

Márcio F. Santos Barroso

# Métodos de Otimização Mono-Objetivo Aplicados à Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais



*"Democracia não é o direito de ser diferente, e sim,  
ser diferente e ter os mesmos direitos"*

**Shimon Peres**



# Resumo

O uso de conhecimento *a priori* em identificação de sistemas, como ferramenta auxiliar para a melhoria da estrutura e para a estimação de parâmetros vem se destacando nos últimos anos.

Com esse propósito, o presente trabalho parte das definições gerais em identificação caixa-preta (sem uso de conhecimento *a priori*) e das características gerais da estrutura dos modelos NARX polinomiais, para definir uma metodologia que permita usar conhecimento *a priori* nas etapas de escolha de estrutura e estimação de parâmetros de tais modelos utilizando-se ferramentas de otimização.

Para avaliação da metodologia foram escolhidos dois sistemas: um conversor CC-CC Buck, sendo que os dados de identificação estão contidos em uma estreita faixa de operação, o que torna a identificação de um modelo global difícil; e um sistema térmico, sendo que os dados estáticos estão contidos nos dados dinâmicos.

Os resultados descritos sugerem que é possível identificar modelos dinâmicos na presença de restrições que forçam o modelo a ter certas características pré definidas em estado estacionário. Em geral, os modelos identificados fazendo-se uso de informação *a priori*, tem um comportamento global melhor de que seus análogos obtidos por técnicas caixa-preta.



# Abstract

The use of prior knowledge in system identification, as an auxiliary tool in learning dynamics for data has received great attention over the last decade.

The present work aims at defining a methodology that allows to use prior knowledge in the stages of structure selection and parameter estimation by means of optimization tools. This approach uses general definitions, known in the field of black-box identification and some more recently defined properties of polynomial NARX models.

To evaluate this methodology two systems have been studied (i) a DC-DC Buck converter, for which identification data are limited to a narrow band of operation, what makes the global model identification difficult; and (ii) a thermal system, for which the dynamic data include steady-state information over a wide range of operating points.

The results suggest that it is possible to identify dynamic models in the presence of restrictions that enforce the model to have certain defined properties in steady state. In general, the global behavior of identified models using prior information outperform the black-box counterparts.



# Agradecimentos

Dedico este trabalho aos meus pais Maria Alice e Ivan Barroso, à minha irmã Maria Aída e à minha noiva Marinês.

Agradeço aos Professores e amigos do MACSIN, CPDEE e CPH pela força e ajuda nos momentos mais difíceis, aos amigos do LABSIS - FUNREI, onde tive o meu primeiro contato com a pesquisa.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho não seria possível.

Um especial agradecimento aos Professores Luis Aguirre e Eduardo Mendes por acreditarem em mim.



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>ix</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xix</b>
<b>Abreviações</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Apresentação do Trabalho . . . . .	4
<b>2 Identificação Caixa-Preta e Modelos Polinomiais</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Identificação de Sistemas . . . . .	7
2.3 Experimentação do Sistema . . . . .	8
2.4 Detecção de Não-Linearidades . . . . .	9
2.5 Escolha de Representação e de Estrutura . . . . .	9
2.5.1 Detecção de estrutura . . . . .	11
2.5.2 Detecção de estrutura utilizando ERR . . . . .	11
2.5.3 Critério de informação de Akaike . . . . .	12
2.6 Agrupamentos de Termos e Coeficientes de Agrupamentos . . . . .	13
2.6.1 Agrupamento espúrio em modelos polinomiais . . . . .	14
2.7 Estimação de Parâmetros . . . . .	14
2.7.1 Mínimos quadrados estendidos . . . . .	17
2.8 Validação do Modelo . . . . .	18
2.9 Comentários Finais . . . . .	19

<b>3</b>	<b>Identificação Caixa-Cinza - Estado da Arte</b>	<b>21</b>
3.1	Introdução . . . . .	21
3.2	Aspectos Práticos . . . . .	21
3.3	Comparação Entre os Tipos de Modelagem . . . . .	23
3.4	Retrospectiva Histórica . . . . .	24
3.5	Comentários Finais . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Propriedades da Estrutura de Modelos NARX Polinomiais</b>	<b>29</b>
4.1	Introdução . . . . .	29
4.2	Pontos Fixos em Sistemas Autônomos . . . . .	29
4.2.1	Pontos fixos em sistemas não autônomos . . . . .	30
4.2.2	Estabilidade de pontos fixos . . . . .	32
4.2.3	Simetria de pontos fixos . . . . .	33
4.3	A Função de Autovalores . . . . .	34
4.3.1	Para modelos de primeira ordem . . . . .	34
4.3.2	Para modelos de ordem superior . . . . .	36
4.4	O Ganho Estático . . . . .	39
4.5	Comentários Finais . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Metodologia Caixa-Cinza e Modelos NARX Polinomiais</b>	<b>43</b>
5.1	Introdução . . . . .	43
5.2	Definição do Problema . . . . .	44
5.3	Roteiros Para Identificação Caixa-Cinza . . . . .	45
5.3.1	Roteiro para a etapa de escolha de estrutura . . . . .	45
5.3.2	Roteiro para a etapa de estimação de parâmetros . . . . .	46
5.4	Definição das Funções-Objetivo . . . . .	49
5.4.1	Ajuste de curva . . . . .	49
5.4.2	Estimação dos parâmetros . . . . .	51
5.5	Descrição dos Algoritmos de Otimização . . . . .	52
5.5.1	O algoritmo Quase-Newton BFGS . . . . .	53
5.5.2	O algoritmo elipsoidal . . . . .	54
5.5.3	O estimador de mínimos quadrados restritos . . . . .	55
5.6	Comentários Finais . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Identificação de um Aquecedor Elétrico</b>	<b>59</b>
6.1	Introdução . . . . .	59
6.2	Aquecedor com Dissipação Variável . . . . .	59
6.2.1	Descrição do Sistema . . . . .	60
6.2.2	Teste Dinâmico . . . . .	60
6.2.3	Teste Estático . . . . .	62
6.3	Identificação de Aquecedor Elétrico . . . . .	63

6.3.1	Utilizando o roteiro (5.3.1) e MQ . . . . .	64
6.3.2	Utilizando o roteiro (5.3.2) e MQR . . . . .	70
6.3.3	Utilizando o roteiro (5.3.2) e o algoritmo elipsoidal . . . . .	73
6.3.4	Comparação entre os algoritmos . . . . .	76
6.4	Comentários Finais . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Identificação de um Conversor Estático</b>	<b>79</b>
7.1	Introdução . . . . .	79
7.2	Conversor CC-CC Buck . . . . .	80
7.2.1	Descrição do Sistema . . . . .	80
7.2.2	Teste Dinâmico . . . . .	80
7.2.3	Característica estática . . . . .	82
7.3	Identificação do Conversor CC-CC Buck . . . . .	83
7.3.1	Utilizando o roteiro (5.3.1) e MQ . . . . .	85
7.3.2	Utilizando o roteiro (5.3.2) e MQR . . . . .	89
7.3.3	Utilizando o roteiro (5.3.2) e o algoritmo elipsoidal . . . . .	92
7.3.4	Comparação entre os algoritmos . . . . .	95
7.4	Comentários Finais . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Conclusões Gerais e Trabalhos Futuros</b>	<b>103</b>
8.1	Introdução . . . . .	103
8.2	O Problema . . . . .	103
8.3	A Detecção de Estrutura . . . . .	104
8.4	A Estimacão de Parâmetros . . . . .	104
8.5	Os Algoritmos Utilizados . . . . .	105
8.6	Trabalhos Futuros . . . . .	106
	<b>Bibliografia</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Funções Computacionais</b>	<b>115</b>
A.1	Linguagem de Programação . . . . .	116
A.2	As Funções Computacionais . . . . .	116
A.2.1	Função genterms . . . . .	117
A.2.2	Função mcand . . . . .	117
A.2.3	Função akaike . . . . .	118
A.2.4	Função myhouse . . . . .	119
A.2.5	Função orthreg . . . . .	119
A.2.6	Função coefc . . . . .	120
A.2.7	Função fminunc . . . . .	121
A.2.8	Função curvefit . . . . .	121
A.2.9	Função simodeld . . . . .	121

A.2.10	Função <code>rmse</code> . . . . .	122
A.2.11	Função <code>mqr</code> . . . . .	122
A.2.12	Função <code>elipnarx</code> . . . . .	123
A.3	As funções <code>build_pr</code> e <code>build_no</code> . . . . .	123
A.4	A função <code>agrup</code> . . . . .	124

# Lista de Tabelas

4.1	Agrupamentos de termos que devem ser considerados em modelos polinomiais para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Aguirre and Mendes, 1996), de acordo com o grau de não-linearidade (primeira coluna). . . . .	34
4.2	Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX polinomiais (Corrêa, 2001). . . . .	36
4.3	Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da equação característica de modelos NARX polinomial (Corrêa, 2001). . . . .	39
4.4	Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho estático de modelos NARX polinomiais (Corrêa, 2001). . . . .	40
6.1	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.2) . . . .	66
6.2	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.9) . . . .	71
6.3	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.12) . . . .	74
6.4	Comparação entre os parâmetros estimados dos modelos (6.2), (6.9), (6.12). . . . .	76
6.5	Comparação entre os coeficientes dos agrupamentos de termos dos modelos (6.2), (6.9), (6.12). . . . .	76
6.6	Comparação entre os valores RMSE dos modelos (6.2), (6.9), (6.12). . . . .	77
7.1	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.5) . . . .	87
7.2	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.11) . . . .	90
7.3	Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.14). . . .	92
7.4	Comparação entre os parâmetros estimados dos modelos (7.5), (7.11), (7.14). . . . .	95
7.5	Comparação entre os coeficientes dos agrupamentos de termos dos modelos (7.5), (7.11), (7.14). . . . .	96

7.6	Comparação entre os valores RMSE dos modelos (7.5), (7.11), (7.14). . . . .	96
7.7	Comparação entre os valores RMSE dos modelos (7.3), (7.21), (7.25). . . . .	99

# Lista de Figuras

6.1	Diagrama em blocos funcionais do sistema (aquecedor). . . . .	60
6.2	Dados de identificação - Aquecedor . . . . .	61
6.3	Dados de validação - Aquecedor . . . . .	62
6.4	Dados estáticos - Aquecedor . . . . .	63
6.5	Validação Dinâmica - Aquecedor - MQ . . . . .	67
6.6	Validação Estática - Aquecedor - MQ . . . . .	67
6.7	Validação Dinâmica - Aquecedor - sem conhecimento a priori .	68
6.8	Validação Estática - Aquecedor - sem conhecimento a priori - primeiro ponto fixo . . . . .	68
6.9	Validação Estática - Aquecedor - sem conhecimento a priori - segundo ponto fixo . . . . .	69
6.10	Validação Dinâmica - Aquecedor - MQR . . . . .	72
6.11	Validação Estática - Aquecedor - MQR . . . . .	73
6.12	Validação Dinâmica - Aquecedor - Elipsoidal . . . . .	75
6.13	Validação Estática - Aquecedor - Elipsoidal . . . . .	75
7.1	Conversor buck . . . . .	80
7.2	Dados de identificação - Buck . . . . .	81
7.3	Dados de validação - Buck . . . . .	82
7.4	Dados estáticos - Buck . . . . .	83
7.5	Validação Dinâmica - Conversor - IEEE . . . . .	84
7.6	Validação Estática - Conversor - IEEE . . . . .	85
7.7	Validação Dinâmica - Conversor - MQ . . . . .	88
7.8	Validação Estática - Conversor - MQ . . . . .	88
7.9	Validação Dinâmica - Conversor - MQR . . . . .	91
7.10	Validação Estática - Conversor - MQR . . . . .	92
7.11	Validação Dinâmica - Conversor - ELIP . . . . .	94
7.12	Validação Estática - Conversor - ELIP . . . . .	94
7.13	Validação Dinâmica - Conversor - Corrêa (2001) . . . . .	99
7.14	Validação Estática - Conversor - Corrêa (2001) . . . . .	100
7.15	Validação Dinâmica do Modelo (7.25) . . . . .	100
7.16	Validação Estática do Modelo (7.25) . . . . .	101



# Nomenclatura

$\phi_{yy}$	Função de autocorrelação linear
$\phi_{y^2y^2}$	Função de autocorrelação não-linear
$E[.]$	Operador esperança matemática
$\tau_m$	Atraso da função de autocorrelação
$T_s$	Tempo de amostragem
$F^\ell$	Função genérica com grau de não-linearidade $\ell$
$y(k-i)$	Regressor de saída
$u(k-j)$	Regressor de entrada
$e(k)$	Incerteza matemática
$n_y$	Máximo atraso do regressor de saída
$n_u$	Máximo atraso do regressor de entrada
$n_e$	Máximo atraso do regressor de ruído
$d$	Atraso puro de tempo
$k$	Tempo discreto
$\theta_i$	Parâmetro do modelo NARX polinomial
$\theta$	Vetor de parâmetros
Var.	Variância matemática
$\xi(k)$	Erro de modelagem
$g_i$	Parâmetros ortogonais
$g$	Vetor de parâmetros ortogonais
$w_i$	Regressor ortogonal
$w$	Matriz de regressores ortogonais
$J$	Função custo genérica
$n_p$	Número de termos de processo
$\Omega_{y^p u^{m-p}}$	Agrupamento de termos
$\Sigma_{y^p u^{m-p}}$	Coefficiente de agrupamento e termos
$p_i$	Regressor do modelo NARX
$\mathbf{P}$	Matriz de regressores
$\hat{\phantom{x}}$	Valor estimado
$\nu$	Ruído branco

$\nu(k - i)$	Regressor de ruído em um modelo NARMAX
$c_i$	Parâmetro de ruído em um modelo NARMAX
$\mathbf{P}^*$	Matriz de regressores estendida
$\theta^*$	Vetor de parâmetros estendido
$f(\cdot)$	Função matemática
$\dot{x}$	Derivada primeira
$\mathbf{S}$	Mapeamento linear
$\det[\cdot]$	Determinante
$\mathbf{D}_f$	Matriz Jacobiana
$\mathbf{I}$	Matriz Identidade
$t$	Tempo contínuo
$\infty$	Infinito matemático
$\mathbf{R}$	Espaço dos números reais
$z$	Domínio da frequência complexo
$s$	Domínio da frequência contínuo
$\mathbf{B}$	Matriz de entradas no espaço de estados discreto
$x_i$	Sinal do sistema
$-$	Indica valores estáticos
$\lambda$	Autovalor discreto
$\ln$	Logaritmo na base $e$
$K$	Ganho estático
$\tau$	Função de autovalores
$\mathbf{c}$	Vetor de restrições
$\mathbf{g}(\cdot)$	Função das restrições de igualdade
$\nabla$	Gradiente de $f(\cdot)$
$B_k$	Inversa da Hessiana na iteração $k$
$\mathbf{Z}^+$	Espaço dos números inteiros positivos
$d(\cdot)$	Função custo para um problema dual
$\mathbf{v}$	Multiplicador de Lagrange
$P$	Problema primal
$D$	Problema dual

# Abreviações

NARX	Modelos não-lineares auto-regressivos com entradas exógenas
ERR	Taxa de redução de erro
AIC	Critério de informação de Akaike
MQ	Mínimos quadrados convencionais
MQE	Mínimos quadrados estendidos
NARMAX	Modelos não-lineares auto-regressivos com média móvel e entrada exógena
RMSE	Raíz do erro médio quadrático
BFGS	Algoritmo Quase-Newton
ELIP	Algoritmo Elipsoidal
MQR	Mínimos quadrados restritos
KTE	Condições de otimalidade de Kuhn-Tucker
p.u.	Valor por unidade
CC	Corrente contínua
AC	Corrente alternada
PWM	Modulação por largura de pulso



# Capítulo 1

## Introdução

A modelagem matemática, como ferramenta para reprodução do comportamento aproximado de fenômenos físicos, vem se destacando nas últimas décadas, seja para analisar as relações de causa e efeito em dados observados (Aguirre, 2000b), seja para o desenvolvimento de controladores (Simutis et al., 1997; Agarwal, 1997; Demircan et al., 1999; Norgaard et al., 1997; Davis and Vinter, 1985).

Justificado pela complexidade dos modelos não-lineares (Billings, 1980), os modelos lineares foram muito utilizados para representar o comportamento de sistemas em uma faixa restrita de operação. Os modelos lineares foram importantes para o desenvolvimento da modelagem pois permitiram o entendimento local dos fenômenos.

Com o desenvolvimento tecnológico, principalmente na área computacional, foi possível o desenvolvimento de técnicas de modelagem não-lineares. Billings (1980) apresenta um estudo muito importante a respeito da modelagem não-linear, onde são citadas técnicas como o método de Wiener, séries de Volterra, entre outras.

Outras representações foram surgindo com o passar dos anos. Na década de oitenta, destaca-se o aparecimento dos modelos NARMAX polinomiais, da sigla em inglês (*Nonlinear AutoRegressive with Moving Average and eXogenous input*) (Leontaritis and Billings, 1985a) e racionais (Billings and Chen, 1989). Já no fim daquela década as redes neurais artificiais começaram a ser usadas para representar sistemas dinâmicos (Billings and Zhu, 1994; Alessandri and Parisini, 1997; Cubillos and Lima, 1997; Lindskog and Ljung, 1995a; Norgaard et al., 1997; Psychogios and Ungar, 1992; Forssell and Lindskog, 1997).

Um dos problemas mais citados na literatura é a dificuldade na etapa de escolha de estrutura. Com o intuito de pesquisar esse problema, vários pesquisadores buscaram soluções para esse problema (Haber and Unbehauen,

1990; Breeden and Packard, 1994; Mao and Billings, 1997). Em (Aguirre and Billings, 1995b), por exemplo, os autores discutem o problema de sobreparametrização em modelos não-lineares utilizando representações polinomiais NARMAX.

Outra maneira de se contornar esse problema é a incorporação de conhecimento a priori ao processo de identificação. Tal conhecimento permite a escolha de uma estrutura que o represente, seja esse uma característica em estado estacionário, relações físicas, limites operacionais, entre outros. A partir da possibilidade de incorporação desse conhecimento à identificação, surge uma nova classificação para esses (Herbert and Tulleken, 1993; Sjöberg et al., 1995; Bohlin and Graebe, 1995):

**modelagem caixa-branca:** *a partir da física do processo;*

**modelagem caixa-preta:** *sem nenhum conhecimento prévio do sistema;*

**modelagem caixa-cinza:** *utilização de conhecimento prévio.*

No capítulo 3 deste trabalho são apresentados vários trabalhos que utilizam conhecimento a priori nas etapas de identificação de sistema. Além disso serão apresentados as dificuldades, vantagens e desvantagens dessa abordagem em relação aos análogos caixa-preta e caixa-branca.

## 1.1 Motivação

Como poderá ser visto no capítulo 3, uma grande dificuldade na identificação caixa-preta é garantir que os dados utilizados na escolha de estrutura e estimação de parâmetros tenham todas as informações necessárias para que as ferramentas utilizadas sejam eficientes (Tulleken, 1993; Herbert and Tulleken, 1993).

Na prática, testes para obtenção de dados de identificação estão amarrados aos limites operacionais do sistema a ser modelado. Em sistemas industriais, por exemplo, não é desejável que a produção seja interrompida para se efetuar testes para coleta de dados. Na maioria das vezes o sinal de excitação do sistema é variado em uma pequena faixa de amplitude e frequência. Estruturas e parâmetros estimados a partir de dados com essas características só serão capazes de representar, em geral, o sistema na faixa de operação dos dados (Aguirre et al., 2000).

A motivação deste trabalho, é definir estratégias para incorporação de conhecimento a priori nas etapas de escolha de estrutura e estimação de parâmetros baseadas na literatura especializada, em função da representação

matemática escolhida, como uma tentativa de se obter modelos mais representativos numa faixa mais ampla de operação dos sistemas, mesmo que os dados dinâmicos estejam restritos a uma pequena faixa de operação.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho considera o seguinte problema: De posse dos dados de entrada e saída do sistema e de conhecimento prévio a respeito do comportamento em estado estacionário, deseja-se obter um modelo NARX polinomial que minimize o erro de predição um passo à frente. Em outras palavras, deseja-se que o modelo seja capaz de representar dinamicamente o sistema original e ao mesmo tempo aproxime da melhor forma possível a característica estática do sistema original. Para solucionar tal problema optou-se pelo uso do conhecimento a priori na etapa de escolha de estrutura e de estimação de parâmetros.

Algumas soluções são conhecidas na literatura e serão apresentadas no capítulo 3. Em geral, essas soluções não partem do conhecimento das características da representação utilizada (em sua maioria redes neurais artificiais ou modelos lineares). Elas utilizam, na maioria das vezes, um bloco obtido a partir de leis físicas de uma parte conhecida do processo e de um outro bloco em série obtido utilizando-se técnicas caixa-preta para modelar a parte desconhecida do processo. De forma distinta, este trabalho apresenta uma metodologia desenvolvida exclusivamente para representações polinomiais, baseando-se principalmente nas características dinâmicas e estáticas de tais modelos. Dois trabalhos anteriores que usaram conceitos e princípios semelhantes destacam-se, a saber: (Jácome, 1996) e (Corrêa, 2001).

Em (Jácome, 1996) o autor disserta a respeito do uso de conhecimento a priori em identificação de sistemas utilizando-se modelos NARMAX polinomiais, sendo um ponto de partida importante para o presente trabalho.

Em (Corrêa, 2001) o autor desenvolve dois algoritmos para incorporação de conhecimento a priori, um para a etapa de escolha de estrutura e outro para a etapa de estimação de parâmetros. Dois aspectos são particularmente importantes na metodologia desenvolvida naquele trabalho: o primeiro é a alternativa entre as representações polinomial e racional, dependendo do tipo de informação a priori a ser utilizada; o segundo aspecto é a utilização de ferramentas de otimização para o levantamento (função custo linear nos parâmetros) e a imposição de restrições aos parâmetros do modelo (utilizando-se o algoritmo elipsoidal).

Diferentemente de (Corrêa, 2001), o presente trabalho é dedicado exclusivamente à representação NARX polinomial. A consequência disso é a

utilização de funções-custo não-lineares nos parâmetros na etapa de levantamento de restrições (necessidade de utilização de ferramentas iterativas), dependendo do conhecimento a priori utilizado.

Outra preocupação deste trabalho foi apresentar uma alternativa de implementação para o algoritmo elipsoidal que fosse inteiramente compatível com a representação polinomial. Além do algoritmo elipsoidal foi testado também um algoritmo não iterativo que recebe o nome de Mínimos Quadrados Restritos.

Em resumo, os principais objetivos do trabalho são:

1. desenvolver uma metodologia alternativa aplicável exclusivamente aos modelos NARX polinomiais;
2. implementar uma forma alternativa para o algoritmo elipsoidal específica para modelos NARX polinomiais;
3. testar os Mínimos Quadrados Restritos como uma alternativa ao algoritmo elipsoidal.

### 1.3 Apresentação do Trabalho

Este trabalho apresenta de forma gradativa os conhecimentos teóricos e funcionais para a compreensão dos exemplos práticos apresentados. Assim, no capítulo 2 será feita uma revisão bibliográfica contendo de forma resumida e geral os conceitos envolvidos no âmbito da identificação caixa-preta de sistemas aplicados aos modelos NARMAX polinomiais. No capítulo 3 será feita uma revisão bibliográfica a respeito da identificação caixa-cinza com o intuito de contextualizar este trabalho em relação ao estado da arte da identificação caixa-cinza. No capítulo 4 serão apresentadas as características estruturais dos modelos NARX polinomiais que permitem extrair características em estado estacionário. A definição dessas características será fundamental para o desenvolvimento de uma metodologia caixa-cinza. O capítulo 5 apresenta, baseado nas características estruturais dos modelos polinomiais e nos conceitos de identificação caixa-preta, uma metodologia para a incorporação de conhecimento a priori nas etapas de detecção de estrutura e estimação de parâmetros, além de definir as ferramentas computacionais a serem utilizadas. A avaliação do desempenho da metodologia e das ferramentas desenvolvidas será feita nos capítulos 6 e 7. No capítulo 6 será utilizado um aquecedor com dissipação variável em que os dados de identificação excursionam uma ampla faixa de operação, no capítulo 7 será utilizado um conversor estático CC-CC Buck, em que os dados são limitados a uma

estreita faixa de operação. No capítulo 8 serão feitos os comentários finais a respeito do trabalho com indicações de trabalhos futuros. Será ainda apresentada no Apêndice a descrição das funções computacionais utilizadas neste trabalho.



# Capítulo 2

## Identificação Caixa-Preta de Sistemas Aplicada aos Modelos NARMAX polinomiais

### 2.1 Introdução

Em seu princípio, a identificação de sistemas era feita assumindo a linearidade dos sistemas a serem estudados. Essa aproximação era considerada boa uma vez que havia significativas restrições teóricas e computacionais. Muitos regimes dinâmicos, entretanto, não podem ser caracterizados por aproximações lineares. Dentre estes regimes dinâmicos podem-se citar as bifurcações, bilinearidades, os ciclos limites, caos entre outros.

Muitos trabalhos durante as últimas décadas foram publicados com a esperança de solucionar ou mesmo discutir os problemas de identificação não-linear (Box and Jenkins, 1976; Billings and Fadzil, 1985; Aström and Eykhoff, 1971; Akaike, 1974; Billings and Voon, 1984).

O objetivo desse capítulo é fazer uma breve revisão da literatura a respeito de identificação caixa-preta de sistemas não-lineares.

### 2.2 Identificação de Sistemas

O problema de identificação de sistemas pode ser dividido nas cinco etapas principais descritas a seguir (Ljung, 1987):

- obtenção de dados de experimentação do sistema que se deseja modelar;
- aplicação de testes aos dados obtidos para detecção de não-linearidades;

- escolha da estrutura que será utilizada para representar o sistema;
- estimação dos parâmetros do modelo;
- validação do modelo obtido.

Essas etapas são comuns tanto para sistemas que apresentam comportamento aproximadamente linear quanto para sistemas não-lineares. Nas seções seguintes será feito um breve comentário a respeito dessas etapas com indicações da bibliografia recomendada.

## 2.3 Experimentação do Sistema

Nesta primeira etapa deve-se considerar o sistema a ser estudado e submetê-lo a entradas predeterminadas observando-se as saídas correspondentes. Os dados de saída, conhecidos como dados de identificação, deverão ser usados na detecção da não-linearidade e na estimação de parâmetros do modelo escolhido.

É desejável que os sinais de excitação do sistema tenham um espectro de frequências que venham excitar persistentemente a dinâmica de interesse do sistema. No caso de sistemas não-lineares, isso requer que os efeitos não-lineares sejam excitados por esses sinais e assim estejam presentes nos dados de identificação (Aguirre, 2000a). Em sistemas não-lineares, uma pequena variação na amplitude do sinal de entrada pode provocar mudanças qualitativas no comportamento dinâmico dos mesmos. Outro aspecto importante é a escolha do tempo de amostragem dos dados de identificação.

Um procedimento muito utilizado para a escolha do melhor tempo de amostragem dos dados de identificação é a análise da autocorrelação linear  $\phi_{y'y'}$  (2.1) e não-linear (2.2)  $\phi_{y^2'y^2'}$  do sinal desejado (Aguirre, 1995)

$$\phi_{y'y'}(\tau) = E[(y(k) - \bar{y}(k))(y(k - \tau) - \bar{y}(k))], \quad (2.1)$$

$$\phi_{y^2'y^2'}(\tau) = E[(y^2(k) - \bar{y}^2(k))(y^2(k - \tau) - \bar{y}^2(k))], \quad (2.2)$$

em que  $\bar{y}(k)$  e  $\bar{y}^2(k)$  representam os valores médios e o apóstrofe ( $'$ ), neste caso, indica que a média foi extraída dos sinais. Com base nas funções de autocorrelação descritas acima pode-se chegar à seguinte constante:

$$\tau_m = \min\{\tau_{y'}, \tau_{y^2'}\}, \quad (2.3)$$

em que  $\tau_{y'}$  é o instante do primeiro mínimo de  $\phi_{y'y'}(\tau)$  e  $\tau_{y^2'}$  é o instante do primeiro mínimo de  $\phi_{y^2'y^2'}(\tau)$ .

Desta maneira, é desejável que o período de amostragem do sinal respeite a seguinte relação:

$$\frac{\tau_m}{25} \leq \tau_s \leq \frac{\tau_m}{5}. \quad (2.4)$$

Então, se o sinal com amostragem  $\tau$  estiver dentro da faixa estabelecida acima, o sinal pode ser utilizado. Caso contrário, se o sinal estiver violando o limite superior de (2.4), então faz-se necessário decimar os sinais até que estes se encontrem dentro da faixa. Caso o sinal viole a restrição inferior, será necessário repetir o teste usando-se uma maior taxa de amostragem na aquisição dos dados.

## 2.4 Detecção de Não-Linearidades

Os dados de identificação devem passar por processos de detecção de não-linearidades. Esses testes verificam, dentro de um limite de confiança pré-determinado, se o sistema possui algumas características próprias dos sistemas lineares. Caso não sejam verificadas essas propriedades, é necessário então a utilização de modelos não-lineares para aproximar as características do mesmo.

Por exemplo, a relação abaixo (Billings and Voon, 1983, 1986)

$$\phi_{y^2 y^2}(\tau) = E[(y^2(k) - \bar{y}^2(k))(y^2(k - \tau) - \bar{y}^2(k))] = 0 \quad \forall \tau \quad (2.5)$$

é válida se o sistema for linear. Um intervalo delimita a região de confiança dentro da qual a função de correlação pode ser considerada nula. Os limites deste intervalo em 95% são dados por:  $\pm 1,96/\sqrt{N}$ , em que  $N$  é o comprimento do registro de dados disponível. É recomendável que o sistema que gerou tais dados de identificação seja representado por modelos não-lineares se a função de correlação acima estiver fora da referida região de confiança.

## 2.5 Escolha de Representação e de Estrutura

Na modelagem de sistemas não-lineares um dos passos importantes é a escolha dos modelos que irão representar o sistema em estudo, uma vez que existe uma grande diversidade de não-linearidades distintas. O modelo escolhido deve ser suficientemente rico para poder representar as não-linearidades mas, ao mesmo tempo, simples.

Neste trabalho, foram utilizados os modelos não-lineares auto-regressivas com entrada exógena conhecida pela sigla em inglês NARX (*non-linear auto-regressive with exogenous inputs*), que são estruturas paramétricas do tipo

entrada/saída ( $I/O$ ), capazes de representar uma grande variedade de sistemas não-lineares (Billings and Chen, 1989).

Um modelo NARX com período de amostragem normalizado é (Leontaritis and Billings, 1985a,b; Billings and Chen, 1989):

$$y(k) = F^\ell[y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-d-1), \dots, \dots, u(k-d-n_u+1)] + e(k), \quad (2.6)$$

sendo  $k = 1, \dots, N$ .  $F^\ell$  é uma função não-linear qualquer,  $y(k)$  e  $u(k)$  são, respectivamente, saída e entrada do sistema, que têm seus atrasos representados por  $n_y$  e  $n_u$  respectivamente.  $d$  representa o tempo de retardo do sistema e  $e(k)$  representa incertezas. Os termos  $y(k-i)$ , com  $(i = 1, \dots, n_y)$  e  $u(k-j)$ , com  $(j = 1, \dots, n_u)$  são chamados de regressores de processo do modelo.

Neste trabalho  $F^\ell$  será uma função polinomial com grau de não-linearidade  $\ell$ , como definida a seguir:

$$y(k) = \theta_o + \sum_{i_1}^n \theta_{i_1} x_{i_1} + \sum_{i_1}^n \sum_{i_2}^n \theta_{i_1 i_2} x_{i_1}(k) x_{i_2}(k) + \dots + \sum_{i_1}^n \dots \sum_{i_\ell=i_{\ell-1}}^n \theta_{i_1 \dots i_\ell} x_{i_1}(k) \dots + x_{i_\ell}(k) + e(k), \quad (2.7)$$

sendo

$$x_1(k) = y(k-1), \quad x_2(k) = y(k-2), \dots, \quad x_{n_y+1} = u(k-d), \dots, \\ x_{n_y+n_u+1}(k) = e(k-1), \dots, \quad x_n(k) = e(k-n_e). \quad n = n_y + n_u + n_e$$

Os  $\theta$ 's são os parâmetros que deverão ser estimados para que a estrutura escolhida para o modelo possa se ajustar à janela de dados utilizadas na estimação. É esperado também que o modelo não só se ajuste aos dados, mas principalmente que ele possa reproduzir a dinâmica original do sistema.

Apesar de ser impossível definir a melhor representação em termos gerais, podem-se destacar algumas vantagens dos modelos polinomiais sobre outras representações. É possível obter modelos NARX polinomiais que ajustem os modelos de identificação com boa exatidão, contanto que não haja uma variação muito brusca, evitando uma taxa de variação muito elevada. Além disso o modelo NARX polinomial pode ser transformado em uma representação linear fixando-se o ponto de operação do sistema, ou seja, obtendo-se

uma linearização do modelo. Outra vantagem é a facilidade de se obter informações analíticas sobre a dinâmica e as características em estado estacionário do modelo (Jácome, 1996) .

As funções não-lineares polinomiais são lineares nos parâmetros, o que permite a utilização de algoritmos de estimação de parâmetros para sistemas lineares (Billings and Voon, 1984; Chen et al., 1989). Esses algoritmos de estimação são fáceis de implementar, convergem rapidamente e já foram estudados em um vasto número de trabalhos (Davis and Vinter, 1985; Korenberg et al., 1988; Chen et al., 1989; Aström and Witternmark, 1990).

### 2.5.1 Detecção de estrutura

O grau de não-linearidade é um dos fatores que vai definir o número de termos candidatos, ou seja, termos possíveis nos modelos polinomiais. O aumento no grau de não-linearidade  $\ell$  e dos máximos atrasos  $n_y$  e  $n_u$ , provocam um aumento significativo no número de termos candidatos no modelo polinomial.

O número de termos rapidamente se torna demasiadamente grande para modelos polinomiais. Mas o problema não é tão crítico como em outras representações. Nas séries de Volterra, por exemplo, o número de termos pode facilmente chegar a  $10^{10}$  para sistemas relativamente simples (Billings, 1980). Embora o número de termos do modelo polinomial seja muito grande, em muitos casos, apenas um pequeno número desses termos é suficiente para aproximar a dinâmica do processo. É desejável a obtenção de uma representação parcimoniosa, garantindo que os termos importantes sejam levados em conta e descartando só os termos que não contribuem para a dinâmica do sistema. O procedimento para a escolha dos termos a serem incluídos no modelo é chamado de detecção de estrutura.

### 2.5.2 Detecção de estrutura utilizando ERR

A taxa de redução de erro (*erro reduction ratio*) ou ERR (Billings et al., 1989) associa a cada termo candidato um índice correspondente à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída.

Para ver isso de forma matemática, primeiro define-se a variância do erro de modelagem  $\xi(k)$  como sendo:

$$\text{Var}\{\xi(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \sum_{i=1}^n g_i^2 w_i^T w_i \right], \quad (2.8)$$

em que  $g_i$  indica os elementos do vetor de parâmetros  $g$  e  $w_i$  indica regressores ortogonais e  $\mathbf{y}$  é o vetor contendo os dados de saída.<sup>1</sup>

Supondo que nenhum termo fosse acrescentado ao modelo, a variância de  $\xi(k)$  seria igual ao erro quadrático da saída  $y(k)$ . A cada termo acrescentado, a variância de  $\xi(k)$  decresce de um fator igual a  $\frac{1}{N}(g_i^2 w_i^T w_i)$ , em que  $w_i$  indica o termo incluído e  $g_i$  o seu respectivo parâmetro. A redução no valor da variância pode ser normalizada com relação ao erro quadrático médio do sinal de saída. Assim, o ERR de cada termo é definido como sendo:

$$[ERR] = \frac{(g_i^2 w_i^T w_i)}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}. \quad (2.9)$$

O ERR pode ser utilizado na detecção de estrutura de modelos polinomiais. Escolhe-se o número de termos desejado, através de uma ferramenta auxiliar, o critério de Akaike, por exemplo e consideram-se aqueles que possuem os maiores valores de ERR.

### 2.5.3 Critério de informação de Akaike

Um procedimento para a determinação do número de termos de um modelo é o critério de informação. O método utilizado nesse trabalho para estimar o número de termos que devem ser incluídos no modelo é o critério de Akaike (AIC). De acordo com este método, o número de termos de um modelo deve minimizar a função custo  $J$ , que se apresenta da seguinte maneira:

$$J = N \log(\text{Var}\{\xi(k)\}) + 2n_p, \quad (2.10)$$

sendo  $N$  o comprimento do registro de dados e  $n_p$  é o número de termos de processo no modelo. Esse critério estabelece um compromisso entre a qualidade dos ajustes de identificação, contida no primeiro termo da equação e a procura por representações parcimoniosas, revelada pelo segundo termo.

O número de termos determinado a partir do AIC minimiza a variância dos resíduos de identificação partindo de uma estrutura previamente ajustada por um critério de seleção de estrutura. Contudo, não se pode afirmar que o número de termos selecionados torne o modelo capaz de reproduzir as propriedades dinâmicas do sistema original (Aguirre and Billings, 1994). O resultado obtido através do AIC pode ser visto como um indicativo na procura do número "ideal" de termos do modelo.

---

<sup>1</sup>Em Aguirre (2000a), o autor descreve um algoritmo baseado na transformação de Householder para a ortogonalização dos regressores (Chen et al., 1989; Golub and Van Loan, 1989).

## 2.6 Agrupamentos de Termos e Coeficientes de Agrupamentos

O modelo NARX (2.6) definido na seção (2.5) pode ser reescrito como:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p} \prod_{i=1}^p y(k - n_i) \prod_{m}^{i=p+1} u(k - n_i), \quad (2.11)$$

sendo

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_\ell=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m}^{n_y}. \quad (2.12)$$

Os monômios da equação (2.11) são agrupados de acordo com sua ordem  $m$  ( $0 \leq m \leq \ell$ ), sendo  $\ell$  o grau de não-linearidade do modelo. Cada termo de ordem  $m$  contém fatores multiplicativos em  $y(k - i)$  e  $(m - p)$  fatores multiplicativos em  $u(k - j)$ . Os parâmetros destes termos são representados por  $c_{p, m-p}(n_\ell, \dots, n_m)$ , nos quais  $(n_\ell, \dots, n_m)$  indicam os atrasos de cada fator constituinte do monômio considerado.

O primeiro somatório da equação (2.11) faz referência aos monômios da equação (2.6), separando-os de acordo com sua ordem. O segundo somatório faz referência ao número de fatores em  $y(k - i)$  no termo considerado. Dentro do conjunto de termos de ordem  $m$ , um termo qualquer pode ser acessado através do ajuste do valor de  $p$  adequado. Por fim, o último somatório permite que seja feita a distinção entre os termos de (2.6), através do ajuste dos atrasos de cada um dos fatores constituintes do termo.

Analisando-se o modelo em estado estacionário para entradas constantes, tem-se

$$\begin{aligned} y(k-1) &= y(k-2) = \cdots = y(k-n_y) \\ u(k-1) &= u(k-2) = \cdots = u(k-n_u), \end{aligned} \quad (2.13)$$

aplicando (2.13) na equação (2.11), chega-se a

$$y(k) = \sum_{n_\ell, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_\ell, \dots, n_m) \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}. \quad (2.14)$$

O conjunto de termos da forma  $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$  é denominado *agrupamento de termos* (Aguirre and Billings, 1995b). Esses serão representados por  $\Omega_{y^p u^{m-p}}$ . A constante

$$\sum_{n_\ell, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_\ell, \dots, n_m)$$

é o coeficiente do agrupamento de termos  $y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}$  e será representado por  $\sum_{y^p u^{m-p}}$ . Todos os termos pertencentes a um dado agrupamento de termos explicam o mesmo tipo de não-linearidade no modelo.

### 2.6.1 Agrupamento espúrio em modelos polinomiais

Os modelos NARX polinomiais são bastante sensíveis à sobreparametrização de sua estrutura (Mendes and Billings, 1998; Aguirre and Billings, 1995a). Assim, um modelo que contenha termos que não estejam dentro dos agrupamentos efetivos pode apresentar regimes dinâmicos espúrios, ou seja, regimes dinâmicos que não são exibidos pelo sistema real.

A importância de um agrupamento de termos pode ser quantificada pelos seus coeficientes (Aguirre and Billings, 1995b). Agrupamentos de termos que possuem coeficientes nulos podem indicar que aqueles agrupamentos não contribuem em nada para o modelo. Ou, se o coeficiente de algum agrupamento tiver o seu valor muito menor que dos agrupamentos efetivos, esse provavelmente pode ser descartado. Os agrupamentos não efetivos ou apresentam variação de sinal dos seus coeficientes em relação ao número de termos incluídos no modelo ou sua amplitude é insignificante comparada a outros agrupamentos. Embora essas análises sejam relevantes, nem sempre seus resultados são determinantes para se descartar um agrupamento de termos. O modelo polinomial, identificado a partir da análise dos agrupamentos de termos efetivos, tem melhores chances de reproduzir as dinâmicas dos sistemas que se deseja estudar.

## 2.7 Estimação de Parâmetros

Uma vez escolhida a estrutura de um modelo, deve-se estimar seus parâmetros para que o modelo possa se aproximar do comportamento dinâmico do sistema original. Isso é normalmente feito em modelos polinomiais aplicando-se técnicas de mínimos quadrados (MQ) aos dados de identificação.

Considere uma estrutura polinomial como:

$$y(k) = \sum_{i=l}^n p_i(k)\theta_i + e(k), \quad (2.15)$$

os regressores do modelo,  $p_i(k)$ , correspondem aos diferentes termos no polinômio e os  $\theta_i$ 's são os respectivos parâmetros.

Escrevendo a equação (2.15) na forma de erro de predição, tem-se:

$$y(k) = \sum_{i=l}^n p_i\hat{\theta}_i + \xi(k, \hat{\theta}), \quad (2.16)$$

sendo

$$\sum_{i=l}^n p_i\hat{\theta}_i = \hat{y}(k, \hat{\theta}), \quad (2.17)$$

sendo que o símbolo ( $\hat{\cdot}$ ) sobre as variáveis faz referência a valores estimados. O resíduo de identificação  $\xi(k, \hat{\theta})$  é definido como:

$$\xi(k, \hat{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}). \quad (2.18)$$

O vetor de resíduos  $\{\xi(k), k = 1, \dots, N\}$  representa os erros de modelagem, ruído do sistema e/ou qualquer incerteza. A equação (2.17) é denominada preditor de um passo à frente e  $\hat{y}(k, \hat{\theta})$  é a predição de um passo à frente de  $y(k)$ .

Os parâmetros são estimados de modo a minimizar um índice de desempenho estabelecido previamente. Considere a função custo (Aström and Witternmark, 1990):

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\cdot), \quad (2.19)$$

sendo  $f(\cdot)$  uma função matemática genérica.

Os parâmetros estimados serão diferentes para cada  $f(\cdot)$  considerado. Utilizando-se  $f = \xi^2$ , tem-se o chamado método de mínimos quadrados. Nesse caso o índice de desempenho (ou função custo) passa a ser:

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(k, \theta)^2, \quad (2.20)$$

que deverá ser minimizado para determinar o conjunto de parâmetros correspondente.

Representando a equação (2.16) em notação matricial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \vec{\xi}, \quad (2.21)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y(1) \ y(2) \ \cdots \ y(N)]^T \\ \vec{\xi} &= [\xi(1) \ \xi(2) \ \cdots \ \xi(N)]^T, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_2(1) & \cdots & p_n(1) \\ p_1(2) & p_2(2) & \cdots & p_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(N) & p_2(N) & \cdots & p_n(N) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\vec{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T. \quad (2.24)$$

A matriz  $\mathbf{P}$  é denominada matriz de regressores do modelo e  $\theta$  indica o vetor de parâmetros nominal.

A solução do problema de minimização do erro quadrático (MQ) é dada pela seguinte expressão:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{y}. \quad (2.25)$$

$(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T$  é chamado de Matriz *pseudo inversa* e  $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$  de matriz de informação. A equação (2.25) é denominada equação normal. Se  $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$  for não-singular, a solução dos (MQ) existirá e será única.

A estimativa ( $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ}$ ) é dita não-polarizada se

$$E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ}\} = \boldsymbol{\theta}, \quad (2.26)$$

sendo  $E$  o operador esperança matemática e  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor de parâmetros "reais". Isso não acontecendo, os parâmetros são polarizados e os resíduos apresentam alguma dinâmica que não foi devidamente explicada pelo modelo. Uma alternativa para se evitar a polarização é a inclusão ou troca dos regressores do modelo, na tentativa de melhor explicar a dinâmica não modelada anteriormente.

Existem métodos de estimação de parâmetros que garantem a obtenção de estimativas não-polarizadas mesmo quando o ruído  $e(k)$  (ver equação 2.15) não for branco ou quando o sistema apresentar ruído branco aditivo na saída do sistema. O método utilizado neste trabalho é o denominado Mínimos Quadrados Estendidos (MQE) (Aguirre, 2000a).

### 2.7.1 Mínimos quadrados estendidos

Como dito na seção anterior, a polarização no estimador MQ surge do fato de existir correlação no vetor de resíduos e existirem regressores da forma  $y(k-i)$  no modelo. Esse fato leva à correlação da matriz de regressores com  $e(k)$ . Se no modelo só existirem regressores da entrada (termos do tipo  $u(k-i)$ ), o fato de não haver correlação em  $k \neq 0$  não induz polarização no estimador.

Se os resíduos de identificação forem modelados como um processo de média móvel, da seguinte maneira,

$$e(k) = c_i \nu(k-i) + \nu(k), \quad (2.27)$$

sendo  $\nu(k)$  ruído branco, os termos  $\nu(k-i)$  podem ser incorporados à matriz de regressores e os seus respectivos parâmetros ao vetor de parâmetros do modelo da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{P}^* \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{e}^*, \quad (2.28)$$

sendo que  $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{e}^* = [\nu(k) \cdots \nu(k+N-1)]^T$ ,

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \vdots & \nu(k-1) \\ \vdots & \nu(k) \\ P & \nu(k+1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \nu(k+N-2) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e  $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta \vdots c_i]^T$ . A parte parametrizada por  $c_i$  da equação (2.27) foi incorporada à matriz de regressores. Por este motivo, pode-se notar que  $\mathbf{e}^*$  é ruído branco, de forma que em (2.28) o termo  $\mathbf{e}^*$  é não-correlacionado com  $\mathbf{P}^*$ . Logo a estimativa por (MQ)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\mathbf{P}^{*T} \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{P}^{*T} \mathbf{y} \quad (2.30)$$

não apresentaria polarização, ou,  $E[\hat{\boldsymbol{\theta}}^*] = [\theta \quad \mathbf{c}]^T$ . Os elementos entre parênteses da equação (2.30) acima, correspondem aos mesmos termos da equação (2.25) na Pág. 16.

Um cuidado deve ser tomado com os termos de ruído no modelo: de maneira prática, o ruído é modelado apenas com o intuito de se evitar a polarização do modelo NARX polinomial. O modelo final deve conter apenas termos de processo e a parte estocástica deve ser desprezada.

Modelos com termos de ruído estimados por MQE recebem o nome de modelos NARMAX, da sigla em inglês (*nonlinear autoregressive with moving average and exogenous input*).

Evidentemente, (2.30) não pode ser calculado como mostrado pois  $\mathbf{P}^*$  inclui regressores do tipo  $\nu(k-i)$ , que não são medidos. A fim de resolver este problema, tais regressores precisam ser estimados. Quando isso é feito, o resultado é um processo iterativo que é equivalente a resolver (2.30). Em Aguirre (2000a) o autor descreve um algoritmo iterativo para a estimação de  $\nu(k)$  da seguinte forma:

1. a partir da equação de regressão  $y(k) = \mathbf{P}^T(k-1)\theta + \mathbf{e}(k)$  e dos dados disponíveis, monte a equação matricial  $\mathbf{y} = \mathbf{P}\theta + \mathbf{e}$ , como no método de mínimos quadrados, e determine  $\hat{\theta}_{MQ} = [\mathbf{P}^T\mathbf{P}]^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{y}$ ;
2. calcule o vetor de resíduos  $\xi_i = \mathbf{y} - \mathbf{P}\hat{\theta}_{MQ}$ ;
3. faça  $i = 2$  ( $i$  indica o número de iterações);
4. com  $\xi_{i-1}$ , monte a matriz estendida de regressores,  $\mathbf{P}_i^*$ , e estime  $\hat{\theta}_{MQE}^* = (\mathbf{P}_i^{*T}\mathbf{P}_i^*)^{-1}\mathbf{P}_i^{*T}\mathbf{y}$ ;
5. determine o vetor de resíduos  $\xi_i = \mathbf{y} - \mathbf{P}_i^*\hat{\theta}_{MQE}^*$ ;
6. faça  $i = i + 1$  e volte ao passo 4. Repita até convergir.

Para verificar a convergência, pode-se verificar a variância dos resíduos ou dos parâmetros estimados em cada iteração.

Lembrando-se que, para a simulação do modelo, deve-se desprezar os termos de ruído do modelo.

## 2.8 Validação do Modelo

A ausência de algum termo importante no modelo pode provocar polarização dos parâmetros e o aparecimento de dinâmicas espúrias na simulação do modelo. Por essa razão, faz-se necessária a utilização de um critério para determinar se o modelo responde às características que lhe são exigidas. Neste trabalho foram considerados três aspectos para que o modelo seja considerado satisfatório:

1. predição infinitos passos à frente (simulação livre);
2. capacidade de representar o comportamento estático do sistema.

3. e o erro quadrático médio (RMSE - do inglês *root mean squared error*)

O erro RMSE é dado por:

$$RMSE_i = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\hat{y}_i(k) - y_i(k)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

sendo  $\{y_i(k)\}$  a  $i$ -ésima saída do modelo na predição infinitos passos à frente e  $\hat{y}_i(k)$  é o valor real.

Esse índice mede o erro, em uma unidade de medida coerente com os dados reais, da simulação livre do modelo em relação aos dados reais. Neste trabalho serão considerados bons modelos aqueles que apresentarem este índice menor que a unidade<sup>2</sup>. Quanto menor for seu valor, melhor será considerado o modelo.

Outra maneira de verificar a validade dinâmica do modelo é o uso de funções de correlação. Essas funções podem ser aplicadas aos resíduos para a verificação de correlação linear e não-linear. Se os resíduos possuírem alguma correlação, o modelo será considerado polarizado, uma vez que existem evidências de dinâmicas não modeladas contidas nos resíduos. Outros testes são as correlações cruzadas, lineares e não lineares, entre os resíduos e os dados de entrada e saída do sistema (Box and Jenkins, 1976; Ljung, 1987; Billings and Voon, 1983, 1986; Billings and Zhu, 1994).

## 2.9 Comentários Finais

Esse capítulo tem como principal objetivo familiarizar o leitor com técnicas gerais em identificação de sistemas não-lineares.

Essas técnicas são a base de todo um conjunto de novas técnicas que foram e estão sendo desenvolvidas para tornarem os modelos cada vez mais representativos dos sistemas reais.

O próximo passo desse trabalho é fazer um apanhado geral sobre novas técnicas em identificação de sistemas que tenham como ponto de partida as etapas descritas neste capítulo.

---

<sup>2</sup>A unidade de medida será omitida na apresentação dos índices por motivo de simplificação.



# Capítulo 3

## Identificação Caixa-Cinza - Estado da Arte

### 3.1 Introdução

As etapas de identificação seja ela caixa-preta ou caixa-cinza, são as mesmas. O que vai diferenciá-las é o uso de conhecimento prévio em suas etapas. No capítulo anterior foram vistas as etapas da identificação caixa-preta utilizando-se modelos NARX polinomiais.

Neste capítulo, serão discutidos alguns aspectos da identificação caixa-cinza sem a preocupação de definir a representação a ser utilizada, para que se tenha uma visão mais geral do estado da arte em identificação caixa-cinza.

### 3.2 Aspectos Práticos

Devido ao fato de que a maioria dos sistemas no mundo real é não-linear faz-se necessário o desenvolvimento de identificação de sistemas, processamento de sinais, técnicas de controle e análise de sistemas que sejam aplicáveis a essas situações (Billings, 1980). Significantes estudos incluem, recentemente, redes neurais aplicados a estes problemas (Braga et al., 2000). Embora, redes neurais tenham excelentes propriedades, a obtenção de informação a partir de sua estrutura é difícil, devido à sua complexidade (Corrêa, 2001). Isso pode não ser relevante em aplicações como predição de séries temporais e reconhecimento de padrões, mas é uma considerável desvantagem em engenharia e aplicações científicas, em que é importante entender, analisar e simular os mecanismos que produzem a relação entre causa e efeito das entradas e saídas do sistema (Eykhoff, 1981).

Os modelos NARMAX polinomiais e racionais (Leontaritis and Billings,

1985a,b; Chen et al., 1989) são uma alternativa às representações por redes neurais. Em particular, modelos NARMAX polinomiais permitem facilmente a obtenção de informações analíticas sobre a dinâmica do sistema (Jácome, 1996).

Nas últimas duas décadas houve um grande volume de trabalhos a respeito de identificação não-linear (Aguirre, 2000a). Apesar de grandes conquistas, a identificação não-linear ainda possui grandes dificuldades. Um dos grandes desafios é a escolha de uma estrutura adequada e compacta para o modelo (Chen et al., 1989; Lindskog, 1996; Aguirre et al., 2000). Várias abordagens foram elaboradas para atacar esse problema (Aguirre, 1994; Mao and Billings, 1997; Corrêa, 2001). Para o caso específico de modelos NARMAX polinomiais, um importante trabalho é o estudo de agrupamento de termos (Aguirre and Billings, 1995b). No início da década de noventa, alguns trabalhos começaram a utilizar a informação *a priori* (Bohlin, 1991; Tulleken, 1993; Eskinat et al., 1993). Aguirre et al. (2000) sugere que o uso de informação a priori pode ser usado na escolha da estrutura do modelo.

Métodos de modelagem podem ser classificados em função da utilização da informação a priori da seguinte forma (Herbert and Tulleken, 1993; Sjöberg et al., 1995; Bohlin and Graebe, 1995):

- **Modelagem caixa-branca:** consiste em procedimentos em que a estrutura do modelo é totalmente conhecida, geralmente determinada pelas equações físicas ou químicas que regem o comportamento estático e dinâmico do sistema (Garcia, 1997);
- **Modelagem caixa-preta:** não se tem nenhuma informação a priori do sistema. Os parâmetros do modelo, geralmente, não possuem nenhum significado físico. O processo de modelagem, chamado de identificação, se baseia única e exclusivamente em dados de entrada e saída medidos do sistema. A estrutura do modelo pertence a famílias de modelos que apresentam flexibilidade e um histórico de sucesso (Sjöberg et al., 1995);
- **Modelagem caixa-cinza:** é a construção de modelos que incorporam conhecimento a priori do sistema, com um certo grau de incerteza na seleção de estrutura da representação (Jorgensen and Hangos, 1995). Sjöberg e outros 1995, subdividem a modelagem caixa-cinza em dois subgrupos:
  - a) *Modelagem física:* toda a estrutura é determinada por conhecimentos físicos do sistema, e apenas os parâmetros, ou um certo número desses são estimados a partir dos dados;

- b) *Modelagem semi-física*: informações do sistema são usadas para sugerir combinações não-lineares entre os sinais medidos, utilizando tais informações da estrutura do modelo (Lindskog and Ljung, 1995b).

### 3.3 Comparação Entre os Tipos de Modelagem

Nessa seção é apresentada uma breve comparação entre os três tipos de modelagem apresentados na seção 3.2. As vantagens e desvantagens da modelagem caixa-preta, caixa-branca e caixa-cinza são ressaltadas.

A vantagem da modelagem caixa-branca é o fato de que os parâmetros do modelo possuem significado físico e são determinados a partir de conhecimentos a priori do sistema (Corrêa, 2001) ou por testes em estado estacionário. Aguirre (2000a) utiliza essa técnica para estimar a resistência hidráulica de um sistema real de bombeamento de água. Em (Pottmann and Pearson, 1998) são apresentadas duas desvantagens da abordagem caixa-branca. A primeira refere-se à maior complexidade que em geral se tem na estrutura das equações, normalmente envolvendo equações diferenciais algébricas, equações diferenciais parciais e/ou integrais. A segunda é que os modelos são geralmente constituídos por equações contínuas no tempo, enquanto os processos de medição e controle são em geral discretos.

Já a modelagem caixa-preta possui a flexibilidade da escolha de estrutura, facilitando a formulação e a resolução de problemas de controle (Pottmann and Pearson, 1998). Como desvantagem, apresenta um alto grau de liberdade na seleção de estrutura do modelo. Além disso, a obtenção do modelo a partir de um número limitado de observações constitui-se em um problema mal-condicionado no sentido de que os modelos não são únicos e podem não depender continuamente da observação (Tikhonov and Arsenin, 1977).

Entre os extremos modelagem caixa-branca e identificação caixa-preta, situa-se a identificação caixa-cinza, que utiliza informação a priori do sistema em conjunto com dados de entrada e saídas medidos (Corrêa, 2001). Inúmeras vantagens têm sido apresentadas para a modelagem caixa-cinza. Billings (1980) afirma: “*A escolha entre as várias abordagens para a identificação de sistemas não-lineares será freqüentemente conduzida pelo processo, a quantidade de informação a priori e o objetivo da identificação*”. Tulleken (1993) cita que os modelos caixa-cinza podem trazer benefícios ao projeto de controladores que requerem descrições adequadas do processo. Já em (Johansen, 1996), o uso de informação a priori é enfatizado pois reduz efetivamente o número de parâmetros a serem determinados e torna o problema de identificação melhor condicionado. Como resultado, os modelos gerados

são mais robustos, mesmo com conjunto de dados escassos ou incompletos. Tem sido sugerido que a facilidade com que uma determinada representação matemática pode incorporar informação a priori pode vir a ser um dado crucial para escolher representações matemáticas, sendo ainda um problema em aberto na literatura (Aguirre, 2000b). (Aguirre et al., 2000) ressaltam a utilização de informação a priori na seleção de uma estrutura adequada, mostrando que em algumas aplicações deve haver um compromisso entre características globais e precisão das predições do modelo, sendo que o primeiro pode ser aprimorado pelo uso de informação a priori. Em outras palavras, a modelagem semifísica, ou simplesmente *identificação caixa-cinza*, combina características desejáveis da modelagem caixa-branca e da identificação caixa-preta (Corrêa, 2001).

### 3.4 Retrospectiva Histórica

Esta seção dedica-se a uma breve retrospectiva histórica dos trabalhos que utilizam conhecimento a priori na identificação de sistemas não-lineares utilizando-se várias representações.

Bai and Sastry (1986) comentam que a utilização de informação a priori na etapa de estimação de parâmetros de modelos lineares leva a uma diminuição do erro de estimação com um menor custo computacional.

Em (Tulleken, 1993) mostra-se uma abordagem para a estimação de parâmetros que é consistente com o conhecimento a priori do processo. Utilizando como conhecimento a priori a estabilidade do processo e o ganho em estado estacionário. Para selecionar o melhor estimador é utilizada estatística Bayesiana. Esse trabalho mostra aplicações em projeto de controladores para controle avançado.

Uma aplicação da identificação caixa-cinza é apresentada em (Bohlin, 1994). Nesse trabalho é usado o programa IdKit para identificar um processo de lavagem de barras de aço. Esse processo foi escolhido por ser não-linear, por parte do processo ser conhecido e por estar sujeito a incertezas. Além disso, dados experimentais são disponíveis. Em princípio esse procedimento determina a estrutura mais adequada baseada numa seqüência de hipóteses e falsificações. É feita uma comparação entre as abordagens caixa-branca, caixa-preta e caixa-cinza, sendo que essa última apresentou melhores resultados.

Apesar da identificação caixa-cinza necessitar de um certo desenvolvimento, esta emerge como uma promissora área para complementar as convencionais técnicas de identificação (Bohlin and Graebe, 1995). Os autores ainda citam que a imposição de restrições à estimação de parâmetros permite

a incorporação de conhecimento a priori e a melhoria do desempenho de um controle adaptativo. Nessa mesma linha (Jorgensen and Hangos, 1995) citam que “modelagem caixa-cinza traz grandes promessas para o desenvolvimento de métodos e ferramentas que garantam consistência entre modelos de um mesmo sistema usado para diferentes propósitos e para permitir manutenção e desenvolvimento contínuo de tais modelos”.

Johansen (1996) discute três pontos em identificação caixa-cinza utilizando otimização mono-objetivo, a saber:

1. quais os tipos de conhecimento a priori podem ser incluídos como restrições e como isso influencia a obtenção de um modelo ótimo;
2. um procedimento numérico prático para a identificação de um modelo semi-paramétrico;
3. a seleção de estrutura através da escolha de pesos e penalidades com base em dados empíricos.

Nesse trabalho o autor utilizou um tanque de neutralização de pH como exemplo para ilustrar os efeitos de imprecisão, de alguns tipos de conhecimento a priori. Entre os tipos de conhecimento a priori utilizados estão:

- seqüência de dados para uma região limitada de operação;
- dados em regime permanente de cinco pontos de operação;
- modelo simplificado de balanço de massas;
- faixa de variação de pH (0 a 14);
- suavidade do comportamento do sistema;
- estabilidade em malha aberta do sistema.

O autor mostra que a inclusão gradativa de conhecimento a priori pode melhorar a qualidade do modelo identificado. E conclui que “se a informação a priori for correta, o modelo obtido, em geral, será melhor e mais robusto mesmo quando o conjunto de dados for deficiente ou incompleto”. Johansen (1997) diz que “essa abordagem pode ser útil tanto para detecção da estrutura do modelo quanto para estimação e regularização dos parâmetros”.

Petrick and Wigdorowitz (1997) afirmam que “...poucas ferramentas existem para seleção a priori da estrutura de modelos de sistemas não-lineares”. Ao encontro dessa afirmativa está o trabalho (Aguirre et al., 2000) que sugere que se informação a priori está disponível, então tal informação deve ser

usada para restringir a estrutura do modelo. Ainda nesse trabalho os autores mostram que modelos obtidos usando técnicas caixa-preta são modelos com características locais, apesar de serem não-lineares. Enquanto que “o uso de informação a priori força o modelo a um comportamento mais global, aumentando a faixa sobre a qual o modelo é dinamicamente válido, com uma pequena perda de precisão”. Da mesma forma, Godfrey (1986) destaca que “para tentar estimar parâmetros em sistemas não-lineares é essencial que se verifique se os dados excitam o sistema em toda sua não-linearidade”.

Em (Aguirre, 2000b) é apresentada uma síntese das vantagens das abordagens caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta, além das dificuldades que serviram como motivação para o desenvolvimento de novas técnicas. Também se encontra uma lista de referências bibliográficas sobre o assunto.

No contexto de redes neurais (Cubillos et al., 1996; Cubillos and Lima, 1997) sabe-se que “... modelagem de processos baseados em redes neurais requerem um grande número de parâmetros (pesos), resultando em dois problemas principais:

- pesada carga computacional no treinamento da rede;
- a possibilidade de sobre-parametrização.

Esses dois problemas podem ser minimizados usando algum tipo de informação a priori na construção do modelo”. Essa última afirmação é também encontrada em (Forssell and Lindskog, 1997; Lindskog and Ljung, 1995a).

Em Johansen (2000) desenvolve uma abordagem multiobjetivo para modelos de resposta ao impulso finito (FIR). Segundo o autor a estimação de parâmetros pode ser vista como um problema de múltiplos objetivos e restrições derivadas de dados empíricos (dinâmicos e estáticos), modelos físicos e de bom senso, propriedades desejadas do modelo, entre outros. Particular atenção é dedicada à análise e seleção do equilíbrio entre objetivos e restrições conflitantes.

Dois estudos de caso utilizando identificação caixa-cinza podem ser vistos em (Lorito, 1998; Weyer et al., 2000). No primeiro é proposto um procedimento para identificação de um modelo dinâmico não-linear para um transformador de corrente a partir de dados empíricos e de informação a priori da física do processo. No segundo é utilizada caixa-cinza para a detecção de falhas de um trocador de calor.

Em um trabalho mais recente, Barany (2001) analisa a estimação de parâmetros em sistemas que apresentam simetria. O autor afirma que a simetria de uma solução restringe quais combinações de parâmetros um modelo linear nos parâmetros deverá possuir.

Em (Corrêa, 2001) são apresentados três algoritmos que sintetizam a utilização de informação a priori na identificação de modelos NARMAX racionais e polinomiais, sendo que o primeiro refere-se à escolha de estrutura, o segundo à estimação de parâmetros e o terceiro à análise e validação dos modelos. O autor ainda faz um estudo detalhado das representações mostrando que é possível, através das relações entre os agrupamentos de termos e função estática, a escolha de estrutura para que o modelo represente a característica estática desejada.

### 3.5 Comentários Finais

As técnicas caixa-cinza são tratadas de forma geral neste capítulo, com o intuito de despertar o interesse do leitor para a metodologia caixa-cinza que será apresentada no capítulo 5.

Como visto, alguns trabalhos em identificação caixa-cinza procuram formular ainda uma base teórica, sem que fossem aplicadas no âmbito prático. Mas, os trabalhos que utilizam, de alguma forma, conhecimento a priori nas etapas de identificação, sugerem que as técnicas caixa-cinza são uma alternativa viável para a identificação de modelos com aspectos mais globais, representando o sistema original em uma ampla faixa de operação.

O interesse neste trabalho é aplicar técnicas caixa-cinza em modelos NARX polinomiais. Para tal, faz-se necessária a investigação das propriedades em estado estacionário desse tipo de representação e, baseado nas idéias e conceitos apresentados neste capítulo, desenvolver uma metodologia para a incorporação de conhecimento a priori nas etapas de detecção de estrutura e estimação de parâmetros.



# Capítulo 4

## Propriedades da Estrutura de Modelos NARX Polinomiais

### 4.1 Introdução

A identificação de sistemas caixa-preta utiliza os dados de entrada/saída do sistema, que são obtidos através de testes dinâmicos, como única fonte de informação. Mas a observação das características dinâmicas não precisa ser o único critério utilizado para definir um bom modelo. Características em estado permanente como, por exemplo, a função estática, o seu ganho em regime permanente, o número e localização dos pontos de equilíbrio, entre outros, podem ser importantes ingredientes na obtenção de um bom modelo dinâmico.

O que se espera de modelos em geral é que sejam capazes de representar o sistema real tanto dinamicamente quanto em regime permanente. Por isso, características em regime permanente podem ser usadas na validação de modelos.

Esse capítulo descreve, de forma sucinta, como se obter características de regime permanente a partir de modelos NARX polinomiais. Essas características serão importantes para a construção de uma metodologia de identificação em capítulos posteriores.

### 4.2 Pontos Fixos em Sistemas Autônomos

Pontos fixos de um sistema discreto<sup>1</sup> autônomo, são os pontos de operação que apresentam a seguinte característica:

---

<sup>1</sup>Em sistemas contínuos (Thompson and Stewart, 1986), os pontos fixos são, por definição, os zeros da função  $\dot{x} = f(x) = 0$ .

$$y(k) = y(k + i), \quad \forall i \in \mathbf{Z}^+. \quad (4.1)$$

Sistemas dinâmicos lineares apresentam apenas um ponto fixo trivial. Em sistemas não-lineares o número de pontos fixos vai depender do grau de não-linearidade  $\ell$  do sistema. Por exemplo, se o sistema apresenta não-linearidade cúbica em  $y$  (variável de saída), esse deve apresentar 3 pontos de equilíbrio, ou seja, três pontos de operação na saída do sistema.

Os pontos fixos podem ser obtidos a partir de modelos NARX polinomiais através do conceito de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos (Aguirre and Mendes, 1996) resolvendo a seguinte equação polinomial:

$$\Sigma_{y^\ell} y(k)^\ell + \dots + \Sigma_{y^2} y(k)^2 + (\Sigma_y - 1) y(k) + \Sigma_0 = 0, \quad (4.2)$$

sendo que  $\Sigma_0$  é o termo constante do modelo. O modelo apresentará  $\ell$  pontos de operação na saída se o termo  $\Sigma_{y^\ell} \neq 0$ . Os pontos fixos do modelo são os valores que zeram a equação (4.2).

### 4.2.1 Pontos fixos em sistemas não autônomos

Um modelo NARX não autônomo analisado em estado estacionário para entrada constante pode ser escrito como segue:

$$y(k) = \sum_{n_1, n_{m\ell}}^{n_y, n_u} c_{p, m\ell-p}(n_\ell, \dots, n_{m\ell}) \sum_{m\ell=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m\ell} y(k)^p u(k)^{m\ell-p}, \quad (4.3)$$

sendo que  $m\ell$  corresponde ao grau de não linearidade de cada termo e está na faixa  $1 \leq m\ell \leq \ell$ . Cada termo de grau  $m\ell$  pode conter um fator dos termos  $y(k)$  de ordem  $p$ , um fator em  $u(k)$  de ordem  $(m\ell - p)$  e um coeficiente  $c_{p, m\ell-p}(n_\ell, \dots, n_{m\ell})$ .

Para melhor compreensão, a equação (4.3) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{y^\ell} y^\ell &+ \sum_{m\ell=\ell-1}^{\ell} [\Sigma_{u^{m\ell-(\ell-1)} y^{\ell-1}} u^{m\ell-(\ell-1)}] y^{\ell-1} &+ \dots \\ &+ \sum_{m\ell=p}^{\ell} [\Sigma_{u^{m\ell-p} y^p} u^{m\ell-p}] y^p &+ \dots \\ &+ \sum_{m\ell=1}^{\ell} [\Sigma_{u^{m\ell-1} y} u^{m\ell-1} - 1] y &+ \\ &+ \sum_{m\ell=1}^{\ell} \Sigma_{u^{m\ell}} u^{m\ell} + \Sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para a determinação do número de pontos fixos em sistemas não autônomos o procedimento é idêntico ao adotado para sistemas autônomos, mas a localização apresenta diferença. Como exemplo, será mostrado a seguir a forma para modelos lineares e modelos quadráticos.

Para um modelo linear representado em sua forma de agrupamento de termos

$$(\Sigma_y - 1)y + \Sigma_u u = 0, \quad (4.5)$$

o ponto fixo é dado por:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_u u}{1 - \Sigma_y}. \quad (4.6)$$

Para modelos quadráticos escrito sob a mesma forma de (4.5) tem-se

$$(\Sigma_{y^2})y^2 + (\Sigma_y - 1 + \Sigma_{uy}u)y + \Sigma_{u^2}u^2 + \Sigma_u u + \Sigma_0 = 0, \quad (4.7)$$

sendo que os pontos fixos são dados por:

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{1 - \Sigma_y - \Sigma_{uy}u \pm \sqrt{\Delta}}{2\Sigma_{y^2}}, \quad (4.8)$$

sendo  $\Delta = (\Sigma_y - 1 + \Sigma_{uy}u)^2 - 4\Sigma_{y^2}(\Sigma_{u^2}u^2 + \Sigma_u u + \Sigma_0)$ .

Modelos quadráticos também podem apresentar apenas um ponto fixo, bastando para isto que o coeficiente do agrupamento  $\Omega_y$  seja igual a zero ( $\Sigma_{y^2} = 0$ ). Então o ponto fixo será determinado por:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_u u + \Sigma_{u^2}u^2}{1 - \Sigma_y - \Sigma_{uy}u}. \quad (4.9)$$

Pode-se notar que a localização dos pontos fixos depende dos valores de entrada (constante) do sistema, ou seja, a localização dos pontos fixos variam com o patamar do sinal de excitação. Essas equações passam a ter a função de um mapeamento que leva  $u$  a um valor determinado para  $\bar{y}$ . Os valores gerados por estes mapeamentos caracterizam uma curva estática para o sistema. Então dessa forma, a função estática de sistemas não autônomos pode ser estimada a partir de modelos dinâmicos. Nesse caso os conceitos de agrupamentos de termos e seus coeficientes são úteis para representar o procedimento de forma compacta.

Os coeficientes de agrupamentos podem ser escritos em função dos parâmetros do modelo da seguinte forma:

$$\mathbf{S}\theta = \Sigma_{\mathbf{x}}, \quad (4.10)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{S}$  mapeia  $\theta$  para  $\Sigma_{\mathbf{x}}$ .  $\theta$  é vetor dos parâmetros do modelo NARX polinomial e  $\Sigma_{\mathbf{x}}$  é o vetor dos coeficientes dos agrupamentos de termos do modelo.

Essa maneira de se escrever os coeficientes de agrupamentos de termos em função dos parâmetros do modelo será útil para a construção das restrições de igualdade no próximo capítulo.

### 4.2.2 Estabilidade de pontos fixos

Um ponto fixo em sistemas contínuos é estável no sentido de Lyapunov se os autovalores da matriz Jacobiana avaliada no ponto fixo  $D_f(\bar{y})$  definida pelas raízes da equação:

$$\det[\mathbf{D}_f(\bar{y}) - \lambda \mathbf{I}] = 0, \quad (4.11)$$

são caracterizados pela parte real  $\text{Re}[\lambda_i] \leq 0$  (Anishchenko, 1990).

A solução é assintoticamente estável, se todo  $\lambda_i$  satisfaz a inequação estrita  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ . Isso significa que uma pequena perturbação arbitrária do ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  faz com que essa tenda para zero quando  $t \rightarrow \infty^2$ , ou seja, o sistema retorna para o ponto de equilíbrio. (Anishchenko, 1995).

Para sistemas discretos, um ponto fixo é considerado estável se os autovalores da matriz Jacobiana, avaliada no ponto fixo  $D_f(\bar{y})$  definida pelas raízes da equação (4.11) são caracterizados por  $|\lambda_i| \leq 1$ , ou seja, os autovalores estão localizados dentro de um círculo de raio unitário.

Baseado na definição acima, para a verificação da estabilidade local de um ponto fixo basta calcular os autovalores da matriz Jacobiana (matriz de linearização) do sistema no ponto de operação determinado. Sendo que esses são os pólos do modelo linearizado em torno do ponto fixo considerado.

Um modelo autônomo em espaço de estados, pode ser representado por um mapeamento suave  $f : \mathbf{R}^{n_y} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$  de forma que:

$$\mathbf{y}(k+h) = f(\mathbf{y}(k)), \quad (4.12)$$

sendo  $\mathbf{y}(k)$  o vetor de estados gerado a partir dos dados de identificação e  $h$  é o intervalo de predição considerado.

Expandindo a equação (4.12) tem-se:

$$\begin{bmatrix} y(k-n_y+1) \\ y(k-n_y+2) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{f}{y(k-n_y)} & \frac{f}{y(k-n_y+1)} & \frac{f}{y(k-n_y+2)} & \cdots & \frac{f}{y(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-n_y) \\ y(k-n_y+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

sendo que  $\frac{f}{y(k-i)} = 0$  se  $f(\cdot)$  não inclui  $y(k-i)$ .

---

<sup>2</sup>Essa definição faz referência a sistemas assintoticamente estáveis.

Dessa maneira, a matriz Jacobiana do mapeamento  $f$  é definida como:

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+1)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+2)} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y(k-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Para a análise de estabilidade basta calcular os autovalores da matriz Jacobiana no ponto fixo desejado. Como se trata de um modelo discreto, o sistema linearizado será considerado estável se os autovalores estiverem dentro do círculo de raio unitário com centro na origem do plano  $z$ . Autovalores nos planos  $s$  e  $z$  estão relacionados por:  $z = e^{sT_s}$ , sendo  $s$  a variável associada à transformada de Laplace. Se pelo menos um autovalor estiver fora do círculo de raio unitário, o modelo é instável.

### 4.2.3 Simetria de pontos fixos

Dado um sistema de coordenadas utilizado para descrever uma certa dinâmica, pontos fixos simétricos são aqueles equidistantes da origem do sistema.

Utilizando a equação (4.3), é possível determinar quais agrupamentos de termos devem ser considerados no modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais<sup>3</sup> simétricos. Em Aguirre and Mendes (1996) foi apresentada uma tabela indicando quais os agrupamentos de termos que um modelo NAR polinomial deve possuir em função da localização dos pontos fixos. Essa tabela é reproduzida abaixo para mais conveniência do leitor.

---

<sup>3</sup>Fora da origem.

Tabela 4.1: Agrupamentos de termos que devem ser considerados em modelos polinomiais para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Aguirre and Mendes, 1996), de acordo com o grau de não-linearidade (primeira coluna).

$\ell$	Nº de pontos fixos triviais	Agrupamentos de termos
1	1	$\Omega_y$
2	0	$\Omega_{y^2}, \Omega_0$
3	1	$\Omega_{y^3}, \Omega_y$
4	0	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
4	2	$\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
5	1	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}, \Omega_y$
5	3	$\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}$
6	0	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$
6	2	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$
6	4	$\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}$

### 4.3 A Função de Autovalores

A função de autovalores é uma generalização para modelos não-lineares do conceito de constante de tempo em modelos lineares. A rigor, o termo constante de tempo não parece adequado para sistemas não-lineares, mas por simplicidade, a função de autovalores descrita será referenciada como “constante de tempo”. O procedimento aqui descrito foi originalmente proposto por Corrêa (2001).

#### 4.3.1 Para modelos de primeira ordem

Para modelos de primeira ordem a constante de tempo pode ser expressa de uma forma geral como a seguir:

$$\tau(\bar{x}_{\tau 1}, \dots, \bar{x}_{\tau n_\tau}) = f \left( \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i \bar{x}_{\tau i} \right), \quad (4.15)$$

sendo que  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, n_\tau$  são constantes e  $x_{\tau i}$ ,  $i = 0, \dots, n_\tau$  sinais dos quais a variável constante de tempo  $\tau(x_{\tau\tau})$  depende. A equação (4.15) é uma função dos sinais  $x_{\tau i}$ , então o que passa a ser importante para os modelos NARX polinomiais é a identificação de quais sinais influenciam a “constante de tempo”, de que maneira e como eles podem ser obtidos nesses modelos.

Para a verificação da relação dessas variáveis nos modelos polinomiais, considere o modelo NARX de primeira ordem escrito sob a seguinte forma:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} \sum_{n_n, n_m}^{\ell, n_u} c_{p,m}(n_1, \dots, n_n) y(k-1)^p u(k-n_u)^m. \quad (4.16)$$

Para a dedução da “constante de tempo” é necessário escrever o modelo NARX polinomial em uma realização em espaço de estados. Para tal basta linearizar o modelo em torno de cada ponto de operação estacionário<sup>4</sup>. A equação (4.16) em sua forma de espaço de estados é dada por

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}_f \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k), \quad (4.17)$$

sendo que  $\mathbf{y}(k-1)$  é o vetor de estados e  $\mathbf{D}_f$  é a matriz Jacobiana definida em um ponto de operação estacionário,  $\mathbf{u}(k)$  é o vetor contendo os regressores de entrada e  $\mathbf{B}$  é a matriz de entrada.

A matriz Jacobiana é determinada, para cada ponto de operação como definido na equação (4.14). Uma vez que a função a ser derivada é polinomial, a sua derivada também o será, sendo puramente algébrica a sua obtenção.

Para a determinação dos autovalores do modelo, basta resolver a seguinte equação:

$$\det |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_f(\bar{y}, \bar{u})| = 0, \quad (4.18)$$

sendo que  $\lambda$  são os autovalores,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e a barra sobre as variáveis significa que seus valores são de regime permanente.

Como essa seção trata de modelos de primeira ordem, a matriz Jacobiana será uma constante e o modelo terá apenas um autovalor para cada ponto de operação do sistema, determinado a partir da equação:

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p c_{p,m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m. \quad (4.19)$$

Discretizando a equação (4.19) através da relação  $z = e^{T_s s}$  é possível determinar a “constante de tempo” do modelo no ponto. Com esse mapeamento, a “constante de tempo” do modelo polinomial NARX de primeira ordem é dada por

$$\tau(\lambda) = -\frac{T_s}{\ln \lambda(\bar{y}, \bar{u})}, \quad (4.20)$$

---

<sup>4</sup>Esse procedimento já foi mostrado, mas para facilitar o entendimento do leitor, será repetido.

e substituindo a equação (4.20) em (4.19) tem-se

$$\tau_{(\bar{y}, \bar{u})} = -\frac{T_s}{\ln(\lambda_i)}, \quad (4.21)$$

sendo que  $T_s$  é o tempo de amostragem e  $\tau_{\bar{y}, \bar{u}}$  é a função constante de tempo do modelo.

Em Corrêa (2001) o autor define como os agrupamentos de termos e os sinais influenciam na constante de tempo e define uma tabela mostrando esta influência em modelos NARX polinomiais com  $\ell = 3$ . Essa tabela é reproduzida abaixo para maior conveniência do leitor:

Tabela 4.2: Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX polinomiais (Corrêa, 2001).

Agrupamentos	$\tau_i(\bar{x}_{\tau_i})$		
	$i$	$\bar{x}_{\tau_i}$	$\lambda_i$
$\Omega_y$	0	-	$\Sigma_y$
$\Omega_{y^2}$	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y^2}$
$\Omega_{y^3}$	1	$\bar{y}^2$	$3\Sigma_{y^3}$
$\Omega_u$	-	-	-
$\Omega_{u^2}$	-	-	-
$\Omega_{u^3}$	-	-	-
$\Omega_{yu}$	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{yu}$
$\Omega_{y^2u}$	1	$\bar{y}\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2u}$
$\Omega_{yu^2}$	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{yu^2}$

A Tabela (4.2) mostra, por exemplo que, se o modelo polinomial possuir apenas termos não-lineares na forma  $y(k-1)u(k-1), \dots, y(k-1)u(k-n_u)$ , que são termos do agrupamento  $\Omega_{yu}$ , então  $\bar{u}_{\tau_i} = \bar{u}$  e  $\lambda_i = \Sigma_{yu}$ , ou seja, os autovalores variam com  $\bar{u}$  e o coeficiente  $\lambda_i$  a ser usado na equação (4.21) é  $\Sigma_{yu}$ .

### 4.3.2 Para modelos de ordem superior

O procedimento utilizado para modelos de ordem superior segue os mesmos passos do utilizado para modelos de primeira ordem, ou seja,

1. representar o modelo na forma de equação de estado, linearizando o modelo em torno dos pontos de operação;

2. a partir da matriz Jacobiana avaliada nos pontos de operação de interesse, montar a equação característica, determinando seus autovalores;
3. mapear os autovalores do modelo discreto, plano  $z$ , no plano  $s$ , determinando a “constante de tempo”.

No caso de sistemas de ordem superior, podem existir autovalores complexos conjugados, com isso pode-se tomar por “constante de tempo” a constante de tempo da função exponencial que atenua a oscilação.

A diferença fundamental a ser feita para modelos de ordem superior está na equação característica do modelo. Para tais modelos, os autovalores são determinados pelas raízes de um polinômio de grau  $d$ , sendo que  $d$  é a ordem<sup>5</sup> do modelo. A solução analítica desta função nem sempre é possível, mas a análise envolvendo os sinais que influenciam na constante de tempo, sim.

Na análise dos agrupamentos de termos e do número e localização dos pontos fixos, foi considerado que o sistema está em regime estacionário. Para a análise da “constante de tempo”, ao contrário, interessa a resposta transitória do sistema. Como antes será considerado que a entrada  $u(k) = u(k-1) = \dots = u(k-n_u)$ , ou seja, será considerada constante, dentro da janela analisada. Agora entretanto, os termos de processo em  $u(k)$  serão agrupados e os termos de processo  $y(k)$  não. Essa maneira de agrupar termos resulta nos *agrupamentos-d* e *coeficientes-d*.

*Agrupamentos-d* são os termos apresentados sob a forma  $y(k-d)^p u(k-j)^m$  para  $m = 0, \dots, \ell$ ,  $p = 0, \dots, \ell$  com  $m + p \leq \ell$  e  $j = 1, \dots, n_u$ . E seus coeficientes  $\Sigma_{y_d^p u^m}$  são a soma de todos os coeficientes de um agrupamento de termos de ordem  $d$  (Corrêa, 2001).

Em modelos de primeira ordem, os *agrupamentos-d* coincidem com os agrupamentos de termos, o mesmo acontecendo com seus coeficientes.

Para modelos de ordem superior, a equação (4.17) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y(k-n_y+1) \\ y(k-n_y+2) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_f \begin{bmatrix} y(k-n_y) \\ y(k-n_y+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(k), \quad (4.22)$$

---

<sup>5</sup>Ou seja, o máximo atraso dos termos de saída.

sendo que agora

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \Delta_d & \Delta_{d-1} & \cdots & \Delta_2 & \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e

$$\Delta_d = \left. \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-d)} \right|_{\bar{y}, \bar{u}}. \quad (4.24)$$

Sendo  $d$  o atraso da saída  $y$ . Uma equação geral para  $\Delta_d$  pode ser obtida utilizando-se os conceitos de *agrupamento-d* e *coeficientes-d* de maneira semelhante à utilizada para deduzir a equação (4.19). Deste modo, a equação (4.24) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Delta_d(\bar{y}, \bar{u}) = \Sigma_{y_d} + \sum_{p=2}^{\ell} p \Sigma_{y_d^p} \bar{y}^{(p-1)} + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p \Sigma_{y_d^p u^m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m \quad (4.25)$$

ou

$$\Delta_d(\bar{x}_{\Delta_{d_i}}) = \Delta_{d_0} + \sum_{i=1}^{n_{\Delta_d}} \Delta_{d_i} \bar{x}_{\Delta_{d_i}}, \quad (4.26)$$

sendo que  $\Delta_{d_0} = \Sigma_{y_d}$ ,  $\Delta_{d_1, \dots, d}$  são constantes que dependem dos *coeficientes-d*, e  $\bar{x}_{\Delta_{d_i}}$ , são sinais dos quais a variável  $\Delta_d$  depende.

Os autovalores do modelo NARX polinomial são as raízes da equação definida por  $\det |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_f| = 0$  e dada por

$$\lambda^d - \Delta_1 \lambda^{d-1} - \cdots - \Delta_{d-1} \lambda - \Delta_d = 0. \quad (4.27)$$

Como os autovalores  $\lambda$  podem assumir valores complexos representados por  $\lambda_i = r_i e^{\pm j \theta_i}$ , o valor da “constante de tempo” referente a cada ponto de operação pode ser obtido por:

$$\tau_{1,2,\dots,d} = \frac{-T_s}{\ln r_{1,2,\dots,d}}. \quad (4.28)$$

O número de funções é igual à ordem do modelo e  $r$  é o módulo do autovalor. Se os autovalores forem complexos, então a “constante de tempo” será a constante de tempo da função exponencial que atenua a oscilação.

Não é possível obter uma expressão analítica para a função e, por consequência, para a “constante de tempo”. Mas é possível identificar os sinais que interferem nos coeficientes da equação característica.

A seguir é mostrada uma tabela ilustrativa para um modelo NARX polinomial com grau de não-linearidade 2 e atraso 2 em função dos *agrupamentos*, onde são definidos os sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da equação característica (Corrêa, 2001).

Tabela 4.3: Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da equação característica de modelos NARX polinomial (Corrêa, 2001).

Agrupamentos	$i$	$\Delta_{1_i}, \bar{x}_{\Delta_{1_i}}$		$i$	$\Delta_{2_i}, \bar{x}_{\Delta_{2_i}}$	
		$\bar{x}_{\Delta_{1_i}}$	$\Delta_{1_i}$		$\bar{x}_{\Delta_{2_i}}$	$\Delta_{2_i}$
$\Omega_{y_1}$	0	-	$\Sigma_{y_1}$	-	-	-
$\Omega_{y_2}$	-	-	-	0	-	$\Sigma_{y_2}$
$\Omega_u$	-	-	-	-	-	-
$\Omega_{y_1^2}$	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y_1^2}$	-	-	-
$\Omega_{y_2^2}$	-	-	-	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y_2^2}$
$\Omega_{y_1 y_2}$	1	$\bar{y}$	$\Sigma_{y_1 y_2}$	1	$\bar{y}$	$\Sigma_{y_1 y_2}$
$\Omega_{y_1 u}$	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{y_1 u}$	-	-	-
$\Omega_{y_2 u}$	-	-	-	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{y_2 u}$
$\Omega_{u_2}$	-	-	-	-	-	-

## 4.4 O Ganho Estático

Nesta seção será utilizado o conceito de agrupamento de termos e de coeficiente de agrupamento para derivar uma equação para o ganho estático. Esta aproximação é equivalente à utilização do teorema do valor final para a resposta ao degrau com amplitude final  $\bar{u}$ . Conforme visto na seção (4.2.1), o modelo NARX polinomial pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{y} = \Sigma_0 + \Sigma_y \bar{y} + \Sigma_u \bar{u} + \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p} \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m} \bar{u}^m, \quad (4.29)$$

sendo que os termos de processo e seus respectivos parâmetros foram agrupados da seguinte forma:

termo constante :  $\Sigma_0$

termos lineares em  $y$  :  $\Sigma_y \bar{y}$

termos lineares em  $u$  :  $\Sigma_u \bar{u}$

termos cruzados :  $\sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^p \bar{u}^m$

termos não-lineares em  $y$  :  $\sum_{i=1}^{\ell} \Sigma_{y^i} \bar{y}^i$

termos não-lineares em  $u$  :  $\sum_{i=1}^{\ell} \Sigma_{u^i} \bar{u}^i$ .

Dessa maneira o ganho estático pode ser calculado por:

$$\hat{K}(\bar{y}, \bar{u}) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\frac{\Sigma_0}{\bar{u}} + \Sigma_u + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m} \bar{u}^{m-1}}{1 - \Sigma_y - \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m - \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p} \bar{y}^{(p-1)}}. \quad (4.30)$$

Como visto na tabela (4.3), os termos do agrupamento  $\Omega_u$  não influenciam a função “constante de tempo”, portanto, o numerador de (4.30) pode ser expresso em termos da variável  $\bar{x}_K$ , que influencia somente o ganho. Mas, por outro lado, os agrupamentos  $\Omega_{y^p u^m}$  e  $\Omega_{y^p}$  influenciam a “constante de tempo” e aparecem no denominador da equação (4.30). A partir dessas observações, a equação (4.30) pode ser expressa como:

$$\hat{K}(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i}) = \frac{\frac{\Sigma_0}{\bar{u}} + \Sigma_u + \sum_{i=1}^{n_K} \Sigma_{x_{K_i} u} \bar{x}_{K_i}}{1 - \Sigma_y - \sum_{i=1}^{n_{\tau}} \Sigma_{y x_{\tau_i}} \bar{x}_{\tau_i}}, \quad (4.31)$$

ressaltando que  $\bar{x}_K$  são sinais que influenciam somente a função ganho estático e que os sinais  $\bar{x}_{\tau}$  influenciam, além do ganho, a constante de tempo do modelo.

Em (Corrêa, 2001) é apresentada uma tabela, que mostra os agrupamentos de termos afetam o ganho estático de modelos NARX polinomiais. Essa tabela encontra-se reproduzida a seguir.

Tabela 4.4: Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho estático de modelos NARX polinomiais (Corrêa, 2001).

Agrupamentos	$\hat{K}(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i})$					
	$i$	$\bar{x}_{K_i}$	$K_i$	$i$	$\bar{x}_{\tau_i}$	$\lambda_i$
$\Omega_y$	-	-	-	0	-	$\Sigma_y$
$\Omega_u$	0	-	$\Sigma_u$	-	-	-
$\Omega_{yu}$	-	-	-	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{yu}$
$\Omega_{y^2 u}$	-	-	-	1	$\bar{y} \bar{u}$	$2 \Sigma_{y^2 u}$
$\Omega_{y u^2}$	-	-	-	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{y u^2}$
$\Omega_{u^2}$	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{u^2}$	-	-	-
$\Omega_{u^3}$	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{u^3}$	-	-	-
$\Omega_{y^2}$	-	-	-	1	$\bar{y}$	$2 \Sigma_{y^2}$
$\Omega_{y^3}$	-	-	-	1	$y^2$	$3 \Sigma_{y^3}$

Por exemplo, o sinal  $\bar{u}$  afeta tanto a “constante de tempo”, quanto o ganho do sistema. Já o sinal  $\bar{y}$  afeta apenas a “constante de tempo” do sistema. E os agrupamentos que afetam o ganho do sistema são os agrupamentos do tipo  $\Sigma_{u^i}$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

## 4.5 Comentários Finais

A definição das características gerais dos modelos NARX polinomiais apresentadas neste capítulo e no Capítulo 2, vão servir como ponto de partida para a definição de uma estratégia para incorporar informação a priori nas etapas de estimação de parâmetros e escolha de estrutura. No próximo capítulo será discutida essa estratégia e as ferramentas a serem utilizadas.



# Capítulo 5

## Metodologia Caixa-Cinza Utilizando Modelos NARX Polinomiais

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior, foram vistas algumas propriedades dos modelos NARX polinomiais que permitem relacionar características, tais como: autovalores, curva estática e simetria de pontos fixos aos termos e parâmetros do modelo. A partir dessas propriedades e de posse de algumas características do sistema original, é possível determinar, na etapa de escolha de estrutura, dentre os termos candidatos, um subconjunto de termos que satisfaça essas características, sejam elas dinâmicas<sup>1</sup> ou estáticas como as citadas acima.

Quanto à etapa de estimação de parâmetros, deseja-se impor certas condições aos parâmetros, permitindo assim que o modelo tenha características estáticas compatíveis com a do sistema. Como será visto, esse é um problema de otimização não-linear restrita.

É importante, então, nesse momento, definir uma metodologia para a incorporação de conhecimento a priori na etapa de escolha de estrutura, baseada nos conceitos adquiridos nos capítulos anteriores. Neste particular, as definições de agrupamentos de termos e seus coeficientes serão úteis. Essa metodologia será apresentada sob a forma de dois roteiros, um para a etapa de escolha de estrutura e outro para a etapa de estimação de parâmetros.

Além desses roteiros, serão também definidos os algoritmos a serem uti-

---

<sup>1</sup>Propriedades como: a variação dos autovalores resultando em mudança no comportamento dinâmico do sistema com o ponto de operação, por exemplo a mudança dos autovalores do sistema de reais para complexos conjugados.

lizados no decorrer desse trabalho e um estudo de suas características computacionais.

Antes, porém, é importante definir, de forma geral, os problemas a serem abordados.

## 5.2 Definição do Problema

O problema a ser estudado neste capítulo pode ser descrito como a seguir:

Deseja-se identificar um modelo NARX polinomial, a partir de dados dinâmicos. Além disso, assumindo-se que exista a priori conhecimento de características estáticas do sistema, deseja-se utilizar essa informação no processo de identificação, ou seja, deseja-se obter um modelo que:

1. minimize a predição um passo à frente sobre os dados dinâmicos;
2. e, ao mesmo tempo, tenha uma curva estática tão próxima quanto possível da curva estática conhecida do sistema.

Além disso, o objetivo 1, pressupõe a solução de dois outros problemas, a saber

- determinação de estrutura;
- estimação de parâmetros.

Como será visto neste capítulo, a solução desses problemas no contexto dos objetivos 1 e 2 resultará em problemas de otimização não-lineares sujeitos a restrições de igualdade.

Uma ferramenta muito utilizada, por sua robustez para problemas não-lineares é o algoritmo elipsoidal (Bland et al., 1981). Uma das características desse algoritmo, como será visto, é o seu alto custo computacional e difícil implementação de restrições de igualdade. Esse algoritmo, em uma forma preliminar já foi testado com bons resultados (Corrêa, 2001).

Um dos objetivos desse trabalho é promover o aperfeiçoamento da implementação e aplicação desse algoritmo, tornando a implementação das restrições de igualdade mais amigável.

Outro objetivo é procurar uma ferramenta alternativa e comparar esse algoritmo com o elipsoidal.

Será proposta ainda uma metodologia que considere os objetivos citados sendo dividida em dois roteiros, um para a incorporação de conhecimento prévio na etapa de escolha de estrutura e outro na etapa de estimação de parâmetros.

## 5.3 Roteiros Para Identificação Caixa-Cinza

Nas duas seções seguintes serão mostrados os roteiros utilizados nesse trabalho para a incorporação de conhecimento a priori nas etapas de identificação caixa-cinza.

### 5.3.1 Roteiro para a etapa de escolha de estrutura

A melhoria da estrutura é um passo importante para a construção de modelos globais em identificação de sistemas. A definição de uma metodologia caixa-cinza tem grande valor para essa finalidade.

O roteiro a seguir é definido da seguinte maneira:

1. os ítems numerados em negrito seguidos de uma seta ( $N \rightarrow$ ), indicam que conhecimento está sendo levado em consideração;
2. os ítems precedidos de um ponto ( $\bullet$ ) indicam qual procedimento deve ser tomado, dado o conhecimento a priori, ou indicam “sub-propriedades” que devem ser levadas em consideração;
3. os ítems precedidos de um hífen ( $-$ ) indicam qual procedimento deve ser tomado, dado o conhecimento indicado pela “sub-propriedade”.

#### **Roteiro 5.3.1: Rotina auxiliar para escolha de estrutura utilizando conhecimento a priori.**

##### **Início**

- 1**  $\rightarrow$  Determinar o conhecimento disponível do sistema que pode ser utilizado como informação a priori na etapa de escolha de estrutura. (*Características em estado estacionário; número de pontos de operação na saída do sistema e características dinâmicas como variação dos autovalores em relação ao ponto de operação, entre outros*).
- 2**  $\rightarrow$  Caso o número de estados estacionários na saída do sistema seja conhecido:
  - $n$  recebe o número de estados estacionários;
  - retirar os termos candidatos pertencentes aos agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{yp}$ , com  $p > n$ .

**3** → Caso a "constante de tempo" seja variante com o ponto de operação do sistema:

- selecionar os termos candidatos pertencentes aos agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{y^p u^m}$  com  $p \neq 0$  e  $m \neq 0$ .

**4** → Caso a "constante de tempo" seja não-variante com o ponto de operação do sistema:

- excluir os termos candidatos pertencentes aos agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{y^p u^m}$  com  $p \neq 0$  e  $m \neq 0$ .

**5** → Se os dados de entrada e saída estáticos estiverem disponíveis:

- fazer um ajuste de curva polinomial com o menor grau de não-linearidade possível que se ajuste aos dados estáticos.
- $m$  recebe o grau de não-linearidade utilizado para o ajuste de curva.
- selecionar os termos candidatos pertencentes aos agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{u^{m,m-1,\dots,1}}$

**6** → Conhecimento do número e localização dos pontos fixos do sistema

- Os agrupamentos de termos podem ser escolhidos de acordo com a Tabela (4.1), que pode ser vista na Pág. 34.

## **Fim**

A utilização de conhecimento a priori na etapa de escolha de estrutura não é novidade, alguns trabalhos já utilizaram algum tipo de informação na tentativa de melhorar as respostas dos modelos (Petrick and Wigdorowitz, 1997; Aguirre et al., 2000, 1998; Eskinat et al., 1993). O que os diferencia é qual informação é utilizada e como ela é imposta no procedimento de identificação.

### **5.3.2 Roteiro para a etapa de estimação de parâmetros**

Embora a melhoria das estimativas estáticas sejam notáveis, a estrutura do modelo escolhida através do Roteiro 5.3.1, não garante ao modelo representatividade em uma ampla faixa de operação. Isso acontece, geralmente, por que os dados de identificação são limitados em amplitude e em frequência,

além de serem finitos. Se esses dados não contiverem em si todas as informações necessárias para a estimação dos parâmetros, a representatividade do modelo fica restrita a uma pequena faixa de operação.

**Roteiro 5.3.2: Rotina auxiliar para estimação de parâmetros utilizando conhecimento a priori.**

**Início**

**1** → Determinar a estrutura do modelo a partir do Roteiro (5.3.1).

**2** → Caso a estrutura do modelo apresente um único estado estacionário na saída

- Caso a “constante de tempo” seja não-variante com o ponto de operação do sistema:
  - escrever a função estática  $\bar{y} = f(\bar{u})$ , que nesse caso é um polinômio em  $\bar{u}$  da forma

$$\bar{y} = \frac{a_0 + a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + \cdots + a_\ell\bar{u}^\ell}{1 - b_1}, \quad \forall b_1 \neq 1. \quad (5.1)$$

- Caso a “constante de tempo” seja variante com o ponto de operação do sistema:
  - escrever a função estática  $\bar{y} = f(\bar{u})$ , que nesse caso é uma função racional em  $\bar{u}$  da forma

$$\bar{y} = \frac{a_0 + a_1\bar{u} + \sum_{m=2}^{\ell} a_m\bar{u}^m}{1 - b_1 - \sum_{m=1}^{\ell-1} b_{m+1}\bar{u}^m}, \quad (5.2)$$

- em que  $a_{0,1,2,\dots,\ell}$  e  $b_{1,2,\dots,\ell}$  são constantes que podem ser expressas como função dos coeficiente de agrupamentos.
- Os valores das constantes  $a_{0,1,2,\dots,\ell}$  e  $b_{1,2,\dots,\ell}$  das equações (5.2) e (5.1) podem ser estimadas a partir de dados estáticos utilizando para tal, algoritmos de ajuste de curva.
- Escrever as equações que relacionam o vetor  $\mathbf{c}$  com os parâmetros do modelo, conforme as equações (5.1) e (5.2), da seguinte forma:

– se a equação utilizada for (5.1)

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta, \quad (5.3)$$

sendo  $\mathbf{c} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ b_1]^T$  um vetor  $M \times 1$ .  $\mathbf{S}$  é uma matriz  $M \times N$  que mapeia os parâmetros do modelo para os valores das restrições contidas em  $\mathbf{c}$ .  $\theta$  é um vetor  $N \times 1$  que contém os parâmetros do modelo <sup>2</sup>.

– se a equação utilizada for (5.2)

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta, \quad (5.4)$$

sendo  $\mathbf{c} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ b_1 \ b_2 \ \cdots]^T$  um vetor  $M \times 1$ .  $\mathbf{S}$  é uma matriz  $M \times N$  que mapeia os parâmetros do modelo para os valores das restrições contidas em  $\mathbf{c}$ .  $\theta$  é um vetor  $N \times 1$  que contém os parâmetros do modelo.

- Os mapeamentos (5.3) e (5.4) serão utilizados como restrições na etapa de estimação de parâmetros.

**3** → O sistema indica múltiplos estados estacionários na saída:

- baseado na equação (4.4) do capítulo anterior, escrever uma equação na forma

$$\bar{y} = a_\ell \bar{y} + f_{\ell-1}(\bar{u})\bar{y}^{\ell-1} + \cdots + f_2(\bar{u})\bar{y}^2 + f_1(\bar{u})\bar{y}^1 + f_0(\bar{u}), \quad (5.5)$$

sendo  $a_\ell$  uma constante que vai depender dos coeficientes dos agrupamentos de termos.  $f_{\ell-1, \ell-2, \ell-3, \dots, 1, 0}$  são funções polinomiais em  $\bar{u}$ . Os coeficientes dessas funções dependem dos coeficientes dos agrupamentos de termos do modelo.

**4** → O sistema apresenta múltiplos estados estacionários mas pelo menos uma entrada estacionária ( $\bar{u}$ ) e a respectiva saída estacionária ( $\bar{y}$ ) são conhecidas:

- Substituindo o valor de  $\bar{u}$  na equação (5.5), tem-se

$$\bar{y} = a_\ell \bar{y} + a_{\ell-1} \bar{y}^{\ell-1} + \cdots + a_2 \bar{y}^2 + a_1 \bar{y}^1 + a_0, \quad (5.6)$$

os coeficientes  $a_{\ell-1, \ell-2, \dots, 1, 0}$  são os valores das funções  $f_{\ell-1, \ell-2, \dots, 1, 0}(\bar{u})$ , com  $\bar{u}$  sendo o valor de entrada em regime estacionário em que se tem conhecimento da saída em estado estacionário  $\bar{y}$ .

---

<sup>2</sup>O vetor resultante de  $\mathbf{S}\theta$  contém os valores dos coeficientes dos agrupamentos de termos do modelo, conforme descrito em (4.10).

- Estimar os coeficientes da equação (5.6) para que essa tenha raízes iguais às saídas em estado estacionário conhecidas ( $\bar{y}$ ).
- Escrever as equações que relacionam os coeficientes de agrupamentos de termos com relação aos coeficientes de (5.6) conforme (4.4).
- Escrever as equações acima na forma de um mapeamento como

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta, \quad (5.7)$$

sendo  $\mathbf{c} = [a_\ell \ a_{\ell-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0]^T$  um vetor  $M \times 1$ ,  $\mathbf{S}$  uma matriz  $M \times N$  que mapeia os parâmetros do modelo para os valores de  $\mathbf{c}$  e  $\theta$  é um vetor  $N \times 1$  contendo tais parâmetros.

**5** → Estimar os parâmetros do modelo, em que a estrutura foi selecionada segundo o **Roteiro 5.3.1**. Nessa etapa é necessária a utilização de algoritmos de otimização não-lineares, sujeitos à restrições.

**6** → Validar o modelo.

**Fim**

Estes roteiros são também aplicáveis aos sistemas autônomos, bastando, para tal, fazer  $\bar{u} = 0$ , e seu uso será ilustrado no Capítulo 6.

## 5.4 Definição das Funções-Objetivo

Como visto, em algumas etapas dos roteiros há a necessidade de se utilizar ferramentas computacionais de otimização, seja para ajuste de curva, seja para estimar os parâmetros dos modelos.

As características das funções-objeto serão necessárias para escolher ferramentas computacionais para realizar essas tarefas. Então, o próximo passo é definir quais as funções-objeto serão utilizadas para as etapas de ajuste de curva e para a estimação dos parâmetros. Partir disso, será possível escolher as ferramentas computacionais a serem utilizadas.

### 5.4.1 Ajuste de curva

As funções-objeto serão definidas a partir das funções estáticas (5.1) e (5.2). A escolha entre as duas vai depender do tipo de informação a priori disponível.

Uma função custo genérica, pode ser escrita como:

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}(k))^2, \quad (5.8)$$

sendo  $\mathbf{f}$  uma função genérica e  $N$  o número de seus elementos.

Se  $\mathbf{f}$  for o de ajuste de curva, entre a saída estimada pelo modelo  $\hat{\mathbf{y}}^3$  e os dados estáticos de saída medidos  $\bar{\mathbf{y}}$ ,

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}, \quad (5.9)$$

então a função-objetivo (ou função custo) pode ser escrita como

$$J_N = \frac{1}{N} (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}), \quad (5.10)$$

os parâmetros resultantes da otimização da função-custo (5.10) serão os elementos do vetor  $\mathbf{c}$  nos mapeamentos (5.3) ou (5.4).

A função custo (5.10) é não-linear, por isso, a escolha da ferramenta computacional deve ser adequada. Outro problema é que a equação (5.2) é racional, dependendo dos valores dos parâmetros de otimização, o denominador dessa equação pode assumir valores muito próximos de zero e resultar numa função-custo mal condicionada, ou até mesmo indefinida no caso do denominador ser igual a zero. Uma alternativa para contornar esse problema é inicializar o algoritmo de otimização dentro da bacia de atração que contém o mínimo da função.

A função estática dos modelos polinomiais tem como parâmetros os valores dos coeficientes dos agrupamentos de termos, como visto na equação (4.4). Então, esses coeficientes podem ser utilizadas como valores iniciais para o algoritmo de ajuste de curva.<sup>4</sup>

Se essa estratégia for usada, a função custo passa a ser convexa e contínua em torno da bacia de atração, permitindo assim a utilização de um algoritmo mais simples, que é o caso dos algoritmos da família de “direção de busca”. Nesse trabalho será utilizado um algoritmo Quase-Newton para o ajuste de curva, que será descrito mais detalhadamente em uma seção própria.

---

<sup>3</sup>Valor estimado pela equação (5.1) ou (5.2) em função de  $\bar{u}$  conhecido a priori.

<sup>4</sup>O que se espera na verdade é que, com a melhoria da estrutura dos modelos via Roteiro (5.3.1), as estimativas das saídas estáticas sejam razoáveis. Assim, os valores dos coeficientes dos agrupamentos de termos poderiam ser usados como condições iniciais para o algoritmo de ajuste de curva utilizado. Essa suspeita se confirmou para os sistemas estudados nesse trabalho. Em trabalhos futuros, no entanto, será necessário formalizar essa conjectura.

### 5.4.2 Estimação dos parâmetros

Um problema de otimização com restrições de igualdade, de forma geral, pode ser escrito como

$$\theta = \arg(\min J(\theta)) \quad (5.11)$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{g}(\theta) = \mathbf{c},$$

em que  $\theta \in X$ , sendo  $X$  o espaço factível. O que se pretende agora é definir as funções  $J(\theta)$  e  $\mathbf{g}(\theta)$ .

Em identificação caixa-preta, os parâmetros estimados surgem da minimização dos resíduos de identificação um passo à frente, pelo fato de se utilizar o erro médio quadrático dos resíduos como função custo.

O vetor de resíduos de identificação, como visto no Capítulo 2, pode ser escrito como

$$\vec{\xi}(\theta) = \mathbf{y} - \mathbf{P}\theta. \quad (5.12)$$

Utilizando-se a mesma função custo genérica (5.8), agora com  $\mathbf{f} = \vec{\xi}(\theta)$ , o problema pode ser escrito como

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(\theta)^2, \quad (5.13)$$

ou, de outra maneira,

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} (\mathbf{y} - \mathbf{P}\theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{P}\theta). \quad (5.14)$$

A construção da função  $\mathbf{g}(\theta)$  baseia-se nos mapeamentos (5.3), (5.4) e (5.7), sendo

$$\mathbf{g}(\theta) = \mathbf{S}\theta. \quad (5.15)$$

Os elementos dos vetores  $\mathbf{c}$ ,  $\theta$  e da matriz  $\mathbf{S}$  vão depender da estrutura do modelo NARX escolhida.

A vantagem dessa abordagem é a convexidade e continuidade globais da função-objetivo. Mas deve-se levar em consideração sua não-linearidade, o que torna limitada a escolha do algoritmo de minimização a ser utilizado. Outro problema é a presença de restrições de igualdade, o algoritmo utilizado deve ser capaz de tratar as restrições de forma robusta.

Um algoritmo muito utilizado por sua robustez é o elipsoidal. Trata-se de um algoritmo da família de “exclusão de semi-espacos” que tem convergência geométrica garantida em problemas convexos. Uma desvantagem desse método é seu alto custo computacional para problemas não-lineares e a implementação não amigável para restrições de igualdade. O algoritmo elipsoidal usa restrições de desigualdade tais como

$$-\epsilon < \mathbf{g}(\theta) - \mathbf{c} < \epsilon, \quad (5.16)$$

sendo  $\epsilon \ll 1$ , para, de forma aproximada, representar restrições de igualdade. Quanto menor for o valor de  $\epsilon$  mais perto estarão os parâmetros dos valores requeridos através das restrições. Um problema da abordagem é o aumento do tempo computacional com o decrescimento do valor de  $\epsilon$ . Outro fator a ser levado em conta é a necessidade de se utilizar a cada iteração do algoritmo os dados de saída medidos do sistema, como pode ser visto na equação (5.14). Isso também contribui para o aumento do custo computacional desse algoritmo.

Outro algoritmo pesquisado para a solução do problema de estimação de parâmetros de forma restrita em modelos polinomiais é a forma de Lagrange. Esse algoritmo transforma um problema restrito em outro irrestrito, em que a função  $\mathbf{g}(\theta)$  é ponderada pelos chamados multiplicadores de Lagrange. A grande vantagem desse método é a possibilidade de se obter uma solução analítica para os parâmetros, respeitando-se as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker (KTE)<sup>5</sup>. Esse algoritmo, que recebe o nome de Mínimos Quadrados Restritos (MQR) é não iterativo, e apresenta baixo custo computacional e permitindo também usar restrições de forma mais simples do que no caso do algoritmo elipsoidal, como será visto. O problema se reduz à procura dos parâmetros que respeitem as condições KTE.

Os algoritmos elipsoidal e MQR serão mostrados de forma sucinta em seções próprias<sup>6</sup>.

## 5.5 Descrição dos Algoritmos de Otimização

As seções seguintes têm como objetivo descrever de forma rápida e concisa os algoritmos utilizados nas etapas de identificação caixa-cinza descritas.

---

<sup>5</sup>A descrição das condições (KTE) será mostrada em seção própria.

<sup>6</sup>Esses dois algoritmos foram implementados como parte integral deste trabalho e as funções baseadas nesses algoritmos podem ser vistas no Apêndice A. Essas funções foram escritas em linguagem MATLAB com a preocupação de serem ferramentas gerais para o problemas de estimação restrita em identificação caixa-cinza utilizando-se modelos polinomiais NARX.

### 5.5.1 O algoritmo Quase-Newton BFGS

Os métodos Quase-Newton (Bazaraa and Shetty, 1985; Luenberg, 1984) são algoritmos de compromisso entre a simplicidade do método de gradiente e a rapidez do método de Newton. Esses métodos, ao invés de calcular a inversa da hessiana<sup>7</sup>, caso do método de Newton, aproximam a inversa em um processo iterativo finito, utilizando apenas derivadas de primeira ordem. Dessa maneira existe um compromisso entre a rapidez da convergência do método de Newton e a dificuldade da avaliação da inversa da hessiana a cada passo. Essa propriedade torna esses métodos analiticamente o mais sofisticados para problemas irrestritos, que é a proposta de utilização neste trabalho. Então o problema geral dessa formulação é estimar a inversa da hessiana. A formulação desse método pode ser visto a seguir.

A expressão geral para a aproximação da inversa da hessiana é dada por:

$$B_{k+1} = \left( B_k - \frac{B_k Y_k Y_k^T B_k}{Y_k^T B_k Y_k} + \Theta_k V_k V_k^T \right) \nu_k + \frac{P_k P_k^T}{P_k^T Y_k}, \quad (5.17)$$

sendo  $\Theta_k$  e  $\nu_k$  parâmetros escalares que devem ser escolhidos de forma apropriada,

$$\begin{aligned} Y_k &= \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \\ P_k &= x_{k+1} - x_k \\ V_k &= (Y_k^T B_k Y_k)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{P_k}{P_k^T Y_k} - \frac{B_k Y_k}{Y_k^T B_k Y_k} \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

sendo  $x_k$  o valor dos parâmetros a serem otimizados na iteração  $k$  e  $\nabla$  indica gradiente de função  $f(\cdot)$ .

Fazendo-se  $\nu_k = 1$  e  $\Theta_k = 1$ , para todo  $k$  tem-se

$$B_{k+1} = \left[ \mathbf{I} - \frac{P_k Y_k^T}{P_k^T Y_k} \right] B_k \left[ \mathbf{I} - \frac{Y_k P_k^T}{P_k^T Y_k} \right] + \frac{P_k P_k^T}{P_k^T Y_k}. \quad (5.19)$$

Esta formulação recebe o nome de BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno). Para a inicialização deste método deve-se considerar um ponto inicial factível e  $B_0$  qualquer matriz definida-positiva.

Os parâmetros estimados são dados pela seguinte relação:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_{k+1}[-B_k \nabla f(x_k)], \quad (5.20)$$

---

<sup>7</sup>Matriz contendo as derivadas parciais de segunda ordem da função-objetivo.

sendo  $\lambda$  um operador que define a velocidade de convergência. Uma alternativa para esse número é utilizar a seção áurea<sup>8</sup>(Boyer, 1974; Polcino and Bussab, 1999) para definir seu valor a cada iteração.

### 5.5.2 O algoritmo elipsoidal

Considere o seguinte problema de otimização não-linear do funcional  $J(x)$  numa região factível  $S$ :

$$x^* = \arg(\min J(x)) \quad (5.21)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} x \in S \\ \mathbf{g}(x) = \mathbf{c}, \end{cases}$$

sendo a região factível  $S$  definida como

$$S \triangleq \{x \in \mathbf{S} \mid J_i(x) \leq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, m\} \quad (5.22)$$

e  $J(x)$  deve ser localmente convexa.

O algoritmo elipsoidal (ELIP) (Bland et al., 1981; Dziuban et al., 1985; Saldanha et al., 1999), dado de maneira recursiva, é:

$$x_{k+1} = x_k - \beta_1 \frac{Q_k h_k}{(h_k^T Q_k h_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.23)$$

$$Q_{k+1} = \beta_2 \left[ Q_k - \beta_3 \frac{(Q_k h_k)(Q_k h_k)^T}{(h_k^T Q_k h_k)} \right],$$

---

<sup>8</sup>Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea. Esse nome só foi usado uns dois mil anos depois de sua descoberta - mais ou menos pela época em que Kepler escrevia liricamente:

“A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa.”

A construção da razão áurea equivale à resolução de uma equação quadrática. Para mostrar isso, seja  $AB = a$  e  $AC = x$  então pela propriedade da seção áurea

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

e multiplicando médios e extremos temos a equação, cujo resultado é:

$$x = a \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

sendo que

$$\beta_1 = \frac{1}{n+1}, \quad \beta_2 = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \beta_3 = \frac{2}{n+1}. \quad (5.24)$$

O elemento  $h_k$  é um subgradiente da restrição mais violada, ou, no caso da variável de otimização já estar dentro da região factível, estes gradientes passam a ser da função  $J(x)$  no ponto.

O algoritmo é inicializado com um disco  $E_0$ , centrado no ponto inicial  $x_0$ , da seguinte maneira:

$$E_0 \triangleq \{x \mid (x - x_0)^T Q_0^{-1} (x - x_0) \leq 1\}, \quad (5.25)$$

sendo

$$Q_0 = \sigma \mathbf{I} \quad (5.26)$$

e  $\sigma$  deve ter um valor grande o suficiente para cobrir todo o espaço factível na primeira iteração.

O ótimo da função ( $x^*$ ) pertence ao semi-espaço  $H_k$  que é dado por:

$$H_k \triangleq \{x \mid h_k^T (x - x_k) \leq 0\}. \quad (5.27)$$

Partindo da premissa que a função é localmente convexa e que o algoritmo é lançado de maneira a englobar esta região, a seqüência de novos elipsóides, dados por  $E_k$ , tem a cada iteração menor volume, e contém o semi-espaço  $E_{k-1} \cap H_{k-1}$ . Como a primeira elipse (no caso um disco) abrange todo o espaço factível, então essa deve conter a solução. Partindo dessa afirmação, a cada iteração, a nova elipse deve conter também a solução, e em  $n$  iterações deve convergir para a solução.

A vantagem desse método é que a convergência é garantida de forma geométrica. Se todas as premissas forem mantidas, esse método é muito robusto. Mais informações a respeito das características desse método podem ser encontradas em Takahashi (2001).

### 5.5.3 O estimador de mínimos quadrados restritos

Antes da descrição do método é importante, para melhor entendimento, a definição das condições de otimalidade segundo Kuhn-Tucker (KTE) (Takahashi, 2001; Bazaraa and Shetty, 1985; Luenberg, 1984).

**Condições Necessárias de Kuhn-Tucker para Otimalidade**

Partindo de um problema genérico de otimização com restrição de igualdade do tipo

$$\begin{aligned} \min J(x) \\ \text{sujeito a } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.28)$$

sendo que  $J$  e  $g$  pertencem ao espaço factível  $X$ .

Tomando um ponto regular das restrições  $x^*$ , esse será considerado um ótimo local do problema se existir um conjunto de multiplicadores de Kuhn-Tucker  $\lambda^* \in R^l$  tal que:

$$\nabla J(x^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \quad (5.29)$$

As condições de otimalidade KTE são necessárias e suficientes caso a função objetivo e as restrições sejam convexas.

**O Algoritmo MQR**

Considere o seguinte problema de otimização não-linear  $P$ , que recebe o nome de *Problema Primal*.

**O problema primal  $P$** 

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J(x) \\ \text{sujeito a: } g_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (5.30)$$

sendo  $x \in X$ ,  $X$  é o espaço factível.

Essa formulação é muito utilizada para a resolução de problemas não-lineares com restrições de igualdade. Os métodos do Elipsóide e BFGS usados neste trabalho utilizam essa formulação.

A partir dela é possível construir problemas irrestritos que geram como resultado os valores ótimos de  $x$ . Essas formulações recebem o nome de *Problemas Duais*. A formulação dual utilizada aqui recebe o nome de *Lagrangeana Associada*. O problema dual Lagrangeano  $D$  é apresentado a seguir.

**O problema dual Lagrangeano  $D$** 

$$\begin{aligned} \text{Maximize } d(v) \\ \text{sendo } d(v) = \inf\{J(x) + \sum_{i=1}^l v_i g_i(x) : x \in X\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Na expressão para  $d(x)$ , a restrição de igualdade  $g_i(x)$  foi incorporada na função objetivo usando o *Multiplicador de Lagrange*  $v_i$ . Esse multiplicador, associado com a restrição de igualdade não tem restrição de sinal.

O problema dual consiste em maximizar a função  $J(x) + \sum_{i=1}^l v_i g_i(x)$ , muitas vezes referenciado como: *maximizar o problema dual mínimo*. O problema de minimização do vetor de resíduos da estimação um passo à frente, em sua maneira dual pode ser visto a seguir.

### Formulação dual para os MQ

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & d(\mathbf{v}) \\ \text{sendo } & d(\mathbf{v}) = \vec{\xi}^T \vec{\xi} + \mathbf{v}\mathbf{g}(\theta), \end{aligned} \quad (5.32)$$

sendo  $\mathbf{v}$  um vetor contendo os multiplicadores de Lagrange e  $\vec{\xi} = \mathbf{y} - \mathbf{P}\theta$ , ou seja, o erro de modelagem.

Essa formulação exige que o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{g}(\cdot)$ ,  $g_i(\theta) = 0$ , por esse motivo a restrição será escrita como  $g_i(\theta) - c_i = 0$ , sendo  $c_i$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{c}$ .

A função  $d(\mathbf{v})$  pode ser escrita em função do vetor  $\theta$  da seguinte maneira:

$$d(\mathbf{v}) = (\mathbf{y} - \mathbf{P}\theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{P}\theta) + \mathbf{v}(\mathbf{S}\theta - \mathbf{c}), \quad (5.33)$$

sendo  $\mathbf{v}$  um vetor  $M \times 1$ , contendo os multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{S}$  é uma matriz  $M \times N$  que mapeia o vetor ( $N \times 1$ )  $\theta$  que contém os parâmetros do modelo para o vetor ( $M \times 1$ )  $\mathbf{c}$  que contém os valores das restrições.

Portanto, resolver o problema dual corresponde a resolver uma seqüência de otimizações irrestritas com o intuito de se obter o valor de  $\mathbf{v}$  ótimo. Uma vez definido os valores dos multiplicadores de Lagrange, o problema pode ser resolvido derivando-se o problema dual e igualando a zero, ou seja, achando  $\theta$  que respeite as condições de otimalidade de KTE.

A solução dos MQR é conhecida (Pearson and Pottmann, 2000; Draper and Smith, 1998) e dada por:

$$\hat{\theta}_{\text{MQR}} = \underbrace{(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{Y}} - \underbrace{(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{S}^T [\mathbf{S} (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{S}^T]^{-1}} (\mathbf{S} \hat{\theta}_{\text{MQ}} - \mathbf{c}). \quad (5.34)$$

O primeiro termo em destaque na solução acima é a estimação irrestrita dos parâmetros através do método clássico de Mínimos Quadrados (MQ) e o segundo termo em destaque se refere ao valor do vetor  $\mathbf{v}$  da equação (5.33). Esse resultado é interessante porque a solução dos MQ é baseada na minimização do erro de predição um passo à frente. Os MQR corrigem os

valores estimados por MQ usando o segundo termo da equação (5.34). Dessa maneira é possível “medir” o quanto MQ “acertou” em sua estimativa, bastando para isso avaliar o segundo membro da equação.

Esse é um método muito robusto, ou seja, é capaz de convergir para o valor de restrição, além de ser uma ferramenta não iterativa (baixo custo computacional). O tratamento das restrições é mais amigável do que no caso do algoritmo elipsoidal.

## 5.6 Comentários Finais

A metodologia desenvolvida nesse capítulo teve como motivação a estruturação de um problema mais geral que dependia dos seguintes aspectos:

- o conhecimento das propriedades dos modelos polinomiais NARX;
- aspectos gerais em identificação caixa-preta e caixa-cinza.

Esse problema foi construído com o objetivo de:

- criar uma metodologia em identificação caixa-cinza para modelos NARX polinomiais, a fim de utilizar informação que pudesse ser expressa na forma  $\mathbf{S}\theta - \mathbf{c} = 0$ ;
- levantar os funcionais nas etapas de estimação de parâmetros e ajuste de curva;
- a partir do conhecimento dos funcionais, escolher ferramentas de otimização compatíveis.

A metodologia foi apresentada na forma de dois roteiros, sendo um roteiro para a escolha de estrutura e outro para estimação dos parâmetros do modelo. A forma não estruturada com que esses roteiros são construídos, permite o acesso direto às informações contidas em suas etapas.

Um algoritmo alternativo foi descrito neste capítulo. Uma característica desse algoritmo é que não é iterativo. No próximo capítulo, o desempenho do dois algoritmos será comparado e analisado.

# Capítulo 6

## Identificação de um Aquecedor Elétrico

### 6.1 Introdução

Esse capítulo tem como objetivo avaliar a eficiência dos métodos descritos no capítulo anterior em um sistema no qual os dados de identificação excursionam uma ampla faixa de operação. Essa é uma situação mais ideal, mas importante para avaliar o método.

A cada passo de identificação que for executado, será mostrada a função computacional que foi utilizada para tal. A descrição completa das funções pode ser vista no Apêndice.

Na primeira seção será mostrado o sistema de forma detalhada, bem como os testes estáticos e dinâmicos para obtenção dos dados de identificação, validação e estáticos.

Nas seções posteriores serão mostrados os modelos obtidos segundo os roteiros e algoritmos apresentados no capítulo anterior.

### 6.2 Aquecedor com Dissipação Variável

Para melhor compreensão do leitor a Figura 6.1 apresenta um diagrama em blocos funcionais de todo o sistema (Cassini, 1999).

A entrada e saída do sistema são, a tensão elétrica no divisor de tensão e a tensão de saída do circuito amplificador, respectivamente. O divisor de tensão é construído de maneira que uma variação na faixa (0 a 127 V) corresponda a uma variação de (0 a 5 V) na entrada do sistema. Os dados de entrada e saída foram coletados através de uma placa de aquisição de dados (PCL 711s)

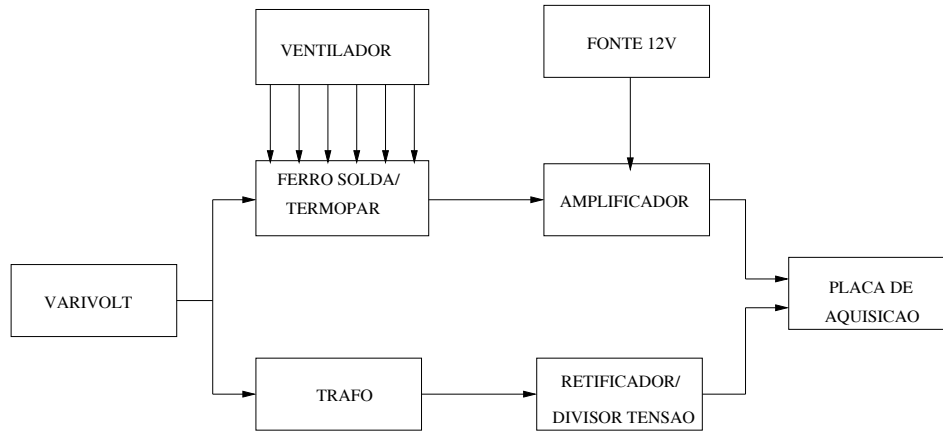


Figura 6.1: Diagrama em blocos funcionais do sistema (aquecedor).

### 6.2.1 Descrição do Sistema

A placa de aquisição de dados utilizada tem como limites de tensão, para coleta, as faixas (0 a 5V) e (0 a 10V). O conjunto funcional transformador-retificador-divisor de tensão, tem como função garantir a manutenção dos limites de (0 a 5V).

O varivolt é utilizado para tornar possível a variação da tensão de entrada na faixa de (0 a 136V) da planta (ferro de solda). Esse sinal passa pelo transformador, passando para a faixa de (0 a 18V), e o sinal de saída é retificado.

As variações na temperatura do ferro de solda provocadas pela variação no varivolt são medidas por meio de um termopar acoplado ao mesmo. A tensão nos terminais do termopar são ampliadas por um amplificador de instrumentação para uma faixa de (0 a 4V) e coletadas pela placa de aquisição de dados.

É utilizado ainda um ventilador para variar o ganho estático do sistema.

### 6.2.2 Teste Dinâmico

Foram realizados dois testes dinâmicos, um com o ventilador desligado e o outro com o ventilador ligado em uma fonte de 127V.

Esses testes foram realizados em uma temperatura ambiente de 24°C por um período de 4h. Os dados foram coletados com uma taxa de amostragem

de 6s, resultando num total de 2510 pontos para o teste sem o ventilador estar ligado e de 2520 pontos para o teste com ventilador ligado. Cada patamar do sinal de excitação do sistema foi mantido por 1 min, gerando aproximadamente 10 amostras por patamar.

Os sinais utilizados nesse trabalho estavam sob a influência do ventilador, e foi dizimados de um fator de 10 para que os dados de identificação respeitassem os limites da equação (2.4). A massa de dados foi dividida em duas, sendo a primeira metade utilizada para a identificação do sistema e a segunda metade para a validação do mesmo. Os dados utilizados na identificação podem ser vistos na Figura 6.2 e os dados utilizados na validação na Figura 6.3.

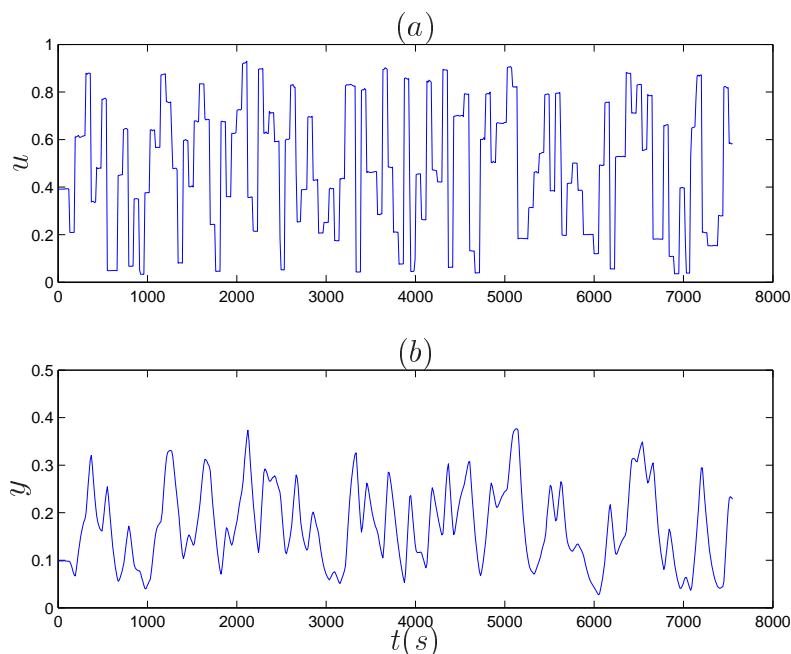


Figura 6.2: Dados de identificação do sistema (dados1 - primeira metade), sendo: (a) sinal de entrada do sistema em p.u, (b) sinal de saída do sistema em p.u.

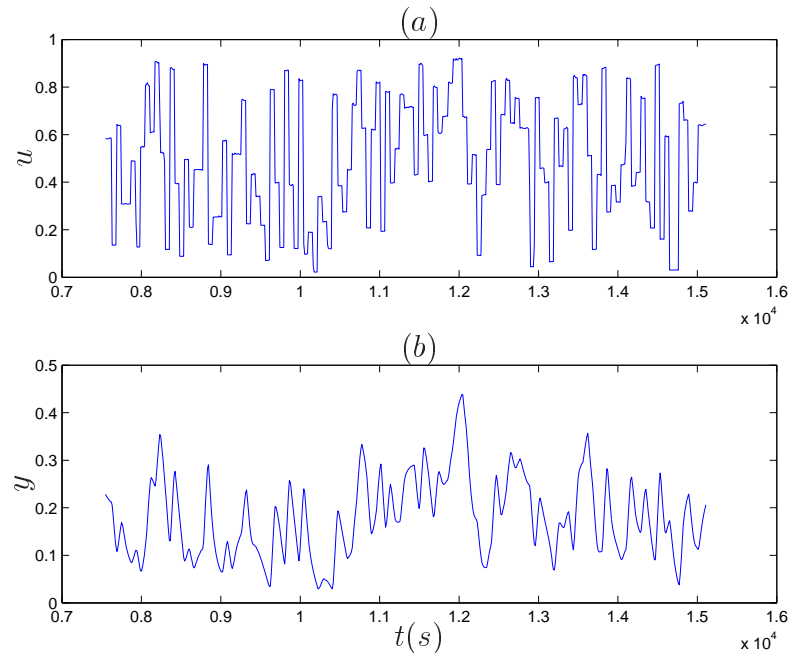


Figura 6.3: Dados de validação do sistema (**dados1** - segunda metade), sendo; (a) sinal de entrada do sistema em p.u, (b) sinal de saída do sistema em p.u.

### 6.2.3 Teste Estático

Os testes estáticos têm como finalidade o levantamento da curva estática do sistema. O teste utilizado nesse trabalho foi efetuado com o ventilador ligado e teve a duração de 3h.

O teste consiste em:

1. aplicar um patamar fixo na entrada do sistema;
2. esperar o sistema estabilizar, ou seja, entrar em regime permanente;
3. medir a saída do sistema;
4. colocar os pares ordenados (saída, entrada) em um gráfico;
5. o conjunto de todos os pontos no gráfico, descrevem a curva estática do sistema.

A Figura 6.4 mostra a curva estática do modelo. As grandezas estão indicadas em p.u., sendo 1p.u. correspondente ao referencial AC de 5V do sinal de entrada, visto pelo ferro de solda e a  $998,51^{\circ}\text{C}$  na temperatura do ferro de solda.

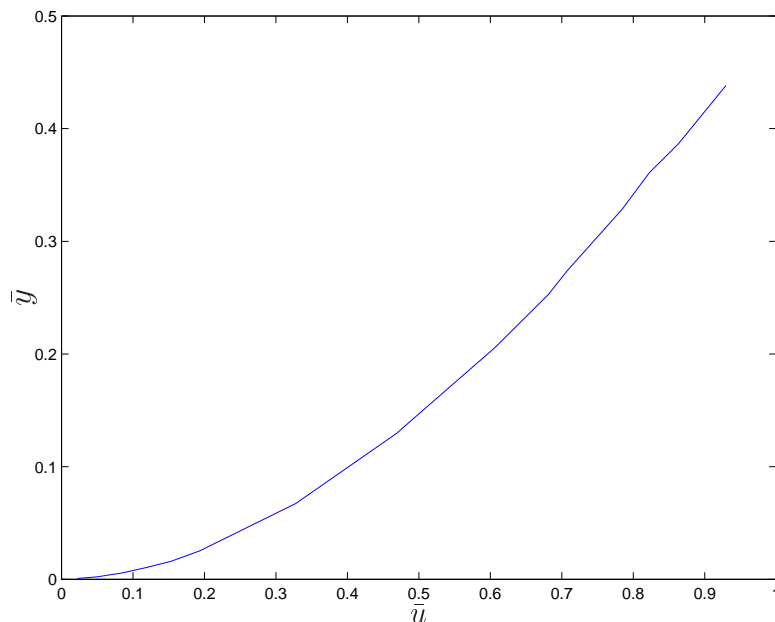


Figura 6.4: Curva estática do sistema (dados `estat3`), sendo  $(\bar{u})$  e  $(\bar{y})$  em p.u.

Outro teste utilizado foi a resposta ao degrau unitário positivo e negativo para determinação da constante de tempo predominante do sistema.

Para o degrau positivo a constante de tempo ficou em torno de 1,81 min e para o degrau negativo em torno de 3,33 min. Por esse motivo, ou seja, pelo sistema atingir o regime permanente mais rápido, os testes realizados foram feitos para uma variação positiva do degrau.

## 6.3 Identificação de Aquecedor Elétrico

Para a identificação de sistemas lineares os únicos parâmetros a serem ajustados são os máximos atrasos dos termos de entrada e saída do modelo. Mas em sistemas não-lineares além desses parâmetros é necessário também escolher o grau de não-linearidade do modelo. Em (Cassini, 1999) foram identificados modelos com grau de não-linearidade um, dois e três.

O que se observa nos resultados daquele trabalho é que os modelos com grau de não-linearidade unitário não se mostraram capazes de representar de forma satisfatória o sistema. Por exemplo, há perda de ganho dinâmico.

Modelos não-lineares quadráticos foram apresentados de duas maneiras: modelos com não-linearidade em  $y$  e em  $u$ , ou seja, modelos com dois estados estacionários na saída, e modelos com não-linearidade apenas em  $u$ , ou seja,

com apenas um estado estacionário na saída. No primeiro caso notou-se que a variação de um ponto fixo foi positiva em função de  $\bar{u}$  e foi capaz de acompanhar a mesma tendência da característica estática do sistema; já o segundo ponto fixo sofreu uma variação negativa divergindo da curva estática do sistema original. No segundo caso, ou seja, com apenas um estado estacionário na saída, o ponto fixo do modelo em função de  $\bar{u}$  acompanhou a tendência da curva estática do sistema original. As respostas dinâmicas dos modelos foram muito boas.

Modelos não-lineares cúbicos em  $y$ , como no caso dos modelos quadráticos, mostraram que apenas um ponto fixo acompanha a tendência da curva estática original. A resposta dinâmica dos modelos foram tão boas quanto a dos modelos quadráticos. Esses resultados levam a crer que o sistema poderá ser bem representado por modelos que apresentam apenas um estado estacionário na saída, o que confirma o comportamento conhecido do sistema.

Outro aspecto discutido naquele trabalho foi a variação dos autovalores do sistema em função do patamar do sinal de entrada, conjecturando-se que a “constante de tempo” do sistema é variável.

Para a identificação do sistema serão consideradas três etapas:

1. utilizando o roteiro (5.3.1) e os parâmetros estimados por mínimos quadrados estendidos;
2. utilizando o roteiro (5.3.2) e os parâmetros estimados pelo algoritmo elipsoidal;
3. utilizando o roteiro (5.3.2) e os parâmetros estimados por mínimos quadrados restritos.

### 6.3.1 Utilizando o roteiro (5.3.1) e MQ

Em modelos NARX polinomiais, a curva estática é obtida em função dos agrupamentos de termos e seus coeficientes, por esse motivo, deseja-se que o modelo apresente agrupamentos e coeficientes de agrupamentos que sejam capazes de reproduzir de forma aproximada a curva estática do sistema real.

Os coeficientes dos agrupamentos de termos são escritos em função dos parâmetros do modelo. A estimação desses parâmetros será feita a através do estimador de mínimos quadrados, sem a utilização de conhecimento a priori.

O que se pretende nessa seção é avaliar a eficácia do roteiro (5.3.1) como ferramenta auxiliar para a incorporação de conhecimento a priori na etapa de detecção de estrutura, visando a escolha de agrupamentos de termos que sejam capazes de representar a curva estática do sistema além é claro da resposta dinâmica.

Serão mostradas a seguir as etapas seguidas segundo o roteiro (5.3.1).

1. gerar todos os termos candidatos com grau de não-linearidade  $\ell = 2$ ,  $n_y = 2$  e  $n_u = 2$ , utilizando a função **genterms**. A escolha desses valores foi baseada no fato de que os modelos com grau de não-linearidade cúbica apresentados em (Cassini, 1999), não apresentaram melhora dinâmica e estática em relação aos modelos quadráticos que justifique a escolha de um grau de não-linearidade maior que dois;
2. o número de estados estacionários na saída é igual a 1. Retirar os agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{y^p}$  com  $p > 1$  através da função **mcand**;
3. o sistema apresenta “constante de tempo” variável. Selecionar os agrupamentos de termos cruzados;
4. os dados estáticos mostrados na Figura 6.4 podem ser ajustados por uma função polinomial de grau 2, utilizando a função **curvefit**. Selecionar os termos do tipo  $\Omega_{u^m}$  com  $m = 1, 2$ ;

Após a definição dos agrupamentos de termos a serem considerados via roteiro (5.3.1), é necessário submeter esse conjunto de novos termos candidatos aos critérios de seleção de estrutura e informação, da seguinte maneira:

1. estimar o número de termos a serem considerados a partir do critério de informação de Akaike, utilizando a função **akaike**;
2. detectar a estrutura através do ERR, utilizando a função **myhouse**;
3. a estrutura selecionada foi<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & \theta_1 y(k-1) + \theta_2 u(k-2)u(k-1) + \theta_3 u(k-1)^2 \\
 & + \theta_4 y(k-2) + \theta_5 u(k-2)y(k-1) \\
 & + \theta_6 u(k-2)y(k-2) + \theta_7 u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

4. Para a estimação dos parâmetros via MQ foi utilizada a função **orthreg**. O modelo com os parâmetros estimados é:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2929y(k-1) + 0,0101u(k-2)u(k-1) + 0,0407u(k-1)^2 \\
 & - 0,3779y(k-2) - 0,1280u(k-2)y(k-1) \\
 & + 0,0957u(k-2)y(k-2) + 0,0051u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

---

<sup>1</sup>Os termos aparecem em ordem de importância decrescente segundo o critério ERR

5. Os agrupamentos de termos e seus respectivos coeficientes do modelo (6.2) são mostrados na Tabela 6.1 e foram calculados através da função **coefc**.

6. O modelo (6.2) escrito de forma agrupada é

$$\bar{y} = 0,9150\bar{y} - 0,0323\bar{u}\bar{y} + 0,0458\bar{u}^2, \quad (6.3)$$

e sua característica estática pode ser estimada através da seguinte função:

$$\bar{y} = \frac{0,0458\bar{u}^2}{1 - 0,9150 + 0,0323\bar{u}}. \quad (6.4)$$

A validação do modelo será baseada na recuperação dinâmica, simulada através da função **simodeld**, e estática do modelo em comparação à do sistema original. Como parâmetro de avaliação além do aspecto visual, será considerado o índice de desempenho RMSE, implementado pela função **rmse**. A simulação livre do modelo pode ser vista na Figura 6.5.

Tabela 6.1: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.2)

Coeficientes dos Agrupamentos de Termos	
$\Omega_y$	0,9150
$\Omega_{yu}$	-0,0323
$\Omega_{u^2}$	0,0458

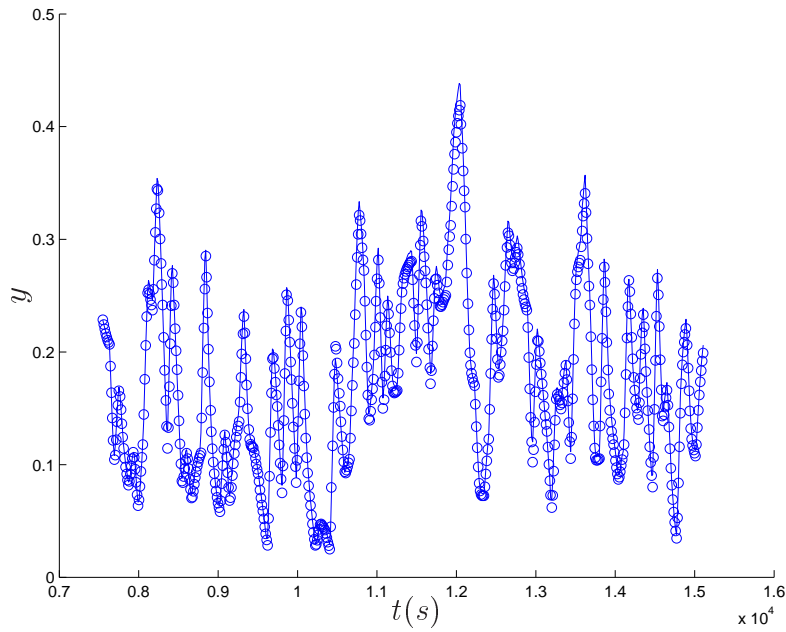


Figura 6.5: Validação dinâmica do modelo (6.2) sendo: ( - ) os dados reais e ( o ) a resposta do modelo.

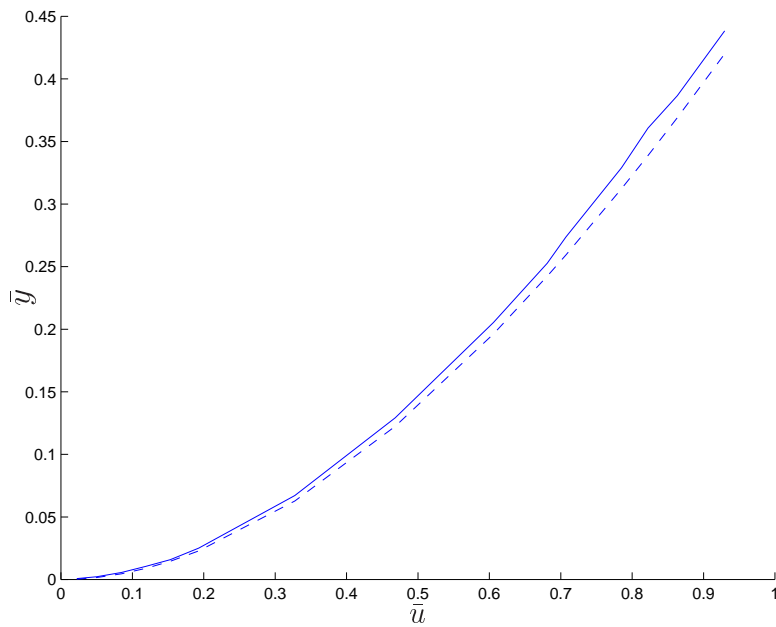


Figura 6.6: Validação estática do modelo (6.2) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

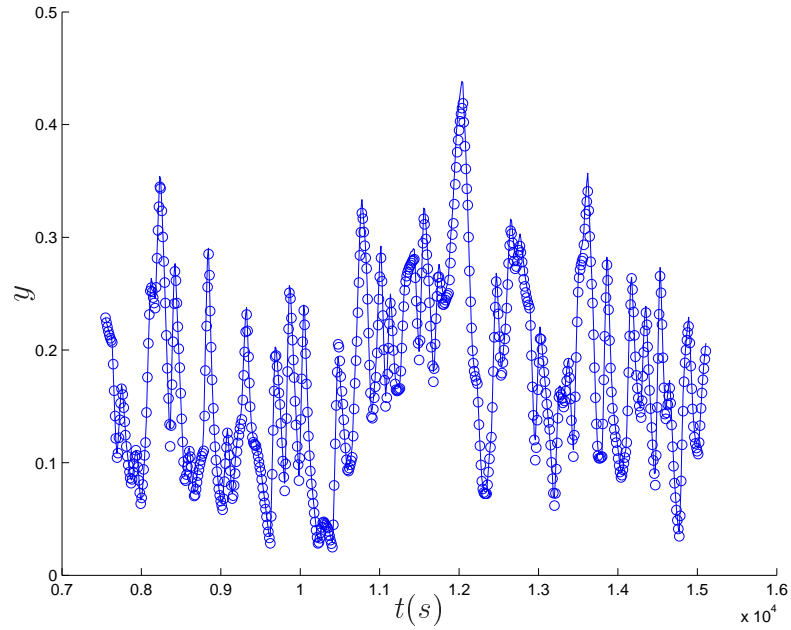


Figura 6.7: Validação dinâmica do modelo (6.5) sendo: ( - ) os dados reais e ( o ) a resposta do modelo.

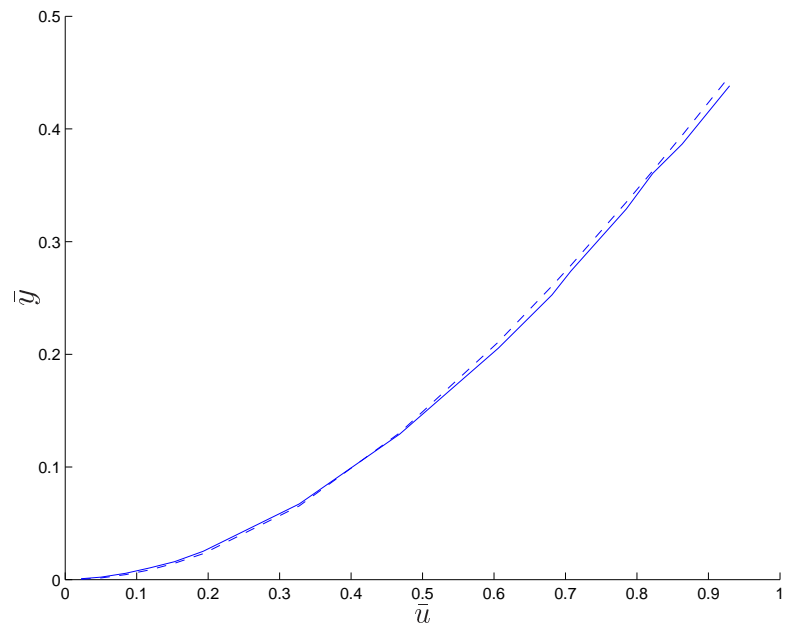


Figura 6.8: Validação estática do modelo (6.5) para o primeiro ponto fixo, sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

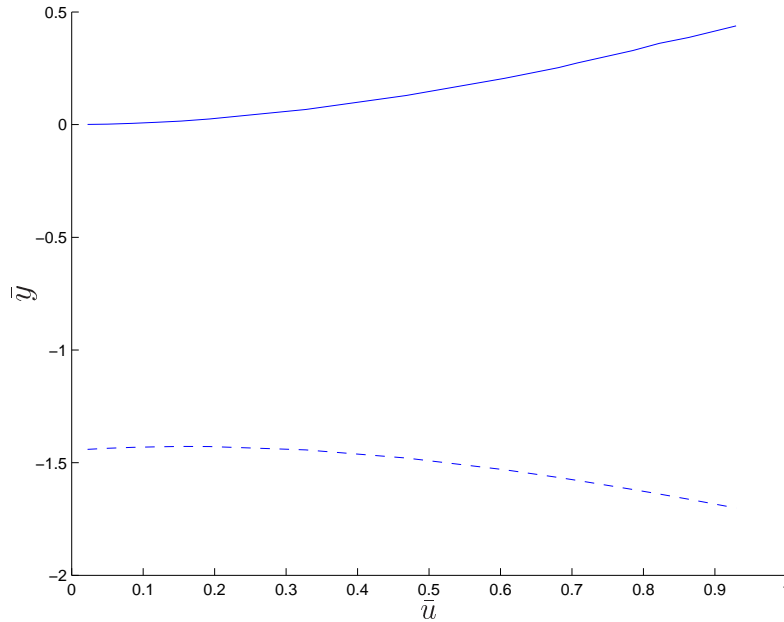


Figura 6.9: Validação estática do modelo (6.5) para o segundo ponto fixo, sendo: (—) os dados reais e (---) a resposta do modelo.

O roteiro (5.3.1) proporcionou a escolha de agrupamentos de termos que foram capazes de descrever a dinâmica do sistema de forma satisfatória. Ferramentas de detecção de estrutura aplicadas aos termos candidatos sem a utilização de conhecimento a priori, como nesse caso, selecionaram, por exemplo, termos pertencentes ao agrupamento de termos  $\Omega_{y^2}$  (Cassini, 1999), contrariando a premissa de que o sistema apresenta apenas um estado estacionário na saída. Como exemplo, pode-se observar o modelo (6.5) cuja estrutura foi detectada utilizando-se apenas critérios estatísticos como o ERR e AIC.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,3067y(k-1) + 0,0080u(k-2)u(k-1) \\
 & + 0,0449u(k-1)^2 - 0,3930y(k-2) \\
 & - 0,3900y(k-1)^2 + 0,3289y(k-2)y(k-1) \\
 & 0,0128u(k-1)y(k-2) + 0,0006.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Observa-se no modelo (6.5) que o ERR selecionou além dos termos quadráticos em  $y$ , o termo constante. Esse termo, no entanto, apresenta um valor muito baixo, se comparado com parâmetros de outros termos, levantando a suspeita de que ele não contribui de forma preponderante para a dinâmica do sistema.

Esse termo não foi selecionado pelo ERR no modelo (6.2), que utilizou informação a priori na etapa de detecção de estrutura. Esse fato só aumenta a suspeita de que o termo constante não contribui para a melhoria dinâmica e estática do modelo. As respostas dinâmica e estáticas do modelo (6.5) podem ser vistas nas Figuras 6.7, 6.8 e 6.9, respectivamente.

Aplicando-se os dados estáticos de entrada na função (6.4) tem-se a saída estática estimada  $\hat{y}$ , que pode ser vista na Figura 6.6. O modelo foi capaz de representar a característica estática de forma razoável.

A partir da análise dos índices RMSE pode-se chegar à conclusão que a estrutura identificada foi eficiente em suas aproximações, embora a estimativa dos parâmetros possa ser melhorada. Essa afirmação se baseia na observação de que as características estáticas do modelo e do sistema têm o mesmo formato. Coeficientes mais adequados poderiam, a princípio, melhorar a característica estática do modelo. Na Tabela 6.6 podem ser vistos os índices RMSE para o modelo.

### 6.3.2 Utilizando o roteiro (5.3.2) e MQR

Os estimadores MQ e MQE utilizam como única fonte de informação os dados dinâmicos do sistema. Como não há garantia de que os dados dinâmicos tenham todas as informações necessárias para a estimação dos parâmetros, suspeita-se que tais estimadores possam ser deficientes em suas estimativas levando à perda de qualidade nas aproximações dinâmicas e/ou estáticas, como no modelo (6.2). O que se espera nesta seção é que a utilização do roteiro (5.3.2) possa contornar essa provável deficiência dos estimadores citados.

A seguir será mostrada as etapas para incorporação de conhecimento a priori na etapa de estimação de parâmetros.

1. utilizando-se a estrutura do modelo (6.2);
2. o sistema apresenta apenas um estado estacionário na saída e tem a “constante de tempo” variante. A função estática foi definida no roteiro anterior (ver equação 6.4), e é da forma:

$$\bar{y} = \frac{a_1 \bar{u}^2}{1 - b_1 - b_2 \bar{u}}; \quad (6.6)$$

3. a função custo a ser utilizada para estimação do vetor  $\mathbf{c}$ , que neste exemplo tem a forma

$$\mathbf{c} = [\Sigma_y \quad \Sigma_{u^2} \quad \Sigma_{yu}]^T$$

será

$$f(a, b) = (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y})^T (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y}).$$

Utilizando-se a função **fminunc**<sup>2</sup> para realizar o ajuste de curva;

4. o vetor **c** estimado foi

$$\mathbf{c} = [0,0615 \quad -0,0360 \quad 0,9128]^T; \quad (6.7)$$

5. as restrições são escritas a seguir na forma  $\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta$ ;

$$\begin{bmatrix} 0,0615 \\ -0,0360 \\ 0,9128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix}; \quad (6.8)$$

6. as restrições são impostas na etapa de estimação dos parâmetros através da função **mqr**;

7. o modelo estimado considerando as restrições (6.8) é:

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,2564y(k-1) + 0,0090u(k-2)u(k-1) + 0,0461u(k-1)^2 \\ & -0,3436y(k-2) - 0,0685u(k-2)y(k-1) \\ & +0,0325u(k-2)y(k-2) + 0,0064u(k-2)^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Os parâmetros estimados via MQR são muito próximos dos estimados por MQ. Conjectura-se de que é um indicativo que a estrutura foi bem escolhida e que os parâmetros precisam apenas de um "ajuste fino";

8. A Tabela 6.2 apresenta os agrupamentos de termos e coeficientes, calculados através da função **coefc**, referentes ao modelo (6.9);

Tabela 6.2: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.9)

Coeficientes dos Agrupamentos de Termos	
$\Omega_y$	0,9128
$\Omega_{yu}$	-0,0360
$\Omega_{u^2}$	0,0615

<sup>2</sup>Função BFGS.

9. escrever o modelo (6.9) em sua forma agrupada

$$\bar{y} = 0,9128\bar{y} - 0,0360\bar{u}\bar{y} + 0,0615\bar{u}^2, \quad (6.10)$$

a função estática é

$$\bar{y} = \frac{0,0615\bar{u}^2}{1 - 0,9128 + 0,0360\bar{u}}. \quad (6.11)$$

Os resultados claramente mostram a eficácia da metodologia desenvolvida. Em Coelho et al. (2000) é mostrada uma comparação de várias representações, como Redes Neurais, RBF, modelos racionais, entre outras, em relação ao sistema estudado. Os resultados obtidos aqui são comparáveis com os melhores resultados daquele trabalho, obtidos com redes RBF. A capacidade dinâmica do sistema pode ser vista na Figura 6.10.

A Figura 6.11 mostra a característica estática do modelo (6.9), representada pela equação (6.11), e a medida diretamente do sistema. A melhora com relação ao modelo cujos parâmetros foram estimados sem o uso das restrições é evidente, conforme pode ser constatado a partir dos índices RMSE listados na Tabela (6.6). É interessante observar que a melhora na curva estática não resultou, neste exemplo, na piora do desempenho dinâmico do modelo.

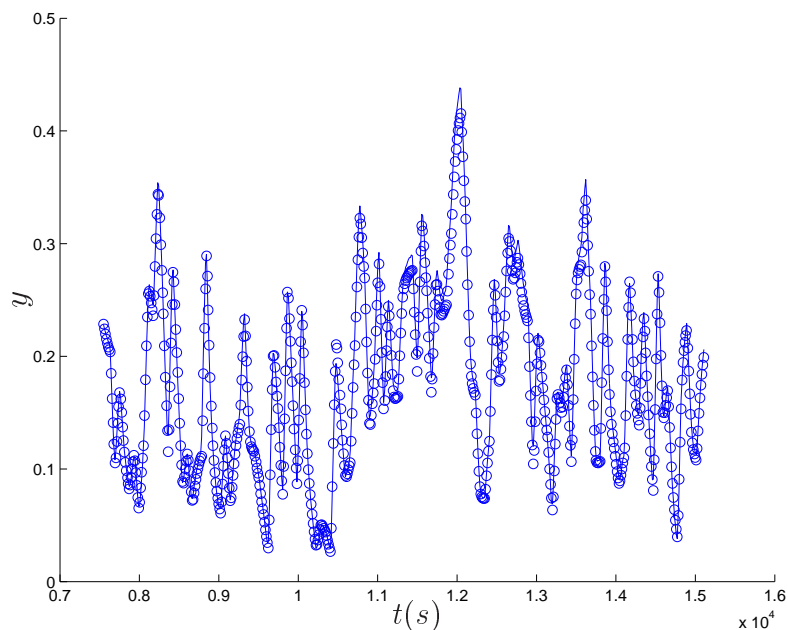


Figura 6.10: Validação dinâmica do modelo (6.9) sendo: (—) os dados reais e (o) a resposta do modelo.

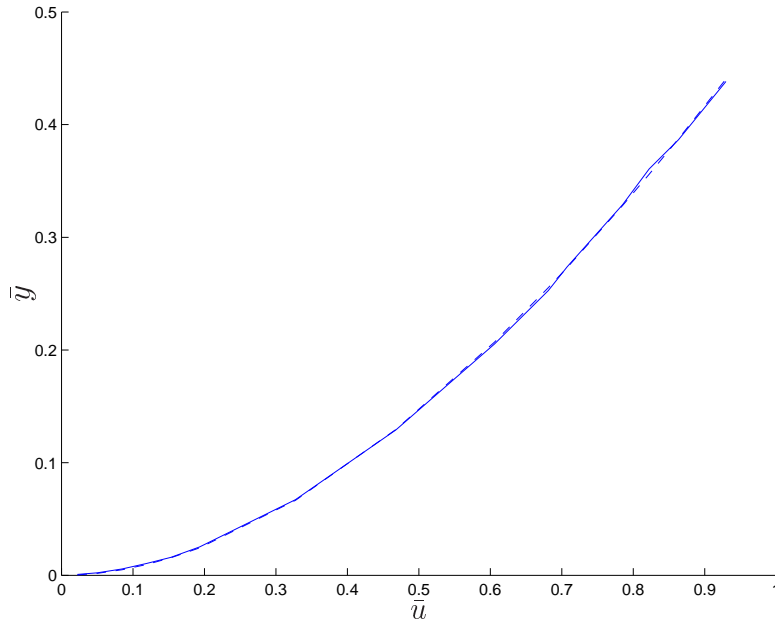


Figura 6.11: Validação estática do modelo (6.9) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

### 6.3.3 Utilizando o roteiro (5.3.2) e o algoritmo elipsoidal

O algoritmo elipsoidal é muito eficiente e robusto para problemas não-lineares. Embora tenha um alto custo computacional e dificuldade em lidar com restrições de igualdade, esse algoritmo foi utilizado com relativo sucesso (Corrêa, 2001). O que se pretende mostrar nesta seção é a eficiência da implementação do algoritmo elipsoidal desenvolvida nesse trabalho.

O algoritmo permite a incorporação de restrições do tipo  $\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta$ . Outra modificação importante foi permitir que o algoritmo fosse inicializado com os mesmos valores do algoritmo MQR. Essas modificações permitem uma comparação melhor dos resultados.

Partindo da mesma estrutura do modelo (6.9) e das mesmas restrições (6.8), tem-se o seguinte modelo com os parâmetros estimados via elipsoidal, utilizando-se a função **elipnarx**:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2955y(k-1) + 0,00115u(k-2)u(k-1) + 0,0441u(k-1)^2 \\
 & - 0,3826y(k-2) - 0,1556u(k-2)y(k-1) \\
 & + 0,1208u(k-2)y(k-2) + 0,0061u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

A Tabela 6.3 apresenta os agrupamentos de termos e coeficientes do modelo (6.12).

Tabela 6.3: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (6.12)

Coeficientes dos Agrupamentos de Termos	
$\Omega_y$	0,9129
$\Omega_{yu}$	-0,0358
$\Omega_{u^2}$	0,0617

O modelo escrito de forma agrupada é

$$\bar{y} = 0,9129\bar{y} - 0,0358\bar{u}\bar{y} + 0,0617\bar{u}^2, \quad (6.13)$$

e sua função estática

$$\bar{y} = \frac{0,0617\bar{u}^2}{1 - 0,9129 + 0,0358\bar{u}}. \quad (6.14)$$

Os resultados são muito próximos aos do estimador MQR. As alterações feitas no algoritmo elipsoidal original minimizaram seu custo computacional, por permitir que o algoritmo seja inicializado numa região mais próxima do mínimo da função, no caso, o valor dos parâmetros estimados pelos MQ. O algoritmo preliminar em que esse foi baseado era inicializado de forma a utilizar o valor médio dos máximos e mínimos valores permitidos para os parâmetros. A Tabela 6.6 mostra os valores RMSE das aproximações dinâmica e estática conseguida pelo modelo estimado usando-se o algoritmo elipsoidal. As Figuras (6.12) e (6.13) mostram as aproximações dinâmica e estática, do modelo (6.12), respectivamente.

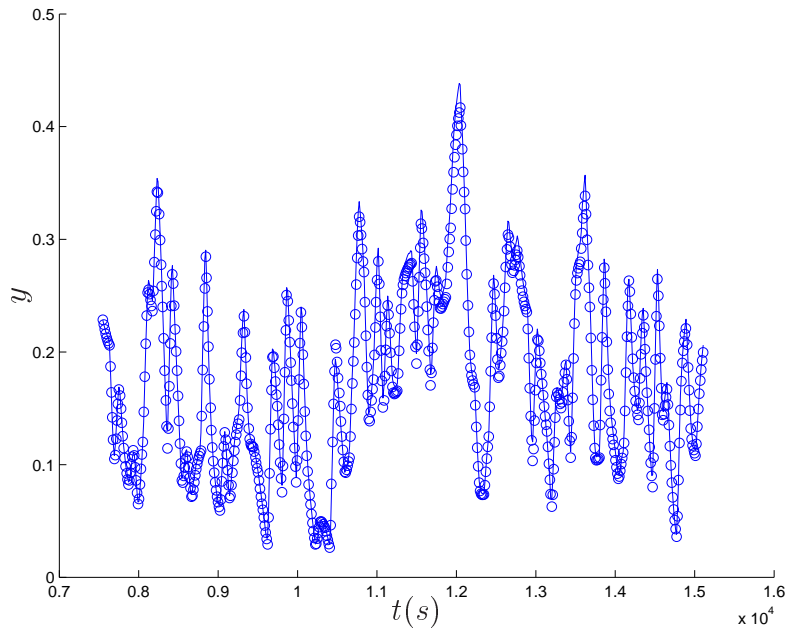


Figura 6.12: Validação dinâmica do modelo (6.12), sendo: ( - ) os dados reais e (o) a resposta do modelo.

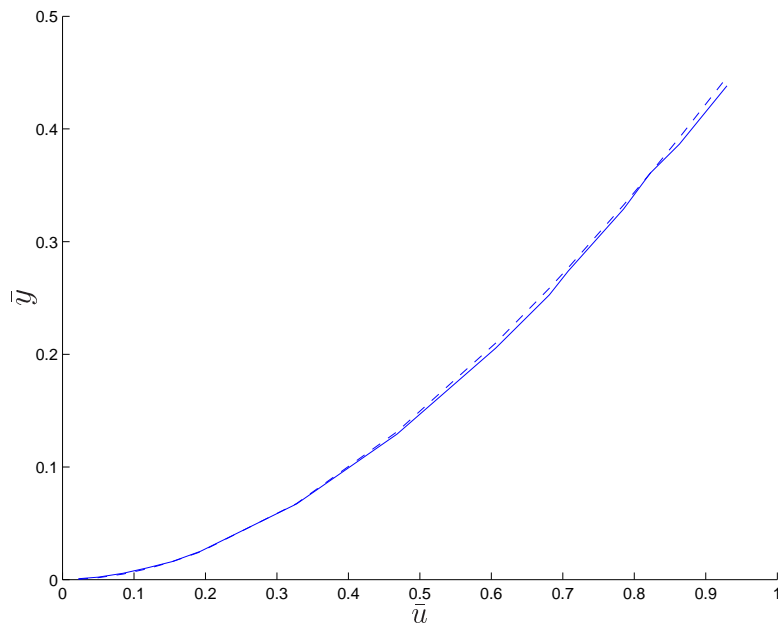


Figura 6.13: Validação estática do modelo (6.12), sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

### 6.3.4 Comparação entre os algoritmos

Nessa seção serão comparados os algoritmos de acordo com os parâmetros estimados, os seus coeficientes de agrupamentos de termos e índices de desempenho RMSE.

A Tabela 6.4 mostra quais as diferenças entre os parâmetros estimados pelos três algoritmos utilizados.

Tabela 6.4: Comparação entre os parâmetros estimados dos modelos (6.2), (6.9), (6.12).

	MQ	MQR	ELIP
$\theta_1$	1,2994	1,2564	1,2955
$\theta_2$	0,0094	0,0090	0,0115
$\theta_3$	0,0438	0,0461	0,0441
$\theta_4$	-0,3869	-0,3436	-0,3826
$\theta_5$	-0,3980	-0,0685	-0,1556
$\theta_6$	0,3374	0,0325	0,1208
$\theta_7$	0,0124	0,0064	0,0061

O que se espera é que os parâmetros estimados possam proporcionar coeficientes de agrupamentos que gerem uma boa aproximação da característica estática do sistema real. A Tabela (6.5) mostra uma consistência nos modelos identificados via MQR e elipsoidal, ou seja, os algoritmos foram eficazes no que diz respeito à garantia de se obter parâmetros que respeitassem as restrições<sup>3</sup>. Os valores dos coeficientes ficaram muito próximos dos valores de restrição via ajuste de curva, a menos dos coeficientes do modelo via MQ. Outro aspecto importante são os índices de desempenho RMSE. A Tabela (6.6) mostra os índices para os modelos obtidos.

Tabela 6.5: Comparação entre os coeficientes dos agrupamentos de termos dos modelos (6.2), (6.9), (6.12).

Agrupamentos	Ajuste de curva	MQ	MQR	ELIP
$\Omega_y$	0,9128	0,9150	0,9128	0,9129
$\Omega_{yu}$	-0,0360	-0,0323	-0,0360	-0,0358
$\Omega_{u^2}$	0,0615	0,0458	0,0615	0,0617

<sup>3</sup>A precisão utilizada no algoritmo elipsoidal determina a eficiência do algoritmo em garantir os valores das restrições de igualdade. Neste caso foi utilizada uma precisão  $\epsilon = 1 \times 10^{-7}$ .

Tabela 6.6: Comparação entre os valores RMSE dos modelos (6.2), (6.9), (6.12).

RMSE	Estática	Dinâmica
MQ	0,3302	0,0094
MQR	0,0017	0,0095
ELIP	0,0020	0,0109

Mais uma vez os MQR mostraram uma pequena vantagem em relação ao elipsoidal. O ajuste dinâmico é muito próximo ao ajuste dos MQ, sendo a diferença entre os dois inferior a 1%. Quanto ao ajuste estático a diferença é maior em relação aos MQ e pequena em relação ao elipsoidal. O que vem confirmar a Tabela 6.5, em que os coeficientes de agrupamentos de termos dos dois algoritmos foram muito parecidos.

## 6.4 Comentários Finais

Para a identificação do sistema apresentado neste capítulo foram necessários o conhecimento da teoria de identificação caixa-preta, caixa-cinza e das características estruturais de modelos NARMAX polinomiais.

A partir de então foi possível o uso de técnicas caixa-cinza para a incorporação de conhecimento a priori nas etapas de escolha de estrutura e estimação dos parâmetros e o desenvolvimento computacional de ferramentas de otimização restritas e irrestritas.

Este capítulo teve como objetivo aplicar as técnicas desenvolvidas em um sistema real para avaliar a eficácia dos algoritmos desenvolvidos e a comparação dos resultados por eles obtidos.

A metodologia se mostrou eficiente, bem como os algoritmos desenvolvidos. Pôde-se notar que os MQR são uma alternativa viável em relação ao algoritmo elipsoidal. Na verdade essa afirmação só é válida no caso em que as representações são lineares nos parâmetros, que é o caso das representações polinomiais.

O próximo passo desse trabalho é aplicar essa metodologia e algoritmos na identificação de um sistema num contexto mais restritivo, situação na qual conhecimento a priori poderá ser de fundamental importância na obtenção de um bom modelo.



# Capítulo 7

## Identificação de um Conversor Estático

### 7.1 Introdução

Esse capítulo tem como objetivo aplicar os roteiros do capítulo 5 na identificação de um sistema no qual os dados excursionam uma faixa de operação relativamente estreita.

Dados de identificação com essas características são comuns no âmbito prático, uma vez que existem limites operacionais e de engenharia nos processos reais, principalmente nos industriais, que tornam proibitivos uma excursão mais ampla dos dados do sistema. Por exemplo, na indústria, em geral, não é desejável a interrupção do processo produtivo para a aplicação de testes mais rigorosos. Por esse motivo, deseja-se verificar o desempenho dos procedimentos propostos quando disponíveis dados com essas características.

Na primeira seção será mostrado o sistema de forma detalhada, bem como os testes dinâmicos para o levantamento dos dados de identificação, validação e a relação teórica que tornou possível o conhecimento da curva estática do sistema.

Nas seções seguintes serão mostrados os modelos obtidos segundo os roteiros apresentados no capítulo 5.

## 7.2 Conversor CC-CC Buck

Durante os testes para aquisição dos dados de identificação e validação, a fonte de tensão contínua ( $V_d$ ) foi mantida constante e igual a  $24V$ <sup>1</sup>; um esquema representativo do sistema pode ser visto na Figura 7.1. O sistema de regulação de carga não é mostrado na figura.

### 7.2.1 Descrição do Sistema

A razão cíclica é definida como a proporção de tempo em que a chave está ligada em relação ao período total de operação,  $T$ , ou,  $D = T_{\text{ligado}}/T$ .

Para variar essa razão, utilizou-se técnicas de modulação por largura de pulso (PWM) a uma taxa de  $1/T = 33\text{kHz}$ , utilizando para tal um circuito integrado LM3524. A taxa de  $33\text{kHz}$  resultou em um modo de operação contínua, ou seja, a corrente através do indutor não se anulava.

Quando a razão cíclica está perto do valor unitário, a corrente através do indutor (LF) e a tensão na carga (RL),  $v_o$ , aumentam, pois a fonte  $v_d$  energiza a malha formada por ela, o capacitor (CF) e o indutor (LF). Quando  $D \rightarrow 0$ , a tensão  $v_o$  diminui com um regime dinâmico diferente. Esse fato caracteriza um regime dinâmico não-linear do sistema (Aguirre, 2000a; Aguirre et al., 2000).

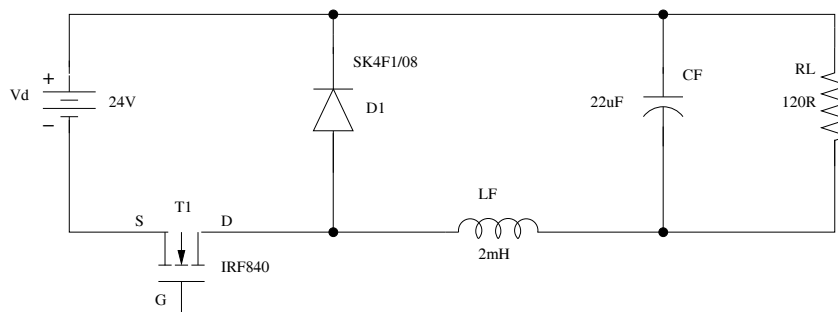


Figura 7.1: Estrutura de um conversor CC-CC Buck.

### 7.2.2 Teste Dinâmico

Com a finalidade de excitar a dinâmica do conversor Buck, utilizou-se um sinal do tipo PRBS gerado em um microcomputador digital.

Testes de resposta ao degrau foram realizados previamente com o intuito de levantar a constante de tempo predominante do sistema. A constante de tempo foi de aproximadamente 2 milissegundos, com um tempo de

<sup>1</sup>O MOSFET IRF840 é chaveado atuando-se na porta G.

amostragem de  $T_s = 10\mu\text{s}$ . Partindo dessa informação foi construído o sinal PRBS.

Em sinais binários pseudo-aleatórios (PRBS), dois parâmetros são necessários para sua construção, o número de bits,  $n$ , e o tempo mínimo de chaveamento,  $T_b$  (Aguirre, 2000a).

O número mínimo de bits deve ser escolhido de forma a garantir que o período do sinal PRBS seja maior do que o tempo de acomodação do sistema, ou

$$2^b \times T_b > 5 \times 2 \text{ milisegundos}, \quad (7.1)$$

sendo o tempo de acomodação cinco vezes a constante de tempo dominante do sistema.

A partir da equação (7.1), foi escolhido um número mínimo de 8 bits para gerar um sinal PRBS que fosse capaz de excitar a dinâmica do sistema.

Os sinais de identificação e validação foram superamostrados, com isso fez-se necessário dizimar os sinais de um fator  $\Delta = 12$ , para que os sinais respeitassem a relação (2.4). Os sinais obtidos podem ser vistos nas Figuras 7.2 e 7.3

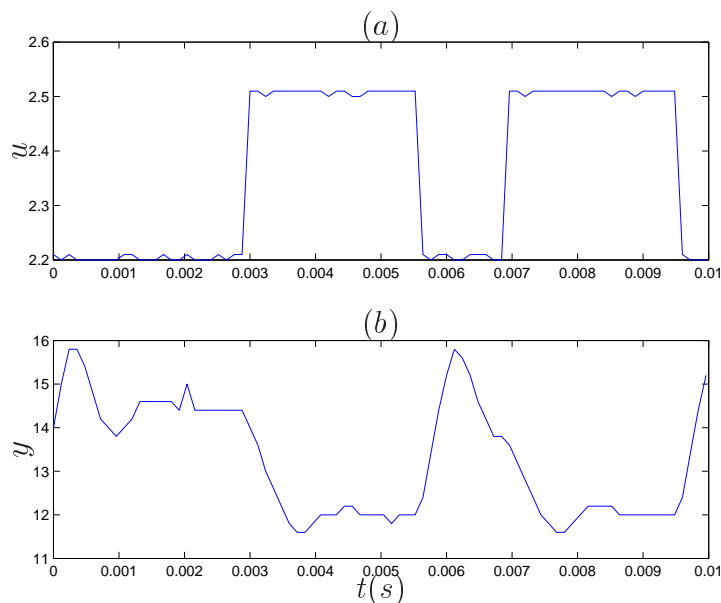


Figura 7.2: Dados de identificação do sistema (acq7000 decimado de  $\Delta = 12$  - primeira metade), sendo: (a) sinal de entrada do sistema, (b) sinal de saída do sistema.

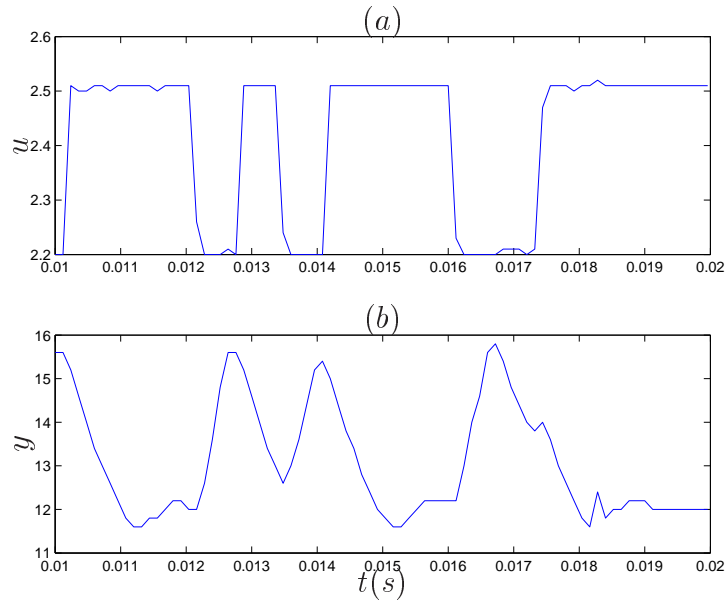


Figura 7.3: Dados de validação do sistema (acq7000 decimado de  $\Delta = 12$  - segunda metade), sendo: (a) sinal de entrada do sistema, (b) sinal de saída do sistema.

### 7.2.3 Característica estática

A relação teórica entre a razão cíclica e a tensão em estado estacionário do conversor implementado é

$$\begin{aligned}
 V_o &= (1 - D)V_d \\
 &= \left(1 - \frac{\bar{u} - 1}{3}\right) V_d \\
 &= \frac{4V_d}{3} - \frac{V_d}{3}\bar{u},
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

sendo  $V_o$  a tensão na carga (RL),  $D$  é a razão cíclica,  $V_d$  a tensão constante de alimentação e  $\bar{u}$  é o valor em estado estacionário da entrada do modelo  $u(k)$ .

Os dados estáticos podem ser obtidos aplicando-se à equação (7.2) valores de  $\bar{u}$  que abrangem todos os pontos de operação do sistema (1 a 4V). A curva estática para o conversor Buck pode ser vista na Figura 7.4.

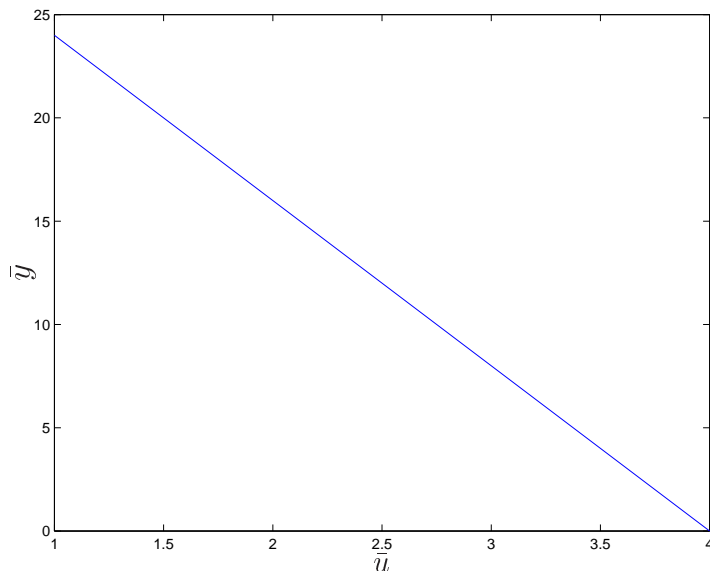


Figura 7.4: Curva estática do sistema, sendo os dados estáticos de entrada ( $\bar{u}$ ) e de saída ( $\bar{y} = V_o$ ) em volts.

### 7.3 Identificação do Conversor CC-CC Buck

Um aspecto que torna o presente problema interessante é a limitação dos dados de entrada à faixa de  $2,0V < u(k) < 2,5V$ . Por outro lado, deseje-se um modelo que represente o sistema para valores de entrada na faixa  $1V \leq \bar{u}(k) \leq 4V$ .

No caso do aquecedor, identificado no capítulo anterior, notou-se que utilizando-se apenas conhecimento a priori na etapa de detecção de estrutura já foi o suficiente para que o modelo apresentasse uma característica estática próxima da real. Isso porque os dados dinâmicos excursionavam uma ampla faixa de operação do sistema. O que se espera, nesse exemplo, é que a estrutura detectada com auxílio de conhecimento a priori não seja capaz de ajustar a curva estática na faixa fora dos dados dinâmicos.

A curva estática do sistema obtida de forma analítica e vista na Figura 7.4 pode ser escrita de forma geral como um mapeamento não-linear do tipo  $f(x) = ax + b$ .

Esse tipo de relação estática pode ser conseguida em modelos NARX polinomiais através de uma estrutura com grau de não-linearidade unitário acrescido do termo constante. No entanto em (Aguirre et al., 2000) foi mostrado que modelos com essa estrutura não conseguiam aproximar bem a característica estática do sistema em toda a sua faixa de operação. Na tenta-

tiva de contornar esse problema, os autores optaram por uma estrutura com um grau de não-linearidade mais elevado, no caso, cúbico. A recuperação estática foi melhorada mas ao preço de uma estrutura mais complexa do que parece ser necessária, uma vez que 7.2 é uma reta.

Essa estrutura, com seus parâmetros, pode ser vista através da equação (7.3).

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2013y(k-1) - 0,2608y(k-2) + 6,2479 \\
 & -2,6783u(k-1)^3 + 0,2081y(k-3) \\
 & +8,8399u(k-1)^2u(k-3) + 3,6636u(k-3)^3 \\
 & -0,6162u(k-1)u(k-3) - 9,7707u(k-1)u(k-3)^2. \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

As respostas dinâmica e estática do modelo (7.3) podem ser vistas nas Figuras 7.5 e 7.6, respectivamente.

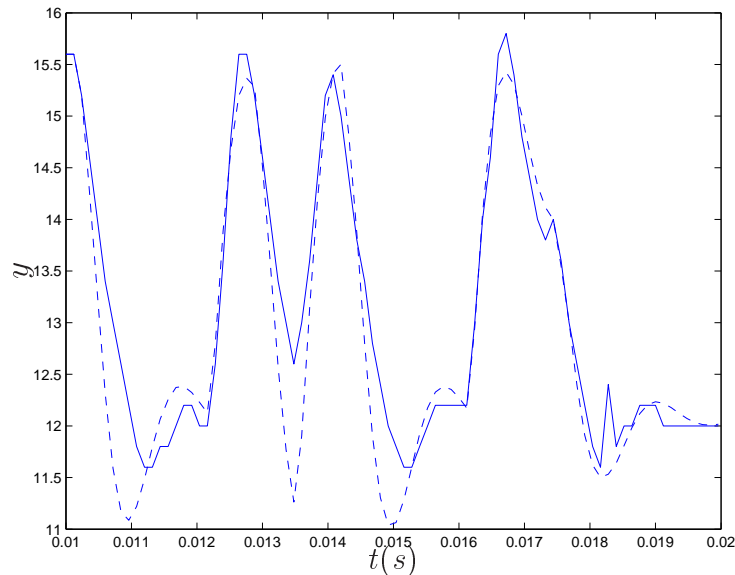


Figura 7.5: Validação dinâmica do modelo (7.3) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

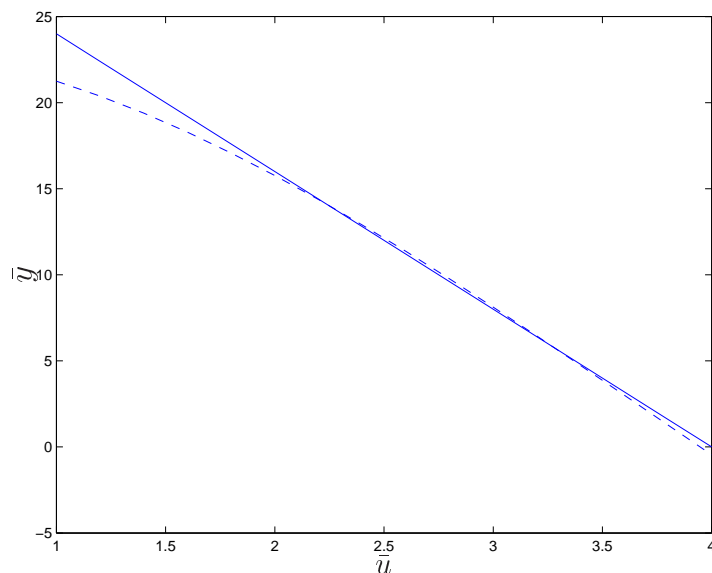


Figura 7.6: Validação estática do modelo (7.3) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

Embora o modelo tenha conseguido uma aproximação dinâmica razoável<sup>2</sup>, a curva estática ainda apresenta regiões de grande erro de aproximação.

Na próxima seção será apresentada a estratégia proposta para a solução do problema, baseada no roteiro (5.3.1).

### 7.3.1 Utilizando o roteiro (5.3.1) e MQ

Conjectura-se que a estrutura do modelo não necessite de um grau de não-linearidade cúbica e nem de termos cruzados, pois não há nenhuma informação conhecida que justifique essa hipótese.

Por esses motivos, o que se sugere é a inclusão de um termo quadrático na estrutura com grau de não-linearidade unitário, ou seja, que o modelo, em sua forma estática, seja do tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

A partir dessas premissas serão utilizadas como conhecimento a priori, a curva estática, a não variabilidade da “constante de tempo” do sistema, além dos dados de identificação. Como a curva estática, obtida de forma analítica, apresenta apenas um estado estacionário na saída, julga-se que esse fato é verdade.

A seguir serão listadas as etapas efetuadas segundo o roteiro (5.3.1)<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Essa afirmação basea-se nos índices RMSE contidos na Tabela 7.6.

<sup>3</sup>A descrição dessas etapas e das funções utilizadas já foi feita no capítulo 6. Embora pareça repetitiva, a intenção é facilitar a leitura e a fixação da metodologia.

1. gerar todos os termos candidatos com grau de não-linearidade  $\ell = 2$ ,  $n_y = 2$  e  $n_u = 2$ , utilizando a função **genterms**;
2. o número de estados estacionários na saída é igual a 1. Retirar os agrupamentos de termos do tipo  $\Omega_{y^p}$  com  $p > 1$  através da função **mcand**;
3. o sistema não apresenta "constante de tempo" variável. Retirar os agrupamentos de termos cruzados, através da função **mcand**;
4. os dados estáticos podem ser ajustados por uma função polinomial de grau 2, utilizando a função **curvefit**. Selecionar os termos do tipo  $\Omega_{u^m}$  com  $m = 1, 2$ .

Após a definição dos agrupamentos de termos a serem considerados via roteiro (5.3.1), é necessário submeter esse conjunto de novos termos candidatos aos critérios de seleção de estrutura e informação, da seguinte maneira:

1. estimar o número de termos a serem considerados a partir do critério de informação de Akaike, utilizando a função **akaike**;
2. detectar a estrutura através do ERR, utilizando a função **myhouse**;
3. a estrutura selecionada foi

$$\begin{aligned}
 y(k) = & \theta_1 y(k-1) + \theta_2 y(k-2) + \theta_3 \\
 & + \theta_4 u(k-1) + \theta_5 u(k-1)^2 \\
 & + \theta_6 u(k-2)u(k-1) + \theta_7 u(k-2) \\
 & + \theta_8 u(k-2)^2;
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

4. para a estimação dos parâmetros via MQ foi utilizada a função **orthreg**. O modelo com os parâmetros estimados é:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,4359y(k-1) - 0,6775y(k-2) + 9,7877 \\
 & - 34,3739u(k-1) + 9,4544u(k-1)^2 \\
 & - 5,4747u(k-2)u(k-1) + 30,5374u(k-2) \\
 & - 3,5401u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

5. A Tabela 7.1 apresenta os agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamento do modelo (7.5), calculados através da função **coefc**.

Tabela 7.1: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.5)

Coeficientes dos Agrupamentos de Termos	
$\Omega_y$	0,7584
$\Omega_0$	9,7877
$\Omega_u$	-3,8365
$\Omega_{u^2}$	0,4396

6. O modelo (7.5) escrito de forma agrupada é

$$\bar{y} = 0,7584\bar{y} + 9,7877 - 3,8365\bar{u} + 0,4396\bar{u}^2, \quad (7.6)$$

e sua característica estática pode ser estimada através da seguinte função:

$$\bar{y} = \frac{9,7877 - 3,8365\bar{u} + 0,4396\bar{u}^2}{1 - 0,7584}. \quad (7.7)$$

O próximo passo é validar o modelo. Para tal faz-se necessária a sua simulação livre, que foi obtida através da função **simodeld**. Para a validação estática foram aplicadas entradas na faixa de (1 a 4V) na função (7.7). A avaliação será feita de forma visual e através dos índices de desempenho RMSE calculados através da função **rmse**.

O modelo não foi capaz de aproximar a curva estática fora dos limites dos dados dinâmicos. Como pode ser visto na Figura 7.8. A simulação livre do modelo pode ser vista na Figura 7.7.

Os valores RMSE para o modelo (7.5), podem ser vistos na Tabela 7.6. O índice RMSE estático mostra que a aproximação estática do modelo (7.5) não é aceitável, ou seja, o valor foi maior que a unidade.

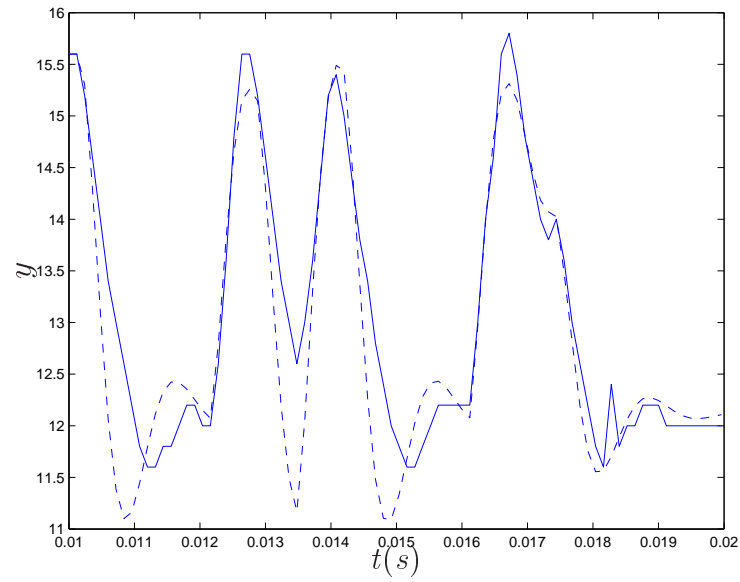


Figura 7.7: Validação dinâmica do modelo (7.5) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

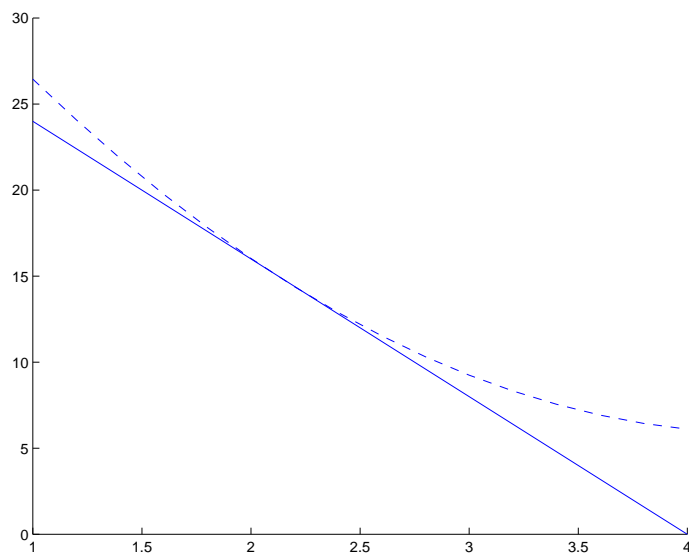


Figura 7.8: Validação estática do modelo (7.5) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

### 7.3.2 Utilizando o roteiro (5.3.2) e MQR

Embora a aproximação estática do modelo (7.5) não tenha sido satisfatória, conjectura-se que esse fato pode ser creditado ao estimador utilizado e não à estrutura, uma vez que a princípio, uma estrutura quadrática com todos os termos deveria ser capaz de aproximar uma reta, bastando para tal que o coeficiente do termo quadrático fosse zero.

O que se pretende mostrar nesta seção é que a inclusão de informação estática, que estejam fora da faixa de operação dos dados de identificação, na etapa de estimação de parâmetros, seja suficiente para melhorar a aproximação estática do modelo sem a necessidade de alterar a sua estrutura.

Para a fixação da metodologia, os passos seguidos, segundo o roteiro (5.3.2) podem ser vistos a seguir.

1. Utiliza-se a estrutura do modelo (7.5);
2. o sistema apresenta apenas um estado estacionário na saída e tem a "constante de tempo" invariante. A função estática utilizada foi definida no roteiro anterior (ver equação 7.7), e é da forma:

$$\bar{y} = \frac{a_0 + a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2}{1 - b_1}; \quad (7.8)$$

3. a função custo a ser utilizada para estimação do vetor

$$\mathbf{c} = [\Sigma_0 \ \Sigma_u \ \Sigma_{u^2} \ \Sigma_y]^T,$$

pode ser escrita como

$$f(a, b) = (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y})^T (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y}).$$

Utilizando-se a função **fminunc** para realizar o ajuste de curva, o vetor **c** estimado foi

$$\mathbf{c} = [8,8545 \quad -2,2153 \quad 0,0000 \quad 0,7234]^T. \quad (7.9)$$

Com as restrições escritas na forma  $\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} 8,8545 \\ -2,2153 \\ 0,0000 \\ 0,7234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

4. As restrições são impostas na etapa de estimação dos parâmetros através da função **mqr**;
5. o modelo será

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,3809y(k-1) - 0,6575y(k-2) + 8,8545 \\
 & -33,7442u(k-1) + 9,51180u(k-1)^2 \\
 & -5,9413u(k-2)u(k-1) + 31,5289u(k-2) \\
 & -3,5763u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

6. A Tabela 7.2 mostra os agrupamentos de termos e seus coeficientes para o modelo (7.11). Os coeficientes dos agrupamentos de termos foram calculados através da função **coefc**.

Tabela 7.2: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.11)

Coeficientes dos Agrupamentos de Termos	
$\Omega_y$	0,7234
$\Omega_0$	8,8545
$\Omega_u$	-2,2170
$\Omega_{u^2}$	0,0004

7. O modelo (7.11) em sua forma agrupada é

$$\bar{y} = 0,7234\bar{y} + 8,8545 - 2,2170\bar{u} + 0,0004\bar{u}^2, \tag{7.12}$$

tendo como função estática

$$\bar{y} = \frac{8,8545 - 2,2170\bar{u} + 0,0004\bar{u}^2}{1 - 0,7234}. \tag{7.13}$$

Como pode ser observado o estimador MQR levou o coeficiente do agrupamento  $\Omega_{u^2}$  para praticamente zero, o que torna a função estática do tipo  $f(x) = ax + b$ , como era desejável. Os resultados estáticos confirmam a capacidade dessa estrutura e a validade do estimador MQR. Acredita-se que sem a imposição de restrições, os estimadores não sejam capazes de obter uma resposta estática satisfatória. Em (Aguirre et al., 2000), os autores apontam para essa conclusão, uma vez que vários modelos com estruturas distintas foram identificados com resultados dinâmicos satisfatórios, mas sem o mesmo sucesso nas aproximações estáticas.

Nota-se, através de uma comparação visual (ver Figuras 7.7 e 7.9), que as respostas dinâmicas dos modelos (7.5) e (7.11) são próximas. Esse fato pode ser confirmado através dos índices RMSE, que podem ser vistos na Tabela 7.6. A diferença percentual das aproximações ficou em torno de 17%. Esse valor não é tão pequeno, mas foi o preço pago por um índice estático cerca de 127% menor do modelo com parâmetros estimado de forma restrita. A resposta estática do modelo (7.11), em comparação com a curva obtida analiticamente, pode ser vista na Figura 7.10.

A estrutura do modelo (7.11) é mais simples do que a do modelo (7.3), embora esse último apresente uma resposta dinâmica melhor<sup>4</sup>, representada por um índice RMSE de 0,4906, ou seja, uma diferença de aproximadamente 27% a seu favor. Entretanto a aproximação estática é amplamente favorável ao modelo (7.11) se comparada com o índice RMSE de 0,9750 do modelo (7.3).

Pode-se notar que a metodologia se mostrou eficiente, ou seja, conseguiu uma aproximação estática muito boa com razoável aproximação dinâmica.

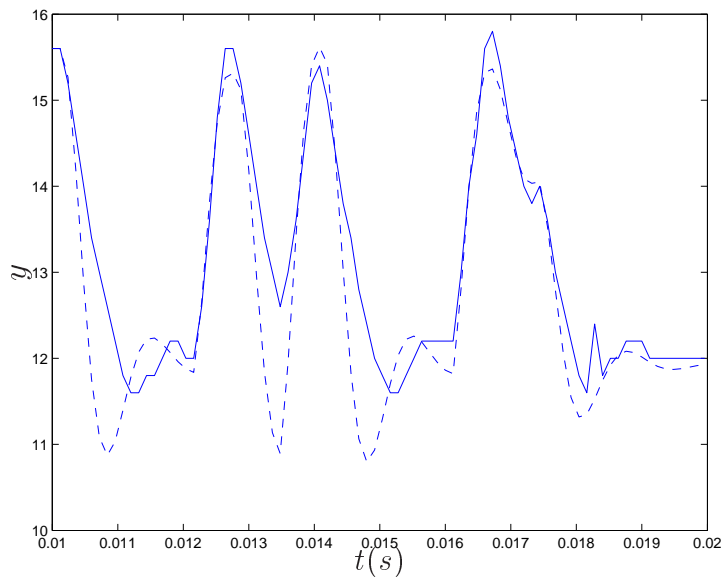


Figura 7.9: Validação dinâmica do modelo (7.11) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

<sup>4</sup>Conjecturou-se que a perda dinâmica poderia ser explicada no modelo quadrático pela sua ordem, ou seja, ordem dois. No entanto, modelos quadráticos de ordens mais elevadas não apresentaram melhora dinâmica que compensasse o aumento do número de termos do modelo.

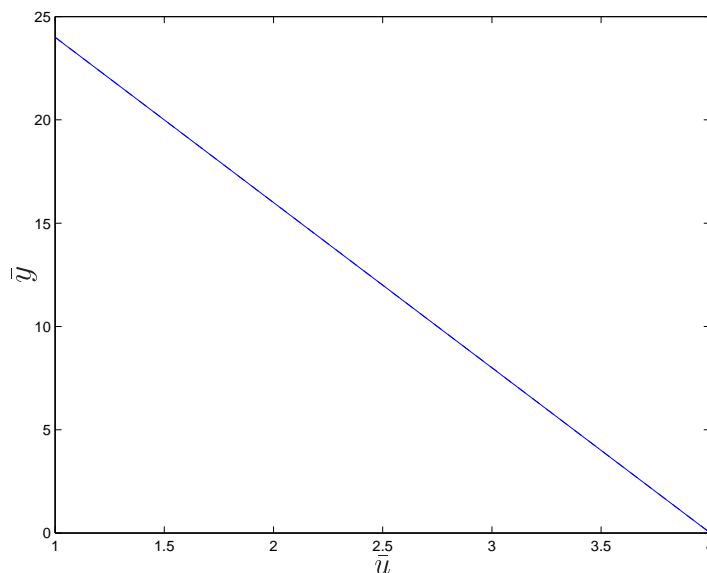


Figura 7.10: Validação estática do modelo (7.11) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

### 7.3.3 Utilizando o roteiro (5.3.2) e o algoritmo elipsoidal

Partindo da mesma estrutura do modelo (7.11) e das mesmas restrições (7.10), tem-se o seguinte modelo com os parâmetros estimados via elipsoidal, através da função **elipnarx**:

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,4179y(k-1) - 0,6954y(k-2) + 8,8539 \\
 & -33,5641u(k-1) + 9,3072u(k-1)^2 \\
 & -5,6218u(k-2)u(k-1) + 31,3472u(k-2) \\
 & -3,6873u(k-2)^2.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

A Tabela 7.3 apresenta os coeficientes dos agrupamentos de termos do modelo (7.14).

Tabela 7.3: Coeficientes e agrupamentos de termos do modelo (7.14).

Agrupamentos de Termos	Coeficientes
$\Omega_y$	0,7225
$\Omega_0$	8,8539
$\Omega_u$	-2,2170
$\Omega_{u^2}$	0,0019

O modelo escrito de forma agrupada é

$$\bar{y} = 0,7225\bar{y} + 8,8539 - 2,2170\bar{u} + 0,0019\bar{u}^2, \quad (7.15)$$

e sua função estática

$$\bar{y} = \frac{8,8539 - 2,2170\bar{u} + 0,0019\bar{u}^2}{1 - 0,7225}. \quad (7.16)$$

Como poderá ser visto no apêndice, o algoritmo elipsoidal, por construção, necessita de estabelecer, como parâmetro de otimização, a precisão para a aproximação dos valores de restrição impostos. Esse aspecto, como já mencionado no capítulo 5 é um fator que eleva seu custo computacional. A decisão entre precisão e custo computacional passa a ser um problema adicional para a utilização do algoritmo. Esse fato ficou muito claro para o problema estudado e foi refletido nos resultados, ou seja, para que o custo computacional não fosse proibitivo<sup>5</sup>, optou-se por “relaxar” os limites de precisão do algoritmo. Mesmo com os problemas citados, a resposta do algoritmo foi muito boa.

As respostas dinâmica e estática do modelo (7.14) podem ser vistas nas Figuras 7.11 e 7.12, respectivamente. A resposta dinâmica foi pior realmente, demonstrada pelo índice RMSE, com uma perda de aproximadamente 23% em relação ao mesmo índice do modelo (7.11) e de 48% em relação ao modelo (7.5). Os índices RMSE para o modelo (7.14) podem ser vistos na Tabela 7.6. O índice RMSE estático do modelo (7.14) revelam, no entanto, uma boa aproximação.

---

<sup>5</sup>Essa afirmação é relativa e depende entre outras coisas do equipamento (*hardware*) utilizado, do sistema operacional. Para a execução dos testes apresentados foi utilizado um AMD-K6II, 64Mb de memória RAM, 500 MHz e Windows. Para esse equipamento a afirmação é válida, ou seja, foi proibitiva uma melhor aproximação para o algoritmo. O tempo gasto foi em torno de 10 min para maiores precisões.

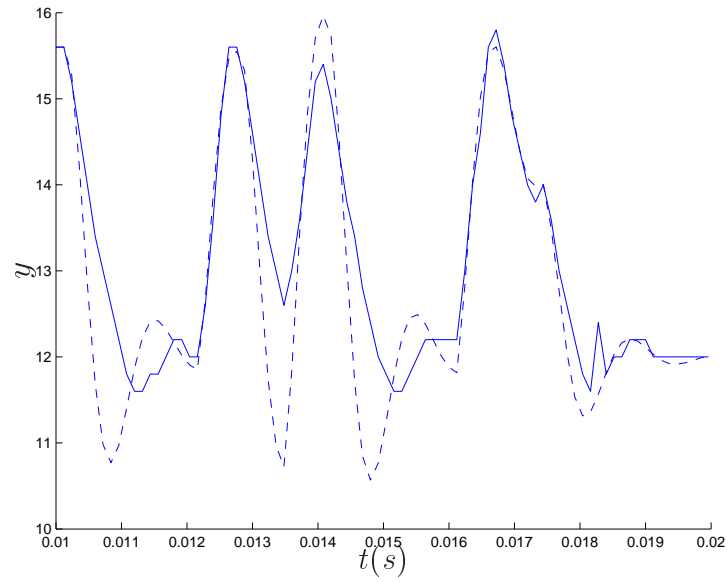


Figura 7.11: Validação dinâmica do modelo (7.14) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

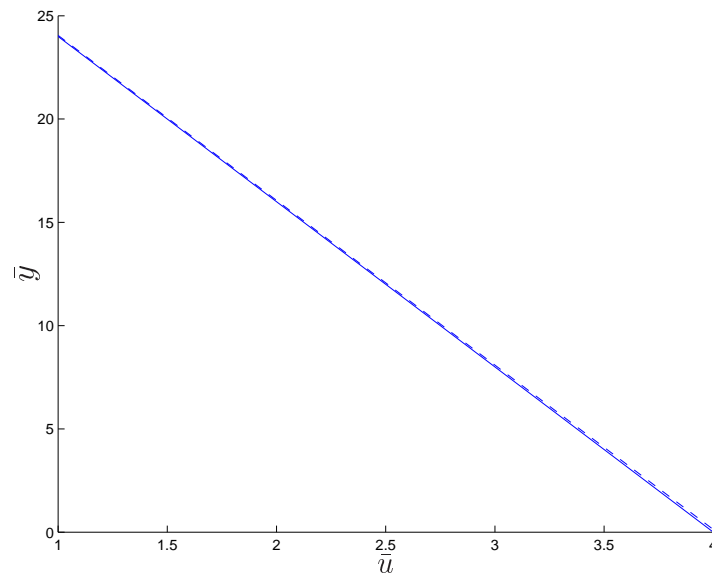


Figura 7.12: Validação estática do modelo (7.14) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

### 7.3.4 Comparação entre os algoritmos

Especula-se que se os valores estimados pelos MQ não estivessem na bacia de atração da função custo, ao lançar o algoritmo elipsoidal desses valores, os resultados poderiam divergir. A implementação preliminar em que o algoritmo elipsoidal foi baseado, utilizava a média entre o maior e o menor valor aceitável para os parâmetros como valor inicial. Essa estratégia não se mostrou apropriada. Por exemplo, se como restrição a soma de dois parâmetros tinha de ser  $x$ , o algoritmo atribuía valores iguais aos parâmetros, ou seja,  $x/2$  para ambos. A implementação utilizada neste trabalho foi modificada para aceitar valores fornecidos pelo usuário. E os parâmetros fornecidos pelos MQ se mostraram viáveis, inclusive diminuindo o tempo computacional. A Tabela 7.4 mostra que os valores estimados pelas ferramentas utilizadas são muito próximos.

Tabela 7.4: Comparação entre os parâmetros estimados dos modelos (7.5), (7.11), (7.14).

	MQ	MQR	ELIP
$\theta_1$	1,4359	1,3809	1,4179
$\theta_2$	-0,6775	-0,6575	-0,6954
$\theta_3$	9,7877	8,8545	8,8539
$\theta_4$	-34,3739	-33,7442	-33,5641
$\theta_5$	9,4544	9,5180	9,3072
$\theta_6$	-5,4747	-5,9413	-5,6218
$\theta_7$	30,5374	31,5289	31,3472
$\theta_8$	-3,5401	-3,55763	-3,6873

A Tabela 7.5 mostra os valores dos coeficientes dos agrupamentos de termos obtidos através dos algoritmos estudados. Os resultados contidos nessa tabela podem ser um indício de que uma estrutura, detectada a partir de estratégias caixa-preta, não é capaz de traduzir para o estimador MQ os conhecimentos utilizados para a sua detecção. Observa-se que os coeficientes de agrupamentos do modelo (7.5) não são capazes de aproximar a curva estática, pois o coeficiente do agrupamento  $\Omega_{u^2}$  é diferente de zero.

Então, o que se imagina é que, uma estrutura escolhida através de estratégias caixa-cinza, como a apresentada nesse trabalho, associada a ferramentas de otimização para a imposição de restrições aos parâmetros sejam uma boa alternativa para a melhora da representatividade do modelo. A Tabela 7.5 mostra que as ferramentas implementadas foram eficazes na imposição dessas restrições, para isso basta observar que os coeficientes de agrupamentos de

termos são bem próximos dos coeficientes conseguidos através do ajuste de curva. A tradução em números, através dos índices RMSE, dos resultados discutidos, podem ser vistos na Tabela 7.6.

Tabela 7.5: Comparação entre os coeficientes dos agrupamentos de termos dos modelos (7.5), (7.11), (7.14).

Agrupamentos	Ajuste de curva	MQ	MQR	ELIP
$\Omega_y$	0,7234	0,7584	0,7234	0,7225
$\Omega_0$	8,8545	9,7877	8,8545	8,8539
$\Omega_u$	-2,2170	-3,8365	-2,2170	-2,2170
$\Omega_{u^2}$	0,0000	0,4396	0,0004	0,0019

Tabela 7.6: Comparação entre os valores RMSE dos modelos (7.5), (7.11), (7.14).

RMSE	Estática	Dinâmica
MQ	2,4792	0,5612
MQR	0,0028	0,6750
ELIP	0,1187	0,8288

Uma outra questão que surge é: Qual seria o resultado se fosse utilizada a estrutura do modelo (7.3) com a imposição de restrições na etapa de estimação de parâmetros? Se for possível aliar a melhor resposta dinâmica com as técnicas desenvolvidas, espera-se que o modelo derivado seja ainda melhor. Em (Corrêa, 2001), foi proposta essa alternativa com o uso de uma metodologia e implementação do algoritmo elipsoidal diferentes.

As principais diferenças entre as metodologias apresentadas neste trabalho e em (Corrêa, 2001) são as etapas de levantamento das restrições e como essas são utilizadas no algoritmo elipsoidal implementado.

Partindo da estrutura do modelo (7.3) a relação estática foi escrita como um polinômio do tipo

$$\bar{y} = \alpha_3 \bar{u}^3 + \alpha_2 \bar{u}^2 + \alpha_0. \quad (7.17)$$

A partir do conjunto de dados estáticos obtidos através da equação (7.2), estimaram-se os parâmetros  $\alpha_i$  através do método de mínimos quadrados. Então, a equação estática escrita com os parâmetros ótimos é

$$\bar{y} = 0,4391\bar{u}^3 - 3,3710\bar{u}^2 + 26,2696. \quad (7.18)$$

As equações utilizadas para relacionar os parâmetros da equação (7.18) com os coeficientes dos agrupamentos de termos foram

$$\alpha_3 = \frac{\Sigma_u^3}{1-\Sigma_y}, \quad \alpha_2 = \frac{\Sigma_u^2}{1-\Sigma_y} \quad \text{e} \quad \alpha_0 = \frac{\Sigma_0}{1-\Sigma_y}. \quad (7.19)$$

Escrevendo as restrições na forma padrão do algoritmo elipsoidal implementado naquele trabalho:

$$\begin{aligned} -\epsilon &< 0,4391 - 0,4391\Sigma_y - \Sigma_u^3 < \epsilon \\ -\epsilon &< -3,3710 + 3,3710\Sigma_y - \Sigma_u^2 < \epsilon \\ -\epsilon &< 26,2696 - 26,2696\Sigma_y - \Sigma_0 < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.20)$$

A precisão usada foi  $\epsilon = 0,01$  e o algoritmo elipsoidal retornou os parâmetros apresentados na equação (7.21), a seguir.

$$\begin{aligned} y(k) &= 0,7315y(k-1) - 0,0047y(k-2) + 13,7292 \\ &\quad - 0,8280u(k-1)^3 - 0,2495y(k-3) \\ &\quad + 3,6774u(k-1)^2u(k-3) + 2,0210(k-3)^3 \\ &\quad - 1,7617u(k-1)u(k-3) - 4,6409u(k-1)u(k-3)^2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Os índices RMSE para o modelo (7.21) podem ser vistos na Tabela 7.7. A simulação livre e o ajuste estático obtidos pelo modelo (7.21) podem ser vistas nas Figuras 7.13 e 7.14, respectivamente.

A estratégia utilizada neste trabalho difere principalmente do tipo de ajuste utilizado para a obtenção das restrições, como pode ser visto a seguir.

Para o levantamento das restrições utiliza-se a própria estrutura estática do modelo, no caso

$$\bar{y} = \frac{\alpha_0 + \alpha_2\bar{u}^2 + \alpha_3\bar{u}^3}{1 - \alpha_1}. \quad (7.22)$$

Os coeficientes  $\alpha_i$  são estimados utilizando-se o algoritmo BFGS através da minimização da função custo

$$f(a, b) = (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y})^T (\bar{y}_{\text{real}} - \bar{y}).$$

O melhor ajuste conseguido foi através da relação estática

$$\bar{y} = \frac{6,4134 - 0,8239\bar{u}^2 + 0,1072\bar{u}^3}{1 - 0,7564}. \quad (7.23)$$

O algoritmo elipsoidal implementado entende as restrições escritas como um mapeamento linear do tipo  $\mathbf{c} = \mathbf{S}\theta$ , com isso pode-se escrever as restrições da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 6,4134 \\ -0,8239 \\ 0,1072 \\ 0,7564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

A precisão do algoritmo elipsoidal para a imposição das restrições foi  $\epsilon = 10^{-7}$ . Conjectura-se que esse valor de precisão só pôde ser utilizado porque os valores iniciais do algoritmo estavam mais próximos do mínimo da função custo, no caso foram utilizados os parâmetros estimados via MQ do modelo (7.3).

O modelo com os parâmetros estimados pelo algoritmo elipsoidal pode ser visto na equação (7.25), a seguir

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,2103y(k-1) - 0,2628y(k-2) + 6,4134 \\ & -2,7046u(k-1)^3 - 0,1910y(k-3) \\ & +8,8445u(k-1)^2u(k-3) + 3,6006(k-3)^3 \\ & -0,8239u(k-1)u(k-3) - 9,6332u(k-1)u(k-3)^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

O modelo (7.25) apresenta os valores RMSE mostrados na Tabela 7.7. As respostas dinâmica e estática podem ser vistas nas Figuras 7.15 e 7.16, respectivamente.

A partir da Tabela 7.7, observa-se que o algoritmo elipsoidal implementado neste trabalho obteve os melhores índices de desempenho entre os apresentados. Além disso, os parâmetros por ele estimados possuem valores mais próximos dos valores estimados pelos MQ do modelo (7.3). Conjectura-se que isso aconteceu, primeiro, porque foi utilizada a estrutura estática do modelo para promover o ajuste de curva; segundo, os valores iniciais utilizados pelo BFGS foram os coeficientes de agrupamentos de termos do modelo (7.3); terceiro, as restrições puderam ser escritas em função de todos os agrupamentos de termos e não da combinação deles, como na metodologia apresentada em Corrêa (2001); quarto, o algoritmo elipsoidal implementado utilizou-se dos valores dos parâmetros do modelo (7.3) como valores iniciais.

Tabela 7.7: Comparação entre os valores RMSE dos modelos (7.3), (7.21), (7.25).

RMSE	Estática	Dinâmica
Aguirre et al. (2000)	0,9750	0,4906
Corrêa (2001)	0,2746	0,4851
ELIP	0,2725	0,4625

Como se suspeitava, a combinação entre a estrutura com melhor resposta dinâmica, associada com as técnicas desenvolvidas neste trabalho proporcionaram os melhores modelos para o conversor. Embora os modelos com grau de não-linearidade quadrático fossem capazes de uma melhor aproximação estática, verifica-se que a capacidade dinâmica dos modelos obtidos a partir da estrutura do modelo (7.3) apresentam os melhores índices dinâmicos o que torna a escolha de um dos modelos dependente da aplicação à qual o modelo será submetido.

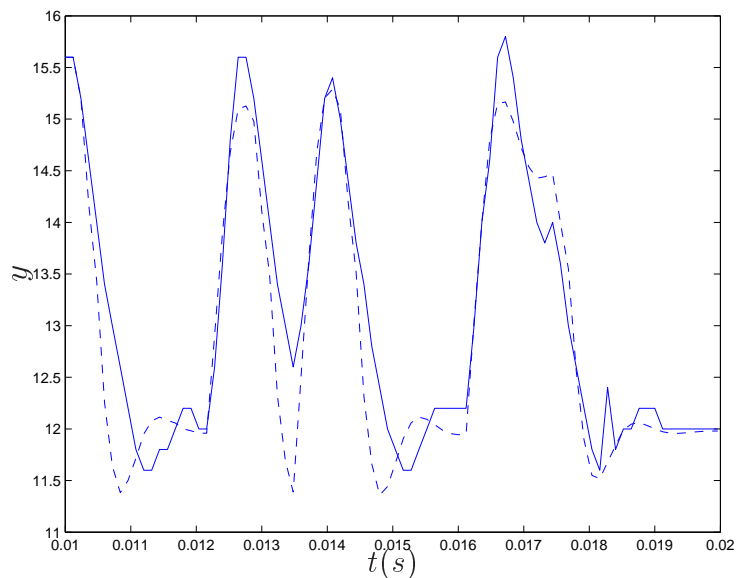


Figura 7.13: Validação dinâmica do modelo (7.21) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

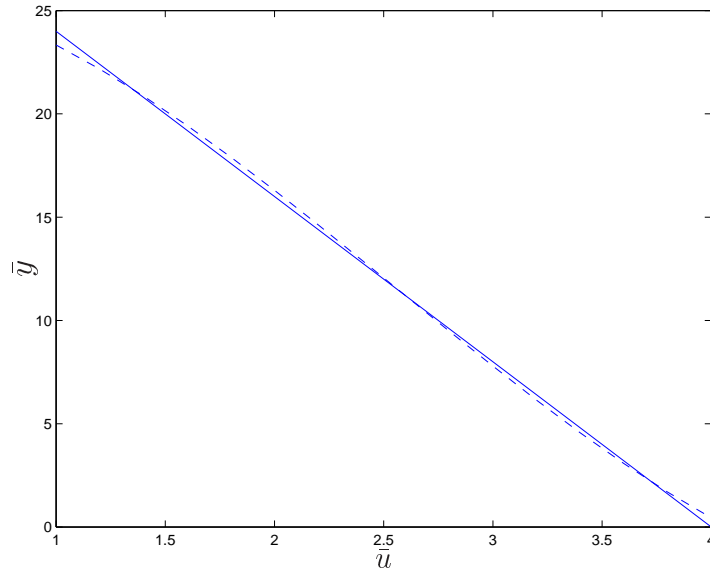


Figura 7.14: Validação estática do modelo (7.21) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

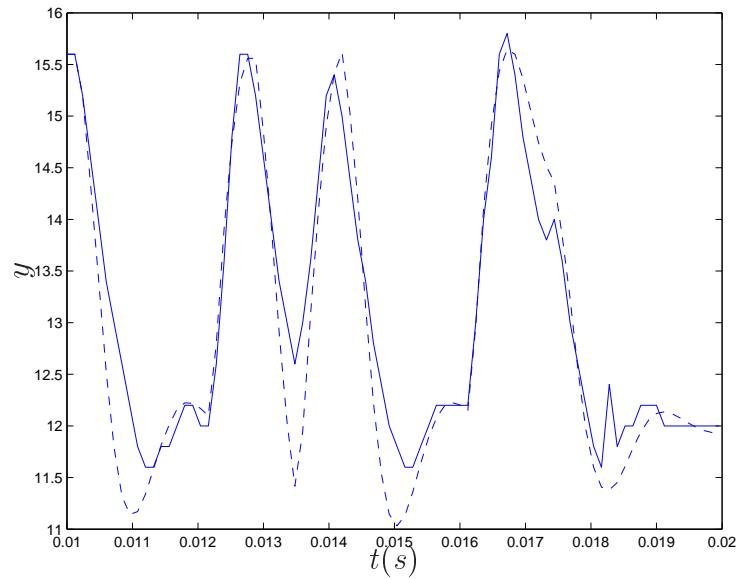


Figura 7.15: Validação dinâmica do modelo (7.25) sendo: ( - ) os dados reais e ( - - ) a resposta do modelo.

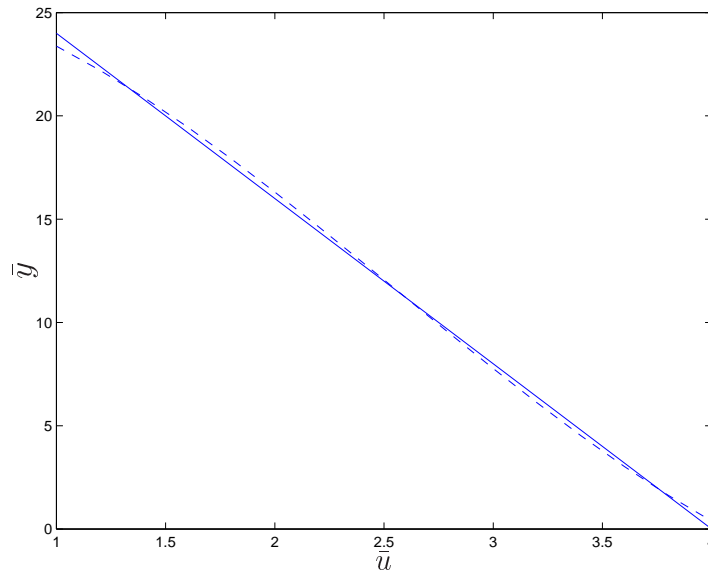


Figura 7.16: Validação estática do modelo (7.25) sendo: ( - ) os dados teóricos e ( - - ) a resposta do modelo.

## 7.4 Comentários Finais

Dois aspectos foram estudados neste capítulo, o uso das técnicas desenvolvidas para a incorporação de conhecimento a priori nas etapas de detecção de estrutura e estimação de parâmetros e a incorporação de conhecimento a priori dada uma estrutura pré-definida.

Os modelos obtidos através da metodologia desenvolvida foram capazes de ajustar bem a curva estática e explicar satisfatoriamente a dinâmica. A grande dificuldade de qualquer metodologia, seja ela caixa-preta ou caixa-cinza, é a escolha do grau de não-linearidade e máximos atrasos dos termos de processo. Por isso foi testada também a utilização da metodologia desenvolvida quando conhecida a estrutura de um modelo. Mais uma vez a metodologia se mostrou eficiente e obteve os melhores índices de desempenho entre os modelos apresentados.



# Capítulo 8

## Conclusões Gerais e Trabalhos Futuros

### 8.1 Introdução

O trabalho teve como objetivos principais desenvolver uma metodologia caixa-cinza para a utilização de conhecimento a priori nas etapas de escolha de estrutura e estimação de parâmetros, desenvolver uma implementação para o algoritmo elipsoidal própria para modelos NARX polinomiais e procurar um algoritmo alternativo ao elipsoidal.

Para que isso fosse possível, foi necessário o estudo de técnicas caixa-preta, que são a base teórica para a identificação de sistemas não-lineares, as características estruturais da representação utilizada e o conhecimento das funções objetivo a serem utilizadas nas etapas de identificação.

### 8.2 O Problema

Em identificação caixa-preta o único conhecimento prévio do sistema são seus dados de entrada e saída. As etapas de detecção de estrutura e de estimação de parâmetros utilizam técnicas empíricas, baseadas em resultados estatísticos.

Quanto aos dados de identificação, algumas perguntas surgem: Que garantias existem de que os dados possam fornecer todas as informações necessárias para que essas ferramentas estatísticas possam fornecer resultados confiáveis? Se não podem, o que fazer para contornar o problema?

Para a resposta da primeira pergunta, acredita-se que dados obtidos através de ensaios em sistema reais não contenham as informações necessárias,

porque existem limites operacionais e de engenharia para que os dados excursionem todos os pontos de operação de interesse.

Para a resposta à segunda pergunta, o que se propôs neste trabalho foi a utilização de conhecimento fora dos dados de identificação que possa auxiliar na etapas de detecção de estrutura e estimação de parâmetros.

Foram então desenvolvidas metodologias com o intuito de fornecer uma ferramenta auxiliar para a detecção de estrutura e estimação de parâmetros.

### 8.3 A Detecção de Estrutura

Espera-se que a estrutura do modelo seja capaz de reproduzir os aspectos dinâmicos e estáticos dos sistemas reais estudados. Para tal é necessário que o modelo possa apresentar agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos que sejam capazes de reproduzir as características estáticas que se deseja.

A metodologia desenvolvida utiliza os conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos para que, com o auxílio de conhecimento estático a priori do sistema, possa-se definir quais termos devam fazer parte da estrutura para garantir a recuperação das características estáticas do sistema original.

Notou-se que para sistemas que apresentam dados que excursionam uma ampla faixa de operação, a estrutura detectada através da metodologia já é capaz de reproduzir de forma satisfatória as características dinâmicas sem uma grande deterioração do comportamento em estado estacionário, sem o auxílio de nenhum tipo de ferramenta de imposição de restrições aos parâmetros. O aquecedor com dissipação variável foi importante para reforçar essa idéia.

No entanto, notou-se que o mesmo não acontece em sistemas que apresentam dados em uma faixa estreita de operação. Observou-se que não há meios de se definir a qualidade da estrutura quanto à capacidade estática porque não se tem informação suficiente fora da faixa de operação dos dados para garantir que os parâmetros absorvam o conhecimento a priori utilizado apenas na etapa de detecção de estrutura. Isso ficou evidente na identificação do conversor Buck.

### 8.4 A Estimação de Parâmetros

Como conjectura-se que a estrutura não é suficiente para que o modelo represente bem o comportamento em estado estacionário do sistema real,

propõem-se que as mesmas informações utilizadas para a detecção de estrutura sejam utilizadas também para impor aos parâmetros valores que levem os coeficientes de agrupamentos para valores compatíveis com a característica estática do sistema original.

Notou-se no entanto, que independente da faixa operacional em que se encontram os dados, os valores estimados de forma irrestrita eram muito próximos dos valores estimados através da imposição de restrições. Conjectura-se que esse fato acontece porque a estrutura foi capaz de fornecer os termos certos de processo para que o modelo pudesse representar o comportamento em estado estacionário do sistema. A utilização de restrições serviria apenas para garantir valores de coeficientes de agrupamentos mais próximos do desejável. É bom salientar que as restrições impostas neste trabalho vêm do ajuste da estrutura estática do modelo aos dados estáticos conhecidos a priori.

Os resultados obtidos, através da utilização das metodologias propostas, se mostraram satisfatórios para os dois modelos estudados.

## 8.5 Os Algoritmos Utilizados

Para etapas de levantamento e imposição das restrições foram utilizados os algoritmos Quase-Newton BFGS (irrestrito) e os algoritmos MQR e elipsoidal, respectivamente.

Para o levantamento das restrições, dependendo do conhecimento a priori utilizado, a função custo, utilizada para o ajuste de curva é uma função racional. O algoritmo BFGS no entanto só é aplicável a funções continuamente diferenciáveis. Mas as boas propriedades do algoritmo BFGS para problemas irrestritos tornava esse algoritmo atrativo. Uma solução para que fosse possível a utilização desse algoritmo era inicializá-lo de um valor próximo da bacia de atração na qual estava contido o mínimo da função. Observou-se que o algoritmo inicializado com os valores dos coeficientes de agrupamentos de termos calculados em função dos parâmetros estimados pelos MQE levava o algoritmo, sistematicamente para o mínimo da função. Suspeita-se que os valores dos coeficientes de agrupamentos sejam um valor ótimo para a inicialização do algoritmo. Isso foi observado para os sistemas estudados. Essa é a grande dificuldade da metodologia utilizada, ou seja, o levantamento das restrições no caso em que a função custo é racional.

O algoritmo MQR é uma ferramenta que se mostrou muito eficiente na imposição das restrições aos parâmetros estimados. Suas características principais são: o modo amigável de manipular as restrições; a solução fornecida é obtida de forma analítica não-iterativa. O maior problema desse algoritmo

é não permitir ao usuário interferir em parâmetros, como por exemplo, a precisão que se deseja ao ajuste.

Contrário aos MQR, o algoritmo elipsoidal implementado neste trabalho, tem como características positivas permitir ao usuário definir a precisão do algoritmo para a imposição das restrições e para o erro aceitável na minimização da função custo. A grande desvantagem observada no algoritmo é seu alto custo computacional. A precisão requerida pelo usuário pode ser um fator para o aumento do seu custo computacional.

## 8.6 Trabalhos Futuros

Algumas questões levantadas neste trabalho precisam ser investigadas com maior rigor. Entre elas está a utilização dos coeficientes de agrupamentos de termos como valores ótimos para a inicialização do algoritmo BFGS na etapa de ajuste de curva. Uma alternativa pensada é tratar a função custo como um modelo de sistema dinâmico e seu mínimo como um ponto de equilíbrio estável do sistema. Se for possível demonstrar que os coeficientes de agrupamentos de termos são uma solução que leva o sistema para o ponto fixo, podem-se utilizar esses valores como valores viáveis. Essa formulação precisa ser amadurecida mas suspeita-se que é um caminho promissor.

Outro aspecto que se mostrou evidente foi a dualidade “ajuste estático  $\times$  capacidade dinâmica”. Observou-se que a melhoria na capacidade de recuperação estática do modelo tinha como custo a piora da capacidade dinâmica e vice-versa. Se essa dualidade for tratada como um problema multiobjetivo, acredita-se poder utilizar essa formulação para a melhoria dos resultados.

O grande desafio dessa abordagem é definir, partindo de características estruturais das representações, quais funções custo seriam utilizadas para a formulação do problema. Além disso, a definição do algoritmo multiobjetivo vai depender das características dos funcionais a serem definidos.

Algumas formulações podem ser propostas, como por exemplo o problema  $P_\lambda$ , que escreve um problema mono-objetivo com os funcionais ponderados por valores  $\lambda$ . A função mono-objetivo é  $P_\lambda = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots$ , sendo  $P_i$  o  $i$ -ésimo funcional. Essa formulação é capaz de gerar todo o conjunto Pareto ótimo se os funcionais forem convexos. O estudo desta representação foi iniciado com boas perspectivas.

A grande vantagem de uma abordagem multiobjetivo é fornecer um conjunto de soluções que possibilitam ao usuário a sua escolha de acordo com as necessidades.

# Bibliografia

- Agarwal, M. (1997). Combining neural and conventional paradigms for modelling, prediction and control. *International Journal of Systems Science*, 28(1):65–81.
- Aguirre, L. A. (1994). Some remarks on structure selection for nonlinear models. *ijbc*, 4(6):1707–1714.
- Aguirre, L. A. (1995). A nonlinear correlation function for selecting the delay time in dynamical reconstructions. *Physics Letters A*, 203(1995):88–94.
- Aguirre, L. A. (2000a). *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, 1ª edition.
- Aguirre, L. A. (2000b). A nonlinear dynamical approach to system identification. *IEEE Circuits & Systems Newsletter Society*, 11(2):10–23, 47.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1994). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):109–125.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995a). Dynamical effects of over-parametrization in nonlinear models. *Physica D*, (80):26–40.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995b). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569–587.
- Aguirre, L. A., Donosco-Garcia, F., and Santos-Filho, R. (2000). Use of *a priori* information in the identification of global nonlinear models - a case study using a buck converter. *IEEE Transaction on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications.*, 47(7):1081–1085.

- Aguirre, L. A. and Mendes, E. M. A. M. (1996). Nonlinear polynomials models: Structure, term cluster and fixed points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(2):279–294.
- Aguirre, L. A., Rodrigues, G. G., and Jácome, C. F. (1998). Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - uma revisão e novos resultados. *SBA Controle & Automação*, 9(2).
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- Alessandri, A. and Parisini, T. (1997). Nonlinear modelling of complex large-scale plants using neural networks and stochastic approximation. *ieesmc*, 27(6):750–757.
- Anishchenko, V. S. (1990). *Complicated Oscillations in simple Systems: Appearance Routes, Structure and Properties of Dynamical Chaos in Radio-physical Systems*. Nauka Publishers, Moscow.
- Anishchenko, V. S. (1995). *Dynamical Chaos - Models and Experiments. Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems*, volume 8 of *Serie A*. World Scientific.
- Aström, K. J. and Eykhoff, P. (1971). System identification - a survey. *Automatica*, 7:123–167.
- Aström, K. J. and Witternmark, B. (1990). *Computer-controlled systems - theory and design*. Prentice-Hall International, New York, U.S.A.
- Bai, E. W. and Sastry, S. S. (1986). Parameter identification using prior information. *Int. J. Control*, 44(2):455–473.
- Barany, E. (2001). Identification in the presence of symmetry: Oscillator networks. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 46(3):476–481.
- Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M. (1985). *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons.
- Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems - a survey. *IEE Proceedings, Part D*, 127(6):272–285.
- Billings, S. A. and Chen, S. (1989). Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49(3):1013–1032.

- Billings, S. A., Chen, S., and Korenberg, M. J. (1989). Identification of mimo non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 59(6):2157–2189.
- Billings, S. A. and Fadzil, M. B. (1985). *The practical identification of systems with nonlinearities*. IFAC Identification and System Parameter Estimation, York, U.K.
- Billings, S. A. and Voon, W. S. F. (1984). Least square parameter estimation algorithms for non-linear systems. *International Journal of Systems and Science*, 15(6):601–615.
- Billings, S. A. and Zhu, Q. M. (1994). Model validation tests for multivariable nonlinear models including neural networks. Technical report, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, U.K.
- Billings, S. D. and Voon, W. S. F. (1983). Structure detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. *IEE Proceedings*, 130(4):193–199.
- Billings, S. D. and Voon, W. S. F. (1986). Correlation model validity tests for nonlinear models. *International Journal of Control*, 44(1):235–244.
- Bland, R. G., Goldfarb, D., and Todd, M. J. (1981). The ellipsoid method: a survey. *Operations Research*, 29(6):1039–1091.
- Bohlin, T. (1991). *Interactive System Identification: Prospects and Pitfalls*. Springer-Verlag.
- Bohlin, T. (1994). A case study of grey box identification. *Automatica*, 30(2):307–318.
- Bohlin, T. and Graebe, S. T. (1995). Issues in nonlinear stochastic grey box identification. *ijacsp*, 9(6):465.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*. Holden-Day Series in Time Series Analysis and Digital Processing. Holden-Day.
- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo.
- Braga, A. P., Carvalho, A. C. P. L. F., and Ludemir, T. B. (2000). *Redes Neurais Artificiais: teoria e aplicações*. Livraria Técnica Científica - LTC.

- Breeden, J. and Packard, N. (1994). A learning algorithm for optimal representation of experimental-data. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2):311–326.
- Cassini, C. C. S. (1999). Estimação recursiva de características estáticas não lineares utilizando modelos polinomiais NARMAX. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica.
- Chen, S., Billings, S. A., and Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear identification. *International Journal of Control*, 50(5):1873–1896.
- Coelho, L. S., Corrêa, M. V., Cassini, C. S., and Aguirre, L. A. (2000). A comparison of representations for nonlinear system identification: A case study. *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*.
- Corrêa, M. V. (2001). *Identificação caixa-cinza de Sistemas não-lineares utilizando representações NARMAX racionais e polinomiais*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- Cubillos, F. A., Alvarez, P. I., Pinto, J. C., and Lima, E. L. (1996). Hybrid-neural modeling for particulate solid drying processes. *Power Technology*, 87:153–160.
- Cubillos, F. A. and Lima, E. L. (1997). Identification and optimizing control of a rougher flotation circuit using an adaptable hybrid-neural model. *Minerals Engineering*, 10(7):707–721.
- Davis, M. H. A. and Vinter, R. B. (1985). *Stochastic modeling and control*. Chapman and Hall, London, U.K.
- Demircan, M., Camurdan, M. C., and Postlethwaite, B. E. (1999). On-line learning fuzzy relational model based dynamic matrix control of an openloop unstable process. *Trans. IChemE*, 77(Part. A):421–428.
- Draper and Smith (1998). *Applied Regression Analysis*. Wiley series in probability and statistics, 3rd edition.
- Dziuban, S. T., Ecker, J. G., and Kupferschmid, M. (1985). Using deep cuts in an ellipsoidal algorithm for nonlinear programming. *Math. Program. Study*, 25:93–107.

- Eskinat, E., Johnson, S. H., and Luyben, W. L. (1993). Use of auxiliary information in system identification. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 32:1981–1992.
- Eykhoff, P. (1981). Trends and Progress in System Identification. In *IFAC series*. Pergamon, Oxford.
- Forssell, U. and Lindskog, P. (1997). Combining semi-physical and neural network modeling: an example of its usefulness. In *Preprints of the 11th IFAC Symposium on System Identification*, Kitakyushu, Fukuoka, Japan.
- Garcia, C. (1997). *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. EDUSP, São Paulo.
- Godfrey, K. R. (1986). Practical problems in identification. In Godfrey, K. and Jones, P., editors, *Signal Processing for Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 358–386. Springer-Verlag.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1989). *Matrix computation*. John Hopkins, London, U.K.
- Haber, R. and Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamics-systems - a survey on input output approaches. *Automatica*, 26(4):651–677.
- Herbert, J. A. and Tulleken, A. F. (1993). Grey-box modeling and identification using physical knowledge and bayesian techniques. *Automatica*, 29(2):285–308.
- Jácome, C. R. F. (1996). Uso de conhecimento prévio na identificação de modelos polinomiais NARMAX. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica.
- Johansen, T. (1996). Identification of non-linear systems using empirical data and prior knowledge - an optimization approach. *Automatica*, 32(3):337–356.
- Johansen, T. (1997). Constrained and regularized system identification. In *Symposium on System Identification*, Fukuoda.
- Johansen, T. A. (2000). Multi-objective identification of fir models. In *IFAC SYSID 2000*, Santa Barbara, USA.

- Jorgensen, S. B. and Hango, K. M. (1995). Grey box modelling for control: Qualitative models as a unifying framework. *ijacsp*, 9(6):547–562.
- Korenberg, M., Billings, S. A., Liu, Y. P., and McIlroy, P. J. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *International Journal of Control*, 48(1):193–210.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems part i: deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303–328.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems part ii: stochastic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329–344.
- Lindskog, P. (1996). *Methods, Algorithms and Tools for System Identification Based on Prior Knowledge*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Lindskog, P. and Ljung, L. (1995a). A comparison between semi-physical and black-box neural net modeling: a case study. In Bulsari, A. B. and Kallio, S., editors, *Proceedings of the International Conference EANN'95: Engineering Applications of Artificial Neural Networks*, pages 235–238.
- Lindskog, P. and Ljung, L. (1995b). Tools for semiphysical modelling. *ijacsp*, 9(6):509.
- Ljung, L. (1987). *System Identification - Theory for the User*. Information and System Sciences Series. P T R Prentice Hall, New Jersey.
- Lorito, F. (1998). Identification of a grey-box model of nonlinear current transformer for simulations purposes. *Control Engineering Practice*, 6:1331–1339.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.
- Mao, K. and Billings, S. (1997). Algorithms for minimal model structure detection in nonlinear dynamic system identification. *International Journal of Control*, 68(2):311–330.
- Mendes, E. M. A. M. and Billings, S. A. (1998). On overparametrization of nonlinear discrete systems. *International Journal of bifurcation and chaos*, 8(3):535–556.

- Norgaard, M., Ravn, O., and Poulsen, N. (1997). Nnsysid and nncntrl - tools for system identification and control with neural networks. *Computing & Control Engineering Journal*, 12(1):29–36.
- Pearson, R. K. and Pottmann, M. (2000). Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, 10:301–315.
- Petrick, M. H. and Wigdorowitz, B. (1997). A prior nonlinear model structure selection for system identification. *Control Eng. Practice*, 5(8):1053–1062.
- Polcino, C. M. and Bussab, J. H. O. (1999). *A Geometria na Antigüidade Clássica*. FTD, São Paulo.
- Pottmann, M. and Pearson, R. (1998). Block-oriented narmax models with output multiplicities. *AIChE Journal*, 44(1):131–140.
- Psichogios, D. and Ungar, L. (1992). A hybrid neural networks - 1st principles approach to process modeling. *AIChE Journal*, 38(10):1499–1511.
- Saldanha, R. R., Takahashi, R. H. C., Vasconcelos, J. A., and Ramirez, J. A. (1999). Adaptive deep-cut method in ellipsoidal optimization for electromagnetic design. *IEEE Transaction on Magnetics, Part I*.
- Simutis, R., Oliveira, R., Manikowski, Azevedo, S. F. d., and Lübbert, A. (1997). How to increase the performance of models for process optimization and control. *Journal of Biotechnology*, 59:73–89.
- Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., and Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: A unified overview. *Automatica*, 31:1691.
- Takahashi, R. H. C. (2001). Otimização multiobjetivo. Notas de Aula de Disciplina - PPGEE - CPDEE - UFMG.
- Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Sons Ltd.
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston, Washington DC.
- Tulleken, H. J. A. F. (1993). Grey-box modelling and identification using physical knowledge and bayesian techniques. *Automatica*, 29(2):285–308.
- Weyer, E., Gábor, S., and Katalin, H. (2000). Grey box fault detection of heat exchangers. *Control Engineering Practice*, 8:121–131.



# Apêndice A

## Funções Computacionais

Na procura de criar mecanismos auxiliares para identificação de sistemas, várias funções computacionais foram desenvolvidas pelo grupo de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares (MACSIN)<sup>1</sup>.

O presente trabalho teve como uma de suas etapas o desenvolvimento de funções específicas para serem utilizadas no contexto de identificação caixa-cinza. Essas funções foram então incorporadas ao pacote de funções já existentes. As funções desenvolvidas foram:

`agrup` : utilizada em identificação caixa-preta para análise dos agrupamentos de termos em modelos NARX polinomiais. Não foi utilizado no contexto desse trabalho, mas é muito útil para a escolha de estrutura para usuários que estão tendo o primeiro contato com a identificação de sistemas;

`akaike` : utilizada para estimar um número aproximado de termos de processo de um modelo NARX polinomial. Essa função é utilizada como critério de informação na etapa de escolha de estrutura dos modelos. No caso o critério utilizado é o AIC, ou critério de informação de Akaike;

`rmse` : utilizada para a validação dinâmica e estática dos modelos NARX polinomiais. Essa função calcula a raiz do erro médio quadrático entre dois vetores de mesmo tamanho;

`elipnarx` : utilizada para imposição de restrições de igualdade na etapa de estimação dos parâmetros de modelos NARX polinomiais. Essa função é baseada no algoritmo elipsoidal e adaptado para modelos polinomiais;

---

<sup>1</sup>[www.cpdee.ufmg.br/~MACSIN](http://www.cpdee.ufmg.br/~MACSIN).

`mqr` : utilizada para imposição de restrições de igualdade na etapa de estimação de parâmetros de modelos NARX polinomiais. Essa função utiliza a forma de Lagrange para impor as restrições, sendo por isso, não iterativa.

Juntamente com as outras funções apresentadas no texto, formam um “pacote” para identificação caixa-preta e caixa-cinza.

Este apêndice tem como objetivo apresentar essas funções na ordem de aparecimento no texto. Além das funções utilizadas no decorrer do trabalho serão também mostradas outras que são importantes como ferramentas auxiliares, como no caso da função **agrup**.

Antes, porém, é importante definir a linguagem de programação utilizada com uma breve descrição a seu respeito.

## A.1 Linguagem de Programação

A linguagem de auto-nível utilizada foi o MATLAB<sup>TM</sup> (Matrix Laboratory, MathWorks, 2000) ou em português, Laboratório de Matrizes. A escolha dessa linguagem se deu principalmente pelas seguintes características:

1. forma simplificada de apresentação e manipulação de vetores e matrizes.
2. interface gráfica bastante amigável e intuitiva;
3. programação estruturada;

Essas características do MATLAB facilitam o desenvolvimento de funções computacionais para o auxílio da identificação de sistemas não-lineares.

A descrição sucinta dos parâmetros de entrada e saída das funções do “pacote” pode ser vista a seguir.

## A.2 As Funções Computacionais

As funções que serão descritas a seguir foram utilizadas nas etapas de escolha de estrutura, estimação de parâmetros, simulação livre e validação dos modelos NARMAX identificados. Apenas lembrando que os modelos identificados nesse trabalho são modelos SISO (do inglês “single input, single output”), ou seja, apenas uma entrada e uma saída.

### A.2.1 Função genterms

A função **genterms** é utilizada para gerar o conjunto de todos os termos candidatos possíveis em um modelo com grau de não-linearidade  $\ell$  e máximos atrasos do sinal de entrada, saída e ruído iguais a  $(n_u)$ ,  $(n_y)$ ,  $(n_e)$ , respectivamente.

Essa função retorna o número de termos candidatos,  $(n_t)$  e uma matriz contendo os termo de processo e ruído codificados da seguinte maneira:

- $constante \Rightarrow 0$ ;
- $y(k - i) \Rightarrow 100i$ ;
- $u(k - i) \Rightarrow 200i$ ;
- $e(k - i) \Rightarrow 300i$ ;

As linhas dessa matriz representam as combinações dos termos acima, como exemplificado a seguir:

$$\text{modelo} = \begin{bmatrix} 1001 & 1001 & 1001 \\ 2001 & 1001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2001 & 2001 & 2002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k-1)^3 \\ u(k-1)y(k-1) \\ constante \\ u(k-1)^2u(k-2) \end{bmatrix}.$$

Essa codificação é utilizada nas demais funções que utilizam a estrutura do modelo como informação.

A estrutura dessa função é

$$[\text{modelo}, n_t] = \mathbf{genterms}(\ell, n_y, n_u, n_e); \quad (\text{A.1})$$

Eduardo Mendes - 11/08/94 - Carlos Fonseca  
ACSE - Sheffield

### A.2.2 Função mcand

Essa função permite retirar do conjunto de termos candidatos aqueles que fazem parte dos agrupamentos de termos considerados espúrios.

Tomando como base os agrupamentos de termos escritos como  $\Omega_{y^p u^m}$ , tem-se, por exemplo:

- para  $p = 1$  e  $m = 1$ , tem-se o agrupamento de termos  $\Omega_{yu}$ ;
- para  $p = 0$  e  $m = 1$ , tem-se o agrupamento de termos  $\Omega_u$ ;

- para  $p = 1$  e  $m = 0$ , tem-se o agrupamento de termos  $\Omega_y$ ;
- para  $p = 2$  e  $m = 1$ , tem-se o agrupamento de termos  $\Omega_{y^2u}$ ;
- para  $p = 0$  e  $m = 0$ , tem-se o agrupamento de termos  $\Omega_0$ .

A função parte dessa lógica para retirar os termos candidatos contidos na matriz código (modelo). Ou seja, dados  $(p)$  e  $(m)$ , são retirados todos os termos candidatos pertencentes ao agrupamento de termos relacionado com eles.

Por exemplo, se as entradas forem  $p = 1$  e  $m = 2$ , serão retiradas todas as linhas da matriz (modelo) que contenham os elementos do tipo  $[200i \ 200i \ 100j]$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, n_u$  e  $j = 1, 2, \dots, n_y$ . Essa função só se aplica aos termos de processo do modelo.

A estrutura dessa função é

$$[\text{modelo}] = \mathbf{mcand}(\text{modelo}, p, m); \quad (\text{A.2})$$

Giovani Rodrigues  
Eduardo Mendes - 11/08/95

### A.2.3 Função akaike

Essa função calcula o número aproximado de termos que um modelo necessita baseado no critério de informação de Akaike (AIC).

Essa função parte da matriz código (modelo) contendo apenas termos de processo que pertençam aos agrupamentos considerados não-espúrios e dos dados de entrada ( $u$ ) e saída ( $y$ ) do sistema estudado.

Essa função permite também a escolha entre a visão gráfica do resultado ou não, bastando para tal ajustar o parâmetro ( $flag$ ). Se ( $flag = 1$ ), será mostrada a figura contendo a evolução do critério, caso contrário não. Uma vez escolhida a apresentação gráfica, o parâmetro ( $flag2$ ) permite a escolha do número da figura a ser mostrada. As saídas da função são, a série numérica, ( $f$ ), gerada pelo critério e o número de termos a ser considerado pelo modelo ( $mint$ ).

A estrutura dessa função é

$$[f, mint] = \mathbf{akaike}(\text{modelo}, u, y, flag, flag2); \quad (\text{A.3})$$

Márcio Barroso  
PPGEE - CPDEE - UFMG  
GRUPO MACSIN  
Belo Horizonte, 10 de abril de 2001

### A.2.4 Função `myhouse`

Essa função calcula o valor de ERR de cada termo candidato do modelo, fazendo-se necessária a ortonormalização da matriz de regressores. O processo utilizado é chamado de Householder.

Dada uma matriz ( $\Psi$ ), essa função procura ( $Q$ ) tal que  $Q'\Psi = V$  sendo ( $V$ ) triangular superior. A matriz ( $\Psi$ ) é a matriz de regressores acrescida dos dados de saída do sistema na última coluna.

Dado o número de termos de processo ( $n_p$ ) a serem considerados, e a matriz ( $\Psi$ ), essa função retorna: o vetor ( $err$ ) que contém o ERR de cada termo de processo; o vetor ( $Piv$ ) que contém os índices das linhas em ordem decrescente de ERR da matriz (modelo).

O vetor ( $Piv$ ) retorna os índices dos termos mais importantes segundo o ERR. Por exemplo, se a função retornar  $Piv = [3 \ 1 \ 4 \ 2]^T$ , significa que: o termo mais importante, segundo o critério do ERR, está na terceira linha da matriz (modelo), o segundo termo mais importante na primeira linha e assim por diante.

A estrutura dessa função é

$$[err, Piv] = \mathbf{myhouse}(Psi, np); \quad (\text{A.4})$$

GRUPO MACSIN

### A.2.5 Função `orthreg`

Essa função é utilizada para a estimação dos parâmetros via MQE. Uma vantagem dessa função é que ela retorna ao mesmo tempo o valor dos parâmetros estimados via MQE e os termos na ordem decrescente de ERR, como na função `myhouse`.

Então, dados os valores de entrada ( $u$ ) e saída ( $y$ ) do sistema, a função monta a matriz de regressores e ortonormaliza através da função `myhouse`.

Essa função também permite a escolha do número de termos de processo ( $n_p$ ) e ruído ( $n_e$ ) a serem considerados, bem como o número de iterações de ruído ( $N$ ) que será considerado.

Ela retorna a matriz (modelo) com os ( $n_p + n_e$ ) termos na ordem decrescente de ERR; a matriz ( $x$ ) que contém: na primeira coluna os ( $n_p + n_e$ ) parâmetros do modelo, na segunda coluna o valor de ERR dos termos e na terceira coluna o desvio padrão do algoritmo; o vetor ( $e$ ) dos resíduos de identificação e a variância ( $va$ ).

A estrutura dessa função é

$$[\text{modelo}, x, e, va] = \text{orthreg}(\text{modelo}, u, y, [n_p \ n_e], N); \quad (\text{A.5})$$

Eduardo Mendes - 11/08/94  
ACSE - Sheffield

### A.2.6 Função `coefc`

Essa função é utilizada para calcular os coeficientes de agrupamentos de termos dada uma estrutura pré-definida e seus respectivos parâmetros.

Por exemplo, dada a matriz

$$\text{modelo} = \begin{bmatrix} 1001 & 1001 & 1001 \\ 2001 & 1001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2001 & 2001 & 2002 \\ 1001 & 1001 & 1002 \end{bmatrix}$$

e seus respectivos parâmetros  $\theta = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$ , a função retornará os seguintes valores de coeficientes de agrupamentos:

- $\Sigma_o = 3$ ;
- $\Sigma_{uy} = 2$ ;
- $\Sigma_{y^3} = 6$ ;
- $\Sigma_{u^3} = 4$ .

A função tem como valores de entrada a matriz código (modelo) e o vetor de parâmetros e retorna os coeficientes de agrupamentos de termos da seguinte maneira:

- `yconst` - coeficiente do agrupamento de termos constante;
- `y` - coeficientes dos agrupamentos de termos `y` e `u`, respectivamente;
- `yc` - coeficientes dos agrupamentos de termos cruzados (matriz, sendo que o primeiro índice indica o número de termos em `y` e o segundo o número de termos em `u`).

A estrutura dessa função é

$$[\text{yconst}, \text{y}, \text{yc}] = \text{coefc}(\text{modelo}, \theta); \quad (\text{A.6})$$

Giovani Rodrigues  
Eduardo Mendes - 06/05/95

### A.2.7 Função `fminunc`

Essa função procura o mínimo de uma função de várias variáveis, sendo inicializada por um valor  $X0$  e procurando o mínimo  $X$  da função  $FUN$ .

Os valores de  $X$  retornados pela função `fminunc` podem ser um escalar, um vetor ou uma matriz. Através da entrada `OPTIONS` é possível escolher o tipo de algoritmo Quase-Newton será utilizado. Neste trabalho foi escolhido o método BFGS.

A estrutura dessa função é

$$X = \mathbf{fminunc}(FUN, X0, OPTIONS); \quad (A.7)$$

The MathWorks, MATLAB R12, 5.3, 1994.

### A.2.8 Função `curvefit`

Essa função resolve um problema de mínimos quadrados não-linear escritos da seguinte maneira

$$\min_X \sum \{ (FUN(X, XDATA) - YDATA) .^2 \}$$

sendo  $FUN$  uma função que relaciona os dados  $XDATA$  e  $YDATA$  de forma não-linear.

O algoritmo é inicializado por  $X0$  e procura os coeficientes  $X$  que melhor ajusta a função não-linear  $FUN(X, XDATA)$  com o conjunto de dados  $YDATA$

A estrutura dessa função é

$$X = \mathbf{curvefit}'(FUN', X0, XDATA, YDATA) \quad (A.8)$$

The MathWorks, MATLAB R12, 5.3, 1994.

### A.2.9 Função `simodeld`

Essa função retorna a predição infinitos passos à frente ou, simulação livre do modelo identificado.

Partindo da matriz código (modelo), dos parâmetros estimados ( $\theta$ ), de condições iniciais ( $y0$ ), do sinal de entrada ( $u$ ) e um sinal de ruído ( $e$ ), a função retorna a saída predita infinitos passos à frente ( $y$ ).

É bom lembrar que o vetor de ruído será utilizado apenas se há interesse em conhecer o modelo de média móvel do sistema, dado pela matriz de regressores e parâmetros estendidos. Para a simulação do modelo considerando apenas os termos de processo deve-se desconsiderar a entrada de ruído.

A estrutura dessa função é

$$y = \mathbf{simodeld}(\text{modelo}, \theta, u, y0, e); \quad (\text{A.9})$$

Eduardo Mendes - 3/09/94  
ACSE - Sheffield

### A.2.10 Função `rmse`

Essa função retorna o índice de qualidade da aproximação entre dois vetores com o mesmo número de termos.

Dados dois vetores ( $x$ ) e ( $y$ ) a função retorna o índice RMSE ( $r$ ) entre os dois vetores.

A estrutura dessa função é

$$r = \mathbf{rmse}(x, y); \quad (\text{A.10})$$

Márcio Barroso  
CPDEE-PPGEE-UFMG  
GRUPO MACSIN  
Belo Horizonte, 15 de maio de 2001

Obs: uma outra versão foi escrita por Álvaro Polati anteriormente.

### A.2.11 Função `mqr`

Dadas as restrições escritas na forma de um mapeamento linear  $\mathbf{S}\theta = \mathbf{c}$ , essa função retorna os parâmetros do modelo estimados de forma a respeitar essas restrições.

A função tem como entradas a matriz código (modelo), os sinais de entrada ( $u$ ) e saída ( $y$ ) do sistema a ser identificado, os parâmetros estimados via MQ, a matriz ( $\mathbf{S}$ ) e o vetor ( $\mathbf{c}$ ). Retornando os parâmetros corrigidos ( $x$ ) pelas restrições e a matriz código (modelo).

A estrutura dessa função é

$$[x, \text{modelo}] = \mathbf{mqr}(\text{modelo}, u, y, \theta_{\text{MQ}}, \mathbf{S}, \mathbf{c}); \quad (\text{A.11})$$

Márcio Barroso  
 CPDEE-PPGEE-UFMG  
 GRUPO MACSIN  
 Belo Horizonte, 17 de abril de 2001

### A.2.12 Função elipnarx

Essa é uma versão para o algoritmo ELIPSOIDAL para a solução do problema de estimação de parâmetros sujeita a restrições de igualdade do tipo  $\mathbf{S}\theta = \mathbf{c}$ , em modelos polinomiais NARX. Como se trata de uma ferramenta iterativa, alguns cuidados têm que ser tomados, como por exemplo, é necessário definir qual o valor que o algoritmo considerará zero para o erro da função custo e para a aproximação das restrições. Outro aspecto importante é criar limites de segurança ou de engenharia para os parâmetros a serem otimizados para possibilitar que o algoritmo não os ultrapasse.

Baseada nessas informações o algoritmo foi construído, tendo como entradas: o erro aceitável para o cálculo das funções (EPS); o erro aceitável para o valor das restrições (EPS2); os valores máximos e mínimos para os parâmetros a serem otimizados, (MinX) e (MaxX) respectivamente; as condições iniciais para o algoritmo (X0) e o número máximo de iterações (miter). Essas entradas são ajustes necessários para o bom funcionamento do algoritmo

As entradas referentes ao modelo NARX são: o sinal de saída do sistema ( $y$ ); a matriz de regressores ( $\mathbf{P}$ ); a matriz ( $\mathbf{S}$ ) e o vetor ( $\mathbf{c}$ ). Como saídas o algoritmo tem: os valores estimados para os parâmetros ( $\theta$ ), sua evolução ( $XK$ ) e a evolução da função objetivo ( $Hobj$ )

A estrutura dessa função é

$$[\theta, XK, Hobj] = \text{elipnarx}(\mathbf{S}, \mathbf{c}, y, \mathbf{P}, \text{EPS}, \text{miter}, \text{EPS2}, \text{MinX}, \text{MaxX}, X0); \quad (\text{A.12})$$

Márcio Barroso  
 CPDEE-PPGEE-UFMG  
 GRUPO MACSIN  
 Belo Horizonte, fevereiro de 2001

## A.3 As funções build\_pr e build\_no

Uma função que foi utilizada de forma não explícita no trabalho mas que é uma ferramenta importante é a função **build\_pr**.

Essa função constrói a matriz de regressores de processo ( $\mathbf{P}$ ) dados os sinais de entrada ( $u$ ) e saída ( $y$ ) do sistema e a matriz código (modelo).

A estrutura dessa função é

$$\mathbf{P} = \mathbf{build\_pr}(\mathbf{modelo}, u, y); \quad (\text{A.13})$$

Eduardo Mendes - 11/08/94

ACSE - Sheffield

A função que constrói a matriz de regressores de forma estendida, ou seja, contendo termos de ruído é a função **build\_no**. Essa função constrói a matriz de regressores estendida ( $\mathbf{P}$ ) dados os sinais de entrada ( $u$ ), saída ( $y$ ) do sistema, o ruído ( $e$ ) e a matriz código (modelo).

A estrutura dessa função é

$$\mathbf{P} = \mathbf{build\_no}(\mathbf{modelo}, u, y, e); \quad (\text{A.14})$$

Eduardo Mendes - 11/08/94

ACSE - Sheffield

## A.4 A função agrup

Essa função mostra a evolução dos coeficientes dos agrupamentos de termos com a variação do número de termos de processo acrescentados, segundo o ERR.

Para que a função mostre graficamente os resultados basta ajustar o parâmetro  $flag1 = 1$ , caso contrário,  $flag1 \neq 1$ . Caso tenha sido escolhida a opção  $flag1 = 1$ , pode-se ainda escolher o número da figura a ser mostrada ajustando-se o valor da entrada  $flag2$ .

A função retorna a evolução dos coeficientes de agrupamentos (AGRUPS) dada a matriz código (modelo) e a entrada ( $u$ ) e saída ( $y$ ) do sistema.

A estrutura dessa função é

$$[\text{AGRUPS}] = \mathbf{agrup}(\mathbf{modelo}, u, y, flag1, flag2); \quad (\text{A.15})$$

Márcio Barroso

PPGEE - CPDEE - UFMG

GRUPO MACSIN

Belo Horizonte, 25 de maio de 2001