



Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia de Produção



Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

# Modelos com Reparo Imperfeito no R

**Mestrando:** Rafael da Silva Fernandes

[rafasfer2@gmail.com](mailto:rafasfer2@gmail.com)

**Orientadora:** Profa. Dra. Marta Afonso Freitas

[marta@dep.ufmg.br](mailto:marta@dep.ufmg.br)

Belo Horizonte, agosto de 2015



Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia de Produção

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção



# Modelos com Reparo Imperfeito no R

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia de Produção da Universidade Federal de  
Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título  
de Mestre em Engenharia de Produção.

**Mestrando:** Rafael da Silva Fernandes

[rafasfer2@gmail.com](mailto:rafasfer2@gmail.com)

**Orientadora:** Profa. Dra. Marta Afonso Freitas

[marta@dep.ufmg.br](mailto:marta@dep.ufmg.br)

Belo Horizonte, agosto de 2015

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente aos meus Pais, Carlos Eduardo e Maria Geralda, que um dia sonharam comigo, me amaram antes mesmo que eu existisse e se alegraram com a minha chegada ao mundo.

Aos meus irmãos Luana, Gustavo, Carla e Bernardo que foram amigos e companheiros, mesmo nas horas em que meus ideais pareciam distantes e inatingíveis.

Aos meus amigos e familiares que me fizeram vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, principalmente à minha tia Cléria, que tive um carinho especial por ter me acolhido inúmeras vezes e me apoiado intensamente em meus estudos.

À Maria Luíza, que presenteou-me com a riqueza do estudo, que me incentivou e me encaminhou a esta conquista acadêmica e profissional.

Principalmente à minha esposa Ana Paula e minha filha Julia Mara que por incontáveis vezes meu cansaço e preocupação compartilhados por vocês, procurando amenizar minha ansiedade, mantendo-me firme diante dos obstáculos, aceitaram viver comigo o meu sonho.

E por fim, agradeço à minha orientadora, Marta Freitas, que com toda sua paciência, carinho e conhecimento me enriqueceu com suas experiências e me fez evoluir no campo da Engenharia de Produção.

## Resumo

A maioria das organizações tem gastos significativos associados à atividade de manutenção. Quando há ocorrência de falhas em equipamentos levando a paradas não programadas para manutenções corretivas, os custos associados incluem aqueles relacionados à indisponibilidade do equipamento, quais sejam, reposição de peças, custo da mão de obra e as consequências das interrupções não programadas da linha de produção. Por outro lado, mesmo quando a empresa executa um plano de manutenções preventivas, nas quais as paradas para reparo são programadas, ainda assim há custos associados à essa atividade. Qualquer política de manutenção visa portanto, implementar práticas que levem a uma redução do seu custo total esperado. Nesse sentido, uma análise minuciosa do histórico de falhas dos sistemas faz-se necessária. Para isso, é preciso recorrer a modelos probabilísticos/estatísticos que possibilitem tais análises e que forneçam subsídios para a tomada de decisões tais como a escolha da política de manutenção mais adequada. Modelos probabilísticos/estatísticos para a análise de sistemas reparáveis têm sido amplamente discutidos na literatura. Os modelos probabilísticos mais comuns para sistemas reparáveis, o Processo de Renovação e o Processo de Poisson Não-Homogêneo, trabalham sob as suposições de reparo perfeito (que leva o sistema à condição de "*tão bom quanto novo*" – *AGAN*) e reparo mínimo (que leva o sistema à condição de "*tão ruim quanto velho*" – *AGAO*) após a falha, respectivamente. Porém, na prática, tais suposições não são razoáveis para vários sistemas. O reparo em um sistema que falhou pode trazer o mesmo a um nível intermediário aos dois citados acima. Vários autores estudaram o comportamento de sistemas sujeitos a esse tipo de reparo, conhecido como reparo imperfeito e dentre os modelos propostos estão por exemplo os da classe *ARA* (*Arithmetic Reduction of Age*) e *ARI* (*Arithmetic Reduction of Intensity*) de Doyen e Gaudoin (2004). Uma dificuldade para a disseminação de tais modelos de grande utilidade na prática é a ausência de uma biblioteca de rotinas computacionais. Este trabalho disponibiliza aos estudantes, pesquisadores, engenheiros ou a qualquer interessado no assunto, um manual de utilização detalhado para a biblioteca (*ImperfectRepair*), desenvolvida em ambiente *R*. Esta ferramenta é prática, livre e de fácil utilização para análise de confiabilidade em sistemas reparáveis, em particular, sob a condição de reparo imperfeito.

**Palavras chave:** sistemas não reparáveis; reparo imperfeito; pacote *R*; processo de Poisson não-homogêneo; redução aritmética da idade; redução aritmética da intensidade.

## Abstract

Most organizations face the problem of having high costs associated with the maintenance activity. When equipment failures occur leading to unscheduled stoppages for corrective maintenance, the associated costs include those related to the unavailability of equipment, namely, cost of spare parts, labor costs and the consequences of unscheduled outages of the production line. On the other hand, even when the company executes a plan of preventive maintenance, in which the stoppages for repair are scheduled, there are costs incurred by this activity. The goal of any maintenance policy is, therefore, the implementation of practices that lead to a reductions of the expected total cost of this activity. In this sense, an analysis of the historical data of system failures is necessary. It is the necessary to search for probabilistic/statistical models to implement such analysis in order to provide valuable information for decision making such as, the choice of an appropriate maintenance policy. Probabilistic/statistical models for the analysis of repairable systems have been widely discussed in the literature. The most common probabilistic models for repairable systems, the Renewal Process and the Non-homogeneous Poisson Process, deal with the assumptions of perfect repair (which brings the system to a state *as good as new* – *AGAN*) and minimum repair (state *as bad as old* – *ABAO*) after failure, respectively. However, such assumptions are not realistic for a number of practical situations since a repair can bring a given system to an intermediate level between the two above mentioned ones. Several authors studied the behavior of systems subjected to this type of repair, known as imperfect repair and among the models proposed are, for example, the class of *ARA* (*Arithmetic Redcution of Age*) and *ARI* (*Arithmetic Reduction of Intensity*) of Doyen e Gaudoin (2004).. One difficulty for the disseminations of such models, very useful in practice is the absence of a library of computational routines. This work provides students, researchers, engineers or anyone interested in the subject, a detailed user guide to the library (*Imperfect Repair*), developed in R environment. This tool is practical, free and easy to use for reliability analysis of repairable systems, in particular, under the imperfect repair condition.

**Key words:** non-repairable systems; imperfect repair; R package; non-homogeneous Poisson process. arithmetic reductions of age; arithmetic reduction of intensity.

# Sumário

Agradecimentos .....	III
Resumo .....	IV
Abstract.....	V
Sumário.....	VI
Lista de Figuras .....	VIII
Lista de Tabelas .....	X
Lista de Siglas.....	XI
Capítulo 1 – Introdução .....	1
1.1. Literatura.....	1
1.2. Objetivos .....	6
1.3. Estrutura do Texto .....	6
Capítulo 2 – Análise de dados Recorrentes .....	7
2.1. Teoria Básica de Processo de Contagem .....	7
2.2. Modelos Probabilísticos para Sistemas Reparáveis.....	10
2.2.1. Modelo Baseado na Suposição de Reparo Mínimo: Processo de Poisson	12
2.2.2. Modelos Baseados na Suposição de Reparo Perfeito: Processo de Renovação .....	18
2.2.3. Modelos Baseados na Suposição de Reparo Imperfeito.....	21
Capítulo 3 – Determinação de Política Ótima de Manutenção .....	26
3.1. Abordagem de Toledo (2014).....	26
3.2. Estimacão dos Parâmetros: A Função Verossimilhança.....	29
3.2.1. Modelo <b>ARAm</b> .....	29
3.2.2. Modelo <b>ARIm</b> .....	31
Capítulo 4 – A Biblioteca “ImperfectRepair” .....	32
4.1. Dependências .....	32
4.1.1. Package “rootSolve_1.6.5.1”.....	32

4.1.2.	Package “NHPPplp_0.1” .....	33
4.2.	Banco de Dados .....	33
4.2.1.	Análise do Banco de Dados " <i>motors</i> " .....	34
4.2.2.	Análise Descritiva Preliminar: Gráfico de Eventos e Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) .....	36
4.2.3.	Estimação dos Parâmetros por Máxima Verossimilhança .....	38
4.2.4.	Determinação de Periodicidade Ótima Pontual .....	40
4.2.5.	Determinação do Intervalo de Confiança para Periodicidade Ótima pelo método <i>Bootstrap</i> não-paramétrico.....	42
4.2.6.	Análise do Banco de Dados " <i>transformers</i> " .....	44
4.3.	Simulação de Conjunto de Dados .....	46
4.3.1.	Simulação para a classe de modelos " <i>ARA</i> " .....	47
4.3.2.	Simulação para a classe de modelos " <i>ARI</i> " .....	48
4.3.3.	Rotina " <i>PLPIR.sim</i> " .....	50
Capítulo 5 –	Conclusões .....	52
Capítulo 6 -	Referências .....	54

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Representação de um processo de eventos recorrentes em termos de seu processo de contagem. Fonte: Toledo (2014).....	8
Figura 2.2 – Representação de funções intensidades completas para processos decorrentes de (a) reparo mínimo, (b) reparo perfeito e (c) reparo imperfeito. Fonte: Toledo (2014). .....	12
Figura 2.3 – Formas típicas de um gráfico <i>TTT</i> com função intensidade (a) decrescente, (b) crescente, (c) em forma da curva da banheira e (d) constante. Fonte: Toledo (2014). .....	17
Figura 2.4 – Função intensidade para o Processo de Renovação com $\lambda(t) = 3t^2$ e primeiras falhas em $Y_1 = 1,2$ e $Y_2 = 1,9$ . Fonte: Toledo (2014).....	18
Figura 2.5 – Funções densidade de probabilidade para os primeiros cinco tempos de falha de um processo de renovação Gama (3,1) (a) e taxa de ocorrência de falhas para o mesmo processo (b) Rigdon e Basu (2000). Fonte: Toledo (2014). .....	20
Figura 2.6 – Função intensidade para o modelo <i>ARI</i> $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 0,5$ . Fonte: Toledo (2014). .....	23
Figura 2.7 – Função intensidade para o modelo <i>ARA</i> $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 0,5$ . Fonte: Toledo (2014). .....	23
Figura 2.8 – Função intensidade para o modelo <i>ARI</i> $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 1$ . Fonte: Toledo (2014). .....	24
Figura 2.9 – Função intensidade para o modelo <i>ARA</i> $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 1$ . Fonte: Toledo (2014). .....	24
Figura 4.1 – Gráfico de Eventos para o banco de dados " <i>motors</i> ". Fonte: "output" do R. ....	37
Figura 4.2 – Gráfico da Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) para o banco de dados " <i>motors</i> ". Fonte: "output" do R.....	37
Figura 4.3 – Gráfico de Dispersão da Periodicidade Ótima $\tau$ em relação à ineficiência de reparo $\theta$ , sob o banco de dados <i>motors</i> , classe de modelos <i>ARA</i> <sub>1</sub> , truncado por tempo em $T = 40.000 h$ e razão de custo de 1/1.23. Fonte: Próprio Autor. ....	41
Figura 4.4 – Gráfico de Dispersão da Periodicidade Ótima $\tau$ em relação à ineficiência de reparo $\theta$ , sob o banco de dados <i>motors</i> , classe de modelos <i>ARA</i> <sub>1</sub> , truncado por tempo em $T = 40.000 h$ e razão de custo de 1/15. Fonte: Próprio Autor. ....	42

Figura 4.5 – Gráfico para comparação dos limites do Intervalo de Confiança (conf = 0.95) para periodicidade ótima, gerado pelo método bootstrap, conforme parâmetros descritos nas funções acima (ex_4.1, ex_4.3 e ex_4.5), variando apenas a razão de custo. Fonte: Próprio Autor. ....	44
Figura 4.6 – Gráfico de Eventos para o banco de dados " <i>transformers</i> ". Fonte: "output" do R.....	45
Figura 4.7 - Gráfico da Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) para o banco de dados " <i>transformers</i> ". Fonte: "output" do R.....	45

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Conjunto parcial de tempos de falhas referente ao banco de dados “motors”. Fonte: Adaptado de Toledo ( 2014). .....	34
Tabela 4.2 – Conjunto parcial de tempos de falhas reestruturado referente ao banco de dados “motors”. Fonte: Adaptado de Toledo ( 2014). .....	35
Tabela 4.3 – Conjunto de dados em forma de matriz para tratamento adequado na biblioteca. Fonte: “output” do R. ....	35
Tabela 4.4 - Tabela de comparação das estimativas pontuais para periodicidade de manutenção. Fonte: Adaptado de Toledo, et al. (2015). .....	41
Tabela 4.5 – Conjunto de Dados em forma de matriz para tratamento adequado na biblioteca. Fonte: “output” do R. ....	44

## Lista de Siglas

<b>ABAO</b>	<i>As Bad as Old</i> ou " <i>tão ruim quanto velho</i> "
<b>AGAN</b>	<i>As Good as New</i> ou " <i>tão bom quanto novo</i> "
<b>ARI</b>	<i>Arithmetic Reduction Intensity</i> ou <i>Redução Aritmética da Intensidade</i>
<b>ARA</b>	<i>Arithmetic Reduction Age</i> ou <i>Redução Aritmética da Idade</i>
<b>MCF</b>	<i>Mean Cumulative Function</i> ou <i>Função Média Acumulada</i>
<b>MC</b>	<i>Manutenção Corretiva</i> ou <i>CM (Corrective Maintenance)</i>
<b>MP</b>	<i>Manutenção Preventiva</i> ou <i>PM (Preventive Maintenance)</i>
<b>MTTF</b>	<i>Mean Time to Failure</i> ou <i>Tempo Médio até a Falha</i>
<b>NHPP</b>	<i>Nonhomogeneous Poisson Process</i> ou <i>Processo de Poisson Não Homogêneo</i>
<b>PLP</b>	<i>Processo de Lei de Potência</i> ou <i>Power Law Process</i>
<b>RI</b>	<i>Reparo Imperfeito</i> ou <i>IR (Imperfect Repair)</i>
<b>RM</b>	<i>Reparo Mínimo</i> ou <i>MR (Minimal Repair)</i>
<b>ROCOF</b>	<i>Rate of Occurrence of Failures</i> ou <i>Taxa de Ocorrência de Falhas</i>
<b>RP</b>	<i>Reparo Perfeito</i> ou <i>PR (Perfect Repair)</i>

## Capítulo 1 – Introdução

### 1.1. Literatura

A Confiabilidade desempenha um papel importante no desenvolvimento da qualidade de sistemas e, conseqüentemente, no aumento da competitividade da empresa. Para muitos produtos, o consumidor final considera a confiabilidade como uma das características de qualidade mais importante. Como a maioria dos produtos podem ser vistos como *sistemas* utilizaremos este termo ao longo do texto para nos referirmos a um produto específico, equipamento industrial, software, etc. Nas últimas décadas, um grande número de trabalhos na literatura têm tratado da modelagem de dados de falhas visando a caracterização da confiabilidade de sistemas. Uma boa parte trata da modelagem e análise de dados de falhas de sistemas não reparáveis e outra de sistemas reparáveis.

A distinção entre estes dois tipos faz-se necessária aqui, pois ela é fundamental do ponto de vista do tratamento estatístico dos dados e, portanto, para o entendimento do foco do presente trabalho. Um sistema não reparável é aquele que é descartado após a falha. Em outras palavras, para estes sistemas não há um histórico de falhas recorrentes. Para um dado sistema, existe somente a primeira e única falha. Por outro lado um sistema reparável é aquele no qual uma vez ocorrida a falha, este pode ser restaurado a uma condição operacional através de alguma operação de reparo, sem que haja a necessidade de substituição do sistema como um todo. Existe portanto um histórico de ocorrência de falhas e reparos. Um exemplo mais simples é o de um automóvel. Vários reparos são efetuados sem que o sistema como um todo (o automóvel) seja substituído. Um outro exemplo é o de um equipamento industrial em uma linha de produção. Em geral, estes equipamentos são submetidos a reparos ao longo do tempo, visando aumentar sua disponibilidade, sem que necessariamente o equipamento como um todo seja substituído.

Neste trabalho estamos interessados na modelagem e análise de dados de falha de sistemas reparáveis. O tema é de suma importância tanto no estudo da confiabilidade de sistemas específicos, direcionados a um consumidor final (automóveis, eletrodomésticos, etc.) e sujeitos a manutenções (reposições de peças por exemplo), quanto na operação de plantas industriais. No primeiro caso, uma alta frequência de ocorrência de falhas por intervalo de tempo afetarão a imagem do produto no mercado sem mencionar as questões relacionadas à segurança do usuário. No segundo caso, a ocorrência de paradas

imprevistas na linha de produção diminui a disponibilidade dos equipamentos, traduzindo-se em muitos casos em um desequilíbrio financeiro para a empresa.

Neste ponto é importante ressaltar que a ocorrência de falhas ao longo do tempo se enquadra em um escopo mais geral conhecido como o de eventos recorrentes, o qual pode estar associado a qualquer área do conhecimento (exemplo: na área da saúde, ocorrência de infecções hospitalares, aparecimento de tumores durante o período do “*follow-up*” de um paciente, etc.). Entende-se por processos de eventos recorrentes, aqueles que geram eventos repetidamente ao longo do tempo. Por tanto, as falhas de um sistema reparável podem ser modelados como eventos recorrentes, permitindo que a análise estatística desse tipo de evento sirva como base para os modelos probabilísticos para sistemas reparáveis.

Um modelo probabilístico/estatístico para um sistema reparável deve descrever a ocorrência de eventos ao longo do tempo. A função intensidade, ou de forma mais geral a função intensidade completa, desempenha um papel importante na seleção de um modelo para um sistema reparável, um vez que contém informações sobre como um sistema envelhece ao longo do tempo.

Tipicamente, as suposições em relação à forma com que um sistema envelhece, e como é afetado por uma falha e reparo, irão guiar a escolha do modelo para um sistema reparável. De um modo geral, as intervenções feitas em um sistema reparável com o intuito de corrigir ou evitar a ocorrência de falhas podem ser classificados em dois tipos: *manutenção corretiva* e *manutenção preventiva*. A primeira visa retornar o sistema à condição de operação após uma falha, e é adotada no caso em que as falhas não afetam fatalmente o sistema como um todo. Já a segunda consiste em uma parada programada para melhorar a condição do sistema. As ações de reparos, tanto em manutenção preventiva como corretivas, podem ser de 3 tipos:

- **Reparo mínimo** – O reparo feito no sistema faz com que ele retorne a mesma condição que estava imediatamente antes da ocorrência da falha “tão ruim quanto velho”. Normalmente utilizado em sistemas complexos que consistem de muitos tipos de componentes, tais como motores, computadores e aviões.
- **Reparo perfeito** – O reparo faz com que o sistema retorne a condição de novo “tão bom quanto novo”. Se todos os reparos são perfeitos, então os tempos entre as falhas são independentes e identicamente distribuídos e os dados podem ser modelados por um Processo de Renovação.

- **Reparo imperfeito** – O reparo traz o estado de um sistema que falhou a um estado compreendido entre o de um sistema completamente novo e aquele que vigorava no instante imediatamente à falha. É portanto, um nível intermediário entre os reparos mínimo e perfeito.

Na literatura relacionada à manutenção estratégica, a suposição de reparo perfeito pode ser razoável para sistemas compostos de uma unidade estruturalmente simples. Por outro lado, a suposição de reparo mínimo parece plausível para sistemas consistindo de muitos componentes, cada um tendo seu próprio modo de falha, pois o reparo do componente que falhou não influenciará muito a taxa de falhas do sistema, Kijima (1989). Porém, na prática, as suposições de reparo mínimo ou reparo perfeito não são razoáveis para vários sistemas. Segundo Kijima, Morimura e Suzuki (1988), para sistemas compostos de apenas alguns componentes vulneráveis, é mais adequado imaginar que o reparo traz o estado de um sistema que falhou a um nível intermediário, compreendido entre o completamente novo e o anterior à falha. Modelos probabilísticos para descrever este tipo de característica do efeito do reparo podem ser encontrados na literatura. Dentre eles, destaca-se as classes de modelos *ARI – Arithmetic Reduction of Intensity* e *ARA – Arithmetic Reduction of Age* propostos por Doyen e Gaudoin (2004). Na primeira classe de modelos, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na intensidade de falhas *ARI*, e na segunda classe, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na idade virtual do sistema *ARA*. Os autores apresentam ainda algumas comparações entre essas duas classes, bem como um estudo estatístico numérico sobre a qualidade dos estimadores dos parâmetros desses modelos. Pan e Rigdon (2009) utilizaram os modelos *ARA* e *ARI* propostos por Doyen e Gaudoin (2004), e assumindo um Processo de Lei de Potência para a função intensidade, forneceram procedimentos de inferência Bayesiana para estimação dos parâmetros da função intensidade de falhas e para o parâmetro que representa o grau de efetividade do reparo.

É importante ressaltar que qualquer tipo de ação de manutenção (corretiva ou preventiva) incorre em custos tanto diretamente ligados à atividade da manutenção (peças a serem substituídas, custo da mão de obra, etc) quanto aqueles indiretos, devido à parada do equipamento em uma linha de produção por exemplo, mesmo que esta parada tenha sido programada. Assim, aumentar de maneira não criteriosa a frequência de manutenções preventivas por exemplo, visando reduzir o número esperado de falhas, não é necessariamente uma boa estratégia.

Portanto a implementação de uma política ótima de manutenção, ótima no sentido de redução do custo total esperado da manutenção (corretiva e preventiva) é de suma importância para a saúde financeira da empresa. Esse problema tem sido abordado por vários autores.

Barlow e Hunter (1960) introduziram a noção de se estabelecer uma política de substituição periódica com intervenções de reparo mínimo em caso de ocorrência de falhas. Eles mostraram como calcular o período ótimo entre substituições ou intervenções considerando um intervalo de tempo infinito. Além disso, compararam os resultados obtidos sob essa política com aqueles para a política ótima de substituição por idade do sistema, fornecendo ao tomador de decisão a informação necessária para escolher entre elas.

A primeira política de manutenção preventiva ótima que maximiza a disponibilidade apresentada na literatura foi derivada por Nakagawa (1986). Políticas ótimas de manutenção preventiva para sistemas mais gerais foram discutidas por Mine, Kawai e Fukushima (1981), Nakagawa (1986), Yeh (1996), Stadge e Zuckerman (1996), Kawai, Koyanagi e Ohnishi (2002) e Gertsbakh (2005).

Gilardoni e Colosimo (2007), apresentaram um estudo assumindo um sistema que opera sob uma estratégia de manutenção que recebe manutenção preventiva em tempos pré-determinados e manutenções corretivas com reparo mínimo sempre que uma falha ocorre entre as manutenções preventivas. Considerando-se a função intensidade do processo, o objetivo foi encontrar o intervalo de tempo ótimo para manutenção preventiva que minimizasse o custo total da manutenção (isto é, levando em consideração o custo das manutenções preventivas e corretivas). Já Toledo (2014), apresentou um estudo assumindo, além da manutenção preventiva, manutenções corretivas com reparo imperfeito.

Um fato que contribui para a dificuldade de aplicação destes modelos em problemas práticos e, conseqüentemente, impede sua divulgação entre os profissionais da área de Engenharia de Manutenção, é a ausência de *softwares* específicos para o tratamento de dados com a suposição de reparo imperfeito.

Alguns *softwares* comerciais, como o *Minitab*® *Statistical Software* e *ReliasSoft's Weibull ++ software tool*, tratam de algumas questões relacionadas aos modelos mais simples e sob a suposição de reparo mínimo. Entretanto, para estes mesmos casos, os

*softwares* comerciais não possuem um cálculo, por exemplo, da estimativa da periodicidade ótima de manutenção preventiva tal qual tratada em Gilardoni e Colosimo (2007). Conseqüentemente, a estimativa do mesmo parâmetro no caso de reparos imperfeitos, segundo o modelo das classes *ARA* e *ARI*, como exemplo o apresentado por Toledo (2014), sequer são tratados.

Portanto, é de suma importância o desenvolvimento e disponibilização de rotinas computacionais mais completas e bem documentadas, para a análise de dados de sistemas reparáveis.

Neste âmbito o *R* é um *software livre* que fornece uma ampla variedade de ferramentas para estudos estatísticos e técnicas gráficas. O ambiente *R* é uma linguagem de programação simples e eficiente, que tem como um dos pontos fortes a facilidade com que parcelas de qualidade para publicação bem desenhadas possam ser produzidos, incluindo símbolos e formas matemáticas quando necessário.

A escolha do *R* como ferramenta para implementação de rotinas, bem como para as análises dos modelos adotados neste trabalho, justifica-se devido ao fato de:

- É gratuito, de código aberto, e disponível em todas as principais plataformas.
- Possui um enorme conjunto de pacotes para modelagem estatística, visualização, importação e manutenção de dados.
- Pesquisadores em estatística muitas vezes publicam um pacote em *R* para acompanhar seus artigos, significando acesso imediato às mais recentes técnicas de estatística e implementações.
- Suporte ao usuário com documentações simples e padronizadas para utilização das ferramentas.

Não obstante, como descrito por Wickham (2015), o *R* possui desafios pois grande parte de seus usuários não são programadores, significando que:

- Grande parte do código *R* é escrito com rapidez e muitas vezes não são revisados para resolver deficiências que surgem posteriormente.
- Em comparação com outras linguagens de programação, o *R* tende a ser mais centrada em resultados, ao invés de processos.
- *R* não é uma linguagem de programação particularmente rápida, e o código em *R* mal escrito pode ser terrivelmente lento.

## 1.2. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver e disponibilizar uma biblioteca em *R*, que permita a modelagem e análise do histórico de falhas de sistemas reparáveis, sob a suposição de reparo imperfeito. Os modelos implementados são da classe de modelos *ARA* e *ARI*. Assim sendo, a biblioteca fornece 3 rotinas que são base deste trabalho:

- **PLPIR.ml** – Esta ferramenta estima os parâmetros da função *PLP* (*shape e scale*) e o parâmetro de ineficiência de reparo  $\theta$  pelo método de máxima verossimilhança para um conjunto de falhas em um ou mais sistemas..
- **PLPIR.sim** – Esta ferramenta simula tempos de falhas truncados por tempo ou por falha, para um determinado número de sistemas.
- **tau.IR** – Ferramenta esta que estima a periodicidade ótima de manutenção preventiva e um intervalo de confiança pelo método "*bootstrap*" não-paramétrico.

## 1.3. Estrutura do Texto

No Capítulo 2 é apresentada a abordagem para a análise de dados recorrentes, sendo discutidos os principais conceitos sobre a teoria básica de processos de contagem. Posteriormente são descritos os principais modelos para sistemas reparáveis, sendo eles o Processo de Poisson (Seção 2.2.1), Processo de Renovação (Seção 2.2.2) e modelos para reparo imperfeito (Seção 2.2.3), em destaque a classe de modelos propostos por Doyen e Gaudoin (2004). O Capítulo 3 apresenta o modelo para determinação de periodicidade ótima de manutenção: O modelo de Toledo (2014) na (Seção 3.1) e as funções de log-verossimilhança dos modelos *ARA* e *ARI*. No Capítulo 4 são descritos as funções da biblioteca desenvolvida neste trabalho, ou seja, uma manual de utilização da biblioteca. E por último, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## Capítulo 2 – Análise de dados Recorrentes

Modelos probabilísticos para analisar e otimizar o desempenho de sistemas reparáveis têm sido amplamente discutidos na literatura. Tais modelos devem ser capazes de descrever a ocorrência de eventos (falhas) ao longo do tempo. Uma vez que um sistema falha, diferentes estratégias de reparo têm diferentes influências na confiabilidade do sistema.

As falhas de um sistema reparável podem ser modeladas como eventos recorrentes, permitindo que a análise estatística desse tipo de evento sirva como base dos modelos probabilísticos para sistemas reparáveis. Na Seção 2.1 são apresentadas algumas notações e conceitos de descrição de modelos para eventos recorrentes, que serão extremamente úteis nos modelos probabilísticos apresentados na Seção 2.2.

### 2.1. Teoria Básica de Processo de Contagem

Um processo de contagem é um modelo estocástico para um fenômeno físico caracterizado por eventos distribuídos aleatoriamente ao longo do tempo. Nesses estudos, essas “ocorrências ao longo do tempo” são os tempos de falha de um sistema reparável, e são descritas com pontos no eixo do tempo. A escala usada para caracterizar as distribuições dos eventos é em unidades do tempo, porém outras escalas podem ser usadas. Por exemplo, número de defeitos por comprimento do tecido, número de quilômetros rodados por um automóvel ou número de ciclos de operação executados por uma máquina.

Para um único processo de eventos recorrentes começando em  $t = 0$ , sejam  $0 < Y_1 < Y_2 < \dots$  os tempos de falha medidos em *tempo global*, onde  $Y_k$  é o tempo até a  $k$ -ésima falha. O *processo de contagem*  $\{N(t), 0 \leq t\}$  associado registra o número acumulado de falhas. Especificamente,  $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I(Y_k \leq t)$  é o número de falhas no intervalo  $(0, t]$ , e  $N(a, b] = N(b) - N(a)$ , o número de falhas no intervalo  $(a, b]$ .  $N$  é chamado *variável aleatória de contagem*.

Os tempos entre falhas, ou os *gaps*, são denotados por  $X_1, X_2, \dots$ , onde  $X_i = Y_i - Y_{i-1}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) com  $Y_0 = 0$ . Desse modo, para se especificar o modelo do processo de contagem, pode-se fornecer a função densidade de probabilidade (*fdp*) conjunta de um dos três seguintes conjuntos de variáveis aleatórias:

- As variáveis de contagem  $N(v_1), N(v_2), \dots, N(v_n)$  para todo  $n$  e qualquer  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
- Os tempos de falha  $0 < Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$  para todo  $n$ .
- Os tempos entre falhas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  para todo  $n$ .

A Figura 2.1 representa a realização de um processo de ocorrência de falhas em termos de seu processo de contagem. Observa-se que o processo de contagem é contínuo à direita.

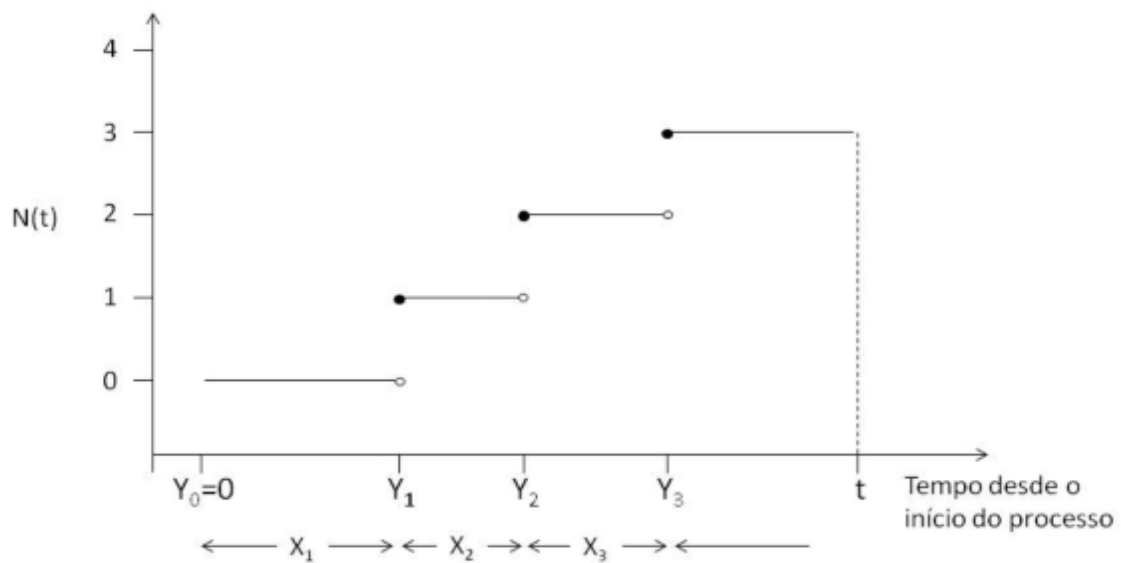


Figura 2.1. – Representação de um processo de eventos recorrentes em termos de seu processo de contagem. Fonte: Toledo (2014).

A função média de um processo pontual é definida como sendo a esperança:

$$\Lambda(t) = E[N(t)] \quad (2.1)$$

Assim,  $\Lambda(t)$  é o número esperado de falhas até o tempo  $t$ , sendo portanto uma função não-decrescente. Quando  $\Lambda$  é diferenciável, a taxa de ocorrência de falhas (*Rate of Occurrence of Failures – ROCOF*) pode ser definida como:

$$\mu(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t) \quad (2.2)$$

A *ROCOF* pode ser interpretada como a taxa instantânea de mudança no número esperado de falhas.

Modelos para eventos recorrentes podem ser especificados considerando-se a distribuição de probabilidade para o número de eventos em intervalos pequenos  $[t, t + \Delta t]$ , dado o

histórico da ocorrência de eventos antes de  $t$ . Seja  $\mathfrak{S}_{t-} = \{N(s): 0 \leq s < t\}$  o *histórico* do processo no tempo  $t$  (exclusivo), onde  $(t-)$  representa o instante de tempo imediatamente antes de  $t$ . Para eventos ocorrendo em uma escala de tempo contínua, supõe-se que dois eventos não podem ocorrer simultaneamente. Assim, a *função intensidade completa* fornece a probabilidade instantânea de um evento ocorrer em  $t$ , condicional ao histórico do processo, e define o processo matematicamente. A intensidade completa é definida formalmente pela equação

$$p(t|\mathfrak{S}_{t-}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) = 1|\mathfrak{S}_{t-}]}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

Um processo pontual possui a propriedade de incrementos independentes se para todo  $n$  e para todo  $r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \dots \leq r_n < s_n$ , as variáveis aleatórias  $N(r_1, s_1], N(r_2, s_2], \dots, N(r_n, s_n]$  são independentes. Em outras palavras:

$$P(N(r_1, s_1] = k_1, \dots, N(r_n, s_n] = k_n) = \prod_{i=1}^n P(N(r_i, s_i] = k_i) \quad (2.4)$$

ou seja, a história do processo  $\mathfrak{S}_{t-}$  não afeta a probabilidade instantânea de falhas no tempo  $t$ , e portanto na falta de covariáveis o único fator determinante da intensidade é  $t$ . Desse modo, para um processo pontual que tem a propriedade de incrementos independentes, a função intensidade é dada por:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Intuitivamente, a função intensidade é então a probabilidade de falha em um intervalo pequeno dividida pelo tamanho do intervalo. Assim, haverá muitas falhas em intervalos nos quais  $\lambda(t)$  é grande, e poucas falhas em intervalos nos quais  $\lambda(t)$  é pequeno.

Em um sistema para o qual assume-se que a probabilidade de falhas simultâneas é zero,  $\lambda(t) = \mu(t)$ , ou seja, a função intensidade e a taxa de ocorrência de falhas (*ROCOF*) são a mesma função, Rigdon e Basu (2000). Especificamente  $\lambda(t)\Delta t \approx E(N(t, t + \Delta t])$ , e se  $\Lambda(t)$  denota o número acumulado esperado de eventos em  $t$ , então:

$$\Lambda(t) = E(N(t)) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (2.6)$$

Assim,  $\lambda(t) = \mu(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t)$  e pode ser interpretada como a taxa instantânea de mudança no número esperado de falhas.

## 2.2. Modelos Probabilísticos para Sistemas Reparáveis

Um modelo probabilístico ou estatístico para um sistema reparável deve descrever a ocorrência de eventos ao longo do tempo. A função intensidade, ou mais geralmente a função intensidade completa, dadas respectivamente pelas Equações (2.5) e (2.3), desempenham um papel importante na seleção de um modelo para um sistema reparável, pois sua função contém a informação sobre a probabilidade de falha ou em torno de qualquer tempo  $t$ . Além disso, essa função contém informações sobre como um sistema envelhece ao longo do tempo.

Tipicamente, as suposições em relação à forma com que um sistema envelhece, e como é afetado por uma falha e reparo irão guiar a escolha do modelo para um sistema reparável. De um modo geral, as intervenções feitas em um sistema reparável com o intuito de corrigir ou evitar a ocorrência de falhas podem ser classificadas em dois tipos: *manutenção corretiva* e *manutenção preventiva*. A primeira visa retornar o sistema à condição de operação após uma falha, e é adotada no caso em que as falhas não afetam fatalmente o sistema como um todo. Já a segunda consiste em uma parada programada para melhorar a condição do sistema. Neste trabalho assume-se que as ações de manutenção preventiva são perfeitas, ou seja, retornam o sistema à condição de “tão bom quanto novo”. Já as ações de manutenção corretiva serão denominadas reparos, e podem ser de três tipos:

- **Reparo mínimo:** O reparo feito no sistema faz com que ele retorne a mesma condição que estava imediatamente antes da ocorrência da falha (“tão ruim quanto velho”). Normalmente utilizado em sistemas complexos que consistem de muito tipos de componentes, tais como motores, computadores e aviões.

Nakagawa (2011) fornece a seguinte definição para este tipo de reparo:

*Definição:* Seja  $F(t) = P(X_1 \leq t)$  para  $t > 0$ . Ou seja,  $F$  representa a função distribuição acumulada para o tempo de falha de um novo sistema. Uma unidade é submetida a reparo mínimo nas falhas se e somente se:

$$P(X_n \leq x | X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} = t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.7)$$

para  $x > 0, t \geq 0$  tal que  $F(t) < 1$ .

A suposição de reparo mínimo leva ao Processo de Poisson Não-Homogêneo, descrito na Seção 2.2.1.

- **Reparo perfeito:** O reparo faz com que o sistema retorne a condição de novo (“tão bom quanto novo”). Se todos os reparos são perfeitos, então os tempos entre as falhas são independentes e identicamente distribuídos, gerando um Processo de Renovação, discutido na Seção 2.2.2. Um caso particular do Processo de Renovação é o Processo de Poisson Homogêneo, em que os tempos entre as falhas (*gaps*), ou  $X_i$ 's são modelados de acordo com uma distribuição exponencial, conforme descrito na Seção 2.2.2.
- **Reparo imperfeito:** O reparo traz o estado de um sistema que falhou a um estado compreendido entre o de um sistema completamente novo e aquele que vigorava no instante imediatamente anterior à falha. É portanto, um nível intermediário entre os reparos mínimo e perfeito. Por exemplo, um modelo clássico sugerido por Brown e Proschan (1983) assume que a cada falha ocorre um reparo perfeito com probabilidade  $p$  e um reparo mínimo com probabilidade  $1 - p$ , onde  $0 \leq p \leq 1$ . A Seção 2.2.3 descreve alguns modelos da literatura para a análise desse tipo de situação.

A Figura 2.2 apresenta esboços das funções intensidade, Equação (2.5), para sistemas submetidos a reparos mínimo, perfeito e imperfeito, respectivamente. É interessante observar que, a cada vez que ocorre uma falha corrigida por reparo mínimo, o valor da função intensidade do processo se mantém o mesmo valor daquele assumido no instante imediatamente anterior à falha. Já sob a suposição de reparo perfeito, a função intensidade retorna ao valor de zero após cada ação de reparo, caracterizando um sistema “tão bom quanto novo”. Por outro lado, quando reparos imperfeitos são realizados no sistema reparável, após cada manutenção corretiva a função intensidade retorna a um valor que está entre zero e o valor assumido no momento imediatamente anterior à falha, o que caracteriza o grau do reparo. Neste último caso, sob o modelo para reparo imperfeito de Brown e Proschan (1983), quando  $p = 0$ , a função intensidade assume a estrutura da Figura 2.2 (a), enquanto para  $p = 1$ , tem-se uma função como a representada na Figura 2.2 (b).

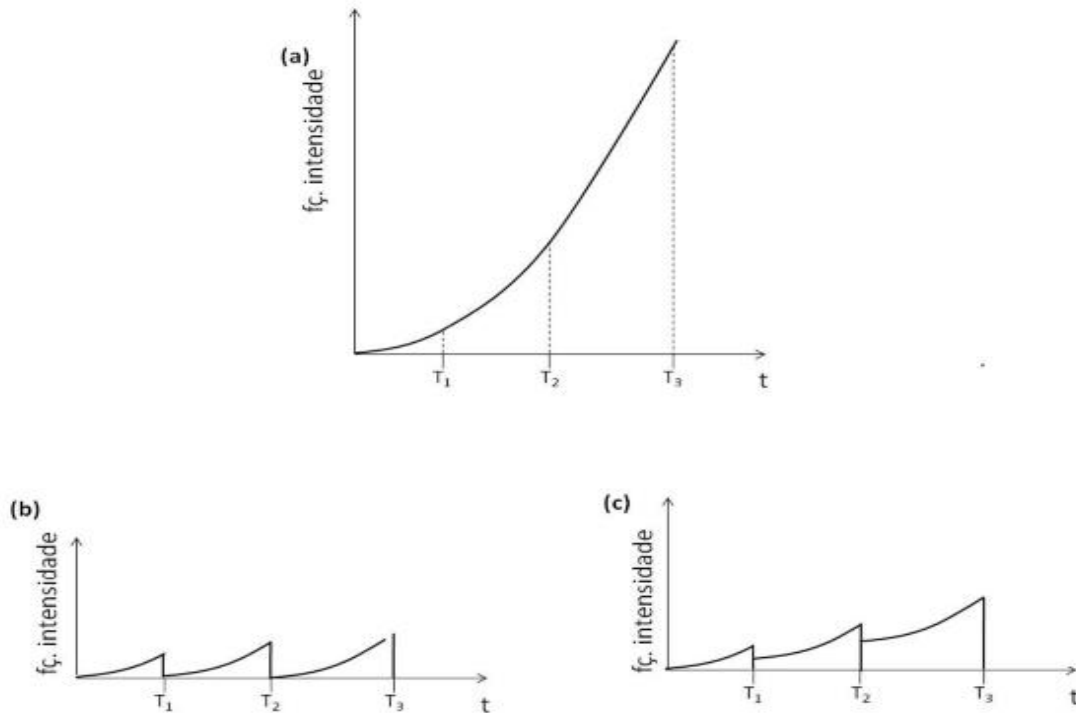


Figura 2.2. – Representação de funções intensidades completas para processos decorrentes de (a) reparo mínimo, (b) reparo perfeito e (c) reparo imperfeito. Fonte: Toledo (2014).

### 2.2.1. Modelo Baseado na Suposição de Reparo Mínimo: Processo de Poisson

O processo de Poisson é a análise canônica para a metodologia de sistemas reparáveis voltada para a contagem de eventos. Esta Seção apresentará algumas das propriedades importantes desse processo, o qual descreve situações em que os eventos ocorrem aleatoriamente de tal modo que o número de eventos em intervalos de tempo não sobrepostos são estatisticamente independentes. Segundo Cook e Lawless (2007) tais processos tendem a ser apropriados para modelar eventos incidentes, no sentido que sua ocorrência ou a intervenção resultante de sua ocorrência não altera materialmente o processo em si.

Um processo de contagem  $N(t)$  é um processo de Poisson se:

- i.  $N(0) = 0$ .
- ii. Para qualquer  $a < b \leq c < d$  as v.a.'s  $N(a, b]$  e  $N(c, d]$  são independentes (propriedade dos incrementos independentes).
- iii. Existe uma função  $\lambda$  tal que

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] \geq 1)}{\Delta t} \quad (2.8)$$

iv. A probabilidade de falhas simultâneas é zero.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] \geq 2)}{\Delta t} = 0 \quad (2.9)$$

As propriedades de i a iv anteriores implicam que:

$$P(N(t) = n) = \frac{1}{n!} \left( \int_0^t \lambda(x) dx \right)^n \exp \left( - \int_0^t \lambda(x) dx \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Logo, para um processo de Poisson, a variável aleatória  $N(t)$  segue um distribuição Poisson com média  $\int_0^t \lambda(x) dx$ , enquanto a variável aleatória  $N(a, b]$  segue um distribuição Poisson com média  $\int_a^b \lambda(x) dx$ . Desse modo, pode-se redefinir que um processo de contagem  $N(t)$  é um processo de Poisson se e somente se satisfaz:

- i.  $N(0) = 0$ ,
- ii. O processo possui a propriedade de incrementos independentes, e
- iii. Para qualquer  $a < b$ ,  $N(a, b] \sim \text{Poisson} \left( \int_a^b \lambda(x) dx \right)$ .

Ou seja, as propriedade iii e iv da definição anterior podem ser substituídas pela propriedade iii acima. A propriedade de incrementos independentes do processo de Poisson implica que, para esse processo, a história de ocorrência de eventos até o tempo  $t$  não afeta a probabilidade instantânea de eventos no tempo  $t$ . Logo, um processo de Poisson pode ser considerado um processo Markoviano, para o qual se podem fazer previsões para o futuro baseando-se apenas em seu estado atual; ou seja, condicional ao estado atual do sistema, seu passado e futuro são independentes.

A função intensidade para um processo de Poisson pode então ser definida pela Equação (2.5) (que é a função intensidade completa não condicionada na história  $\mathfrak{F}_{t-}$  do processo). Segundo Lindqvist (1997), para um processo de Poisson Não-Homogêneo, a função intensidade  $\lambda(t)$  é igual, para todo  $t$ , à taxa de falhas do tempo até a primeira falha,  $r(t)$ , dada por:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad (2.11)$$

onde  $F(t)$  e  $f(t)$  denotam as funções distribuição e densidade do tempo até a primeira falha, respectivamente. Logo, a taxa de falhas (ou função intensidade) permanece

inalterada após o reparo mínimo; isto é, após uma falha, a taxa de falhas é exatamente a mesma encontrada caso nenhuma falha tivesse ocorrido. Esse é o motivo de chamar o tipo de reparo de “mínimo”, pois o sistema retorna apenas ao estado em que se encontrava no momento imediatamente anterior à falha.

No caso especial em que  $\lambda(t) = \lambda$  é uma constante, tem-se um Processo de Poisson Homogêneo (*PPH*); caso contrário é um *PPNH*. Devido à forma de sua função intensidade, o *PPH* não é adequado para modelar sistemas reparáveis que estão melhorando ou deteriorando. Um *PPH* com função intensidade  $\lambda$  é um caso particular dos processos de Renovação, em que os tempos entre as falhas, ou *gaps*  $X_i$ 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição exponencial com média  $1/\lambda$ . Decorre então que o tempo global até a  $n$  – ésima falha,  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  segue uma distribuição Gama com parâmetros de forma e escala dados por  $n$  e  $1/\lambda$ , respectivamente.

Por outro lado, o *PPNH* é um processo de Poisson cuja função intensidade não é constante. Uma forma funcional comum para a função intensidade é:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}, \quad \eta > 0, \quad \beta > 0, \quad t > 0 \quad (2.12)$$

Como essa função intensidade é proporcional ao tempo global  $t$  elevado a uma potência, esse caso especial do *PPNH* é usualmente chamado de Processo Lei de Potência (*PLP*). O parâmetro  $\beta$  representa o modo como o sistema deteriora ou melhora ao longo do tempo. Se  $\beta > 1$ , então a função intensidade  $\lambda(t)$  é crescente, e as falhas tendem a ocorrer mais frequentemente. Se  $\beta < 1$ , então  $\lambda(t)$  é decrescente, e o sistema está melhorando. Finalmente, se  $\beta = 1$ , então o *PLP* se reduz a um *PPH* com função intensidade  $1/\eta$ . O parâmetro  $\eta$  é um parâmetro de escala. Crow (1975) e Crow (1982) discutiu aplicações desse modelo e forneceu procedimentos de inferência. Lee e Lee (1978), Bain e Engelhardt (1980), Kvaloy e Lindqvist (1998), Rigdon e Basu (2000) e Gaudoin, Yang, e Xie (2006) estudaram métodos de inferência para a estimação pontual e intervalar e propuseram testes para os parâmetros  $\eta$  e  $\beta$  do *PLP*.

Ao se observar dados de falhas em um sistema reparável, pode-se determinar o final do estudo de duas maneiras: após um número específico  $n$  de falhas ter ocorrido (truncamento por falha) ou após um tempo pré-determinado  $T$  (truncamento por tempo). Os procedimentos de inferência dependem do esquema amostral considerado. Suponha

que um estudo tenha sido realizado com  $k$  sistemas idênticos, e que os padrões de falhas sejam modelados pelo mesmo PLP, com parâmetros  $\eta$  e  $\beta$ . Seja  $t_{ij}$  o  $j$  – éximo tempo local (*gap*) do  $i$  – éximo sistema, ou seja, o tempo decorrido entre a  $j - 1$  e a  $j$  – éxima falha. Assume-se que o sistema  $i$  seja observado até o tempo  $Y_i$ , onde  $Y_i = t_{i,n_i}$ , se o sistema  $i$  foi truncado por falha e  $Y_i > t_{i,n_i}$  se o sistema  $i$  foi truncado por tempo. Seja  $n_i$  o número de falhas observadas no sistema  $i$ , e  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Como as falhas em sistemas separados são independentes, Rigdon e Basu (2000) determinaram a função de verossimilhança para esse processo como sendo:

$$L(\eta, \beta) = \beta \sum_{i=1}^k n_i \eta^{-\beta} \sum_{i=1}^k n_i \left( \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \sum_{i=1}^k \left( \frac{Y_i}{\eta} \right)^{\beta} \right] \quad (2.13)$$

Diferenciando a log-verossimilhança  $\log(L(\eta, \beta))$  com respeito a  $\eta$  e com respeito a  $\beta$  resulta nas seguintes estimativas de máxima verossimilhança para esses parâmetros:

$$\hat{\eta} = \left( \frac{\sum_{i=1}^k Y_i^{\beta}}{N} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.14)$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{N}{\eta^{-\beta} \sum_{i=1}^k Y_i^{\beta} \log(Y_i) - \sum_{j=1}^{n_i} \log(t_{ij})} \quad (2.15)$$

A estimativa da função média, ou número esperado acumulado de falhas no tempo  $t$  é  $\hat{\Lambda}(t) = \left( \frac{t}{\hat{\eta}} \right)$  e a estimativa da função intensidade,  $\hat{\lambda}(t)$  pode ser obtida substituindo-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\eta$  e  $\beta$  em  $\lambda(t)$  dada pela Equação (2.12).

Pode-se mostrar que  $2n\beta/\hat{\beta}$  tem distribuição qui-quadrado com  $2M$  graus de liberdade, onde:

$$M = \sum_{i=1}^k m_i \quad (2.16)$$

sendo  $m_i = \begin{cases} n_i - 1, & \text{se os dados são truncados por falha} \\ n_i, & \text{se os dados são truncados por tempo} \end{cases}$

e

$$\bar{\beta} = \frac{M}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(Y_i/t_{ij})} \quad (2.17)$$

em que  $\bar{\beta}$  é a estimativa de máxima verossimilhança condicional para  $\beta$ .

Rigdon e Basu (2000) usaram essa importante propriedade para construir um intervalo de  $100 \times (1 - \alpha)\%$  confiança para o parâmetro  $\beta$  do PLP, dado por:

$$\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(2M)\bar{\beta}}{2M} < \beta < \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2M)\bar{\beta}}{2M} \quad (2.18)$$

Outro aspecto importante na análise de dados de falhas para sistemas reparáveis é testar uma possível tendência nos tempos entre as falhas. Desse modo, é possível detectar possíveis mudanças no padrão de falhas. Por exemplo, uma melhoria na confiabilidade corresponde a tempos entre falhas se tornando maiores ao longo do tempo, enquanto efeitos de envelhecimento levam a tempo menores entre as falhas. Diz-se que há uma tendência no padrão de falhas se os tempos entre chegadas tendem a alterar de modo sistemático, o que significa que os *gaps* não são identicamente distribuídos. A questão a ser respondida é se há ou não uma alteração significativa.

Na prática, decisões sobre o padrão de falhas devem ser baseadas nos dados de falhas observados e métodos estatísticos. Para o modelo PPNH, métodos gráficos e testes de tendência estão disponíveis. Kvaloy e Lindqvist (1998) discutiram a utilização do gráfico *Total Time on Test*, também conhecido como *TTT*, revisaram quatro testes de tendência já conhecidos e derivaram um teste baseado na estatística de Anderson-Darling.

O gráfico *TTT* fornece uma análise visual para se verificar a existência de tendência em um sistema reparável:

- Pontos formando uma curva com concavidade para cima, Figura 2.3 (a), ou para baixo, Figura 2.3 (b), indicam um processo com função intensidade decrescente (processo em melhoria) ou crescente (processo em deterioração), respectivamente. Nesses casos, o *PLP* pode ser um modelo adequado para os dados.
- Pontos distribuídos em forma de *S* ao longo da diagonal, Figura 2.3 (c), indicam um processo com função intensidade na forma da curva da banheira. O *PLP* não é um modelo adequado nesses casos.

- Se os pontos caem próximos da diagonal, conforme mostrado na Figura 2.3 (d), há indícios de não haver tendência no processo, ou seja, um processo de Renovação (talvez um *PPH*) pode ser adequado.

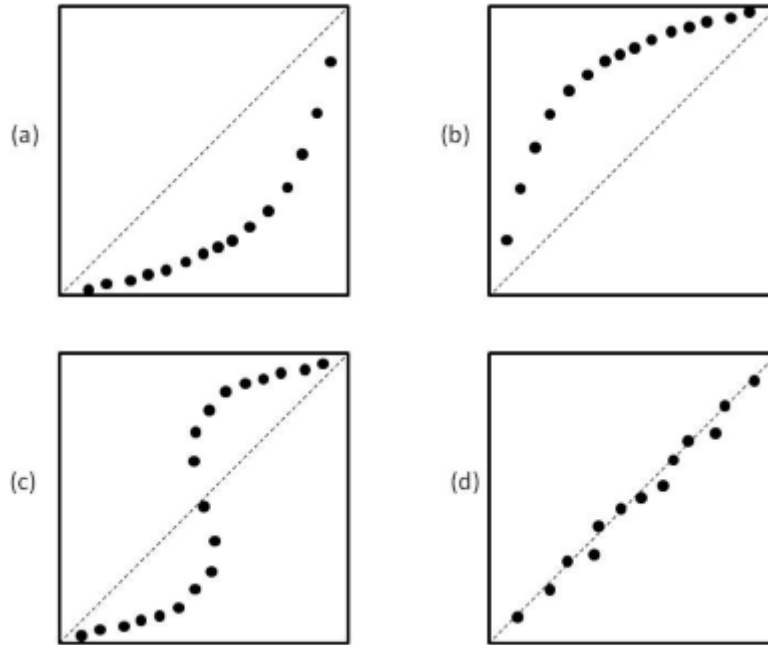


Figura 2.3. – Formas típicas de um gráfico TTT com função intensidade (a) decrescente, (b) crescente, (c) em forma da curva da banheira e (d) constante. Fonte: Toledo (2014).

Conforme apresentado por Kvaloy e Lindqvist (1998), o *TTT* é construído da seguinte forma: assumamos que  $m$  *NHPPs* independentes com função intensidade comum  $\lambda(t)$  sejam observados, e assumamos que todos os intervalos de observações  $(a_i, b_i]$  estejam contidos em algum intervalo de tempo  $(0, S]$ . Se  $n_i$  falhas ocorrerem em  $(a_i, b_i]$ , se  $N = \sum_{i=1}^m n_i$ . Seja  $S_k$  o  $k$  –ésimo tempo de chegada do processo sobreposto, ou seja,  $S_k$  é um tempo de chegada em um dos processos e  $0 < S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_N \leq S$ . Seja  $p(u)$  o número de processos sob observação no tempo  $u$  e  $v(t) = \int_0^t p(u)du$  o tempo total sob teste do tempo 0 ao tempo  $t$ . O gráfico *TTT* (escalado) para os *PPNHs* é um gráfico da estatística de tempo total sob teste escalada:

$$\frac{v(S_k)}{v(S)} = \frac{\int_0^{S_k} p(u)du}{\int_0^S p(u)du} \quad (2.19)$$

versus o número de falhas escalado  $k/N, k = 1, \dots, N$ . Os pontos  $(k/N, v(S_k)/v(S))$  no gráfico *TTT* são frequentemente conectados com linhas retas.

Kvaloy e Lindqvist (1998), estudaram várias propriedades de principalmente três testes de tendência. Entre eles estão o Teste de Laplace e o Teste Military 3' Hand-book, que são os mais populares. Esses testes são construídos para a hipótese alternativa de tendência monótona (ou seja, tendência estritamente crescente ou decrescente). Com o objetivo de ser capaz de detectar outros tipos de tendência, tais como a tendência da curva da banheira, esses autores sugeriram um novo teste baseado no gráfico *TTT*, usando a estatística de Anderson-Darling.

### 2.2.2. Modelos Baseados na Suposição de Reparo Perfeito: Processo de Renovação

Sob a suposição de reparos perfeitos, ou seja, de que o reparo retorna o sistema à condição de “tão bom quanto novo”, os tempos entre as falhas (*gaps*) são independentes e identicamente distribuídos. Nesse caso, o processo de falhas é chamado Processo de Renovação, e de acordo com Doyen e Gaudoin (2004), sua função intensidade é da forma:

$$p(t|\mathfrak{S}_{t-}) = \lambda(t - Y_{N(t)}) \quad (2.20)$$

onde  $\lambda(t)$  denota a função intensidade do processo antes da primeira falha e  $Y_{N(t)}$  denota o tempo global decorrido até a ocorrência da  $N(t)$  – ésima falha.

Por exemplo, suponhamos um sistema reparável para o qual a função intensidade antes da primeira falha é dada por  $\lambda(t) = 3t^2$ . Considerando que o sistema entrou em funcionamento no tempo  $Y_0 = 0$  e as duas primeiras falhas ocorreram nos tempos  $Y_1 = 1,2$  e  $Y_2 = 1,9$ , a função intensidade para esse sistema, mostrada na Figura 2.4 é dada por:

$$\lambda_t = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1,2 \\ \lambda(t - 1,2) = 3(t - 1,2)^2 & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ \lambda(t - 1,9) = 3(t - 1,9)^2 & \text{se } 1,9 \leq t < Y_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

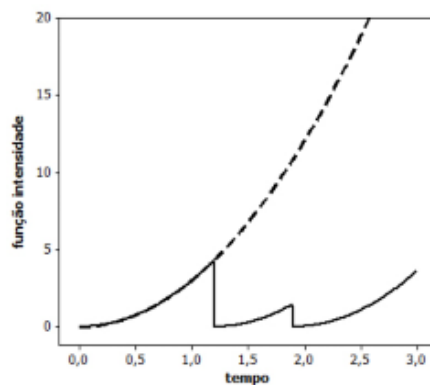


Figura 2.4. – Função intensidade para o Processo de Renovação com  $\lambda(t) = 3t^2$  e primeiras falhas em  $Y_1 = 1,2$  e  $Y_2 = 1,9$ . Fonte: Toledo (2014).

A distribuição das contagens  $N(s, t)$  em processos de renovação é em geral matematicamente intratável. Uma exceção é para o caso em que os  $X_i$ 's são variáveis aleatórias com distribuição exponencial (PPH). Outra exceção é para a distribuição de  $N(t)$ , cujas propriedades probabilísticas são de interesse na teoria de renovação e que pode ser obtida por meio da relação, conforme apresentado por Cook e Lawless (2007):

$$P(N(t) \geq n) = P(Y_n \leq t) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) \quad (2.21)$$

Desse modo, de acordo com Nakagawa (2011), para encontrar a distribuição de  $N(t)$ , é necessário encontrar a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes ( $Y_n$ ).

Denotando:

$$F^{(0)}(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

e

$$F^{(n)}(t) \equiv \int_0^t F^{(n-1)}(t-u) dF(u) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

tem-se que  $F^{(n)}$  é a função distribuição acumulada da convolução de ordem  $n$  ( $n$  – fold) de Stieltjes da densidade  $f$ . Desse modo,

$$P(N(t) \geq n) = F^{(n)}(t) \quad (2.22)$$

Evidentemente,

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(Y_n \leq t \text{ e } Y_{n+1} > t) \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim,  $\Lambda(t)$ , o número médio de renovações no intervalo  $(0, t]$  Equação (2.1), que no Processo de Renovação é denominado *função de renovação*, é então:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) = E[N(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k[F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t) \quad (2.24)$$

A taxa de ocorrência de falhas para um processo de renovação, ou *densidade de renovação* é portanto:

$$\mu(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) \quad (2.25)$$

onde  $f^{(n)}$  é a função densidade da convolução de ordem  $n$  de Stieltjes da densidade  $f$ .

Segundo Rigdon e Basu (2000), apenas em alguns casos especiais a densidade da soma pode ser escrita com uma expressão simples. Por exemplo, supondo que em um processo de renovação os tempos entre as falhas sejam independentes e identicamente distribuídos seguindo uma distribuição Gama  $(3, \alpha)$ , o tempo até a  $n$  – ésima falha,  $Y_n$ , tem então distribuição Gama  $(3n, \alpha)$ . A taxa de ocorrência de falhas é dada por:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k-1}}{\alpha^{3k} \Gamma(3k)} e^{-t/\alpha} \quad (2.26)$$

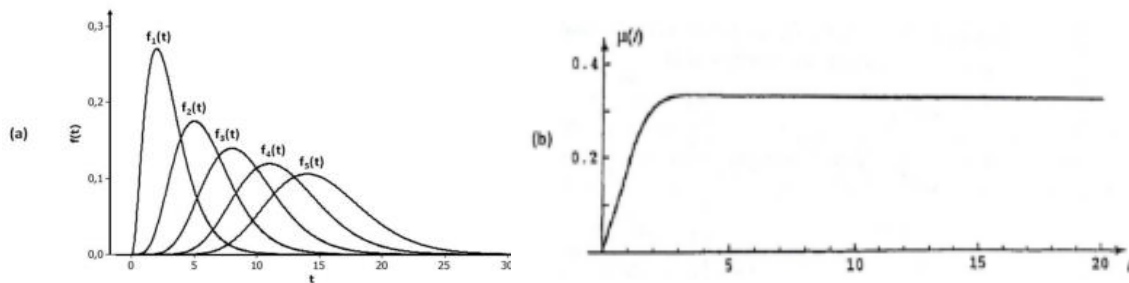


Figura 2.5. – Funções densidade de probabilidade para os primeiros cinco tempos de falha de um processo de renovação Gama  $(3,1)$  (a) e taxa de ocorrência de falhas para o mesmo processo (b) Rigdon e Basu (2000). Fonte: Toledo (2014).

É interessante observar na Figura 2.5 (b) que a taxa de ocorrência de falhas converge rapidamente para a constante  $1/3$ . Isso é confirmado pelo seguinte teorema de Rigdon e Basu (2000):

**Teorema 1:** Para um processo de renovação  $X_1, X_2, \dots$ , com  $\eta = E[X_i]$  e  $\sigma^2 = V(X_i)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \frac{1}{\eta}$$

Interessantes extensões do Processo de Renovação podem ser encontradas na literatura Rigdon e Basu (2000) apresentaram o Modelo Exponencial por Partes

(*Piecewise Exponential Model*), para o qual os tempos entre as falhas são variáveis aleatórias independentes com diferentes distribuições exponencial. Discutiram também Processo Modulados, que são generalizações de ambos os processos de Renovação e *PPNH*, além do *Branching Poisson Process*, que considera fenômenos de ocorrência de falhas sequenciais decorrentes da mesma razão da falha original. Cook e Lawless (2007) discutiram a inclusão de covariáveis em modelos de Renovação, além da análise condicional de tempos entre falhas sucessivas, modelos com efeitos aleatórios e também distribuições conjuntas de tempos entre falhas. Outras extensões podem ser encontradas em Nakagawa (2011).

### **2.2.3. Modelos Baseados na Suposição de Reparo Imperfeito**

Vários autores estudaram o comportamento de sistemas sujeitos a reparo imperfeito, ou seja, reparos que trazem o estado de um sistema que falhou a um nível intermediário entre completamente novo e antes da falha. Brown e Proschan (1983) sugeriram um modelo no qual uma unidade que falhou é submetida a um reparo perfeito com probabilidade  $p$  e a um reparo imperfeito com probabilidade  $q = 1 - p$ . Como casos especiais, se  $p = 0$ , tem-se então um *PPNH*, e se  $p = 1$  tem-se um processo de renovação. Tal modelo ficou conhecido na literatura como modelo de reparo imperfeito Brown-Proschan (*BP*).

Há uma extensa lista de trabalhos na literatura voltados para manutenção imperfeita que apresentam extensões do modelo *BP*, tais como Block, Borges e Savits (1985), Whitaker e Samaniego (1989), Sheu e Griffith (1992), Lim (1998), Cui, *et al.* (2004) e Doyen, (2011). Neste trabalho será destacado um deles: Doyen e Gaudoin (2004), portanto, vale ressaltar que neste trabalho utilizou-se também conceitos apresentados por Kijima, Morimura e Suzuki (1988), que apresentam os modelos de idade virtual definidos pelas distribuições condicionais dos tempos entre falhas sucessivas (*gaps,  $X'_i$ 's*), ao passo que Doyen e Gaudoin (2004) propôs duas novas classes de modelos para reparo imperfeito, os quais são baseados na função intensidade de falhas. Tal trabalho é descrito adiante.

#### **2.2.3.1. Abordagem de Doyen e Gaudoin (2004)**

Doyen e Gaudoin (2004) propuseram duas novas classes de modelos para reparo imperfeito. Neste trabalho, a modelagem é definida pela intensidade de falhas antes do primeiro reparo, a qual é uma função contínua no tempo. O efeito do reparo é caracterizado pela mudança induzida na intensidade de falhas antes e após a falha. Na primeira classe de modelos, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na

intensidade de falhas (*Arithmetic Reduction of Intensity – ARI*). Na segunda classe, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na idade virtual do sistema (*Arithmetic Reduction of Age – ARA*).

Sob o modelo *ARI*, após cada reparo o valor da intensidade é reduzido por um constante multiplicativa fixa,  $\theta$ . Assim, se  $\lambda(t)$  é a função intensidade de falhas correspondente à condição de reparo mínimo (função de referência), e  $\theta$  é uma constante,  $0 \leq \theta \leq 1$ , a função intensidade  $\lambda_{ARI}^*(t)$  do sistema sob este modelo é dada por:

$$\lambda_{ARI}^*(t) = \lambda(t) - \theta\lambda(Y_{N(t)}) \quad (2.27)$$

onde  $Y_{N(t)}$  denota o tempo global decorrido até a ocorrência da  $N(t)$  – *ésima* falha.

Sob o modelo *ARA*, após cada reparo o valor da idade virtual de um item é reduzida pela constante multiplicativa  $\phi$ , resultando na seguinte função intensidade:

$$\lambda_{ARA}^*(t) = \lambda(t - \theta Y_{N(t)}) \quad (2.28)$$

É interessante observar que para  $\theta = 1$ , esta expressão é a mesma da Equação (2.20) (Processo de Renovação).

A principal diferença entre os modelos *ARI* e *ARA* é o modo como a função intensidade original é alterada. Sob *ARI*, a curva de intensidade de falhas é deslocada verticalmente após o reparo; no *ARA*, a curva é deslocada horizontalmente.

Para fins de exemplificação, vamos retomar o exemplo do sistema da Seção 2.2.2, cuja função intensidade de referência é  $\lambda(t) = 3t^2$ , com as duas primeiras falhas tendo ocorrido nos tempos  $Y_1 = 1,2$  e  $Y_2 = 1,9$ . A função intensidade de “referência” é aquela que seria obtida caso todos os reparos no sistema fossem mínimos, retornando o sistema à condição de “tão ruim quanto velho”. Baseado na Equação (2.27), o modelo *ARI* para esse sistema é dado por:

$$\lambda_{ARI}^*(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1,2 \\ \lambda(t) - \theta \times \lambda(1,2) = 3t^2 - \theta \times 3(1,2)^2 & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ \lambda(t) - \theta \times \lambda(1,9) = 3t^2 - \theta \times 3(1,9)^2 & \text{se } 1,9 \leq t < Y_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Já o modelo *ARA* Equação (2.28) é dado por:

$$\lambda_{ARA}^*(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1,2 \\ \lambda(t - \theta \times 1,2) = 3(t - \theta \times 1,2)^2 & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ (t - \theta \times 1,9) = 3(t - \theta \times 1,9)^2 & \text{se } 1,9 \leq t < Y_3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

A Figura 2.6 e Figura 2.7 mostram as funções intensidade do exemplo para os modelos *ARA* e *ARI*, respectivamente, considerando-se  $\theta = 0,5$ . Observa-se que no modelo *ARI*, a cada reparo de grau 0,5, a função intensidade do sistema cai para a metade do valor que seria obtido caso nenhuma falha tivesse ocorrido até aquele ponto. Por exemplo, enquanto os valores da função intensidade original são  $\lambda(1,2) = 4,32$  e  $\lambda(1,9) = 10,83$ , os valores da função intensidade para o modelo nesses pontos são de, respectivamente,  $\lambda_{ARI}^* = 2,16 = 0,5 \times \lambda(1,2)$  e  $\lambda_{ARA}^* = 5,415 = 0,5 \times \lambda(1,9)$ . Além disso, nesse modelo, a função intensidade em cada ponto é paralela à função original no mesmo ponto, deslocada por uma constante. Enquanto isso, no modelo *ARA*, a cada reparo a idade virtual do sistema cai para metade da idade real. Por exemplo, nos reparos ocorridos nos tempos 1,2 e 1,9, as idades virtuais do sistema decresceram para 0,6 e 0,95. A função intensidade a partir de cada um desses pontos é então a intensidade de referência aplicada na idade virtual, deslocada horizontalmente.

Segundo os autores, um ponto importante nesses modelos é o fato da eficiência do reparo ser medida pelo valor de  $\theta$ , tal que:

- $0 < \theta < 1$ : reparo eficiente;
- $\theta = 1$ : reparo ótimo. A intensidade de falhas volta a zero.

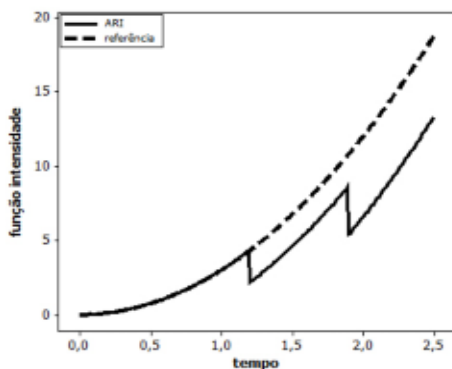


Figura 2.6 – Função intensidade para o modelo *ARI* ( $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 0,5$ ). Fonte: Toledo (2014).

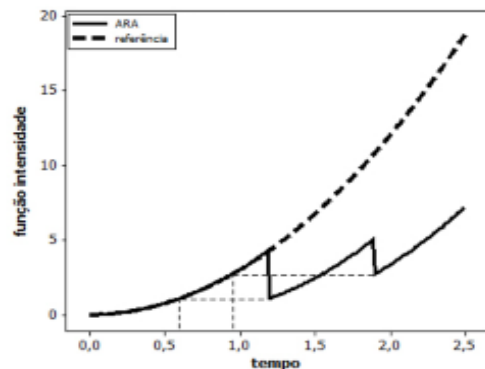


Figura 2.7 – Função intensidade para o modelo *ARA* ( $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 0,5$ ). Fonte: Toledo (2014).

- $\theta = 0$ ; reparo mínimo
- $\theta < 0$ ; reparo danoso

Doyen e Gaudoin (2004) também generalizaram esses modelos de modo que o efeito do reparo possa se estender além do intervalo de tempo até a falha imediatamente antes do reparo atual. Assim, os modelos apresentados acima se referem aos modelos  $ARI_1$  (*Arithmetic Reduction of Intensity with memory 1*) e  $ARA_1$  (*Arithmetic Reduction of Age with memory 1*) do artigo original. Os autores apresentaram ainda os modelos  $ARI_m, ARI_\infty, ARA_m$  e  $ARA_\infty$ .

Vale ressaltar que nos modelos  $ARA, \theta = 1$  implica em um processo de Renovação. Já nos modelos  $ARI, \theta = 1$  não implica em um estado de “tão bom quanto novo” após o reparo, pois embora o valor da função intensidade retorne a zero após cada falha, seu comportamento a partir desse ponto não é o mesmo de um sistema novo. A Figura 2.8 e Figura 2.9 ilustram essa situação. Elas apresentam as intensidades dos modelos  $ARI$  e  $ARA$ , respectivamente, para o exemplo dado acima  $\theta = 1$ . Enquanto no caso  $ARA$  a função coincide com a do Processo de Renovação para o mesmo exemplo (apresentada anteriormente na Figura 2.4, a função do modelo  $ARI$  é diferente: a cada reparo feito no sistema, o valor da função intensidade cai para zero; porém, a partir desse ponto, ela é paralela à função de referência aplicada no mesmo ponto. Já no modelo  $ARA$  a função intensidade sempre recomeça de zero após cada reparo, com o mesmo comportamento da função de referência para um sistema novo.

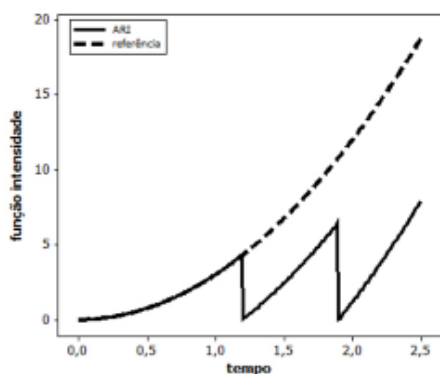


Figura 2.8 – Função intensidade para o modelo  $ARI$  ( $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 1$ ). Fonte: Toledo (2014).

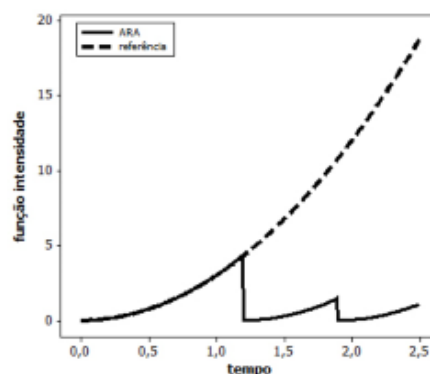


Figura 2.9 – Função intensidade para o modelo  $ARA$  ( $\lambda(t) = 3t^2, \theta = 1$ ). Fonte: Toledo (2014).

Se o valor de  $\theta$  para o(s) sistema(s) sob estudo for estimado a partir dos dados, o efeito do reparo está então sendo avaliado. Doyen e Gaudoin (2004) apresentaram as propriedades de estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros da função intensidade, além de  $\theta$ . Pan e Rigdon (2009) forneceram estimativas via inferência Bayesiana para os modelos  $ARI_1$  e  $ARA_1$ , no caso em que a função intensidade é

determinada por um *PLP*. Doyen e Gaudoin (2004) também generalizaram esses modelos de modo que o efeito do reparo possa se estender além do intervalo de tempo até a falha imediatamente antes do reparo atual.

## Capítulo 3 – Determinação de Política Ótima de Manutenção

A manutenção de sistemas após a falha pode ser dispendiosa, e muitas vezes requerer considerável tempo para ser executada. Nesse contexto, um desafio relevante é a determinação de quando e como realizar manutenções preventivas nas unidades antes que a falha venha a ocorrer. Como não é interessante realizar manutenções com alta frequência, o que implicaria em altos custos e tempo, o objetivo de problemas de otimização de manutenção passa por determinar a frequência e o momento ideal da realização de manutenção preventiva.

Na literatura de sistemas reparáveis, pode-se encontrar um grande número de trabalhos propondo políticas de manutenção sobre as suposições de reparo mínimo após cada falha. Como descrito na Seção 2.2.1, a suposição de reparo mínimo assume que o reparo após a falha, mantém o sistema como estava imediatamente antes da falha (“tão ruim quanto velho”). Barlow e Hunter (1960) usou a teoria elementar da renovação para obter dois tipos de política para a manutenção preventiva com suposição de reparo perfeito, um tipo utilizado para sistemas mais simples e o outro utilizado para sistemas mais complexos. Alguns trabalhos relacionados ainda podem ser encontrados em Morimura (1970), Phelps (1981), Barlow e Proschan (1987), Park, Jung e Yum (2000) e Wang (2002).

Baseado nos trabalhos de Toledo (2014) é apresentado a seguir, uma proposta para encontrar uma Política de Manutenção Periódica ótima sob suposição de Reparo Imperfeito.

### 3.1. Abordagem de Toledo (2014)

Toledo (2014) propôs um método para obtenção de uma política ótima para Manutenção Preventiva sob a suposição de Reparo Imperfeito, justificada pela situação prática em que constantemente é necessário a estimação de uma periodicidade de manutenção ótima  $\tau$  usando um histórico de falhas de um sistema sob estudo.

Considerando um sistema sujeito à falhas, e que é colocado em operação no tempo  $t = 0$ , assume-se algumas condições:

- Pontos para Manutenção Preventiva ( $MP$ ) são agendados após todo  $\tau$  unidade de tempo;
- Para cada ponto de ( $MP$ ), é fixado um custo  $C_{MP}$ , em que instantaneamente retorna o sistema a uma condição “tão bom quanto novo”, descrito na Seção 2.2.2;

- Entre pontos de  $(MP)$ , um Reparo Imperfeito  $(RI)$  com taxa  $\theta$  e  $(0 \leq \theta \leq 1)$  é executado após cada falha, onde  $\theta = 1$  representa um Reparo Mínimo  $(RM)$  e  $\theta = 0$  um Reparo Perfeito  $(MP)$ ;
- O custo esperado para cada  $(RI)$  é  $C_{RI}$ ;
- Os custos de reparação e tempos de falha são independentes;
- O tempo de reparo é negligenciado.

Assumindo que ocorre uma manutenção preventiva  $(MP)$  a cada  $\tau$  unidade de tempo, o custo esperado por unidade de tempo para um sistema dado por Gilardoni e Colosimo (2007) é:

$$C(\tau) = \frac{C_{MP} + C_{RI}E[N(\tau)]}{\tau}, \quad \tau > 0 \quad (3.1)$$

Sob o modelo  $ARA_1$ ,  $E[N(\tau)]$  é dado pela equação:

$$\Lambda(t) = \int_0^t E[\lambda(t - (1 - \theta)T_{N(t)})] dt \quad (3.2)$$

O objetivo aqui é encontrar um intervalo ótimo de  $(MP)$  que minimiza a equação  $C(\tau)$ , que é o valor  $\tau$  que satisfaz:

$$D(\tau) = \tau\lambda(\tau) - \Lambda(\tau) = \frac{C_{MP}}{C_{RI}} \quad (3.3)$$

onde  $\lambda(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Lambda(\tau)$  é a função *ROCOF* ("*Taxa de Ocorrência de Falhas*") para o sistema.

Entretanto, sob a suposição de reparo imperfeito, não há uma solução fechada que pode ser obtida para  $\Lambda(t)$  e, conseqüentemente, para a Equação (3.3)

Gilardoni e Colosimo (2007) mostraram que quando trabalhamos sob a suposição de reparo mínimo e assumindo a forma funcional *PLP* para a função intensidade, chegamos a uma expressão fechada para  $\tau$ , dada por:

$$\tau = \eta \left[ \frac{C_{MP}}{(1 - \beta)C_{RM}} \right]^{(1/\beta)} \quad (3.4)$$

A função média  $\Lambda(\tau)$  é estimada por uma combinação de *MLE* (*Máxima Verossimilhança*) dos parâmetros envolvidos  $(\beta, \eta, \theta)$ , Simulação de Monte Carlo Toledo (2014) e o Procedimento Não-Paramétrico de Nelson-Aalen Aalen (1978), também conhecido como Função Média Acumulada (*MCF* –

*Mean Cumulative Function*). As etapas do método proposto são ilustrados usando o *PLP* mas pode ser aplicado a qualquer outra forma parâmetro escolhida para a intensidade inicial. As etapas são descritas a seguir:

- **Etapa 1: Estimação de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros do Modelo.** Usando o histórico de falhas e a função de Log-Verossimilhança Equação (3.5) para obter os *MLEs*  $\hat{\beta}, \hat{\eta}$  (*Parâmetros de PLP*) e  $\hat{\theta}$  (*eficiência do reparo*).
- **Etapa 2: Estimação da Função Média  $\Lambda(t)$ :** Simulação de Monte Carlo pelo histórico de falhas e cálculo do (*MCF*).
  - **Etapa 2.1.: Simulação de Monte Carlo.** Use o valores  $\hat{\beta}, \hat{\eta}$  e  $\hat{\theta}$  para gerar  $B$  processos de falha ( $B = 10.000$ ) truncado no tempo  $T$ , usando, para cada sistema, o procedimento descrito no Apêndice de Toledo (2014).
  - **Etapa 2.2.: Cálculo do *MCF*  $\hat{\Lambda}(t)$ .** Os processos de falhas gerados na Etapa 2.1. são truncados por tempo, o *MCF* é simplesmente o número médio de falhas observadas entre 0 e  $T$  sobre os  $B$  processos.
- **Etapa 3: Estimação da Periodicidade Ótima  $\tau$ .** Com o intuito de utilizar a função custo dada na Equação (3.3), é necessário encontrar estimativas para a função  $\lambda(t)$  e  $\Lambda(t)$ . Na Etapa 2, o *MCF* foi usado como uma estimativa para  $\Lambda(t)$ . Contudo, o *MCF* é um função degrau, cujo a derivada é zero em quase toda parte, e uma estimativa para  $\lambda(t)$  não pode ser diretamente obtida a partir de  $\Lambda(t)$ . Usa-se aqui a estimação não-paramétrica dada pela derivada direita do Maior Minorante Convexo ("*Greatest Convex Minorant – GCM*") Boswell (1966).
  - a. O *GCM* de  $\hat{\Lambda}(t)$ , denotado por  $\hat{\Lambda}_{SG}(t)$ , é dado por:

$$\hat{\Lambda}_{SG}(t) = \sup\{g(t): g \text{ é convexo e } g(u) \leq \hat{\Lambda}(u) \text{ para todo } u\};$$

- b. Então,  $\hat{\lambda}_{SG}(t) = \hat{\Lambda}'_{SG}(t + 0)$  (a derivada direita de  $\hat{\Lambda}_{SG}(t)$ ).

No caso do *RM*, o processo de falha é um *NHPP* e Boswell (1966) mostrou que o *MLE* não-paramétrico é restrito para  $\lambda(t)$ , chamado de  $\hat{\lambda}_{C-NPMLE}$ , é igual a  $\hat{\lambda}_{SG}(t)$  (restrito aqui, significa que está sujeito à restrição de  $\lambda$  ser crescente. Gilardoni e Colosimo (2011) mostraram que este resultado é também válido para vários sistemas (sob a suposição de *RM*) quando se aplica aos tempos de falha.

O método proposto por Toledo (2014) não garante que a propriedade é válida sob a suposição de  $RI$ , mas é utilizado o procedimento  $GCM$  uma vez que proporciona um bom ajuste.

### 3.2. Estimação dos Parâmetros: A Função Verossimilhança

#### 3.2.1. Modelo $ARA_m$

Considerando  $k$  sistemas reparáveis idênticos sob estudo,  $k = 1, 2, \dots$ , nos quais falhas ocorrem de forma independente. Há, basicamente, duas maneiras de se observar dados em um sistema reparável. Quando a coleta de dados termina após um número predeterminado de falhas, os dados são ditos truncados por falha. Por outro lado, quando a coleta de dados termina em um tempo predeterminado  $t$ , os dados são ditos truncados por tempo. A função verossimilhança é construída aqui assumindo que entre os  $k$  sistemas reparáveis observados,  $k_1$  são truncados por tempo, e  $k_2$  são truncados por falha,  $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, k$  e  $k_1 + k_2 = k$ .

Assuma as seguintes condições:

- A cada falha, uma ação de reparo de grau  $\theta$  é executada.
- $n_i$  falhas são observadas no  $i$  – ésimos sistema truncado por tempo,  $i = 1, 2, \dots, k_1$ , e  $n_j^*$  falhas são observadas no  $j$  – ésimos sistema truncado por falha,  $j = 1, 2, \dots, k_2$ .

\*  $N = \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j$  é o número total de falhas observadas nos sistemas.

- O  $i$  – ésimos sistema truncado por tempo é observado até o tempo predeterminado  $t_i^*$ , e o  $j$  – ésimos sistema truncado por falha é observado até ocorrer o número predeterminado de  $n_j^*$  de falhas.
- Sejam  $T_{i,l}$  ( $i = 1, 2, \dots, k_1, l = 1, 2, \dots, n_i$ ) as variáveis representando tempos de falha para o  $i$  – ésimos sistema truncado por tempo, registrados como o tempo desde que o sistema foi colocado em funcionamento,  $(T_{i,1} < T_{i,2} < \dots < T_{i,n_i})$ . Para sistemas truncados por falha, é um número aleatório de variáveis. Além disso, seja  $t_{i,l}$  seus valores observados (dados), e  $T_i = (T_{i,1}; T_{i,2}; \dots; T_{i,n_i})^t$  o vetor aleatório ( $n_i \times 1$ ) de tempos de falha para o  $i$  – ésimos sistema truncado por tempo.
- Sejam  $T_{j,m}$  ( $j = 1, 2, \dots, k_2, m = 1, 2, \dots, n_j^*$ ) as variáveis representando tempos de falha para o  $j$  – ésimos sistema truncado por tempo, registrados como o tempo desde que o sistema foi colocado em funcionamento,  $(T_{j,1} < T_{j,2} < \dots < T_{j,n_j^*})$ . Para

sistemas truncados por falha, é um número aleatório de variáveis. Além disso, seja  $t_{i,l}$  seus valores observados (dados), e  $T_j = (T_{j,1}; T_{j,2}; \dots; T_{j,n_j^*})^t$  o vetor aleatório  $(n_j^* \times 1)$  de tempos de falha para o  $j$  – ésimo sistema truncado por tempo.

- Seja  $N(t)$  a variável aleatório representando o número de falhas no intervalo  $(0, t]$ .
- Seja  $\mu$  o vetor de parâmetros do modelo. Ele inclui os parâmetros que indexam a função intensidade do processo e o parâmetro de ineficiência do reparo  $\theta$ .

A função de log-verossimilhança do modelo  $ARA_m$  é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\mu) &= \left( \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left( \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) \\
&+ (\beta - 1) \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left( t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \log \left( t_{j,m} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p} \right) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[ - \left( \frac{t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \\
&+ \left. \left( \frac{t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \left[ - \left( \frac{t_{i, n_i}^* - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \\
&+ \left. \left( \frac{t_{i, n_i} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left[ - \left( \frac{t_{j,m} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \\
&+ \left. \left( \frac{t_{j, m-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Pode-se assumir que  $\hat{\mu} = \arg \max L(\mu)$  segue aproximadamente uma distribuição normal multivariada, com média  $\mu$  e matriz de covariância  $\Sigma$  dada por menos a inversa da matriz Hessiana de  $l(\mu)$  avaliada em  $\hat{\mu}$ . A matriz hessiana é dada portanto por:

$$H = - \left( \frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu \partial \mu^t} \right) \quad (3.6)$$

Assim, teoria assintótica pode ser usada para se construir intervalos de confiança para os parâmetros.

### 3.2.2. Modelo $ARI_m$

A função de log-verossimilhança do modelo  $ARI_m$  é dada por:

$$\begin{aligned} l(\mu) = & \left( \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left( \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) \\ & + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left( t_{i,l}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \log \left( t_{m,j}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) \\ & + \eta^{-\beta} \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left( -t_{i,l}^{\beta-1} + t_{i,l-1}^{\beta-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\theta)\beta [t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) \right] \\ & + \eta^{-\beta} \left[ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left( -t_{m,j}^{\beta-1} + t_{m,j-1}^{\beta-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\theta)\beta [t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) \right] \\ & + \eta^{-\beta} \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \left( -t_i^{*\beta-1} + t_{i,n_i}^{*\beta-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\theta)\beta [t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}^{\beta-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

## Capítulo 4 – A Biblioteca “ImperfectRepair”

A biblioteca *ImperfectRepair* é uma ferramenta que faz a análise do histórico de falhas de um ou mais sistemas e trabalha com a suposição de reparo imperfeito. Os modelos implementados são das classes de *ARA* e *ARI* com intensidade de falhas de referência dada pela forma funcional *PLP*. Esta biblioteca é composta de 3 funções básicas, que são:

- ***PLPIR.ml*** – A estimação dos parâmetros ( $\beta$  e  $\eta$ ) da função PLP – Processo de Lei de Potência, e da ineficiência do reparo ( $\theta$ ) baseado no histórico de falhas dos sistemas em estudo e a estimação do intervalo de confiança, como visto na Equações (3.5) e (3.7).
- ***PLPIR.sim*** – Função para geração de tempos de falhas truncados por tempo ou por falha através da simulação de Monte Carlo.
- ***tau.IR*** – A estimação da periodicidade ótima ( $\tau$ ) para manutenção preventiva, conforme descrito no Capítulo 3 e a determinação do Intervalo de Confiança pelo método *bootstrap* não paramétrico para a periodicidade ótima ( $\tau$ ).

O pacote *ImperfectRepair* foi desenvolvido no *Software RStudio*, apoiado em Wickham (2015).

### 4.1. Dependências

Dependências são os pacotes que a biblioteca "*ImperfectRepair*" necessita para trabalhar. Neste caso, a biblioteca depende de dois outros pacotes, que são:

#### 4.1.1. Package “rootSolve\_1.6.5.1”

Segundo Soetaert (2014) o pacote "*rootSolve*" inclui:

- Algoritmo para encontrar as raízes de "*n*" funções não-lineares, usando o Método de Newton-Raphson.
- Funções que determinam a condição de estado estacionário de um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO).
- Funções que calculam as matrizes Hessian e Jacobian ou, mais geral, o gradiente das funções com respeito às variáveis independentes.

Para o desenvolvimento da biblioteca "*ImperfectRepair*" estamos interessados na função *rootSolve::uniroot.all* que é utilizada para a geração de tempos de falhas, que será tratado na Seção 4.3.2, especificamente na Equação (4.3).

O pacote "*rootSolve*" está disponível no *CRAN*, mas pode ser encontrado dentro do pacote aqui desenvolvido.

#### 4.1.2. Package “NHPPplp\_0.1”

De acordo com Madureira (2014):

O pacote “*NHPPplp\_0.1*” tem por objetivo analisar a confiabilidade em sistemas reparáveis. Do inglês *Non – Homogeneous Poisson Process with Power Law Process intensity*, os dados são modelados de acordo com o Processo de lei de Potência. Os comandos neste pacote estimam os parâmetros do modelo e funções deles, além de verificar a qualidade do ajuste. Ele permite elaborar uma Política de Manutenção Ótima para sistemas reparáveis sob a suposição de Reparo Mínimo, conforme o trabalho de Gilardoni e Colosimo (2007).

Para o desenvolvimento da biblioteca "*ImperfectRepair*" estamos interessados na função *NHPPplp::plp.ml* que é utilizada para fornecer o chute inicial para tratamento de otimização da função de log-verossimilhança, Equações (3.5) e (3.7), sob cada modelo ajustado.

Não obstante, ainda é interesse para alguns usuários a utilização de todas as funções fornecidas por este pacote, seja para ajuste do modelo, ou seja como comparação entre as suposições de reparo mínimo e reparo imperfeito.

É importante ressaltar, que o pacote "*NHPPplp\_0.1*" não está disponível no *CRAN*, e pode ser encontrado dentro do pacote aqui desenvolvido.

#### 4.2. Banco de Dados

Dentro da biblioteca "*ImperfectRepair*", 3 bancos de dados estão disponíveis para análise e serão utilizados como exemplos neste trabalho. Estes bancos de dados são aqui descritos como:

- "*motors*" – Apresentado por Toledo (2014), estes dados referem-se a falhas de motores de uma frota de caminhões diesel-elétricos denominados “off-road”. Estes dados foram coletados por uma empresa de mineração brasileira, durante um período de 5 meses. Este banco de dados é composto por: 260 tempos de falhas truncados por tempo ou truncados por falha e representam 193 sistemas em estudo.

- "*truck*" – O conjunto de dados consiste em tempos de falhas em uma amostra de 5 caminhões "off-road" de uma empresa de mineração brasileira. Estes dados foram coletados de julho a outubro de 2012, onde 129 falhas foram observadas, cada um seguida por um reparo. Toledo (2014)
- "*transformers*" – Refere-se a históricos de falhas de transformadores de potência de 300 e 345 quilovolts de uma Companhia Elétrica brasileira. Estes transformadores foram observados entre janeiro de 1999 e julho de 2011. Este banco de dados é composto por 61 tempos de falhas, truncados por tempo (*em T = 21.888 horas*) ou truncados por falha, representando 40 sistemas em estudo. (Gilardoni e Colosimo, 2007:2011).

#### 4.2.1. Análise do Banco de Dados "*motors*"

Comumente, o banco de dados de um sistema reparável é descrito por uma matriz, tal qual a primeira coluna representa os sistemas e as demais colunas representam os tempos de falhas para determinado sistema onde há uma indicação por "\*" dos tempos de censura, seja devido à realização da manutenção preventiva ou seja devido ao tempo limite de teste do sistema. A forma usualmente coletada pode ser mostrado a seguir:

Tabela 4.1 – Conjunto parcial de tempos de falhas referente ao banco de dados "*motors*". Fonte: Adaptado de Toledo (2014).

System	Time(hours)	system	Time(hours)
1	18315* 32133 50934	7	10215* 23355* 38169 44595
2	16137* 34722 53990	8	9927* 23103* 32323* 47880
3	12666 22143	9	11583* 26173
4	15012* 18065	10	22347* 23783
5	10629* 21717* 22663	11	12647
6	12303* 28665* 42483 50844	12	9288* 13280 18846

O conjunto de dados apresentado na Tabela 4.1, contém tempos (em horas) de falhas em motores de caminhões, além de tempos (\*) de retiradas para realização de manutenção preventiva. Responsáveis pelo processo declaram que essas ações de manutenção preventiva são perfeitas, ou seja, retornam o motor à condição de "tão bom quanto novo". Originalmente havia 143 motores, para os quais 208 falhas foram registradas. Houve 50 ações de manutenção preventiva no período de avaliação, cada uma sendo tratada como perfeita, resultando assim em  $n = 153 + 50 = 193$  motores considerados. O banco de

dados assim reestruturado está exibido na Tabela 4.2. Como a manutenção em 18315 horas foi considerada um reparo perfeito, um “novo sistema” é gerado, iniciando a operação no tempo 0 e com falhas em  $32133 - 18315 = 13818$  horas e, posteriormente, em  $50934 - 18315 = 32619$  horas.

Tabela 4.2 – Conjunto parcial de tempos de falhas reestruturado referente ao banco de dados “motors”. Fonte: Adaptado de Toledo (2014).

system	Time(hours)	system	Time(hours)
1	18315*	7	15012*
2	13818 32619	8	3053
3	16137*	9	10629*
4	18585*	10	11088*
5	19268	11	946
6	12666 22143	12	12303*

Em seguida, torna-se ainda necessário transformar os dados em matriz ou folha de dados, e possuir assim 3 colunas conforme mostrado na Tabela 4.3. Cada coluna possui uma característica, tal qual descrito a seguir:

- **time** col[, 1 ] – Contém os tempos de falha e de censura observados.
- **failure** col[, 2 ] – Contém valores 1( ou TRUE) caso o tempo se refira a uma falha ocorrida ou 0 (ou FALSE) caso o tempo se refira a uma censura.
- **system** col[, 3 ] - Identifica o sistema correspondente através de valores numéricos ou alfanuméricos.

Tabela 4.3 – Conjunto de dados em forma de matriz para tratamento adequado na biblioteca. Fonte: “output” do R.

```
> motors[1:10,]
  time failure system
1 18315      0      1
2 13818      1      2
3 32619      1      2
4 16137      0      3
5 18585      0      4
6 19268      1      5
7 12666      1      6
8 22143      1      6
9 15012      0      7
10 3053      1      8
```

A biblioteca *ImperfectRepair* necessita que o conjunto de falhas esteja no formato de matriz, conforme exemplificado na Tabela 4.3, para que haja um adequado tratamento dos dados e posteriores análises que serão realizadas.

#### 4.2.2. *Análise Descritiva Preliminar: Gráfico de Eventos e Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen)*

Análises descritivas preliminares são fundamentais para investigar o padrão da ocorrência de falhas ao longo do tempo. Alguns gráficos permitem comparar os sistemas em estudo e verificar se há indícios de que, por exemplo, o tempo entre as falhas sucessivas tendem a aumentar, diminuir ou permanecer constante ao longo do tempo.

Os gráficos a serem construídos são:

- *NHPPplp :: horizontal.plot(dados)*. É o gráfico de eventos (*event plot*) que consiste de linhas horizontais representando o período de observação de cada sistema, e as falhas ocorridas no período.
- *NHPPplp :: aalen.plot(dados)*. Gráfico da função média acumulada (estimador de Nelson-Aalen para a função média). É uma função escada com incrementos nos tempos de falhas. De um modo geral, seu comportamento é guiado pelo padrão das falhas no sistema. No caso de NHPP a interpretação do seu comportamento é a seguinte:
  - Uma tendência aproximadamente linear (reta) indica que a incidência de falhas no sistema está permanecendo constantes ao longo do tempo. Em outras palavras, não existe uma tendência de aumento nem de diminuição do tempo entre falhas.
  - Uma tendência côncava indica que o tempo entre as falhas está aumentando ao longo do tempo – o sistema está melhorando.
  - Uma tendência convexa indica que o tempo entre as falhas está diminuindo ao longo do tempo – o sistema está deteriorando.
- *NHPPplp :: cramer.fitplp(dados)*. Além da análise gráfica, o teste de ajuste de Cramér-von Mises é útil para testar a hipótese que os dados vêm de uma NHPP, com funções intensidade PLP sem a necessidade da especificação de um valor para  $\beta$  (parâmetro de forma do PLP), tanto em caso de um único sistema como no caso de  $k \geq 2$  sistemas. Mais detalhes podem ser encontrados em Crow (1975).

**Exemplo 4.1:** Gráfico de Eventos - "motors".

> NHPPp1p::horizontal.plot(motors)

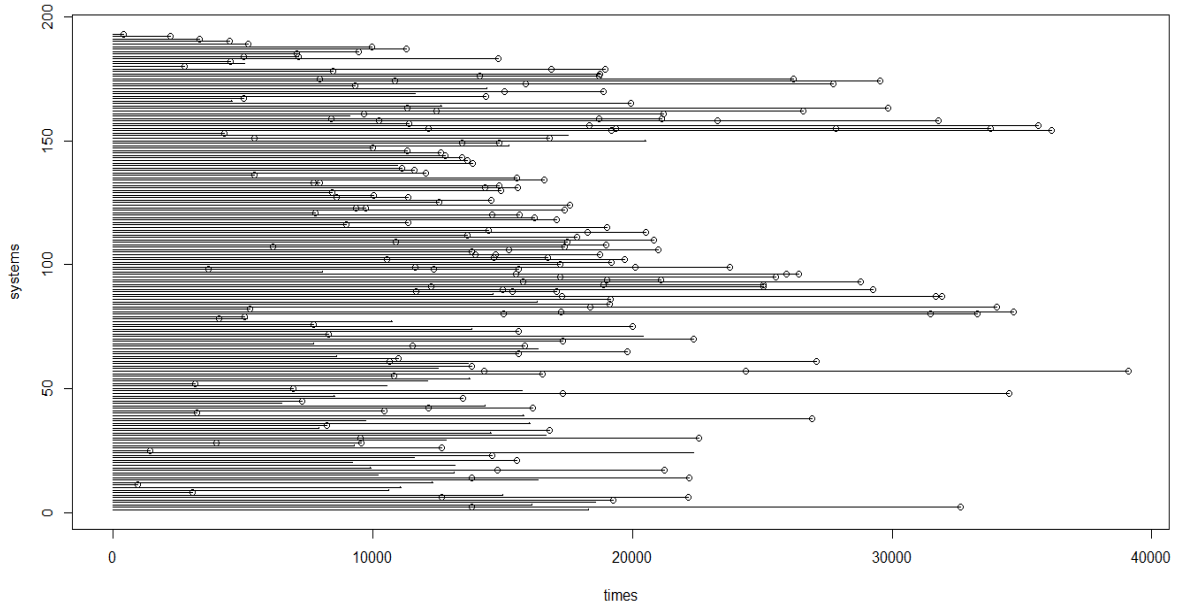


Figura 4.1 – Gráfico de Eventos para o banco de dados "motors". Fonte: "output" do R.

**Exemplo 4.2:** Gráfico da Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) - "motors".

> NHPPp1p::aalen.plot(motors)

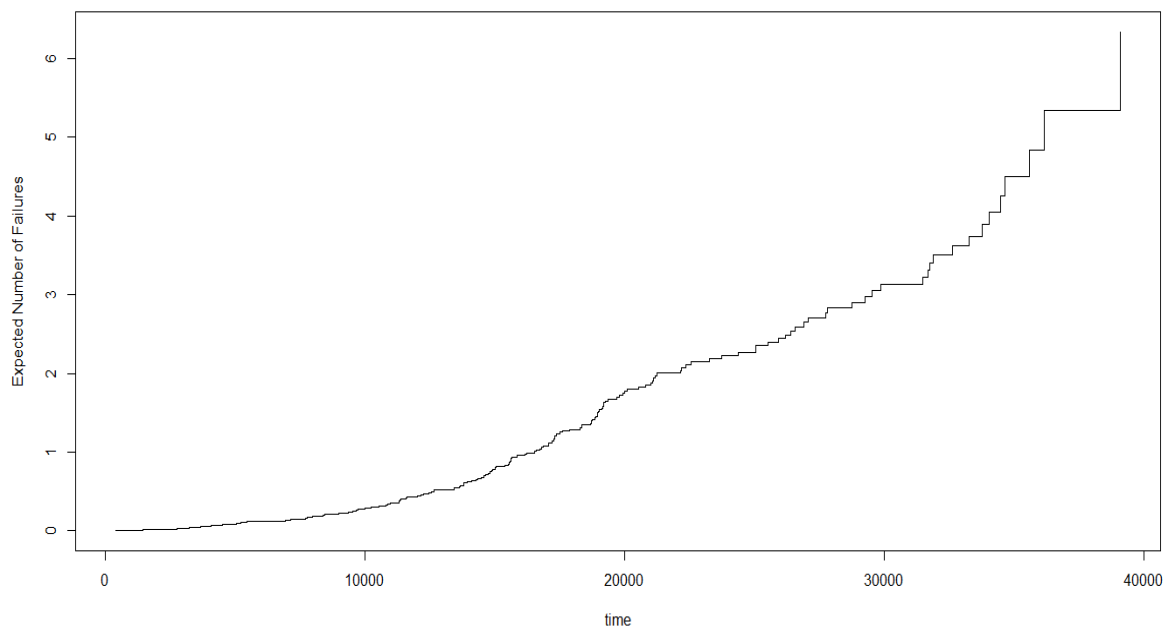


Figura 4.2 – Gráfico da Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) para o banco de dados "motors". Fonte: "output" do R.

A Figura 4.2 (estimador de Nelson-Aalen para a função média acumulada) apresenta uma forma convexa, indicando que, caso o mecanismo de falha siga um NHPP, o tempo entre falhas para estes sistemas pode estar diminuindo, ou seja, o sistema está deteriorando.

**Exemplo 4.3:** *Teste de Cramér-von Mises - "motors"*.

```
> NHPPplp::cramer.fitplp(motors)
Cramer-Von-Miser Test with df= 67
T= 0.4569636   p-value= 0.0016
```

Rejeitamos  $H_0$  a nível de 5% ( $p - value = 0,0016$ ), ou seja há evidências fortes que o histórico de falhas não é oriundo de um NHPP com funções intensidade dada pela PLP.

#### 4.2.3. Estimação dos Parâmetros por Máxima Verossimilhança

Como a hipótese nula de uma NHPP foi rejeitada para os dados "motors", vamos aqui ajustar os modelos para reparo imperfeito ARA e ARI, variando, utilizando a função intensidade de referência com a forma funcional da PLP, com parâmetros de *shape* ( $\beta$ ) e *scale* ( $\eta$ ). A memória dos modelos será também variada. A estimativa dos 3 parâmetros ( $\beta, \eta$  e  $\theta = \text{ineficiência do reparo}$ ) será obtida através da maximização das Equações (3.5) e (3.7).

Antes de ajustar os modelos, seguem algumas descrições sobre a rotina:

- Comando:
  - PLPIR.ml(file\_tij, mod = "ARI", M = "inf")
- Argumentos:
  - **file\_tij** – o conjunto de dados conforme exemplificado na Seção 4.2.1.
  - **mod** – "ARA" ou "ARI".
    - **default** – mod = "ARI"
  - **M** – memória do modelo, podendo ser qualquer valor inteiro positivo ( $m > 0$ ) ou "inf" para indicar memória infinita.
    - **default** – M = "inf"
- Saída:
  - Estimativa dos parâmetros *shape* ( $\beta$ ) e *scale* ( $\eta$ ) do PLP e do parâmetro de *ineficiência de reparo* ( $\theta$ ). Além da estimação dos intervalos de confiança (95%) pela matriz Hessian.

**Exemplo 4.4:**

```
> ex_4.4 <- PLPIR.ml(motors,mod = "ARA", M = 1)
> ex_4.4
```

	Estimate	sd	CI.low	CI.up
shape	2.457242e+00	1.061879	2.184446e+00	2.764106e+00
scale	1.558243e+04	1.033725	1.460164e+04	1.662910e+04
repair	4.711192e-01	1.199133	3.300279e-01	6.725288e-01

**Exemplo 4.5:**

```
> ex_4.5 <- PLPIR.ml(motors,mod = "ARA", M = 4)
> ex_4.5
```

	Estimate	sd	CI.low	CI.up
shape	2.416192e+00	1.062198	2.146686e+00	2.719533e+00
scale	1.569503e+04	1.034774	1.467793e+04	1.678261e+04
repair	5.408336e-01	1.189955	3.846129e-01	7.605076e-01

**Exemplo 4.6:**

```
> ex_4.6 <- PLPIR.ml(motors,mod = "ARA", M = 8)
> ex_4.6
```

	Estimate	sd	CI.low	CI.up
shape	2.416192e+00	1.062198	2.146686e+00	2.719533e+00
scale	1.569503e+04	1.034774	1.467793e+04	1.678261e+04
repair	5.408336e-01	1.189955	3.846129e-01	7.605076e-01

Cabe ressaltar que como o número máximo de falhas  $(N(t)_{MAX})$  de qualquer dos sistemas analisados é igual a 4, neste caso tem-se que a memória para qualquer  $M \geq 4$  é representado como "ARA $_{\infty}$ ", pois para  $M = inf$ , todas as falhas anteriores são utilizadas para a estimação dos parâmetros, conforme pode ser visto Equação (3.5).

Toledo (2014) conclui em seu trabalho que a classe "ARI $_{\infty}$ " foi considerado o melhor modelo para ajuste dos dados, conforme resultado abaixo:

**Exemplo 4.7:**

```
> best_model <- PLPIR.ml(motors)
> best_model
```

	Estimate	sd	CI.low	CI.up
shape	2.350691	1.052358	2.126937e+00	2.597984e+00
scale	15774.714457	1.035402	1.473493e+04	1.688787e+04
repair	0.393807	1.409770	2.008874e-01	7.719943e-01

Os valores dos parâmetros estimados indicam que os motores tendem a falhar com mais frequência ao longo do tempo ( $\hat{\beta} = 2.35$ ,  $CI = [2.13; 2.60]$ ) e que o reparo após a falha tende a levar o equipamento em um estado entre "tão bom quanto novo" e "tão ruim quanto velho" ( $\hat{\theta} = 0.39$ ,  $CI = [0.20; 0.77]$ ).

Dado que a função intensidade  $\lambda(t)$  é convexa, por  $\hat{\beta} = 2.35 > 1$ , temos que pela propriedade 3 de Doyen e Gaudoin (2004), que o modelo  $ARI_{\infty}$  possui maior intensidade de desgaste que o modelo  $ARA_{\infty}$ , no entanto, essa propriedade não é válida para este estudo, pois a ineficiência de reparo  $\theta$  no estudo de Doyen e Gaudoin (2004) não é determinado a partir dos dados. Neste trabalho, conforme Toledo (2014), sob um ponto de visto prático, a estimação da ineficiência de reparo  $\theta$  é feita a partir dos dados do estudo.

#### 4.2.4. Determinação de Periodicidade Ótima Pontual

Uma vez escolhido o melhor modelo, vimos que o reparo efetuado nos motores na verdade reduziu a idade virtual dos mesmos, deixando-os entretanto, em uma condição intermediária entre o estado “tão bom quanto novo” ( $\theta = 1$ ) e “tão ruim quanto velho” ( $\theta = 0$ ). Passamos agora para estimativa pontual da periodicidade ótima conforme Toledo (2014) e descrito na Seção 3.1.

Segue algumas descrições da rotina:

- Comando:
  - tau.IR(file\_tij, mod, M, cost.ratio)
- Argumentos:
  - **file\_tij** – o conjunto de dados conforme exemplificado na Seção 4.2.1.
  - **mod** – “ARA” ou “ARI”.
  - **M** – memória do modelo, podendo ser qualquer valor inteiro positivo ( $m > 0$ ) ou “inf” para indicar memória infinita.
  - **cost.ratio** – representa a razão de custo ( $C_{MP}/C_{RI}$ ) entre o Custo da Manutenção Preventiva ( $C_{MP}$ ) e o Custo do Reparo Imperfeito ( $C_{RI}$ ).
- Saída:
  - Estimativa ótima pontual da periodicidade de manutenção preventiva.

**Exemplo 4.8:** Estimação da periodicidade ótima pontual, com a razão de custo ( $C_{MP}/C_{RI} = 1/1,23$ ) que representa uma diferença pequena entre os custos de manutenção. (TOLEDO, 2014).

```
> ex_4.8 <- tau.IR(motors, "ARA", 1, 1/1.23)
> ex_4.8
              Estimate
optimal periodicity 15300.93
```

**Exemplo 4.9:** Comparação das estimativas pontuais para periodicidade de manutenção preventiva entre as suposições de Reparo Mínimo e Reparo Imperfeito. Banco de dados “motors”.

Tabela 4.4 – Tabela de comparação das estimativas pontuais para periodicidade de manutenção. Fonte: Adaptado de Toledo, et al. (2015).

$C_{RM}/C_{MP}$	Razão de Custo	$\hat{\tau}_{RM}$	$\hat{\tau}_{RI}$
1.23	1/1.23	14238 hs	15888 hs
3	1/3	9441 hs	9544 hs
5	1/5	7461 hs	7563 hs
10	1/10	5421 hs	5443 hs
15	1/15	4497 hs	4779 hs

**Exemplo 4.10:**

```
> ex_4.10 <- tau.IR(motors, "ARI", 1, 1/1.23)
> ex_4.10
              Estimate
optimal periodicity 15615.26
```

**Exemplo 4.11:** Neste exemplo é realizada uma análise gráfica para compreender o efeito da periodicidade ótima ( $\tau$ ) em relação à ineficiência de reparo  $\theta$ . A construção da Figura 4.3 foi realizado fixando valores para  $\theta$  e estimando os parâmetros  $\beta$  e  $\eta$  das Equações (3.5) e (3.7). Este procedimento não é apresentado no pacote *ImperfectRepair*, pois conforme abordado por Toledo (2014), a estimação da ineficiência de reparo através dos dados se faz necessária.

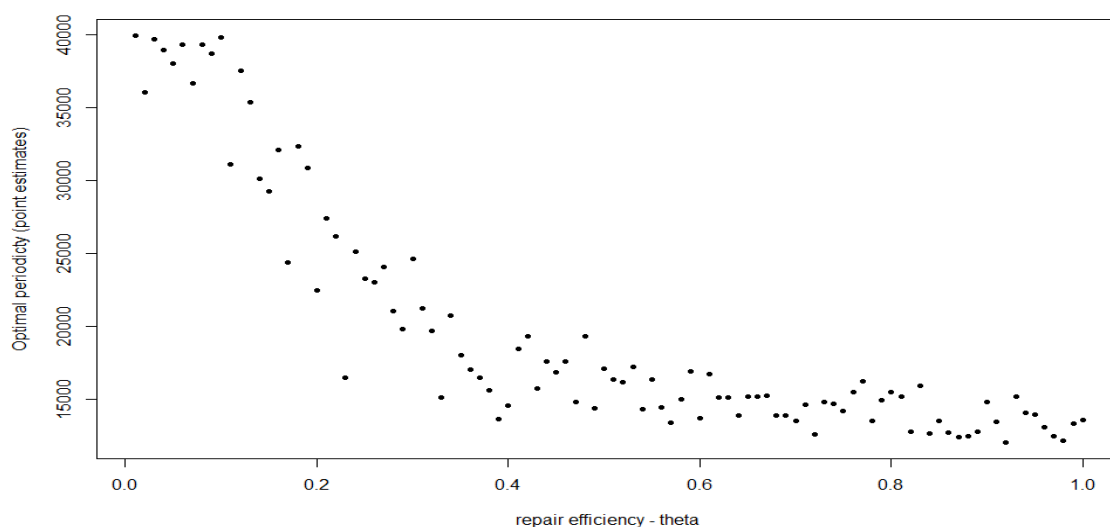


Figura 4.3 – Gráfico de Dispersão da Periodicidade Ótima ( $\tau$ ) em relação à ineficiência de reparo ( $\theta$ ), sob o banco de dados motors, classe de modelos  $ARA_1$ , truncado por tempo em  $T = 40.000$  h e razão de custo de 1/1.23. Fonte: Próprio Autor.

De acordo com a Figura 4.3, a estimativa pontual da periodicidade ótima  $\tau$  decresce com o aumento do valor do parâmetro  $\theta$ . Em outras palavras, valores maiores de  $\theta$ , que representam uma aproximação maior de uma política de Reparo Mínimo ( $\theta = 1$ ), associam-se a um aumento na frequência de Manutenções Preventivas ( $\tau$  pequeno). Contudo, pode-se observar que o efeito do parâmetro  $\theta$ , sob a frequência de Manutenções Preventivas, torna-se pequeno quando o custo de Reparo Imperfeito aumenta em relação ao custo de Manutenção Preventiva, representando uma razão de custo de 1/15, como mostrado na Figura 4.4.

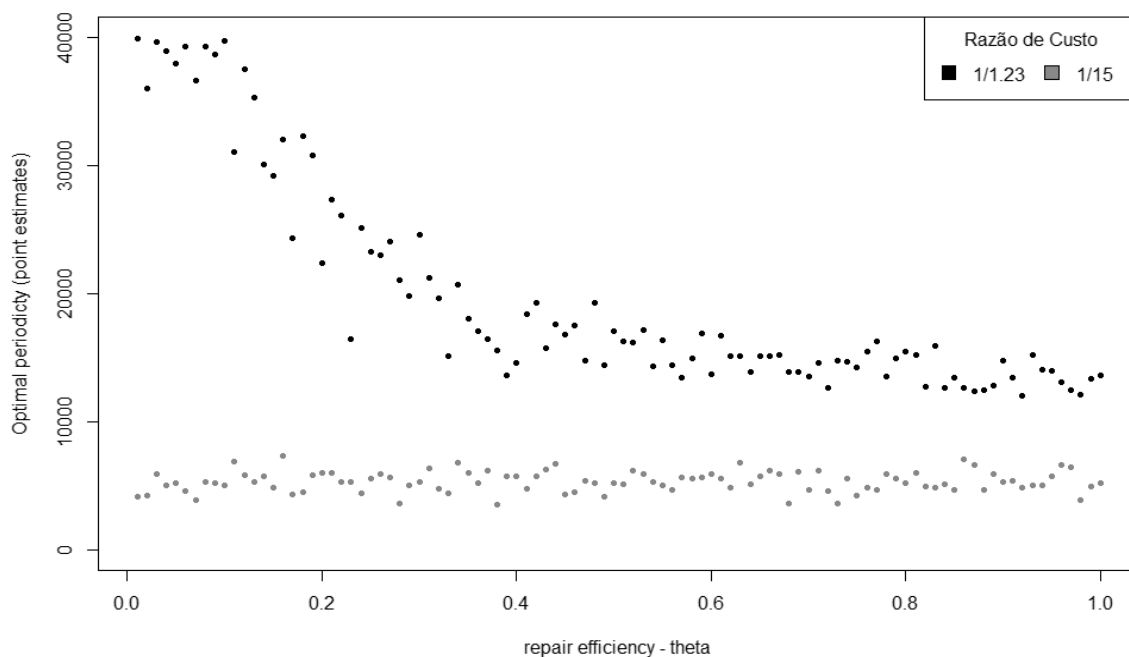


Figura 4.4 – Gráfico de Dispersão da Periodicidade Ótima ( $\tau$ ) em relação à ineficiência de reparo ( $\theta$ ), sob o banco de dados motores, classe de modelos  $ARA_1$ , truncado por tempo em  $T = 40.000$  h e razão de custo de 1/15. Fonte: Próprio Autor.

#### 4.2.5. Determinação do Intervalo de Confiança para Periodicidade Ótima pelo método *Bootstrap não-paramétrico*.

O intervalo de confiança aproximado para  $\tau$  é obtido usando a reamostragem *bootstrap* não paramétrica aplicada por Toledo (2014) e proposta por Efron e Tibshirani (1986). O método consiste na reamostragem com  $B$  (grande) substituições amostrais do conjunto de dados original, cada reamostragem tendo o mesmo número de sistemas do conjunto de dados original.

O método descreve as etapas de 1 a 3, descritas na Seção 3.1, e é aplicado para todas as  $B$  reamostragens, gerando  $B$  estimativas *bootstrap* de  $\tau$ , denotado aqui por

$\tau_i^b (i = 1, 2, \dots, B)$ . O  $100(1 - \alpha)\%$  intervalo de confiança percentílico para  $\tau$  é então dado pelos limites  $(\hat{\tau}_{[l]}^b, \hat{\tau}_{[u]}^b)$ , onde  $\hat{\tau}_{[i]}^b, (i = 1, 2, \dots, B)$  são as estimativas *bootstrap* ordenadas, tal que  $l = B \times (\alpha/2)$  e  $u = B \times (1 - \alpha/2)$ ,  $l$  e  $u$  aos menores e maiores inteiros mais próximos, respectivamente.

Sendo assim, antes de exemplificar, segue as descrições:

- Comando:
  - `tau.IR(file_tij, mod, M, cost.ratio, bootstrap = FALSE, n.boot = 10^4, conf = 0.95)`
- Argumentos:
  - **file\_tij** – o conjunto de dados conforme exemplificado na Seção 4.2.1.
  - **mod** – “ARA” ou “ARI”.
  - **M** – memória do modelo, podendo ser qualquer valor inteiro positivo ( $m > 0$ ) ou “inf” para indicar memória infinita.
  - **cost.ratio** – representa a razão de custo entre o Custo da Manutenção Preventiva e o Custo do Reparo Imperfeito.
  - **bootstrap** - (TRUE ou FALSE) Gera um intervalo de confiança para ( $\tau$ ) usando o método *bootstrap* não-paramétrico.
    - **default** – `bootstrap = FALSE`
  - **n.boot** – Tamanho do *bootstrap* para cálculo do intervalo de confiança.
    - **default** – `n.boot = 104`
  - **conf** – Nível de confiança para estimação do intervalo de confiança.
    - **default** – `conf = 0.95`
- Saída:
  - Estimação um intervalo de confiança para a periodicidade ótima pelo método *Bootstrap* não-paramétrico.

**Exemplo 4.12:**

```
> ex_4.1 <- tau.IR(motors, "ARA", 1, 1/1.23, bootstrap = TRUE, n.boot
= 10)
> ex_4.1
              Estimate  CI.low  CI.up
optimal periodicity 15671.87 13492.93 21035.57

> ex_4.3 <- tau.IR(motors, "ARA", 1, 1/5, bootstrap = TRUE, n.boot = 1
0)
```

```
> ex_4.3
```

```
          Estimate  CI.low  CI.up
optimal periodicity 7470.087 6255.048 10492.06
```

```
> ex_4.5 <- tau.IR(motors, "ARA", 1, 1/15, bootstrap = TRUE, n.boot = 10)
```

```
> ex_4.5
```

```
          Estimate  CI.low  CI.up
optimal periodicity 6050.974 3746.979 5600.848
```

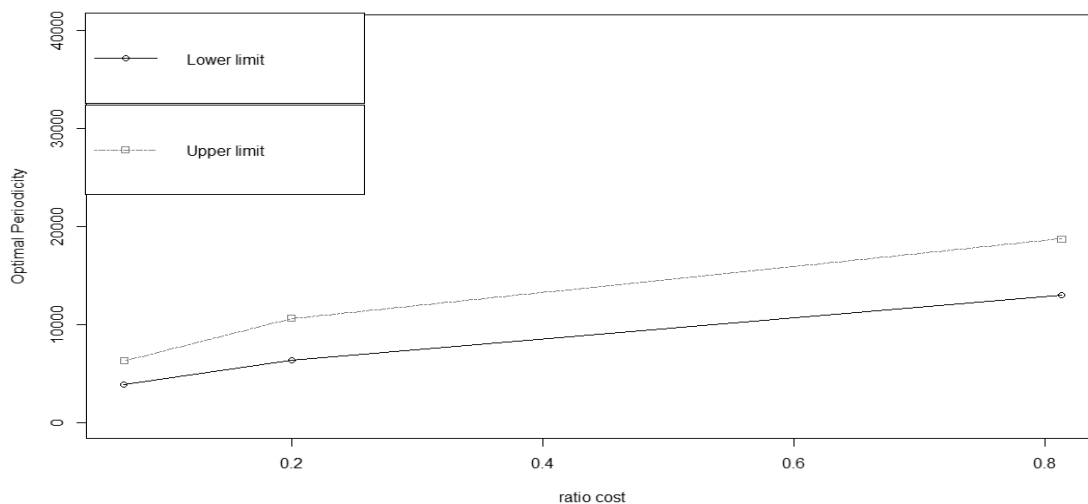


Figura 4.5 – Gráfico para comparação dos limites do Intervalo de Confiança ( $conf = 0.95$ ) para periodicidade ótima, gerado pelo método bootstrap, conforme parâmetros descritos nas funções acima (ex\_4.1, ex\_4.3 e ex\_4.5), variando apenas a razão de custo. Fonte: Próprio Autor.

#### 4.2.6. Análise do Banco de Dados "transformers"

O banco de dados "transformers" inicialmente envolveu 30 transformadores de potência de 300 e 345 quilovolts, e 21 tempos de falhas foram coletados. Entretanto, 11 ações de Manutenção Preventiva foram realizados no período, cada um sendo tratado como uma ação de reparo perfeito, e assim retornado o sistema em uma condição de "tão bom quanto novo".

Tabela 4.5 – Conjunto de Dados em forma de matriz para tratamento adequado na biblioteca. Fonte: "output" do R.

```
> transformers[1:12,]
      times failure system
[1,]  8.839      1      1
[2,] 17.057      1      1
[3,] 21.887      0      1
[4,]  9.280      1      2
[5,] 16.442      1      2
[6,] 21.887      0      2
[7,] 10.445      1      3
```

```
[8,] 13.533      0      3
[9,]  7.902      0      4
[10,] 8.414      0      5
[11,] 13.331     0      6
[12,] 17.156     1      7
```

```
> NHPPplp :: horizontal.plot(transformers)
```

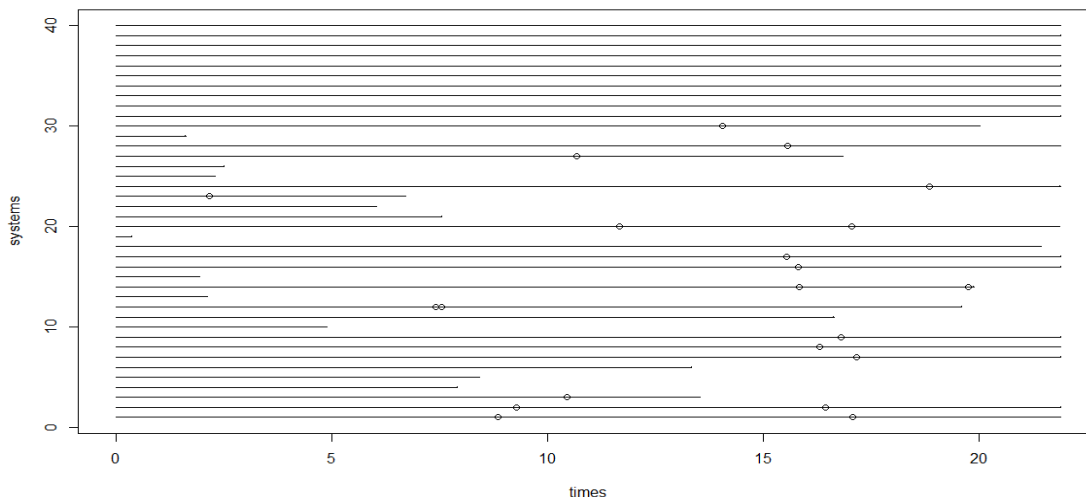


Figura 4.6 – Gráfico de Eventos para o banco de dados "transformers". Fonte: "output" do R.

```
> NHPPplp :: aalen.plot(transformers)
```

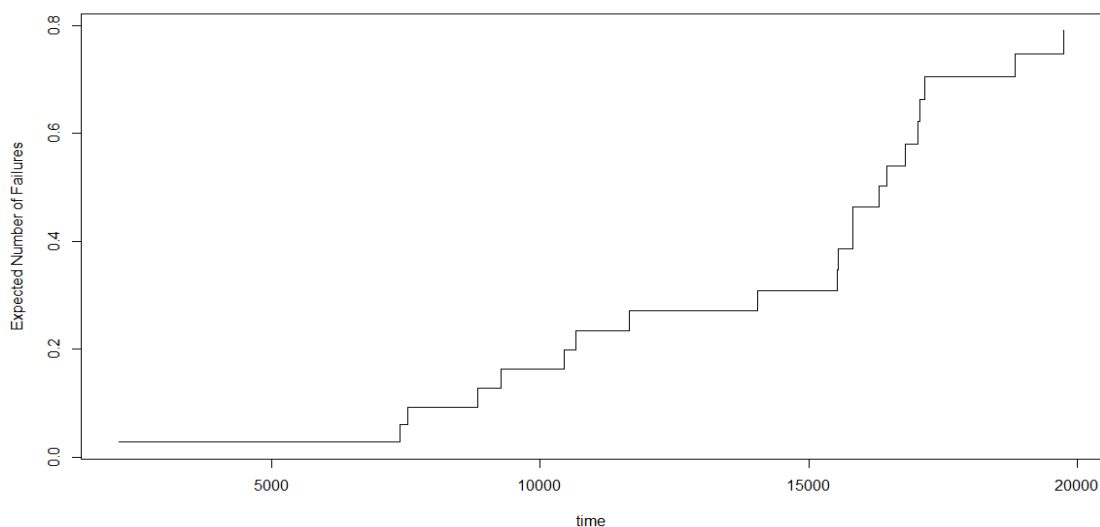


Figura 4.7 – Gráfico da Função Média Acumulada (Estimador de Nelson-Aalen) para o banco de dados "transformers". Fonte: "output" do R.

```
> cramer.fitplp(transformers)
Cramer-Von-Miser Test with df= 21
T= 0.2549932   p-value= 0.02826667
```

Rejeitamos  $H_0$  a nível de 5% ( $p - value = 0,0283$ ), ou seja há evidências suficientes que o histórico de falhas não é oriundo de um *NHPP* com funções intensidade dada pela *PLP*.

A Figura 4.7 (estimados de Nelson-Aalen para a função média acumulada) apresenta uma forma convexa, indicando que o tempo entre falhas para estes sistemas pode estar diminuindo, ou seja, o sistema está deteriorando. Mas pelo teste de Cramér-von Misses, tem-se evidências para rejeitar-se a hipótese que os dados seguem uma *NHPP*, ou seja, a suposição de reparo mínimo também é questionável aqui.

Com isso, podemos tentar o ajuste dos modelos *ARA* e *ARI* com várias memórias para os dados dos "transformers". Os resultados do ajuste estão a seguir.

```
> PLPIR.ml(transformers,"ARA",1)
      Estimate      sd  CI.low  CI.up
shape  2.1264396 1.227340 1.423253 3.177049
scale  22.8732938 1.130841 17.974716 29.106861
repair  0.4652924 2.095809  0.109113  1.98415
```

Com o comando PLPIR.ml, estimamos os valores para  $\beta(shape)$ ,  $\eta(scale)$  e  $\theta(repair)$  e seus intervalos de confiança de 95%. De acordo com o "output" do R, temos que  $1.423 < \beta < 3.177$ ,  $17.975 < \eta < 29.107$  e  $0.109 < \theta < 1.984$ . Corroborando com a análise exploratória da Figura 4.7, tem-se uma estimativa de  $\beta > 1$ , indicando que os transformadores tendem a falhar com mais frequência ao longo do tempo e que a eficiência de reparo após a falha tende a levar o equipamento em um estado entre "tão bom quanto novo" e "tão ruim quanto velho" com  $(1 - \theta) = 53,47\%$ .

```
> tau.IR(transformers,"ARA",1,1/1.23,bootstrap = TRUE,n.boot=10)
      Estimate  CI.low  CI.up
optimal periodicity 21.64812 19.21571 21.69822
```

Logo, de acordo com o "output" do R, temos uma periodicidade ótima  $\tau$  de 21.648 horas com um *IC*[19.216; 21.698] para o modelo *ARA*<sub>1</sub> sob suposição de reparo imperfeito. Em outras palavras, pode-se dizer que tempo  $\tau$  ótimo de manutenção preventiva (com ação de reparo perfeito) está entre  $19.216 < \tau < 21.698$  horas, com um nível de confiança de 95%, e que as manutenções corretivas (com ação de reparo imperfeito) rejuvenescem o sistema a uma condição  $(1 - \theta) = 54,47\%$  mais "jovem" que a situação imediatamente antes da ação de reparo.

### 4.3. Simulação de Conjunto de Dados

Sob a suposição de reparo imperfeito, não é possível o cálculo do valor real da periodicidade ótima pontual ( $\tau$ ), pois não há uma solução fechada que pode ser obtida para  $\Lambda(t)$ , como apresentado na Equação (3.2). Neste caso, a estimação da periodicidade

ótima pontual ( $\tau$ ) é então estimada pelo método de simulação de dados para diferentes cenários, como descrito na Seção 3.1.

Para a simulação de dados, utiliza-se como base o modelo desenvolvido por Toledo (2014) para a classe de modelos "ARA" e truncado por tempo, e é descrito a seguir.

#### 4.3.1. Simulação para a classe de modelos "ARA"

- Suponha que a  $m$  – ésimas falha no sistema tenha ocorrido no tempo  $t_m$ .
- Seja  $x = t_{m+1} - t_m$  o tempo decorrido entre a  $m$  – ésimas e a  $(m + 1)$  – ésimas falha.

Assim,

$$\begin{aligned} F_{X|t_1, \dots, t_m}(x) &= P(X \leq x | t_1, \dots, t_m) = 1 - P(X > x | t_1, \dots, t_m) \\ &= 1 - P(N(t_m + x) - N(t_m) = 0 | t_1, \dots, t_m) \\ &= 1 - \exp \left\{ -\Lambda_R \left( t_m + x - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_R \left( t_m - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) \right\} \end{aligned}$$

A última igualdade foi obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E[N(t_m, t_m + x) = 0] &= \int_{t_m}^{t_m + x} \lambda_R \left( u - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) du \\ &= \Lambda_R \left( t_m + x - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) - \Lambda_R \left( t_m - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(N(t_m, t_m + x) = 0) &= \exp \left\{ -\Lambda_R \left( t_m + x - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_R \left( t_m - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) \right\} \end{aligned}$$

- Agora, o  $(m + 1)$  – ésimas tempo de falha é obtido por meio dos passos [i] a [iii] a seguir:

- i. Gere  $u$ , um valor de uma variável aleatória seguindo uma distribuição contínua Uniforme  $(0, 1)$ .
- ii. Resolva  $F_{X|t_1, \dots, t_m}(x) = u$ .
- iii. Calcule  $t_{m+1} = t_m + x$ .

Note que [ii] corresponde a Equação Fundamental:

$$t_{m+1} = t_m + x = \Lambda_R^{-1} \left[ \Lambda_R \left( t_m - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \right) - \log(1 - u) \right] + (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \quad (4.1)$$

Particularmente, para o *PLP* tem-se  $\Lambda_R(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$  e  $\Lambda_R^{-1}(t) = \eta t^{\frac{1}{\beta}}$ .

Substituindo essas expressões na Equação Fundamental, tem-se então:

$$t_{m+1} = \eta \left[ \left( \frac{t_m - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p}}{\eta} \right)^\beta - \log(1 - u) \right]^{\frac{1}{\beta}} + (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p t_{m-p} \quad (4.2)$$

- d. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado por tempo (truncado no tempo  $T$ ), usando os passos [i] a [iii] recursivamente. Tempos de falha  $t_1, \dots, t_m$  são gerados até que  $t_{m+1} > T$ .

#### 4.3.2. Simulação para a classe de modelos "ARI"

- a. Suponha que a  $m$  – ésima falha no sistema tenha ocorrido no tempo  $t_m$ .
- b. Seja  $x = t_{m+1} - t_m$  o o tempo decorrido entre a  $m$  – ésima e a  $(m + 1)$  – ésima falha.

Assim,

$$\begin{aligned} F_{X|t_1, \dots, t_m}(x) &= P(X \leq x | t_1, \dots, t_m) = 1 - P(X > x | t_1, \dots, t_m) \\ &= 1 - P(N(t_m + x) - N(t_m) = 0 | t_1, \dots, t_m) \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp \left\{ -\Lambda_R(t_m + x) + \Lambda_R(t_m) + (1 - \theta).x. \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p \lambda_R(t_{m-p}) \right\}$$

$$= \log(1 - u)$$

A última igualdade foi obtida da seguinte forma:

$$E[N(t_m, t_m + x) = 0]$$

$$= \Lambda_R(t_m + x) - \Lambda_R(t_m) + (1 - \theta).x. \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p \lambda_R(t_{m-p})$$

e

$$P(N(t_m, t_m + x) = 0)$$

$$= \exp \left\{ -\Lambda_R(t_m + x) + \Lambda_R(t_m) + (1 - \theta).x. \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p \lambda_R(t_{m-p}) \right\}$$

c. Agora, o  $(m + 1)$  -ésimo tempo de falha é obtido por meio dos passos [i] a [iii] a seguir:

- i. Gere  $u$ , um valor de uma variável aleatória seguindo uma distribuição contínua Uniforme  $(0, 1)$ .
- ii. Resolva  $F_{X|t_1, \dots, t_m}(x) = u$ .
- iii. Calcule  $t_{m+1} = t_m + x$ .

Note que [ii] corresponde a Equação Fundamental:

$$-\left(\frac{t_m + x}{\eta}\right)^\beta + \left(\frac{t_m}{\eta}\right)^\beta + (1 - \theta).x. \underbrace{\sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{m-p}}{\eta}\right)^{\beta-1}}_{\text{asoma}} = \log(1 - u)$$

Como  $\Lambda_R(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$  e  $\lambda_R(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$ , temos:

$$-\left(\frac{t_m + x}{\eta}\right)^\beta + \left(\frac{t_m}{\eta}\right)^\beta + (1 - \theta).x. \underbrace{\sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{m-p}}{\eta}\right)^{\beta-1}}_{\text{asoma}} = \log(1 - u)$$

$$asoma = \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-1)} \theta^p (t_{m-p})^{\beta-1}$$

$$-(t_m + x)^\beta + (t_m)^\beta + \beta \cdot (1 - \theta) \cdot x \cdot asoma = \eta^\beta \log(1 - u) \times (\eta^\beta)$$

$$(t_m + x)^\beta - (t_m)^\beta - \beta \cdot (1 - \theta) \cdot x \cdot asoma + \eta^\beta \log(1 - u) = 0 \times (-1) \quad (4.3)$$

Diferentemente da simulação da classe de modelos "ARA", a determinação do valor de  $x$  dá-se por estimação numérica, especificamente pelo método Newton-Raphson.

- d. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado por tempo (truncado no tempo  $T$ ), usando os passos [i] a [iii] recursivamente. Tempos de falha  $t_1, \dots, t_m$  são gerados até que  $t_{m+1} > T$ .

Ressalta-se que as simulações podem também ser geradas pelo número de falhas, ao qual a restrição no item d é que  $N(t_{m+1}) > N(T)$ .

### 4.3.3. Rotina "PLPIR.sim"

Informações sobre a rotina.

- Comando:
  - PLPIR.sim(parameters, mod, trunc, systems, M = 1, model.trunc = 1)
- Argumentos
  - **parameters** – vetor de parâmetros  $\mu = c(beta, eta, theta)$ .
    - $\beta \rightarrow shape, \eta \rightarrow scale$  e  $\theta \rightarrow repair$
  - **mod** – Classe de modelos "ARA" ou "ARI".
  - **trunc** – tempo de truncamento por falha ou número de falhas para truncamento por falhas.
  - **systems** – número de sistemas a serem gerados.
  - **M** – memória do modelo, inteiro maior que 0 ( $m > 0$ ) ou "inf" para indicar memória infinita.
    - **default** – M = 1
  - **model.trunc** – [1] para truncamento por tempo e [2] para truncamento por falha.
    - **default** – model.trunc = 1

#### Exemplo 4.13:

```
> ex_2.1 <- PLPIR.sim(c(2.42, 15698, 0.54), "ARA", 40000, 3)
> ex_2.1
```

```

      time failure system
[1,] 17086.98      1      1
[2,] 18055.14      1      1
[3,] 24474.14      1      1
[4,] 25846.69      1      1
[5,] 29541.56      1      1
[6,] 32090.02      1      1
[7,] 40000.00      0      1
[8,] 15456.32      1      2
[9,] 18444.57      1      2
[10,] 24206.53     1      2
[11,] 36069.93     1      2
[12,] 40000.00     0      2
[13,] 17114.21     1      3
[14,] 22240.87     1      3
[15,] 23028.48     1      3
[16,] 25419.01     1      3
[17,] 26209.68     1      3
[18,] 30356.40     1      3
[19,] 35442.00     1      3
[20,] 37760.09     1      3
[21,] 40000.00     0      3

```

***Exemplo 4.14:***

```

> ex_2.2 <- PLPIR.sim(c(2.42, 15698, 0.54), "ARA", 4, 3, model.trunc = 2)
> ex_2.2

```

```

      time failure system
[1,] 9817.660      1      1
[2,] 15636.866     1      1
[3,] 24392.073     1      1
[4,] 25532.559     1      1
[5,] 18919.091     1      2
[6,] 28915.367     1      2
[7,] 29683.004     1      2
[8,] 32945.440     1      2
[9,] 7636.987      1      3
[10,] 9740.872     1      3
[11,] 16591.044    1      3
[12,] 20274.408    1      3

```

## Capítulo 5 – Conclusões

Neste trabalho, foi desenvolvida uma biblioteca em ambiente  $R$  para a análise de dados de sistemas reparáveis com a suposição de reparo imperfeito na ocorrência de falhas. Foram implementadas duas classes de modelos para reparos imperfeitos –  $ARI$  (*Arithmetic Reduction Intensity*) e  $ARA$  (*Arithmetic Reduction Age*) – ambos utilizando a forma funcional  $PLP$  (*Power Law Process*) para a função intensidade de referência. Desta forma, a biblioteca fornece funções capazes de determinar os parâmetros *shape* ( $\beta$ ) e *scale* ( $\eta$ ) da função  $PLP$  e o parâmetro  $\theta$  (indicativo da ineficiência de reparo) dos modelos  $ARA$  e  $ARI$  para um ordem de memória  $m$  especificada.

Além da estimação de parâmetros dos modelos, a biblioteca também possui uma função que permite a estimação pontual e por intervalo (via *Bootstrap* não paramétrico) da periodicidade ótima  $\hat{\tau}_{RI}$  da manutenção também sob a suposição de reparo imperfeito e modelos  $ARA$  e  $ARI$ , para razões de custo de interesse e fornecidas como *input* pelo usuário. Esta é a grande contribuição desta dissertação. As rotinas implementadas na biblioteca foram baseadas no trabalho de Toledo (2014).

Não menos importante, o pacote  $NHPPplp$  proposto por Madureira (2014), fornece um conjunto importante de funções para estimação de parâmetros da função  $PLP$  sob a suposição de reparo mínimo ( $\theta = 1$ ).

Vale destacar que no trabalho do Kijima, Morimura e Suzuki (1988), o grau de reparo, representado pelo parâmetro  $\theta$ , não é determinado a partir dos dados. O autor assume valores arbitrários para esse parâmetro e estima o valor de  $\tau_{RI}$  sob cada cenário. Na presente biblioteca, o parâmetro que representa o grau da ineficiência de reparo é estimado a partir do histórico de dados e, como consequência, o mesmo ocorre com a periodicidade ótima.

A biblioteca *ImperfectRepair* é bastante flexível em relação ao conjunto de dados a ser tratado e permite modelar situações diversas, ou seja, podem ser aplicados a sistemas que melhoram, deterioram ou nenhum dos dois. Além disso, este trabalho disponibiliza aos estudantes, pesquisadores, engenheiros ou a qualquer interessado no assunto, um manual de utilização detalhado. Por ser uma biblioteca desenvolvida em ambiente  $R$ , esta

ferramenta é prática, livre e de fácil utilização para análise de confiabilidade em sistemas reparáveis.

Entre as possibilidades futuras de continuação deste trabalho, temos:

- Implementação para biblioteca *ImperfectRepair*, de:
  - Rotinas para geração de gráficos da função média estimada, segundo a proposta de Toledo (2014).
  - Ferramentas de *goodness of fit*, como também apresentado por Toledo *et al.* (2015).
- Integração das duas bibliotecas:
  - *NHPPplp* proposta por Madureira (2014) e;
  - *ImperfectRepair* proposta neste trabalho.
- Adequação das duas bibliotecas, citadas acima, para apresentação do pacote para o *CRAN (The Comprehensive R Archive Network)* – Rede Global de Arquivos R.

## Capítulo 6 - Referências

- AALEN, O. Nonparametric Inference for a Family of Counting Processes. **The Annals of Statistics**, v. 6, p. 701-726, 1978.
- BAIN, L. J.; ENGELHARDT, M. Inferences on the parameters and current system reliability for a time truncated weibull process. **Technometrics**, v. 22, p. 421-426, 1980.
- BARLOW, R. E.; HUNTER, L. C. Optimum preventive maintenance policies. **Operations Research**, v. 8, n. 1, p. 90-100, 1960.
- BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. Mathematical Theory of Reliability. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 1987.
- BLOCK, H. W.; BORGES, W. S.; SAVITS, T. H. Age-dependent minimal repair. **Journal of Applied probability**, v. 22, p. 370-385, 1985.
- BOSWELL, M. T. Estimating and Testing Trend in a Stochastic Process of Poisson Type. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 37, p. 1564-1573, 1966.
- BROWN, M.; PROSCHAN, F. Imperfect repair. **Journal of Applied Probability**, p. 851-859, 1983.
- COOK, R. J.; LAWLESS, J. F. **The Statistical Analysis of Recurrent Events**. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Springer, 2007.
- CROW, L. Confidence interval procedures for the weibull process with applications to reliability growth. **Technometrics**, v. 24, n. 1, p. 67-72, fev. 1982.
- CROW, L. H. Reliability analysis for complex, repairable systems. **Technical report, DTIC Document**, n. 138, p. 379-410, dez. 1975.
- CUI, L. et al. Optimal allocation of minimal and perfect repairs under resource constraints. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 53, n. 2, p. 193-199, 2004.
- DOYEN, L. On the Brown-Proschan model when repair effects are unknown. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, v. 27, n. 6, p. 600-618, 2011.
- DOYEN, L.; GAUDOIN, O. Classes of imperfect repairs models based on reduction of failure intensity or virtual age. **Reliability Engineering & System Safety**, p. 45-56, 2004.

- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. Bootstrap Methods fo Standard Erros, Confidence Intervals, and Other Measures for Statistical Accuracy. **Biometrics**, p. 45-58, 1986.
- GAUDOIN, O.; YANG, B.; XIE, M. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 35, n. 8, p. 1525-1538, 2006.
- GERTSBAKH, I. **Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance**. 1<sup>a</sup>. ed. Beersheva: Springer, 2005.
- GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. Optimal maintenance time for repairable systems. **Journal of quality technology**, p. 48-53, 2007.
- GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. On the superpostion of overlapping poisson processes and nonparametric estimation of their intensity function. **Journal of Statistical Planning and Inference**, p. 3075-3083, 2011.
- KAWAI, H.; KOYANAGI, J.; OHNISHI, M. Optimal maintenance problems for markovian deteriorating systems. **Stochastic Models in reliability and Maintenance**, p. 193-218, 2002.
- KIJIMA, M. Some results for repairable systems with general repair. **Journal of Applied Probability**, p. 89-102, 1989.
- KIJIMA, M.; MORIMURA, H.; SUZUKI, Y. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. **European Journal of Operational Research**, p. 194-203, 1988.
- KVALOY, J. T.; LINDQVIST, B. H. TTT-based tests for trend in repairable systems data. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 60, p. 13-28, 1998.
- LEE, L.; LEE, K. Some results on inference for the weibull process. **Technometrics**, v. 20, n. 1, p. 41-45, 1978.
- LIM, T. J. Estimating system reliability with fully masked data under Brow-Proschan imperfect repair model. **Comunications in Statistical-Theory and Methods**, v. 59, n. 3, p. 277-289, 1998.
- LINDQVIST, B. H. Statistical modeling and analysis of repairable systems. **In 1st International Conference on Mathematical Methods in Reliability**, Bucareste, 1997.

- MADUREIRA, I. F. **Um Pacote Computacional para a Análise Estatística de Processos de Lei de Potência**. Universidade Federal de Brasília. Brasília, p. 70. 2014.
- MINE, H.; KAWAI, H.; FUKUSHIMA, Y. Preventive replacement of an intermittently-used system. **IEEE Transactions on Reliability**, p. 391-392, 1981.
- MORIMURA, H. On some preventive maintenance policies for IFR. **Journal of Operations Research Society of Japan**, v. 12, n. 3, p. 94-125, 1970.
- NAKAGAWA, T. Periodic and sequential preventive maintenance policies. **Journal of Applied Probability**, p. 536-542, 1986.
- NAKAGAWA, T. **Maintenance Theory of Reliability**. [S.l.]: Springer, 2011. 210-211 p.
- NOGUEIRA, C. F. . G. L. M. . S. M. B. Manutenção Industrial: Implementação da Manutenção Produtiva Total. **e-xacta**, Belo Horizonte, p. 175-197, 30 jun. 2012. Disponível em: <[www.unibh.br/revistas/exacta/](http://www.unibh.br/revistas/exacta/)>.
- OLIVEIRA, M. D.; GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. Bayesian inference for power law process with applications in repairable systems. **Journal of Statistical Planning and Inference**, p. 1151-1160, 2012.
- PAN, R.; RIGDON, S. E. Bayes inference for general repairable systems. **Journal of Quality Technology**, p. 41, 2009.
- PARK, D. H.; JUNG, G. M.; YUM, J. K. Cost minimizations for periodic maintenance policy of a system subject to slow degradation. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 68, p. 105-112, 2000.
- PHHELPS, R. I. Replacement policies under minimal repair. **The Journal of Operational Research Society**, v. 32, p. 549-554, 1981.
- PINTO, A. K.; XAVIER, J. N. **Manutenção: função estratégica**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2007.
- RIGDON, S. E.; BASU, A. P. Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems. In: RIGDON, S. E.; BASU, A. P. **Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2000. Cap. 1.

- SHEU, S.; GRIFFITH, W. Multivariate imperfect repair. **Journal of Applied Probability**, v. 29, n. 4, p. 957-956, 1992.
- SOETAERT, K. Package rootSolve: roots, gradients and steady-states in R. **CRAN**, R package version 1.5.6.1, 2014.
- STADJE, W.; ZUCKERMAN, D. A geeralized maintenance model fo stochastically deteriorating equipment. **European Journal of Operation Research**, p. 285-301, 1996.
- TOLEDO, M. L. G. **Determination of the optimal periodic maintenance policy under imperfect repair assumption**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 27-49. 2014.
- TOLEDO, M. L. G. D. et al. ARA and ARI Imperfect Repair Models: Estimation, Goodness-of-fit and Reliability Predictors. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 140, p. 107-115, 28 ago. 2015.
- WANG, H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. **European Journal of Operational Research**, v. 139, p. 469-489, 2002.
- WHITAKER, L. R.; SAMANIEGO, F. J. Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair. **Jounal of the American Statistical Association**, v. 84, n. 405, p. 301-309, 1989.
- WICKHAM, H. **R Packages: Organize, Test, Document and Share your Code**. [S.l.]: O'Reilly, 2015.
- YEH, R. H. Optimal inspection and replacement policies for multi-state deterioration systems. **European Journal of Operational Research.**, p. 248-259, 1996.