

MÁRIO SÉRGIO FERREIRA ALVIM JÚNIOR

**ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO CÁLCULO DAS
ESTRUTURAS**

Belo Horizonte, Minas Gerais

04 de abril de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO CÁLCULO DAS ESTRUTURAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

MÁRIO SÉRGIO FERREIRA ALVIM JÚNIOR

Belo Horizonte, Minas Gerais
04 de abril de 2008



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aspectos computacionais do cálculo das estruturas

MÁRIO SÉRGIO FERREIRA ALVIM JÚNIOR

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Ph. D ELAINE GOUVÊA PIMENTEL – Orientador
Departamento de Matemática / UFMG

Ph. D ROBERTO DA SILVA BIGONHA – Co-orientador
Departamento de Ciência da Computação / UFMG

Ph. D JOÃO MARCOS
Departamento de Informática e Matemática Aplicada / UFRN

Ph. D LUCÍLIA CAMARÃO DE FIGUEIREDO
Departamento de Computação / UFOP

Belo Horizonte, Minas Gerais, 04 de abril de 2008

Resumo

A lógica é a ciência das inferências corretas, e um sistema lógico formal é uma ferramenta para demonstrar proposições em uma certa lógica de maneira correta. Há muitos sistemas lógicos formais, e muitas maneiras de formalizá-los, por exemplo, usando dedução natural ou cálculo de seqüentes. O cálculo das estruturas (CoS) é um novo formalismo proposto por Alessio Guglielmi em 2004 que generaliza o cálculo de seqüentes no sentido de que regras de inferência podem ser aplicadas em qualquer profundidade dentro de uma fórmula, em vez de apenas no conectivo principal. Com esta característica, demonstrações em CoS são menores do que em qualquer outro formalismo que suporte provas analíticas. Apesar de ser interessante ter esta nova liberdade e expressividade do cálculo das estruturas, sob o ponto de vista de construção de demonstrações mais liberdade significa um espaço de busca maior. E isto deve ser restringido quando se procura pela automação completa de sistemas dedutivos. Alguns esforços foram realizados para reduzir este não determinismo, mas se tratam de abordagens basicamente operacionais, e nenhum resultado teórico sólido a respeito do comportamento computacional do CoS foi obtido até agora. O foco principal desta dissertação é discutir caminhos para propor uma estratégia de demonstração para CoS adequada à implementação. Esta estratégia deve ser teórica, e não puramente operacional. Nós introduzimos o conceito de número de incoerência de subestruturas dentro de uma estrutura e usamos este conceito para atingir nosso resultado principal: um algoritmo que, de acordo com a nossa conjectura, corresponde a uma estratégia de demonstração para toda estrutura demonstrável no subsistema FBV (a lógica linear multiplicativa MLL estendida pela regra mix) contendo apenas pares de átomos distintos dois a dois. Nosso algoritmo foi implementado e acreditamos que nossa estratégia seja um bom ponto de partida para explorar os aspectos computacionais do CoS em sistemas mais gerais, como o próprio sistema BV.

Abstract

Logic is the science of correct inferences and a logical system is a tool to prove assertions in a certain logic in a correct way. There are many logical systems, and many ways of formalizing them, e.g., using natural deduction or sequent calculus. Calculus of structures (CoS) is a new formalism proposed by Alessio Guglielmi in 2004 that generalizes sequent calculus in the sense that inference rules can be applied at any depth inside a formula, rather than only to the main connective. With this feature, proofs in CoS are shorter than in any other formalism supporting analytical proofs. Although it is great to have the freedom and expressiveness of CoS, under the point of view of proof search more freedom means a larger search space. And that should be restricted when looking for complete automation of deductive systems. Some efforts were made to reduce this non-determinism, but they are all basically operational approaches, and no solid theoretical result regarding the computational behaviour of CoS has been achieved so far. The main focus of this thesis is to discuss ways to propose a proof search strategy for CoS suitable to implementation. This strategy should be theoretical instead of purely operational. We introduce the concept of incoherence number of substructures inside structures and we use this concept to achieve our main result: there is an algorithm that, according to our conjecture, corresponds to a proof search strategy to every provable structure in the subsystem of FBV (the multiplicative linear logic MLL plus the rule mix) containing only pairwise distinct atoms. Our algorithm is implemented and we believe our strategy is a good starting point to exploit the computational aspects of CoS in more general systems, like BV itself.

À família em que nasci, que me acompanha, apóia e incentiva sempre.

À família que escolhi ao longo da vida, os inestimáveis amigos.

Aos professores que tornaram este trabalho possível.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família. Sem seu incondicional apoio, incentivo e suporte em todos os momentos, eu não teria chegado até aqui. À minha mãe, Maria Angélica, pelo amor incondicional. Aos meus irmãos, Marco Antônio e Marcus Vinícius, pela amizade. Ao meu padastro, Mario Manuel, pelo carinho e apoio.

Aos amigos que me acompanham desde a infância e que hoje já são como irmãos: Lucas, Marina e Aline.

Aos amigos que fiz pelo caminho, que compartilharam os momentos bons e ruins e se mostraram sempre presentes: Lara, Anísio, Fernando e Gleicy.

Aos colegas de curso que compartilharam os estudos, o esforço e as alegrias, em especial à Katia Cristina e ao Daniel Guidoni, pela constante disposição em ajudar.

A todos da secretaria do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, que sempre com disposição e competência me ajudaram nas mais diversas etapas deste trabalho, em especial à Renata, à Sheila, à Sônia, à Gilmara, à Cláudia, à Maristela e à Túlia.

Aos professores que contribuíram para meu aprendizado e formação. Também aos professores que me conduziram em projetos de pesquisa que, mesmo não diretamente relacionados à dissertação, foram essenciais na minha formação científica, em especial ao Prof. Rodrigo Carceroni e ao Prof. Mário Campos.

Aos membros da banca, Profa. Lucília Figueiredo e Prof. João Marcos, cujas contribuições relevantes e interessantes proporcionaram mais qualidade ao produto final desta dissertação.

Ao co-orientador Roberto Bigonha, pela constante disposição em ajudar e contribuir para o bom andamento do projeto.

Por fim, o agradecimento especial à Profa. Elaine Pimentel que, como minha primeira orientadora de iniciação científica, ainda na graduação, dedicou-se a me iniciar no processo de produção de conhecimento. Obrigado por, apesar do tempo em que transitei por outras áreas e das eventualidades, ter me dado a oportunidade de, por mais uma vez, trabalhar com esta área de que tanto gosto. Não bastando o excelente trabalho como orientadora, sua atenção no campo pessoal, a preocupação com o sucesso profissional e amizade tornaram o percurso muito mais prazeroso e as oportunidades a partir de agora muito mais promissoras. Sem sua ajuda este trabalho não seria possível.

Muito obrigado a todos, fico feliz em compartilhar o resultado final com vocês.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Definição do problema	1
1.1.1	Introdução	1
1.1.2	Motivação	2
1.1.3	Objetivo	3
1.1.4	Contribuição	3
1.2	Revisão da literatura	4
1.3	Sumário da dissertação	5
1.4	Consideração relevante	6
2	Teoria da Demonstração: conceitos fundamentais	7
2.1	Lógica clássica e sistemas formais	7
2.1.1	Cálculo de seqüentes	9
2.2	Lógica intuicionista	10
2.3	Lógica linear	12
2.3.1	MLL: fragmento multiplicativo da lógica linear	13
2.4	Regra mix	14
2.5	Demonstrações uniformes	15
2.5.1	Cláusulas de Horn e fórmulas de Harrop	19
2.5.2	Demonstrações uniformes em lógica linear	19
3	Cálculo das estruturas	23
3.1	O cálculo das estruturas	23
3.1.1	Visão geral	23
3.1.2	Estruturas	24
3.1.3	Teias de interação	28
3.1.4	O Sistema BV	37
3.1.5	O teorema de <i>splitting</i>	39
3.2	Reduzindo o não determinismo no cálculo das estruturas	63
3.2.1	Análise do estado da arte	65

4 Aspectos computacionais do cálculo das estruturas	67
4.1 Objetivo	67
4.2 Abordagem	68
4.2.1 O problema do comportamento operacional	68
4.2.2 O problema do não-determinismo	70
4.3 A tentativa de solução proposta	71
4.3.1 Resultados fundamentais e definições	72
4.3.2 Resultados principais	81
5 Implementação	101
5.1 Entrada de dados	101
5.2 Saída de dados	102
5.3 Complexidade computacional	104
5.4 Qualidade dos resultados	105
6 Conclusão	107
Referências Bibliográficas	109

Lista de Figuras

1.1	Sistema SKSg	3
2.1	Cálculo de seqüentes para a lógica clássica LK	10
2.2	Cálculo de seqüentes para a lógica intuicionista LJ	11
2.3	Cálculo de seqüentes para a lógica linear clássica LL	14
2.4	Cálculo de seqüentes de um lado só para a lógica linear multiplicativa MLL	14
2.5	Sistema G3c para a lógica clássica de primeira ordem	17
2.6	Sistema de demonstrações de Forum	21
3.1	Equivalência sintática =	27
3.2	Propriedade do quadrado para \triangleleft	31
3.3	Propriedade do quadrado para \downarrow	32
3.4	Sistema BV	38
3.5	Sistema FBV	39
4.1	Regras de inferência não criam relações \downarrow quando vistas de baixo para cima.	76

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de verdade para a lógica clássica proposicional	8
5.1	Exemplos das principais construções da gramática de estruturas para o CoSPROVER.101	
5.2	Representação de regras na saída.	102

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição do problema

1.1.1 Introdução

A lógica é o estudo dos princípios e critérios de inferências e demonstrações válidas.

Um sistema lógico é composto por três partes: a sintaxe (ou notação), uma especificação de regras de inferência (ou de argumentação), e o significado das sentenças lógicas (semântica).

Em geral, para uma dada lógica, existem diversas formas de se definir o sistema de regras de um sistema lógico formal. Para as lógicas mais difundidas como a lógica clássica, a lógica intuicionista e a lógica linear, os sistemas de inferência mais utilizados são baseados em formalismos como a dedução natural e o cálculo de seqüentes, ambos propostos por Gentzen no século XX. A dedução natural é um formalismo cujas regras possuem uma apresentação mais intuitiva, semelhante ao raciocínio humano. Entretanto, construir demonstrações utilizando dedução natural é muito difícil, uma vez que não existe, começando da fórmula que se deseja demonstrar e seguindo de baixo para cima¹, uma estratégia de demonstração.

Já o cálculo de seqüentes é um formalismo menos intuitivo, mas computacionalmente muito mais poderoso, uma vez que as regras relativas aos conectivos lógicos, quando analisadas de baixo para cima, reduzem o número de conectivos utilizados, reduzindo assim também, a cada passo, o número de opções para se seguir com a demonstração.

Utilizando este formalismo, foi possível a formulação do conceito de demonstrações *uniformes*. Intuitivamente, um sistema de demonstrações é dito uniforme se existe um método único de demonstrações para qualquer seqüente provável. Este conceito facilita enormemente a construção de demonstrações, uma vez que o não-determinismo é reduzido ao máximo, permitindo uma implementação direta do sistema. O ramo de pesquisa que se preocupa com a busca de demonstrações em sistemas lógicos é conhecido como *Teoria da Demonstração*².

¹Em inglês: *bottom-up*

²Em inglês: *Proof Theory*. Algumas traduções para o português utilizam o termo *Teoria da Prova*.

Atualmente, existe um novo sistema formal conhecido como *cálculo das estruturas*, proposto por Alessio Guglielmi em 2004, que é, sob alguns aspectos, ainda mais poderoso que o cálculo de seqüentes.

Para algumas lógicas, ocorre que o problema de como tratar com o não-determinismo deste formalismo a fim de produzir uma interpretação computacional eficiente está ainda engatinhando. Discutir caminhos para encontrar uma estratégia de demonstração para este formalismo é o foco principal deste trabalho.

1.1.2 Motivação

Desde o surgimento da dedução natural e do cálculo de seqüentes nos anos de 1930, pouco foi feito no sentido de se proporem novos formalismos de representação de regras de inferência. Apenas em 2004 foi proposto um novo sistema de inferência conhecido como *cálculo das estruturas* [Gug07], que não só revolucionou o conceito de demonstrações, como também permitiu a observação de uma série de simetrias nunca antes apresentadas em sistemas dedutivos.

Uma *estrutura* é uma expressão intermediária entre um seqüente representado em apenas um lado³ e uma fórmula. Mais precisamente, é uma fórmula lógica comum, módulo uma teoria equacional normalmente imposta aos seqüentes. Na prática, os conectivos desaparecem e as regras são *estruturais* (em vez de *lógicas*), no sentido de que elas lidam com a posição relativa de uma subestrutura dentro da estrutura mais geral. As estruturas são o único tipo de expressão permitido, e as regras de inferência são simplesmente regras de reescrita de estruturas. Daí o nome de *cálculo das estruturas*.

O cálculo das estruturas apresenta um aspecto único que representa uma grande vantagem sobre os demais sistemas de inferência: a *deep-inference*. *Deep-inference* é um mecanismo que permite que, durante a construção de uma demonstração, as regras de inferência possam ser aplicadas tão profundamente quanto se queira dentro da estrutura. Isso quer dizer que, ao contrário do cálculo de seqüentes, por exemplo, não existe um lugar delimitado em cada passo onde se pode trabalhar na construção de uma demonstração (o conectivo principal). No cálculo das estruturas é possível aplicar regras de inferência em qualquer subestrutura da estrutura principal. Esta característica leva a duas conseqüências muito importantes. Em primeiro lugar, as demonstrações se tornam potencialmente menores, quando comparadas às demonstrações obtidas com o cálculo de seqüentes. Em contrapartida, devido à liberdade propiciada pela *deep-inference*, o não-determinismo na construção de uma demonstração se torna muito maior, uma vez que há muitas maneiras em cada passo de se aplicarem regras de inferência.

O primeiro sistema de cálculo das estruturas proposto, e também o mais simples, é o sistema BV [Gug07], que é o fragmento multiplicativo da lógica linear estendido com a regra mix e um operador *auto-dual* e *não comutativo*, o *seq*. Um fato notável é que BV não pode ser formalizado em cálculo de seqüentes [Tiu06b]. Então, a pergunta que surge é se todos

³Em inglês: *one-sided sequent*

os sistemas formalizados em cálculo de seqüentes podem ser formalizados em cálculo das estruturas. Para responder a esta pergunta, houve inicialmente um grande interesse em formalizar outras lógicas no cálculo das estruturas. A figura 1.1.2 apresenta um sistema em cálculo das estruturas para lógica clássica, o SKSg.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{S\{t\}}{[R, \bar{R}]} i \downarrow & & \frac{S(R, \bar{R})}{S\{f\}} i \uparrow \\
 & \frac{S([R, U], T)}{S[(R, T), U]} s & \\
 \frac{S\{f\}}{S\{R\}} w \downarrow & & \frac{S\{R\}}{S\{t\}} w \uparrow \\
 \frac{S[R, R]}{S\{R\}} c \downarrow & & \frac{S\{R\}}{S(R, R)} c \uparrow
 \end{array}$$

Figura 1.1: Sistema SKSg

Além lógica clássica [Brü06], outras lógicas já foram formalizadas utilizando o cálculo das estruturas como a lógica intuicionista [Tiu06a], lógica linear [bur02] e modal [SS04].

Não pretendemos aqui trabalhar no sentido de formalizar lógicas. O nosso interesse é em formular ao cálculo das estruturas algo que ainda não tem: um significado computacional. Alguns esforços no sentido de diminuir o não-determinismo do formalismo têm sido empreendidos mas, até hoje, nenhum resultado definitivo, como o conceito de *demonstrações uniformes* para o cálculo de seqüentes, foi encontrado.

1.1.3 Objetivo

O objetivo principal do trabalho é:

Discutir caminhos possíveis para uma estratégia de busca por demonstrações em cálculo das estruturas adequada para a implementação computacional. Esta estratégia deve ser, de preferência, teórica e não puramente operacional.

Ou seja, desejamos aprofundar o conhecimento existente sobre o cálculo das estruturas no sentido de contribuir para, no futuro, conseguir um resultado similar ao obtido através conceito de demonstrações uniformes para o cálculo de seqüentes.

1.1.4 Contribuição

O cálculo das estruturas é um formalismo poderoso e vem sendo estendido para diversas lógicas. Embora seu uso permita a construção de demonstrações menores (em comparação com o cálculo de seqüentes), simétricas e elegantes, seu aspecto computacional ainda não

foi discutido a fundo. O não-determinismo na construção de demonstrações por este formalismo ainda é um limitador na sua utilização prática em implementações para computador. Embora algumas tentativas de diminuir este não-determinismo tenham sido empreendidas, elas ainda têm um caráter operacional, e não teórico.

As principais contribuições deste trabalho são: (i) apresentar de forma sucinta o cálculo das estruturas em português, assim como uma breve compilação do estado da arte e (ii) propor uma tentativa de estratégia *teórica* que permita a implementação computacional do cálculo das estruturas para um subconjunto do sistema FBV (*flat BV*).

1.2 Revisão da literatura

O formalismo de cálculo das estruturas (CoS, *do inglês Calculus of Structures*) foi apresentado por Alessio Guglielmi em 2004 e publicado em 2007 [Gug07]. Neste artigo foi introduzido o sistema lógico BV, que estende o fragmento multiplicativo da lógica linear com a regra mix e um operador dual a si mesmo e não comutativo. Até então não se tinha conseguido realizar esta extensão para o cálculo de seqüentes, mas no cálculo das estruturas ela ocorreu de forma natural. O cálculo das estruturas foi obtido como uma generalização do cálculo de seqüentes de tal forma que existisse uma *simetria top down de derivações*. No artigo também se discute o conceito de *deep-inference* presente no CoS, que permite que as regras de inferência sejam aplicadas tão profundamente quanto se queira em uma estrutura, havendo, portanto, muito maior liberdade na construção de uma demonstração. Um resultado importante do artigo é o Teorema de *Splitting*, que, em linhas gerais, enuncia que derivações complexas podem ser divididas em derivações mais simples e então o resultado dessas subderivações pode ser utilizado na composição da derivação original mais complexa. Este é um resultado importante porque mostra a existência de caminhos alternativos de demonstração para estruturas complicadas, e a quebra em demonstrações mais simples pode reduzir o espaço de busca por derivações. Apesar de ser o artigo seminal em CoS, o trabalho não chegou a abordar os aspectos computacionais do formalismo, no sentido de que não se discutiram maneiras de lidar com o não-determinismo provocado pela *deep-inference*.

Este artigo causou um grande movimento na comunidade de Teoria da Demonstração ao redor do mundo, e motivou vários pesquisadores a escrever sistemas baseados em CoS para outras lógicas que não o fragmento da lógica linear coberto pelo sistema BV. Em [Brü06] foram propostos sistemas dedutivos para a lógica clássica proposicional. Como no cálculo de seqüentes, estes sistemas possuem uma regra *Cut* admissível⁴. As regras *Cut*, *weakening* e *contraction* são apresentadas em sua forma atômica.

Embora já houvesse sistemas de CoS para a lógica linear [bur02], para a lógica clássica [Brü06], e para várias lógicas modais [SS04], ainda era um desafio a criação de um sistema assim para a lógica intuicionista. A dificuldade principal se encontrava em criar um

⁴Uma regra ρ é dita *admissível* em um sistema dedutivo se ρ sua ocorrência explícita pode ser retirada do sistema sem afetar a sua completude. Em outras palavras, os conjuntos de fórmulas prováveis em um sistema e no sistema sem ρ explicitamente são idênticos.

conjunto de regras de inferência que não permitisse a demonstrabilidade do princípio do terceiro excluído⁵. Este problema foi resolvido por Tiu em [Tiu06a], onde sistemas de inferência baseados em CoS para a lógica intuicionista de primeira ordem e algumas extensões (a lógica intermediária de Dummett - LC, a lógica de Göedel e a lógica clássica) foram propostos. Os sistemas propostos utilizam o conceito de contextos positivos (lado direito de um seqüente) e negativos (lado esquerdo de um seqüente). As regras de inferência são positivas ou negativas e só podem ser aplicadas no contexto adequado (regras positivas para contextos positivos e regras negativas para contextos negativos). Esta necessidade de checagem de contexto para aplicação de regras compromete a noção pura de localidade, mas ainda preserva no sentido de que as regras são todas atômicas. A demonstração de que a regra *Cut* é admissível nestes sistemas foi feita de forma indireta, através da equivalência a outros sistemas de inferência. A grande contribuição do trabalho é o pioneirismo na aplicação de CoS para sistemas lógicos assimétricos⁶.

Embora o cálculo das estruturas viesse sendo empregado com sucesso na criação de sistemas de inferência para várias lógicas, o problema de seu não-determinismo conseqüente da *deep-inference* ainda era uma questão pouco explorada. As demonstrações criadas em sistemas baseados em CoS eram menores que as criadas em sistemas baseados em cálculo de seqüentes, mas o espaço de buscas de demonstrações no primeiro formalismo é muito maior. Em [Kah04], Kahramanoğullari introduz uma nova técnica que reduz este não-determinismo para o sistema BV, sem quebrar as propriedades teóricas do sistema. Esta técnica propicia um acesso mais imediato a demonstrações menores. No artigo argumenta-se que a técnica, por se basear em aspectos gerais do CoS, pode ser facilmente estendida para outros sistemas que não o BV. Entretanto, a técnica proposta é basicamente operacional, por tratar-se da introdução de regras de inferência que checam previamente se a decisão tomada em um passo da derivação conduzirá a um estado sobre o qual não será mais possível avançar.

Portanto, o problema *teórico* de se definir com clareza o comportamento computacional do cálculo das estruturas, assim como o conceito de demonstrações uniformes fez com o cálculo de seqüentes [MNPS91], continua em aberto.

1.3 Sumário da dissertação

O Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais de Teoria da Demonstração utilizados nesta dissertação, incluindo o conceito de lógica clássica, intuicionista e linear, cálculo de seqüentes e demonstrações uniformes (em cálculo de seqüentes). O Capítulo 3 apresenta o formalismo do cálculo das estruturas, com sua definição formal, o conceito de teias de interação, o teorema de *splitting* e uma estratégia já proposta na literatura para reduzir seu

⁵O *princípio do terceiro excluído* afirma que sempre ou uma fórmula é verdadeira, ou então é falsa. Trata-se de um princípio essencialmente não-construtivo, uma vez que não exige a construção de uma demonstração para a fórmula. É um princípio característico da lógica clássica, mas que não é válido para a lógica intuicionista

⁶Aqui o termo *simetria* equivale à presença de negação involutiva e da possibilidade de representação de seqüentes em um só lado.

não-determinismo. O Capítulo 4 contém as principais contribuições desta dissertação: uma discussão sobre as possíveis abordagens para o problema de se encontrar uma estratégia de demonstração em cálculo das estruturas, algumas definições e teoremas importantes e o resultado principal deste trabalho, que consiste numa tentativa de estratégia de demonstração para um subconjunto do sistema FBV. O Capítulo 5 apresenta uma implementação do sistema FBV segundo a tentativa de estratégia proposta nesta dissertação. Por fim, o Capítulo 6 revisa os conceitos apresentados e discute trabalhos futuros.

1.4 Consideração relevante

Apesar de este trabalho ser uma dissertação na área de *teoria da computação*, ele possui um caráter prático bastante relevante, uma vez que o interesse da comunidade acadêmica da área está cada vez mais voltado para a implementação eficiente de sistemas dedutivos.

Capítulo 2

Teoria da Demonstração: conceitos fundamentais

2.1 Lógica clássica e sistemas formais

A lógica clássica lida com a formalização e a análise de tipos de argumentação utilizados em matemática. Desta forma, os sistemas lógicos formais utilizados para esse fim devem ser ferramentas adequadas para demonstrar proposições. Parte do problema com a formalização da argumentação matemática é a necessidade de se especificar de maneira precisa uma linguagem matemática formal. Linguagens naturais, tais como o português ou inglês, não servem a este propósito: elas são muito complexas, ambíguas e em constante modificação. Por outro lado, linguagens formais como (algumas) linguagens de programação, que também são rigidamente definidas, são muito mais simples e menos flexíveis que as linguagens naturais. Utilizamos, então, um *sistema lógico formal* que apresente um balanceamento entre expressividade e precisão, sem, entretanto, apresentar a ambigüidade das linguagens naturais ou ser demasiado simplista como uma linguagem de programação.

Um sistema lógico formal é composto por três partes: a sintaxe (ou notação), uma especificação cuidadosa de regras de argumentação (regras de inferência), e alguma noção de como interpretar e dar um significado a sentenças (ou proposições) da linguagem adotada (semântica). Apresentaremos rapidamente os conceitos citados acima para a lógica clássica de primeira ordem:

- Sintaxe

A sintaxe consiste nos símbolos utilizados na representação do sistema lógico. Na sintaxe há um *alfabeto*, que é um conjunto de símbolos pré-definidos sobre os quais se pode construir sentenças e uma *gramática*, que define como as sentenças podem ser construídas.

A gramática para a lógica clássica de primeira ordem é:

$$E ::= A \mid \top \mid \perp \mid (E \wedge E) \mid (E \vee E) \mid (E \Rightarrow E) \mid \forall x.E \mid \exists x.E$$

que significa que uma fórmula E pode ser uma proposição atômica (sem conectivos), verdadeiro, falso, a conjunção de duas fórmulas, a disjunção de duas fórmulas, uma implicação ou fórmulas quantificadas (quantificação de universalidade ou de existência).

Não acrescentamos a negação como um conectivo primitivo da lógica, mas representamos $E \Rightarrow \perp$ por $\neg E$. De fato, ao longo do texto utilizaremos uma ou outra representação da maneira que for mais conveniente.

- Regras de inferência

As regras de inferência determinam como se podem obter fórmulas a partir de outras fórmulas, num processo equivalente a tirar *conclusões* válidas a partir de *premissas*. Existem diversas formas de se definir regras e axiomas de um sistema lógico formal. Este trabalho tem como foco apenas sistemas apresentados em *cálculo de seqüentes* e *cálculo das estruturas*.

Um exemplo de regra de inferência (em cálculo de seqüentes) é a regra *Cut*:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \textit{Cut}$$

Basicamente, essa regra formaliza o conceito de demonstrações matemáticas utilizando lemas auxiliares. Ou seja, se podemos demonstrar um lema A (ou outros resultados Δ_1) a partir de um conjunto de hipóteses Γ_1 e, a partir de A (e possivelmente algumas outras hipóteses Γ_2) é possível demonstrar outro conjunto de resultados (Δ_2), então podemos demonstrar Δ_1, Δ_2 diretamente a partir de Γ_1, Γ_2 .

- Semântica

A semântica de um sistema formal dá o significado dos símbolos utilizados. No caso da lógica clássica proposicional (sem quantificadores), o significado das fórmulas pode ser trivialmente expresso através de uma *tabela de verdade*. Nessa tabela, a cada símbolo é atribuído um valor (V para verdadeiro ou F para falso). A partir desses valores, podemos calcular os valores das fórmulas compostas. Veja a tabela 2.1.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	\top	\perp
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F

Tabela 2.1: Tabela de verdade para a lógica clássica proposicional

2.1.1 Cálculo de seqüentes

O cálculo de seqüentes, introduzido nos anos 1930 por Gerhard Gentzen [Gen69], consiste em um formalismo para tratar da *verdade lógica*¹ considerando apenas a forma da dedução.

Definição 1. Um *seqüente* possui a forma $\Gamma \vdash \Delta$, onde Γ e Δ são multiconjuntos finitos (possivelmente vazios) de fórmulas. Chamamos Γ de *antecedente* e Δ de *sucedente* do seqüente.

Uma *demonstração* para o seqüente $\Gamma \vdash \Delta$ é uma árvore finita, construída utilizando as regras de inferência do sistema tal que a raiz é $\Gamma \vdash \Delta$.

As principais características do cálculo de seqüentes são:

- possui apenas regras de introdução de conectivos lógicos²;
- antecedentes e sucedentes são tratados da mesma forma e são construídos simultaneamente;
- é tecnicamente simples: quando lidas de baixo pra cima, as regras no cálculo de seqüentes simplificam o processo de construção de demonstrações, com exceção da regra de *contraction* (*cont*) e da regra *Cut*.

As regras do cálculo de seqüentes para a lógica clássica LK estão listadas na Figura 2.1.

As regras à direita e à esquerda são chamadas *regras lógicas*, uma vez que definem o significado dos conectivos lógicos.

Exemplo 2. Na lógica clássica vale o *princípio do terceiro excluído*. Ou seja, a proposição

$$p \vee \neg p$$

é sempre válida. Isso significa que uma fórmula é sempre ou verdadeira, ou falsa.

Essa afirmação é extremamente não construtiva, uma vez que nada se pode dizer de qual das opções é válida.

A demonstração do princípio do terceiro excluído no sistema LK é dada abaixo.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{p \vdash \perp, p}}{\vdash p, \neg p} \Rightarrow R}{\vdash p, p \vee \neg p} \vee R_2}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p} \vee R_1}{\vdash p \vee \neg p} \text{cont}R$$

Chamaremos de **C**-demonstração qualquer demonstração no sistema LK.

¹A verdade do conhecimento, ou verdade lógica, é a conformidade da inteligência com o que é, isto é, com o objeto.

²Outro formalismo proposto por Gentzen é a *dedução natural*, que possui regras de introdução e eliminação de conectivos lógicos.

Axioma inicial e a regra Cut

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A} \text{Initial} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut}$$

Regras à direita

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top R \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge R \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} \forall R \quad \frac{\Gamma \vdash A[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} \exists R$$

Regras à esquerda

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp L \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee L \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \Rightarrow L$$

$$\frac{\Gamma, A[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} \forall L \quad \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} \exists L$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{weak L} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{weak R}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{cont L} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{cont R}$$

Figura 2.1: Cálculo de seqüentes para a lógica clássica LK

2.2 Lógica intuicionista

Como descrito na Seção 2.1, o entendimento clássico de lógica é baseado na noção de verdade. Ou seja, a veracidade de uma afirmativa é “absoluta” e independente de qualquer argumentação, crença ou ação.

Desta forma, afirmativas são ou verdadeiras ou falsas, onde falso é a mesma coisa que não verdadeiro. De fato, é fácil demonstrar em LK as seguintes equivalências:

$$\top \equiv \perp \Rightarrow \perp$$

e

$$\perp \equiv \top \Rightarrow \perp$$

, onde \equiv é o símbolo de relação de equivalência entre fórmulas.

Claro que essa abordagem de pensamento é muito intuitiva e baseada em experiência e observação. Para um matemático preocupado em demonstrar um teorema, é importante a

idéia de que toda afirmativa pode ser demonstrada verdadeira se uma demonstração é apresentada ou falsa se existe um contra-exemplo. Além disso, várias técnicas de demonstração utilizam implicitamente o princípio do terceiro excluído.

A lógica intuicionista abandona a idéia de verdade absoluta, e afirmativas são consideradas válidas se, e somente se, existe uma demonstração construtiva das mesmas.

Em cálculo de seqüentes, o sistema de demonstrações mais conhecido para a lógica intuicionista é o sistema LJ, onde os seqüentes válidos possuem exatamente uma fórmula como sucedente e as regras de *weakening* e *contraction* não são válidas à direita. O sistema LJ é apresentado na Figura 2.2.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{Initial} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C} \text{Cut} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top R \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge R \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow R \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee R_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee R_2 \\
\frac{\Gamma \vdash A[x/y]}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall R \quad \frac{\Gamma \vdash A[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists R \\
\\
\frac{}{\Gamma, \perp \vdash A} \perp L \quad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge L_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge L_2 \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \vee L \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2, B \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow L \\
\\
\frac{\Gamma, A[x/t] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C} \forall L \quad \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash C}{\Gamma, \exists x A \vdash C} \exists L \\
\\
\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{weak L} \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{cont L}
\end{array}$$

Figura 2.2: Cálculo de seqüentes para a lógica intuicionista LJ

Exemplo 3. Todos os seqüentes abaixo são prováveis em lógica clássica:

1. $\neg(p \vee q) \vdash (\neg p \wedge \neg q)$
2. $(p \vee q) \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$
3. $(p \vee q) \vdash (\neg p \Rightarrow q)$
4. $\neg(p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q)$
5. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \vdash p$
6. $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

Mas apenas (1), (2) e (3) apresentam demonstrações construtivas, isto é, são prováveis intuicionisticamente.

Chamaremos de **I**-demonstração qualquer demonstração no sistema LJ.

2.3 Lógica linear

Na lógica clássica (seção 2.1), matemáticos começam de um conjunto de axiomas, demonstram alguns lemas e então os utilizam para demonstrar teoremas. Algumas das demonstrações utilizadas não são construtivas, e o uso da estratégia conhecida como *redução ao absurdo* é muito comum.

Uma vez que um lema é demonstrado, ele pode ser usado de novo para demonstrar outras proposições ou teoremas, uma vez que um lema demonstrado verdadeiro será verdadeiro para sempre. Portanto, matemáticos trabalham com a lógica clássica, a lógica da *verdade estável* e de *recursos e conclusões infinitos*.

Já a lógica intuicionista (Seção 2.2) descarta essa noção de verdade absoluta e a veracidade de uma afirmativa depende da existência de uma demonstração (ou construção) da afirmativa. Alguns matemáticos preferem a lógica intuicionista à clássica, justamente por acreditarem na importância de se construir uma demonstração, em vez de se contentar em apenas saber que ela existe. A lógica intuicionista ainda é muito utilizada em ciência da computação, sendo a base de linguagens de programação como Prolog. Mas a lógica intuicionista ainda é uma lógica de *infinitos recursos* – mas não infinitas conclusões, uma vez que permitir a demonstração de todos os resultados possíveis em lógica clássica implicaria em permitir o princípio do terceiro excluído.

A lógica linear (desenvolvida por Girard [Gir87]) é uma lógica de *recursos conscientes*. É, portanto, um refinamento das lógicas clássica e intuicionista, no sentido que substitui a ênfase em *verdade* ou em demonstrabilidade por *recursos*.

Em lógica linear, afirmativas não podem ser livremente copiadas (*contraction*) ou descartadas (*weakening*), apenas em situações especiais, onde aparece um tipo muito particular de conectivos: os exponenciais “?” e “!”. Intuitivamente, $!B$ significa que o recurso B pode ser usado tantas vezes quanto necessárias. De maneira dual, $?B$ indica a possibilidade de produção de uma quantidade infinita da conclusão B .

A implicação linear é representada pelo símbolo “ \multimap ” e o significado de $A \multimap B$ é:

consome-se A dando origem a B

Isto significa que, a partir do ponto em que B é produzido, o predicado A deixa de ser válido. A implicação intuicionista “ \Rightarrow ” então significa:

$$A \Rightarrow B \equiv !A \multimap B$$

ou seja, um predicado A implica B intuicionisticamente se e somente se existe uma quantidade infinita de A que linearmente implica B .

A ausência de *contraction* e *weakening* muda a natureza dos conectivos lógicos. De fato, poderíamos propor uma variante das regras do sistema LK, considerando as regras para a

conjunção como:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L' \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2} \wedge R'$$

As regras acima são chamadas de *multiplicativas*, enquanto que as regras apresentadas na Figura 2.1 são chamadas de *aditivas*. Ocorre que, na presença das regras *cont* e *weak*, esses dois formatos são equivalentes. De fato, se supusermos a regra $\wedge R$, podemos derivar a regra $\wedge R'$:

$$\frac{\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A, \Delta_1, \Delta_2} \text{ weak } R, \text{ weak } L \quad \frac{\Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B, \Delta_1, \Delta_2} \text{ weak } R, \text{ weak } L}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B, \Delta_1, \Delta_2} \wedge R$$

e vice versa:

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta} \wedge R'}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \text{ cont } R, \text{ cont } L$$

Se removermos *contraction* e *weakening*, então as regras não são mais equivalentes, e a conjunção (assim como a disjunção) é separada em dois conectivos diferentes. Portanto, existem duas maneiras distintas de formular a conjunção, correspondendo a dois conectivos distintos em lógica linear: o conectivo multiplicativo “ \otimes ” ($A \otimes B$ significa ambos A e B) e o aditivo “ $\&$ ” ($A \& B =$ escolha entre A e B). O mesmo para a disjunção: multiplicativo “ \wp ” ($A \wp B$ é igual a A paralelo a B) e aditivo “ \oplus ” ($A \oplus B$ significa ou A ou B).

A lógica linear utiliza ainda os seguintes conectivos: \perp , e 1 para a versão multiplicativa de falso e verdadeiro respectivamente; 0 , \top para a versão aditiva desses conectivos; e \forall e \exists para quantificações universal e existencial.

Na Figura 2.3 apresentamos as regras de inferência para a lógica linear.

2.3.1 MLL: fragmento multiplicativo da lógica linear

Observe que as regras da Figura 2.3 apresentam uma simetria muito interessante. De fato, a regra à direita para o conectivo \wp possui o mesmo formato da regra à esquerda para o conectivo \otimes . O mesmo ocorre com os conectivos $\&$ e \oplus . Este fato, juntamente com o fato de que, na lógica linear, a negação é involutiva³ permitem a representação da lógica linear através de seqüentes que possuem apenas o sucedente. Desta forma, os conectivos possuem apenas regras à direita.

Na Figura 2.4 apresentamos as regras utilizando o cálculo de seqüentes de um lado só⁴ para MLL, que é o fragmento da lógica linear contendo apenas os conectivos multiplicativos.

Tal sistema será importante para a definição do sistema BV, no Capítulo 3.1.

³A negação é dita *involutiva* se $\neg\neg A \equiv A$.

⁴Em inglês: *one sided sequent calculus*

$$\frac{}{A \vdash A} \text{Initial} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, !A \quad (!A)^n, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut!} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, (?A)^n \quad ?A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut?} \quad n > 1$$

Regras à direita

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top R \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \perp R \quad \frac{}{\vdash 1} 1R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \& R \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wp B, \Delta} \wp R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \oplus R \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \oplus R$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B, \Delta_1, \Delta_2} \otimes R \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta} \multimap R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall_l x A, \Delta} \forall_l R \quad \frac{\Gamma \vdash A[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists_l x A, \Delta} \exists_l R$$

Regras à esquerda

$$\frac{}{0, \Gamma \vdash \Delta} 0L \quad \frac{}{\perp \vdash} \perp L \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{1, \Gamma \vdash \Delta} 1L$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \& L \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \& L$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \oplus L \quad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \wp B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \wp L$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta} \otimes L \quad \frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \multimap B \vdash \Delta_1, \Delta_2} \multimap L$$

$$\frac{\Gamma, A[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall_l x A \vdash \Delta} \forall_l L \quad \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists_l x A \vdash \Delta} \exists_l L$$

Regras para os exponenciais

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} !W \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} !D \quad \frac{! \Gamma \vdash A, ? \Delta}{! \Gamma \vdash !A, ? \Delta} !R \quad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} !C$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta} ?W \quad \frac{! \Gamma, A \vdash ? \Delta}{! \Gamma, ?A \vdash ? \Delta} ?L \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta} ?D \quad \frac{\Gamma \vdash ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta} ?C$$

Figura 2.3: Cálculo de seqüentes para a lógica linear clássica LL

$$\frac{}{\vdash A, \neg A} \text{Initial} \quad \frac{\vdash \Gamma_1, A \quad \vdash \neg A, \Gamma_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2} \text{Cut}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp \quad \frac{\vdash \Gamma_1, A \quad \vdash \Gamma_2, B}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B} \otimes$$

Figura 2.4: Cálculo de seqüentes de um lado só para a lógica linear multiplicativa MLL

2.4 Regra mix

Outra regra que vai ser de fundamental importância na Seção 3.1.4 é a regra mix:

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{mix}$$

Tal regra se parece com a regra *Cut*, a diferença está no fato de que nenhuma fórmula é eliminada, elas são na verdade todas “misturadas”. A presença da regra *mix* muda completamente a demonstrabilidade de um sistema lógico. Por exemplo, em $MLL + mix$ é possível demonstrar o seqüente $\vdash A \wp B, \neg A \wp \neg B$ (que em cálculo de seqüentes de dois lados corresponde a $A \otimes B \vdash A \wp B$):

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\vdash A, \neg A} \text{ Initial}}{\vdash A, B, \neg A, \neg B} \wp}{\vdash A, B, \neg A \wp \neg B} \wp}{\vdash A \wp B, \neg A \wp \neg B} \wp \text{ mix}$$

Observe que, em lógica linear, a demonstração poderia ser construída de baixo para cima apenas até o seqüente $\vdash A, B, \neg A, \neg B$. Este seqüente não é provável, pois não há nenhuma regra de inferência que possa ser aplicada, e, além disso, o axioma inicial não pode ser empregado (em lógica linear o axioma inicial é *relevante*, no sentido de que só admite uma única fórmula e sua negação). Porém, com a regra *mix*, podem-se separar as fórmulas de modo que o axioma inicial se aplique, e o seqüente passa a ser provável.

Em resumo, a regra *mix* estende o conjunto de seqüentes prováveis em MLL , uma vez que permite a simulação de um axioma inicial do tipo:

$$\overline{\vdash A_1, \neg A_1, \dots, A_h, \neg A_n} \text{ Initial'}$$

2.5 Demonstrações uniformes

Considere o seqüente $A \vee B \vdash B \vee A$. Tal seqüente é sabidamente demonstrável em lógica clássica e em lógica intuicionista, por exemplo, uma vez que ele corresponde à demonstração de que a disjunção é comutativa.

A princípio, poderia-se pensar que seria uma tarefa simples demonstrar tal seqüente. Entretanto, observe que se decidirmos começar a demonstração eliminando a disjunção da direita

$$\frac{A \vee B \vdash B}{A \vee B \vdash B \vee A} \vee R_1 \quad \text{ou} \quad \frac{A \vee B \vdash A}{A \vee B \vdash B \vee A} \vee R_2$$

temos necessariamente que fazer primeiro a escolha de qual fórmula demonstrar (A ou B), para depois proceder com a demonstração.

Entretanto, os seqüentes das premissas de ambas derivações não são prováveis: a única regra aplicável é $\vee L$, *weak L* ou *cont L*, e nenhuma delas conduz a uma demonstração. Desta forma, devemos obrigatoriamente *adiar* a escolha, o que significa, na lógica intuicionista, que devemos começar a redução pela disjunção da esquerda.

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A} \text{ Initial}}{A \vdash B \vee A} \vee R_2 \quad \frac{\overline{B \vdash B} \text{ Initial}}{B \vdash B \vee A} \vee R_1}{A \vee B \vdash B \vee A} \vee L$$

Essa é uma situação que se deseja evitar na prática, se estamos preocupados com a automatização completa de sistemas lógicos: a implementação teria que tentar *todas* as possibilidades até decidir o caminho certo, o que tornaria o tempo de execução exponencial, no pior caso. Desta forma, é importante saber quando um sistema lógico possui uma *estratégia de redução*. Ou seja, um caminho único e bem determinado para se demonstrar um seqüente qualquer.

Ainda analisando o seqüente $A \vee B \vdash B \vee A$, vemos que, no sistema LK, existe ainda outra possibilidade de demonstração, duplicando a fórmula da direita:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash B, A} \text{ Initial}}{A \vee B \vdash B, A} \vee L}{A \vee B \vdash B, B \vee A} \vee R_2}{A \vee B \vdash B \vee A, B \vee A} \vee R_1}{A \vee B \vdash B \vee A} \text{ cont } R$$

Tal derivação segue a estratégia de começar a demonstração pelo lado direito do seqüente, mas não pode ser chamada de uma estratégia *de redução*. Isto porque, ao duplicar a fórmula $B \vee A$, estamos na verdade aumentando o número de fórmulas no seqüente, em vez de diminuir.

De fato, quando derivações são analisadas de baixo para cima, as regras estruturais de contração da Figura 2.1 podem sempre ser aplicadas, duplicando fórmulas e, conseqüentemente, aplicação de regras de inferência. Outra regra que pode sempre ser aplicada é a regra *Cut*, que “cria” uma fórmula na derivação. Este é um problema extremamente sério, uma vez que o processo de criação requer a presença de inteligência, coisa que um programa de computador ainda não possui. Um problema semelhante ocorre com as regras $\forall L$ e $\exists R$, pois a aplicação de tais regras requer que se saiba, *a priori*, o termo t que deve ser usado como instância.

Sabe-se que tais dificuldades podem ser superadas parcialmente. Por exemplo, as regras estruturais podem vir implícitas em algumas regras (dando origem ao sistema G3c – veja a Figura 2.5), a regra *Cut* pode ser eliminada [NvP01] nas lógicas clássica, intuicionista e linear e o problema com a aplicação de regras para os quantificadores pode ser parcialmente resolvido utilizando unificação [Mil83].

Substituir o sistema LK pelo sistema G3c pode resolver alguns problemas relativos à implementação da lógica clássica, mas introduz outros.

Exemplo 4. O seqüente $p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)$ é provável em lógica clássica. No sistema LK, uma possibilidade de demonstração é começando pelo antecedente:

$$\frac{\frac{\overline{p(a) \vdash p(a)} \text{ Initial}}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} \exists R \quad \frac{\overline{p(b) \vdash p(b)} \text{ Initial}}{p(b) \vdash \exists x.p(x)} (\exists R)}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)} \vee L$$

Claro que podemos sempre começar pela contração da fórmula quantificada, desta forma

$$\begin{array}{c}
\overline{\Gamma, A \vdash \Delta, A} \text{ Initial} \\
\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top R \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge R \\
\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow R \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R \\
\frac{\Gamma \vdash A[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} \forall R \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x A, A[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} \exists R \\
\\
\overline{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp L \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee L \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow L \\
\frac{\Gamma, A[x/t], \forall x A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} \forall L \quad \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} \exists L
\end{array}$$

Figura 2.5: Sistema G3c para a lógica clássica de primeira ordem

começando pelo sucedente. Em G3c, a demonstração correspondente seria:

$$\frac{\overline{p(a) \vdash \exists x.p(x), p(a), p(b)} \text{ Initial} \quad \overline{p(b) \vdash \exists x.p(x), p(a), p(b)} \text{ Initial}}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x), p(a), p(b)} \vee L \\
\frac{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x), p(a), p(b)}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)} \exists R$$

O problema que surge é que a aplicação de $\exists R$ gera a duplicação da fórmula $\exists x.p(x)$ o que, na prática, cria um problema de implementação. Como a regra pode ser aplicada indefinidamente, torna-se mais complicado controlar o seu uso, evitando que o programa entre em *loop*.

Outros problemas podem surgir com a procura por demonstrações em seqüentes que contenham mais de uma fórmula no sucedente. O principal, no caso da lógica clássica, é o de *scope extrusion*. Para entender o que significa este conceito, considere o seqüente $\Gamma \vdash D \Rightarrow G$. Tal seqüente é provável se e somente se $\Gamma, D \vdash G$ é provável⁵. Fazendo a relação entre lógica e programação, a fórmula D pode ser vista como uma unidade de programa que é adicionada ao programa Γ durante a computação⁶. Para garantir que tal procedimento irá obedecer a noção correta de *escopo* (ou seja, que as ações em D terão reflexo apenas sobre G), precisamos de um cálculo que permita apenas uma fórmula no sucedente.

De fato, se $G = G_1 \vee (D \Rightarrow G_2)$, uma redução no sistema LJ começando pelo sucedente resultaria em uma busca por demonstrações de um dos seqüentes: $\Gamma \vdash G_1$ ou $\Gamma, D \vdash G_2$. Em

⁵A regra ($\Rightarrow R$) é *inversível*, veja [NvP01].

⁶Ou seja, *modularização*.

particular, a fórmula D está disponível *apenas* para demonstrar a fórmula G_2 . Entretanto, a fórmula $G_1 \vee (D \Rightarrow G_2)$ é classicamente equivalente a $(D \Rightarrow G_1) \vee G_2$ e $D \Rightarrow (G_1 \vee G_2)$. Em particular, $p \vee (p \Rightarrow q)$ não possui uma **I**-demonstração, mas possui uma **C**-demonstração. De fato, observe que na demonstração abaixo o “módulo” (a fórmula p) é utilizado para demonstrar um programa que não está no seu escopo:

$$\frac{\frac{\overline{p \vdash p, q} \text{ (Initial)}}{\vdash p, (p \Rightarrow q)} \Rightarrow R}{\vdash p \vee (p \Rightarrow q)} \vee R$$

Por este motivo, para determinar uma estratégia de redução bem definida, que suporte esta noção de programação modular com uma disciplina correta para escopo, é necessário, no presente momento, restringir as demonstrações para **I**-demonstrações. Iremos generalizar tal conceito para o caso da lógica linear, em 2.5.2.

Em [MNPS91] foi apresentada uma fundamentação teórica para caracterizar lógicas como linguagens abstratas de programação. Tal fundamentação é baseada no conceito de *demonstrações uniformes*, restrito ao caso de **I**-demonstrações.

Definição 5. Uma **I**-demonstração livre da regra Cut^7 Ξ é *uniforme* se para toda subdemonstração Ξ' de Ξ e para toda ocorrência de uma fórmula não atômica B no lado direito de um seqüente em Ξ' , existe uma demonstração Ξ'' que é igual a Ξ' a menos de permutação de regras de inferência e tal que a última regra de inferência de Ξ'' introduz o conectivo principal de B .

Em outras palavras:

uma demonstração uniforme pode ser construída utilizando um algoritmo determinístico.

Desta forma, a estratégia de redução é baseada em *busca direcionada por objetivo*⁸. Ou seja, o seqüente $\mathcal{P} \vdash G$ denota um *estado* de um interpretador, onde \mathcal{P} denota um programa e G o objetivo que queremos demonstrar a partir de \mathcal{P} . Além disso, uma demonstração de tal seqüente representa uma seqüência de transições de estado determinadas pelo interpretador, que deve necessariamente reduzir o conectivo principal da fórmula G , caso exista.

Com esta estratégia, podemos definir *linguagens lógicas de programação*:

Definição 6. Uma lógica com um sistema de demonstrações baseado em cálculo de seqüentes é uma *linguagem lógica de programação abstrata* se, restrita a demonstrações uniformes, não perde a completude⁹.

Pelos exemplos apresentados anteriormente, vimos que as lógicas clássica e intuicionista não são linguagens lógicas de programação, uma vez que há seqüentes que são prováveis, mas não há uma demonstração uniforme para eles, como $A \vee B \vdash B \vee A$.

⁷Em inglês: *cut-free proof*

⁸Em inglês, *goal-directed search*.

⁹Neste contexto, entende-se que não perder a *completude* significa que o conjunto de fórmulas prováveis continua sendo exatamente o mesmo

Para obter completude de linguagens lógicas de programação, devemos ou restringir a gramática e as fórmulas que podem ser inseridas nos antecedentes e sucedentes, ou escolher a lógica base com muito cuidado. No que se segue, faremos ambos.

2.5.1 Cláusulas de Horn e fórmulas de Harrop

Começemos por limitar a gramática da lógica de primeira ordem. Pelos exemplos que vimos anteriormente, fica claro que a disjunção e o quantificador existencial, quando presentes no sucedente, trazem sérios problemas para uniformidade.

Baseado nessa observação nasceu o Prolog, baseado em *Cláusulas de Horn*:

$$\begin{aligned} G & ::= A | (G \wedge G) \\ D & ::= A | G \Rightarrow A | \forall x. D \end{aligned}$$

onde G é o objetivo e D é o programa. Objetivos (sucedentes) são conjunções de fórmulas atômicas e programas (antecedentes) possuem a forma

$$\forall x_1 \dots x_m [A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A_0]$$

com $m, n \geq 0$.

Pode-se observar que, restrito às cláusulas de Horn, **I**-demonstrações e **C**-demonstrações coincidem.

Entretanto, as cláusulas de Horn dão origem a um sistema lógico muito fraco, que não comporta, por exemplo, modularização ou mecanismos de abstração de dados.

Com esta motivação, em [MNPS91] as Cláusulas de Horn foram generalizadas para *fórmulas de Harrop*¹⁰:

$$\begin{aligned} G & ::= A | (G \wedge G) | D \Rightarrow G | \forall x. G \\ D & ::= A | G \Rightarrow A | \forall x. D \end{aligned}$$

Nasceu assim a linguagem de programação λ -Prolog [MN87].

Não há meio de estender mais a gramática de modo a obter um subconjunto da lógica de primeira ordem que seja uniforme e completo. Ou seja, a gramática acima é *maximal*. Desta forma, a única possibilidade de obtermos maior expressividade, ou seja, a demonstrabilidade de fórmulas mais interessantes, é mudando o sistema lógico.

2.5.2 Demonstrações uniformes em lógica linear

É fácil ver que a lógica linear clássica, com regras de inferência apresentadas no sistema LL, não é, segundo a Definição 5, uma linguagem lógica de programação. Por exemplo, os

¹⁰Em inglês, *hereditary Harrop formulas*.

seqüentes

$$\begin{aligned}
 a \otimes b &\vdash b \otimes a \\
 !a &\vdash !a \otimes !a \\
 !a \&b &\vdash !a \\
 b \otimes (b \multimap !a) &\vdash !a \\
 1 &\vdash 1
 \end{aligned}$$

são prováveis em LL mas não possuem demonstrações uniformes¹¹.

Uma alternativa seria restringir a lógica linear de modo a não permitir os conectivos \oplus , $!$ e 1 no sucedente, restrição parecida com a que foi feita na lógica de primeira ordem. Mas isso resultaria em uma lógica muito restrita, e a linguagem que obteríamos não seria tão mais interessante que λ -Prolog.

Ocorre que não há necessidade de restringir a lógica linear pois ela é, completa¹², uma linguagem lógica de programação. Basta que tomemos o cuidado de apresentar suas regras de inferência de maneira adequada a este objetivo.

De fato, os conectivos da lógica linear podem ser classificados em *síncronos* e *assíncronos* [And92], dependendo de se a regra de introdução à direita para aquele conectivo depende ou não do seu contexto. O dual De Morgan de um conectivo em uma dessas classes é um conectivo na outra classe.

Dada essa divisão de conectivos, Miller propôs em [Mil96] a apresentação *Forum* de lógica linear na qual fórmulas são construídas utilizando apenas os conectivos assíncronos, a saber: $?$, \wp , \perp , $\&$, \top , \multimap e \forall , junto com a versão intuicionista da implicação $B \Rightarrow C$.¹³ Os conectivos síncronos da lógica linear estão disponíveis implicitamente, uma vez que conectivos que aparecem no antecedente do seqüente de cada regra comportam-se de modo síncrono. Como a negação em lógica linear é involutiva, podemos usar este fato para simular os conectivos síncronos, o que faz de Forum um sistema completo para a lógica linear.

O fato impressionante é que Forum é uma linguagem lógica de programação, uma vez que a busca por demonstrações em seqüentes com conectivos assíncronos no sucedente corresponde à busca *dirigida por objetivo*, ao mesmo tempo que conectivos assíncronos no antecedente correspondem ao procedimento de *backchaining* sobre cláusulas de programas [MNPS91].

O sistema de demonstrações de Forum é apresentado na Figura 2.6.

Seqüentes em Forum possuem uma das formas $\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \Gamma; \Upsilon$ e $\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B} \Gamma; \Upsilon$, onde Σ é uma assinatura, Δ e Γ são multiconjuntos de fórmulas, Ψ e Υ são conjuntos de fórmulas, e B é uma fórmula. Todas as fórmulas nos seqüentes são compostas dos conectivos assíncronos listados anteriormente (juntamente com \Rightarrow). Os significados de tais seqüentes em lógica linear são $! \Psi, \Delta \vdash \Gamma, ? \Upsilon$ e $! \Psi, \Delta, B \vdash \Gamma, ? \Upsilon$, respectivamente.

No sistema de demonstrações da Figura 2.6, as regras à direita atuam apenas sobre seqüentes da forma $\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \Gamma; \Upsilon$. A variável sintática \mathcal{A} na Figura 2.6 denota um mul-

¹¹O problema é que as regras $(1R)$, $(\otimes R)$ e $(!R)$ não permutam com regras à esquerda.

¹²Ou seja, não estamos lidando com fragmentos, mas com a lógica inteira.

¹³Utilizamos aqui o símbolo \Rightarrow ao invés de \supset para a implicação intuicionista para seguir a notação em [Mil96].

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \top, \Gamma; \Upsilon} \top R \\
\frac{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B, \Gamma; \Upsilon \quad \Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow C, \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B \& C, \Gamma; \Upsilon} \& R \\
\frac{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \perp, \Gamma; \Upsilon} \perp R \quad \frac{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B, C, \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B \wp C, \Gamma; \Upsilon} \wp R \\
\frac{\Sigma: \Psi; B, \Delta \longrightarrow C, \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B \multimap C, \Gamma; \Upsilon} \multimap R \quad \frac{\Sigma: B, \Psi; \Delta \longrightarrow C, \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B \Rightarrow C, \Gamma; \Upsilon} \Rightarrow R \\
\frac{y: \tau, \Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow B[y/x], \Gamma; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \forall_{\tau} x. B, \Gamma; \Upsilon} \forall R \quad \frac{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \Gamma; B, \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow ? B, \Gamma; \Upsilon} ? R \\
\frac{\Sigma: B, \Psi; \Delta \xrightarrow{B} \mathcal{A}; \Upsilon}{\Sigma: B, \Psi; \Delta \longrightarrow \mathcal{A}; \Upsilon} \text{decide!} \quad \frac{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \mathcal{A}, B; B, \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \longrightarrow \mathcal{A}; B, \Upsilon} \text{decide?} \\
\frac{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B} \mathcal{A}; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; B, \Delta \longrightarrow \mathcal{A}; \Upsilon} \text{decide} \\
\frac{}{\Sigma: \Psi; \cdot \xrightarrow{A} \mathcal{A}; \Upsilon} \text{initial} \quad \frac{}{\Sigma: \Psi; \cdot \xrightarrow{A} \cdot; \mathcal{A}, \Upsilon} \text{initial?} \\
\frac{}{\Sigma: \Psi; \cdot \xrightarrow{\perp} \cdot; \Upsilon} \perp L \quad \frac{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B_i} \mathcal{A}; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B_1 \& B_2} \mathcal{A}; \Upsilon} \& L_i \quad \frac{\Sigma: \Psi; B \longrightarrow \cdot; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \cdot \xrightarrow{?B} \cdot; \Upsilon} ? L \\
\frac{\Sigma: \Psi; \Delta_1 \xrightarrow{B} \mathcal{A}_1; \Upsilon \quad \Sigma: \Psi; \Delta_2 \xrightarrow{C} \mathcal{A}_2; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta_1, \Delta_2 \xrightarrow{B \wp C} \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2; \Upsilon} \wp L \quad \frac{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B[t/x]} \mathcal{A}; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{\forall_{\tau} x. B} \mathcal{A}; \Upsilon} \forall L \\
\frac{\Sigma: \Psi; \Delta_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1, B; \Upsilon \quad \Sigma: \Psi; \Delta_2 \xrightarrow{C} \mathcal{A}_2; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta_1, \Delta_2 \xrightarrow{B \multimap C} \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2; \Upsilon} \multimap L \\
\frac{\Sigma: \Psi; \cdot \longrightarrow B; \Upsilon \quad \Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{C} \mathcal{A}; \Upsilon}{\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B \Rightarrow C} \mathcal{A}; \Upsilon} \Rightarrow L
\end{array}$$

Figura 2.6: Sistema de demonstrações de Forum

ticonjunto de fórmulas atômicas. Regras à esquerda são aplicadas apenas à fórmula B , que é o label de $\Sigma: \Psi; \Delta \xrightarrow{B} \mathcal{A}; \Upsilon$.

O conceito de demonstrações uniformes foi então generalizado em [Mil96] para seqüentes com mais de uma fórmula no sucedente.

Definição 7. Uma demonstração livre da regra $Cut \Xi$ é *uniforme* se para toda subdemonstração Ξ' de Ξ e para toda ocorrência de uma fórmula não atômica B no lado direito de um seqüente em Ξ' , existe uma demonstração Ξ'' que é igual a Ξ' a menos de uma permutação de regras de inferência e tal que a última regra de inferência de Ξ'' introduz o conectivo principal de B .

A busca por demonstrações em Forum é uniforme. De fato, podemos sempre começar pelo sucedente, passando ao antecedente somente quando temos apenas átomos do lado direito do seqüente.

Capítulo 3

Cálculo das estruturas

3.1 O cálculo das estruturas

3.1.1 Visão geral

O cálculo das estruturas é um formalismo proposto por Alessio Guglielmi [Gug07] que generaliza o cálculo de seqüentes de tal forma que uma nova simetria vertical (*top-down*) é observada nas derivações. Além disso, este formalismo emprega regras de reescrita que podem ser aplicadas dentro da estrutura em qualquer profundidade.

Uma das motivações para a invenção do cálculo das estruturas foi a dificuldade em se expressar, usando o cálculo de seqüentes, lógicas com operadores auto-duais não comutativos. Estes operadores naturalmente geram uma classe de fórmulas cujas demonstrações dependem de um acesso a subfórmulas em profundidades arbitrárias, que é uma característica que o cálculo de seqüentes não suporta. O cálculo das estruturas supre essa necessidade, sendo mais geral que o cálculo de seqüentes para lógicas com negação involutiva, como as lógicas clássica e linear, sem sacrificar com isso a simplicidade.

O cálculo das estruturas é uma generalização do cálculo de seqüentes de um lado só. Muitas lógicas com negação involutiva e leis de De Morgan podem ser definidas no cálculo de seqüentes de um lado só, e a tradução delas para cálculo das estruturas é uma tarefa direta e trivial. O que torna o cálculo das estruturas mais atraente é a possibilidade de definir lógicas utilizando conceitos fundamentalmente diferentes daqueles conceitos utilizados no cálculo de seqüentes. Dois conceitos centrais desse formalismo são:

- *Deep inference*: regras de inferência no cálculo das estruturas podem operar em qualquer lugar dentro das expressões, e não apenas na subfórmula mais externa em torno da raiz das árvores de fórmulas.
- *Simetria vertical*: ao contrário do cálculo de seqüentes, da dedução natural e outros formalismos em que as derivações são essencialmente baseadas em árvores, no cálculo das estruturas as derivações podem ser invertidas de cima para baixo e negadas, permanecendo ainda válidas.

A implementação dessas idéias é possível utilizando o conceito de "estrutura". Uma *estrutura* é uma expressão intermediária entre um seqüente de um lado só e uma fórmula. Mais precisamente, é uma fórmula lógica comum módulo uma teoria de equações do tipo tipicamente imposta a seqüentes. De um ponto de vista prático, conectivos lógicos desaparecem (em particular conectivos na raiz das árvores de fórmulas) e as regras lógicas se tornam *estruturais* (em oposição a regras *lógicas*), no sentido de que elas lidam com a posição relativa de subestruturas dentro de uma estrutura. Estruturas são a única forma de expressão permitida, e regras de inferência são simplesmente regras de reescrita sobre estruturas, de onde vem o nome "cálculo das estruturas".

O cálculo das estruturas é um formalismo adequado à Teoria da Demonstração. Pode-se demonstrar propriedades importantes como uma regra *Cut* e, assim como no cálculo de seqüentes, a eliminação da regra *Cut* faz sentido. Além disso, há uma propriedade análoga à propriedade da subfórmula, que garante que qualquer regra dada (exceto pela regra *Cut* e excepcionalmente outras regras especiais) tem aplicação finita. Com essas características, o cálculo das estruturas está mais próximo do cálculo de seqüentes do que de qualquer outro formalismo. Entretanto, a eliminação da regra *Cut* nos dois formalismos é bastante distinta, ao menos quando se utiliza a característica de *deep inference*. No cálculo de seqüentes, a eliminação da regra *Cut* depende crucialmente da existência de um conectivo principal, o que não acontece no cálculo das estruturas. Além disso, no cálculo das estruturas a regra *Cut* pode ser dividida em várias regras.

Todos esses conceitos de estrutura, *deep inference* e simetria vertical se baseiam em uma representação gráfica de estruturas que se assemelha a grafos. Essa representação é chamada de teias de interação¹. As teias de interação podem ser usadas tanto como uma semântica para as estruturas quanto para um modelo abstrato de computação [Gug07].

3.1.2 Estruturas

Apesar de o conceito de estrutura não ser complicado, começar a entendê-lo através da relação com conceitos já tradicionais da Teoria da Demonstração pode ser útil. Simplificando bastante, uma estrutura é, ao mesmo tempo, uma fórmula e um seqüente, além de capturar alguns aspectos de redes de demonstração.

Justamente porque estruturas capturam aspectos de redes de demonstração, é interessante começar a introduzir seu conceito através da construção de uma demonstração na lógica linear multiplicativa. Na representação de seqüentes de um lado só, a conjunção multiplicativa \otimes (*times*) é definida como:

$$\frac{\vdash A, \Phi \quad \vdash B, \Psi}{\vdash A \otimes B, \Phi, \Psi} \otimes$$

Instâncias de \otimes podem ser vistas como passos elementares em uma computação que correspondem à construção de uma demonstração (de baixo para cima). Esta perspectiva

¹Em inglês: *Relation webs*

Definição 8. Há infinitos *átomos positivos* e infinitos *átomos negativos*. Átomos, não importando se positivos ou negativos, são denotados por a, b, c, \dots . Estruturas são, denotadas por S, P, Q, R, T, U, V e X . A gramática para geração de estruturas é:

$$S ::= \circ \mid a \mid \underbrace{\langle S; \dots; S \rangle}_{>0} \mid \underbrace{[S, \dots, S]}_{>0} \mid \underbrace{(S, \dots, S)}_{>0} \mid \bar{S}$$

onde \circ , a *unidade*, não é um átomo. $\langle S; \dots; S \rangle$ é chamada de uma *estrutura seq* (ou simplesmente *seq*), $[S, \dots, S]$ é uma *estrutura par* (ou simplesmente *par*) e (S, \dots, S) é uma *estrutura copar* (ou simplesmente *copar*). \bar{S} é a negação da estrutura S . Um átomo negado \bar{a} é negativo se a for positivo e positivo se a for negativo. Existe um átomo especial chamado *contexto aberto*², denotado por $\{ \}$, cujo propósito é indicar um lugar específico dentro de uma estrutura onde eventualmente outras estruturas são encaixadas. Estruturas que possuem um contexto aberto que não aparece no escopo de uma negação são denotadas como $S\{ \}$, e são chamadas de *contextos de estruturas*, ou simplesmente *contextos*. A estrutura R é uma subestrutura de $S\{R\}$, e $S\{ \}$ é o contexto de R .

Observação 9. *Delimitadores* são sinais utilizados para delimitar estruturas, indicando sua natureza. Os delimitadores de uma estrutura seq são $\langle \rangle$, de uma estrutura par são $[]$ e de uma estrutura copar são $()$.

Notação 10. Quando houver delimitadores de algum tipo em torno do conteúdo de um contexto aberto, as chaves do contexto aberto poderão ser omitidas. Por exemplo, $S[a, b]$ é o mesmo que $S\{[a, b]\}$.

Notação 11. Uma letra estabelece implicitamente a classe à qual um objeto pertence. Por exemplo, S é sempre uma estrutura, sem ser preciso explicitar isso.

A associatividade é válida para todas as estruturas, mas a comutatividade não é válida para estruturas seq. A negação é involutiva e obedece às leis usuais de De Morgan para par e copar, que são duais. Já seq é auto-dual.

Definição 12. Estruturas são consideradas equivalentes módulo $=$, que é a relação de equivalência minimal definida pelos axiomas da figura 3.1. Nessa figura, $\vec{R}, \vec{T}, \vec{U}$ representam seqüências finitas e não vazias de estruturas. Uma estrutura, ou um contexto, é dito estar na *forma normal* quando as únicas estruturas negadas são átomos, não há nenhuma unidade \circ e nenhum delimitador pode ser eliminado mantendo a equivalência. Se duas estruturas R e T são tais que $R \neq \circ \neq T$, então a estrutura $\langle R; T \rangle$ é um *seq próprio*, a estrutura $[R; T]$ é um *par próprio* e a estrutura $(R; T)$ é um *copar próprio*. Uma estrutura $S\{ \}$ é um *contexto seq próprio* (ou um *contexto par próprio*, ou um *contexto copar próprio*) se, para todo $X \neq \circ$, a estrutura $S\{X\}$ é um seq próprio (ou um par próprio, ou um copar próprio). As estruturas cuja forma normal não contenham estruturas seq são chamadas *flat*. Se uma forma normal é *flat*, então todas as demais também o são.

²Em inglês: *hole*

<p>Associatividade</p> $\langle \vec{R}; \langle \vec{T}; \vec{U} \rangle = \langle \vec{R}; \vec{T}; \vec{U} \rangle$ $[\vec{R}, [\vec{T}]] = [\vec{R}, \vec{T}]$ $(\vec{R}, [\vec{T}]) = (\vec{R}, \vec{T})$ <p>Singleton</p> $\langle R \rangle = [R] = (R) = R$ <p>Unidade</p> $\langle \circ; \vec{R} \rangle = \langle \vec{R}; \circ \rangle = \langle \vec{R} \rangle$ $[\circ, \vec{R}] = [\vec{R}]$ $(\circ, \vec{R}) = (\vec{R})$	<p>Comutatividade</p> $[\vec{R}, \vec{T}] = [\vec{T}, \vec{R}]$ $(\vec{R}, \vec{T}) = (\vec{T}, \vec{R})$ <p>Negação</p> $\bar{\circ} = \circ$ $\langle \vec{R}; \vec{T} \rangle = \langle \vec{R}; \vec{T} \rangle$ $[\vec{R}; \vec{T}] = (\vec{R}; \vec{T})$ $(\vec{R}; \vec{T}) = [\vec{R}; \vec{T}]$ $\bar{\vec{R}} = R$ <p>Fechamento de contexto</p> $R = T \Rightarrow S\{R\} = S\{T\} \wedge \bar{R} = \bar{T}$
---	--

Figura 3.1: Equivalência sintática =

Por exemplo, as estruturas $\overline{[a, \circ, b]}$, $(\overline{[\circ, b]})$, $\langle \bar{a} \rangle$ e $(\bar{a}, \circ, \bar{b})$ são todas equivalentes, mas nenhuma está na forma normal. Já a estrutura (\bar{a}, \bar{b}) é equivalente a elas e está na forma normal, assim como (\bar{b}, \bar{a}) . E todas as estruturas são *flat*.

Uma vez que as estruturas são consideradas equivalentes sob $=$, a estrutura $[\circ, \langle a; b \rangle]$ é um seq próprio, mas não é um par próprio ou um copar próprio. $\langle a; [\{ \}, b] \rangle$ é um contexto seq próprio, enquanto $[\{ \}, b]$ é um contexto par próprio.

Observação 13. Toda estrutura pode ser colocada na forma normal, uma vez que a negação sempre pode ser trazida para os átomos mais internos via os axiomas de negação, e unidades podem ser removidas, assim como delimitadores extras (pelas leis de associatividade e *singleton*). Toda estrutura pode ser equivalente a apenas um dos seguintes: unidade, um átomo, um seq próprio, um par próprio ou um copar próprio.

As regras de negação se assemelham às leis de De Morgan para par e copar, mas, para o conectivo auto-dual não comutativo seq, a ordem das subestruturas é mantida sob a negação. A equação $\bar{\circ} = \circ$ indica que em cálculo das estruturas a unidade é um pouco diferente das constantes lógicas tradicionais como \top (verdadeiro) e \perp (falso). A unidade é apenas uma marca de representação à qual não daremos interpretação semântica.

Definição 14. Dada uma estrutura S , suas *ocorrências de átomos* são todos átomos em S levando em conta aparições distintas do mesmo átomo (por exemplo indexando-os de forma que dois átomos iguais recebem índices diferentes). Assim, em $\langle a, a \rangle$ há duas ocorrências de átomos. A notação $\text{occ } S$ indica o conjunto de todas as ocorrências de átomos em S . O *tamanho* de S é a cardinalidade do conjunto $\text{occ } S$.

O conjunto $\text{occ } S$ poderia ser definido como o multiconjunto de átomos de S , ou de S na forma normal. Note que $\text{occ } \circ = \emptyset$. Além disso, $\text{occ } \langle S; S' \rangle = \text{occ } [S, S'] = \text{occ } (S, S') = \text{occ } S \cup \text{occ } S'$ é verdadeiro somente se $\text{occ } S$ e $\text{occ } S'$ são disjuntos, e pode-se sempre assumir isto sem perda de generalidade.

3.1.3 Teias de interação

Estruturas sempre podem ser representadas pela gramática exposta na seção anterior. Existe, porém, uma forma gráfica alternativa que captura toda a essência da estrutura e, por motivos que serão expostos mais adiante, é muito conveniente em certas situações. Essa forma de representação são as *teias de interação*. Um ponto importante é que existe uma única teia de interação para cada classe de equivalência de estruturas sob a relação de igualdade $=$.

Teias de interação podem ser usadas como uma espécie de semântica para regras de inferência.

Considere $[R_1, \dots, R_h]$. Sejam $1 \leq i, j \leq h$ distintos. Para todo átomo a que aparece em R_i e todo átomo b que aparece em R_j , a relação $a \downarrow b$ é válida. Observa-se que \downarrow é simétrica. Analogamente, duas estruturas distintas R e T numa relação de copar induzem em seus átomos a relação $a \uparrow b$, onde a pertence a R e b pertence a T .

Por exemplo, seja a estrutura:

$$[a, b, (\bar{b}, [(\bar{a}, c), \bar{c}])]$$

Nesse caso temos os seguintes pares relacionados: $a \downarrow b, a \downarrow \bar{b}, a \downarrow \bar{a}, a \downarrow c, a \downarrow \bar{c}, b \downarrow \bar{b}, b \downarrow \bar{a}, b \downarrow c, b \downarrow \bar{c}, \bar{b} \uparrow \bar{a}, \bar{b} \uparrow c, \bar{b} \uparrow \bar{c}, \bar{a} \uparrow c, \bar{a} \downarrow \bar{c}, c \downarrow \bar{c}$. Além desses, há os pares simétricos, que foram omitidos.

Além dessas relações, $\langle S_1, \dots, S_h \rangle$, com $1 \leq i < j \leq h$ induz a relação $a \triangleleft b$ para todo a em S_i e b em S_j . Observe que \triangleleft não é simétrica.

Definição 15. Dada uma estrutura S na forma normal, as quatro *relações estruturais* \triangleleft_S (*seq*), \triangleright_S (*coseq*), \downarrow_S (*par*) e \uparrow_S (*copar*) são os conjuntos minimais tais que $\triangleleft_S, \triangleright_S, \downarrow_S, \uparrow_S \subset (\text{occ } S)^2$ e, para todo $S' \{ \}, U$ e V e para todo a em U e b em V , as seguintes asserções podem ser verificadas:

1. se $S = S' \langle U; V \rangle$, então $a \triangleleft_S b$ e $b \triangleright_S a$;
2. se $S = S' [U, V]$, então $a \downarrow_S b$;
3. se $S = S' (U, V)$, então $a \uparrow_S b$;

Para uma estrutura que não está em sua forma normal, obtém-se a teia de interação a partir de qualquer de suas formas normais, uma vez todas elas levarão à mesma teia. A quádrupla $(\text{occ } S, \triangleleft_S, \downarrow_S, \uparrow_S)$ é chamada de *teia de interação* (ou simplesmente *teia*) de S , denotada por $w S$. Pode-se abolir os subscritos em $\triangleleft_S, \triangleright_S, \downarrow_S, \uparrow_S$ quando eles não forem necessários. Dados dois conjuntos de átomos μ e ν , escrevem-se $\mu \triangleleft \nu, \mu \triangleright \nu, \mu \downarrow \nu, \mu \uparrow \nu$ para indicar situações nas quais, para todo a pertencente a μ e todo b pertencente a ν , o seguinte vale, respectivamente: $a \triangleleft b, a \triangleright b, a \downarrow b, a \uparrow b$. Representam-se relações estruturais entre ocorrências de átomos desenhando $a \rightsquigarrow b$ quando $a \triangleleft b$ (e $b \triangleright a$), $a \leftarrow b$ quando $a \triangleright b$ ou $a \triangleleft b$, $a \text{---} b$ quando $a \downarrow b$ e $a \rightsquigarrow b$ quando $a \uparrow b$. Linhas pontilhadas representam a negação das respectivas relações estruturais.

Por exemplo, em $(\overline{\langle a; b \rangle}, \overline{\langle c; d \rangle}) = (\langle a, \bar{b} \rangle, [\bar{c}, d])$ determinam-se as relações $a \triangleleft \bar{b}$, $a \uparrow \bar{c}$, $a \uparrow d$, $\bar{b} \triangleright a$, $\bar{b} \uparrow \bar{c}$, $\bar{b} \uparrow d$, $\bar{c} \uparrow a$, $\bar{c} \uparrow \bar{b}$, $\bar{c} \downarrow d$, $d \uparrow a$, $d \uparrow \bar{b}$, $d \downarrow \bar{c}$. A teia de interação para \circ é $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

Observação 16. Uma estrutura S tal que $w S = (\text{occ } S, \triangleleft, \downarrow, \uparrow)$ é *flat* se, e somente se, $\triangleleft = \emptyset$.

Pode-se perceber pelas definições acima que todos os átomos de uma subestrutura respeitam a mesma relação estrutural em relação aos átomos do contexto que envolve esta subestrutura:

Proposição 17. Dada uma estrutura $S\{R\}$ e duas ocorrências de átomos a em $S\{ \}$ e b em R , se $a \triangleleft b$ (respectivamente, $a \triangleright b$, $a \downarrow b$, $a \uparrow b$) então $a \triangleleft c$ (respectivamente, $a \triangleright c$, $a \downarrow c$, $a \uparrow c$) para todas as ocorrências de átomos c em R .

A sintaxe de estruturas apresentada, assim como a relação de equivalência $=$, ajuda a manter o foco do sistema mais no significado do que na sua forma de representação. O que realmente importa são os átomos e suas relações mútuas. Entretanto, não basta tomar um conjunto de átomos e atribuir relações arbitrárias entre eles para se obter uma estrutura. Duas questões importantes são levantadas neste momento:

1. Em que condições uma atribuição de relações a átomos realmente forma uma estrutura.
2. Se duas estruturas que possuem uma dada teia de interação são equivalentes por $=$ ou não.

Os teoremas seguintes [Gug07] fornecem as respostas.

Teorema 18. Dada uma estrutura S e suas relações estruturais $\triangleleft, \triangleright, \downarrow, \uparrow$, as seguintes propriedades são válidas, onde a, b, c e d são ocorrências de átomos distintas em S :

s_1 Nenhuma das relações $\triangleleft, \triangleright, \downarrow$ e \uparrow é reflexiva: $\neg(a \triangleleft a)$, $\neg(a \triangleright a)$, $\neg(a \downarrow a)$, $\neg(a \uparrow a)$.

s_2 Uma, e apenas uma, das relações $a \triangleleft b$, $a \triangleright b$, $a \downarrow b$, $a \uparrow b$ é válida.

s_3 As relações \triangleleft e \triangleright são mutuamente inversas: $a \triangleleft b \iff b \triangleright a$.

s_4 As relações \triangleleft e \triangleright são transitivas: $a \triangleleft b \wedge b \triangleleft c \implies a \triangleleft c$ e $a \triangleright b \wedge b \triangleright c \implies a \triangleright c$.

s_5 As relações \downarrow e \uparrow são simétricas: $a \downarrow b \iff b \downarrow a$ e $a \uparrow b \iff b \uparrow a$.

s_6 Propriedade triangular: para $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \{\triangleleft, \triangleright, \downarrow, \uparrow\}$ pode-se afirmar que:

$$(a\sigma_1 b) \wedge (b\sigma_2 c) \wedge (c\sigma_3 a) \implies (\sigma_1 = \sigma_2) \vee (\sigma_2 = \sigma_3) \vee (\sigma_3 = \sigma_1)$$

s_7 Propriedade do quadrado:

$$s_7^{\triangleleft} (a \triangleleft b) \wedge (a \triangleleft d) \wedge (c \triangleleft d) \implies (a \triangleleft c) \vee (b \triangleleft c) \vee (b \triangleleft d) \vee (c \triangleleft a) \vee (c \triangleleft b) \vee (d \triangleleft b).$$

$$s_7^\downarrow (a \downarrow b) \wedge (a \downarrow d) \wedge (c \downarrow d) \implies (a \downarrow c) \vee (b \downarrow c) \vee (b \downarrow d).$$

$$s_7^\uparrow (a \uparrow b) \wedge (a \uparrow d) \wedge (c \uparrow d) \implies (a \uparrow c) \vee (b \uparrow c) \vee (b \uparrow d).$$

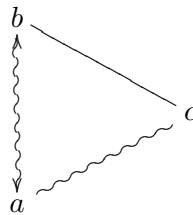
Demonstração. As propriedades de s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 seguem diretamente da definição. Será dada a demonstração das propriedades s_6 e s_7 .

s_6 Suponha que $a \triangleleft b$ e $b \downarrow c$. Os únicos casos possíveis são $S\langle P\{a\}; T[Q\{b\}, R\{c\}] \rangle$ (e então tem-se que $a \triangleleft c$) ou $S[T\langle P\{a\}; Q\{b\} \rangle, R\{c\}]$ (e então tem-se que $a \downarrow c$), onde $P\{ \}$, $Q\{ \}$, $R\{ \}$, $S\{ \}$ e $T\{ \}$ são contextos. Outras combinações de σ_1 e σ_2 geram casos análogos.

s_7 Por indução estrutural em S . Qualquer estrutura com menos do que quatro ocorrências de átomos satisfaz s_7 trivialmente, já que a hipótese do teorema necessita de quatro ocorrências distintas. Serão consideradas, portanto, estruturas em que haja pelo menos quatro ocorrências. Sejam U e V duas estruturas tais que $U \neq \circ \neq V$ e temos uma das seguintes situações pode ser verificada: ou $S = \langle U; V \rangle$, ou $S = [U, V]$, ou $S = (U, V)$. Escolham-se quatro átomos a, b, c e d em S . Se a, b, c e d estão todos em U ou em V , então pode-se aplicar a hipótese de indução. Serão considerados então os casos em que os quatro átomos não estão todos em U ou em V . Considere s_7^\triangleleft . Já que $S = [U, V]$ e $S = (U, V)$ falsificam a hipótese de s_7^\triangleleft , a única situação a ser considerada é $S = \langle U; V \rangle$. Suponha que a conclusão de s_7^\triangleleft seja falsa e que a está em U , logo c deve estar em U (de outra forma $a \triangleleft c$ seria verdadeiro), e então b e d devem estar em U , o que contradiz a hipótese assumida. Analogamente, se a está em V então c deve necessariamente estar em V e logo b e d também devem estar em V , o que novamente é uma contradição. Enfim, se a hipótese de s_7^\triangleleft é verdadeira quando $a, b, c,$ e d estão distribuídos entre U e V , então sua conclusão é verdadeira. O mesmo argumento se aplica a s_7^\downarrow e a s_7^\uparrow .

□

A propriedade do triângulo diz que não há estrutura que contenha uma subestrutura da forma:



Em outras palavras, em todo triângulo pelo menos dois lados devem representar a mesma relação estrutural.

A propriedade do quadrado para \triangleleft pode ser representada como na figura 3.1.3, onde a transitividade foi levada em conta e um exemplo de estrutura é mostrado abaixo de cada

diagrama. Levando em conta a comutatividade, os casos para par e copar são mais simples. A figura 3.1.3 mostra o que acontece no caso do par. Informalmente, podemos dizer que nenhum quadrado tem exatamente três lados ou diagonais da mesma natureza (isto é, representando a mesma relação estrutural) e formando um caminho simples (sem levar em conta a orientação).

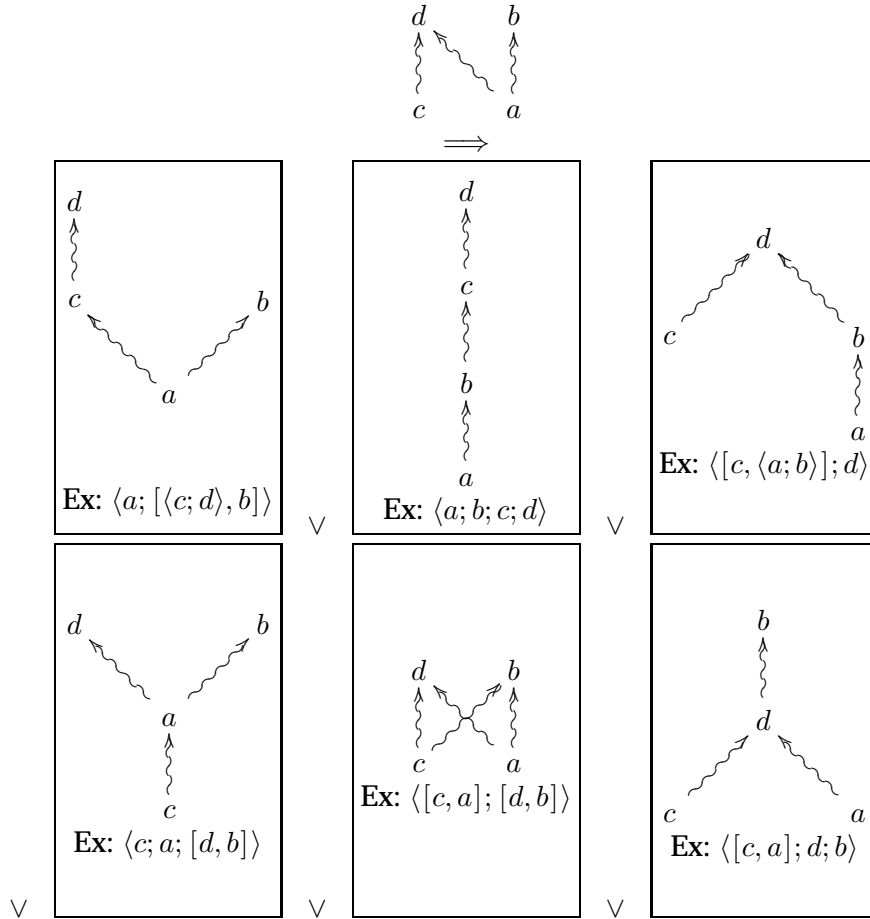


Figura 3.2: Propriedade do quadrado para \triangleleft

Observação 19. As relações \downarrow e \uparrow não são transitivas: considere $[\langle a; c \rangle, b]$ (nesse caso $a \downarrow b$ e $b \downarrow c$ mas $\neg(a \downarrow c)$) e $\langle \langle a; c \rangle, b \rangle$ (nesse caso $a \uparrow b$ e $b \uparrow c$ mas $\neg(a \uparrow c)$).

Até agora foi mostrado que as condições de s_1 a s_7 são necessárias para uma estrutura, mas ainda não foi mostrado que são suficientes. Isto será feito em seguida, mas antes são necessárias algumas definições auxiliares.

Definição 20. Uma teia candidata³ é uma quádrupla $\zeta = (\xi, \triangleleft, \downarrow, \uparrow)$, onde ξ é um conjunto de ocorrências de átomos e $\triangleleft, \downarrow, \uparrow \subseteq \xi^2$. Dadas as teias candidatas $\zeta_\mu = (\mu, \triangleleft_\mu, \downarrow_\mu, \uparrow_\mu)$ e $\zeta_\nu = (\nu, \triangleleft_\nu, \downarrow_\nu, \uparrow_\nu)$, tais que $\mu \neq \emptyset \neq \nu$, $\mu \cup \nu = \xi$ e $\mu \cap \nu = \triangleleft_\mu \cap \triangleleft_\nu = \downarrow_\mu \cap \downarrow_\nu = \uparrow_\mu \cap \uparrow_\nu = \emptyset$, o par (ζ_μ, ζ_ν) pode ser:

³Em inglês: *Web candidate*

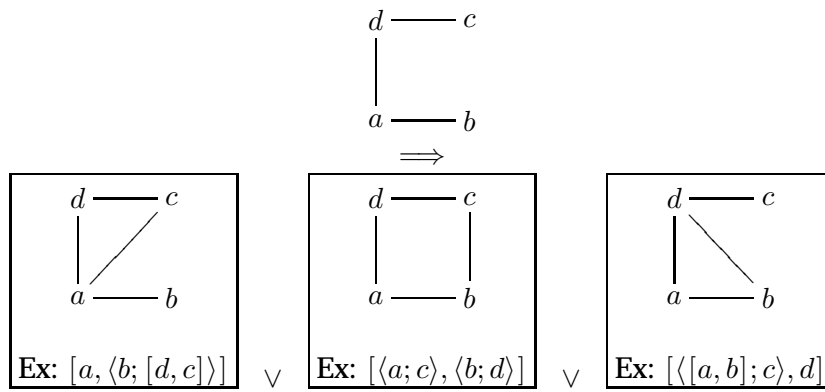


Figura 3.3: Propriedade do quadrado para \downarrow

1. uma partição- \triangleleft de ζ se, e somente se, $\downarrow = \downarrow_\mu \cup \downarrow_\nu$, $\uparrow = \uparrow_\mu \cup \uparrow_\nu$ e

$$\triangleleft = \triangleleft_\mu \cup \triangleleft_\nu \cup \{(a, b) \mid a \in \mu \wedge b \in \nu\}$$

2. uma partição- \downarrow de ζ se, e somente se, $\triangleleft = \triangleleft_\mu \cup \triangleleft_\nu$, $\uparrow = \uparrow_\mu \cup \uparrow_\nu$ e

$$\downarrow = \downarrow_\mu \cup \downarrow_\nu \cup \{(a, b) \mid (a \in \mu \wedge b \in \nu) \vee (a \in \nu \wedge b \in \mu)\}$$

3. uma partição- \uparrow de ζ se, e somente se, $\triangleleft = \triangleleft_\mu \cup \triangleleft_\nu$, $\downarrow = \downarrow_\mu \cup \downarrow_\nu$ e

$$\uparrow = \uparrow_\mu \cup \uparrow_\nu \cup \{(a, b) \mid (a \in \mu \wedge b \in \nu) \vee (a \in \nu \wedge b \in \mu)\}$$

Para toda teia candidata, a relação $\triangleright = \{(a, b) \mid b \triangleleft a\}$ deve ser definida, e isto é feito de maneira implícita.

Evidentemente teias de interação são teias candidatas. Com essas definições já é possível demonstrar que as condições s_1 a s_7 são suficientes para uma estrutura.

Teorema 21. *Se as condições de s_1 a s_7 valem para uma teia candidata ζ então existe uma estrutura cuja teia de interação é ζ .*

Demonstração. Seja $\zeta = (\xi, \triangleleft, \downarrow, \uparrow)$: vamos proceder por indução sobre a cardinalidade $|\xi|$ de ξ para construir uma estrutura S tal que $w S = \zeta$. Se $\xi = \emptyset$ então $S = \circ$. Se $\xi = \{a\}$ então $\triangleleft = \downarrow = \uparrow = \emptyset$ (por s_1) e $S = a$. Consideremos os casos em que há pelo menos duas ocorrências de átomos em ξ . Veremos que as condições de s_1 a s_7 reforçam a existência de uma partição- \triangleleft , \downarrow ou \uparrow de ζ . Suponha que exista uma partição- \triangleleft de ζ , consistindo de ζ_μ e ζ_ν . As condições de s_1 a s_7 valem para ζ_μ e ζ_ν , então, pela hipótese de indução, existem duas estruturas U e V tais que $w U = \zeta_\mu$ e $w V = \zeta_\nu$. Mas então podemos tomar $S = \langle U; V \rangle$ e, pela definição e por s_2 e s_3 , temos que $w S = \zeta$. Podemos proceder analogamente quando ζ_μ e ζ_ν

formarem uma partição- \downarrow (tome $S = [U, V]$) ou uma partição- \uparrow (tome $S = (U, V)$). O papel de s_5 é assegurar a correta formação de uma partição.

É preciso mostrar que existe uma partição \prec , \downarrow ou \uparrow de ζ , sob as hipóteses dadas, consistindo de $\zeta_\mu = (\mu, \triangleleft_\mu, \downarrow_\mu, \uparrow_\mu)$ e $\zeta_\nu = (\nu, \triangleright_\nu, \downarrow_\nu, \uparrow_\nu)$. Vamos construir os conjuntos de ocorrências de átomos μ e ν incrementalmente, começando por $\mu_2 = \{a\}$ e $\nu_2 = \{b\}$ para algum a e algum b em ξ , e construindo uma família de pares $\{(\mu_i, \nu_i)\}_{2 \leq i \leq |\xi|}$ de tal forma que em cada passo um elemento de ξ que não foi adicionado antes é adicionado à união de μ_i e ν_i ; em cada passo $\mu_i \neq \emptyset \neq \nu_i$ e ou $\mu_i \triangleleft \nu_i$ ou $\mu_i \downarrow \nu_i$ ou $\mu_i \uparrow \nu_i$. O passo final dá a partição, ou seja, $\mu = \mu_{|\xi|}$ e $\nu = \nu_{|\xi|}$. Abaixo é apresentado um algoritmo não-determinístico para isso.

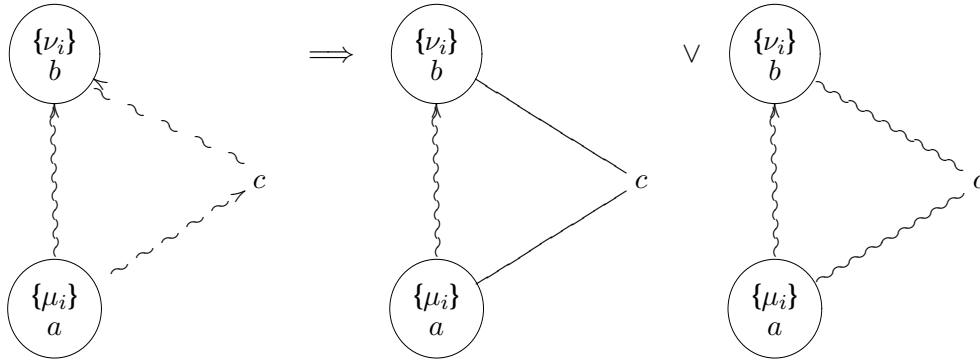
Primeiro passo

Tome $\mu_2 = \{a\}$ e $\nu_2 = \{b\}$, onde a e b são ocorrências de átomos distintas aleatoriamente escolhidas em ξ e tais que uma das relações $\mu_2 \triangleleft \nu_2$, $\mu_2 \downarrow \nu_2$, ou $\mu_2 \uparrow \nu_2$ é válida (as condições s_2 e s_3 se aplicam).

Passo iterativo

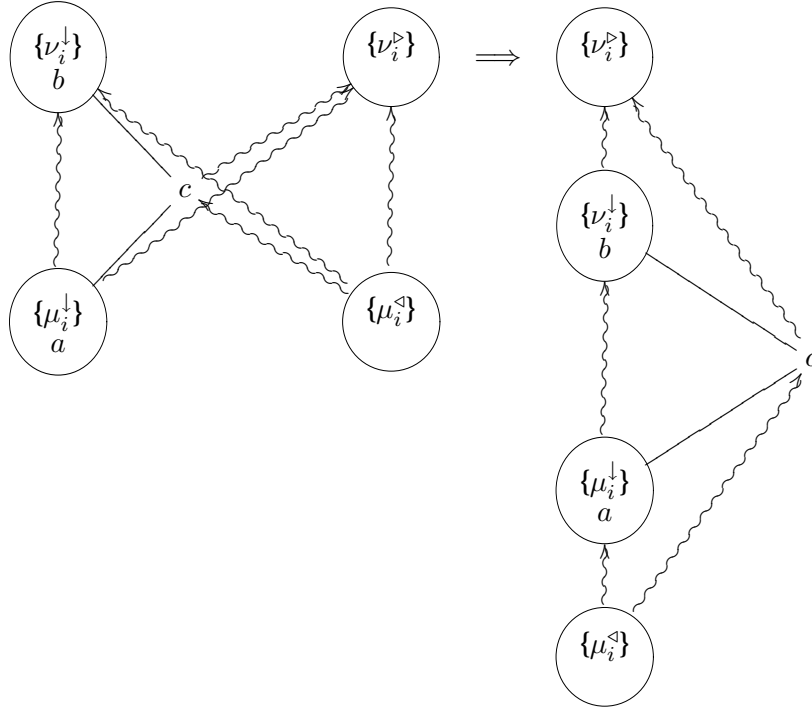
Temos dois conjuntos disjuntos e não-vazios de ocorrências μ_i e ν_i tais que todas as ocorrências de átomos em μ_i possuem a mesma relação estrutural $\sigma \in \{\triangleleft, \downarrow, \uparrow\}$ com as ocorrências de átomos em ν_i , ou seja, $\mu_i \triangleleft \nu_i$, $\mu_i \downarrow \nu_i$, ou $\mu_i \uparrow \nu_i$. Escolha um c qualquer em $\xi \setminus (\mu_i \cup \nu_i)$. Se $d \sigma c$ para todo d em μ_i então faça $\mu_{i+1} = \mu_i$ e $\nu_{i+1} = \nu_i \cup \{c\}$; se $c \sigma e$ para todo e em ν_i então faça $\mu_{i+1} = \mu_i \cup \{c\}$ e $\nu_{i+1} = \nu_i$; em ambos os casos $\mu_{i+1} \sigma \nu_{i+1}$. Se isso não ocorrer é preciso rearranjar μ_i e ν_i a fim de que eles atendam as nossas restrições. Procedamos por casos:

1. $\mu_i \triangleleft \nu_i$ e existem a em μ_i e b em ν_i tais que $\neg(a \triangleleft c)$ e $\neg(c \triangleleft b)$. Esta situação está representada à esquerda (onde $a \sim \succ c$ significa $\neg(a \triangleleft c)$):



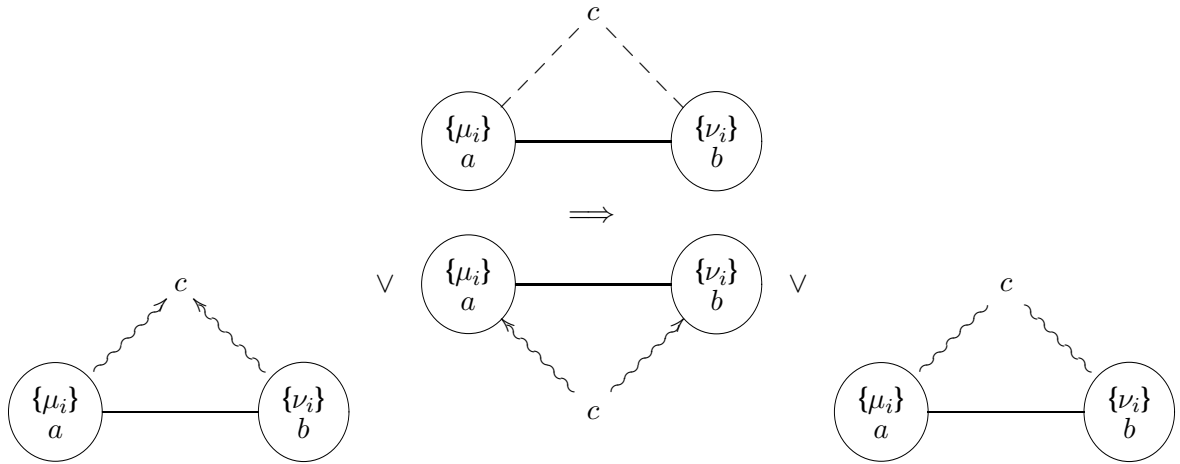
Como $a \triangleleft b$, por transitividade de \triangleleft (s_4), por simetria de \downarrow e \uparrow (s_5) e pela propriedade triangular (s_6), apenas dois casos são possíveis: ou $a \downarrow c$ e $c \downarrow b$, ou $a \uparrow c$ e $c \uparrow b$ (o primeiro caso está representado no diagrama central, o segundo no da direita). Vamos considerar o primeiro caso, o segundo sendo similar. Novamente por s_4 , s_5 e s_6 , ou $d \downarrow c$ ou $d \triangleleft c$, para cada elemento d em μ_i , e ou $c \downarrow e$ ou $c \triangleleft e$ para cada elemento e em ν_i . Podemos então particionar μ_i em dois conjuntos disjuntos μ_i^\downarrow e μ_i^\triangleleft e particionar

ν_i em dois conjuntos disjuntos ν_i^\downarrow e ν_i^\uparrow de tal forma que $\mu_i^\downarrow \downarrow \{c\}$, $\mu_i^\triangleleft \triangleleft \{c\}$ e $\{c\} \downarrow \nu_i^\downarrow$, $\{c\} \triangleleft \nu_i^\uparrow$. Claro que $a \in \mu_i^\downarrow$ e $b \in \nu_i^\downarrow$. Essa situação é representada à esquerda:

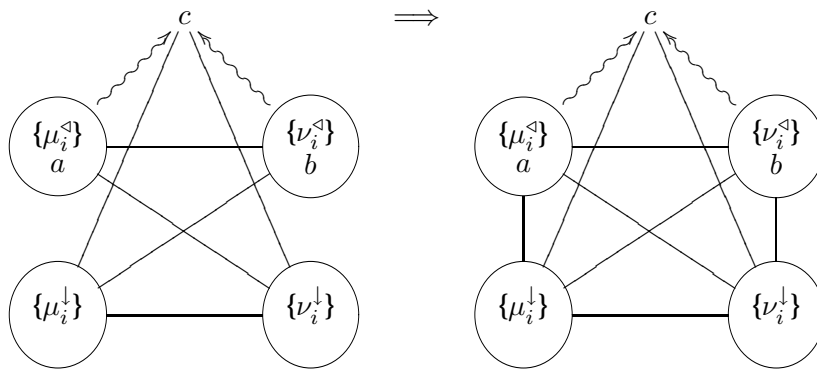


Devido a s_4 , s_5 , s_6 e propriedade do quadrado para \downarrow (s_7^\downarrow) entre μ_i^\downarrow , μ_i^\triangleleft , ν_i^\downarrow e c , temos que necessariamente $\mu_i^\triangleleft \triangleleft \mu_i^\downarrow$. Analogamente, necessariamente temos que $\nu_i^\downarrow \triangleleft \nu_i^\uparrow$. A situação resultante, simplificada por transitividade, é mostrada na figura da direita. Se $\mu_i^\triangleleft \neq \emptyset$ então tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\triangleleft$ e $\nu_{i+1} = \mu_i^\downarrow \cup \nu_i^\downarrow \cup \nu_i^\uparrow \cup \{c\}$: nesse caso $\mu_{i+1} \triangleleft \nu_{i+1}$. Se $\mu_i^\triangleleft = \emptyset$, então se $\nu_i^\uparrow \neq \emptyset$ tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\downarrow \cup \nu_i^\downarrow \cup \{c\}$ e $\nu_{i+1} = \nu_i^\uparrow$: de novo $\mu_{i+1} \triangleleft \nu_{i+1}$. Se $\mu_i^\triangleleft = \emptyset$ e $\nu_i^\uparrow = \emptyset$, tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\downarrow \cup \nu_i^\downarrow$ e $\nu_{i+1} = \{c\}$: nesse caso $\mu_{i+1} \downarrow \nu_{i+1}$.

2. $\mu_i \downarrow \nu_i$ e existem a em μ_i e b em ν_i tais que $\neg(a \downarrow c)$ e $\neg(b \downarrow c)$: por um argumento análogo ao do caso 1, temos que essa situação, representada à esquerda no diagrama abaixo (onde $a - - c$ representa $\neg(a \downarrow c)$), implica uma das três possibilidades que estão representadas abaixo:



Vamos considerar o primeiro caso, onde $a \triangleleft c$ e $b \triangleleft c$. Usando a propriedade triangular (s_6), podemos particionar μ_i em μ_i^\downarrow e μ_i^\triangleleft e ν_i em ν_i^\downarrow e ν_i^\triangleleft de tal forma que temos a situação representada à esquerda:



A propriedade do quadrado forçosamente nos leva à situação da direita, onde agora podemos definir uma partição apropriada. Se $\mu_i^\downarrow \neq \emptyset$ então tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\downarrow$ e $\nu_{i+1} = \mu_i^\triangleleft \cup \{c\} \cup \nu_i^\triangleleft \cup \nu_i^\downarrow$: nesse caso $\mu_{i+1} \downarrow \nu_{i+1}$. Se $\mu_i^\downarrow = \emptyset$, então se $\nu_i^\downarrow \neq \emptyset$ tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\triangleleft \cup \{c\} \cup \nu_i^\triangleleft$ e $\nu_{i+1} = \nu_i^\downarrow$: de novo $\mu_{i+1} \downarrow \nu_{i+1}$. Se $\mu_i^\downarrow = \emptyset$ e $\nu_i^\downarrow = \emptyset$, tome $\mu_{i+1} = \mu_i^\triangleleft \cup \nu_i^\triangleleft$ e $\nu_{i+1} = \{c\}$: nesse caso $\mu_{i+1} \triangleleft \nu_{i+1}$. Os outros casos acima, nos quais $a \triangleright c$ e $b \triangleright c$, são tratados de forma análoga.

3. $\mu_i \uparrow \nu_i$ e existe a em μ_i e b em ν_i tais que $\neg(a \uparrow c)$ e $\neg(b \uparrow c)$: esse caso é similar ao caso 2.

O passo final do algoritmo acontece quando nenhuma ocorrência de átomos em ζ pertence a uma partição.

□

A essência da demonstração acima reside na ação combinada da propriedade triangular (s_6) e na propriedade do quadrado (s_7). A propriedade triangular reduz o problema a um

caso onde apenas duas relações estruturais estão envolvidas, então a propriedade do quadrado é usada para decidir o lado do quadrado que ainda permanece por ser determinado.

O algoritmo fornecido na demonstração acima é não-determinístico, logo ele não pode ser usado de maneira razoável para responder a seguinte pergunta: a cada teia de iteração corresponde uma única estrutura (módulo equivalência)? O seguinte teorema mostra que sim.

Lema 22. *Dada uma estrutura T , se (ζ_μ, ζ_ν) é uma partição- \triangleleft de wT (respectivamente uma partição- \downarrow , uma partição- \uparrow) então existem duas estruturas U e V tais que $wU = \zeta_\mu$, $wV = \zeta_\nu$ e $T = \langle U; V \rangle$ (respectivamente, $T = [U, V]$, $T = (U, V)$).*

Demonstração. Seja $wT = (\text{occ } T, \triangleleft, \downarrow, \uparrow)$. Sejam as teias candidatas $\zeta_\mu = (\mu, \triangleleft_\mu, \downarrow_\mu, \uparrow_\mu)$ e $\zeta_\nu = (\nu, \triangleleft_\nu, \downarrow_\nu, \uparrow_\nu)$ uma partição- \triangleleft de wT . Já que $\mu \neq \emptyset \neq \nu$, a estrutura T está em um dos três seguintes casos:

1. $T = \langle T_1, \dots, T_h \rangle$, onde $h > 1$ e, para $1 \leq i \leq h$, temos que $T_i \neq \circ$ e T_i não é um seq próprio. Então necessariamente temos que $\text{occ } T_i \subseteq \mu$ ou $\text{occ } T_i \subseteq \nu$, para todo i . Com efeito, suponha o contrário, e suponha que $T_i = [T'_i, T''_i]$ para algum T'_i e algum T''_i tais que $T'_i \neq \circ \neq T''_i$ (o mesmo argumento vale quando $T_i = (T'_i, T''_i)$, nas mesmas condições). Então é possível achar a em T'_i e b em T''_i , ou a em T''_i e b em T'_i , tais que a está em μ e b está em ν . Mas então $a \downarrow b$, o que viola a hipótese assumida. Então, para todo i , as cocorrências de átomos em T_i vêm ou de μ ou de ν , mas não de ambos. Logo necessariamente temos que há k e $k+1$ em $1, \dots, h$ tais que todas as ocorrências de átomos de T_1, \dots, T_k estão em μ e todas as ocorrências de átomos de T_{k+1}, \dots, T_h estão em ν (de outra forma haveria casos de $b \triangleleft a$ para algum a em μ e algum b em ν). Então tome $U = \langle T_1; \dots; T_k \rangle$ e $V = \langle T_{k+1}, \dots, T_h \rangle$.
2. $T = [T', T'']$, onde $T' \neq \circ \neq T''$. Então necessariamente deve haver a em T' e b em T'' , ou a em T'' e b em T' , tais que a está em μ e b está em ν . Mas então $a \downarrow b$, o que viola a hipótese. Logo, este caso é de fato impossível.
3. $T = (T', T'')$, onde $T' \neq \circ \neq T''$. Este caso é análogo ao anterior.

Dessa forma o lema é demonstrado para qualquer partição- \triangleleft de wT . Um argumento análogo pode ser usado para partições- \downarrow e partições- \uparrow .

□

Teorema 23. *Duas estruturas são equivalentes se, e somente se, elas possuem a mesma teia de interação.*

Demonstração. A demonstração do "somente se" é trivial. Vamos mostrar então a demonstração do "se".

Sejam S e T duas estruturas na forma normal. Temos que demonstrar que se $wS = wT$ então $S = T$. Vamos aplicar indução estrutural em S . Nos casos base $S = \circ$ ou $S = a$ temos trivialmente que $S = T$. Suponha então que existam P e Q tais que $S = \langle P; Q \rangle$ e $P \neq \circ \neq Q$.

O par $(w P, w Q)$ é então uma partição- \triangleleft de $w S$, e portanto de $w T$. Pelo lema 22, existem U e V tais que $T = \langle U; V \rangle$ e $w U = w P$ e $w V = w Q$, e então pode-se aplicar a hipótese de indução. Usam-se argumentos similares quando $S = [P, Q]$ e $S = (P, Q)$, onde $P \neq \circ \neq Q$. \square

3.1.4 O Sistema BV

O sistema BV, ou sistema básico V^4 , é uma extensão conservativa do fragmento multiplicativo da lógica linear acrescido da regra mix (MLL + mix) e do operador não comutativo e auto-dual seq. Tal sistema foi um dos primeiros propostos dentro do cálculo das estruturas [Gug07]. É para um fragmento deste sistema (o *flat* BV, ou FBV) que este trabalho propõe uma tentativa de estratégia de demonstração ⁵.

Definição 24. Uma *regra de inferência* é um esquema da forma

$$\rho \frac{T}{R}$$

onde ρ é o *nome* da regra, T é sua *premissa* e R é sua *conclusão*; nomes de regras são denotados por ρ e π . Em uma regra de inferência, ou a premissa ou a conclusão podem ser vazias, mas não ambas. Quando premissa e conclusão de uma instância de uma regra de inferência são equivalentes, esta instância é dita *trivial*, ou, caso contrário, é dita *não-trivial*. Um *sistema (formal)* é um conjunto de regras de inferência; sistemas formais são denotados por \mathcal{S} . Uma *derivação* em um certo sistema formal é uma seqüência de instâncias de regras de inferência do sistema, e pode consistir de uma única estrutura; derivações são denotadas por Δ . A premissa da instância de regra de inferência mais acima na derivação, se presente, é chamada de *premissa* da derivação; se presente, a conclusão da instância de regra mais abaixo na derivação é chamada de *conclusão* da derivação; a premissa e a conclusão de derivações consistindo de uma única estrutura é a própria estrutura. Uma derivação Δ cuja premissa é

T , cuja conclusão é R e cujas regras de inferência estão em \mathcal{S} é indicada por $\Delta \parallel_{\mathcal{S}}^T R$ (o nome

Δ pode ser omitido). O *comprimento* de uma derivação é o número de instâncias de regras de inferência que ela possui. Dois sistemas \mathcal{S} e \mathcal{S}' são *fortemente equivalentes* se para toda

derivação $\parallel_{\mathcal{S}}^T R$ existe uma derivação $\parallel_{\mathcal{S}'}^T R$, e vice-versa.

Existem, no cálculo de seqüentes, duas formas complementares de enxergar uma derivação, que podem ser adaptadas ao cálculo das estruturas:

⁴Basic system V

⁵O termo *tentativa* de estratégia é melhor explicado na Seção 4.3

1. A visão de baixo para cima: premissas se unem (em árvores) para formar novas conclusões, e a derivação cresce no sentido de sua conclusão. Este pode ser chamado de ponto de vista *dedutivo*.
2. A visão de cima para baixo ⁶: a conclusão é o ponto de partida e regras de inferência são usadas para atingir as premissas desejadas. Este pode ser chamado de ponto de vista de *construção de demonstrações*.

Depois de escolher regras de premissa única, existe uma situação de simetria: derivações são seqüências de inferências (simetria *top-down*), par e copar são o mesmo tipo de estrutura com dois nomes diferentes e seq é auto-dual.

A figura 3.1.4 apresenta as regras de inferência para o sistema BV.

$$\begin{array}{c} \circ \downarrow \frac{-}{\circ} \quad \mathbf{ai} \downarrow \frac{S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]} \quad \mathbf{q} \downarrow \frac{S\langle [R, T]; [R', T'] \rangle}{S[\langle R; R' \rangle, \langle T; T' \rangle]} \quad \mathbf{s} \frac{S([R, T], R')}{S[(R, R'), T]} \end{array}$$

Figura 3.4: Sistema BV

Definição 25. Os nomes das regras são:

$\circ \downarrow$ *unidade (axioma lógico)*;

$\mathbf{ai} \downarrow$ *interação atômica*;

$\mathbf{q} \downarrow$ *seq*;

\mathbf{s} *switch*.

Definição 26. Uma *demonstração* é uma derivação cuja regra mais acima seja o axioma lógico

$\circ \downarrow$. Demonstrações são denotadas por Π . Um sistema formal \mathcal{S} *demonstração* R se existe em \mathcal{S} uma demonstração Π cuja conclusão seja R , escrita $\Pi \parallel \mathcal{S} \begin{array}{c} \Pi \\ R \end{array}$ (o nome Π pode ser omitido).

Dois sistemas são (*fracamente*) *equivalentes* se eles demonstram as mesmas estruturas.

Exemplo 27. demonstração de uma estrutura em BV:

⁶Em inglês: *bottom-up*

$$\begin{array}{c}
\circ \downarrow - \\
\circ \\
\text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a, \bar{a}]} \\
= \frac{\quad}{[a, (\bar{a}, \circ)]} \\
\text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a, (\bar{a}, [\bar{b}, b])]} \\
\text{s} \frac{\quad}{[a, \bar{b}, (\bar{a}, b)]} \\
= \frac{\langle [a, \bar{b}, (\bar{a}, b)]; \circ \rangle}{\langle [a, \bar{b}, (\bar{a}, b)]; [c, \bar{c}] \rangle} \\
\text{ai} \downarrow \frac{\quad}{\langle [a, \bar{b}, (\bar{a}, b)]; [c, \bar{c}] \rangle} \\
\text{q} \downarrow \frac{\quad}{[\langle [a, \bar{b}]; c \rangle, \langle (\bar{a}, b); \bar{c} \rangle]}
\end{array}$$

Definição 28. O sistema *flat* BV (FBV) é o sistema BV sem a regra $\text{q}\downarrow$. As estruturas permitidas no FBV são apenas estruturas *flat* (sem a estrutura *seq*).

A figura 3.1.4 apresenta as regras de inferência para o sistema FBV.

$$\circ \downarrow - \quad \text{ai} \downarrow \frac{S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]} \quad \text{s} \frac{S([R, T], R')}{S[(R, R'), T]}$$

Figura 3.5: Sistema FBV

Observação 29. O FBV é um subsistema do sistema BV, no sentido de que toda estrutura demonstrável em FBV é demonstrável em BV (mas a recíproca não é verdadeira). Mais do que isto, pode-se mostrar que o sistema BV é uma extensão conservativa do sistema FBV.

Exemplo 30. demonstração de uma estrutura em FBV:

$$\begin{array}{c}
\circ \downarrow - \\
\circ \\
\text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b, \bar{b}]} \\
= \frac{\quad}{[(\circ, b), \bar{b}]} \\
\text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[[a, \bar{a}], b), \bar{b}]} \\
\text{s} \frac{\quad}{[a, b, (\bar{a}, \bar{b})]}
\end{array}$$

3.1.5 O teorema de *splitting*

O teorema de *splitting* tem um papel muito importante neste trabalho por dois motivos:

1. Ele é a chave para a demonstração de eliminação da regra *Cut* para o cálculo das estruturas para MLL + mix+ seq (o sistema BV);

2. Sua idéia central foi a motivadora para a tentativa de estratégia de demonstração para o sistema FBV com pares de átomos dois a dois distintos proposta neste trabalho.

O segundo item, referente à motivação para a tentativa de estratégia de demonstração proposta, será retomado com detalhes mais adiante, na seção 4.2. No momento vamos nos concentrar no primeiro item.

A eliminação da regra *Cut* é uma propriedade desejável em todo sistema lógico para o qual se deseja uma implementação eficiente. Em cálculo de seqüentes, a regra *Cut* pode ser escrita como:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{Cut}$$

Vista de baixo para cima, esta regra precisa que uma fórmula *A* seja “criada” do nada, o que exige uma criatividade que o computador não possui. Por isso, quando se foca na implementação, é desejável que a regra *Cut* possa ser eliminada. Os argumentos clássicos para se demonstrar a eliminação da regra *Cut* no cálculo de seqüentes se baseiam na propriedade de que, quando as fórmulas principais em uma instância da regra *Cut* estão ativas em ambas as ramificações, elas determinam quais regras são aplicadas imediatamente acima da regra *Cut*. Isto é uma consequência do fato de que estas fórmulas possuem um conectivo raiz, e regras lógicas são aplicáveis somente a este conectivo e em nenhum outro lugar da fórmula.

Entretanto, no cálculo das estruturas, esta propriedade não é válida. O sistema BV compreende o fragmento multiplicativo da lógica linear (MLL) mais a regra *mix* e mais *seq*. Existe uma versão atômica da regra *Cut* para BV chamada $\text{ai}\uparrow$:

$$\text{ai}\uparrow \frac{S(a, \bar{a})}{S\{\circ\}}$$

Esta regra é simétrica à regra $\text{ai}\downarrow$ e diz que, de baixo para cima, pode-se criar dois átomos de polaridades opostas em *qualquer lugar dentro da estrutura*. Isto torna o argumento para demonstrar a eliminação da regra *Cut* um tanto mais complicado, pois qualquer coisa pode acontecer acima de uma instância da regra *Cut*. Por outro lado, uma simplificação considerável pode ser feita porque no sistema BV a regra $\text{ai}\uparrow$ cria apenas fórmulas atômicas. A dificuldade restante fica por parte de entender o que acontece, enquanto sobe-se em uma demonstração, ao redor dos átomos produzidos por um *Cut* atômico. Os dois átomos de um *Cut* atômico podem ser produzidos dentro de qualquer estrutura, e eles não pertencem a ramos distintos como no cálculo de seqüentes.

Uma abordagem possível para a demonstração da eliminação da regra *Cut* utiliza o teorema de *splitting* [Gug07]. É importante observar que o sistema BV *não possui a regra Cut como primitiva*. A eliminação da regra *Cut* a que nos referimos aqui para o sistema MLL + *mix* + *seq* significa que:

Podemos acrescentar a regra Cut $\text{ai}\uparrow$ ao sistema BV sem aumentar o conjunto de fórmulas demonstráveis em MLL + mix + seq. Ou seja, a regra Cut é admissível em BV.

Em outras palavras, o sistema BV é completo para MLL + mix + seq sem ter a regra Cut, o que torna sua implementação muito mais prática.

3.1.5.1 Teorema de *splitting*

A idéia de *splitting* pode ser entendida considerando um sistema de seqüentes em que não há regras de *weakening* e *contraction*. Considere o exemplo da lógica linear multiplicativa. Se temos uma demonstração do seqüente:

$$\vdash F\{A \otimes B\}$$

onde $F\{A \otimes B\}$ é uma fórmula que contém a subfórmula $A \otimes B$, sabemos com certeza que em algum lugar na demonstração existe uma, e apenas uma, instância da regra \otimes que separa A e B juntamente com seu contexto. Temos então a seguinte situação:

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \parallel \\ \vdash A, \Phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ \vdash B, \Psi \end{array} \quad \frac{\otimes}{\vdash A \otimes B, \Phi, \Psi} \quad \Delta \parallel \\ \vdash F\{A \otimes B\} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ [B, \Psi] \\ \Pi_1 \parallel \\ ([A, \Phi], [B, \Psi]) \\ \text{S} \frac{([A, \Phi], [B, \Psi])}{[[A, \Phi], B], \Psi} \\ \text{S} \frac{[[A, \Phi], B], \Psi}{[(A, B), \Phi, \Psi]} \\ \Delta \parallel \\ [F(A, B), \Gamma] \end{array}$$

Podemos considerar, como mostrado à esquerda, uma demonstração para o seqüente dado como composta de três partes, Δ , Π_1 e Π_2 . No cálculo das estruturas existem muitas demonstrações diferentes correspondentes à mesma demonstração em cálculo de seqüentes: elas diferem apenas na possível ordenação das regras. Regras no cálculo das estruturas têm menor granularidade e maior aplicabilidade. Mas, entre todas as demonstrações, deve haver uma que se encaixe no esquema da demonstração à direita da figura acima. Este exemplo ilustra precisamente a idéia por trás da técnica de *splitting*.

A derivação Δ acima implementa uma instância de *context reduction*⁷ e um *splitting* próprio. De forma geral, podemos enunciar estes princípios da seguinte forma:

1. *Context reduction*: Se $S\{R\}$ é demonstrável, então $S\{ \}$ pode ser reduzido, de baixo para cima em uma demonstração, à estrutura $\{ \}, U$, tal que $[R, U]$ é demonstrável. No exemplo acima, $[F\{ \}, \Gamma]$ é reduzido a $\{ \}, \Gamma'$ para algum Γ' .
2. (*Shallow*) *splitting*: Se $[(R, T), P]$ é demonstrável, então P pode ser reduzido, de baixo para cima em uma demonstração, a $[P_1, P_2]$, tal que $[R, P_1]$ e $[T, P_2]$ são demonstráveis. No exemplo acima, Γ' é reduzido a $[\Phi, \Psi]$.

⁷Como veremos adiante, *context reduction* é um lema necessário para o teorema de *splitting*.

O conceito de *context reduction* é demonstrado usando o conceito de (*shallow*) *splitting*. Antes de demonstrá-los, vamos introduzir duas proposições simples que serão utilizadas implicitamente ao longo da demonstração.

Proposição 31. *O tamanho da premissa de uma derivação em BV não é maior que o tamanho da sua conclusão.*

Proposição 32. *Em BV, $\langle R; T \rangle$ é demonstrável se, e somente se, R e T são demonstráveis. Da mesma forma, (R, T) é demonstrável se, e somente se, R e T são demonstráveis.*

Como o cálculo das estruturas pode ser visto como um sistema de reescrita, podemos introduzir uma terminologia análoga à destes sistemas.

Definição 33. As inferências do sistema BV são todas da forma $\rho \frac{S\{V\}}{S\{U\}}$, onde a estrutura U é chamada de *redex* e V de *contractum* da instância da regra.

Teorema 34 (Shallow Splitting). *Para todas as estruturas R, T e P :*

1. Se $[\langle R; T \rangle, P]$ é demonstrável em BV, então existem P_1, P_2 e $\begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel_{BV} \\ P \end{array}$ tais que $[R, P_1]$ e $[T, P_2]$ são demonstráveis em BV.

2. Se $[(R, T), P]$ é demonstrável em BV, então existem P_1, P_2 e $\begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel_{BV} \\ P \end{array}$ tais que $[R, P_1]$ e $[T, P_2]$ são demonstráveis em BV.

Demonstração. Todas as derivações da demonstração são feitas em BV. Vamos considerar a ordem lexicográfica \prec sobre os números naturais definida como $(m', n') \prec (m, n)$ se, e somente se, ou $m' < m$, ou $m' = m$ e $n' < n$. Considere as seguintes proposições:

$$S(m, n) = \forall m', n. \forall R, T, P. \left(\left((m', n') \preceq (m, n) \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} e \quad m' = |\text{occ} [\langle R; T \rangle, P]| \\ e \quad \exists \begin{array}{c} \parallel \\ [\langle R; T \rangle, P] \end{array} \text{ de comprimento } n' \end{array} \right) \right. \\ \left. \Rightarrow \exists P_1, P_2. \left(\begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \right) e \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} e \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array} \right) \right)$$

$$C(m, n) = \forall m', n. \forall R, T, P. \left(\left((m', n') \preceq (m, n) \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{l} e \quad m' = |\text{occ} [(R, T), P]| \\ e \quad \exists \begin{array}{c} \parallel \\ [(R, T), P] \end{array} \text{ de comprimento } n' \end{array} \right) \right. \\ \left. \Rightarrow \exists P_1, P_2. \left(\begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P \end{array} \right) e \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} e \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array} \right) \right)$$

O enunciado do teorema é equivalente a

$$\forall m, n. (S(m, n) \text{ e } C(m, n))$$

Podemos considerar (m, n) como uma medida de $(S(m, n) \text{ e } C(m, n))$, e a demonstração é uma indução, por \prec , sobre esta medida.

• Casos Base

1. $R = \circ$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \langle \circ; T \rangle, P \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \langle \circ; P \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [\circ, \circ] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, P] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, P] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [\circ, T], P \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} [\circ, P] \\ \parallel \\ P \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [\circ, \circ] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, P] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, P] \end{array}$$

2. $T = \circ$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \langle R; \circ \rangle, P \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \langle P; \circ \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, P] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [\circ, \circ] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, P] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, \circ], P \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} [P, \circ] \\ \parallel \\ P \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, P] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [\circ, \circ] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, P] \end{array}$$

3. $P = \circ$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \langle R; T \rangle, \circ \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \langle \circ; \circ \rangle \\ \parallel \\ \circ \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, \circ] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, \circ] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ R \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, T], \circ \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} [\circ, \circ] \\ \parallel \\ \circ \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [R, \circ] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ [T, \circ] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \parallel \\ R \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ T \end{array}$$

• Casos Indutivos

1. $\forall m', n'. ((m', n') \prec (m, n) \text{ e } S(m', n') \text{ e } C(m', n')) \implies S(m, n)$ O tamanho de $[\langle R; T \rangle, P]$ é m e existe uma demonstração desta estrutura de tamanho n . Vamos considerar a instância de regra de derivação mais abaixo na demonstração:

$$\rho \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ Q \end{array}}{[\langle R; T \rangle, P]}$$

Onde assumimos que ρ é não-trivial ($\rho \neq \text{equivale a}$), pois de outra forma a hipótese de indução se aplicaria. Vamos argumentar baseados na posição do redex de ρ em $[\langle R; T \rangle, P]$. As possibilidades são:

a) $\rho = \text{ai}\downarrow$

i. O redex está em R

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [\langle R'; T \rangle, P] \end{array}}{[\langle R; T \rangle, P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad \text{e} \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [R', P_1] \end{array}}{[R, P_1]} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

ii. O redex está em T

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [\langle R; T' \rangle, P] \end{array}}{[\langle R; T \rangle, P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} \quad \text{e} \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [T', P_2] \end{array}}{[T, P_2]}$$

iii. O redex está em P

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [\langle R; T \rangle, P'] \end{array}}{[\langle R; T \rangle, P]} \quad \text{equivale a} \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P' \end{array}}{P} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

b) $\rho = \text{q}\downarrow$

i. O redex está em R

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [\langle R'; T \rangle, P] \end{array}}{[\langle R; T \rangle, P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad \text{e} \quad \text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [R', P_1] \end{array}}{[R, P_1]} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

ii. O redex está em T

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T' \rangle, P \end{array}}{\langle R; T \rangle, P} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [T', P_2] \end{array}}{[T, P_2]}$$

iii. O redex está em P

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T \rangle, P' \end{array}}{\langle R; T \rangle, P} \quad \text{equivalente a} \quad \text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P' \\ P \end{array}}{P} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

iv. $R = \langle R'; R'' \rangle, P = \langle P'; P'' \rangle, U$ e

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle [R', P']; \langle R''; T \rangle, P'' \rangle, U \end{array}}{\langle R'; R''; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U}$$

Queremos mostrar que existem Π_1, Π_2 e Π_3 tais que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T \rangle, P \end{array} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \Pi_1 \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_3 \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

Ou seja, queremos mostrar que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R'; R''; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U \end{array} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \Pi_1 \parallel \\ \langle P'; P'' \rangle, U \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ \langle R'; R'' \rangle, P_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_3 \parallel \\ [T, P_2] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle [R', P']; \langle R''; T \rangle, P'' \rangle, U]| = |\text{occ} [\langle R'; R''; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U]|$ mas $n' < n$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} \langle U_1; U_2 \rangle \\ \Pi_4 \parallel \\ U \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \parallel \\ [R', P', U_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_6 \parallel \\ \langle R''; T \rangle, P'', U_2 \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle R''; T \rangle, P'', U_2]| < |\text{occ} [\langle R'; R''; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U]|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{ccc} \langle P'_1; P_2 \rangle & & \\ \Pi_7 \parallel & \Pi_8 \parallel & \Pi_9 \parallel \\ [P'', U_2] & e & [R'', P'_1] & e & [T, U_2] \end{array}$$

Agora podemos fazer $P_1 = \langle [p', U'_1]; P'_1 \rangle$ e construir Π_1 , Π_2 e Π_3 da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} \langle P_1; P_2 \rangle \\ = \frac{\langle P_1; P_2 \rangle}{\langle [P', U_1]; P'_1; P_2 \rangle} \\ \Pi_7 \parallel \\ \text{q}\downarrow \frac{\langle [P', U_1]; [P'', U_2] \rangle}{\langle [P'; P''], \langle U_1; U_2 \rangle \rangle} \\ \Pi_4 \parallel \\ = \frac{\langle [P'; P''], U \rangle}{P} \end{array} \right\} \Pi_1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_5 \parallel \\ [R', P', U_1] \\ \Pi_8 \parallel \\ \text{q}\downarrow \frac{\langle [R', P', U_1]; [R'', P'_1] \rangle}{\langle [R'; R''], \langle [P', U_1]; P'_1 \rangle \rangle} \\ = \frac{[R, P_1]}{[R, P_1]} \end{array} \right\} \Pi_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_9 \parallel \\ [T, P_2] \end{array} \right\} \Pi_3.$$

v. $P = \langle [P'; P''], U', U'' \rangle$ e

$$\text{q}\downarrow \frac{\langle \langle [R; T], P', U' \rangle; P'', U'' \rangle}{\langle [R; T], \langle P'; P''], U', U'' \rangle \rangle}$$

Queremos mostrar que existem Π_1 , Π_2 e Π_3 tais que:

$$\begin{array}{ccccc} \parallel & & \langle P_1, P_2 \rangle & & \\ \parallel & & \Pi_1 \parallel & & \Pi_2 \parallel & & \Pi_3 \parallel \\ \langle [R; T], P \rangle & \text{equivale a} & \langle [P'; P''], U', U'' \rangle & e & [R, P_1] & e & [T, P_2] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle \langle R; T \rangle, P', U' \rangle; P''], U'']| = |\text{occ} [\langle R; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U', U'']|$ mas $n' < n$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} \langle U_1; U_2 \rangle \\ \Pi_4 \parallel \\ U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \parallel \\ \langle R; T \rangle, P', U', U_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_6 \parallel \\ [P'', U_2] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle R; T \rangle, P', U', U_1]| < |\text{occ} [\langle R; T \rangle, \langle P'; P'' \rangle, U', U'']|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} \langle P'_1; P'_2 \rangle \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U', U_1] \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \Pi_8 \parallel \\ [R, P'_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_9 \parallel \\ [T, P'_2] \end{array}$$

Agora podemos fazer $P_1 = P'_1$ e $P_2 = P'_2$ e construir Π_1 , Π_2 e Π_3 da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} = \frac{\langle P_1; P_2 \rangle}{\langle P'_1; P'_2 \rangle} \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U_1, U'] \\ \Pi_6 \parallel \\ \text{q} \downarrow \frac{[\langle [P', U_1]; [P'', U_2] \rangle, U']}{[\langle P'; P'' \rangle, U', \langle U_1; U_2 \rangle]} \\ \Pi_4 \parallel \\ = \frac{[\langle P'; P'' \rangle, U', U'']}{P} \end{array} \right\} \Pi_1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_8 \parallel \\ = \frac{[R, P'_1]}{[R, P_1]} \end{array} \right\} \Pi_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_9 \parallel \\ = \frac{[T, P'_2]}{[T, P_2]} \end{array} \right\} \Pi_3.$$

c) $\rho = s$

i. O redex está em R

$$s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R'; T \rangle, P \end{array}}{\langle R; T \rangle, P} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ R', P_1 \end{array}}{R, P_1} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ T, P_2 \end{array}$$

ii. O redex está em T

$$s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T' \rangle, P \end{array}}{\langle R; T \rangle, P} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ R, P_1 \end{array} \quad e \quad s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ T', P_2 \end{array}}{T, P_2}$$

iii. O redex está em P

$$s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T \rangle, P' \end{array}}{\langle R; T \rangle, P} \quad \text{equivale a} \quad s \frac{\begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \parallel \\ P' \end{array}}{P} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ R, P_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ T, P_2 \end{array}$$

iv. $P = [(P'; P''), U', U'']$ e

$$s \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [(\langle R; T \rangle, P', U'), P''], U'' \end{array}}{\langle R; T \rangle, (P', P''), U', U''}$$

Queremos mostrar que existem Π_1 , Π_2 e Π_3 tais que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \langle R; T \rangle, P \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \langle P_1; P_2 \rangle \\ \Pi_1 \parallel \\ (P', P''), U', U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ R, P_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_3 \parallel \\ T, P_2 \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle R; T \rangle, (P', P''), U', U'']| = |\text{occ} [(\langle R; T \rangle, P', U'), P''], U''|$ mas $n' < n$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} [U_1, U_2] \\ \Pi_4 \parallel \\ U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \parallel \\ \langle R; T \rangle, P', U', U_1 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_6 \parallel \\ P'', U_2 \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle R; T \rangle, P', U', U_1]| < |\text{occ} [\langle R; T \rangle, (P', P''), U', U'']|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{ccc} \langle P'_1; P'_2 \rangle & & \\ \Pi_7 \parallel & \Pi_8 \parallel & \Pi_9 \parallel \\ [P', U', U_1] & e & [R, P'_1] & e & [T, P'_2] \end{array}$$

Agora podemos fazer $P_1 = P'_1$ e $P_2 = P'_2$ e construir Π_1 , Π_2 e Π_3 da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} = \frac{\langle P_1; P_2 \rangle}{\langle P'_1; P'_2 \rangle} \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U', P_1] \\ \Pi_6 \parallel \\ \text{s} \frac{([P'', U_2], [P', U', P_1])}{([P', U', U_1], P''), U_2]} \\ \text{s} \frac{[(P', P''), U', U_1, U_2]}{[(P', P''), U', U_1, U_2]} \\ \Pi_7 \parallel \\ [(P', P''), U', U''] \\ = \frac{\quad}{P} \end{array} \right\} \Pi_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_8 \parallel \\ = \frac{[R, P'_1]}{[R, P_1]} \end{array} \right\} \Pi_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_9 \parallel \\ = \frac{[T, P'_2]}{[T, P_2]} \end{array} \right\} \Pi_3$$

2. $\forall m', n'. ((m', n') \prec (m, n) \text{ e } S(m', n') \text{ e } C(m', n')) \implies C(m, n)$ O tamanho de $[(R, T), P]$ é m e existe uma demonstração desta estrutura de tamanho n . Vamos considerar a instância de regra de derivação mais abaixo na demonstração:

$$\rho \frac{\parallel Q}{[(R, T), P]}$$

Onde assumimos que ρ é não-trivial ($\rho \neq \text{equivalente a } \text{)$, pois de outra forma a hipótese de indução se aplicaria. Vamos argumentar baseados na posição do

redex de ρ em $[(R, T), P]$. As possibilidades são:

a) $\rho = \text{ai}\downarrow$

i. O redex está em R

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [(R', T), P] \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [R', P_1] \end{array}}{[R, P_1]} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [T, P_2] \end{array}$$

ii. O redex está em T

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [(R, T'), P] \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [T', P_2] \end{array}}{[T, P_2]}$$

iii. O redex está em P

$$\text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [(R, T), P'] \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \text{ai}\downarrow \frac{\begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P' \\ \hline P \end{array}}{P} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [T, P_2] \end{array}$$

b) $\rho = \text{q}\downarrow$

i. O redex está em R

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [(R', T), P] \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [R', P_1] \end{array}}{[R, P_1]} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [T, P_2] \end{array}$$

ii. O redex está em T

$$\text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [(R, T'), P] \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [R, P_1] \end{array} \quad e \quad \text{q}\downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \hline [T', P_2] \end{array}}{[T, P_2]}$$

iii. O redex está em P

$$q \downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [(R, T), P'] \\ \parallel \end{array}}{[(R, T), P]} \quad \text{equivale a} \quad q \downarrow \frac{\begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \parallel \\ P' \\ \parallel \\ P \end{array}}{P} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [R, P_1] \\ \parallel \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \parallel \\ [T, P_2] \\ \parallel \end{array}$$

iv. $P = \langle P'; P'' \rangle, U', U''$ e

$$q \downarrow \frac{\begin{array}{c} \parallel \\ [\langle [(R, T), P', U']; P'' \rangle, U'' \\ \parallel \end{array}}{[(R, T), \langle P'; P'' \rangle, U', U'']}$$

Queremos mostrar que existem Π_1, Π_2 e Π_3 tais que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ [(R, T), P] \\ \parallel \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [P_1; P_2] \\ \Pi_1 \parallel \\ \langle P'; P'' \rangle, U', U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ [R, P_1] \\ \parallel \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_3 \parallel \\ [T, P_2] \\ \parallel \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [\langle [(R, T), P', U']; P'' \rangle, U'']| = |\text{occ} [(R, T), \langle P'; P'' \rangle, U', U'']|$ mas $n' < n$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} \langle U_1; U_2 \rangle \\ \Pi_4 \parallel \\ U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \parallel \\ [(R, T), P', U', U_1] \\ \parallel \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_6 \parallel \\ [P'', U_2] \\ \parallel \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [(R, T), P', U', U_1]| < |\text{occ} [\langle [(R, T), P', U']; P'' \rangle, U'']|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} [P'_1, P'_2] \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U', U_1] \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} \Pi_8 \parallel \\ [R, P'_1] \\ \parallel \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_9 \parallel \\ [T, P'_2] \\ \parallel \end{array}$$

Agora podemos fazer $P_1 = P'_1$ e $P_2 = P'_2$ e construir Π_1, Π_2 e Π_3 da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l}
= \frac{[P_1, P_2]}{[P'_1, P'_2]} \\
\parallel \Pi_7 \\
[P', U_1, U'] \\
\parallel \Pi_6 \\
\text{q}\downarrow \frac{[\langle [P', U_1]; [P'', U_2] \rangle, U']}{[\langle P'; P'' \rangle, U', \langle U_1; U_2 \rangle]} \\
\parallel \Pi_4 \\
= \frac{[\langle P'; P'' \rangle, U', U'']}{P}
\end{array} \right\} \Pi_1.$$

$$\left. \begin{array}{l}
\parallel \Pi_8 \\
= \frac{[R, P'_1]}{[R, P_1]}
\end{array} \right\} \Pi_2.$$

$$\left. \begin{array}{l}
\parallel \Pi_9 \\
= \frac{[T, P'_2]}{[T, P_2]}
\end{array} \right\} \Pi_3.$$

c) $\rho = \mathbf{s}$

i. O redex está em R

$$\mathbf{s} \frac{\parallel}{[(R', T), P]} \quad \text{equivale a} \quad \frac{[P_1, P_2]}{P} \quad e \quad \mathbf{s} \frac{\parallel}{[R, P_1]} \quad e \quad \frac{\parallel}{[T, P_2]}$$

ii. O redex está em T

$$\mathbf{s} \frac{\parallel}{[(R, T'), P]} \quad \text{equivale a} \quad \frac{[P_1, P_2]}{P} \quad e \quad \frac{\parallel}{[R, P_1]} \quad e \quad \mathbf{s} \frac{\parallel}{[T', P_2]}$$

iii. O redex está em P

$$\begin{aligned}
&= \frac{[P_1, P_2]}{[P_1'', P_2'', P_1''', P_2''']} \\
&\quad \Pi_{10} \parallel \\
&\quad [P_1'', P_2'', P_2'] \\
&\quad \Pi_7 \parallel \\
&\quad [P', P_1', P_2'] \\
&\quad \Pi_4 \parallel \\
&\quad [P', P''] \\
&= \frac{\quad}{P} \quad \left. \vphantom{\frac{[P_1, P_2]}{[P_1'', P_2'', P_1''', P_2''']}} \right\} \Pi_1 \\
\\
&\quad \Pi_{11} \parallel \\
&\quad [R'', P_1'''] \\
&\quad \Pi_8 \parallel \\
&\quad \mathbf{s} \frac{[[R', P_1''], R''], P_1''']}{[(R', R''), P_1'', P_1''']} \\
&= \frac{\quad}{[R, P_1]} \quad \left. \vphantom{\frac{[[R', P_1''], R''], P_1''']}{[(R', R''), P_1'', P_1''']}} \right\} \Pi_2 \\
\\
&\quad \Pi_{12} \parallel \\
&\quad [T'', P_2'''] \\
&\quad \Pi_9 \parallel \\
&\quad \mathbf{s} \frac{[[T', P_2''], T''], P_2''']}{[(T', T''), P_2'', P_2''']} \\
&= \frac{\quad}{[T, P_2]} \quad \left. \vphantom{\frac{[[T', P_2''], T''], P_2''']}{[(T', T''), P_2'', P_2''']}} \right\} \Pi_3
\end{aligned}$$

v. $P = [(P', P''), U', U'']$ e

$$\mathbf{s} \frac{[[[(R, T), P', U'], P''], U'']]
{[(R, T), (P', P''), U', U'']}$$

Queremos mostrar que existem Π_1 , Π_2 e Π_3 tais que:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & [P_1, P_2] & & & & \\
& \parallel & \Pi_1 \parallel & & \Pi_2 \parallel & & \Pi_3 \parallel \\
[(R, T), P] & \text{equivale a} & [(P', P''), U', U''] & \text{e} & [R, P_1] & \text{e} & [T, P_2]
\end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [[[(R, T), P', U'], P''], U'']]| = |\text{occ} [(R, T), (P', P''), U', U'']]|$
mas $n' < n$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} [U_1, U_2] \\ \Pi_4 \parallel \\ U'' \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \parallel \\ [(R, T), P', U', U_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_6 \parallel \\ [P'', U_2] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ} [(R, T), P', U', U_1]| < |\text{occ} [((R, T), P', U'), P''], U''|]$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} [P'_1, P'_2] \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U', U_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_8 \parallel \\ [R, P'_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_9 \parallel \\ [T, P'_2] \end{array}$$

Agora podemos fazer $P_1 = P'_1$ e $P_2 = P'_2$ e construir Π_1 , Π_2 e Π_3 da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} = \frac{[P_1, P_2]}{[P'_1, P'_2]} \\ \Pi_7 \parallel \\ [P', U', U_1] \\ \Pi_6 \parallel \\ \text{s} \frac{([P', U', U_1], [P'', U_2])}{[([P', U', U_1], P''), U_2]} \\ \text{s} \frac{([P', U', U_1], [P'', U_2])}{[(P', P''), U', U_1, U_2]} \\ \Pi_4 \parallel \\ = \frac{[(P', P''), U', U'']}{P} \end{array} \right\} \Pi_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_8 \parallel \\ = \frac{[R, P'_1]}{[R, P_1]} \end{array} \right\} \Pi_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_9 \parallel \\ = \frac{[T, P'_2]}{[T, P_2]} \end{array} \right\} \Pi_3$$

□

Teorema 35 (Context Reduction). *Para todas as estruturas R e para todos os contextos $S\{\ \}$ tais que $S\{R\}$ é demonstrável em BV , existe uma estrutura U tal que, para todas as estruturas X , existem derivações:*

$$\begin{array}{ccc} [X, U] & & \\ \parallel_{BV} & & \parallel_{BV} \\ S\{X\} & e & [R, U] \end{array}$$

Demonstração. Todas as derivações da demonstração são feitas em BV . Por indução no tamanho de $S\{\circ\}$:

- Caso Base

$$|S\{\circ\}| = 0 \implies S\{X\} = X \implies \begin{array}{ccc} [X, U] & & X \\ \parallel & & \parallel \\ S\{X\} & & X \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{ccc} X & & \\ \parallel & & \\ X & & \end{array} \implies U = \circ$$

Logo:

$$\begin{array}{ccc} [X, U] & & X \\ \parallel & & \parallel \\ S\{X\} & e & [R, U] \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{ccc} X & & \\ \parallel & & \\ X & e & U \end{array}$$

- Casos Indutivos

1. $S = \langle S'\{\}; P \rangle, P \neq \circ$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \langle S'\{R\}; P \rangle & \text{equivale a} & S'\{R\} \end{array} \text{ e } \begin{array}{ccc} \Pi_1 \parallel & & \Pi_2 \parallel \\ S'\{R\} & e & P \end{array}$$

Logo podemos fazer a seguinte derivação:

$$\begin{array}{ccc} S'\{X\} & & \\ \Pi_2 \parallel & & \\ \langle S'\{X\}; P \rangle & & \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ } S'\{X\}| < |\text{occ } \langle S'\{X\}; P \rangle|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{ccc} [X, U] & & \\ \parallel & & \parallel \\ S'\{X\} & e & [R, U] \end{array}$$

2. $S\{\} = [S'\{\}, P]$, $P \neq \circ$ e $S'\{\}$ não é uma estrutura par própria.

Subcasos:

- $S'\{\circ\} = \circ$

Então nós temos:

$$S\{R\} \text{ equivale a } [S'\{R\}, P] \text{ equivale a } [R, P]$$

Fazendo $U = P$ temos então:

$$\begin{array}{ccc} [X, P] & & \\ \parallel & & \parallel \\ [X, P] & e & [R, P] \end{array}$$

- $S'\{\} = \langle S''\{\}; P' \rangle$, $P' \neq \circ$

Temos:

$$S\{R\} \text{ equivale a } [S'\{R\}, P] \text{ equivale a } [\langle S''\{R\}; P' \rangle, P]$$

Pelo teorema de Shallow Splitting, temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & \langle P_1; P_2 \rangle & & \\ & & \Pi_1 \parallel & & \Pi_2 \parallel & & \Pi_3 \parallel \\ \langle S''\{R\}, P' \rangle, P & \Longrightarrow & P & e & [S''\{R\}, P_1] & e & [P', P_2] \end{array}$$

Logo:

$$\begin{array}{c} [S''\{R\}, P_1] \\ \Pi_3 \parallel \\ \langle [S''\{R\}, P_1]; [P', P_2] \rangle \\ \text{q} \downarrow \\ \frac{\langle [S''\{R\}, P_1]; [P', P_2] \rangle}{[\langle S''\{R\}; P' \rangle, \langle P_1; P_2 \rangle]} \\ \Pi_1 \parallel \\ [\langle S''\{R\}; P' \rangle, P] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ } [S''\{\}, P_1]| < |\text{occ } S\{\}|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{ccc} [X, U] & & \\ \parallel & & \parallel \\ [S''\{X\}, P_1] & e & [R, U] \end{array}$$

Podemos proceder analogamente quando $S'\{\} = \langle P'; S''\{\} \rangle$.

- $S'\{\} = (S''\{\}, P')$, $P \neq \circ$

Temos que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ S\{R\} \end{array} \text{ equivale a } [S'\{R\}, P] \text{ equivale a } [(S''\{R\}, P'), P]$$

Pelo teroema de Shallow Splitting, temos:

$$[(S''\{R\}, P'), P] \implies \begin{array}{c} [P_1, P_2] \\ \Pi_1 \parallel \\ P \end{array} \text{ e } [S''\{R\}, P_1] \text{ e } \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ [P', P_2] \end{array}$$

Logo:

$$\begin{array}{c} [S''\{R\}, P_1] \\ \Pi_3 \parallel \\ \text{s } \frac{[(P', P_2), S''\{R\}], P_1}{[(S''\{R\}, P'), P_1, P_2]} \\ \Pi_1 \parallel \\ [(S''\{R\}, P'), P] \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ } [S''\{\}, P_1]| < |\text{occ } S\{\}|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{c} [X, U] \\ \parallel \\ [S''\{X\}, P_1] \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \parallel \\ [R, U] \end{array}$$

Podemos proceder analogamente quando $S'\{\} = (P'; S''\{\})$.

3. $S\{\} = (S'\{\}, P)$, $P \neq \circ$

Temos que:

$$\begin{array}{c} \parallel \\ (S'\{R\}, P) \end{array} \text{ equivale a } \begin{array}{c} \Pi_1 \parallel \\ S'\{R\} \end{array} \text{ e } \begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \\ P \end{array}$$

Logo:

$$\begin{array}{c} S'\{X\} \\ \Pi_2 \parallel \\ (S'\{X\}, P) \end{array}$$

Uma vez que $|\text{occ } S'\{\}| < |\text{occ } S\{\}|$, podemos aplicar a hipótese de indução e obter:

$$\begin{array}{ccc}
 [X, U] & & \\
 \parallel & & \\
 S'\{X\} & & \\
 \parallel & & \parallel \\
 (S'\{X\}, P) & e & [R, U]
 \end{array}$$

□

Corolário 36 (Splitting). *Para todas as estruturas R , T e para todos os contextos $S\{\}$:*

1. *Se $S\langle R; T \rangle$ é demonstrável em BV , então existem estruturas S_1 e S_2 tais que, para todas estrutura X , existe uma derivação:*

$$\begin{array}{ccc}
 [X, \langle S_1; S_2 \rangle] & & \\
 \parallel_{BV} & & \parallel_{BV} \quad \parallel_{BV} \\
 S\{X\} & e & [R, S_1] \quad e \quad T, S_2
 \end{array}$$

2. *Se $S(R, T)$ é demonstrável em BV , então existem estruturas S_1 e S_2 tais que, para todas estrutura X , existe uma derivação:*

$$\begin{array}{ccc}
 [X, S_1, S_2] & & \\
 \parallel_{BV} & & \parallel_{BV} \quad \parallel_{BV} \\
 S\{X\} & e & [R, S_1] \quad e \quad T, S_2
 \end{array}$$

Demonstração. Todas as derivações da demonstração são feitas em BV . Primeiramente aplicamos o teorema de *Context Reduction* e então aplicamos o teorema de *Shallow Splitting*.

1.

$$\Downarrow \\ S\langle R; T \rangle$$

Context Reduction

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} [U, X] & & \\ \Pi_1 \Downarrow & & \Pi_2 \Downarrow \\ S\{X\} & e & [\langle R; T \rangle, U] \end{array}$$

Shallow Splitting

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} [U, X] & \langle S_1; S_2 \rangle & & & \\ \Pi_1 \Downarrow & \Pi_3 \Downarrow & & \Pi_4 \Downarrow & \Pi_5 \Downarrow \\ S\{X\} & e & U & e & [R, S_1] & e & [T, S_2] \end{array}$$

Então nós combinamos Π_1 e Π_3 para obter Π_6 :

$$\begin{array}{ccc} [X, \langle S_1; S_2 \rangle] & & \\ \Pi_3 \Downarrow & & \\ [U, X] & & [X, \langle S_1; S_2 \rangle] \\ \Pi_1 \Downarrow & & \Pi_6 \Downarrow \\ S\{X\} & \text{equivalente a} & S\{X\} \end{array}$$

E com Π_4 , Π_5 e Π_6 temos o caso 1 demonstrado.

2.

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ S(R, T) \end{array}$$

Context Reduction

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} [X, U] \\ \Pi_1 \Downarrow \\ S\{X\} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \Downarrow \\ [(R, T), U] \end{array}$$

Shallow Splitting

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} [X, U] \\ \Pi_1 \Downarrow \\ S\{X\} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} [S_1, S_2] \\ \Pi_3 \Downarrow \\ U \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_4 \Downarrow \\ [R, S_1] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \Pi_5 \Downarrow \\ [T, S_2] \end{array}$$

Então nós combinamos Π_1 e Π_3 para obter Π_6 :

$$\begin{array}{c} [X, S_1, S_2] \\ \Pi_3 \Downarrow \\ [X, U] \\ \Pi_1 \Downarrow \\ S\{X\} \end{array} \quad \text{equivale a} \quad \begin{array}{c} [X, S_1, S_2] \\ \Pi_6 \Downarrow \\ S\{X\} \end{array}$$

E com Π_4 , Π_5 e Π_6 temos o caso 2 demonstrado.

□

3.1.5.2 Eliminação da regra *Cut*

Antes de demonstrar que a regra de *Cut* $\text{ai}\uparrow$ é admissível, é preciso introduzir uma proposição importante:

$$\begin{array}{c} S[R, T] \\ \Downarrow \{q, s\} \end{array}$$

Proposição 37. Para todo contexto $S\{\}$ e estruturas R, T existe uma derivação $[S\{R\}, T]$.

Teorema 38. A regra $\text{ai}\uparrow$ é admissível em BV.

Demonstração. Considere a demonstração

$$\text{ai}\uparrow \frac{\prod_{\text{BV}} S(a, \bar{a})}{S\{\circ\}}$$

Pelo corolário 36, existem S_1 e S_2 tais que há derivações:

$$\begin{array}{ccc} [S_1, S_2] & & \\ \prod_{\text{BV}} & \Pi_1 \prod_{\text{BV}} & \Pi_2 \prod_{\text{BV}} \\ S\{\circ\} , & [a, S_1] & \text{e} \quad [\bar{a}, S_2] \end{array}$$

Considere a demonstração Π_1 . Deve haver um contexto $S'_1\{\}$ tal que $S_1 = S'_1\{\bar{a}\}$ e

$$\begin{array}{c} \prod_{\text{BV}} \\ \text{ai}\downarrow \frac{S''\{\circ\}}{S''[a, \bar{a}]} \\ \Pi_1 \prod_{\text{BV}} \\ [a, S'_1\{\bar{a}\}] \end{array}$$

para algum $S''\{\}$, onde nós destacamos a instância de $\text{ai}\downarrow$ na qual a ocorrência de a interage com a ocorrência de \bar{a} que vem de $S'_1\{\bar{a}\}$. Podemos substituir cada ocorrência de a e \bar{a} em Π_1 por \circ , e obtemos em BV uma demonstração de $S'_1\{\circ\}$. Analogamente, podemos transformar Π_2 em uma demonstração em BV de $S'_2\{\circ\}$ tal que $S_2 = S'_2\{a\}$. Podemos construir então a seguinte demonstração:

$$\begin{array}{c} \prod_{\text{BV}} \\ S'_1\{\circ\} \\ \prod_{\text{BV}} \\ \text{ai}\downarrow \frac{S'_1\{S'_2\{\circ\}\}}{S'_1\{S'_2[a, \bar{a}]\}} \\ \prod_{\text{BV}} \\ [S'_1\{\bar{a}\}, S'_2\{a\}] \\ \prod_{\text{BV}} \\ S\{\circ\} \end{array}$$

onde usamos duas vezes a proposição 37. Podemos repetir indutivamente este argumento, começando do topo, para qualquer demonstração em $\text{BV} \cup \{\text{ai}\uparrow\}$, eliminando todas as instâncias de $\text{ai}\uparrow$ uma a uma.

□

3.2 Reduzindo o não determinismo no cálculo das estruturas

Uma das possíveis abordagens para reduzir o não-determinismo do cálculo das estruturas é limitar as possibilidades de aplicação de regras durante a construção de uma demonstração. Em [Kah06] esta abordagem é tomada, e um sistema equivalente ao sistema BV é proposto, mas com regras reprojatadas de forma a diminuir o não-determinismo de sua aplicação. A solução proposta realmente diminui o não-determinismo, mas é uma abordagem basicamente operacional. Esta seção apresenta a abordagem proposta e os principais resultados obtidos.

A idéia central é reprojatar as regras *switch* e *seq* de tal forma que sua aplicação contribua para encurtar o tamanho da demonstração. Frequentemente, regras de inferência podem ser aplicadas de muitas formas diferentes. Entretanto, apenas algumas dessas aplicações podem conduzir a uma demonstração. Por exemplo, para a estrutura $[(\bar{a}, \bar{b}), a, b]$ existem doze formas distintas de se aplicar, de baixo para uma instância de *switch*, duas delas sendo:

$$s \frac{([\bar{a}, a, b], \bar{b})}{[(\bar{a}, \bar{b}), a, b]} \quad \text{e} \quad s \frac{([\bar{a}, a], \bar{b}), b}{[(\bar{a}, \bar{b}), a, b]}$$

A primeira instância não leva a uma demonstração, enquanto a segunda pode levar. De fato, das doze aplicações possíveis, apenas duas podem levar a uma demonstração.

Definição 39. Dada uma estrutura S , a notação $\text{at } S$ indica o conjunto de todos os átomos que aparecem em S .

Proposição 40. Se uma estrutura R tem uma demonstração em BV então, para cada átomo a que aparece em R , há um átomo \bar{a} em R tal que $a \downarrow_R \bar{a}$.

Definição 41. Seja a regra *interaction switch*:

$$\text{is} \frac{S([R, W], T)}{S[(R, T), W]}$$

onde $\text{at } \bar{W} \cap \text{at } R \neq \emptyset$

O objetivo do *interaction switch* é evitar que apliquemos o *switch* desnecessariamente, uma vez que só faz sentido colocar as estruturas R e W em par se elas tiverem átomos opostos, de forma a facilitar o futuro uso de uma regra $\text{ai}\downarrow$.

Definição 42. Seja o sistema BV com *interaction switch*, ou sistema BVs, o sistema $\{\circ \downarrow, \text{ai}\downarrow, \text{is}, \text{q}\downarrow\}$. Seja o sistema BV com *lazy interaction switch*, ou sistema BVsl, o sistema resultante da substituição da regra *is* em BVs pela sua instância, chamada de *lazy interaction switch*, ou *lis*, onde a estrutura W não é um par próprio.

É possível demonstrar que:

Teorema 43. Os sistemas BV, BVsl e BVs são fortemente equivalentes.

A demonstração encontra-se em [Kah06].

À primeira vista, as regras *switch* e *seq* parecem ter naturezas diferentes devido aos operadores diferentes sobre os quais elas trabalham. Entretanto, uma inspeção mais cuidadosa mostra que ambas as regras lidam com o contexto das estruturas sobre as quais se aplicam: enquanto a regra *switch* reduz as interações nas estruturas que envolvem uma estrutura copar (numa visão de baixo para cima), a regra *seq* faz a mesma coisa com as estruturas envolvendo uma estrutura *seq*. Nesse sentido, podem-se estender os conceitos de redefinição da regra *switch* para a regra *seq*.

Definição 44. Seja o sistema *lazy seq V*, ou *QVI*, o sistema que consiste das seguintes regras

$$q_1 \downarrow \frac{S\langle [R, T]; [U, V] \rangle}{S[\langle R; U \rangle, \langle T; V \rangle]} \quad q_2 \downarrow \frac{S\langle R; T \rangle}{S[R, T]} \quad lq_3 \downarrow \frac{S\langle [R, W]; T \rangle}{S[W, \langle R; T \rangle]} \quad lq_3 \downarrow \frac{S\langle R; [T, W] \rangle}{S[W, \langle R; T \rangle]}$$

onde W não é uma estrutura par própria, e nenhuma das estruturas R, T, U, V ou W é a unidade \circ .

Proposição 45. Os sistemas *QVI* e $\{q\downarrow\}$ são equivalentes.

Proposição 46. Seja o sistema $\mathcal{S} \in \{BV, BVs, BVsl\}$. O sistema resultante da substituição da regra $q\downarrow$ em *mathscrS* pelo sistema *QVI* é equivalente ao sistema *BV*.

Definição 47. As seguintes regras são chamadas de *interaction seq rule 1*, *lazy interaction seq rule 3* e *lazy interaction seq rule 4*, respectivamente:

$$iq_1 \downarrow \frac{S\langle [R, T]; [U, V] \rangle}{S[\langle R; U \rangle, \langle T; V \rangle]} \quad liq_3 \downarrow \frac{S\langle [R, W]; T \rangle}{S[W, \langle R; T \rangle]} \quad liq_4 \downarrow \frac{S\langle R; [T, W] \rangle}{S[W, \langle R; T \rangle]}$$

onde em $iq_1 \downarrow$ temos que $at \bar{R} \cap at T \neq \emptyset$ e $at \bar{U} \cap at V \neq \emptyset$; em $liq_3 \downarrow$ e em $liq_4 \downarrow$ temos que $at \bar{R} \cap at W \neq \emptyset$ e W não é uma estrutura par própria. O sistema resultante da substituição da regra *seq* no sistema *BVsl* pelas regras $iq_1 \downarrow, q_2 \downarrow, liq_3 \downarrow$ e $liq_4 \downarrow$ é chamado de *interaction BV*, ou *BVi*.

Teorema 48. Os sistemas *BV* e *BVi* são equivalentes.

Veja [Kah06] para a demonstração do teorema.

Na aplicação de regras *switch* e *seq* de baixo para cima durante a construção de uma demonstração, além de promover a interação entre alguns átomos, a interação entre alguns átomos pode ser quebrada. Entretanto, se a estrutura a ser demonstrada consiste de pares de átomos distintos, quebrar a interação entre átomos duais (numa visão de baixo para cima), conduz a uma estrutura não-demonstrável. As definições seguintes introduzem uma nova restrição sobre as regras de inferência, que explora esta observação e permite que apenas instâncias “cautelosas” das regras de inferência, ou seja, que não quebram essas interações entre átomos duais.

Definição 49. Seja *pruned switch* a regra ps abaixo, onde $\text{at } T \cap \text{at } W = \emptyset$, e seja *pruned seq* a regra pq ↓ abaixo, onde $\text{at } \bar{T} \cap \text{at } U = \emptyset$ e $\text{at } \bar{R} \cap \text{at } V = \emptyset$:

$$\text{ps } \frac{S(\langle R, W \rangle, T)}{S(\langle R, T \rangle, W)} \quad \text{pq } \downarrow \frac{\langle \langle R, T \rangle; [U, V] \rangle}{S(\langle R; U \rangle, \langle T; V \rangle)}$$

Seja *pruned BV*, ou sistema BVp, o sistema $\{\circ \downarrow, \text{ai} \downarrow, \text{ps}, \text{pq} \downarrow\}$.

Proposição 50. Seja P uma estrutura em BV que consista de pares de átomos distintos e π uma demonstração de P em BVi. Em π todas as instâncias da regra s são instâncias da regra ps; e todas as instâncias das regras $\text{iq}_1 \downarrow$, $q_2 \downarrow$, $\text{liq}_3 \downarrow$ e $\text{liq}_4 \downarrow$ são instâncias da regra pq ↓.

A demonstração encontra-se em [Kah06].

Em outras palavras, a proposição 50 diz que, em uma demonstração, todas as instâncias de switch e seq devem obedecer às restrições do sistema BVp. Em termos práticos, isso significa que, ao implementar o sistema BVi, deve-se checar, quando da aplicação de uma regra, se ela satisfaz BVp. Se não satisfizer, ela não deve ser aplicada, pois não levará a uma demonstração.

3.2.1 Análise do estado da arte

A solução apresentada na seção 3.2 realmente diminui o não determinismo do cálculo das estruturas. A abordagem consiste em checar, a cada passo na construção de uma demonstração, se a aplicação da regra pode ser realizada sem atingir um estágio do qual não se pode sair. Trata-se de uma solução válida, mas que apresenta as seguintes restrições:

1. É uma solução *operacional*. Durante a implementação do sistema, uma série de checagens é necessária para verificar se as regras podem ser aplicadas ou não.
2. Não emprega o conceito de *demonstração uniforme*, no sentido de que não apresenta uma estratégia de demonstração *teórica*.

Uma questão que permanece em aberto é: *seria possível resolver o problema do não-determinismo sem recorrer a uma solução operacional?* É esta a principal contribuição deste trabalho: resultados teóricos que levam a uma tentativa de estratégia não operacional para a implementação de um fragmento do sistema FBV. A solução é apresentada no Capítulo 4.

Capítulo 4

Aspectos computacionais do cálculo das estruturas

4.1 Objetivo

É interessante ter a liberdade e expressividade do cálculo das estruturas. Entretanto, quando se está tentando construir uma demonstração, mais liberdade significa um espaço de busca maior. É desejável restringir a busca caso estejamos procurando por implementações eficientes dos sistemas dedutivos. Teoremas de *splitting* representam um papel chave para reduzir o não-determinismo, uma vez que eles proporcionam um balanço entre tamanho de demonstrações e largura do espaço de busca, e essa proporção pode ser variada conforme se desejar.

Quanto ao cálculo das estruturas, estamos hoje na mesma situação em que se encontrava o cálculo de seqüentes antes que Dale Miller introduzisse a noção de demonstrabilidade uniforme, que é uma maneira de casar demonstrabilidade e a demonstrações dirigidas a objetivo¹, necessárias em implementações.

Nesse momento surge a pergunta: *qual seria uma boa noção de uma demonstração dirigida a objetivo no caso mais geral do cálculo das estruturas?* Esta pergunta poderia, a princípio, ser respondida de várias maneiras, e as noções a serem desenvolvidas podem ou não ser dependentes de lógicas particulares. A calibração desta dependência pode tornar o projeto mais específico ou mais abrangente.

Nesse sentido, o objetivo principal do trabalho é:

Discutir caminhos possíveis para uma estratégia de busca por demonstrações em cálculo das estruturas adequada para a implementação computacional. Esta estratégia deve ser, de preferência, teórica e não puramente operacional.

Ou seja, desejamos aprofundar o conhecimento existente sobre o cálculo das estruturas no sentido de contribuir para, no futuro, conseguir um resultado similar ao obtido através conceito de demonstrações uniformes para o cálculo de seqüentes.

¹Em inglês: *goal directed proofs*

4.2 Abordagem

Para começar, é importante notar que o desenvolvimento de um conceito de demonstrações uniformes para cálculo das estruturas esbarra nos seguintes problemas:

1. O comportamento operacional do cálculo das estruturas está longe de ser claro.
2. Existe um alto grau de não determinismo no cálculo das estruturas.

Para resolver estes problemas, estudamos uma gama abordagens possíveis, que serão expostas a seguir.

4.2.1 O problema do comportamento operacional

Uma primeira idéia que estudamos está relacionada à suposição de que a noção de demonstrações uniformes em cálculo das estruturas se basearia principalmente na relação entre implicação (\Rightarrow) e validade (\vdash). Esta noção pode ser melhor entendida com o exemplo de cláusulas de Horn e Prolog. Em Prolog, uma fórmula como

$$B_1 \wedge \dots \wedge B_h \Longrightarrow H$$

especifica o comportamento de um seqüente da forma

$$B_1, \dots, B_h \vdash H$$

quando este seqüente é demonstrado seguindo uma demonstração uniforme. O que é importante ressaltar é que a fórmula já indica a forma da demonstração uniforme, devido à conexão clara entre implicação e validade para este caso. A construção de demonstrações para cláusulas de Horn faz uso constante desta conexão. Esta analogia pode ser estendida para cláusulas de Harrop e para a lógica linear clássica, mas não para a lógica clássica completa.

O problema com cálculo das estruturas é que não há analogia entre implicação e validade. Além disso:

1. a princípio, o cálculo das estruturas não apresenta implicação explícita;
2. usualmente, a negação não é definida explicitamente;
3. o formalismo normalmente é usado para lógicas clássicas;
4. existe a *deep inference*.

Os problemas 1, 2 e 3 podem ser resolvidos movendo o foco para linguagens adequadas. O problema 4, entretanto, é crucial. Vamos analisar cada problema com um pouco mais de cuidado:

- Problemas 1 e 2.

Dada a estrutura:

$$[a, b, \bar{c}, \bar{d}]$$

ela representa $(c, d) \implies [a, b]$ ou $(\bar{a}, \bar{b}) \implies [\bar{c}, \bar{d}]$?

O Problema 1 pode ser resolvido ao se adotar um símbolo explícito para a implicação, enquanto o Problema 2 ao se estabelecer que existe um símbolo de negação na linguagem, tal que $\neg a$ é negativo enquanto a é positivo. Com isso, há uma consequência importante: temos que lidar com “contextos negativos”. Isso quer dizer que dentro de negações e dentro de premissas de implicações teremos que usar as regras de inferências duais às regras normais (positivas). Isto dobraria o número de regras dos sistemas dedutivos.

Note que o Problema 2 é separado do Problema 1. De fato, analisando o Problema 2, poderíamos estipular que a linguagem fica restrita de forma que o símbolo de negação só é permitido sobre átomos, implicando que só trabalhem com fórmulas na forma normal. Trata-se de uma solução bastante operacional.

- Problema 3.

Claramente, deveríamos esperar que lógicas não-clássicas tenham maior propensão a apresentar demonstrações uniformes em cálculo das estruturas do que lógicas clássicas. Depois de um artigo sobre lógica intuicionista em cálculo das estruturas [Tiu06a], outros para outras lógicas não-clássicas estão sendo lançados. Mas este não é um problema que representa um grande obstáculo.

- Problema 4.

Este é um problema grave. Por exemplo, como visto na seção 2.5.1, dada uma fórmula de Harrop, pode-se vê-la como um programa: sabemos como os conectivos se comportam e, crucialmente, sabemos que o programa se desenvolve de fora para dentro da fórmula. Em outras palavras, o aninhamento de fórmulas tem um papel direto no que se refere à ordem de execução. Claramente, se usamos *deep inference*, este não é mais o caso.

Considere que algumas interpretações operacionais de fórmulas dependam da estrutura de ramificação do cálculo de seqüentes. Por exemplo, módulos são mantidos em separados em ramos diferentes de uma árvore de cálculo de seqüentes. Se adotássemos um sistema de cálculo das estruturas que contivesse a regra *medial*², teríamos que

²A regra *medial* não está presente no sistema BV. É uma regra da lógica clássica, proposta por Alwen e Kai[Brü06]:

$$\text{m} \frac{S[(A, C), (B, D)]}{S([A, B], [C, D])}$$

cuja presença permite que a aplicação da regra *contraction* possa ser restrita a átomos - um resultado notável, pois é a primeira vez que se vê um sistema com tal regra definida localmente.

módulos diferentes (ou seja, premissas de diferentes implicações em uma fórmula) seriam capazes de interagir com a demonstração, o que é indesejável³. E isto contrasta com a noção usual de demonstrações uniformes.

4.2.2 O problema do não-determinismo

Como já foi visto, demonstrações uniformes propiciam menor grau de não-determinismo, algo realmente desejável em cálculo das estruturas. Uma abordagem para o problema poderia ser partir de demonstrações uniformes em cálculo de seqüentes e tentar entender como elas poderiam nos ajudar a reduzir o não-determinismo em cálculo das estruturas.

Existe uma certa dualidade de jogos em *deep inference*. No cálculo de seqüentes, regras à direita e à esquerda se comportam como jogador e oponente, respectivamente, e o jogo prossegue com cada um se movendo em turnos. Claramente, apenas conseguiríamos este tipo de comportamento em cálculo das estruturas se adotássemos uma das seguintes “soluções”: implicação explícita, polaridades ou contextos positivos e negativos. Esta é uma idéia que poderia ser explorada.

Entretanto, já temos uma fonte de jogos em cálculo das estruturas, num sentido um tanto mais inesperado que o citado acima. Este seria o teorema de *splitting*. Relembrando, o teorema de *splitting* pode ser enunciado como:

$$\prod_{\text{BV}} S(R, T) \text{ equivale a } [X, K_R, K_T] \prod_{\text{BV}} S\{X\} \text{ e } \prod_{\text{BV}} [R, K_R] \text{ e } \prod_{\text{BV}} [T, K_T]$$

onde X é uma estrutura qualquer.

Utilizando a mesma metáfora acima, poderíamos dizer que o jogador escolhe $S(R, T)$, ou seja, o contexto e a conjunção a ser dividida, e o oponente terá que achar os *killers* K_R e K_T . O jogo então prossegue sobre as novas estruturas a serem demonstradas $[R, K_R]$ e $[T, K_T]$.

Então, uma possível abordagem para buscar demonstrações uniformes em cálculo das estruturas seria entender como a noção de jogos se relaciona com demonstrações uniformes em cálculo de seqüentes e trazer esta noção para o cálculo das estruturas.

O teorema de *splitting* garante demonstrações para qualquer $S(R, T)$, entretanto, a maneira como S , R e T são escolhidos não é elucidada, ela é completamente arbitrária. Então, a questão que surge é: como escolhê-los?

Quanto a uma outra fonte de não-determinismo, a aplicação de regras, o trabalho [Kah06] trata do assunto, mas de uma maneira completamente operacional. Tal trabalho já foi discutido na Seção 3.2.

³Essa situação corresponde ao problema de *scope extrusion*, discutido na Seção 2.5

4.3 A tentativa de solução proposta

De acordo com os estudos realizados, dentre os caminhos estudados o que apresenta maior probabilidade de produzir frutos segue mais ou menos a linha do teorema de *splitting*. Dessa forma, baseamo-nos em resultados teóricos que apresentaremos a seguir para conjecturar que eles levarão a uma estratégia de demonstração uniforme para cálculo das estruturas. Entretanto, no atual estágio de desenvolvimento da pesquisa, podemos dizer que este trabalho apresenta uma *tentativa de estratégia*.

Dizemos *tentativa de estratégia* porque, apesar de se basear em resultados teóricos apresentados formalmente e de ter funcionado perfeitamente em todos os testes que executamos (o Capítulo 5 apresenta a implementação computacional da tentativa de estratégia), a demonstração de sua correção ainda está em curso (apesar de a maior parte do trabalho neste sentido já estar pronta).

Antes de aprofundar em resultados teóricos mais precisos, abaixo damos uma idéia geral de como a tentativa de estratégia lida com a busca por demonstrações uniformes em FBV com pares de átomos dois a dois distintos:

1. Em vez de escolhermos um contexto $S(R, T)$ a ser dividido, escolheríamos um átomo a em $S\{a\}$ a ser eliminado. No caso trivial, a não estaria em uma estrutura copar, nos casos mais complicados, teríamos $S(R, T)$, onde $R = S'\{a\}$. A escolha de quem seria o átomo a a ser eliminado seria feita baseada no conceito de *número de incoerência*, que será introduzido mais adiante.
2. Uma vez escolhido o átomo a a ser eliminado, determinaríamos o seu *killer*, que seria sempre \bar{a} . Por isso a estratégia seria aplicável somente a estruturas com pares de átomos distintos dois a dois, ou seja, só existe um átomo com o mesmo “nome”.
3. Escolhido o átomo e o seu *killer*, procederíamos aplicando regras *switch* até que ambos se encontrassem em uma estrutura par. Então poderíamos aplicar a regra $ai\downarrow$ para eliminá-los.
4. O processo seguiria até que a estrutura fosse demonstrada, ou até que atingíssemos um estágio sobre o qual não fosse possível avançar, indicando que a estrutura não é demonstrável.

É interessante notar que, se a estratégia for demonstrada correta, ela apresentará as seguintes características importantes:

1. Ela funcionaria para o sistema FBV, restrita a estruturas com pares de átomos distintos dois a dois, ou seja, só poderia haver uma única ocorrência de cada átomo.
2. Ela não exigiria *backtracking* na construção de uma demonstração: uma vez tomado um passo na derivação, não seria preciso reconsiderá-lo.

3. Se um estágio fosse atingido sobre o qual não seria mais possível avançar, é porque a estrutura inicial não era demonstrável.

Estamos prontos para enunciar os resultados principais desta dissertação. Nesse ponto, é importante ressaltar que tais resultados são *inéditos* e constituem em um avanço na busca de um conceito de demonstrações uniformes em cálculo das estruturas. Ainda muito deve ser feito, uma vez que nossos resultados estão restritos a um fragmento pequeno do sistema BV. Mas é o *primeiro* resultado teórico obtido na área. A seção 4.3.1 apresenta conceitos e definições necessárias, e a tentativa de estratégia é formalmente apresentada e explicada em detalhes na seção 4.3.2.

4.3.1 Resultados fundamentais e definições

Vamos começar com um teorema que nos dá condições necessárias para que uma estrutura seja demonstrável em FBV. Em seguida, vamos introduzir o conceito fundamental para a tentativa de estratégia proposta: *número de incoerência*.

4.3.1.1 Condições necessárias para demonstrabilidade

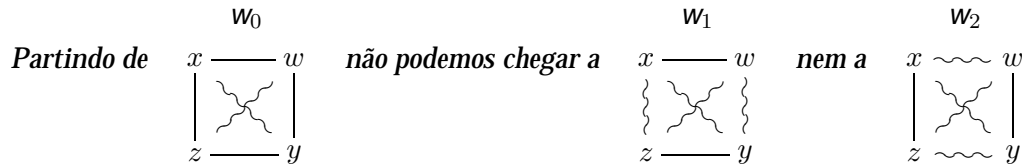
Vamos começar com um lema necessário:

Lema 51 (Propriedade X). *Seja uma estrutura S da forma $S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]$. Não existem derivações Π_1 e Π_2 em FBV tais que:*

$$\begin{array}{ccc} S'(P'[X'\{x\}, W'\{w\}], Q'[Y'\{y\}, Z'\{z\}]) & S'(P'[X'\{x\}, Z'\{z\}], Q'[Y'\{y\}, W'\{w\}]) \\ \Pi_1 \parallel \text{FBV} & \Pi_2 \parallel \text{FBV} \\ S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})] & S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})] \end{array}$$

Equivalentemente, podemos enunciar o lema como:

Uma subrede de interação da forma w_0 não pode ser transformada em uma subrede de interação da forma w_1 ou em uma subrede de interação da forma w_2 , via regras de inferência de FBV durante a construção de uma demonstração (de baixo para cima):



Demonstração. Sabemos que em FBV o número de aplicações de regras de inferência sobre uma estrutura S_1 , demonstrável ou não, é finito. Seja $n(S_1) = |\rho|$ onde $\rho \in \{\circ, \downarrow, \text{ai}\downarrow, \text{s}\}$ são todas as instâncias de regras de inferência aplicáveis em FBV tais que:

$$\rho \frac{S_2}{S_1}$$

Temos que, necessariamente, $n(S_2) < n(S_1)$

Portanto, vamos utilizar este fato para demonstrar o lema por indução no número de possibilidades de aplicações de regras $n(S)$.

Casos base:

1. $P\{\circ\} = \circ$

Uma possibilidade é:

$$S \frac{S([X\{x\}, Q(Z\{z\}, W\{w\})], Y\{y\})}{S[(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}$$

Mas, com isso, $y \uparrow z$ (o que vai contra a criação da rede w_1) e $y \uparrow w$ (o que vai contra a criação a rede w_2). Dado que uma vez que criamos uma relação \uparrow de baixo para cima em uma demonstração ela não pode mais ser desfeita, então não poderemos criar as desejadas w_1 ou w_2 .

A outra possibilidade é:

$$S \frac{S([Y\{y\}, Q(Z\{z\}, W\{w\})], X\{x\})}{S[(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}$$

Mas, com isso, $x \uparrow w$ (o que vai contra a criação da rede w_1) e $x \uparrow z$ (o que vai contra a criação da rede w_2). Dado que uma vez que criamos uma relação \uparrow de baixo para cima em uma demonstração ela não pode mais ser desfeita, então não poderemos criar as desejadas w_1 ou w_2 .

2. $Q\{\circ\} = \circ$

Análogo ao caso anterior.

3. Aplica-se uma instância de $\text{ai}\downarrow$ sobre um ocorrência de átomo x , y , z ou w e seu respectivo dual.

Neste caso o átomo em questão não figura mais na teia de interação da estrutura e, portanto, claramente as subredes w_1 e w_2 não podem ser atingidas.

Casos indutivos:

Vamos argumentar baseados na última aplicação de regra ρ sobre a estrutura $S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]$:

$$\rho \frac{S^*}{S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}$$

Nos concentraremos nos casos em que ρ é não-trivial.

1. $\rho = \text{ai}\downarrow$

a) O redex está em $X\{ \}$

$$\text{ai} \downarrow \frac{S[P(X^*\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}{S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}$$

Na estrutura do contractum ainda temos a subrede de interação w_0 , porém o número de possibilidades de aplicação de regras agora é menor. Podemos, então, aplicar a hipótese de indução.

b) O redex está em $Y\{ \}$, $Z\{ \}$, $W\{ \}$, $P\{ \}$, $Q\{ \}$ ou $S\{ \}$

Análogos ao caso anterior.

2. $\rho = s$

a) O redex está em $X\{ \}$

$$s \frac{S[P(X^*\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}{S[P(X\{x\}, Y\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]}$$

Na estrutura do contractum ainda temos a subrede de interação w_0 , porém o número de possibilidades de aplicação de regras agora é menor. Podemos, então, aplicar a hipótese de indução.

b) O redex está em $Y\{ \}$, $Z\{ \}$, $W\{ \}$, $P\{ \}$, $Q\{ \}$ ou $S\{ \}$

Análogos ao caso anterior.

c) O redex envolve $P(X\{x\}, Y\{y\})$ e $Q(Z\{z\}, W\{w\})$

Sabemos que $P\{\circ\} \neq \circ \neq Q\{\circ\}$, pois senão teríamos o caso base.

Vamos analisar as possibilidades para $P(X\{x\}, Y\{y\})$:

i. $P(X\{x\}, Y\{y\}) = [(X\{x\}, Y\{y\}), P_1]$

Mas então a estrutura seria da forma $S[(X\{x\}, Y\{y\}), P_1, Q(Z\{z\}, W\{w\})]$, que é o equivalente a um dos casos base.

ii. $P(X\{x\}, Y\{y\}) = (X\{x\}, Y\{y\}, P_1)$

Mas então podemos chamar $Y''\{y\} = (Y\{y\}, P_1)$ e temos que a estrutura é da forma $S[(X\{x\}, Y''\{y\}), Q(Z\{z\}, W\{w\})]$, que é o equivalente a um dos casos base.

iii. $P(X\{x\}, Y\{y\}) = ([P''(X\{x\}, Y\{y\}), P_2], P_1)$

As possibilidades para $Q(Z\{z\}, W\{w\})$ são análogas.

Portanto, o único caso a ser analisado é o em que

$$P(X\{x\}, Y\{y\}) = ([P''(X\{x\}, Y\{y\}), P_2], P_1) \text{ e}$$

$$Q(Z\{z\}, W\{w\}) = ([Q''(Z\{z\}, W\{w\}), Q_2], Q_1).$$

$$\text{Façamos } P''' = [P''(X\{x\}, Y\{y\}), P_2] \text{ e}$$

$$Q''' = [Q''(Z\{z\}, W\{w\}), Q_2].$$

As possibilidades de aplicação da regra switch sobre a estrutura copar (P''', P_1) :

$$s \frac{S([P''', (Q''', Q_1)], P_1)}{S[(P''', P_1), (Q''', Q_1)]}$$

Na estrutura do contractum ainda temos a subrede de interação w_0 , porém o número de possibilidades de aplicação de regras agora é menor. Podemos, então, aplicar a hipótese de indução.

$$s \frac{S([P_1, (Q''', Q_1)], P''')}{S[(P''', P_1), (Q''', Q_1)]}$$

Mas, com isso, $x \uparrow w$ e $y \uparrow z$ (o que vai contra a criação da rede w_1) e $x \uparrow z$ e $y \uparrow w$ (o que vai contra a criação da rede w_2). Dado que uma vez que criamos uma relação \uparrow de baixo para cima em uma demonstração ela não pode mais ser desfeita, então não poderemos criar as desejadas w_1 ou w_2 .

As possibilidades de aplicação da regra switch sobre a estrutura copar (Q''', Q_1) são análogas.

□

Agora podemos enunciar o teorema que nos fornece condições necessárias para uma estrutural ser demonstrável em FBV.

Teorema 52 (Condições necessárias para demonstrabilidade). *Se uma estrutura S é demonstrável em FBV, então:*

1. *Condição C_1*

$$\exists f : \text{occ } S \rightarrow \text{occ } S. f(a) = \bar{a} \wedge (a \downarrow \bar{a}) \text{ em } S$$

2. *Condição C_2*

$$\forall a \in \text{occ } S. \exists q \in \text{occ } S. S[S'(A\{a\}, Q\{q\}), S''(A'\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{q}\})]$$

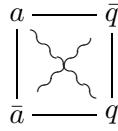
onde $S\{\}, S'\{\}, S''\{\}, A\{\}, Q\{\}, A'\{\}, Q'\{\}$ são contextos, possivelmente vazios.

Observação 53. De agora em diante, consideraremos $\bar{a} \equiv f(a)$ para todo $a \in \text{occ } S$, considerando que a negação em BV é involutiva ($\bar{\bar{a}} = a$) e que, se existe mais de uma ocorrência de um átomo a em S , elas podem ser diferenciadas através do uso de índices.

Observação 54. O Teorema 52 é equivalente a $S \stackrel{\text{FBV}}{\parallel} \implies C_1 \wedge C_2$

Observação 55. A condição C_2 é equivalente a:

$$\exists a, \bar{a}, q, \bar{q} \in \text{occ } S.$$



Demonstração. O contrapositivo do teorema diz que $\neg C_1 \vee \neg C_2 \implies \neg \left[\prod_S^{\text{FBV}} \right]$.

- $\neg C_1 \implies \neg \left[\prod_S^{\text{FBV}} \right]$

A demonstração segue diretamente das regras do sistema FBV. Numa visão de baixo para cima, nenhuma aplicação de regra de inferência pode criar uma relação \downarrow entre dois átomos. Observe na figura 52 que as relações \uparrow são sempre mantidas do contractum para o redex, e que as relações \downarrow do contractum ou são mantidas ou convertidas em relações \uparrow . Em outras palavras, relações \downarrow jamais são criadas de baixo para cima em uma demonstração.

Regra	Antes da aplicação	\downarrow mantidas	\downarrow transformadas em \uparrow
$\circ \downarrow \frac{-}{\circ}$	-	-	-
$\text{ai} \downarrow \frac{S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]}$	$a \downarrow a$	-	$a - a$
$\text{S} \frac{S([R, T], R')}{S[(R, R'), T]}$	$R \downarrow T, R' \downarrow T, R \uparrow R'$	$R \downarrow T$	$R' \uparrow T$

Figura 4.1: Regras de inferência não criam relações \downarrow quando vistas de baixo para cima.

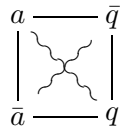
Portanto, se existe um átomo $a \in \text{occ } S$ para o qual não exista um $\bar{a} \in \text{occ } S$ tal que $a \downarrow \bar{a}$, nunca será possível criar, via regras de inferência, uma relação \downarrow entre estes átomos. Levando em conta que toda estrutura demonstrável deve cancelar seus átomos (relacionados por \downarrow) via instâncias da regra $\text{ai} \downarrow$, a nunca poderá ser cancelado com \bar{a} e S não é, portanto, demonstrável.

- $\neg C_2 \implies \neg \left[\prod_S^{\text{FBV}} \right]$

Se nós temos $\neg C_2$, então a estrutura S é da forma:

$$S[S'(A\{a\}, Q\{q\}), S''(A'\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{q}\})]$$

Note que a estrutura possui uma subrede de interação da forma:



Se a estrutura for demonstrável, então uma hora necessariamente deve haver uma aplicação de regra:

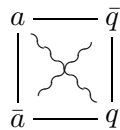
$$\text{ai} \downarrow \frac{S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]}$$

, onde podemos chamar $[a, \bar{a}] = R$. (O caso em que desejássemos argumentar baseados em q e \bar{q} seria análogo.)

Mas sabemos que, dada uma estrutura $S\{R\}$ e duas ocorrências de átomos a em $S\{\}$ e b em R , se $a \triangleleft b$ (respectivamente, $a \triangleright b$, $a \downarrow b$, $a \uparrow b$) então $a \triangleleft c$ (respectivamente, $a \triangleright c$, $a \downarrow c$, $a \uparrow c$) para todas as ocorrências de átomos c em R .

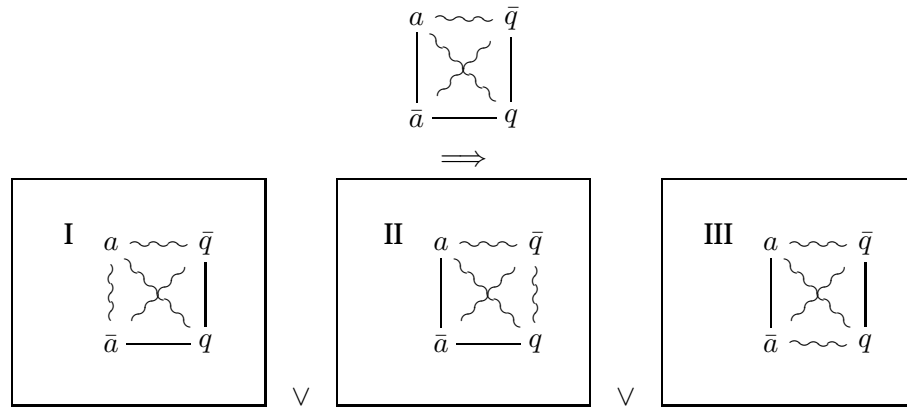
Logo, se a estrutura for demonstrável, em um dado ponto da demonstração a e \bar{a} devem manter a mesma relação estrutural com *todas* as ocorrências de átomos em S , em particular com q e com \bar{q} .

Vamos nos concentrar na subrede de interação:

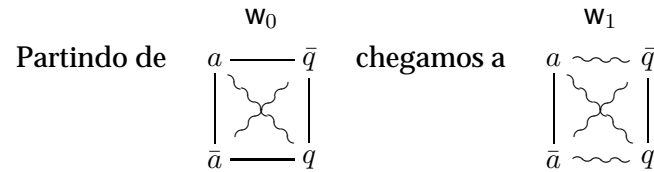


Como não há maneira de transformar uma relação \uparrow em \downarrow na construção de baixo para cima de uma demonstração em FBV, só nos resta tentar transformar as relações \downarrow em \uparrow . Em particular, temos que criar pelo menos duas relações: $a \uparrow \bar{q}$ e $\bar{a} \uparrow q$.

Vamos analisar os casos. Suponha que consigamos criar $a \uparrow \bar{q}$. Pela propriedade do quadrado, na teia de interação de uma estrutura, um quadrado não pode apresentar exatamente três lados representando a mesma relação estrutural: deve haver um quarto lado. Portanto, teremos um dos seguintes casos:



Mas no caso I, a estrutura não seria demonstrável, uma vez que $a \uparrow \bar{a}$. No caso II, $q \uparrow \bar{q}$ e também a estrutura não seria demonstrável. Já o caso III implicaria que, durante a construção de uma demonstração:



, o que não é possível, pelo Lema 51.

Da mesma forma, se supusermos que conseguimos criar $\bar{a} \uparrow q$, teremos casos análogos.

□

4.3.1.2 Número de incoerência

As Definições 56 e 58 são a chave do nosso trabalho. Elas são equivalentes, e a diferença consiste na forma de apresentação: a Definição 58 é recursiva.

Definição 56 (Número de incoerência). Seja S uma estrutura em FBV. Sejam a e b dois átomos $\in \text{occ } S$. Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\downarrow, \uparrow\}$ possíveis relações entre átomos em uma estrutura. O *número de incoerência* do par de átomos $\{a, b\}$ no contexto S é definido da seguinte maneira:

1. $\langle S \rangle_{a,b}^{\#} = |\{x \in \text{occ } S \mid (a \sigma_1 x) \wedge (b \sigma_2 x) \wedge (\sigma_1 \neq \sigma_2)\}|$, se $a \downarrow b$;
2. $\langle S \rangle_{a,b}^{\#} = \infty$, se $a \uparrow b$;

O número de incoerência entre dois átomos a e b dentro da estrutura S , por motivos que veremos adiante, só faz sentido se $a \downarrow b$. Nesse caso, ele é definido como número de ocorrências de átomos de S que mantêm uma relação estrutural com a e outra diferente com b (daí o nome de *número de incoerência*).

Exemplo 57. Seja a estrutura $S = [a, b, (c, [d, e])]$. Assim temos:

- $\langle S \rangle_{a,b}^{\#} = 0$;
 $\langle S \rangle_{a,c}^{\#} = 2$, pois $a \downarrow d$ e $a \downarrow e$ mas $c \uparrow d$ e $c \uparrow e$;
 $\langle S \rangle_{a,d}^{\#} = 1$, pois $a \downarrow c$ mas $d \uparrow c$;
 $\langle S \rangle_{c,d}^{\#} = \infty$, pois $c \uparrow d$;

Definição 58 (Número de incoerência). Seja S uma estrutura em FBV. Sejam a e b dois átomos $\in \text{occ } S$. O número de incoerência do par de átomos $\{a, b\}$ no contexto S é recursivamente definido da seguinte maneira:

1. $\langle S[a, b] \rangle_{a,b}^{\#} = 0$
2. $\langle S[S'\{a\}, S''\{b\}, P] \rangle_{a,b}^{\#} = \langle [S'\{a\}, S''\{b\}] \rangle_{a,b}^{\#}$
3. $\langle S[S'\{a\}, (S''\{b\}, P)] \rangle_{a,b}^{\#} = |\text{occ } P| + \langle [S'\{a\}, S''\{b\}] \rangle_{a,b}^{\#}$, onde $S''\{b\}$ não é um copar próprio.
4. $\langle S[(S'\{a\}, P), S''\{b\}] \rangle_{a,b}^{\#} = |\text{occ } P| + \langle [S'\{a\}, S''\{b\}] \rangle_{a,b}^{\#}$, onde $S'\{a\}$ não é um copar próprio.
5. $\langle S(S'\{a\}, S''\{b\}) \rangle_{a,b}^{\#} = \infty$

e, em todos os casos, P é uma estrutura.

Exemplo 59. Seja a estrutura $S = [(a, b), c], (d, [e, f])$. Nesse caso temos:

$$\langle S \rangle_{a,b}^{\#} = \langle S'''[a, b] \rangle_{a,b}^{\#} = 0 \quad , \text{ pelo caso (1);}$$

$$\langle S \rangle_{a,c}^{\#} = \langle S'''(S'\{a\}, S''\{c\}) \rangle_{a,c}^{\#} = \infty \quad , \text{ pelo caso (5);}$$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{a,d}^{\#} &= \langle [(S'\{a\}, P), S''\{d\}] \rangle_{a,d}^{\#} = \quad , \text{ pelo caso (4)} \\ &= \langle [(S'\{a\}, c), S''\{d\}] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= |\text{occ } P| + \langle [S'\{a\}, S''\{d\}] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= |\text{occ } c| + \langle [a, b, (d, [e, f])] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= 1 + \langle [S'\{a\}, S''\{d\}, P'] \rangle_{a,d}^{\#} \quad , \text{ pelo caso (2)} \\ &= 1 + \langle [a, (d, [e, f])] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= 1 + \langle [S'\{a\}, (S'''\{d\}, P'')] \rangle_{a,d}^{\#} \quad , \text{ pelo caso (3)} \\ &= 1 + |\text{occ } P''| + \langle [a, d] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= 1 + |\text{occ } [e, f]| + \langle [a, d] \rangle_{a,d}^{\#} \\ &= 1 + 2 + 0 = \quad , \text{ pelo caso (1)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Considere a seguinte estrutura:

$$S = [a, (b, [c, d])]$$

Pela definição de número de incoerência, $\langle S \rangle_{a,b}^\# = 2$. Entretanto, observe que se considerarmos a subestrutura $T = [c, d]$, podemos reescrever S como:

$$S = [a, (b, T)]$$

Nesse caso, pode-se abstrair do tamanho de T , ou seja, quantas ocorrências de átomos T possui, e focar no que realmente interessa: o número de incoerência entre os átomos a e b se deve às relações estruturais diferentes que estes átomos mantêm com toda a subestrutura T , não importando se T é um átomo ou uma estrutura maior. Dessa forma, faria sentido generalizar a idéia de incoerência além de átomos, lidando com subestruturas. O número de incoerência entre a e b em S seria 1, pois a e b mantêm relações diferentes com a subestrutura T , independentemente de seu tamanho ou natureza. Essa é a idéia de número de incoerência módulo coerência.

Definição 60 (Número de incoerência módulo coerência). Seja S uma estrutura em FBV. Sejam U e V duas subestruturas disjuntas em S . O número de incoerência módulo coerência do par de estruturas $\{U, V\}$ dentro da estrutura S é recursivamente definido da seguinte maneira:

1. $\{S[U, V]\}_{U, V}^\# = 0$
2. $\{S[S'\{U\}, S''\{V\}, P]\}_{U, V}^\# = \{[S'\{U\}, S''\{V\}]\}_{U, V}^\#$
3. $\{S[S'\{U\}, (S''\{V\}, P)]\}_{U, V}^\# = 1 + \{[S'\{U\}, S''\{V\}]\}_{U, V}^\#$, onde $S''\{V\}$ não é um copar próprio.
4. $\{S[(S'\{U\}, P), S''\{V\}]\}_{U, V}^\# = 1 + \{[S'\{U\}, S''\{V\}]\}_{U, V}^\#$, onde $S'\{U\}$ não é um copar próprio.
5. $\{S(S'\{U\}, S''\{V\})\}_{U, V}^\# = \infty$

onde P é uma estrutura.

Exemplo 61. Seja a estrutura $S = [(a, b), c], (d, [e, f])$. Nesse caso temos:

$$\{S\}_{a,b}^{\#} = \{S'''[a, b]\}_{a,b}^{\#} = 0 \quad , \text{ pelo caso (1);}$$

$$\{S\}_{a,c}^{\#} = \{S'''(S'\{a\}, S''\{c\})\}_{a,c}^{\#} = \infty \quad , \text{ pelo caso (5);}$$

$$\{S\}_{a,d}^{\#} = \{[(S'\{a\}, P), S''\{d\}]\}_{a,d}^{\#} = \quad , \text{ pelo caso (4)}$$

$$\{[(S'\{a\}, c), S''\{d\}]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$|\text{occ } P| + \{[S'\{a\}, S''\{d\}]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$|\text{occ } c| + \{[a, b, (d, [e, f])]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$1 + \{[S'\{a\}, S''\{d\}, P']\}_{a,d}^{\#} = \quad , \text{ pelo caso (2)}$$

$$1 + \{[a, (d, [e, f])]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$1 + \{[S'\{a\}, (S'''\{d\}, P'')]\}_{a,d}^{\#} = \quad , \text{ pelo caso (3)}$$

$$1 + 1 + \{[a, d]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$2 + \{[a, d]\}_{a,d}^{\#} =$$

$$2 + 0 =$$

$$2$$

, pelo caso (1)

Note que, para a estrutura $S = [(a, b), c], (d, [e, f])$, o número de incoerência entre os átomos a e d é $\langle S \rangle_{a,b}^{\#} = 3$, mas o número de incoerência módulo coerência é $\{S\}_{a,b}^{\#} = 2$

4.3.2 Resultados principais

Agora estamos prontos, para, usando o teorema de condições necessárias para demonstrabilidade e a idéia de número de incoerência módulo coerência, começar a propor a nossa tentativa de estratégia de demonstração para o sistema FBV com pares de átomos distintos dois a dois.

Antes de mais nada, entretando, vamos nos deter um momento para entender o porquê de no momento restringirmos a nossa estratégia ao sistema FBV com pares de átomos dois a dois distintos.

4.3.2.1 Porque FBV com pares de átomos dois a dois distintos

Como vimos pelo Teorema 52, a condição C_1 exige que, para uma estrutura demonstrável S haja uma função de escolha

$$f : \text{occ } S \rightarrow \text{occ } S. f(a) = \bar{a} \wedge (a \downarrow \bar{a}) \text{ em } S$$

Entretanto, não é possível, a princípio, determinar trivialmente qual ocorrência de a deve ser associada a qual ocorrência de \bar{a} via a função f . Como mostram os exemplos a seguir, esta escolha não pode ser feita arbitrariamente.

Exemplo 62. A estrutura $[a, \bar{a}, b, \bar{b}, (a, b), (\bar{a}, \bar{b})]$ é demonstrável. Apenas com o objetivo de facilitar a argumentação, vamos diferenciar cada ocorrência de átomos repetidos indexando-os da seguinte forma: $[a_1, \bar{a}_1, b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]$.

Esta estrutura é demonstrável, como podemos ver a seguir:

$$\begin{array}{c}
 \circ \downarrow - \\
 \circ \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_2, \bar{b}_2]} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_2, ([a_1, \bar{a}_2], \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, b_2, (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, b_1, \bar{b}_1, b_2, (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, b_1, \bar{b}_1, ([a_2, \bar{a}_1], b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, \bar{a}_1, b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]}
 \end{array}$$

o que equivale à função de escolha $f(a_1) = \bar{a}_2$, $f(a_2) = \bar{a}_1$, $f(b_1) = \bar{b}_1$ e $f(b_2) = \bar{b}_2$ (basta olhar os índices das ocorrências atômicas em cada instância de aplicação da regra $\text{ai} \downarrow$ na demonstração).

Se, por outro lado, optássemos por começar a demonstração pela aplicação da regra $\text{ai} \downarrow$ duas vezes, eliminando primeiro os átomos na estrutura par, cairíamos na seguinte situação:

$$\begin{array}{c}
 \text{ai} \downarrow \frac{[(a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]}{[b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, \bar{a}_1, b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]}
 \end{array}$$

Mas a estrutura $[(a, b), (\bar{a}, \bar{b})]$ não é demonstrável, pela condição C_2 do Teorema 52. Portanto, não podemos começar eliminando todos os átomos duais da estrutura par mais externa, ou seja, a função de escolha $f(a_1) = \bar{a}_1$, $f(a_2) = \bar{a}_2$, $f(b_1) = \bar{b}_1$ e $f(b_2) = \bar{b}_2$ não é válida.

Apenas para ressaltar o quão complicada a escolha da função pode ficar, podemos mostrar que não é necessariamente preciso adiar a aplicação das regras $\text{ai} \downarrow$ para o final da construção da demonstração: é possível construir uma demonstração da mesma estrutura em que começamos com uma aplicação $\text{ai} \downarrow$ sobre apenas um dos pares de átomos da estrutura par mais externa, no caso, o par a_1 e \bar{a}_1 :

$$\begin{array}{c}
 \circ \downarrow - \\
 \circ \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_1, \bar{b}_2]} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_1, ([a_2, \bar{a}_2], \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_1, a_2, (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_1, (a_2, [b_2, \bar{b}_1]), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{s} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]} \\
 \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{[a_1, \bar{a}_1, b_1, \bar{b}_1, (a_2, b_2), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)]}
 \end{array}$$

o que equivale à função de escolha $f(a_1) = \bar{a}_1$, $f(a_2) = \bar{a}_2$, $f(b_1) = \bar{b}_2$ e $f(b_2) = \bar{b}_1$.

O mesmo poderia ser feito se escolhêssemos eliminar b_1 e \bar{b}_1 primeiro. De fato, das quatro funções de escolha possíveis, três podem levar a uma demonstração, e uma necessariamente não leva.

Como vemos, escolher qual a função f adequada para cada estrutura não parece ser uma tarefa trivial, e por isso, não foi focada neste trabalho. Eliminamos o problema de lidar com f restringindo o sistema FBV de modo a ter apenas pares de átomos dois a dois distintos. Desta forma, a cada ocorrência de $a \in \text{occ } S$ só existe uma única possibilidade de mapeamento via função f , que consiste em $\bar{a} \in \text{occ } S$.

Contornado o problema da função f , vamos agora justificar o porquê de trabalharmos com FBV no momento, e não com o sistema BV completo. Em primeiro lugar, porque queremos começar do subsistema mais simples para depois generalizar a estratégia para o supersistema mais complexo. Além disso, a presença da regra $q\downarrow$ em BV complica a escolha das regras de inferência a aplicar, uma vez que não é possível ordenar as instâncias de regra em uma demonstração de forma que se possa usar todas as instâncias de uma regra antes de todas as instâncias de outra regra. Mais especificamente, isso quer dizer que mesmo que os átomos da estrutura a ser demonstrada sejam dois a dois distintos, a presença da regra $q\downarrow$ não permite que a aplicação da regra $ai\downarrow$ seja adiada de modo a ocorrer apenas na parte superior da derivação, depois que todas as instâncias $q\downarrow$ já tenham sido aplicadas. De fato, a estrutura

$$[\langle ([d, \bar{d}], \langle a; b \rangle); c \rangle, \langle \bar{a}; (\langle \bar{b}; \bar{c} \rangle, [e, \bar{e}]) \rangle]$$

é demonstrável mas, temos que aplicar a regra $ai\downarrow$ no início da demonstração senão a estrutura copar que envolve o seq não permitirá a aplicação da regra $q\downarrow$.

4.3.2.2 A tentativa estratégia de demonstração

Vamos começar por um lema chave para a nossa estratégia.

Lema 63 (“Esquecimento”). *Seja $S\{a, \bar{a}\} = S\{X\{a\}, Y\{\bar{a}\}\}$ uma estrutura demonstrável em BV com pares distintos de átomos, tal que $f(a) = \bar{a}$, pela condição C_1 do teorema de condições necessárias para demonstrabilidade (Teorema 52). Então $S\{\circ\} = \{X\{\circ\}, Y\{\circ\}\}$ é demonstrável.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente por indução no tamanho da derivação Π

$$\Pi \prod_{\text{BV}} S\{a, \bar{a}\}$$

Seja ρ a última regra de Π . Se $\rho = ai\downarrow$:

$$ai\downarrow \frac{\Pi' \prod_{\text{BV}} S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]}$$

o resultado segue imediatamente. Se não, Π é da forma:

$$\frac{\Pi' \Vdash_{\text{BV}} S'\{a, \bar{a}\}}{\rho \frac{S'\{a, \bar{a}\}}{S\{a, \bar{a}\}}}$$

Por indução, $S'\{\circ\}$ é demonstrável. Portanto

$$\frac{\Pi' \Vdash_{\text{BV}} S'\{\circ\}}{\rho \frac{S'\{\circ\}}{S\{\circ\}}}$$

é a demonstração desejada. \square

Note que a demonstração do lema 63 foi dada para uma estrutura em BV, mas o resultado vale também para o sistema FBV (a demonstração apresentada é igualmente válida para uma estrutura em FBV).

Pelo justificado na seção 4.3.2.1, restringimos neste trabalho o nosso foco de interesse ao sistema FBV com pares de átomos dois a dois distintos. Isto nos possibilita uma série de resultados interessantes. Vamos começar a expô-los agora.

Lema 64 (*Estratégia para $\{S\}_{a, \bar{a}}^{\#} = 0$*). *Se uma estrutura S em FBV só possui pares de átomos dois a dois distintos e $S = S'[a, \bar{a}]$, então podemos aplicar a regra $\text{ai}\downarrow$ sobre a e \bar{a} .*

Demonstração. Como restringimos a estrutura ao sistema FBV com pares de átomos dois a dois distintos, sabemos que necessariamente devemos eliminar a única ocorrência de a com a única ocorrência de \bar{a} . Considere a seguinte derivação:

$$\text{ai}\downarrow \frac{\Vdash S\{\circ\}}{S[a, \bar{a}]}$$

Observe que esta derivação equivale exatamente a, de baixo para cima, “esquecer” os átomos duais a e \bar{a} . Pelo lema do “esquecimento” (Lema 63), podemos concluir que $S[a, \bar{a}]$ é demonstrável se, e somente se, $S\{\circ\}$ o é. Logo, podemos aplicar a regra $\text{ai}\downarrow$. \square

Este lema é particularmente útil por dizer que, sempre que encontrarmos um par de átomos duais que tenham número de incoerência igual a zero, podemos aplicar a regra $\text{ai}\downarrow$ sem comprometer a demonstrabilidade da estrutura.

Lema 65. *A estrutura $S[a, (\bar{a}, X)]$ é demonstrável em FBV com apenas pares de átomos dois a dois distintos se, e somente se, $S\{X\}$ é demonstrável no mesmo sistema.*

Demonstração. Como restringimos a estrutura ao sistema FBV com pares de átomos dois a dois distintos, sabemos que necessariamente devemos eliminar a única ocorrência de a com a única ocorrência de \bar{a} . Considere a seguinte derivação:

$$\text{ai}\downarrow \frac{S\{X\}}{S([a, \bar{a}], X)} \\ \text{s} \frac{S([a, \bar{a}], X)}{S[a, (\bar{a}, X)]}$$

Observe que esta derivação equivale exatamente a, de baixo para cima, “esquecer” os átomos duais a e \bar{a} . Pelo lema do “esquecimento” (Lema 63), podemos concluir que $S[a, (\bar{a}, X)]$ é demonstrável se, e somente se, $S\{X\}$ o é.

□

Lema 66 (*Estratégia para $\{S\}_{a, \bar{a}}^\# = 1$*). *Em FBV com apenas pares de átomos dois a dois distintos, $S[a, (\bar{a}, X)]$ é demonstrável se, e somente se, $S([a, \bar{a}], X)$ o é.*

Demonstração. Pelo lema 65, $S[a, (\bar{a}, X)]$ é demonstrável se, e somente se, $S\{X\}$ é demonstrável. Mas, pelo Lema 64, $S\{X\}$ é demonstrável se, e somente se, $S([a, \bar{a}], X)$ é demonstrável. Logo, por transitividade, $S[a, (\bar{a}, X)]$ é demonstrável se, e somente se $S([a, \bar{a}], X)$ o é.

□

Este lema é particularmente útil por dizer que, sempre que encontrarmos um par de átomos duais que tenham número de incoerência igual a um, podemos aplicar a regra s sem comprometer a demonstrabilidade da estrutura:

$$\text{s} \frac{\prod S([a, \bar{a}], X)}{S[a, (\bar{a}, X)]}$$

onde chegamos à situação em que o número de incoerência entre o par de átomos duais diminui para zero.

Pelo lema 64 podemos, se quisermos, aplicar a regra $\text{ai}\downarrow$:

$$\text{ai}\downarrow \frac{\prod S\{X\}}{S(X, [a, \bar{a}])} \\ \text{s} \frac{S(X, [a, \bar{a}])}{S[a, (\bar{a}, X)]}$$

Entretanto, se não quisermos, temos a liberdade de adiar a aplicação da regra $\text{ai}\downarrow$ para mais tarde na construção da demonstração.

Observe que os lemas 64 e 66 fornecem uma idéia da estratégia de demonstração para quando temos pares de átomos duais cujo número de incoerência seja zero ou um. Se a

estrutura que se deseja demonstrar possuir apenas pares de átomos destes tipos, a estratégia de demonstração já está completa. Basta aplicar o lema 64 sempre que possível, eliminando os pares de átomos duais com número de incoerência igual a zero, e depois prosseguir com o lema 66 eliminando os demais átomos.

Entretanto, o que fazer no caso de, para todo par de átomos duais na estrutura, o número de incoerência for maior que um? A situação em questão equivale a $\forall a \in \text{occ } S, \{S\}_{a, \bar{a}}^\# > 1$, onde S é uma estrutura demonstrável. Uma idéia seria escolher um par de átomos a e \bar{a} e tentar reduzir seu número de incoerência até que ele se torne 1 ou 0 para, assim, poder aplicar a estratégia já conhecida.

Neste momento é importante notar que os resultados obtidos até agora, que consistem na estratégia para pares de átomos duais cujo número de incoerência seja igual a zero ou um, já estão demonstrados. A partir deste ponto utilizamos indícios obtidos através de observações e considerações teóricas para propor um caminho para avançar na busca por uma estratégia para átomos duais com número de incoerência maior que um. Vamos argumentar a favor do caminho proposto, embasando a conjectura de que ele seja um caminho válido, produzindo a nossa tentativa de estratégia final.

Iniciando nossa tentativa de solução, conjecturamos que para “diminuir” o número de incoerência de um par de átomos, podemos utilizar a idéia do lema do “esquecimento” (Lema 63). Além das aplicações já mostradas, este lema é particularmente interessante porque ele dá uma idéia de como seria possível reduzir o número de incoerência de um par de átomos: bastaria “esquecer” (retirar) subestruturas adequadas de forma que a estrutura resultante possuísse pelo menos um par de átomos duais com número de incoerência igual a zero ou 1.

Voltando à idéia de estratégia de demonstração em BV, notemos que se $S\{a, \bar{a}\}$ é demonstrável e os átomos em S são pares distintos, então Π é da forma

$$\begin{array}{c} \Pi_2 \parallel \text{BV} \\ S\{\circ\} \\ \text{ai} \downarrow \frac{\quad}{S[a, \bar{a}]} \\ \Pi_1 \parallel \text{BV} \\ S\{a, \bar{a}\} \end{array}$$

Isto significa que as regras switch e seq devem ser aplicadas para aproximar átomos com polaridades opostas.

A idéia é então aplicar o switch quantas vezes forem necessárias para aproximar um átomo de sua forma negada, “esquecendo” do resto da estrutura. Como podemos ver no Lema 63, “esquecer” átomos não altera a demonstrabilidade da estrutura.

A questão é: demonstramos o Lema 63 mantendo a “estrutura” da demonstração. Podemos alterar a demonstração para retornar novamente com os átomos que retiramos? Se a resposta for sim, então claramente temos uma estratégia para demonstrar estruturas, que é o principal objetivo deste trabalho.

Antes, entretanto, precisamos de uma definição do que seria “esquecer” estruturas inteiras, uma vez que o lema 63 se refere a “esquecer” apenas átomos.

Definição 67. “Esquecer” R em $S\{R\}$ significa

$$\forall a \in \text{occ } R. \text{ “esquecer” } a, \bar{a} \in \text{occ } S\{R\}$$

Note que não necessariamente $\bar{a} \in \text{occ } R$. Pode ser o caso em que \bar{a} está em $\text{occ } S\{ \}$.

Exemplo 68. Seja a estrutura $[a, (\bar{b}, c), (\bar{a}, b), \bar{c}]$. “Esquecer” a subestrutura (\bar{a}, b) significa “esquecer” os pares de átomos a, \bar{a} e b, \bar{b} , obtendo assim a estrutura $[c, \bar{c}]$.

Podemos agora voltar à busca da estratégia de demonstração, começando por um exemplo.

Exemplo 69. Seja $S = [(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$. Há várias maneiras de se demonstrar S . Observe que todos os átomos possuem número de incoerência módulo coerência igual a 2. Entretanto, os átomos a, b, d e e estão “aninhados”, o que torna a escolha de por onde começar a demonstração mais complicada. A maneira mais clara de proceder seria aplicar um switch sobre c e \bar{c} . Vamos fazer $R = [\bar{a}, b]$ e $T = [\bar{d}, e]$, de forma que $S = [(a, \bar{b}), (\bar{c}, R), (c, T), (d, \bar{e})]$.

Podemos então usar a idéia da Definição 67 e “esquecer” a subestrutura T . Nesse caso, consideramos que a estrutura S fica implicitamente transformada em $[(a, \bar{b}), (\bar{c}, R), c]$. Note que, com isso, o número de incoerência $\{S\}_{c, \bar{c}}^\#$ diminui para um. E é exatamente o que queríamos! Já sabemos como lidar com os casos em que há um par de átomos duais com número de incoerência módulo coerência igual a um (Lema 66). Podemos então construir a seguinte demonstração da estrutura S :

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \text{ai} \downarrow \frac{[(a, \bar{b}), (T, R), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (([\bar{c}, c], T), R), (d, \bar{e})]} \\ \text{s} \frac{[(a, \bar{b}), (([\bar{c}, c], T), R), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), ([\bar{c}, (c, T)], R), (d, \bar{e})]} \\ \text{s} \frac{[(a, \bar{b}), ([\bar{c}, (c, T)], R), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, R), (c, T), (d, \bar{e})]} \end{array}$$

Note que na demonstração não explicitamos o “esquecimento” de T . Simplesmente usamos a idéia implícita de esquecimento para nos guiar por quem começar a demonstração, no caso, por uma instância switch sobre o par de átomos duais c e \bar{c} , que possuem então um número de incoerência módulo coerência com que sabemos lidar (no caso, um).

É claro que poderíamos “esquecer” R e o resultado seria equivalente. Neste caso, não importa a subestrutura que decidimos apagar, uma vez que as estruturas (\bar{c}, R) e (c, T) são similares.

Após este exemplo, estamos preparados para formalizar a idéia de “esquecimento” como meio para diminuir números de incoerência módulo coerência maiores que um e, assim, obter uma estratégia.

Conjectura 70 (Estratégia para $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# > 1$). *Seja S uma estrutura demonstrável em FBV com átomos dois a dois distintos tal que $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# > 1$ para todo $a \in \text{occ } S$. Seja $a \in \text{occ } S$ o átomo com menor número de incoerência módulo coerência na estrutura. Então $S\{a, \bar{a}\}$ é da forma $S'(R\{a\}, T\{\bar{a}\})$ e temos um dos seguintes casos:*

- 1 $R\{\circ\} = T\{\circ\} = \circ$: $S\{a, \bar{a}\} = S'[(a, X), (\bar{a}, Y)]$
- 2 $R\{\circ\} = \circ$ e $T\{\circ\} \neq \circ$: $S\{a, \bar{a}\} = S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]$
- 3 $R\{\circ\} \neq \circ$ e $T\{\circ\} \neq \circ$: $S\{a, \bar{a}\} = S'[(R\{a\}, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]$

, onde $X, Y \neq \circ$

Além disso:

- 1 $S'[(a, X), (\bar{a}, Y)]$ é demonstrável $\iff S'(X, Y)$ é demonstrável;
- 2 $S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]$ é demonstrável $\iff S'([T\{\bar{a}\}, (a, X)], Y)$ é demonstrável;
- 3 $S'[(R\{a\}, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]$ é demonstrável $\iff S'([T\{\bar{a}\}, (R\{a\}, X)], Y)$ ou $S'([R\{a\}, (T\{\bar{a}\}, Y)], X)$ é demonstrável.

Argumentação a favor da conjectura:

A primeira parte da conjectura segue facilmente da definição de número de incoerência e da minimalidade de a .

Seja $S\{a, \bar{a}\} = [X\{a\}, Y\{\bar{a}\}]$. A demonstração da demonstrabilidade seria por indução sobre o número de incoerência de $\{a, \bar{a}\}$.

- Caso 1: $S'[(a, X), (\bar{a}, Y)]$

(\Rightarrow) Por indução no tamanho da derivação Π de $S[(a, X), (\bar{a}, Y)]$. Se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y = \emptyset$, então acreditamos que não seria criada nenhuma inconsistência. Se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y \neq \emptyset$, a estrutura inicial conteria uma subestrutura equivalente a $[(a, b), (\bar{a}, \bar{b})]$, que sabemos não ser demonstrável pela condição C_2 do Teorema 52.

(\Leftarrow) Considere a demonstração

$$\begin{array}{l} \text{ai} \downarrow \frac{S(Y, X)}{S([a, \bar{a}], Y, X)} \\ \text{S} \frac{S([a, \bar{a}], Y, X)}{S([a, (\bar{a}, Y)], X)} \\ \text{S} \frac{S([a, (\bar{a}, Y)], X)}{S[(a, X), (\bar{a}, Y)]} \end{array}$$

- Caso 2: $S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]$, $T\{\circ\} \neq \circ$

Considere a derivação que “esquece” X :

$$\text{S} \frac{S'([T\{\bar{a}\}, (a, X)], Y)}{S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]}$$

Isto se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y = \emptyset$. Mas se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y \neq \emptyset$ a estrutura já não seria demonstrável pela condição C_2 do Teorema 52.

Acreditamos que o resultado seguiria por indução.

- **Case 3:** $S'[(R\{a\}, X), (T\{\bar{a}\}, Y)], R\{\circ\} \neq \circ$ e $T\{\circ\} \neq \circ$

Nesse caso há duas hipóteses, sendo que necessariamente pelo menos uma das duas ocorre:

1. $R\{a\} \cap Y = \emptyset$

Nesse caso poderíamos usar o fato de que $R\{a\} \cap Y = \emptyset$, “esquecer” X e fazer:

$$\text{s} \frac{S'([T\{\bar{a}\}, (R\{a\}, X)], Y)}{S'[(R\{a\}, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]}$$

Isto se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y = \emptyset$. Mas se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y \neq \emptyset$ a estrutura já não seria demonstrável pela condição C_2 do Teorema 52.

Acreditamos que o resultado seguiria por indução.

2. $T\{\bar{a}\} \cap X = \emptyset$

Nesse caso poderíamos usar o fato de que $T\{\bar{a}\} \cap X = \emptyset$, “esquecer” Y e fazer:

$$\text{s} \frac{S'([R\{a\}, (T\{\bar{a}\}, Y)], X)}{S'[(R\{a\}, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]}$$

Isto se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y = \emptyset$. Mas se $\text{occ } X \cap \text{occ } Y \neq \emptyset$ a estrutura já não seria demonstrável pela condição C_2 do Teorema 52.

Acreditamos que o resultado seguiria por indução.

Faltaria apenas mostrar que $R\{a\} \cap Y = \emptyset$ ou $T\{\bar{a}\} \cap X = \emptyset$ deve ocorrer. Imagine, por contradição, que $R\{a\} \cap Y \neq \emptyset$ e $T\{\bar{a}\} \cap X \neq \emptyset$. Então as seguintes asserções são verdadeiras:

$$\exists n \in \text{occ } Y. \bar{n} \in \text{occ } R\{a\} \implies \begin{cases} Y = Y'\{n\} \wedge \\ R\{a\} = R'\{a, \bar{n}\} \end{cases}$$

$$\exists m \in \text{occ } Y. \bar{m} \in \text{occ } T\{\bar{a}\} \implies \begin{cases} X = X'\{m\} \wedge \\ T\{\bar{a}\} = T'\{\bar{a}, \bar{m}\} \end{cases}$$

Tomemos o caso de $R\{a\} = R'\{a, \bar{n}\}$. Há apenas duas possibilidades:

$$R\{a\} = R'\{a, \bar{n}\} \implies \begin{cases} R'\{a, \bar{n}\} = R''[P\{a\}, P'\{\bar{n}\}] \vee \\ R'\{a, \bar{n}\} = R''(P\{a\}, P'\{\bar{n}\}) \end{cases}$$

Similarmente, para $T\{\bar{a}\} = T'\{\bar{a}, \bar{m}\}$ também há apenas duas possibilidades:

$$T\{\bar{a}\} = T'\{\bar{a}, \bar{m}\} \implies \begin{cases} T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''[Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}] \vee \\ T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''(Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}) \end{cases}$$

Combinando as possibilidades para $R\{a\}$ e $T\{\bar{a}\}$, há, então, quatro possibilidades a serem avaliadas:

$$1. R'\{a, \bar{n}\} = R''[P\{a\}, P'\{\bar{n}\}] \quad \text{e} \quad T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''[Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}]$$

Nesse caso $S = [(R''[P\{a\}, P'\{\bar{n}\}], X'\{m\}), (T''[Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}], Y'\{n\})]$.

$$2. R'\{a, \bar{n}\} = R''[P\{a\}, P'\{\bar{n}\}] \quad \text{e} \quad T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''(Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\})$$

Nesse caso $S = [(R''[P\{a\}, P'\{\bar{n}\}], X'\{m\}), (T''(Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}), Y'\{n\})]$

$$3. R'\{a, \bar{n}\} = R''(P\{a\}, P'\{\bar{n}\}) \quad \text{e} \quad T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''[Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}]$$

Nesse caso $S = [(R''(P\{a\}, P'\{\bar{n}\}), X'\{m\}), (T''[Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}], Y'\{n\})]$

$$4. R'\{a, \bar{n}\} = R''(P\{a\}, P'\{\bar{n}\}) \quad \text{e} \quad T'\{\bar{a}, \bar{m}\} = T''(Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\})$$

Nesse caso $S = [(R''(P\{a\}, P'\{\bar{n}\}), X'\{m\}), (T''(Q\{\bar{a}\}, Q'\{\bar{m}\}), Y'\{n\})]$

Em qualquer dos casos acima, temos que S possui uma subestrutura da forma:

$$\begin{array}{ccc} m & \text{---} & n \\ | & \text{---} & | \\ | & \text{---} & | \\ \bar{m} & \text{---} & \bar{n} \end{array}$$

o que, pela condição C_2 do Teorema 52, mostra que a estrutura S já não seria, desde o princípio, demonstrável, o que entra em contradição com a hipótese de que S é demonstrável. Logo, não é o caso em que $R\{a\} \cap Y \neq \emptyset$ e $T\{\bar{a}\} \cap X \neq \emptyset$.

Fim da argumentação a favor da conjectura.

Antes de enunciar o resultado principal, vamos apresentar um lema auxiliar que, apesar de não ser essencial, facilita a estratégia proposta.

Lema 71 (Estratégia para $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 0$ ou $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 1$). *Se S é demonstrável em FBV contendo apenas pares de átomos distintos dois a dois, podemos escolher eliminar qualquer par de átomos duais $a, \bar{a} \in \text{occ } S$ tal que $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 0$ ou 1.*

Demonstração. Pelos Lemas 66 e 63. □

Agora sim estamos prontos para enunciar o resultado principal desta dissertação, através do teorema seguinte.

Conjectura 72 (Tentativa de estratégia de demonstração). *Existe um algoritmo que corresponde a uma estratégia de demonstração para toda estrutura demonstrável S em FBV contendo apenas pares de átomos distintos dois a dois.*

Argumentação a favor da conjectura:

Considere a estratégia fornecida pelos Lemas 64, 66 e 71 e pela Conjectura 70. Comece a demonstração pela redução da subestrutura que contém ocorrências de átomos a e \bar{a} de número de incoerência módulo coerência igual a 0 ou 1 (pelo Lema 71 posso começar a por qual par de átomos duais cujo número de incoerência módulo coerência seja 0 ou 1. Pelos lemas 64 e 66 sei como agir em cada caso). Se não houver tal subestrutura, escolha o par de átomos com menor número de incoerência módulo coerência e “reduza” este número via “esquecimento” (pela Conjectura 70). Se um estágio for atingido sobre o qual não se possa avançar, é porque a estrutura já não era demonstrável desde o início (pelos lemas 64, 66 e pela conjectura 70).

Fim da argumentação a favor da conjectura.

Vamos demonstrar a aplicação da tentativa de estratégia proposta na Conjectura 72 através de um exemplo.

Exemplo 73. Seja a seguinte estrutura demonstrável em FBV com pares de átomos dois a dois distintos:

$$[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Vamos prosseguir com a estratégia proposta, passo a passo.

1. Estrutura a ser demonstrada:

$$S = [(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	a	b	c	d	e
$\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$	2	2	2	2	2

Todos os valores são iguais a 2, portanto posso escolher qualquer um como sendo o menor. Escolhamos o par a, \bar{a} .

Como $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 2$, recorreremos então à conjectura 70, que trata de número de incoerência módulo coerência maior que 1, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)] \left. \begin{array}{l} X = \bar{b} \\ Y = \bar{c} \\ T\{\bar{a}\} = [\bar{a}, \bar{b}] \end{array} \right\}$$

, de onde concluímos que devemos “esquecer” X e a regra de inferência a ser aplicada é um switch da forma:

$$S \frac{S'([T\{\bar{a}\}], (a, X)), Y}{S'[(a, X), (T\{\bar{a}\}, Y)]}$$

Assim, podemos começar a construção da nossa demonstração:

$$S \frac{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}$$

2. Agora temos que demonstrar a seguinte estrutura:

$$S = [[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	a	b	c	d	e
$\{S\}_{i,i}^\#$	1	1	2	2	2

Há dois valores iguais a 1, portanto, posso escolher $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 1$.

Recorremos, então, ao Lema 66, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 1, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[a, (\bar{a}, X)] \quad \left. \vphantom{S'[a, (\bar{a}, X)]} \right\} X = \bar{b}$$

, de onde concluímos que devemos “esquecer” X e a regra de inferência a ser aplicada é um switch da forma:

$$S \frac{S'([a, \bar{a}], X)}{S'[a, (\bar{a}, X)]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração:

$$S \frac{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\ S \frac{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}$$

3. Agora a estrutura a ser demonstrada é a seguinte:

$$S = [[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	a	b	c	d	e
$\{S\}_{i,i}^\#$	0	1	2	2	2

O menor valor é $\{S\}_{a,\bar{a}}^\# = 0$

Recorremos, então, ao Lema 64, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 0, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[a, \bar{a}]$$

, de onde concluímos que devemos aplicar uma instância de $\text{ai}\downarrow$ da forma:

$$\text{ai}\downarrow \frac{S'\{\circ\}}{S'[a, \bar{a}]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração, já levando em conta a relação de equivalência sintática:

$$\begin{aligned} &= \frac{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\ \text{ai}\downarrow & \frac{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\ \text{s} & \frac{[[[a, \bar{b}], \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[a, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\ \text{s} & \frac{[[a, \bar{b}], (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[a, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})} \end{aligned}$$

4. Temos que demonstrar, então, a seguinte estrutura:

$$S = [[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	b	c	d	e
$\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$	0	2	2	2

O menor valor é $\{S\}_{b,\bar{b}}^\# = 0$.

Recorremos, então, ao Lema 64, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 0, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[b, \bar{b}]$$

, de onde concluímos que devemos aplicar uma instância de $\text{ai}\downarrow$ da forma:

$$\text{ai}\downarrow \frac{S'\{\circ\}}{S'[b, \bar{b}]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração, já levando em conta a relação de equivalência sintática:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
 \text{ai} \downarrow &= \frac{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
 \text{ai} \downarrow &= \frac{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
 \text{s} &= \frac{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
 \text{s} &= \frac{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
 \end{aligned}$$

5. Neste momento temos que a estrutura a ser demonstrada é:

$$S = [\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	c	d	e
$\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$	1	2	2

O menor valor é $\{S\}_{c,\bar{c}}^\# = 1$.

Recorremos, então, ao Lema 66, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 1, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[c, (\bar{c}, X)] \quad \left. \vphantom{S'} \right\} X = [\bar{d}, e]$$

, de onde concluímos que devemos “esquecer” X e a regra de inferência a ser aplicada é um switch da forma:

$$\text{s} \frac{S'([c, \bar{c}], X)}{S'[c, (\bar{c}, X)]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração:

$$\begin{aligned}
& \frac{[[[c, \bar{c}], [\bar{d}, e]], (d, \bar{e})]}{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \stackrel{s}{=} \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \stackrel{ai \downarrow}{=} \frac{[[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \stackrel{s}{=} \frac{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \stackrel{s}{=} \frac{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

6. Agora a estrutura a ser demonstrada é a seguinte:

$$S = [[c, \bar{c}], [\bar{d}, e]], (d, \bar{e})$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	c	d	e
$\{S\}_{i,i}^{\#}$	0	2	2

O menor valor é $\{S\}_{c,\bar{c}}^{\#} = 0$

Recorremos, então, ao Lema 64, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 0, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[c, \bar{c}]$$

, de onde concluímos que devemos aplicar uma instância de $ai \downarrow$ da forma:

$$ai \downarrow \frac{S'\{\circ\}}{S'[c, \bar{c}]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração, já levando em conta a relação de equivalência sintática:

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\bar{d}, e, (d, \bar{e})]}{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{s} \frac{[[[c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{[[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{ai} \downarrow \frac{[[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{s} \frac{[[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{s} \frac{[[[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

7. Neste momento temos que a estrutura a ser demonstrada é:

$$S = [\bar{d}, e, (d, \bar{e})]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	d	e
$\{S\}_{i, \bar{i}}^\#$	1	1

Há dois valores iguais a 1, portanto, posso escolher $\{S\}_{d, \bar{d}}^\# = 1$.

Recorremos, então, ao Lema 66, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 1, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[d, (\bar{d}, X)] \quad \left. \vphantom{S'} \right\} X = \bar{e}$$

, de onde concluímos que devemos “esquecer” X e a regra de inferência a ser aplicada é um switch da forma:

$$\text{s} \frac{S'([d, \bar{d}], X)}{S'[d, (\bar{d}, X)]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração:

$$\begin{aligned}
& \frac{S}{s} \frac{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e}{[\bar{d}, e, (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{ai \downarrow}{s} \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{ai \downarrow}{s} \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, \bar{b}], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{ai \downarrow}{s} \frac{[(b, (\circ, \bar{b})), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, ([a, \bar{a}], \bar{b})), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{ai \downarrow}{s} \frac{[(a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

8. Agora a estrutura a ser demonstrada é a seguinte:

$$S = [(d, \bar{d}), \bar{e}], e]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	d	e
$\{S\}_{i, \bar{i}}^\#$	0	1

O menor valor é $\{S\}_{d, \bar{d}}^\# = 0$

Recorremos, então, ao Lema 64, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 0, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S' [d, \bar{d}]$$

, de onde concluímos que devemos aplicar uma instância de $ai \downarrow$ da forma:

$$ai \downarrow \frac{S' \{\circ\}}{S' [d, \bar{d}]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração, já levando em conta a relação de equivalência sintática:

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\bar{e}, e]}{[(o, \bar{e}), e]} \\
&\text{ai}\downarrow \frac{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e]}{[\bar{d}, e, (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{[(o, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{ai}\downarrow \frac{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(o, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&= \frac{[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[b, (o, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{ai}\downarrow \frac{[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[([a, \bar{b}), \bar{a}, b], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
&\text{s} \frac{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

9. Chegamos a um ponto em que só falta demonstrar a estrutura:

$$S = [\bar{e}, e]$$

Números de incoerência módulo coerência:

Átomo i	e
$\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$	0

O menor valor é $\{S\}_{e,\bar{e}}^\# = 0$

Recorremos, então, ao Lema 64, que trata de número de incoerência módulo coerência igual a 0, e vemos que o nosso caso equivale a:

$$S'[e, \bar{e}]$$

, de onde concluímos que devemos aplicar uma instância de $\text{ai}\downarrow$ da forma:

$$\text{ai}\downarrow \frac{S'\{o\}}{S'[e, \bar{e}]}$$

Assim, podemos continuar a construção da nossa demonstração, já levando em conta a relação de equivalência sintática:

$$\begin{aligned}
& \text{ai} \downarrow \frac{\circ}{[\bar{e}, e]} \\
& = \frac{[(\circ, \bar{e}), e]}{[(\circ, \bar{e}), e]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, \bar{e}), e]}{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e]} \\
& \text{s} \frac{[(\circ, \bar{e}), e]}{[\bar{d}, e, (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[b, \bar{b}], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[[b, (\circ, \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[[b, ([a, \bar{a}], \bar{b})], \bar{c}], (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[[([a, \bar{b}], \bar{a}, b], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[[([a, \bar{b}], \bar{a}, b], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

10. Para finalizar, temos que:

$$S = \circ$$

e podemos invocar o axioma lógico (unidade), concluindo, assim, a nossa demonstração:

$$\begin{aligned}
& \circ \downarrow - \\
& \circ \\
& \text{ai} \downarrow \frac{\circ}{[\bar{e}, e]} \\
& = \frac{[(\circ, \bar{e}), e]}{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, \bar{e}), e]}{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e]} \\
& \text{s} \frac{[(d, \bar{d}), \bar{e}], e]}{[\bar{d}, e, (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[(c, \bar{c}], [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[\bar{c}, (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, \bar{b}], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(\circ, \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, \bar{b}], \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& = \frac{[(b, (\circ, \bar{b}]), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, ([a, \bar{a}], \bar{b}]), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{ai} \downarrow \frac{[(b, ([a, \bar{a}], \bar{b}]), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(b, ([a, \bar{a}], \bar{b}]), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[(b, ([a, \bar{a}], \bar{b}]), \bar{c}), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), \bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]} \\
& \text{s} \frac{[(a, \bar{b}), \bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}{[(a, \bar{b}), (\bar{c}, [\bar{a}, b]), (c, [\bar{d}, e]), (d, \bar{e})]}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Implementação

A tentativa de estratégia de demonstração proposta para o sistema FBV com pares de átomos distintos dois a dois foi implementada em uma ferramenta chamada de `CoSProver` (demonstrador de cálculo das estruturas). A implementação foi feita em Java e a documentação se encontra disponível em [cos].

O formato de entrada e saída de dados para o `CoSProver` é apresentado a seguir.

5.1 Entrada de dados

A entrada para o `CoSProver` é uma `<estrutura>` em FBV gerada pela seguinte gramática:

```
<unidade> ::= *
<letra>    ::= a ... z | A ... Z
<algarismo> ::= 0 ... 9
<atm>      ::= <letra> | <algarismo> | <atm> <letra> |
               <atm> <algarismo>
<atomo>    ::= <atm> | ~<atm>
<estruturas> ::= <estrutura> | <estruturas> , <estrutura>
<estrutura> ::= <unidade> | <atomo> | [<estruturas>] | (<estruturas>)
```

A tabela 5.1 apresenta exemplos de construções válidas da gramática acima.

<code><unidade></code>	<code>*</code>
<code><atomo></code>	<code>a, ~b1, aToMo, ~123</code>
<code><estrutura></code>	<code>*, ~a, [a,~b1], (c,[~a,b])</code>

Tabela 5.1: Exemplos das principais construções da gramática de estruturas para o `CoSProver`.

São exemplos de entradas válidas:

1. `[~a, (a,~b), (b,~c), (c,~d), (d,~e), (e,~f), f]`

2. [(a,b,c), ~a, ~b, ~c]
3. (a, [~a], *)
4. *
5. [[a,b], *]

Note que a estrutura de entrada não precisa estar na forma normal. As estruturas (3) e (5) possuem unidades, a estrutura (3) apresenta um *singleton* e a estrutura (5) apresenta associatividade explícita.

Além disso, é importante observar que as únicas estruturas que podem estar negadas são átomos. Por exemplo, a estrutura $\sim(a,b)$, apesar de ser bem formada para o sistema FBV, não é uma entrada permitida. Uma estrutura equivalente permitida seria $[\sim a, \sim b]$

5.2 Saída de dados

A saída é uma mensagem dizendo que a estrutura não é provável (se for o caso), ou então uma demonstração em FBV para a estrutura dada.

Caso haja uma demonstração, cada instância de regra:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{redex} \\ \rho \frac{\quad}{\text{contractum}} \end{array}}$$

é representada por

$$\boxed{\begin{array}{cc} \text{regra} & \text{redex} \\ & \text{contractum} \end{array}}$$

Toda estrutura que aparece na saída está na forma normal. As instâncias de regras triviais (equivalência =) são omitidas.

A Tabela 5.2 apresenta a representação do nome das regras.

Regra	Representação
o ↓	oi
ai ↓	ai
s	s

Tabela 5.2: Representação de regras na saída.

São exemplos de saídas:

- oi
ai *
- ai $[\sim c, c]$
1. s $[\sim c, ([b, \sim b], c)]$
ai $[\sim b, \sim c, (b, c)]$
s $[\sim b, \sim c, ([a, \sim a], b, c)]$
 $[(a, b, c), \sim a, \sim b, \sim c]$
- oi
ai *
- ai $[f, \sim f]$
s $[f, ([e, \sim e], \sim f)]$
ai $[(e, \sim f), f, \sim e]$
s $[(e, \sim f), f, ([d, \sim d], \sim e)]$
2. ai $[(d, \sim e), (e, \sim f), f, \sim d]$
s $[(d, \sim e), (e, \sim f), f, ([c, \sim c], \sim d)]$
ai $[(c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), f, \sim c]$
s $[(c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), f, ([b, \sim b], \sim c)]$
ai $[(b, \sim c), (c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), f, \sim b]$
s $[(b, \sim c), (c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), f, ([a, \sim a], \sim b)]$
 $[\sim a, (a, \sim b), (b, \sim c), (c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), f]$
- oi
ai *
- ai $[e, \sim e]$
s $[e, ([d, \sim d], \sim e)]$
ai $[(d, \sim e), \sim d, e]$
3. s $[(d, \sim e), ([c, \sim c], [\sim d, e])]$
ai $[(c, [\sim d, e]), (d, \sim e), \sim c]$
ai $[(c, [\sim d, e]), (d, \sim e), ([b, \sim b], \sim c)]$
s $[(c, [\sim d, e]), (d, \sim e), ([b, ([a, \sim a], \sim b)], \sim c)]$
s $[(c, [\sim d, e]), (d, \sim e), ([\sim a, b, (a, \sim b)], \sim c)]$
 $[(a, \sim b), (\sim c, [\sim a, b]), (c, [\sim d, e]), (d, \sim e)]$
4. $[(a, b), (\sim a, \sim b)]$
The structure is not provable.
5. $[(a, \sim b), (b, \sim c), (c, \sim d), (d, \sim e), (e, \sim f), (f, \sim a)]$
The structure is not provable.

5.3 Complexidade computacional

Uma questão importante é analisar a complexidade computacional em termos de tempo do algoritmo proposto. Duas questões centrais para a implementação da estratégia de demonstração são:

1. Como calcular o número de incoerência módulo coerência.
2. Como resolver a questão da igualdade sob a definição de relação de equivalência sintática.

Vamos discutir em mais detalhes a complexidade de uma dessas questões.

5.3.0.3 Cálculo do número de incoerência módulo coerência

Seja $n = |\text{occ } S|$, ou seja, o tamanho da estrutura a ser demonstrada S . A complexidade de se calcular o número de incoerência módulo coerência entre dois átomos a e b no contexto S é $O(n^4)$. A estratégia precisa que se calcule o menor número de incoerência módulo coerência, portanto é preciso calcular $\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$ para cada um dos $n/2$ pares de átomos duais (i, \bar{i}) . Dessa, forma, a complexidade de se calcular o menor $\{S\}_{i,\bar{i}}^\#$ é $O(n/2 * n^4) = O(n^5)$, o que é, claramente, um custo polinomial.

5.3.0.4 Igualdade sob a definição de relação de equivalência sintática

Uma possível fonte de não-determinismo é a que se oculta sob a relação de equivalência sintática (ver Figura 3.1). Uma mesma estrutura pode se apresentar em diversas formas equivalentes. Por exemplo:

$$[a, (b, c)] = [(a, \circ), (b, [c, \circ])] = [[a], (b, (c))]$$

A rigor, esse não determinismo não causa nenhum problema do ponto de vista da aplicação da estratégia proposta. O número de incoerência módulo coerência é calculado sobre a teia de interação da estrutura, e o Teorema 23 garante que duas estruturas equivalentes possuem a mesma teia de interação. Logo, como só se lida com a teia de interação, pouco importa a maneira como a estrutura está apresentada.

Entretanto, a fim de uniformizar a representação utilizada, toda estrutura dentro do `CoSProver` deve estar na forma normal (ver Seção 3.1.2). Ou seja, em toda estrutura é preciso que:

- as únicas estruturas negadas sejam átomos;
- não haja unidades (\circ);
- nenhum delimitador possa ser eliminado mantendo a equivalência.

A opção por colocar, sempre que possível, as estruturas em sua forma normal tem duas vantagens principais. Em primeiro lugar, é esteticamente mais agradável a apresentação de estruturas na forma mais compacta que é a forma normal. Em segundo lugar, a representação em forma normal evita subestruturas desnecessárias, o que representa uma economia de memória na sua representação interna ao `CoSProver`.

A estrutura de entrada não precisa estar na forma normal, entretanto, as únicas estruturas negadas devem ser átomos (ver Seção 5.1). Além disso, a cada aplicação de regra de inferência, o *redex* é colocado na forma normal antes de dar prosseguimento ao algoritmo.

Portanto, é preciso uma função que coloque uma estrutura na forma normal. Como nenhuma regra de inferência lida com negação, e a estrutura de entrada só pode possuir átomos negados, o algoritmo que coloca uma estrutura na forma normal dentro do `CoSProver` precisa lidar com os seguintes casos:

1. Eliminar unidades.

Exemplo: $[a, b, \circ, c] \implies [a, b, c]$

2. Eliminar delimitadores supérfluos. Divide-se em dois casos:

- a) Eliminar *singletons*.

Exemplo: $[a, (b), c] \implies [a, b, c]$

- b) Eliminar associatividade explícita.

Exemplo: $[a, [b, c]] \implies [a, b, c]$

O algoritmo que coloca estruturas na forma normal realiza os três passos seguintes:

1. elimina unidades a um custo $O(n^2)$;
2. elimina *singletons* a um custo $O(n^2)$;
3. elimina associatividade explícita a um custo $O(n^2)$;

Como os três passos são seqüenciais, o custo final de colocar uma estrutura na forma normal é de $O(n^2)$, o que é, claramente, um custo polinomial.

5.4 Qualidade dos resultados

Como visto no capítulo 4, o algoritmo proposto consiste em uma *tentativa de estratégia*, no sentido de que a demonstração matemática de seu funcionamento ainda não está completa neste estágio da pesquisa. Entretanto, para todos os testes realizados, o `CoSProver` obteve o resultado correto, fornecendo uma demonstração no caso de a estrutura ser demonstrável, ou indicando que a mesma não o é.

Sabemos que a ausência de contra-exemplos não equivale a uma demonstração de correção, mas em se tratando de um campo de pesquisa novo e de um formalismo cujo comportamento operacional ainda não é completamente compreendido, este fato é um indício de o caminho escolhido possa ser promissor ou, no mínimo, que ainda é cedo para descartá-lo sem mais investimento em sua pesquisa.

Capítulo 6

Conclusão

O impacto que o cálculo das estruturas provocou na comunidade de Teoria da Demonstração ainda não foi completamente absorvido. Como um formalismo em muitos casos mais poderoso que o cálculo de seqüentes, aquele mais utilizado até então, o cálculo das estruturas deixou a comunidade muito interessada em entender como ele poderia ser melhor explorado. Após a formalização de diversas lógicas em cálculo das estruturas, como a lógica clássica, a intuicionista, a modal, etc., a atenção tem se voltado para o problema de *como implementar* um sistema que utilize o cálculo das estruturas. A questão central reside no alto grau de não-determinismo que o formalismo apresenta.

Uma idéia é encontrar uma estratégia de demonstrações para o cálculo das estruturas, que torne possível sua implementação, inspirada no conceito de demonstrações uniformes para cálculo de seqüentes. Neste trabalho propusemos uma tentativa de estratégia que atende esse objetivo para um subconjunto do sistema FBV, um subsistema do sistema BV, que corresponde ao fragmento multiplicativo da lógica linear mais a regra mix (MLL + mix+seq). Dizemos *tentativa de estratégia* porque, apesar de se basear em resultados teóricos apresentados formalmente e de ter funcionado perfeitamente em todos os testes que executamos (através da implementação computacional da tentativa de estratégia), a demonstração de sua correção ainda está em curso (apesar de a maior parte do trabalho neste sentido já estar pronta).

Se comprovada, a nossa tentativa de estratégia apresentará como principais contribuições relevantes:

1. A estratégia teria uma fundamentação teórica, e não apenas operacional. O melhor trabalho no sentido de se melhorar a implementação do cálculo das estruturas até então se baseia na redução do não-determinismo do formalismo pela restrição da maneira como se aplicam regras de inferência. Esta é uma abordagem predominantemente operacional, que não captura a essência do processo de demonstração.
2. A estratégia não exigiria *backtracking*: uma vez que se decidisse aplicar uma regra de inferência, ela não precisaria ser reconsiderada mais em nenhum momento. A estratégia manteria a demonstrabilidade da estrutura em cada passo, de forma que seria sempre

possível avançar na busca pela demonstração. Se não for possível avançar a partir de um certo ponto, é porque a estrutura já não era demonstrável desde o princípio.

Como pontos a serem melhorados, podemos levantar as seguintes questões:

1. Ela funcionaria somente para um subsistema do sistema FBV (lógica linear multiplicativa MLL mais a regra mix) em que não houvesse pares de átomos repetidos. É preciso ainda mais trabalho para suportar átomos repetidos e incluir na estratégia a noção de como lidar com a estrutura seq, no sentido de expandí-la para ser usada no sistema BV completo.
2. As estruturas que poderiam ser demonstradas deveriam ter pares de átomos distintos, ou seja, não seriam permitidos dois átomos iguais. Se a estrutura possuísse átomos iguais, seria possível diferenciá-los atribuindo índices diferentes aos átomos. Entretanto, o trabalho de atribuir estes índices parece não ser trivial, pois é preciso ter uma função de escolha $f : \text{occ } S \rightarrow \text{occ } S$. $f(a) = \neg a \wedge a \downarrow \bar{a}$, que é uma condição necessária para uma estrutura ser provável.

Para finalizar, podemos dizer que o trabalho representa um passo, apesar de restrito a um subsistema do sistema BV, importante para o entendimento dos aspectos computacionais do cálculo das estruturas e, sem dúvida, terá certa visibilidade na comunidade de Teoria da Demonstração.

Referências Bibliográficas

- [And92] Jean-Marc Andreoli, *Logic programming with focusing proofs in linear logic*, Journal of Logic and Computation **2** (1992), no. 3, 297–347.
- [Brü06] Kai Brünnler, *Cut elimination inside a deep inference system for classical predicate logic*, Studia Logica **82** (2006), no. 1, 51–71.
- [bur02] Lutz Straßburger, *A local system for linear logic*, Proceedings of LPAR 2002, Lecture Notes in Artificial Intelligence, no. 2514, 2002, pp. 388–402.
- [cos] <http://homepages.dcc.ufmg.br/~msalvim/doc/>.
- [Gen69] Gerhard Gentzen, *Investigations into logical deductions*, The Collected Papers of Gerhard Gentzen (M. E. Szabo, ed.), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969, pp. 68–131.
- [Gir87] Jean-Yves Girard, *Linear logic*, Theoretical Computer Science **50** (1987), 1–102.
- [Gug07] Alessio Guglielmi, *A system of interaction and structure*, ACM Transactions on Computational Logic **8** (2007), 1–64.
- [Hod93] Joshua S. Hodas, *Logic programming with multiple context management schemes*, Proceedings of the 1993 Workshop on Extensions to Logic Programming (Roy Dyckhoff, ed.), Lecture Notes in Artificial Intelligence, no. 798, 1993, pp. 171–182.
- [Kah04] Ozan Kahramanogullari, *Implementing system bv of the calculus of structures in maude*, Proceedings of ESSLI 2004 - Student Session (2004).
- [Kah06] ———, *Reducing nondeterminism in the calculus of structures*, LPAR (2006).
- [Mil83] Dale A. Miller, *Proofs in higher-order logic*, Ph.D. thesis, Carnegie-Mellon University, August 1983.
- [Mil96] Dale Miller, *Forum: A multiple-conclusion specification language*, Theoretical Computer Science **165** (1996), no. 1, 201–232.
- [MN87] Dale Miller and Gopalan Nadathur, *λ Prolog Version 2.6*, Distribution in C-Prolog sources, August 1987.

- [MNPS91] Dale Miller, Gopalan Nadathur, Frank Pfenning, and Andre Scedrov, *Uniform proofs as a foundation for logic programming*, *Annals of Pure and Applied Logic* **51** (1991), 125–157.
- [NvP01] Sara Negri and Jan von Plato, *Structural proof theory*, 2001.
- [SS04] Charles Stewart and Phiniki Stouppa, *A systematic proof theory for several modal logics*, *Proceedings of Advances in Modal Logic* (2004), 309–333.
- [Tiu06a] Alwen Tiu, *A local system for intuitionistic logic*, *LNAI* **4246** (2006), 242–256.
- [Tiu06b] _____, *A system of interaction and structure ii: The need for deep inference*, *Logical Methods in Computer Science* **2** (2006), no. 2:4, 1–24.