), temos

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

□

Proposição A.0.2. *Se A é o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e A é um operador fechado.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, e para cada $t > 0$, defina

$$x_t := \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds.$$

Segue-se do Teorema (A.0.2) que $x_t \in \mathcal{D}(A)$ e que $\lim_{t \rightarrow 0} x_t = x$, e isso conclui a densidade.

Para mostrar que A é fechado, dada uma sequência $(x_n)_n$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, devemos mostrar que $x \in \mathcal{D}(A)$ e que $Ax = y$. Pelo item *iv*) do Teorema (A.0.2)

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds.$$

Note que $T(s)Ax_n \rightarrow T(s)y$ uniformemente em cada intervalo compacto, logo podemos tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$ e escrever

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds \implies \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds.$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$, temos $Ax = y$, e como $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(T(t) - I)x$ existe, concluímos a demonstração. □

Teorema A.0.3. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0 -semigrupos de operadores lineares e limitados com geradores A e B respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Usaremos o item *iii*) do Teorema (A.0.2). Como $x \in \mathcal{D}(B)$, $S(s)x \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, logo $T(t)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \geq 0$; em particular,

substituindo t por $t - s$ em $T(t)S(s)$ temos $T(t - s)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$. Como a função $s \mapsto T(t - s)S(s)x$ é diferenciável, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t - s)S(s)x &= -AT(t - s)S(s)x + T(t - s)BS(s)x \\ &= -T(t - s)AS(s)x + T(t - s)AS(s)x = 0 \implies T(t - s)S(s)x = cte. \end{aligned}$$

Portanto, os valores de $T(t - s)S(s)x$ quando $t = s$ e quando $s = 0$ são os mesmos, o que mostra que $T(0)S(t)x = T(t)S(0)x$. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso, o resultado se segue. \square

Vamos dar alguns exemplos de C_0 -semigrupos.

Exemplo A.0.1. *Seja $p \in [1, \infty)$ e considere $f \in L^p(\mathbb{R})$. Defina*

$$(T(t)f)(x) = f(x + t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Então, $(T(t))_{t \geq 0}$ é uma isometria linear em $L^p(\mathbb{R})$. A família $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamada semigrupo das translações, seu gerador é o operador com domínio $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$, onde $W^{1,p}(\mathbb{R})$ é o espaço de Sobolev de ordem $(1, p)$, i.e.,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(\mathbb{R}) \text{ e } f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

onde a derivada acima deve ser interpretada no sentido das distribuições, e a ação de A é dada por $Af = f'$.

Exemplo A.0.2. *Considere o núcleo do calor $K : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Da teoria de aproximações da identidade [17], sabemos que se $f \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $p \in [1, \infty)$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (K_t * f)(x) = f(x),$$

onde a convergência acima se dá na norma $L^p(\mathbb{R})$. Considere a família de operadores $(T(t))_{t \geq 0}$ em $L^p(\mathbb{R})$, dada por

$$\begin{cases} (T(t)f)(x) = (K_t * f)(x), & t > 0 \\ (T(0)f)(x) = f(x). \end{cases}$$

Então, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e seu gerador é dado por $Af = -\Delta f$, cujo domínio é $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R})$.

Apêndice B

Tópicos de Interpolação de Operadores

Neste apêndice vamos reunir alguns resultados sobre interpolação de operadores em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \in [1, \infty)$, e denote por $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \alpha\}$, e $d_f(\alpha) = \mu(E_\alpha)$. Nesse caso,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \geq \int_{E_\alpha} |f(x)|^p dx \geq \alpha^p d_f(\alpha),$$

e portanto

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p}{\alpha^p}. \quad (\text{B.1})$$

Observe que podemos usar a função $d_f(\alpha)$ para calcular a norma L^p da função f como se segue:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha \right) dx \\ &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \left(\int_{|f|>\alpha} dx \right) d\alpha \\ &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Dadas as funções f e g , considere os conjuntos

$$\{x \mid |f+g| > \alpha + \beta\}, \{x \mid |f| > \alpha\} \text{ e } \{x \mid |g| > \beta\}.$$

Nesse caso, se x é tal que $|f(x)| \leq \alpha$ e $|g(x)| \leq \beta$ simultaneamente, então

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \alpha + \beta,$$

o que implica

$$x \in \{x \mid |f(x) + g(x)| \leq \alpha + \beta\}.$$

Isso mostra que

$$\{x \mid |f(x)| \leq \alpha\} \cap \{x \mid |g(x)| \leq \beta\} \subset \{x \mid |f(x) + g(x)| \leq \alpha + \beta\}.$$

Tomando o complementar, obtemos

$$\{x \mid |f + g| > \alpha + \beta\} \subset \{x \mid |f| > \alpha\} \cup \{x \mid |g| > \beta\},$$

e em particular,

$$d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta). \quad (\text{B.2})$$

Definição B.0.1. *Seja $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ fraco, ou $L^p_{weak}(\mathbb{R}^n)$, como o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f\|_{L^p_{weak}} := \inf\{C > 0 \mid d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \forall \alpha > 0\} \quad (\text{B.3})$$

é finito. Se $p = \infty$ definimos $L^\infty_{weak}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por (B.1), segue-se que toda função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço $L^p_{weak}(\mathbb{R}^n)$ mas não é uma inclusão própria, pois $|x|^{-n/p} \in L^p_{weak}(\mathbb{R}^n)$ mas $|x|^{-n/p} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

O espaço $L^p_{weak}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço quasi-normado; de fato, (B.3) satisfaz

1. $\|kf\|_{L^p_{weak}} = |k| \|f\|_{L^p_{weak}} \quad \forall k \in \mathbb{C}$.
2. $\|f + g\|_{L^p_{weak}} \leq C(\|f\|_{L^p_{weak}} + \|g\|_{L^p_{weak}})$.
3. $\|f\|_{L^p_{weak}} = 0 \implies f = 0 \text{ } \mu - q.t.p.$

Para uma demonstração detalhada de 2 sugerimos [17].

A grande vantagem de se usar os espaços L^p -fraco está no estudo e problemas de interpolação.

Teorema B.0.1. *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$ e seja $f \in L^p_{weak}(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{weak}(\mathbb{R}^n)$. Então, $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $r \in (p, q)$ e vale*

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r} \right)^{1/r} \|f\|_{L^p_{weak}}^{\theta_1} \|f\|_{L^q_{weak}}^{\theta_2} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\theta_1 = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad e \quad \theta_2 = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Demonstração. • **Caso $q < \infty$.** Note que, por (B.3), vale

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^p_{weak}}^p}{\alpha^p}, \quad d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^q_{weak}}^q}{\alpha^q}, \quad \forall \alpha > 0$$

e portanto

$$d_f(\alpha) \leq \min \left(\frac{\|f\|_{L^p_{weak}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^q_{weak}}^q}{\alpha^q} \right).$$

Procurando α de modo que

$$\frac{\|f\|_{L^p_{weak}}^p}{\alpha^p} \leq \frac{\|f\|_{L^q_{weak}}^q}{\alpha^q},$$

encontramos

$$\alpha \leq A := \left(\frac{\|f\|_{L_{weak}^q}^q}{\|f\|_{L_{weak}^p}^p} \right)^{\frac{1}{q-p}}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r}^r &= r \int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leq r \int_0^\infty \alpha^{r-1} \min \left(\frac{\|f\|_{L_{weak}^p}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L_{weak}^q}^q}{\alpha^q} \right) d\alpha \\ &= r \int_0^A \alpha^{r-1} \frac{\|f\|_{L_{weak}^p}^p}{\alpha^p} d\alpha + r \int_A^\infty \alpha^{r-1} \frac{\|f\|_{L_{weak}^q}^q}{\alpha^q} d\alpha \\ &= r \|f\|_{L_{weak}^p}^p \frac{\alpha^{r-p}}{r-p} \Big|_0^A + r \|f\|_{L_{weak}^q}^q \frac{\alpha^{r-q}}{r-q} \Big|_A^\infty \\ &= \frac{r}{r-p} \|f\|_{L_{weak}^p}^p A^{r-p} + \frac{r}{q-r} \|f\|_{L_{weak}^q}^q A^{r-q}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de A e rearrajando, chegamos em (B.4).

• **Caso $q = \infty$.** Nesse caso, $L_{weak}^\infty = L^\infty$ e $f \in L_{weak}^p \cap L^\infty$; logo, se $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$, então $d_f(\alpha) = 0$, e temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r}^r &\leq r \int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1-p} \|f\|_{L_{weak}^p}^p d\alpha \\ &= r \|f\|_{L_{weak}^p}^p \frac{\alpha^{r-p}}{r-p} \Big|_0^{\|f\|_{L^\infty}} = \frac{r}{r-p} \|f\|_{L_{weak}^p}^p \|f\|_{L^\infty}^{r-p}. \end{aligned}$$

□

Definição B.0.2. Diremos que um operador linear T é do tipo forte (p, q) se $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ for limitado. Diremos que T é do tipo fraco (p, q) se $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{weak}^q(\mathbb{R}^n)$ for limitado no seguinte sentido: existe $C > 0$ tal que

$$\alpha d_{Tf}(\alpha)^{1/q} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad \forall \alpha > 0$$

Definição B.0.3. Um operador T é dito subaditivo (ou sublinear) se, para todos f, g e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad e \quad |T(\lambda)| = |\lambda| |T(f)|.$$

Teorema B.0.2. (Interpolação de Marcinkiewicz) Sejam $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i \in \{1, 2\}$ e $q_1 \neq q_2$. Seja T um operador subaditivo de tipo fraco (p_i, q_i) . Então, T é de tipo forte (p, q) , onde

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) = (1-t) \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1} \right) + t \left(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2} \right), \quad t \in [0, 1]$$

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o caso em que $p_1 = q_1$ e $p_2 = q_2$ com $p_1 < p_2$ e $q_i < \infty$, para o caso geral sugerimos [19]. Fixe $\alpha > 0$ e seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $p \in (p_1, p_2)$

Vamos reescrever $f = f_1 + f_2$, onde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \alpha \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \alpha \end{cases}$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| > \alpha \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq \alpha; \end{cases}$$

a ideia é decompor f em uma parte "grande"(onde $|f| > \alpha$) e uma parte "pequena"(onde $|f| \leq \alpha$), usar a subaditividade de T e estimar a propriedade desejada separadamente para f_1 e para f_2 . Sejam s, r tal que $s \leq p \leq r$, e note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^s dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{s-p} dx \leq \|f\|_{L^p}^p \alpha^{s-p} \\ \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^r dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{r-p} dx \leq \|f\|_{L^p}^p \alpha^{r-p}. \end{aligned}$$

Fazendo $s = p_1$ e $r = p_2$ concluímos que $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Pela subaditividade de T e por (B.2), obtemos

$$d_{Tf}(\alpha) \leq d_{Tf_1}(\alpha/2) + d_{Tf_2}(\alpha/2) \quad (\text{B.5})$$

Como por hipótese T é do tipo fraco (p_1, p_1) e do tipo fraco (p_2, p_2) , existem C_1 e C_2 tais que

$$\alpha^{p_1} d_{Tf_1}(\alpha) \leq C_1 \|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} \quad \text{e} \quad \alpha^{p_2} d_{Tf_2}(\alpha) \leq C_2 \|f_2\|_{L^{p_2}}^{p_2},$$

e assim

$$d_{Tf_1}(\alpha/2) \leq \frac{C_1}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{p_1} dx = \frac{C_1}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{|f|>\alpha} |f(x)|^{p_1} dx \quad (\text{B.6})$$

$$d_{Tf_2}(\alpha/2) \leq \frac{C_2}{(\alpha/2)^{p_2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{p_2} dx = \frac{C_2}{(\alpha/2)^{p_2}} \int_{|f|\leq\alpha} |f(x)|^{p_2} dx. \quad (\text{B.7})$$

Agora, substituindo (B.6) e (B.7) em (B.5), obtemos

$$d_{Tf}(\alpha) \leq \frac{C_1}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{|f|>\alpha} |f(x)|^{p_1} dx + \frac{C_2}{(\alpha/2)^{p_2}} \int_{|f|\leq\alpha} |f(x)|^{p_2} dx. \quad (\text{B.8})$$

Multiplicando ambos os membros de (B.8) por $p\alpha^{p-1}$ e integrando com respeito a α , temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_{Tf}(\alpha) d\alpha \\
&\leq 2^{p_1} C_1 p \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} \int_{|f|>\alpha} |f(x)|^{p_1} dx d\alpha + 2^{p_2} C_2 p \int_0^\infty \alpha^{p-p_2-1} \int_{|f|\leq\alpha} |f(x)|^{p_2} dx d\alpha \\
&= 2^{p_1} C_1 p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha |f(x)|^{p_1} dx + 2^{p_2} C_2 p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-p_2-1} d\alpha |f(x)|^{p_2} dx \\
&= 2^{p_1} C_1 p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\alpha^{p-p_1}}{p-p_1} \Big|_0^{|f(x)|} |f(x)|^{p_1} dx + 2^{p_2} C_2 p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\alpha^{p-p_2}}{p-p_2} \Big|_{|f(x)|}^\infty |f(x)|^{p_2} dx \\
&= 2^{p_1} C_1 \frac{p}{p-p_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx - 2^{p_2} C_2 \frac{p}{p-p_2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \\
&= \left(2^{p_1} C_1 \frac{p}{p-p_1} + 2^{p_2} C_2 \frac{p}{p_2-p} \right) \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração de que T é do tipo forte (p, p) . \square

Para o que se segue, iremos decompor \mathbb{R}^n em cubos diádicos da seguinte forma: seja Λ_0 a malha de cubos unitários com vértices em \mathbb{Z}^n ; nesse caso, \mathbb{R}^n pode ser decomposto como uma união disjunta (com interiores disjuntos) de elementos de Λ_0 e podemos refinar tal decomposição pondo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a malha $\Lambda_k := 2^{-k} \Lambda_0$.

Teorema B.0.3. (*Decomposição de Calderón-Zygmund*) *Sejam f não negativa e integrável em \mathbb{R}^n e $\alpha > 0$. Então, existe uma decomposição de \mathbb{R}^n tal que*

1. $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f(x) \leq \alpha$, $\mu - q.t.p$ em F .
3. $\Omega = \cup_k Q_k$, onde Q_k são cubos com interiores disjuntos tais que

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} f(x) dx \leq 2^n \alpha. \quad (\text{B.9})$$

Mais ainda, se $f = g + b$, onde

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in F \\ \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) dx, & \text{se } x \in Q_j, \end{cases}$$

e

$$b(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) dx \right) \chi_{Q_j}(x),$$

então:

1. $g(x) \leq 2^n \alpha$ $\mu - q.t.p$ em \mathbb{R}^n ;
2. $b(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $\int_{Q_j} b(x) dx = 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja $\Lambda_k := 2^{-k}\Lambda_0$ a malha de cubos diádicos. Uma vez que f é integrável em \mathbb{R}^n , a integral em um cubo $Q \in \Lambda_k$ é limitada pela norma $L^1(\mathbb{R})$ de f . Escolha $k_0 \in \mathbb{Z}$ de modo que para todo $Q \in \Lambda_{k_0}$ vale

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) dx \leq \alpha. \quad (\text{B.10})$$

A partir deste k_0 escolhido, vamos refinar a malha Λ_{k_0} usando o seguinte processo: divida o cubo $Q \in \Lambda_{k_0}$ em 2^n partes e seja Q' um subcubo de Q . Existem duas possibilidades para Q' ; ou a média de f sobre Q' é maior do que α ou é menor ou igual a α . Se por acaso o primeiro ocorrer, mantenha Q' , senão divida Q' novamente em 2^n partes e repita o processo. Ao final teremos uma coleção de cubos \mathcal{Q} onde

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f > \alpha, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}.$$

Note que, dado um cubo $Q \in \mathcal{Q}$, existe um cubo Q' que contém Q e que não foi escolhido no passo imediatamente anterior mencionado (pois senão (B.10) seria falso). Nesse caso, se Q' tem lado 2^{-k} para algum $k \in \mathbb{Z}$, então Q tem lado 2^{-k-1} e vale

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f \leq \frac{\mu(Q')}{\mu(Q)} \frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f \leq 2^n \alpha, \quad (\text{B.11})$$

defina

$$\Omega := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \quad \text{e} \quad F := \Omega^c$$

e observe que se $x \in F$, então existe uma sequência de cubos Q_j que não foram escolhidos durante o processo mencionado de forma que $\text{diam}(Q_j) \rightarrow 0$ e tal que $x \in Q_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f \leq \alpha. \quad (\text{B.12})$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue [17] a integral em (B.12) converge em quase todo ponto para $f(x)$ quando $\mu(Q_j) \rightarrow 0$. Por fim (B.9) é consequência de (B.11). \square

Vamos falar sobre um resultado importante que é usado na demonstração do Teorema 1.4.2 (Teorema do multiplicador de Mikhlin).

Considere o operador T definido por

$$Tf(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}\hat{f})(x), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{B.13})$$

onde \hat{K} satisfaz as seguintes hipóteses:

1. $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. existe $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$Tf(x) = k * f(x), \quad \mu - q.t.p \quad x \notin \text{supp}(f),$$

e k satisfaz a condição, conhecida como condição de Hörmander

$$\int_{|x|>2|y|} |k(x-y) - k(x)| dx \leq C, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.14})$$

onde $C > 0$.

Proposição B.0.1. *Seja $k : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz*

$$|\nabla k(x)| \leq C|x|^{-n-1} \quad \forall x \neq 0. \quad (\text{B.15})$$

Então, k satisfaz a condição de Hörmander em (B.14)

Demonstração. Primeiro observe que

$$\frac{d}{dt} k(x - ty) = -y \cdot \nabla k(x - ty),$$

e portanto

$$k(x - y) - k(x) = - \int_0^1 y \cdot \nabla k(x - ty) dt.$$

Tomando o módulo

$$|k(x - y) - k(x)| \leq |y| \int_0^1 |\nabla k(x - ty)| dt,$$

e usando a hipótese (B.15), vem

$$|k(x - y) - k(x)| \leq |y| \int_0^1 \frac{C}{|x - ty|^{n+1}} dt. \quad (\text{B.16})$$

Pela desigualdade triangular, $|x - ty| \geq |x| - t|y|$, e como $(1-t)|y| \geq 0$, segue-se que $|y| \geq t|y|$, o que implica $-t|y| \geq -|y|$, e portanto $|x| - t|y| \geq |x| - |y|$. Como queremos estimar a integral para $|x| > 2|y|$, temos $-|y| > -|x|/2$, o que implica $|x| - |y| > |x|/2$. Combinando as desigualdades anteriores, segue-se $\forall t \in [0, 1]$ que $|x - ty| > |x|/2$, substituindo tal desigualdade em (B.16), obtemos

$$|y| \int_0^1 \frac{C}{|x - ty|^{n+1}} dt \leq |y| \int_0^1 \frac{2C}{|x|^{n+1}} dt = \frac{|y|C}{|x|^{n+1}}.$$

Por fim,

$$\int_{|x|>2|y|} |k(x-y) - k(x)| dx \leq C|y| \int_{|x|>2|y|} \frac{1}{|x|^{n+1}} dx < \infty,$$

pois $|x|^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,1)})$ para todo $\alpha > n$. □

Teorema B.0.4. *Suponha que T seja um operador linear como em (B.13), onde $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e que satisfaz a condição de Hörmander (B.14). Então, para todo $\alpha > 0$,*

$$\alpha d_{Tf}(\alpha) \leq C_1 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n). \quad (\text{B.17})$$

Mais ainda, T se estende a um operador linear limitado $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in (1, \infty)$.

Demonstração. Para a demonstração de (B.17) referimos [1], Vamos mostrar apenas que T se estende a um operador limitado em L^p para $p \in (1, \infty)$. Primeiro note que $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ (pois $\mathcal{M}^{2,2} = L^\infty$), e que portanto T é do tipo fraco $(2, 2)$. Por (B.17), segue-se que T é do tipo fraco $(1, 1)$, e portanto pelo Teorema B.0.2, $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ para todo $p \in (1, 2)$. Resta demonstrar o resultado para $p > 2$. Note que $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(Tf)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{K}(\xi)\hat{g}(\xi)}d\xi,$$

onde usamos o Teorema de Plancherel. Definindo $\tilde{T}f = \mathcal{F}^{-1}(\overline{\hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi)})$ para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{K}(\xi)\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\tilde{T}g(x)}dx.$$

Agora, para todas $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suportes disjuntos vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{k(x-y)}g(x)dx dy;$$

logo, se $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\tilde{T}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{k(y-x)}g(y)dy$$

para quase todo ponto $x \notin \text{supp}(g)$, onde $\tilde{k}(z) = \overline{k(-z)}$, $z \neq 0$, satisfaz a condição de Hörmander (B.14). Isso implica $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}^n))$ para todo $1 < q \leq 2$. Agora, por dualidade (com $1 < q' \leq 2$)

$$\|Tf\|_{L^q} = \sup_{g \in L^{q'}, \|g\|_{q'}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\overline{g(x)}dx \right| = \sup_{g \in L^{q'}, \|g\|_{q'}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\tilde{T}g(x)}dx \right| \leq C\|f\|_q$$

implicando $T \in \mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}^n))$ para todo $2 \leq q < \infty$. □