



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

**FORMULAÇÃO TEÓRICA E NUMÉRICA DE PROBLEMAS
DE CONTROLE ÓTIMO SEGUNDO DIFERENTES
ABORDAGENS MATEMÁTICAS DA DINÂMICA DE
AERONAVES**

JOEL LAGUÁRDIA CAMPOS REIS

Belo Horizonte, 05 de maio de 2021

Joel Laguárdia Campos Reis

FORMULAÇÃO TEÓRICA E NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE
CONTROLE ÓTIMO SEGUNDO DIFERENTES ABORDAGENS
MATEMÁTICAS DA DINÂMICA DE AERONAVES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas
Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de
Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projetos Mecânicos

Orientador: Prof. Ricardo Luiz Utsch de F. Pinto

(Universidade Federal de Minas Gerais)

Co-orientador: Prof. Dimas Abreu Dutra

(Universidade Federal de Minas Gerais)

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2021

R375f

Reis, Joel Laguárdia Campos.

Formulação teórica e numérica de problemas de controle ótimo segundo diferentes abordagens matemáticas da dinâmica de aeronaves [recurso eletrônico] / Joel Laguárdia Campos Reis. - 2021.

1 recurso online (254 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Ricardo Luiz Utsch de F. Pinto.

Coorientador: Dimas Abreu Dutra.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 253-254.

Bibliografia: f. 239-252.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Controle ótimo - Teses. 3. Aeronaves - Teses. 4. Trajetórias espaciais - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Pinto, Ricardo Luiz Utsch de Freitas. II. Dutra, Dimas Abreu. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

**FORMULAÇÃO TEÓRICA E NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO SEGUNDO DIFERENTES
ABORDAGENS MATEMÁTICAS DA DINÂMICA DE AERONAVES**

JOEL LAGUÁRDIA CAMPOS REIS

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto (orientador-Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Dimas Abreu Archanjo Dutra (Coorientador-Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Atair Rios Neto (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais/INPE), Dr. Paulo Henrique Iscold Andrade de Oliveira (California Polytechnic State University), Dr. Alexandre Salles da Cunha (Departamento de Ciência da Computação/UFMG), Dr. Guilherme Vianna Raffo (Departamento de Engenharia Eletrônica /UFMG) e Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Doutor em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "Projeto e Sistemas".

Tese aprovada no dia 05 de maio de 2021.

Por:



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, Professor do Magistério Superior**, em 20/05/2021, às 12:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dimas Abreu Archanjo Dutra, Professor do Magistério Superior**, em 20/05/2021, às 14:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Salles da Cunha, Professor do Magistério Superior**, em 25/05/2021, às 09:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Vianna Raffo, Professor do Magistério Superior**, em 25/05/2021, às 09:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Poley Martins Ferreira, Professor do Magistério**



Superior, em 25/05/2021, às 13:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Atair Rios Neto, Usuário Externo**, em 01/06/2021, às 10:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henriques Iscold Andrade de Oliveira, Usuário Externo**, em 08/06/2021, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0738519** e o código CRC **269F7337**.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Jesus, Autor da vida, que sempre esteve comigo me direcionando no caminho e me ensinando a viver conforme seus princípios.

À minha esposa, Izabela, por ter me apoiado de forma incondicional. Por seus conselhos, seus cuidados e por ter vivido comigo todos os detalhes da realização deste trabalho.

À minha família, por ser um importante suporte. Por me aconselharem e me apoiarem ao longo da vida.

Ao meu orientador Prof. Ricardo Utsch e co-orientador Prof. Dimas Abreu, por toda paciência em me auxiliarem no meu processo de desenvolvimento. Por todas boas conversas e ensinamentos.

Aos meus amigos que participaram comigo desta jornada e que sempre foram pessoas enriquecedoras na minha vida.

A todos estes deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

*Porque o SENHOR é bom, a sua misericórdia dura
para sempre, e, de geração em geração, a sua
fidelidade.*

Salmos 100.5

RESUMO

A teoria de controle ótimo é uma área de estudos que vem sofrendo importantes desenvolvimentos nas últimas décadas. Ainda hoje, este é um campo de estudo muito valioso no setor aeronáutico, onde tem-se buscado melhorias no planejamento de trajetórias ótimas. Dentro desta esfera, destacam-se dois importantes ramos. Um deles lida com o desenvolvimento de técnicas numéricas para a solução de problemas de otimização de trajetórias de uma maneira mais geral. Em um segundo ramo, tem-se como foco questões relacionadas à modelagem do movimento da aeronave e da aplicação destes modelos na formulação do problema matemático. Em ambos estes campos de estudo, notam-se discussões em aberto sujeitas a novos desenvolvimentos. No que diz respeito aos métodos numéricos, as técnicas de colocação direta têm sido aquelas que têm ganhado amplo destaque nas pesquisas. Porém, verifica-se a importância de uma visão mais aprofundada de seus fundamentos de tal forma que elas possam ser devidamente interpretadas e compreendidas. Quanto à modelagem da aeronave, observa-se a necessidade de uma discussão mais aprofundada a respeito dos efeitos relacionados à escolha e aplicação das diferentes técnicas de parametrização de sua atitude. Tais questões têm forte relação com a solução ótima e fazem parte de uma discussão ligada à formulação teórica do problema, a qual é anterior até mesmo à própria escolha da maneira de como solucioná-lo, i.e., à formulação numérica.

Sendo assim, propõem-se neste trabalho uma forma alternativa de formulação dos problemas de otimização de trajetórias de aeronaves, tanto sob o aspecto numérico quanto teórico. Mostra-se que o método de elementos finitos pode ser aplicado na formulação numérica de problemas de controle ótimo, apresentando uma arquitetura global na abordagem direta por parametrização completa, sob a qual, o método de colocação é visto como um caso particular. Introduz-se também uma discussão sobre como as diferentes maneiras de representação da atitude da aeronave afetam a formulação do problema. Cada forma de parametrização da atitude possui características específicas, inerentes à sua estrutura matemática, que, caso mal interpretadas e utilizadas, podem tornar o problema mal formulado, restringindo a sua solução a um determinado conjunto de trajetórias. Sugerem-se maneiras alternativas para o tratamento das restrições de contorno e demonstram-se como estas questões afetam a solução ótima do problema. As contribuições propostas são apresentadas na solução de um problema prático real no contexto de uma corrida aérea onde as trajetórias ótimas obtidas apresentaram boa correlação com dados experimentais obtidos em voo.

Verifica-se, por fim, que as discussões e propostas realizadas ao longo deste trabalho são de suma importância para uma abordagem mais coerente dos problemas de otimização da trajetória de aeronaves. Logo sugere-se que estas sejam tidas em consideração durante a abordagem desta classe de problemas.

Palavras-chave: controle ótimo; otimização de trajetória de aeronaves, rotações espaciais, método de elementos finitos, método de colocação direta.

ABSTRACT

Optimal control theory is an area of study that has undergone important developments in recent decades. Even today, this is a valuable field of study in the aeronautical sector, where improvements have been sought in the planning of optimal trajectories. Within this sphere, two important branches stand out. One of them deals with the development of numerical techniques for solving trajectory optimization problems in a more general way. In a second branch, it focuses on issues related to modeling the movement of the aircraft and the application of these models in the formulation of the mathematical problem. In both of these fields of study, open discussions are noted, subject to new developments. Concerning numerical methods, direct collocation techniques have been those that have gained wide prominence in research. However, there is the importance of a more in-depth view of its foundations in such a way that they can be properly interpreted and understood. For aircraft motion modeling, there is a need for a more in-depth discussion about the effects related to the choice and application of the different techniques for parameterizing its attitude. Such questions have a strong relationship with the optimal solution and are part of a discussion related to the theoretical formulation of the problem, which predates even the choice of how to solve it, i.e., the numerical formulation.

Therefore, this work proposes an alternative form of formulating the problems of trajectory optimization of aircraft, both from a numerical and theoretical point of view. It is shown that the finite element method can be applied in the numerical formulation of optimal control problems, presenting a global architecture in the direct approach by complete parameterization, under which, the collocation method is seen as a particular case. A discussion is also introduced on how the different ways of representing the attitude of the aircraft affect the formulation of the problem. Each form of parameterization of the attitude has specific characteristics, inherent to its mathematical structure, which, if misinterpreted and used, can make the problem poorly formulated, restricting its solution to a certain set of trajectories. Alternative ways are suggested for the treatment of boundary constraints and demonstrate how these issues affect the optimal solution of the problem. The proposed contributions are presented in the solution of a real practical problem in the context of an air race where the optimal trajectories obtained presented a good correlation with experimental data obtained in flight.

Finally, it appears that the discussions and proposals carried out throughout this work are of paramount importance for a more coherent approach to the problems of optimizing the

trajectory of aircraft. It is therefore suggested that these be taken into account when addressing this class of problems.

Keywords: optimal control; aircraft trajectory optimization; spatial rotations; finite element methods; direct collocation method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1 - Sistema do horizonte em relação ao sistema da Terra.....	46
FIGURA 3.2 - Sistema de eixos do corpo.	47
FIGURA 3.3 - Sistema de eixos do vento.	47
FIGURA 3.4 - Sistema inercial e sistema em movimento.	48
FIGURA 3.5 - Representação do um ponto nos sistemas $\mathcal{S}_I$ e $\mathcal{S}_B$	51
FIGURA 3.6 - Movimento arbitrário de um vetor p	52
FIGURA 3.7 – Representação de um homeomorfismo.....	56
FIGURA 3.8 - Rotações no espaço 2D.....	56
FIGURA 3.9 - Projeção de mapas esféricos em um plano Euclidiano.....	57
FIGURA 3.10 – Representação de um vetor $\{u\}$ nos sistemas $\mathcal{S}_I$ e $\mathcal{S}_B$	59
FIGURA 3.11 - Maneira alternativa para interpretação da matriz de rotação.	63
FIGURA 3.12 - Análise do movimento do sistema acoplado à aeronave.	64
FIGURA 3.13 – Representação da sequência de rotações dos ângulos de Euler.	66
FIGURA 3.14 – Componentes de velocidades nos eixos do corpo.	75
FIGURA 3.15 – Relações das forças propulsivas entre eixos do corpo e eixos do vento.....	77
FIGURA 3.16 – Sentido positivo das deflexões dos comandos da aeronave.	80
FIGURA 3.17 – Comparação de simulações da rotação de um corpo utilizando os ângulos de Euler e os quatérnios. Adaptado de Erhard, Horn e Diehl (2016).....	89
FIGURA 4.1 – Descontinuidade dos ângulos de Euler.	102
FIGURA 4.2 - Voo de uma aeronave em altitude constante.	103
FIGURA 4.3 – Quatérnios antipodais durante o rolamento de uma aeronave.	104
FIGURA 4.4 - Valores dos quatérnios durante a rotação de 2π em torno dos eixos x_B , y_B e z_B	105
FIGURA 4.5 - Vista superior do início e fim da trajetória do caso 1.....	106
FIGURA 4.6 - Trajetórias distintas para o caso 1.	106
FIGURA 4.7 - Vista lateral de trajetórias distintas para o caso 2.	108
FIGURA 4.8 - Trajetórias distintas para os ângulos de Euler no caso 2.....	109
FIGURA 4.9 - Trajetória dos quatérnios durante a rotação da aeronave.	110
FIGURA 4.10 - Possível trajetória para o caso 3.	111
FIGURA 4.11 - Vista lateral de trajetórias distintas para o caso 4.	112
FIGURA 4.12 - Trajetória de um tunô barril.....	118

FIGURA 4.13 - Trajetória periódica.	119
FIGURA 5.1 - Tipos de abordagem por métodos diretos.....	126
FIGURA 5.2 - Representação da Malha.....	129
FIGURA 5.3 - Resumo das condições de colocação no método direto de Hermite-Simpson.....	145
FIGURA 5.4 - Comparação da interpolação polinomial (linha contínua) de ordem $n = 5, 10$ e 15 para a função $f(\tau)=1/(1+\tau+15\tau^2)$ (linha tracejada) com uma distribuição LGL.	147
FIGURA 5.5 - Panorama sobre a solução do Problema de Controle Ótimo pelo MEF.....	157
FIGURA 5.6 – Representação de um problema Bang-Bang.....	159
FIGURA 5.7 - Refinamento da malha para solução do problema Bang-Bang.	160
FIGURA 5.8 - Solução numérica dos estados para o problema Bang-Bang.....	161
FIGURA 5.9 - Solução numérica do controle para o problema Bang-Bang.....	162
FIGURA 6.1 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. As aeronaves em preto indicam a solução ótima obtida, enquanto que as cinzas representam a solução inicial utilizada no problema.....	168
FIGURA 6.2 - Trajetória de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.	168
FIGURA 6.3 - Ângulos de Euler relativos à trajetória ótima obtida para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$	169
FIGURA 6.4 - Distância entre pontos em uma esfera.....	171
FIGURA 6.5 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. As aeronaves em preto indicam a solução ótima obtida, enquanto que as cinzas representam a solução inicial utilizada no problema.....	172
FIGURA 6.6 - Trajetória de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.	172
FIGURA 6.7 - Ângulos de Euler relativos à trajetória ótima obtida para os quatérnios finais iguais a $\{q\}=\{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$	173
FIGURA 6.8 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.	173
FIGURA 6.9 - Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 2, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_0(t_f) = +1$; (b) $q_0(t_f) = -1$	175

FIGURA 6.10 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 2 utilizando quatérnios unitários, para soluções de partida distintas. (a) $q_0(t_f) = +1$ (b) $q_0(t_f) = -1$	176
FIGURA 6.11 - Ângulos de Euler relativos à trajetórias ótimas obtidas para as diferentes soluções de partida do Exemplo 2.	177
FIGURA 6.12 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 3 utilizando ângulos de Euler, para soluções de partida distintas. (a) $\chi(t_f) = -3\pi$; (b) $\chi(t_f) = -\pi$; (c) $\chi(t_f) = +\pi$; e (d) $\chi(t_f) = +3\pi$. ..	179
FIGURA 6.13 - Trajetórias de tempo mínimo dos ângulos de Euler do Exemplo 3, para soluções de partida distintas. A linha pontilhada indica as diferentes soluções de partida de χ . (a) $\chi(t_f) = -3\pi$; (b) $\chi(t_f) = -\pi$; (c) $\chi(t_f) = +\pi$; e (d) $\chi(t_f) = +3\pi$	180
FIGURA 6.14 - Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 3, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_3(t_f) = -1$; (b) $q_3(t_f) = +1$	182
FIGURA 6.15 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 3 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.	183
FIGURA 6.16 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 4 utilizando quatérnios unitários, para soluções de partida distintas. (a) $q_3(t_f) = +1$; (b) $q_3(t_f) = -1$	184
FIGURA 6.17 – Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 4, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_3(t_f) = +1$; (b) $q_3(t_f) = -1$	185
FIGURA 6.18 - Ângulos de Euler relativos à trajetórias ótimas obtidas para as diferentes soluções de partida do Exemplo 4.	185
FIGURA 6.19 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 4 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.	186
FIGURA 6.20 - Valor mínimo da função de custo para um número fixo de elementos.	193
FIGURA 6.21 - Comparação entre as soluções das técnicas de controle ótimo e suas respectivas simulações para diferentes casos apresentados na TABELA 6.2.	194
FIGURA 6.22 - Comparação entre a técnica ótima de controle e sua respectiva simulação para o modelo EDO ($\lambda_R = 1E-5$).	195
FIGURA 6.23 - Comparação entre a técnica ótima de controle e sua respectiva simulação para o modelo EDA (Eq.(3.123))	196
FIGURA 6.24 - (a) Pilone duplo; (b) Pilone simples.	200
FIGURA 6.25 - Chicane.	200

FIGURA 6.26 - Manobra de Retorno.....	200
FIGURA 6.27 - Distância da aeronave à linha de segurança.	203
FIGURA 6.28 - Três vistas da aeronave Zivko Edge 540.....	204
FIGURA 6.29 – Curvas $C_L \times \alpha$ e $C_m \times \alpha$ para diferentes deflexões do profundor.	206
FIGURA 6.30 - Curvas $C_L \times \eta$ e $C_m \times \eta$ para diferentes ângulos de ataque.....	207
FIGURA 6.31 - Curvas $C_L \times q$ e $C_m \times q$ para diferentes ângulos de ataque.....	207
FIGURA 6.32 – Curvas $C_\ell \times \beta$, $C_y \times \beta$ e $C_n \times \beta$ para diferentes ângulos de ataque.	207
FIGURA 6.33 - Curvas $C_\ell \times p$, $C_y \times p$ e $C_n \times p$ para diferentes ângulos de ataque.	208
FIGURA 6.34 - Curvas $C_\ell \times r$, $C_y \times r$ e $C_n \times r$ para diferentes ângulos de ataque.....	208
FIGURA 6.35 – Curvas $C_\ell \times \zeta$, $C_y \times \zeta$ e $C_n \times \zeta$ para diferentes ângulos de ataque.	208
FIGURA 6.36 - Curvas $C_\ell \times \xi$ e $C_n \times \xi$ para diferentes ângulos de ataque.	209
FIGURA 6.37 - Curva de tração máxima para diferentes velocidades de voo.	211
FIGURA 6.38 - Posição dos portões e linhas de segurança do circuito.	212
FIGURA 6.39 - Trajetórias obtidas para diferentes soluções de partida utilizando o modelo de massa-ponto com representação da atitude pelas matrizes de rotação.	213
FIGURA 6.40 - Trajetória obtida com atitude representada pelos quatérnios, mas com uma solução de partida mal selecionada.	214
FIGURA 6.41 - Trajetória das variáveis x , y , h e V e dos ângulos de Euler.....	215
FIGURA 6.42 - Trajetória dos elementos da matriz de rotação.	216
FIGURA 6.43 - Trajetória das velocidades angulares.....	216
FIGURA 6.44 - Ângulos de ataque, coeficientes de sustentação e de arrasto ao longo da trajetória.....	217
FIGURA 6.45 – Fator de carga vertical ao longo da trajetória.	217
FIGURA 6.46 - Vista superior das trajetórias obtidas pelo modelo de corpo-rígido e diferentes modelos aerodinâmicos.	218
FIGURA 6.47 - Vista tridimensional das trajetórias obtidas pelo modelo de corpo-rígido e diferentes modelos aerodinâmicos.....	219
FIGURA 6.48 - Trajetórias obtidas para x , y e h pelo modelo de corpo rígido.	219
FIGURA 6.49 - Trajetórias obtidas para u , v e w pelo modelo de corpo rígido.	219
FIGURA 6.50 - Trajetórias obtidas para p , q e r pelo modelo de corpo rígido.....	220
FIGURA 6.51 - Trajetórias obtidas para os quatérnios pelo modelo de corpo rígido.....	220
FIGURA 6.52 – Valores dos ângulos de Euler ϕ , θ e ψ convertidos a partir dos quatérnios obtidos pelo modelo de corpo rígido.	221

FIGURA 6.53 – Valores das variáveis de controle η , ξ , ζ e δ_{Te} da solução para o modelo de corpo rígido.	221
FIGURA 6.54 - Valores das variáveis V , α e β da solução para o modelo de corpo rígido. .	222
FIGURA 6.55 - Valores dos coeficientes aerodinâmicos C_L , C_D , C_y , C_ℓ , C_m e C_n da solução para o modelo de corpo rígido.....	222
FIGURA 6.56 - Valores dos fatores de carga verticais da solução para o modelo de corpo rígido.	223
FIGURA 6.57 - Vista superior das trajetórias de dois pilotos em relação à trajetória obtida pela solução do MEF.....	227
FIGURA 6.58 - Vista tridimensional das trajetórias de dois pilotos em relação à trajetória obtida pela solução do MEF.	227
FIGURA 6.59 - Comparação das acelerações nos eixos x_B e z_B entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.	228
FIGURA 6.60 - Comparação das velocidades angulares nos eixos do corpo entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.	229
FIGURA 6.61 - Comparação das variações das deflexões no profundor entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.	229
FIGURA 6.62 - Comparação das posições x , y e h entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.	229
FIGURA 6.63 - Comparação das velocidades de voo (em relação ao referencial inercial) entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.	230
FIGURA 6.64 - Comparação das componentes de velocidades de voo (em relação ao referencial inercial) entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.....	230

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – Resumo de símbolos utilizados para descrever os ângulos de Euler.....	67
TABELA 6.1 - Solução para diferentes análises das formulações dos quatérnios em uma manobra de tempo mínimo	191
TABELA 6.2 - Valor mínimo da função de custo para representação dos quatérnios unitários em uma manobra de mínima energia.....	192
TABELA 6.3 - Valor mínimo da função de custo para representação da matriz de rotação em uma manobra de mínima energia.....	195
TABELA 6.4 - Variáveis relativas às restrições de trajetória.	204
TABELA 6.5 - Características geométricas, inerciais e propulsivas da aeronave Zivko Edge 540.	205
TABELA 6.6 - Coeficientes aerodinâmicos linearizados.	209
TABELA 6.7 - Características dos diferentes portões do circuito analisado.	211
TABELA 6.8 - Tempo de execução da trajetória para os diferentes modelos.	224
TABELA 6.9 - Raiz do erro médio quadrático da solução obtida pelo MEF em relação à simulação livre para as diferentes variáveis de estado.	225
TABELA 6.10 - Tempo computacional para obtenção da solução pelo MEF.....	226

LISTA DE SÍMBOLOS

$\{\mathbf{a}_A^B\}_C$	Vetor de aceleração do ponto A relativo à origem do sistema C e representado no sistema de coordenadas B
a_{som}	Velocidade do som
α	Ângulo de ataque
α_j	Coeficientes a determinar
β	Ângulo de derrapagem
$\bar{c}$	Corda média aerodinâmica
C	Força lateral
C_L	Coeficiente de sustentação
C_D	Coeficiente de arrasto
C_Y	Coeficiente de força lateral
C_ℓ	Coeficiente aerodinâmico do momento de rolamento
C_m	Coeficiente aerodinâmico do momento de arfagem
C_n	Coeficiente aerodinâmico do momento de guinada
$C_j^{(k)}$	Funções de base para as aproximações dos controles
$\mathbf{c}$	Vetor de restrições
d_k	Distância mínima do CG à linha de segurança
D	Força de arrasto
δ_T	Posição da manete de controle dos motores
$E_j^{(k)}$	Funções de base para as aproximações dos estados
ϵ	Ângulo entre o eixo x_W e a projeção da linha de tração no plano $x_W z_W$
ϵ_i	Erro de discretização ao longo de cada elemento
η_i	Erro local absoluto de cada elemento
η	Ângulo de rotação
η	Controle de voo longitudinais
$\mathbf{f}$	Equações dinâmicas diferenciais do modelo
$\mathbf{F}$	Vetor de forças externas
$\mathbf{F}$	Vetor de funções dinâmicas
$\{\phi, \theta, \psi\}$	Ângulos de Euler nos eixos do corpo
g	Aceleração gravitacional
$\mathbf{g}$	Equações dinâmicas algébricas do modelo
$\mathbf{g}(\mathbf{y})$	Vetor gradiente da função objetivo
$\mathbf{G}$	Matriz Jacobiana do vetor de restrições

h	Altura em relação à origem do sistema referencial inercial
$\mathbf{h}$	Quantidade de movimento angular
$\mathbf{H}_L$	Matriz Hessiana da Função Lagrangiana
I	Tensor dos momentos de inércia
J	Funcional de desempenho
κ	Parâmetro de referência para definição dos vínculos de contorno
κ_T	Ângulo formado entre a linha de tração e o plano de simetria
L	Força de sustentação
$\mathcal{L}$	Termo do índice de desempenho, função das variáveis dinâmicas
$L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$	Função Lagrangiana do problema de otimização
ℓ_j	Polinômios de Lagrange
$\{L_A, M_A, N_A\}$	Momentos aerodinâmicos nos eixos do corpo
$\{L_T, M_T, N_T\}$	Momentos relativos ao sistema propulsivo nos eixos do corpo
λ_q	Coeficiente de amortecimento para os quatérnios
λ_R	Coeficiente de amortecimento para as matrizes de rotação
$\boldsymbol{\lambda}$	Multiplicadores de Lagrange
m	Massa
$\mathbf{M}$	Vetor de momentos externos
$\mathcal{M}$	Termo do índice de desempenho, função das variáveis no contorno
M	Número de Mach
$\{\mu, \gamma, \chi\}$	Ângulos de Euler nos eixos do vento
n_{z_B}	Fator de carga no eixo z_B
ν	Ângulo formado entre a linha de tração e o plano $x_W z_W$
$\{\boldsymbol{\omega}_A^B\}_C$	Vetor da velocidade angular do ponto A relativo à origem do sistema C e representado no sistema de coordenadas B
$\{\Omega_A^B\}_C$	Matriz antissimétrica de propagação do vetor de velocidades angulares do ponto A relativo à origem do sistema C e representado no sistema de coordenadas B
$\mathbf{p}$	Vetor de parâmetros estáticos
P_n	Polinômio de Legendre
$\{p, q, r\}$	Velocidades angulares nos eixos do corpo
$\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$	Velocidades angulares adimensionalizadas nos eixos do corpo
$\{p_W, q_W, r_W\}$	Velocidades angulares nos eixos do vento
$\boldsymbol{\varphi}$	Função de restrições da trajetória
$\phi_j(t)$	Funções de base
$\boldsymbol{\psi}$	Função dos vínculos de contorno

Q	Matriz de pesos no funcional de mínimo esforço
{q}	Quatérnios unitários
q_0, q_1, q_2, q_3	Elementos dos quatérnios unitários
R	Matriz de rotação
R	Função do resíduo
R	Matriz de pesos no funcional de rastreamento
$\mathbb{R}$	Espaço dos números reais
$\{\mathbf{r}_A^B\}_C$	Vetor da posição do ponto A relativo à origem do sistema C e representado no sistema de coordenadas B
ρ	Densidade do escoamento
S	Número de segmentos de uma trajetória fracionada
S	Área de referência
$SO(n)$	Espaço ortogonal especial n-dimensional
$\mathcal{S}$	Sistema de referência
$\mathbb{S}^n$	Espaço topológico de uma n-esfera unitária
σ_T	Ângulo entre o eixo x_B e a projeção da linha de tração no plano $x_B z_B$
$\sigma^{(k)}$	Erro local absoluto para a k-ésima variável
t	Variável independente (tempo)
$t_{i,j}$	Elemento da matriz de rotação na linha i e coluna j
T	Força de tração do sistema propulsivo
T_{OAT}	Temperatura externa
$T_{2,1}$	Matriz de transformação do sistema $\mathcal{S}_1$ para o sistema $\mathcal{S}_2$
T	Trajetória de um sistema
τ	Representação normalizada para a variável independente
τ	Controles de torque
θ_g	Vetor da proa de cada portão
$\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$	Ângulos de Euler em torno dos eixos x, y e z , respectivamente
u	Vetor de variáveis de controle
$\hat{u}_i^{(k)}$	Componente de aproximação do controle da k-ésima componente do sistema
$U_{i,j}^{(k)}$	Coeficientes de aproximação para os controles
Y	Função dos vínculos de conexão entre diferentes segmentos
$\{u, v, w\}$	Velocidades lineares nos eixos do corpo
$\{\mathbf{v}_A^B\}_C$	Vetor da velocidade linear do ponto A relativa à origem do sistema C e representado no sistema de coordenadas B
V	Velocidade do centro de gravidade

$\{V_{wx}, V_{wy}, V_{wz}\}$	Velocidades do vento nas direções x_T , y_T e z_T , respectivamente
V_A	Velocidade de manobra da aeronave
V_C (75%)	Velocidade de cruzeiro a 75% da potência da aeronave
V_{NE}	Velocidade nunca exceder da aeronave
$w(t)$	Função peso
$\mathbf{x}$	Vetor de variáveis de estado
$\{x, y, z\}$	Eixos dos sistemas de coordenadas
$\{X, Y, Z\}$	Forças nos eixos do corpo
$\hat{x}_i^{(k)}$	Componente de aproximação do estado da k-ésima componente do sistema
$X_{i,j}^{(k)}$	Coeficientes de aproximação para os estados
ξ	Controle de voo laterais
ξ_i	Representação totalmente normalizada para a variável independente
$\mathbf{y}$	Vetor de decisão
ζ	Controle de voo direcionais
ζ_i	Vetor de restrições dinâmicas
$\mathbb{Z}$	Espaço dos números inteiros
$\mathbf{z}(t)$	Função arbitrária

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	23
1.1	Revisão Bibliográfica	25
1.1.1	Otimização de Trajetórias e Controle Ótimo.....	25
1.1.2	Planejamento de Trajetória de Aeronaves	29
1.2	Objetivos e Contribuições.....	35
1.3	Organização da Tese	37
2	FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO.....	39
2.1	Problema de Controle Ótimo	40
2.2	Problema de Multi-fases	43
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA ÓTIMA DE AERONAVES	45
3.1	Vínculos Dinâmicos.....	46
3.1.1	Sistemas de Referência.....	46
3.1.2	Equações de Movimento	48
3.1.3	Representação da Atitude de um Sistema Referencial	55
3.1.4	Equações Dinâmicas do Movimento da Aeronave.....	74
3.2	Restrições de Trajetória	96
3.3	Índice de Desempenho.....	97
3.4	Trajetória Fracionada	99
4	FORMULAÇÃO DOS VÍNCULOS DE CONTORNO	101
4.1	Características das Diferentes Formas de Parametrização da Atitude sobre as Condições de Contorno	101
4.2	Proposta para modelagem dos vínculos de contorno.....	113
4.3	Condições onde as limitações das formas de parametrização são úteis.....	117
4.4	Comentários	120

5	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO E O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	122
5.1	Métodos Diretos para a Solução de Problemas de Otimização de Trajetória.....	123
5.2	Formulação do Problema pelo Método de Elementos Finitos.....	126
5.3	Aproximação das Funções de Estado e Controle.....	131
5.4	Método de Resíduos Ponderados	135
5.4.1	Colocação	137
5.4.2	Subdomínios	138
5.4.3	Galerkin	138
5.4.4	Mínimos Quadrados	139
5.4.5	Comentários.....	139
5.5	Relação entre Estado e Controle	140
5.6	Casos Particulares do Método de Elementos Finitos.....	141
5.6.1	Colocação Trapezoidal	142
5.6.2	Colocação de Hermite-Simpson	143
5.6.3	Colocação Ortogonal	146
5.6.4	Comentários.....	149
5.7	Considerações Sobre a Utilização do Método de Elementos Finitos	151
5.8	Problema de Programação Não-Linear.....	154
5.9	Exemplo de Aplicação do MEF.....	158
5.10	Ferramentas para a Solução de problemas de Otimização de Trajetória	162
6	APLICAÇÕES E RESULTADOS	165
6.1	Influência das Condições de Contorno das Representações da Atitude na Solução do Problema de Planejamento de Trajetória.....	166
6.1.1	Exemplo 1.....	167
6.1.2	Exemplo 2.....	174
6.1.3	Exemplo 3.....	177
6.1.4	Exemplo 4.....	183

6.1.5	Comentários.....	187
6.2	Integração Numérica das Equações Cinemáticas da Atitude.....	188
6.2.1	Manobra de Mínimo Tempo.....	190
6.2.2	Manobra de Mínimo Esforço.....	192
6.2.3	Comentários.....	196
6.3	Corridas Aéreas como Estudo de Caso.....	197
6.3.1	Regras da Corrida e Critério de Segurança	199
6.3.2	Modelo da aeronave.....	204
6.3.3	Análise da trajetória ótima e comparação com dados experimentais.....	211
6.3.4	Comentários.....	232
7	CONCLUSÃO.....	234
7.1	Comentários Finais	234
7.2	Síntese.....	237
7.3	Sugestão de Trabalhos Futuros	237
8	REFERÊNCIAS.....	239
	APÊNDICE	253

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Controle Ótimo é um ramo de estudo que lida com problemas que visam determinar as entradas de um sistema dinâmico para obter o melhor desempenho, de acordo com um determinado critério. Tal área de estudo se originou a partir da proposição de um problema matemático colocado por Johann Bernoulli no século XVII. Este problema, conhecido como Problema da Braquistócrona¹, consiste em determinar qual a curva descrita por uma partícula entre dois pontos A e B em um plano vertical, de tal forma que a partícula parta de A e atinja B no menor tempo possível apenas sob efeito gravitacional (LIBERZON, 2012). A partir do desenvolvimento de técnicas para solução deste e outros problemas de mesma natureza por Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange, foi criada a estrutura principal do que se denota por Cálculo Variacional (GELFAND e FOMIN, 1963). Como um desdobramento disso resultaram as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, as quais são chamadas equações de Euler-Lagrange. Um dos fatores de distinção entre a Teoria de Controle Ótimo e o Cálculo Variacional se dá a partir da separação das variáveis de controle das de estado. A formalização da Teoria de Controle Ótimo surge com as condições de otimalidade fornecidas pelo princípio de máximo apresentado pelo matemático russo Pontryagin na década de 60 (PONTRYAGIN, BOLTYANSKII, *et al.*, 1962). Este princípio resulta em um problema de valor de contorno envolvendo os estados originais do sistema dinâmico junto das variáveis adjuntas, constituindo a base para a solução de problemas de controle ótimo. Ele é tanto utilizado para solução analítica dos problemas quanto para a solução por métodos numéricos indiretos.

A Otimização de Trajetória é um ramo da Teoria de Controle Ótimo que tem como objetivo determinar o histórico de um controle ótimo, cuja trajetória ótima correspondente respeite o comportamento dinâmico do sistema, minimizando um funcional de custo e satisfazendo um conjunto de restrições de fronteira e restrições interiores (KIRK, 2004) (BRYSON e HO, 1975) (LUENBERGER, 1979). De uma maneira mais geral, o termo Otimização de Trajetória é utilizado para se referir a técnicas de solução de problemas de controle ótimo para sistemas em malha aberta (KELLY, 2017). A maior parte das técnicas desenvolvidas, a partir dos anos 50 e 60, para solução deste tipo de problema tinham como foco a obtenção do perfil de tração de foguetes para atingir uma determinada órbita de espaçonaves com menor consumo de combustível (AZIMOV, 2005) (MELBOURNE, 1961). Posteriormente

¹ Do grego *brákhistos khrónos*, que significa “menor tempo”.

sendo aplicado também na obtenção de perfis de subida de tempo mínimo para aeronaves turbo-jato com voo em regime transônico e supersônico (BRYSON, DESAI e HOFFMAN, 1969) (NASH, 1974). A solução destes problemas resultava em curvas de Mach por altitude que deveriam ser seguidas pelos pilotos para atingir uma determinada altitude em tempo mínimo evitando as regiões de alto arrasto (JOHNSON, 1972). Desde então, as técnicas de solução de problemas de otimização de trajetórias sofreram importantes avanços e são utilizadas também em diversas outras áreas de conhecimento (AUGUGLIARO, SCHOELLIG e D'ANDREA, 2012) (BOUQUET, TRIANTAFYLLOU e SLOTINE, 2017).

Atualmente, a maior parte dos problemas de planejamento de trajetória de aeronaves é solucionada através de técnicas numéricas (RAO, 2010). Isto porque os problemas práticos atuais geralmente envolvem um grande número de variáveis associadas às equações de movimento da aeronave, incluindo comportamentos não lineares, restrições de trajetória, entre outras características que tornam inviável a busca por soluções analíticas. Assim, pode se destacar neste problema duas grandes áreas. Uma delas tem como objetivo o desenvolvimento de métodos numéricos para solução de problemas de planejamento de trajetória, dentre os quais destacam-se os métodos diretos e os métodos indiretos. Neste ramo, busca-se desenvolver novas técnicas para que estes métodos possam ser utilizados de forma adequada (ANDERSSON, GILLIS, *et al.*, 2018) (ANTONAKIS, NIKOLAIDIS e PILIDIS, 2017) (COTS, GERGAUD e GOUBINAT, 2017) (GARG, PATTERSON, *et al.*, 2010). Por outro lado, em uma segunda área, tem-se o foco especificamente na busca por trajetórias ótimas de cenários específicos. Particularmente para aquele voltado às trajetórias de aeronaves, as pesquisas têm como cerne o desenvolvimento de modelos da dinâmica de voo, estudos sobre maneiras mais coerentes de se formular o problema, entre outras características típicas a estes casos (ALEXANDRE, 2019) (BREZOESCU, 2014) (FISCH, LENZ e HOLZAPFEL, 2012) (GONZÁLEZ-ARRIBAS, SOLER, *et al.*, 2019).

Neste trabalho, procura-se apresentar certos desenvolvimentos em ambas áreas comentadas. Sendo assim, uma primeira contribuição proposta está relacionada a uma maneira de se generalizar as técnicas de formulação de problemas de otimização de trajetória por métodos diretos e parametrização completa. Isto será feito através do resgate de ideias a respeito da utilização do Método de Elementos Finitos (NAKAMICHI e WASHIZU, 1978), o qual, acoplado às técnicas de ponderação de resíduos (PINTO, 1982), possui uma estrutura que pode ser utilizada para abranger uma série de diferentes formas de se desenvolver um método direto. Mostra-se que, de fato, esta maneira de formulação do problema abrange inclusive as técnicas mais comumente utilizadas, denotadas por colocação. E, portanto, pode ser utilizada como uma

forma mais generalizada de representação, formando um arcabouço de diferentes possibilidades para formulação do problema de otimização de trajetória.

Para a segunda área, apresentam-se alguns desenvolvimentos relativos à forma de modelagem das equações de movimento da aeronave dentro do contexto em questão. Isto porque na utilização de determinadas formas de representação da atitude, a maneira em que as equações são geralmente utilizadas pode levar a trajetórias indesejadas ou até mesmo infactíveis. Assim sugerem-se formas alternativas de modelagem tal que estes problemas sejam naturalmente evitados durante a sua solução. Além disso, discute-se como as principais maneiras de parametrização da atitude na mecânica do voo podem influenciar na formulação do problema matemático. Apresenta-se como as representações essencialmente utilizadas, i.e., ângulos de Euler e quatérnios unitários, podem influenciar a formulação do problema de tal forma que o espaço das soluções do problema matemático seja limitado. São sugeridas maneiras mais adequadas de formulação e são mostradas em detalhe as diferentes formas de parametrização da atitude de uma aeronave, permitindo uma visão mais ampla sobre os aspectos da utilização de cada uma destas formulações no problema de planeamento de trajetórias.

1.1 Revisão Bibliográfica

1.1.1 Otimização de Trajetórias e Controle Ótimo

As primeiras abordagens na solução de problemas de controle ótimo surgiram a partir do cálculo variacional, com base no desenvolvimento do princípio de máximo de Pontryagin (PONTRYAGIN, BOLTYANSKII, *et al.*, 1962) e na introdução da programação dinâmica por Bellman (1954). Além destes, outros pesquisadores como Bryson e Ho (1975) também tiveram papel fundamental no desenvolvimento de técnicas para solução desta classe de problemas. Em problemas clássicos como o da Braquistócrona (LEITÃO, 2001, p. 16), cujo sistema dinâmico é de baixa ordem e fracamente não-linear, as soluções podem ser obtidas analiticamente a partir das condições necessárias e suficientes de otimalidade (ARDEMA e ASUNCION, 2009). Porém, para a maior parte das aplicações práticas, os sistemas dinâmicos são fortemente não-lineares e com restrições nas trajetórias, fazendo-se necessária a aplicação de métodos numéricos para obtenção de solução. O uso de tais métodos só se tornou factível a partir do advento dos computadores digitais a partir de meados do século XX, dando origem ao que chamamos de métodos indiretos (BREAKWELL, 1959) (BRYSON e ROSS, 1958). Ao longo dos últimos anos outros diferentes métodos, baseados em solução numérica, foram desenvolvidos para resolver problemas de controle ótimo. Um breve levantamento histórico

destes desdobramentos é apresentado por Sargent (2000). Atualmente, os métodos numéricos mais utilizados podem ser divididos em duas grandes categorias: métodos indiretos e métodos diretos (RAO, 2010). A utilização destas técnicas tem como base a utilização de ferramentas matemáticas elementares, que são: i) métodos para solucionar equações diferenciais e integrar funções; ii) métodos que solucionem sistemas de equações não lineares e algébricas; e iii) métodos para resolver problemas de otimização não-linear.

Os métodos indiretos se originaram a partir das condições necessárias de otimalidade obtidas no cálculo variacional, dando origem a um problema de valor de contorno. Neste caso, a minimização do índice de desempenho se dá a partir da satisfação das condições estacionárias (equações de Euler-Lagrange) e da aplicação das condições de otimalidade obtidas pelo Princípio de Máximo de Pontryagin². A aplicação destas condições resulta em um problema de valor de contorno que deve ser resolvido a partir de uma técnica apropriada, obtendo-se a solução ótima do problema de forma indireta³ (BRYSON e HO, 1975).

Nos métodos diretos, as variáveis de estado e/ou controle são ambas aproximadas por elementos de um subespaço de dimensão finita, como polinômios por partes. Simultaneamente, o funcional de custo também é aproximado por uma função objetivo. Este processo de discretização das variáveis da trajetória é chamado de transcrição, no qual as variáveis utilizadas para parametrização são utilizadas na conversão do problema de controle ótimo em um problema de programação não-linear, cuja solução resulta em uma aproximação da solução do problema original (BETTS, 2010).

Ambos estes métodos podem ser utilizados para obtenção de soluções para sistemas em malha aberta. A solução em malha aberta de um problema de controle ótimo resulta em uma trajetória nominal que pode ser utilizada posteriormente por um sistema de controle, ou seja, gera uma referência que indica o que o controlador deve fazer. Por esse motivo, este tipo de problema é denotado neste estudo por planejamento de trajetórias ótimas. Neste trabalho, os problemas abordados têm como cerne a obtenção de trajetórias ótimas em malha aberta.

É comum que alguns pesquisadores caracterizem os métodos indiretos por sua capacidade de gerar resultados com “boa precisão” (RAO, 2010) (BOHME e FRANK, 2017), o que está ligado ao fato de que a solução do problema tem como base o cumprimento das condições de otimalidade de forma indireta. Isto ocorre mesmo em situações onde o problema de controle ótimo contempla um grande número de estados e controles. Uma das principais

² Comumente denotado também como Princípio de Mínimo de Pontryagin.

³ Estas técnicas foram largamente aplicadas em uma série de pesquisas aeroespaciais brasileiras nas últimas décadas (ZERLOTTI, 1990) (BELDERRAIN e PAGLIONE, 1993) (BETTIATO e PAGLIONE, 2003).

difficultades na aplicação deste método está relacionada à necessidade de obtenção das derivadas analíticas em cada instância do problema para avaliação das condições necessárias de primeira ordem. Estas equações podem ser difíceis de serem obtidas principalmente quando se trata de um sistema de alta ordem, mesmo com a disponibilidade de ferramentas computacionais que trabalhem com algebrismo simbólico (BOHME e FRANK, 2017). Outras considerações numéricas também dificultam a utilização destes métodos, como por exemplo a necessidade de uma boa estimativa inicial do vetor de coestados para a convergência dos algoritmos, o que é difícil de ser obtido, uma vez que estes valores nem sempre possuem um sentido físico claro em relação ao problema (RAO, 2010). Mesmo com uma inicialização razoável das variáveis adjuntas, a solução numérica ainda pode ser mal condicionada. De acordo com Bryson e Ho (1975, p. 214):

“A principal dificuldade com estes métodos é a inicialização, i.e., encontrar a primeira estimativa das condições não especificadas em um dos extremos que produza uma solução razoavelmente fechada para a condição especificada na outra extremidade. A razão para esta dificuldade peculiar é que as soluções extremas são frequentemente muito sensíveis a pequenas mudanças nas condições de contorno não especificadas. Como as equações do sistema dinâmico e as equações de Euler-Lagrange são acopladas, não é incomum que a integração numérica com um candidato inicial ruim produza trajetórias ‘estranhas’ no espaço de estados.”

Os métodos diretos surgiram nos anos 70 a partir de uma filosofia distinta daquela dos métodos indiretos, ou seja, não derivam diretamente do cálculo variacional (WILLIAMSON, 1971) (HULL e EDGEMAN, 1975). Atualmente, eles se subdividem em três principais subcategorias, que são: métodos de único tiro⁴, métodos de múltiplos tiros⁵ e métodos de colocação (BETTS, 2010). Os métodos de tiro foram e ainda são amplamente utilizados em uma série de aplicações (DIEDAM e SAGER, 2017). No entanto, os métodos de colocação, são aqueles que têm sofrido maior evolução nos últimos anos (ADAMAWI, HAGER e RAO, 2019) (KELLY, 2017) (PATTERSON e RAO, 2012), tendo sido apresentados inicialmente de forma mais consistente por Bock (1982) e Hargraves e Paris (1987). Nesta técnica, tanto as variáveis de estado quanto as de controle são discretizadas e aplicam-se o que esses autores denotam por condições de colocação, as quais são utilizadas para transformar o grupo de equações dinâmicas em um conjunto de equações puramente algébricas. Pelo fato de ambos estado e controle serem parametrizados, denota-se esta técnica também por método de parametrização completa. As equações obtidas pelo processo de aplicação das condições de colocação são utilizadas como

⁴ Single Shooting

⁵ Multiple Shooting

condições de restrição em um problema de programação não linear, onde as variáveis de decisão são os parâmetros que definem as curvas aproximadoras. A função de custo a ser minimizada também depende de tais parâmetros, uma vez que o funcional de mérito depende das funções de estado e de controle do problema. Estas características conferem aos métodos diretos algumas vantagens em termos da inicialização do problema, da inclusão de restrições de estado e controle na trajetória e da própria implementação dos algoritmos, e, por isso, tem principal foco neste trabalho. Vale ressaltar que, devido às aproximações feitas, é comum que alguns autores afirmem que os métodos diretos geram soluções “menos precisas” quando comparados aos métodos indiretos (RAO, 2010), isto porque, neste caso, as condições de otimalidade do problema não são indiretamente obtidas durante a solução. Assim, deu-se início à pesquisa de uma nova classe de técnicas denotada por métodos híbridos, onde se busca combinar as qualidades dos métodos diretos e indiretos na solução dos problemas de controle ótimo. Mais detalhes sobre este método estão disponíveis em Stryk e Bulirsch (1992). De acordo com Rao (2010), os avanços das diferentes filosofias de métodos diretos e indiretos (que até então têm levado a uma dicotomia dentro da comunidade de controle ótimo), mostram que há fortes conexões entre as diferentes abordagens. Assim, ambos métodos passam a se associar mais fortemente ao longo do tempo, como mostrado pelos métodos híbridos.

Apesar da grande visibilidade obtida pelo método de colocação direta, entende-se que visualizar esta técnica como um método em si não é a melhor forma de interpretação adotada. Esta maneira de postulação muitas vezes limita a discussão sobre o problema de controle ótimo como um todo, podendo restringir uma melhor compreensão sobre o papel de cada componente do problema durante uma aplicação. Outra limitação da visão do método de colocação é o fato dela se ater a uma forma específica de realizar a aproximação das restrições dinâmicas do problema, i.e., zerando os resíduos nos pontos de colocação. Além disso, as aproximações das variáveis de estado e controle estão restritas a funções polinomiais por partes.

Posto isso, é notável a importância de se expandir a discussão sobre os métodos diretos de parametrização completa, i.e., do estado e do controle, de forma que os processos de melhoria possam ocorrer com o devido entendimento das funções que cada etapa exerce na solução do problema de planejamento de trajetória, além de possibilitar o julgamento dos resultados obtidos de maneira mais coerente. Assim, inclui-se como um dos propósitos deste trabalho reintroduzir a discussão sobre os métodos diretos para solução dos problemas de controle ótimo a partir de uma perspectiva mais ampla, trazendo discussões a respeito da aplicação destas técnicas em uma abordagem que não tem sido aplicada nos trabalhos atuais.

Desta forma, é desenvolvida uma arquitetura generalizada para formulação desta classe de problemas utilizando o Método de Elementos Finitos.

Atualmente, o método de elementos finitos é bastante aplicado na solução de equações diferenciais em problemas de análise estrutural (LOGAN, 2011), de aerodinâmica (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e P.NITHIARASU, 2014), entre outras. Porém, ele é pouco difundido no campo do controle ótimo. Estudos a respeito da utilização deste método na solução de problemas de controle ótimo foram apresentados inicialmente por Nakamichi e Washizu (1978), sendo posteriormente revisado e colocado em uma estrutura mais adequada por Pinto (1982). Após estas pesquisas, encontram-se poucos trabalhos que utilizem deste método como forma de abordar os problemas de controle ótimo na forma direta, onde pode se destacar aquele apresentado por Vasile (2010).

Sendo assim, reintroduz-se neste estudo a utilização do método de elementos finitos na abordagem de problemas de controle ótimo na forma direta. Através dele, é apresentado um tratamento do problema de maneira universal, abrindo possibilidades para questionamentos sobre o motivo dos métodos de colocação terem se tornado tão relevantes e sobre quais os caminhos podem ser tomados para se desenvolver novas técnicas de solução direta.

1.1.2 Planejamento de Trajetória de Aeronaves

O setor aeronáutico e aeroespacial predominou o início das pesquisas relativas à otimização de trajetórias. Atualmente, soluções de controle ótimo também são aplicadas a uma série de outras disciplinas como: economia, biologia (BOUQUET, TRIANTAFYLLOU e SLOTINE, 2017), medicina (RAMOS, 2015) (TERAMAE, MATSUBARA, *et al.*, 2020), química, robótica (AUGUGLIARO, SCHOELLIG e D'ANDREA, 2012) (MELLINGER, MICHAEL e KUMAR, 2012), automotiva (PERANTONI e LIMEBEER, 2014), entre outras. Esta ampliação das áreas de aplicação tem auxiliado no desenvolvimento de novas técnicas para solução deste tipo de problema. Este trabalho, no entanto, tem como foco abordar a otimização da trajetória de aeronaves, a qual é denotada alternativamente ao longo do texto por planejamento de trajetória ótima de aeronaves. Assim, é apresentada nesta subseção uma revisão bibliográfica sobre este assunto, mostrando diversas pesquisas relevantes sobre o tópico, o atual estado da arte e os possíveis desenvolvimentos.

Uma vasta quantidade de pesquisas relacionadas à otimização de trajetórias de aeronaves foram desenvolvidas nos últimos anos, sendo que a maior parte delas são baseadas em modelos massa-ponto, em que a aeronave é modelada como um ponto, geralmente no centro de massa, onde se assume que todas as forças externas são aplicadas. Junto deste modelo, utiliza-

se, quase que de forma consensual, a representação da atitude pelos denotados ângulos de Euler. Nos trabalhos apresentados por Bulirsch (1991a) (1991b) estes modelos são utilizados na avaliação da trajetória ótima executada por uma aeronave comercial em uma condição de arremetida durante o pouso, em condições climáticas severas e sob fortes efeitos de rajadas verticais, a fim de ampliar a segurança de voo. Apresentam-se maneiras de se modelar o comportamento atmosférico nestas situações e busca-se a trajetória cuja altitude mínima em relação ao solo é maximizada. O problema é solucionado utilizando um método direto de múltiplos tiros e apresenta valiosas sugestões de controle para aplicações práticas, onde a trajetória ótima obtida indica um provável conflito com a intuição convencional de reação de um piloto, permitindo um treinamento adequado da tripulação.

Ainda nesta mesma forma de modelagem, Dai e Jr. (2009) apresentam um estudo sobre a otimização de trajetórias de subidas e descidas de aeronaves em um espaço restrito utilizando trajetórias helicoidais. Utilizam-se diferentes funções de mérito como a minimização de tempo ou minimização de combustível, e o problema é solucionado através de uma abordagem por colocação direta. Um trabalho similar a este é apresentado por Cots, Gergaud e Goubinat (2017), onde as soluções são obtidas tanto por métodos direto quanto por métodos indiretos.

O modelo de massa-ponto junto dos ângulos de Euler também foi utilizado por Brinkman e Visser (2007) para avaliar a trajetória mais segura a ser seguida por um piloto em uma situação onde ocorre uma falha de motor em condição de subida logo após a decolagem de uma aeronave monomotor. O objetivo do trabalho apresentado é estabelecer não apenas a trajetória ideal, mas também determinar em quais condições a tentativa de retornar para a pista é factível e segura, de forma similar aos estudos de Meng, Xiang, *et al.* (2014).

Esta maneira de modelar o movimento da aeronave ainda é aplicado em estudos mais recentes para a solução de uma série de problemas desta natureza, como por exemplo em Wang, Ma, *et al.* (2019), os quais propõem um conjunto de estratégias de voo para minimização do consumo de energia de uma aeronave solar em um voo de longa autonomia em grandes altitudes. O problema é solucionado utilizando métodos de colocação direta e são modelados os efeitos de ganho de energia das células fotovoltaicas levando em consideração a posição e atitude destes dispositivos em relação à fonte de luz solar. Pode-se citar outros trabalhos de mesma natureza que também utilizaram esta maneira de modelagem (KIM, PADILLA, *et al.*, 2020) (MARTIN, GATES, *et al.*, 2018).

Nos trabalhos recentes apresentados por González-Arribas, Soler e Sanjurjo-Rivo (2018) e González-Arribas, Soler, *et al.* (2019), o modelo em questão é aplicado para o planejamento de trajetórias robustas em uma condição de incertezas relacionadas a tempestades

locais que podem se desenvolver rapidamente durante a execução do voo, as quais são responsáveis por uma grande parte dos atrasos, interrupções e problemas de segurança enfrentados pelos sistema de tráfego aéreo. Os autores introduzem uma metodologia baseada na solução de um problema de controle ótimo capaz de gerar trajetórias que minimizam tanto o consumo de combustível quanto o tempo de voo, selecionando preferencialmente aquelas trajetórias que reduzem a exposição da aeronave a regiões de maior instabilidade atmosférica. Para isso é proposta uma técnica para a inclusão da evolução das condições meteorológicas ao longo do tempo durante a solução do problema. A metodologia é apresentada em um cenário real, conhecidos os dados referentes à previsão de tempo de uma rota conhecida e os modelos de desempenho de uma aeronave comercial.

Além das referências apresentadas, pode-se citar também diversas outras que se baseiam no modelo de massa-ponto com representação da atitude por ângulos de Euler (YANG, CUI, *et al.*, 2017) (ZHANG, LIU, *et al.*, 2018) (HENTZEN, KAMGARPOUR, *et al.*, 2018). Conforme mostrado por Fisch (2010), este tipo de modelagem é predominante na solução de problemas de otimização de trajetórias e os trabalhos que apresentam modelos de corpo rígido com outros tipos de parametrização da atitude da aeronave são mais escassos, sendo geralmente aplicados apenas em manobras singulares sob um curto espaço de tempo. O autor do trabalho mostra que a utilização deste modelo aumenta dramaticamente a complexidade do problema de otimização, uma vez que um maior número de equações é utilizado para representar o movimento da aeronave, ampliando os graus de liberdade do problema.

Por isso, encontram-se algumas pesquisas onde são desenvolvidos modelos intermediários entre o modelo massa-ponto e o de corpo rígido. Em uma modelagem apresentada por Oliveira (2004), considerou-se o movimento de um planador apenas em condição de voo simétrico. No entanto, a aeronave não é mais tratada como uma massa concentrada, mas sim como um corpo onde a dinâmica de arfagem é considerada. Além disso, a deflexão do profundor é tida como uma variável de controle do sistema. Estas alterações se mostraram de suma importância para a obtenção das estratégias de controle aplicadas pelo piloto na otimização da trajetória de planadores de competição, principalmente nas regiões transitórias entre as diferentes fases de voo, onde os efeitos dinâmicos apresentam maior expressividade. Ainda em busca por melhorias em relação ao modelo de massa-ponto, Morales, Silvestre e Neto (2018) propuseram um novo conjunto de equações de movimento que, apesar de não incluir a dinâmica rotacional da aeronave, inclui a influência da velocidade angular na avaliação das forças aerodinâmicas, tornando-o mais preciso. É apresentada a utilização deste modelo para a otimização de movimentos de rolamento de 360° utilizando métodos de solução

indireta para o problema. As trajetórias obtidas são comparadas com modelos de menor e maior fidelidade, apresentando resultados satisfatórios para os movimentos avaliados. Além desta, outras pesquisas a respeito de melhorias deste modelo clássico ainda são encontradas (IMADO, HEIKE e KINOSHITA, 2011).

Em alguns casos, no entanto, faz-se necessária a modelagem completa de corpo rígido da aeronave, como mostrado em Rao e Go (2019), onde o método de múltiplos tiros é utilizado para encontrar as técnicas de controle ideais para a recuperação do controle de aeronaves em parafuso, minimizando o tempo e a perda de altitude. Uma vez que neste movimento a dinâmica rotacional da aeronave é bastante expressiva, modelos como o de massa-ponto seriam insuficientes para representação da trajetória. O mesmo se observa no trabalho apresentado por Chou (1995), o qual avalia trajetórias de retorno em tempo mínimo em um caça F-16 incluindo a influência do seu comportamento aerodinâmico em altos ângulos de ataque.

Na pesquisa desenvolvida por Fisch (2010), utilizou-se de forma bastante ampla a modelagem de corpo rígido na solução de problemas de otimização de trajetória, a qual o autor denotou por modelo de alta fidelidade. Esta denotação é utilizada pelo fato deste modelo incluir em suas equações a dinâmica completa da aeronave, i.e., incluindo a dinâmica rotacional do corpo rígido, o que representa o modelo de maior fidelidade utilizado pelo autor. Diferentemente dos trabalhos citados anteriormente, apresenta-se uma modelagem da atitude por uma maneira alternativa utilizando os quatérnios unitários. Como comentado pelo autor, o objetivo é evitar a ocorrência de certas singularidades matemáticas relacionadas aos ângulos de Euler quando a aeronave atinge ângulos de arfagem próximos a $\pi/2$, pois o modelo é utilizado no planejamento da trajetória de uma aeronave acrobática. Os quatérnios unitários não apresentam singularidades em sua formulação, podendo ser aplicados na análise de trajetórias que envolvam quaisquer atitudes em voo.

Devido a esta característica, no artigo apresentado por Plas e Visser (2009), utiliza-se desta representação da atitude no estudo da trajetória de mínimo tempo para execução de um circuito de corrida aérea. São incluídas algumas estratégias adicionais de solução, como a divisão do problema em múltiplas fases, na qual se compõe o problema do planejamento da trajetória completa por uma sequência de problemas menores que são conectados, permitindo continuidade nas variáveis de estado e controle. Também no artigo apresentado por Well e Wever (1984), na década de 80, fez-se uso dos quatérnios no estudo de trajetórias de tempo mínimo em aeronaves de alta manobrabilidade.

Nota-se que de maneira geral, o modelo de massa-ponto é mais utilizado devido à menor complexidade envolvida na solução das suas equações. Identifica-se que diferentes

pesquisadores têm buscado formas alternativas de modelagem em relação a este modelo. Outros têm procurado modelar e formular o problema sob outros aspectos, como no caso da inclusão da influência de efeitos atmosféricos, de comportamentos aerodinâmicos não-lineares, entre outros. Todas estas pesquisas têm gerado importantes avanços tanto na solução de problemas práticos quanto teóricos. No entanto, verifica-se uma necessidade de novos desenvolvimentos a respeito da influência da forma de representação da atitude de uma aeronave para uma solução coerente de problemas de otimização de trajetória.

Existem diferentes maneiras de representação da orientação de um sistema de coordenadas (NITSCHKE e KNICKMEYER, 2000), dentre as quais os ângulos de Euler e os quatérnios unitários são as mais comumente utilizadas na análise de trajetórias de aeronaves (PHILLIPS, HAILEY e GEBERT, 2000). Com uma maior frequência utilizam-se os ângulos de Euler por serem de fácil interpretação e aplicação. E apenas em casos onde os movimentos podem atingir condições próximas às singularidades destes ângulos é que se utilizam uma representação alternativa pelos quatérnios unitários (FISCH, LENZ e HOLZAPFEL, 2012) (PLAS e VISSER, 2009). Verifica-se que, no contexto em estudo, esta maneira de selecionar o modelo de representação da atitude é algo comum. Porém, quando se trata de problemas de otimização de trajetórias, as singularidades presentes nos ângulos de Euler são apenas uma das diferentes limitações relacionadas à parametrização da atitude. O problema da orientação espacial neste contexto apresenta diversas outras questões valiosas a serem verificadas, que vão desde situações relacionadas à integração numérica de seus modelos dinâmicos até pontos mais fundamentais como a própria formulação de seus vínculos de contorno no problema matemático. Isto ocorre pois o grupo de rotações tridimensionais, denotado $SO(3)$ (CAMPA e CAMARILLO-GOMEZ, 2008), não pertence ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, aos quais os métodos de otimização de trajetória estão baseados. E, por isso, cada forma de parametrização das rotações de uma aeronave apresenta características que devem ser devidamente compreendidas para uma utilização correta durante a análise de um problema desta natureza. Cada técnica de parametrização possui uma estrutura matemática específica (variedades topológicas) com certas limitações que devem ser respeitadas durante a solução. Os ângulos de Euler, por exemplo, possuem uma singularidade relacionada a uma certa atitude do corpo e, além disso, possui múltiplas representações para uma mesma orientação. Os quatérnios unitários, por outro lado, devem ter uma norma unitária ao longo de toda trajetória e apresentam uma dupla representação para cada orientação espacial da aeronave, conhecidos como quatérnios antipodais. Propriedades destes tipos estarão sempre presentes em quaisquer formas de representação da atitude espacial (NITSCHKE e KNICKMEYER, 2000).

A influência que estas características geram na formulação e na solução do problema de otimização da trajetória de uma aeronave é um assunto que ainda precisa ser abordado com maior profundidade para que se tenha um entendimento mais claro sobre as formas mais adequadas de utilização destas diferentes maneiras de representação. Pois a utilização incorreta destas estruturas pode limitar a capacidade do problema matemático em representar o problema físico.

Uma vez que a representação da orientação espacial não é uma particularidade apenas do movimento das aeronaves, encontram-se trabalhos de outras áreas que abordam certos aspectos das limitações dos modelos de atitude na otimização de trajetórias. Por exemplo, em Bonalli, Bylard, *et al.* (2019) é sugerida uma extensão a um tipo de método numérico de otimização de trajetória para transformar as restrições da variedade em um problema equivalente cuja estrutura inclui as limitações da atitude de forma mais natural. Kulumani e Lee (2017) apresentam as soluções de problemas de otimização da reorientação espacial de satélites utilizando quatérnios. São introduzidas discussões importantes a respeito de como limitar o movimento rotacional de tal maneira que certas atitudes sejam evitadas, o que é feito através da inclusão de restrições de desigualdade na estrutura matemática dos quatérnios. Apresenta-se também um tipo de comportamento indesejado na solução ótima que é intrínseco aos quatérnios e aos ângulos de Euler, denotado por Fenômeno de Desenrolamento⁶, ao qual se sugere uma maneira de impedir sua manifestação. Trabalhos de mesma natureza também são desenvolvidos por Kjellberg e Lightsey (2016), Lee e Mesbahi (2013) e Fleming, Sekhavat e Ross (2008). De fato, estes tipos de discussões são comuns em problemas de orientação de satélites (SHIRAZI, CEBERIO e LOZANO, 2018) e de planejamento de trajetória de robôs, principalmente no que se refere aos problemas de restrições cinemáticas da atitude (FREITAS, LIZARRALDE e LEITE, 2011) (WATTERSON, SMITH e KUMAR, 2016).

Entretanto, observa-se se que existem certos aspectos a respeito da influência das diferentes formas da parametrização da atitude que ainda não foram elucidados e que são de grande relevância durante a formulação e solução deste tipo de problema. Especialmente no caso das aeronaves, onde as dinâmicas rotacional e translacional estão conectadas, estas características podem se tornar mais complexas de serem analisadas. Sendo assim, propõe-se neste trabalho trazer uma visão mais aprofundada sobre tais questões, apresentando os efeitos que podem surgir em problemas de planejamento de trajetórias devido à escolha e uso das diferentes formas de parametrização da atitude de uma aeronave.

⁶ *Unwinding Phenomenon*

1.2 Objetivos e Contribuições

Este trabalho se propõe a apresentar passos relevantes em relação à forma de se realizar a otimização de trajetória de aeronaves, incluindo questões ainda não abordadas nos trabalhos até a atualidade. São tratados diversos ramos do problema de planejamento incluindo: i) os métodos numéricos para solução do problema de controle ótimo; ii) a modelagem da representação da atitude da aeronave; iii) e a formulação dos problemas de controle ótimo utilizando as diferentes formas de parametrização da atitude. Tem-se como objetivo principal apresentar como estes aspectos influenciam nos problemas de planejamento de trajetórias ótimas de aeronaves, incluindo as seguintes contribuições além do estado da arte:

- **Discutir as diferentes formas de representação da atitude de um corpo rígido dentro do contexto do planejamento de trajetórias, apresentando as limitações relativas a cada tipo de parametrização e seus efeitos sobre a formulação e solução do problema, principalmente no que diz respeito aos vínculos de contorno. Estabelecimento de formas coerentes para a seleção e uso do modelo de representação mais adequado em diferentes situações.**

Os ângulos de Euler são a maneira mais comum de parametrização da atitude de um corpo rígido (ou sistema de coordenadas) na modelagem de um problema de otimização de trajetória de aeronaves. Devido a algumas singularidades presentes nesta forma de representação, é comum a utilização dos quatérnios unitários como alternativa para representação da atitude da aeronave. Porém, existem outros aspectos relevantes que devem ser discutidos durante a seleção e uso do modelo de atitude que não estão apresentados nos trabalhos atuais. Tais conceitos estão relacionados às limitações intrínsecas das diferentes formas de representação da atitude, as quais geram influência direta sobre a maneira de se formular e solucionar o problema. Assim, apresenta-se como as características de cada modelo devem ser tratadas para que se tenha uma formulação coerente do problema matemático, a qual não se mostra trivial nem mesmo para os convencionais ângulos de Euler. Mostra-se que uma formulação inadequada dos vínculos de contorno do problema pode gerar um problema matemático incapaz de representar o problema físico de forma coerente, excluindo ou até impondo certas trajetórias à solução. Por fim, evidencia-se uma forma de representação da atitude pouco utilizada neste contexto, que são as matrizes de rotação. São destacadas algumas de suas características e apresentadas

algumas das suas qualidades na formulação do problema de otimização de trajetórias.

- **Proposta de uma reformulação da representação das equações da atitude de corpo rígido utilizando um conjunto de equações diferenciais e algébricas.**

A parametrização da atitude pelos quatérnios unitários ou pelas matrizes de rotação requer que sejam adicionadas restrições algébricas à sua respectiva dinâmica, uma vez que ambas estas formulações apresentam uma estrutura compacta, i.e., os quatérnios devem possuir norma unitária e as matrizes de rotação devem ser ortogonais e dextrogiras ao longo de toda trajetória (STEVENS, LEWIS e JOHNSON, 2016). Nos trabalhos mais recentes, tais equações algébricas são incluídas de uma forma implícita através de métodos de estabilização numérica dos termos diferenciais do modelo (ERHARD, HORN e DIEHL, 2016). No entanto, tais técnicas apresentam algumas limitações quando aplicadas na solução de problema de planejamento de trajetória por métodos diretos. Assim, propõe-se uma formulação diferencial-algébrica para a modelagem de tais formas de parametrização, de maneira a melhorar o comportamento numérico e as características de convergência do problema, satisfazendo naturalmente os vínculos algébricos dessas representações durante a solução.

- **Apresentação do Método de Elementos Finitos como uma ferramenta que abrange as diferentes técnicas de solução de problemas de controle ótimo por métodos diretos e com parametrização completa.**

Apesar de alguns trabalhos terem apresentado o Método de Elementos Finitos para a solução de problemas de controle ótimo (PINTO, 1982) (NAKAMICHI e WASHIZU, 1978), nenhum deles trata deste método como uma ferramenta de generalização para concepção de técnicas de solução. Nestes trabalhos as aplicações são limitadas a apenas alguns casos bastante específicos. Dessa forma, busca-se ampliar a discussão sobre o papel de cada fase da utilização dos métodos diretos, reintroduzindo a aplicação de Método de Elementos Finitos na solução de problemas de controle ótimo, o qual não tem sido abordado nos últimos anos. Apresenta-se a maneira como o Método de Elementos Finitos permite uma visão mais abrangente do problema em relação ao que se denomina hoje por Método de Colocação Direta, rediscutindo os termos utilizados atualmente no contexto dos métodos diretos e propondo uma arquitetura mais generalizada para técnicas de parametrização completa.

1.3 Organização da Tese

No Capítulo 2 deste trabalho apresentam-se os conceitos básicos a respeito da formulação de um problema de controle ótimo. Mostra-se o que se entende por estado e controle, restrições dinâmicas, de contorno e de trajetória. É definido o que se entende por trajetória e por otimalidade. Apresenta-se também como o problema pode ser considerado a partir de uma abordagem multi-fase.

O Capítulo 3 detalha os diferentes aspectos a respeito da formulação do problema de planejamento de trajetória de aeronaves. Mostram-se a diferentes maneiras de se descrever os vínculos dinâmicos do sistema, os quais estão ligados às equações de movimento da aeronave. Apresenta-se as formas mais comuns de parametrização da atitude em voo. São detalhadas as principais características destes modelos de atitude e, para isso, faz-se uma breve introdução a respeito dos conceitos relacionados à topologia, que é um ramo da matemática sob o qual as rotações de um corpo podem ser observadas. Ao final da Seção 3.1.4.5 são propostas algumas maneiras alternativas para representar certos modelos de atitude de tal forma que suas restrições topológicas sejam naturalmente atendidas durante a solução numérica do problema. São explanadas também como as restrições de trajetória podem ser utilizadas no contexto em questão. Discute-se a respeito de diferentes formas de se escolher um índice de desempenho adequado para o problema. E, ao fim, é mostrada a relevância de se formular o problema de planejamento de trajetória de uma aeronave utilizando a abordagem de trajetória fracionada.

O Capítulo 4 se destaca de sua seção anterior para abordar de forma mais aprofundada algumas discussões a respeito da formulação dos vínculos de contorno do problema relacionados aos diferentes modelos de parametrização da atitude, representando uma das importantes contribuições propostas neste trabalho. Apresenta-se através de alguns exemplos as características de comportamento das distintas representações da atitude ao longo de certos movimentos típicos de aeronaves, elucidando questões não mostradas em trabalhos anteriores. Verificam-se os desafios que cada forma de parametrização pode trazer durante a formulação das condições de contorno do problema e sugere-se uma maneira para sua modelagem.

Já no Capítulo 5, faz-se uma apresentação a respeito das técnicas numéricas para solução dos problemas de controle ótimo, dando destaque aos métodos diretos. Apresenta-se a formulação do problema através do método de elementos finitos, abordando seus diversos aspectos, i.e., desde as formas de aproximação das variáveis de estado e controle até as diferentes formas de tratamento dos vínculos dinâmicos, as quais se dão pelo método de resíduos ponderados. Dada esta visão, mostra-se a capacidade do método de elementos finitos

em representar e englobar diferentes técnicas de solução que atualmente são observadas como métodos individuais. Por fim, apresenta-se um simples exemplo da aplicação do método discutido na solução de um problema de otimização de trajetória.

No Capítulo 6, são apresentadas diversas aplicações importantes para esclarecer as discussões e as contribuições propostas neste trabalho. Discute-se sobre a influência das condições de contorno das representações da atitude na solução numérica do problema através de exemplos aplicados. Ressalta-se também a relevância dos modelos alternativos apresentados no final do Capítulo 3, mostrando certas dificuldades que as técnicas convencionais apresentam na tentativa de fazer com que as parametrizações da atitude permaneçam em suas respectivas limitações topológicas. Ao final, utiliza-se de um problema de maior complexidade de solução para destacar diversas das contribuições mostradas ao longo do trabalho. Sugere-se para casos como este uma abordagem de solução multifidelidade que combina diferentes modelos das equações de movimento com diferentes modelos para representação da atitude. A solução obtida é comparada com dados experimentais em um contexto real para avaliação da qualidade dos resultados.

Finalmente, no Capítulo 7 apresentam-se as considerações finais acerca dos diversos aspectos tratados neste trabalho, apresentando também sugestões de continuação para este estudo.

2 FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

A teoria de controle é um ramo de estudo para lidar com o comportamento de sistemas dinâmicos que possuem entradas de controle. De forma geral, pode-se dizer que o objetivo central é controlar o estado de um sistema dinâmico de uma maneira estabelecida.

Fundamentalmente, existem duas estratégias que podem ser seguidas para que o controle exerça influência sobre um sistema dinâmico, que são: o controle em malha aberta e o controle em malha fechada. No controle em malha aberta, o controle é feito com base em um modelo da dinâmica do sistema e é independente das “saídas” do processo. Por outro lado, para um controle em malha fechada, o estado real é estimado com base em medições, as quais são fornecidas de maneira recursiva a um controlador que irá exercer influência sobre o sistema (NISE, 2010).

Assim, a teoria de controle ótimo consiste em obter a entrada de controle que fará com que um sistema dinâmico atinja objetivos predeterminados de controle, otimizando um certo critério de desempenho e satisfazendo as restrições impostas.

Uma estratégia para abordar o problema de planejamento de trajetória é através da solução de um problema de controle em malha aberta com condições de contorno. Esta técnica permite que todas as restrições relacionadas ao sistema dinâmico, incluindo as próprias restrições dinâmicas, sejam levadas em consideração durante a solução, o que permite afirmar que a trajetória obtida é viável. Porém, de modo geral, este problema apresentará inúmeras soluções possíveis. Logo, a fim de se suprimir tal redundância, faz-se uso de técnicas de controle ótimo, as quais são aplicadas para a escolha de uma das trajetórias, i.e., aquela que otimiza um determinado critério escolhido. Em uma etapa seguinte, uma vez obtida a trajetória ótima planejada, tal solução é utilizada como uma referência nominal para determinar a estratégia de controle de um sistema em malha fechada capaz de segui-la.

Neste trabalho, devido à natureza dos estudos abordados no planejamento de trajetória de aeronaves, tem-se interesse na primeira etapa do problema, i.e., na otimização de trajetórias em malha aberta envolvendo sistemas dinâmicos contínuos. Desta forma, esta tese tem como foco a obtenção de trajetórias e suas correspondentes entradas que irão conduzir um determinado sistema dinâmico entre suas condições iniciais e finais, satisfazendo certas restrições e otimizando um critério de desempenho estabelecido.

2.1 Problema de Controle Ótimo

Em um problema de otimização de trajetória, o funcional que descreve o índice de desempenho do problema a ser otimizado pode ser apresentado como

$$J = \mathcal{M}[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}] + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] dt, \quad (2.1)$$

onde, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de variáveis de estado definido por

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]; \quad (2.2)$$

$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de variáveis de controle dado por

$$\mathbf{u}^T(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_m(t)]; \quad (2.3)$$

$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ é um vetor de parâmetros estáticos definido por

$$\mathbf{p}^T = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_q]; \quad (2.4)$$

onde $\mathcal{M}[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}]$ é uma função das variáveis no contorno ($\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$); $\mathcal{L}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ é uma função das variáveis dinâmicas e dos parâmetros estáticos ($\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$); $t_0 \in \mathbb{R}$ é o tempo inicial e $t_f \in \mathbb{R}$ é o tempo final.

As variáveis de estado são aquelas que caracterizam a evolução da trajetória ao longo do tempo. Elas variam gradualmente e não podem sofrer mudanças instantâneas uma vez que elas obedecem a leis dinâmicas decorrentes da natureza do sistema considerado. Já as variáveis de controle irão variar ao longo do tempo de acordo com a decisão de um controlador, i.e., uma pessoa, um software, ou um outro sistema. Elas não precisam ser necessariamente contínuas e, dependendo do contexto, podem apresentar saltos discretos dentro de limites admissíveis. Assim, pode-se dizer que, enquanto as variáveis de estado devem obedecer a certas leis físicas naturais, as variáveis de controle são ajustadas para afetar a dinâmica dos estados de tal forma que um objetivo seja atingido.

O funcional $J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f, \mathbf{p}]$ a ser otimizado pode apresentar diferentes formas dependendo do tipo de problema a ser solucionado (KELLY, 2017). Quando contém ambos os termos $\mathcal{L}(\cdot)$ e $\mathcal{M}(\cdot)$ o problema é dito estar na forma de *Bolza*. Problemas em que apenas o termo integral está presente é dito estar na forma de *Lagrange* e quando contém apenas a função de variáveis de contorno é dito estar na forma de *Mayer*.

Desta maneira o problema de controle ótimo pode ser posto como: determinar o valor das variáveis de estado, de controle, dos parâmetros, do tempo inicial e do tempo final que otimiza o índice de desempenho J , onde $t \in [t_0, t_f]$ é a variável independente do problema, i.e.:

Minimizar

$$J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f, \mathbf{p}], \quad (2.5)$$

sujeito aos vínculos dinâmicos, tipicamente não-lineares, na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}], \quad (2.7)$$

e às restrições

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] \leq \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}] = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

onde o índice de desempenho J apresenta uma avaliação da “qualidade da trajetória”; $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ representam um sistema de equações diferenciais e algébricas semi-explicitas (EDA)⁷, as quais descrevem a dinâmica de um sistema autônomo, que não depende explicitamente da variável independente, também denotadas como restrições dinâmicas ($\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$); $\boldsymbol{\varphi}$ são as condições de restrição ao longo da trajetória ($\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\varphi}$); e $\boldsymbol{\psi}$ está relacionado aos vínculos de contorno do problema ($\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}$).

Para maior clareza dos conceitos envolvidos, faz-se uma breve descrição dos elementos do problema. Durante a solução deste problema, o sistema $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ e $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ deve ser conduzido de uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a uma condição final $\mathbf{x}(t_f)$ em um intervalo de tempo $[t_0, t_f]$. As restrições iniciais e finais são expressas como $\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}] = \mathbf{0}$. Além disto deve-se satisfazer certas restrições algébricas $\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] \leq \mathbf{0}$, também denotadas por restrições de trajetória. Observe que estas restrições podem ser utilizadas para uma imposição simples de limites sobre os estados e os controles ao longo da trajetória.

⁷ O sistema é dito semi-explicito, pois, as variáveis diferenciais aparecem explicitamente (ao lado esquerdo), enquanto que as variáveis algébricas aparecem implicitamente em $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$.

Por fim, o índice $J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ fornece uma medida quantitativa do desempenho do sistema dinâmico ao longo do domínio estabelecido. Ele pode ser expresso em termos das variáveis no tempo final, adicionado da integral de uma função do estado, controle e tempo no domínio $[t_0, t_f]$.

Note que as restrições ditas dinâmicas podem se separar entre diferenciais e não diferenciais, i.e., parte está relacionada a algumas equações que envolvem derivas e outra parte não. Assim, algumas restrições algébricas não deixam de ser dinâmicas porque elas são dependentes do tempo. Apesar disso, é bastante comum denotá-las também por restrições de trajetória. Para alguns sistemas os vínculos dinâmicos são formados apenas pelo conjunto de equações diferenciais, geralmente dados na forma de equações diferenciais ordinária (EDO).

Dada esta explicação é importante que alguns conceitos sejam definidos (SAGER, 2006).

Definição (Trajetória) Dado um sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ e $\mathbf{0} = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$, a trajetória é dada por

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \triangleq \{ (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \mid t \in [t_0, t_f] \}, \quad (2.10)$$

cujas funções $\mathbf{x} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ e o vetor de parâmetros $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ satisfazem o conjunto de equações (2.6) e (2.7).

Definição (Admissibilidade) Uma trajetória $\mathcal{T}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$ é admissível se $\mathbf{x}(t)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_f]$, $\mathbf{u}(t)$ é mensurável e essencialmente limitada, e exista uma combinação de $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$ que satisfaça as equações dinâmicas (2.6) e (2.7) e as restrições (2.8) e (2.9). A função de controle $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ é admissível caso exista pelo menos uma trajetória admissível $\mathcal{T}(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p})$.

Definição (Otimidade) A trajetória $\mathcal{T}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*)$ é considerada globalmente ótima caso seja realizável e

$$J[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*, t,] \leq J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t], \quad (2.11)$$

vale para todas trajetórias admissíveis $\mathcal{T}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$. A trajetória $\mathcal{T}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*)$ é considerada localmente ótima caso for admissível e existir um $\epsilon > 0$ tal que a equação (2.11) valha para todas trajetórias admissíveis dentro de uma determinada vizinhança, de tal forma que

$$\|\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{u}(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \text{e} \quad \|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}\| \leq \epsilon. \quad (2.12)$$

Desta maneira, a função $\mathbf{x}^*(t)$ é denotada por estado ótimo (local), o vetor $\mathbf{p}^*$ por vetor de parâmetros ótimo (local) e a função $\mathbf{u}^*(t)$ é denotada controle ótimo (local) caso sejam componentes de uma trajetória ótima (local) $\mathcal{T}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*)$.

Logo, pode se afirmar que o problema de controle ótimo consiste em obter um controle admissível $\mathbf{u}^*(t)$ tal que exista uma trajetória admissível $\mathcal{T}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*)$ entre as condições de estado inicial e final que minimiza o índice de desempenho $J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f, \mathbf{p}]$. Para uma discussão mais aprofundada a respeito das condições de otimalidade e conceitos de vizinhança sugere-se a leitura de (PINTO, 1991).

2.2 Problema de Multi-fases

Em alguns problemas de controle ótimo a trajetória pode conter sequências de fases de movimentos contínuos separadas por saltos discretos, como por exemplo na trajetória de um foguete de múltiplos estágios, nas trajetórias de aeronaves acrobáticas com movimentos rápidos no manche, em problemas de controle Bang-Bang, etc. Nestas situações, a abordagem do problema de controle ótimo através das Eqs.(2.5) a (2.9) pode se tornar insuficiente para obtenção de uma solução devido às condições de continuidade aplicadas. Nestas situações pode-se alternar a abordagem do problema para a qual se denota por análise multi-fase (RAO, 2010), também chamada por trajetória fracionada (PINTO, 1991). Assim, permite-se não apenas avaliar casos com descontinuidades, mas também definir diferentes funções de custo, sistemas de equações dinâmicas, restrições de contorno e de trajetória para cada fase.

Neste caso, o problema é dividido em um número determinado de segmentos compostos por problemas de única fase. Logo, o problema multi-fases é semelhante a resolver um conjunto de problemas de fase única em paralelo, onde certas condições de contorno devem ser adicionadas para relacionar os diferentes segmentos da trajetória. Desta maneira, o problema pode ser reescrito na forma:

Minimizar

$$J = \sum_{s=1}^S \left\{ \mathcal{M}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t_0), t_0^{(s)}, \mathbf{x}^{(s)}(t_f), t_f^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}] + \int_{t_0^{(s)}}^{t_f^{(s)}} \mathcal{L}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t), \mathbf{u}^{(s)}(t), t^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}] dt \right\} \quad (2.13)$$

sujeito aos vínculos dinâmicos, tipicamente não-lineares, na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(s)}(t) = \mathbf{f}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t^{(s)}), \mathbf{u}^{(s)}(t^{(s)}), t^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}], \text{ para } s \in [1, 2, \dots, S] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t^{(s)}), \mathbf{u}^{(s)}(t^{(s)}), t^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}], \text{ para } s \in [1, 2, \dots, S] \quad (2.15)$$

às restrições de trajetória:

$$\boldsymbol{\varphi}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t^{(s)}), \mathbf{u}^{(s)}(t^{(s)}), t^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}] \leq \mathbf{0}, \text{ para } s \in [1, 2, \dots, S] \quad (2.16)$$

aos vínculos de contorno:

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t_0^{(s)}), t_0^{(s)}, \mathbf{x}^{(s)}(t_f^{(s)}), t_f^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}] = \mathbf{0}, \text{ para } s \in [1, 2, \dots, S] \quad (2.17)$$

e aos vínculos de conexão entre os segmentos:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(s)}[\mathbf{x}^{(s)}(t_f^{(s)}), t_f^{(s)}, \mathbf{x}^{(s+1)}(t_0^{(s+1)}), t_0^{(s+1)}, \mathbf{p}^{(s)}] = \mathbf{0}, \text{ para } s \in [1, 2, \dots, S - 1] \quad (2.18)$$

onde S representa o número total de fases em que a trajetória é segmentada e $\boldsymbol{\gamma}$ são os vínculos de transição que relacionam as características no final do segmento s com aqueles do início do segmento $s + 1$, considerando que uma fase não possa ser conectada a si mesma ($\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_r}$). Esta restrição tem como propósito impor o grau de conexão entre as variáveis da trajetória entre as diferentes fases do domínio.

Para detalhes mais aprofundados a respeito da formulação de um problema de controle ótimo, sugere-se a leitura de Neto (2016), Bryson e Ho (1975), Lewis, Vrabie e Syrmos (2012), Luenberger (1979), Betts (2010), Kirk (2004), Citron (1969) e Sage (1968).

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA ÓTIMA DE AERONAVES

Neste capítulo inicia-se a abordagem específica a respeito da formulação do problema planejamento de trajetória de aeronaves em seus diversos aspectos, i.e., na definição dos vínculos dinâmicos, do índice de desempenho, entre outras características desta classe de problemas.

A Seção 3.1 apresenta diversos aspectos relevantes na formulação dos vínculos dinâmicos $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ e $\mathbf{0} = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}]$ do problema. Para isto, nas Seções 3.1.1 e 3.1.2 apresentam-se os diferentes sistemas de referência geralmente utilizados no estudo da mecânica do voo, bem como o processo de obtenção das equações da dinâmica translacional e rotacional para uma aeronave. Na Seção 3.1.3, inclui-se uma das partes em destaque deste trabalho que diz respeito às diferentes formas de representação da atitude de uma aeronave. São apresentadas suas características e diversos aspectos que são expressivos na escolha e utilização destas técnicas para a solução do problema de planejamento de trajetória. Assim, apresenta-se na Seção 3.1.4 diferentes formas de modelagem da dinâmica de voo de uma aeronave, desde o caso mais simples, utilizando um modelo de massa-ponto e representação da atitude por ângulos de Euler, até modelos mais complexos, como o de corpo rígido com representação da atitude por matrizes de cossenos diretores.

Especificamente na Sub-Seção 3.1.4.5, como contribuição, é apresentada uma proposta de modificação na formulação de alguns modelos utilizados na parametrização da atitude de tal forma que suas respectivas propriedades de grupo sejam mantidas. Isto porque duas das formas de representação da atitude apresentadas possuem estruturas que devem respeitar certas restrições algébricas ao longo da trajetória. Tais formulações sugeridas tem como intuito modificar a maneira em que se inclui estas restrições dinâmicas no modelo, de tal forma que elas sejam garantidas naturalmente durante a solução numérica do problema.

Na Seção 3.2, mostram-se algumas situações em que as restrições algébricas $\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] \leq \mathbf{0}$ (restrições de trajetória) podem ser utilizadas no contexto em questão. São discutidos também na Seção 3.3, os diferentes tipos de índices de desempenho $J[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f, \mathbf{p}]$ geralmente utilizados. Por fim, apresenta-se na Seção 3.4 alguns aspectos importantes a respeito da abordagem da trajetória fracionada na solução destes problemas.

3.1 Vínculos Dinâmicos

3.1.1 Sistemas de Referência

É importante definir diferentes sistemas de coordenadas para a descrição do movimento da aeronave, pois alguns sistemas referenciais irão expressar as variáveis de posição, velocidade, aceleração, forças e momento de forma mais natural que outros. Por exemplo, para descrever a rota de uma aeronave de um ponto a outro é interessante que a velocidade da aeronave seja conhecida com relação a um sistema de coordenadas fixo à Terra. No entanto, caso queira se avaliar as forças e momentos aerodinâmicos que agem sobre esta aeronave durante tal trajetória é mais conveniente utilizar um sistema de referência que esteja junto à aeronave. Assim, diferentes sistemas de referência são apresentados.

- **Referencial da Terra $\mathcal{S}_T$ e do horizonte local $\mathcal{S}_H$**

A origem do sistema de coordenadas da Terra está localizada na superfície da Terra de tal forma que seu eixo z_T aponte em direção ao centro do globo. O eixo x_T aponta para norte e y_T completa o triedro apontando para leste. O sistema do horizonte local possui seus eixos x_H , y_H e z_H paralelo respectivamente aos eixos x_T , y_T e z_T . Sua origem, no entanto, possui a liberdade de se movimentar e pode ser posicionada em qualquer ponto no espaço. Neste trabalho, esta origem será posicionada no centro de gravidade da aeronave, conforme FIGURA 3.1.

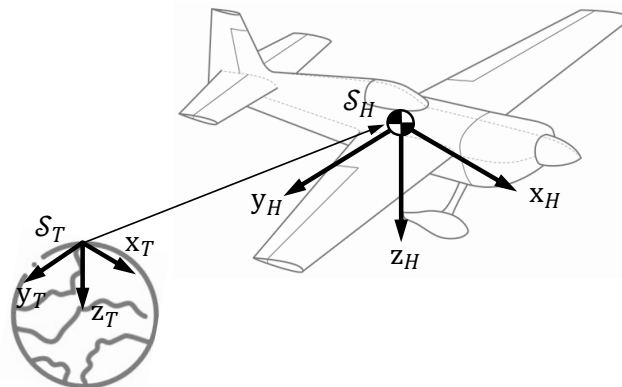


FIGURA 3.1 - Sistema do horizonte em relação ao sistema da Terra.

- **Referencial do Corpo $\mathcal{S}_B$**

O sistema do corpo é fixo em relação ao corpo da aeronave e tem sua origem geralmente localizada no seu centro de gravidade, FIGURA 3.2. O eixo x_B é comumente posicionado de tal forma que ele esteja no plano de simetria e apontado na mesma direção que o nariz. O eixo

z_B também está no plano de simetria, aponta para “baixo” e é ortogonal a x_B . y_B completa o triedro apontando para a asa direita.

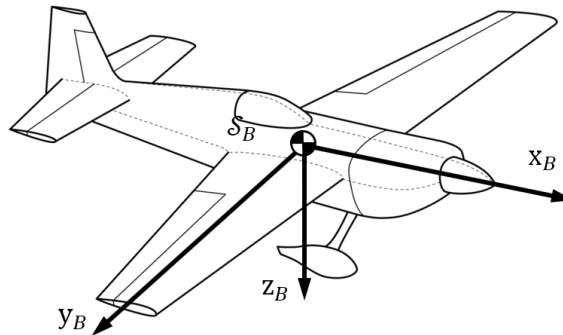


FIGURA 3.2 - Sistema de eixos do corpo.

▪ Referencial de Estabilidade S_S

Neste sistema, o eixo x_S é a projeção do vetor de velocidade da aeronave em relação ao escoamento livre sobre o plano de simetria. O eixo z_S também está sobre o plano de simetria e é ortogonal a x_S , com y_S completando o triedro direto.

▪ Referencial do Vento S_W

Os eixos do vento têm sua origem fixa à aeronave, normalmente no centro de gravidade, porém sua orientação não é fixa em relação ao corpo do avião. Seu eixo x_W é alinhado com o vento relativo, z_W é ortogonal a x_W e é colocado sobre o plano de simetria da aeronave. Por fim, y_W completa o triedro dextrogiro, conforme FIGURA 3.3. A relação entre o vetor de velocidade local com os eixos do corpo formam o ângulo de ataque α , que é o ângulo entre a projeção do vetor de vento relativo no plano $x_B z_B$ com o eixo x_B , e o ângulo de derrapagem β , que é o ângulo entre o vetor de vento relativo e o plano de simetria da aeronave $x_B z_B$.

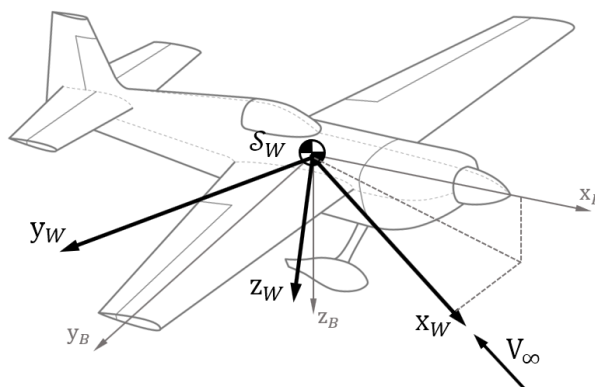


FIGURA 3.3 - Sistema de eixos do vento.

3.1.2 Equações de Movimento

A segunda lei de Newton afirma que a variação da quantidade de movimento é diretamente proporcional às forças e momentos aplicados sobre o corpo, quando observados a partir de um referencial inercial. No entanto, é desejável observar a aeronave a partir de um sistema de coordenadas local que rotaciona e translada junto ao corpo em relação a um sistema inercial, neste caso, ao sistema de coordenadas da Terra. Isto porque as características aerodinâmicas, propulsivas e de inércia da aeronave são comumente definidas a partir de sistemas locais. Suponha que se escolha os eixos da Terra como referência para a solução das equações de movimento da aeronave. Neste caso, durante um movimento do corpo, seu tensor de inércia irá variar ao longo do tempo em relação ao sistema de eixos escolhido, aumentando a complexidade da solução das equações de movimento. Assim, uma maneira de contornar esta dificuldade é descrever as equações de movimento em relação a um eixo local da aeronave, i.e., a um sistema não inercial.

Assuma uma condição onde se tem um sistema inercial $\mathcal{S}_I$ e um sistema não inercial em movimento denotado aqui por $\mathcal{S}_M$. Deseja-se expressar a aceleração inercial de um ponto P em termos de $\mathcal{S}_M$ em uma condição onde estes eixos estão sob uma determinada rotação e sua origem sob uma determinada aceleração, conforme apresentado na FIGURA 3.4.

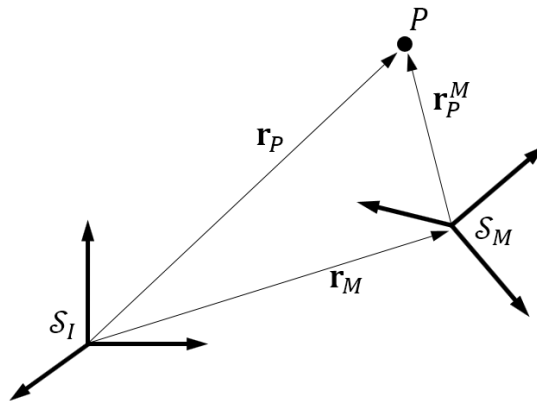


FIGURA 3.4 - Sistema inercial e sistema em movimento.

A posição inercial do ponto P pode ser expressa por:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_M + \mathbf{r}_P^M. \quad (3.1)$$

A aceleração do ponto P é obtida a partir do cálculo da segunda derivada da Eq.(3.1) em relação ao tempo, a qual pode ser resumida em:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{a}_P\}_M &= \{\mathbf{a}_M\}_M + \{\mathbf{a}_P^M\}_M + \{\dot{\boldsymbol{\omega}}_M\}_M \times \{\mathbf{r}_P^M\}_M \\
&\quad + 2\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times \{\mathbf{v}_P^M\}_M \\
&\quad + \{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times (\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times \{\mathbf{r}_P^M\}_M),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde o termo $\{\mathbf{a}_P\}_M$ se refere à aceleração inercial do ponto P referente ao sistema inercial representada no sistema $\mathcal{S}_M$; $\{\mathbf{a}_M\}_M$ é a aceleração inercial da origem do sistema em movimento representada no sistema $\mathcal{S}_M$; $\{\mathbf{a}_P^M\}_M$ aceleração do ponto referente ao sistema em movimento e representada no sistema em movimento; $\{\dot{\boldsymbol{\omega}}_M\}_M \times \{\mathbf{r}_P^M\}_M$ é o efeito de aceleração tangencial causada pela rotação dos eixos $\mathcal{S}_M$, em que $\{\dot{\boldsymbol{\omega}}_M\}_M$ representa a aceleração angular do sistema móvel em relação ao sistema inercial e representado no sistema móvel; $2\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times \{\mathbf{v}_P^M\}_M$ é um termo conhecido como aceleração de Coriolis (ou complementar) e representa a aceleração devido ao acoplamento entre o movimento relativo do ponto P , i.e., $\{\mathbf{v}_P^M\}_M$, e da rotação inercial do sistema $\mathcal{S}_M$, em que $\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M$ é a velocidade angular do eixos em movimento e $\{\mathbf{v}_P^M\}_M$ a velocidade linear do ponto P ; e $\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times (\{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times \{\mathbf{r}_P^M\}_M)$ se refere à aceleração centrípeta causada pela rotação de $\mathcal{S}_M$ em relação aos eixos de inércia.

Para os casos que serão abordados neste trabalho o referencial inercial é o sistema fixo à Terra $\mathcal{S}_T$ e o ponto é o CG da aeronave, sob o qual podem ser descritos quaisquer dos sistemas apresentado na Seção 3.1.1. Assim:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{a}_{CG}\}_T &= \{\mathbf{a}_T\}_T + \{\mathbf{a}_{CG}^T\}_T + \{\dot{\boldsymbol{\omega}}_T\}_T \times \{\mathbf{r}_{CG}^T\}_T \\
&\quad + 2\{\boldsymbol{\omega}_T\}_T \times \{\mathbf{v}_{CG}^T\}_T \\
&\quad + \{\boldsymbol{\omega}_T\}_T \times (\{\boldsymbol{\omega}_T\}_T \times \{\mathbf{r}_{CG}^T\}_T).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Considera-se que o sistema da terra $\mathcal{S}_T$ é fixo em relação ao centro da Terra, rotacionando junto desta, assim $\{\dot{\boldsymbol{\omega}}_T\}_T = 0$. De acordo com Durham (2013), os termos de aceleração centrípeta e de Coriolis, são da ordem de $0,0335 \text{ m/s}^2$ e $0,0914 \text{ m/s}^2$, respectivamente. Logo, para trajetórias típicas de aeronaves, os erros causados ao se desprezar tais termos são relativamente pequenos. Esses erros podem se tornar bastante significativos quando são analisados voos de longas distâncias em altas velocidades, por exemplo na análise da trajetória de reentrada na atmosfera de um veículo hipersônico. Em problemas de projéteis balísticos de precisão, estes termos também devem ser considerados. Porém, para os casos tratados neste trabalho, tem-se:

$$\{\mathbf{a}_{CG}\}_T = \{\mathbf{a}_{CG}^T\}_T. \quad (3.4)$$

Ao utilizar a Eq.(3.4) nas análises, assume-se de forma indireta que a curvatura da Terra será desprezada no movimento, ou seja, que a região próxima à origem de $\mathcal{S}_T$ é uma superfície plana, condição a qual denota-se por modelo Terra plana. Além desta, outras hipóteses são consideradas na obtenção das equações de movimento da aeronave:

- i. A aeronave é considerada um sistema contínuo;
- ii. Assume-se que a aeronave é um corpo rígido, assim, os efeitos relacionados às deformações elásticas em voo são desprezados;
- iii. A distribuição de massa é constante ao longo do tempo, o que significa que os produtos e momentos de inércia são considerados constantes;
- iv. A aeronave é simétrica (em termos de massa e geometria) em torno de seu plano vertical, permitindo o desacoplamento dos movimentos longitudinal e lateral-direcional;
- v. As forças e momentos aerodinâmicos instantâneas sobre a aeronave são funções apenas das variáveis de movimento instantâneas do corpo.

A partir destas considerações são obtidas as equações da dinâmica translacional e rotacional da aeronave nas seções seguintes. Uma dedução detalhada destas equações pode ser obtida em bibliografias clássicas como Durham (2013), Stevens, Lewis e Johnson (2016), Napolitano (2011) e Etkin (2005).

▪ Equações de Translação

De acordo com Newton, a variação da quantidade de movimento linear em um ponto de massa infinitesimal dm devido à resultante de uma força externa pode ser descrita por:

$$d\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}_{dm}}{dt} dm. \quad (3.5)$$

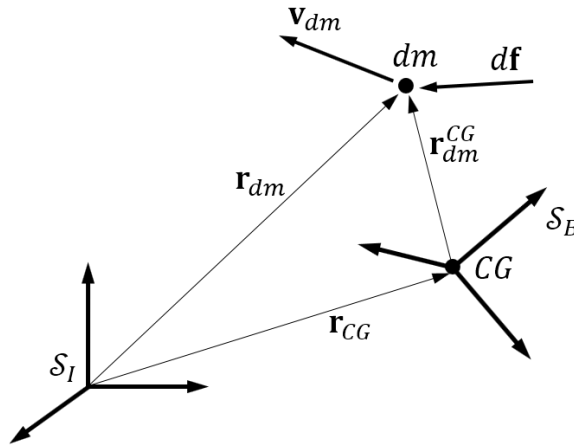


FIGURA 3.5 - Representação do um ponto nos sistemas $\mathcal{S}_I$ e $\mathcal{S}_B$.

Para a análise de aceleração linear do corpo, tem-se que, de acordo com a FIGURA 3.5:

$$\mathbf{r}_{dm} = \mathbf{r}_{dm}^{CG} + \mathbf{r}_{CG}, \quad (3.6)$$

onde assume-se o sistema móvel como o sistema do corpo $\mathcal{S}_B$. Integrando a Eq.(3.6):

$$\int_{dm} \mathbf{r}_{dm} dm = \int_{dm} \mathbf{r}_{dm}^{CG} dm + \int_{dm} \mathbf{r}_{CG} dm. \quad (3.7)$$

Uma vez que a origem do sistema de coordenadas móvel tem origem no CG da aeronave, o primeiro termo da direita é igual a zero. Já no segundo termo, observa-se que $\mathbf{r}_{CG}$ não será função de m caso se considere uma distribuição de massa conhecida, conforme hipótese iii da Seção 3.1.2. Assim:

$$\int_{dm} \mathbf{r}_{dm} dm = m \mathbf{r}_{CG}. \quad (3.8)$$

Derivando a Eq.(3.8) duas vezes em relação ao tempo, tem-se:

$$\int_{dm} \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{dm}}{dt} \right\}_B dm = m \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_B. \quad (3.9)$$

A partir da Eq.(3.9), então:

$$\int_{dm} d\mathbf{f} = m \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_B. \quad (3.10)$$

A integral do lado esquerdo da Eq.(3.10) está relacionada com as forças que agem sobre todos os elementos infinitesimais de massa dm que compõe o corpo da aeronave. Sabendo que a parte que corresponde às forças internas é zero, a solução desta integral é a soma de todas forças externas que agem sobre a aeronave, i.e.,

$$\{\mathbf{F}\}_B = m \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_B. \quad (3.11)$$

O vetor de velocidade do CG da aeronave é observado a partir do sistema não inercial $\mathcal{S}_B$, i.e., $\{\mathbf{v}_{CG}\}_B$. Para determinar a taxa de variação deste vetor no tempo em relação aos eixos inerciais, faz-se utilização do Teorema dos Eixos Móveis (PAPASTAVRIDIS, 2014).

Teorema 3.1 (Teorema dos Eixos Móveis) Suponha dois sistemas de referência, um inercial $\mathcal{S}_I$ e outro em movimento (ou não-inercial) $\mathcal{S}_M$, e um vetor arbitrário $\mathbf{p}$, FIGURA 3.6. Assim, a taxa de variação deste vetor no tempo em relação ao sistema inercial dada sua taxa de variação no tempo em relação ao eixo móvel é dada por:

$$\left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_M = \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_M + \{\boldsymbol{\omega}_M\}_M \times \{\mathbf{p}\}_M. \quad (3.12)$$

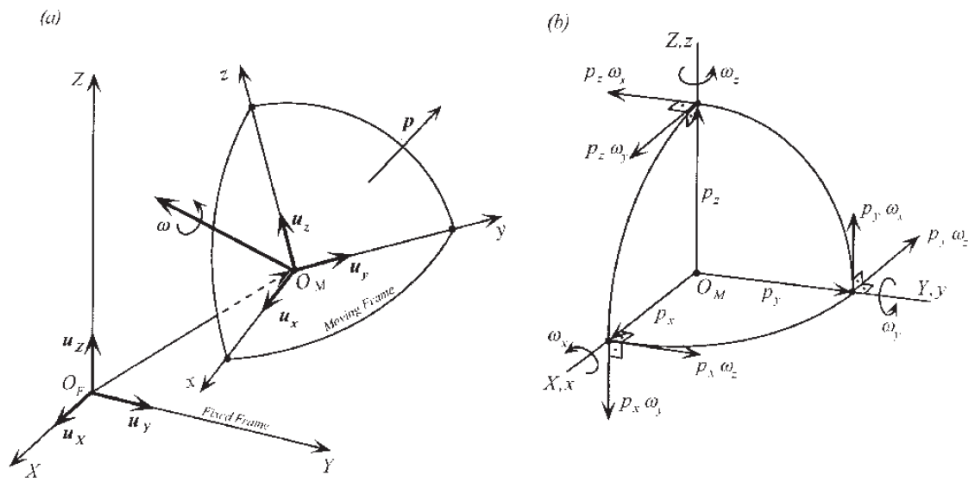


FIGURA 3.6 - Movimento arbitrário de um vetor $\mathbf{p}$
Fonte: Papastavridis (2014)

Assim, aplicando-se este teorema sob o vetor $\{\mathbf{v}_{CG}\}_B$, tem-se:

$$\left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_T = \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_B + \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times \{\mathbf{v}_{CG}\}_B . \quad (3.13)$$

Ou seja:

$$\{\mathbf{a}_{CG}\}_T = \left\{ \frac{d\mathbf{v}_{CG}}{dt} \right\}_B + \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times \{\mathbf{v}_{CG}\}_B . \quad (3.14)$$

Logo, ocultando o subscrito do CG, a dinâmica translacional da aeronave é escrita como:

$$\{\mathbf{F}\}_B = m \left\{ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\}_B + m(\{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times \{\mathbf{v}\}_B) . \quad (3.15)$$

▪ Equações de Rotação

De forma similar, a variação da quantidade de movimento angular em torno do CG da aeronave é o resultado dos momentos externos sobre o CG, observados a partir do referencial inercial, os quais são dados por⁸:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r}_{dm} \times d\mathbf{f} = \mathbf{r}_{dm} \times \frac{d\mathbf{v}_{dm}}{dt} dm . \quad (3.16)$$

A quantidade de movimento angular de dm é representada por:

$$d\mathbf{h} = \mathbf{r}_{dm} \times \mathbf{v}_{dm} dm . \quad (3.17)$$

Combinando a Eq.(3.16) e a Eq.(3.17),

$$\mathbf{r}_{dm} \times d\mathbf{f} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{dm} \times \mathbf{v}_{dm}) dm . \quad (3.18)$$

Para obter a taxa de variação da quantidade de movimento em relação ao CG integra-se a Eq.(3.18), combinando o resultado com a Eq.(3.6). Após este processo, a integral do lado esquerdo da Eq.(3.18) é

⁸ Os subscritos e sobrescritos foram ocultados nesta seção a fim de simplificar a notação.

$$\int_{dm} (\mathbf{r}_{dm} \times d\mathbf{f}) dm = \mathbf{M}_{CG} + (\mathbf{r}_{CG} \times \mathbf{F}), \quad (3.19)$$

e o lado direito

$$\frac{d}{dt} \int_{dm} (\mathbf{r}_{dm} \times \mathbf{v}_{dm}) dm = \frac{d}{dt} \mathbf{h}_{CG} + (\mathbf{r}_{CG} \times \mathbf{F}). \quad (3.20)$$

Em outras palavras, a soma dos momentos externos aplicados em torno do CG é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular em torno do CG, i.e.,

$$\mathbf{M}_{CG} = \frac{d}{dt} \mathbf{h}_{CG}. \quad (3.21)$$

Utilizando o Teorema dos Eixos Móveis, tem-se:

$$\{\mathbf{M}_{CG}\}_B = \left\{ \frac{d\mathbf{h}_{CG}}{dt} \right\}_B + \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times \{\mathbf{h}_{CG}\}_B. \quad (3.22)$$

Avaliando os termos da quantidade de movimento angular (veja, e.g., Etkin (2005, p. 134)) e ocultando o subscrito referente ao centro de gravidade, a Eq.(3.22) pode ser expandida para:

$$\{\mathbf{M}\}_B = I_B \left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right\}_B + \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times (I_B \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B), \quad (3.23)$$

onde I_B é o tensor dos momentos de inércia da aeronave representados em relação aos eixos do corpo $\mathcal{S}_B$, definido por:

$$I_B \triangleq \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zz} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

É importante ressaltar que, de acordo com a hipótese iv da Seção 3.1.2, referente à simetria da aeronave, tem-se que:

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0. \quad (3.25)$$

Isto implica no fato de que o eixo y_B seja um dos eixos principais de inércia, logo, os momentos aplicados em torno deste eixo não irão gerar acelerações angulares em torno dos outros eixos do corpo.

Além disso, a dedução apresentada para a Eq.(3.23) assume que a aeronave é um corpo rígido sem partes rotativas, onde não são incluídos quaisquer efeitos giroscópios relacionados à hélices, paletas de uma turbina ou quaisquer outras partes rotativas ligadas ao sistema propulsivo. Para considerar tais efeitos, sugere-se ler Napolitano (2011).

3.1.3 Representação da Atitude de um Sistema Referencial

Como mostrado na Seção 3.1.1, diferentes sistemas referenciais são utilizados para descrever o movimento de uma aeronave. As transformações entre estes sistemas são conhecidas como rotações e serão detalhadamente explicadas nesta seção⁹.

A busca por maneiras de parametrizar o grupo de rotações do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ tridimensional tem origem no fim do século XVIII, quando Leonard Euler mostrou que este grupo é em si uma variedade topológica tridimensional. Logo, para um melhor entendimento dos conceitos relacionados às rotações, inicialmente serão apresentados alguns conceitos introdutórios de Topologia, que é um ramo da matemática dedicado a estudar as propriedades de um objeto matemático que são preservadas durante uma deformação contínua, e, portanto, durante uma transformação. As propriedades que não variam devido a estas deformações são chamadas propriedades topológicas, dentre as quais pode-se citar: i) a compatibilidade, que permite fazer a distinção entre linhas e circunferências; ii) a dimensão, que permite distinguir uma linha de uma superfície, e iii) a conectividade, a qual permite a distinção entre uma circunferência e duas circunferências sem interseção (CONLON, 2001) (GAMELIN e GREENE, 1999). Um dos tipos de deformações consideradas nos estudos de topologia são os homeomorfismos, os quais são funções contínuas entre espaços topológicos que também possuem uma função inversa contínua, ou seja, que preservam as propriedades topológicas de um dado espaço (MENDELSON, 1990).

Definição (Homeomorfismo) A função $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre dois espaços topológicos é um homeomorfismo caso possua as seguintes propriedades:

- f é uma função bijetora;
- f é contínua;

⁹ Uma transformação completa é composta tanto por translação quanto por rotação. Neste trabalho, no entanto, este termo é utilizado apenas como referência às rotações.

- a função inversa f^{-1} é contínua.

A FIGURA 3.7 apresenta uma forma simplificada de observar o conceito de homeomorfismo, uma vez que a transformação entre uma caneca e um toro atende as propriedades definidas por este tipo de deformação (MENDELSON, 1990). Assim, do ponto de vista topológico, ambos estes objetos são equivalentes. Estes conceitos são relevantes para um entendimento mais amplo da distinção entre diferentes formas de parametrização do grupo de rotações tridimensionais e das limitações e propriedades intrínsecas a cada uma destas representações.

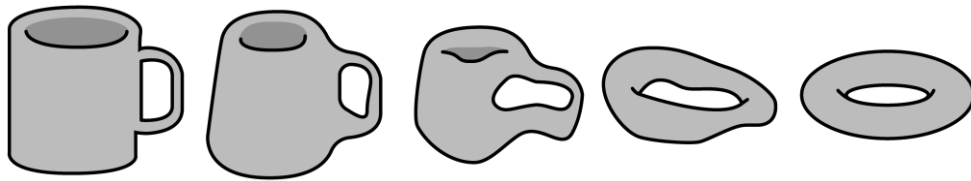


FIGURA 3.7 – Representação de um homeomorfismo.

Para introdução dos conceitos topológicos ligados à parametrização das rotações, serão analisadas inicialmente as rotações no espaço 2D. Este espaço é descrito pelo grupo $SO(2)$, o qual é formado pelo conjunto de matrizes ortogonais 2×2 com determinante um, denotado por grupo especial ortogonal em duas dimensões. Digamos que para certa aplicação deseja-se utilizar a representação da rotação na forma de um ângulo θ no intervalo $[0, 2\pi)$. Embora exista uma relação bijetora entre os elementos de $SO(2)$ e o ângulo no intervalo $[0, 2\pi)$, as rotações 2D encobrem-se de tal forma que as direções 0° e 360° são idênticas. Isto mostra que $SO(2)$, não é equivalente aos elementos no intervalo devido a alteração na propriedade de continuidade, conforme ilustrado pela FIGURA 3.8. Assim, do ponto de vista topológico, estas duas representações são distintas.

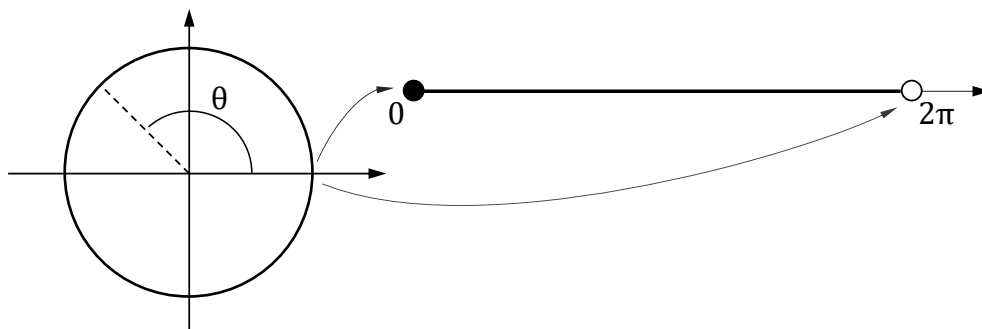


FIGURA 3.8 - Rotações no espaço 2D.

No entanto, pode-se notar que $SO(2)$ é homeomorfo à circunferência unitária $\mathbb{S}^1$, também conhecida como esfera¹⁰ unitária 1-dimensional (CAMPA e CAMARILLO-GOMEZ, 2008):

$$\mathbb{S}^1 \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \quad (3.26)$$

pois a função de projeção de um determinado ângulo θ para o ponto $(\cos \theta, \sin \theta)$ sobre a circunferência é uma bijeção. E a projeção inversa para determinação do argumento relacionado ao ponto também é contínua. Assim, observa-se que as propriedades de dimensão, compatividade e conectividade são preservadas mesmo na passagem entre $SO(2)$ e $\mathbb{S}^1$.

Estes espaços são denotados variedades, os quais são espaços topológicos que se assemelham a um espaço Euclidiano em cada ponto de sua composição, ou seja, é um espaço onde cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa ao espaço Euclidiano. Em outras palavras, uma variedade n -dimensional é um espaço topológico cujas propriedade em cada ponto é homeomorfo e possui vizinhança a um espaço Euclidiano n -dimensional. É importante ressaltar que embora uma variedade seja localmente homeomorfa ao espaço Euclidiano, globalmente ela pode ser bastante diferente disto. Um exemplo desta questão é o caso da topologia de uma esfera $\mathbb{S}^2$, a qual não é globalmente homeomorfa ao plano Euclidiano, pois ela apresenta a propriedade topológica de compatividade, a qual o espaço Euclidiano não possui (KALAJDZIEVSKI, 2015). No entanto, localmente pode-se projetar mapas de regiões da esfera em um plano Euclidiano, conforme FIGURA 3.9.

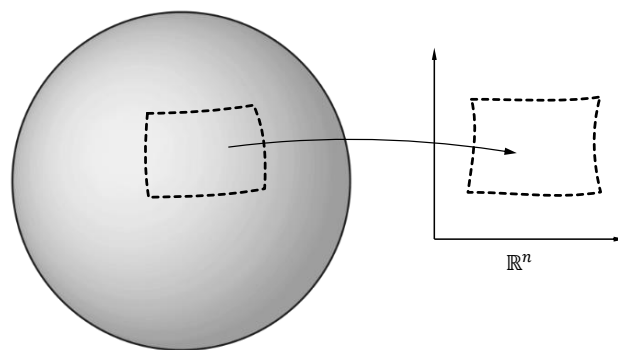


FIGURA 3.9 - Projeção de mapas esféricos em um plano Euclidiano.

¹⁰ Uma n -esfera é definida como um espaço topológico dado pelo conjunto de pontos no espaço Euclidiano $(n + 1)$ -dimensional situados a uma distância fixa do seu centro. Quando este “raio” é unitário, denota-se então este espaço por n -esfera unitária, a qual é definida como: $\mathbb{S}^n \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Dessa forma, $\mathbb{S}^1$ é a circunferência unitária, $\mathbb{S}^2$ é a esfera convencional. Deve-se notar que este espaço se refere à superfície da esfera, onde n é a dimensionalidade intrínseca da superfície. Além disso, é possível compor múltiplos espaços a partir do produto cartesiano entre estas definições. Por exemplo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ define a topologia de um toro. A notação exponencial também pode ser utilizada aqui, ou seja, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1)^2$.

Na Seção 3.1.2 foram apresentadas as equações da dinâmica translacional e rotacional da aeronave (i.e., de um corpo rígido) aplicando a Segunda Lei de Newton em termos do sistema de coordenadas do corpo. No entanto, estes eixos não podem ser aplicados diretamente para descrever a posição e atitude da aeronave, as quais são convenientemente descritas em termos do sistema fixo da Terra (sistema inercial).

Para representação desta mudança de coordenadas, utilizam-se transformações, as quais são funções que projetam $\mathbf{n}$ -D vetores em outros $\mathbf{n}$ -D vetores: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. As rotações 3D são definidas como transformações lineares, assim a atitude de um sistema junto à aeronave pode ser representada por uma rotação 3D a partir de um referencial conhecido. Por isso, os termos rotação e atitude serão referenciados ao longo deste trabalho de forma análoga um ao outro.

O conjunto de todas as rotações em torno da origem do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ tridimensional formam um grupo sob a operação de composição, ou seja, a composição de duas rotações é também uma rotação. Este também é um grupo não abeliano¹¹ e de Lie¹² (HOWE, 1983) uma vez que as rotações neste espaço são não-comutativas e apresentam transformações suaves. Desta forma, este grupo de rotações, e consequentemente as atitudes de um corpo rígido, são variedades suaves e localmente, mas não globalmente, difeomórficas¹³ a $\mathbb{R}^3$ (CONLON, 2001). Esta variedade é usualmente identificada pelo grupo de todas as matrizes ortogonais 3×3 com determinante um, denotado $SO(3)$, o grupo especial ortogonal tridimensional (BHAT e BERNSTEIN, 2000).

Considere dois sistemas de referência $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ e um vetor $\{\mathbf{u}\}$ cujas componentes são conhecidas em $\mathcal{S}_1$, representadas por $\{\mathbf{u}\}_1 = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1}\}^T$. A representação deste mesmo vetor em $\mathcal{S}_2$, i.e., $\{\mathbf{u}\}_2 = \{u_{x2} \ u_{y2} \ u_{z2}\}^T$ é dada pela multiplicação da matriz de transformação $T_{2,1}$ pelo vetor em $\mathcal{S}_1$, ou seja, $\{\mathbf{u}\}_2 = T_{2,1}\{\mathbf{u}\}_1$, cujo subscrito da matriz de transformação indicam que as componentes de $\{\mathbf{u}\}$ estão sendo transformadas do sistema $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$. Esta transformação descreve a rotação de um sistema de referência ortogonal sujeita às propriedades mostradas, conforme FIGURA 3.10.

¹¹ Na Teoria de Grupos, um grupo não-abeliano é aquele em que há pelo menos um par de seus elementos que não comutam entre si.

¹² Os grupos de Lie são formados por variedades suaves e contínuas que estão sob uma estrutura tal que as operações de multiplicação e inversão são projeções suaves. De forma mais intuitiva, este é um grupo cujos elementos são descritos por um conjunto de parâmetros reais.

¹³ Difeomorfismo é uma projeção entre variedades suaves que preserva não apenas a continuidade, mas também a estrutura diferencial da variedade. Todo difeomorfismo é um homeomorfismo.

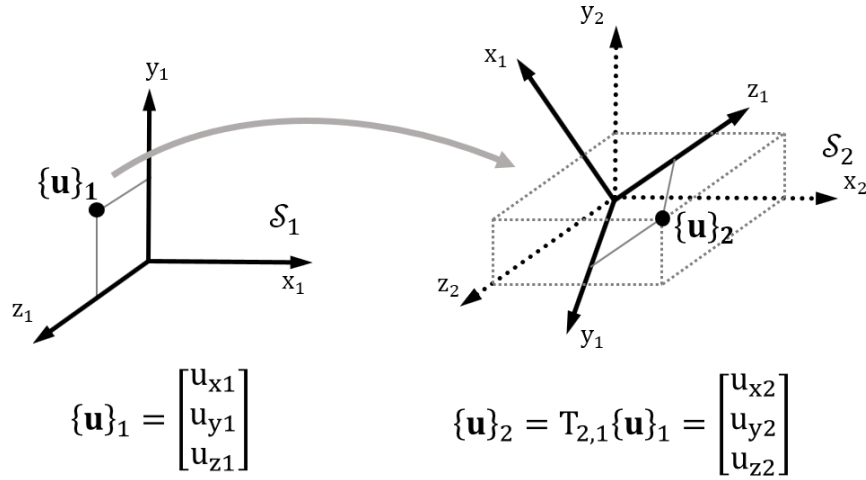


FIGURA 3.10 – Representação de um vetor $\{\mathbf{u}\}$ nos sistemas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Na mecânica do voo, as três maneiras mais comuns de se parametrizar a rotação de um sistema são: as Matrizes de Rotação, os Quatérnios Unitários, e os Ângulos de Euler (PHILLIPS, HAILEY e GEBERT, 2000), onde estes últimos dois se destacam no contexto do planejamento de trajetórias. Além destas, existem diversas outras maneiras de representar a atitude, como mostrado em Nitschke e Knickmeyer (2000) e Conway e Smith (2003). Cada forma de parametrização é, em certo sentido, topologicamente equivalente, uma vez que cada uma pode ser mapeada para uma transformação de rotação. Todas formas de parametrização apresentam vantagens e desvantagens e não existe um consenso sobre a forma “ideal” para representação da atitude. No entanto, certas representações são mais convenientes do que outras para diferentes tipos de análises. Assim, são mostradas nas seções seguintes as características relativas às três formas de representação da atitude mais difundidas no estudo da mecânica de voo de aeronaves.

3.1.3.1 Matriz de Rotação

As matrizes de rotação, também conhecidas como matrizes de cossenos diretores, fazem parte do grupo especial ortogonal $SO(3)$, onde

$$SO(3) \triangleq \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = R R^T = I_3, \det(R) = 1\}, \quad (3.27)$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3 . De fato, este espaço é homeomorfo ao grupo $SO(3)$. Os elementos da matriz de rotação são referenciados como:

$$\begin{aligned}
R &= [\{\mathbf{t}_1\} \quad \{\mathbf{t}_2\} \quad \{\mathbf{t}_3\}] \\
&= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Elas são a forma mais natural para representação das rotações e, em uma literatura específica, $SO(3)$ é utilizado como sinônimo para rotação espacial (BHAT e BERNSTEIN, 2000). Assim, dada uma matriz de rotação $R \in SO(3)$, a rotação de um vetor $\{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^3$ é representada por uma multiplicação matriz-vetor $R\{\mathbf{u}\}$, onde as propriedades de $SO(3)$ são satisfeitas, as quais são reapresentadas aqui por motivo de clareza:

- i. a composição de duas matrizes de rotação $R_1 R_2$ é também uma matriz de rotação;
- ii. em geral $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$, a não ser que as duas rotações ocorram em torno de um eixo em comum;
- iii. seu determinante é unitário positivo para todas rotações (o que se denota por rotação própria), i.e., $\det(R) = 1$;
- iv. a transposta de uma matriz de rotação é igual a sua inversa $R^T = R^{-1}$;
- v. a norma de um vetor é invariante sob uma rotação.

A propriedade de ortogonalidade (iv), conhecida também como relação de redundância, impõe 9 restrições não lineares de igualdade, dentre as quais 3 são redundantes. Assim, tem-se como resultado apenas 3 variáveis independentes. Assim, o espaço de rotações tridimensionais é em si 3D, sendo necessários pelo menos três parâmetros contínuos para representação de todas rotações possíveis.

Teorema 3.2 (KUIPERS, 1999) *Uma matriz 3×3 descreve a rotação em torno de um eixo através da origem em $\mathbb{R}^3$ se e somente se ela for ortogonal e possuir determinante 1.*

Prova Primeiramente, mostra-se que a matriz de rotação R é ortogonal e possui determinante 1. Suponha que uma rotação é correspondente a um eixo $\{\mathbf{k}\}$ e que η é o ângulo de rotação em torno deste eixo. O produto interno de dois vetores, $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ deve se preservar após a transformação, i.e.,

$$\begin{aligned}
(R\{\mathbf{u}\})^T (R\{\mathbf{v}\}) &= \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\} \\
\{\mathbf{u}\}^T R^T R \{\mathbf{v}\} &= \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\} \\
\{\mathbf{u}\}^T R^T R \{\mathbf{v}\} - \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

o que implica que

$$\{\mathbf{u}\}^T(R^T R - I_3)\{\mathbf{v}\} = 0. \quad (3.30)$$

Como $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ são vetores arbitrários, tem-se que:

$$R^T R - I_3 = 0 \quad \text{e, portanto,} \quad R^T R = I_3. \quad (3.31)$$

Portanto, a matriz R é ortogonal. Além disso, sabendo que $\det(R)^T = \det(R)$ e que o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes, pela Eq.(3.31), tem-se:

$$\det(R^T R) = \det(R)^T \det(R) = (\det(R))^2 = 1, \quad (3.32)$$

o que permite deduzir que $\det(R)$ deve ser $+1$ ou -1 . Porém, para a rotação em sistema de coordenada dextrogiro não se pode ter $\det(R) = -1$, por consequência, $\det(R) = +1$. Logo, admitindo que a matriz R 3×3 é ortogonal com determinante 1, é preciso mostrar que ela representa uma rotação. Primeiramente, uma vez que o eixo de qualquer rotação é fixo sob a rotação, deve existir um vetor fixo $\{\mathbf{n}\}$, tal que:

$$R\{\mathbf{n}\} = \{\mathbf{n}\}. \quad (3.33)$$

Ou seja, este vetor é alinhado com o eixo de rotação. A Eq.(3.33) é satisfatória para estabelecer que a matriz R possui um autovalor de $+1$, sendo que os autovalores de uma matriz R são os escalares λ que satisfazem a equação característica:

$$\det(R - \lambda I_3) = 0. \quad (3.34)$$

Logo, a matriz R terá um autovalor $+1$ se e somente se $\det(R - I_3) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \det(R - I_3) &= \det(R^T) \det(R - I_3) \\ &= \det(R^T R - R^T) \\ &= \det(I_3 - R^T) \\ &= \det((I_3 - R)^T) \\ &= \det(I_3 - R) \\ &= -\det(R - I_3). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ou seja, $\det(R - I_3) = 0$. Logo a transformação possui um vetor fixo $\{\mathbf{n}\}$ que é o eixo de rotação. A seguir, mostra-se que o plano que contém a origem é ortogonal a $\{\mathbf{n}\}$ e projeta a

si mesmo após uma rotação, ou seja, qualquer vetor neste plano é projetado por R em outro vetor neste mesmo plano. Uma vez que $\{\mathbf{n}\}$ é fixo sob R , ele também será fixo sob R^T , i.e.,

$$\begin{aligned} R\{\mathbf{n}\} &= \{\mathbf{n}\} \\ R^T\{\mathbf{n}\} &= RR^T\{\mathbf{n}\} \\ &= I_3\{\mathbf{n}\} \\ &= \{\mathbf{n}\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, considere um vetor $\{\mathbf{w}\}$ arbitrário no plano perpendicular a $\{\mathbf{n}\}$, o que significa que $\{\mathbf{w}\}^T\{\mathbf{n}\} = 0$. Logo o vetor $R\{\mathbf{w}\}$ é ortogonal a $\{\mathbf{n}\}$ pois

$$\begin{aligned} (R\{\mathbf{w}\})^T\{\mathbf{n}\} &= \{\mathbf{w}\}^T R^T R\{\mathbf{n}\} \\ &= \{\mathbf{w}\}^T I_3\{\mathbf{n}\} \\ &= \{\mathbf{w}\}^T\{\mathbf{n}\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por fim, o produto interno dos vetores $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ é invariante nesta transformação pois R é ortogonal e, além disso, a norma dos vetores $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ e o ângulo entre eles são preservadas sob R . Consequentemente, a transformação representada por R é uma rotação. ■

Além das propriedades mostradas, esta representação também é global e única no sentido de que toda atitude física corresponde a uma, e apenas uma, matriz de rotação (STEVENSON, LEWIS e JOHNSON, 2016, p. 10).

Teorema 3.3 *Para cada atitude existe uma e apenas uma matriz de rotação 3×3 , ortogonal e de determinante 1 capaz de representá-la.*

Prova Assuma que uma dada rotação de um vetor genérico $\{\mathbf{u}\}$ possa ser representada por duas matrizes ortogonais e de determinante 1, R_1 e R_2 , tal que $R_1 \neq R_2$. Logo:

$$\forall \{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^3 : R_1\{\mathbf{u}\} = R_2\{\mathbf{u}\}. \quad (3.38)$$

Então

$$\forall \{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^3 : (R_1 - R_2)\{\mathbf{u}\} = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Consequentemente, o espaço-nulo de $(R_1 - R_2)$ é $\mathbb{R}^3$. O Teorema de Posto-Nulo (MEYER, 2010, p. 199) afirma que o posto de $(R_1 - R_2)$ é dado pela diferença de sua dimensão e a dimensão de seu espaço-nulo, i.e., zero. Uma vez que apenas a matriz nula possui posto

zero, tem-se que $(R_1 - R_2) = \mathbf{0}$, ou $R_1 = R_2$. Logo, por contradição, tem-se que cada rotação em $\mathbb{R}^3$ é descrita por exatamente uma matriz de rotação. ■

Existem outras maneiras de interpretação da matriz de rotação. Suponha que em uma rotação os eixos do sistema pré-rotacionado $\{\mathbf{X}_1\}$, $\{\mathbf{Y}_1\}$, e $\{\mathbf{Z}_1\}$ sejam $\{\mathbf{X}_2\}$, $\{\mathbf{Y}_2\}$, e $\{\mathbf{Z}_2\}$, respectivamente, pós rotação. Assim a primeira coluna da matriz de rotação representa as coordenadas do eixo $\{\mathbf{X}_2\}$ relativo ao sistema de coordenadas original, após a rotação. Ou seja:

$$\{\mathbf{X}_2\} = \{\mathbf{t}_1\} = [t_{11} \ t_{21} \ t_{31}]^T. \quad (3.40)$$

De forma semelhante para a segunda e terceira colunas, tem-se: $\{\mathbf{Y}_2\} = \{\mathbf{t}_2\}$ e $\{\mathbf{Z}_2\} = \{\mathbf{t}_3\}$, respectivamente. Junto disso, uma vez que $R^T = R^{-1}$, as coordenadas dos eixos do sistema pré-rotação relativos ao sistema pós-rotação são as linhas da matriz de rotação R , veja a FIGURA 3.11.

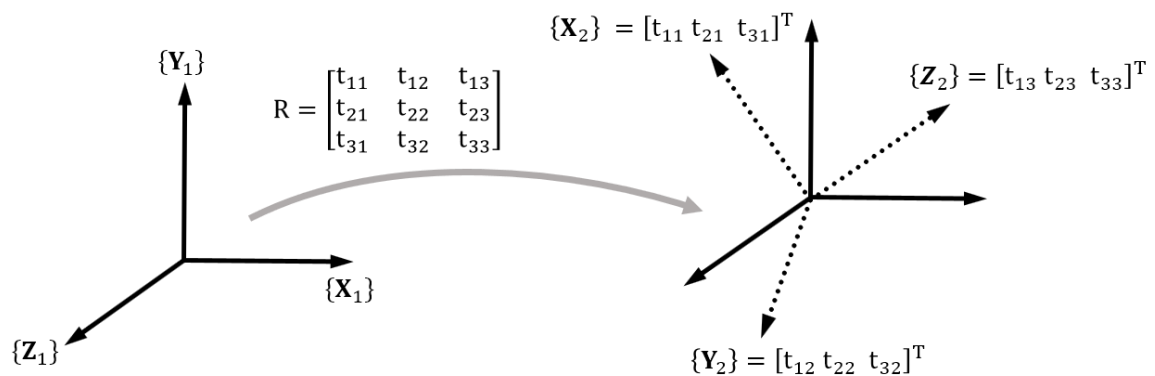


FIGURA 3.11 - Maneira alternativa para interpretação da matriz de rotação.

Sob esta ótica, pode-se notar que o termo t_{11} é, de fato, o cosseno do ângulo formado entre os eixos $\{\mathbf{X}_1\}$ e $\{\mathbf{X}_2\}$, uma vez que este termo é o produto escalar entre estes eixos. Esta mesma lógica pode ser seguida para os outros elementos da diagonal, os quais representam o cosseno do ângulo formado entre os outros eixos. Esta interpretação justifica a denotação deste tipo de representação também por Matriz de Cossenos Diretores. Para mais detalhes, veja, e.g., Durham (2013, p. 18).

Durante a análise do movimento, o sistema inercial é fixo, enquanto que o sistema acoplado à aeronave rotaciona e translada, FIGURA 3.12.

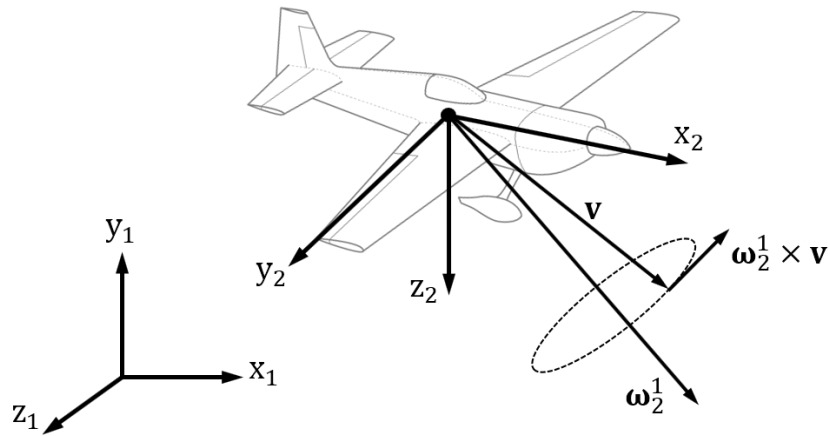


FIGURA 3.12 - Análise do movimento do sistema acoplado à aeronave.

Denotando estes eixos como $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, respectivamente. Se $\mathcal{S}_2$ rotaciona em relação a $\mathcal{S}_1$ com uma velocidade angular ω_2^1 , então a orientação relativa a estes eixos está mudando, em outras palavras $T_{2,1}$ varia de acordo com o tempo. Para determinar a taxa de variação de $T_{2,1}$ deve-se notar que a orientação do sistema inercial é constante, o que significa que a variação de um vetor $\{\mathbf{v}\}$ relativo ao sistema $\mathcal{S}_1$ com suas componentes representadas em $\mathcal{S}_1$ é igual a zero, i.e., $\{\dot{\mathbf{v}}_1\}_1 = 0$. A partir desta premissa, é possível demonstrar (veja, e.g., Durham (2013) Cap. 4.1) que

$$\dot{T}_{2,1} = -\{\Omega_2^1\}_2 T_{2,1} \quad (3.41)$$

onde $\{\Omega_2^1\}_2$ é a matriz antissimétrica da propagação da velocidade angular dos eixos não inerciais $\{\omega_2^1\}_2 = \{\omega_x \ \omega_y \ \omega_z\}^T$:

$$\{\Omega_2^1\}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Em outras palavras, durante um movimento contínuo, os elementos da matriz de rotação irão mudar continuamente. A variação de seus elementos com o tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\{\Omega_2^1\}_2 R, \\ \begin{bmatrix} \dot{t}_{11} & \dot{t}_{12} & \dot{t}_{13} \\ \dot{t}_{21} & \dot{t}_{22} & \dot{t}_{23} \\ \dot{t}_{31} & \dot{t}_{32} & \dot{t}_{33} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

As equações obtidas a partir do sistema mostrado pela Eq.(3.43) são conhecidas como Equações Cinemáticas ou Dinâmica da Atitude.

3.1.3.2 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler são a maneira mais comum de se parametrizar o grupo especial ortogonal de rotações devido à sua simples implementação e fácil visualização pelo usuário. Eles são uma representação de três parâmetros e seus elementos pertencem ao grupo 3-Torus $\mathbb{T}^3$, definido como o produto cartesiano de três circunferências,

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1. \quad (3.44)$$

Eles podem ser determinados de acordo com o Teorema de Rotação de Euler (STEVENSON, LEWIS e JOHNSON, 2016), o qual afirma:

Teorema 3.4 *Quaisquer dois sistemas de coordenadas ortogonais independentes podem ser relacionados por uma sequência de rotações (não mais do que três) em torno dos eixos de coordenadas ortogonais de um dos sistemas, onde duas rotações sucessivas não podem ocorrer sobre um mesmo eixo.*

Em outras palavras, qualquer sistema de referência arbitrário pode ser alinhado com outro sistema de referência através de até três rotações sucessivas em torno dos eixos do sistema de referência (PALAIS e PALAIS, 2007). A ordem de seleção dos eixos onde são feitas as rotações é arbitrária, porém um mesmo eixo não pode ser utilizado duas vezes consecutivas, uma vez que esta sequência representaria uma única rotação. Os ângulos formados por cada uma dessas rotações são genericamente chamados ângulos de Euler. Qualquer uma das sequências de rotação é válida para representação da atitude, no entanto, no estudo da mecânica do voo a sequência tipicamente escolhida é a 3-2-1 (i.e., Z-Y-X), ou seja, guinada-arfagem-rolamento, as quais representam rotações em torno dois eixos z, y e x, respectivamente, do sistema de referência rotacionado.

A partir disso, considere um vetor arbitrário $\{\mathbf{u}\}_1 = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1}\}^T$ em um sistema de coordenadas inercial $\mathcal{S}_1$, que possui as componentes $\{\mathbf{u}\}_2 = \{u_{x2} \ u_{y2} \ u_{z2}\}^T$ quando representados no sistema não inercial $\mathcal{S}_2$. Assim, a transformação das componentes deste vetor do sistema $\mathcal{S}_1$ para $\mathcal{S}_2$ é obtida aplicando a sequência de rotações

$$\{\mathbf{u}\}_2 = T_{2,\mathcal{S}''} T_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}'} T_{\mathcal{S}',1} \{\mathbf{u}\}_1, \quad (3.45)$$

onde as matrizes $T_{2,\mathcal{S}''}$, $T_{\mathcal{S}'',\mathcal{S}'}$ e $T_{\mathcal{S}',1}$ são casos particulares das matrizes de rotação, onde o eixo de rotação está alinhado com as componentes x, y e z, respectivamente dos sistemas $\mathcal{S}''$, $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}_1$, conforme apresentado na FIGURA 3.13.

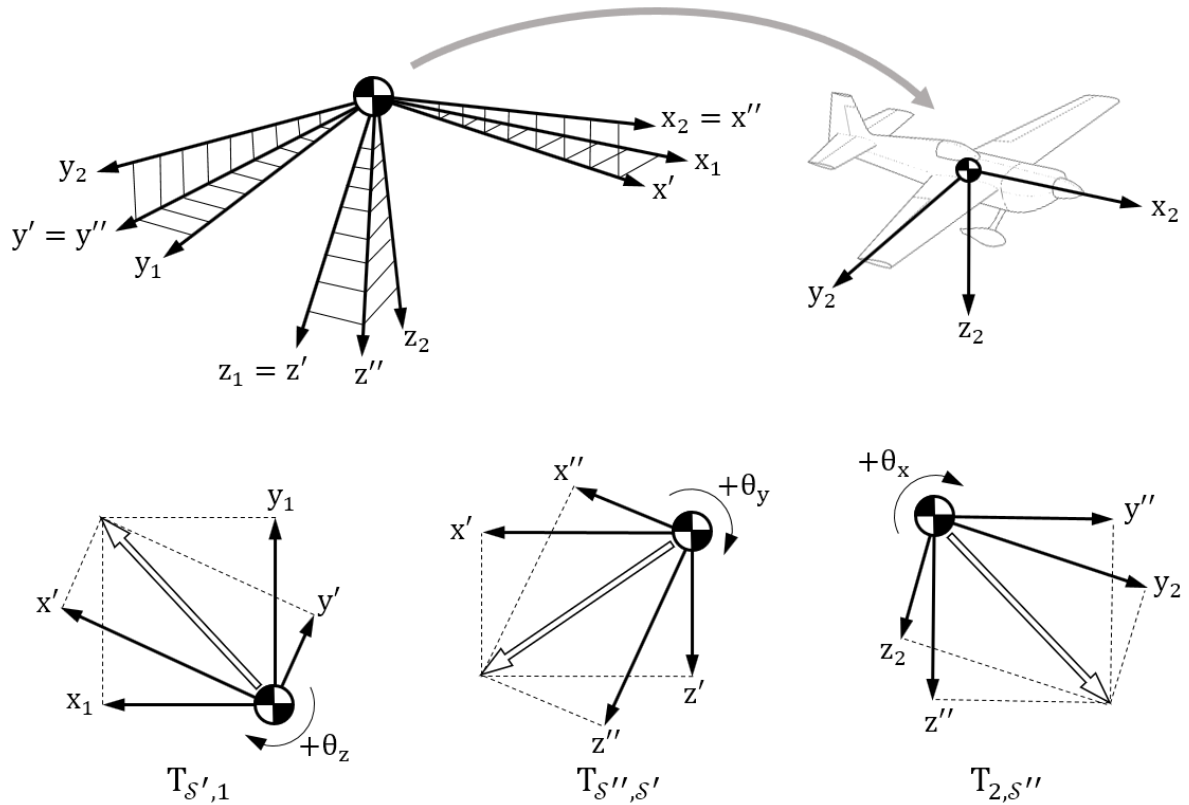


FIGURA 3.13 – Representação da sequência de rotações dos ângulos de Euler.

Assim:

$$\{\mathbf{u}\}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}_1. \quad (3.46)$$

Logo, a matriz de transformação $T_{2,1}$ parametrizada pelos ângulos de Euler resulta em:

$$\begin{aligned}
T_{2,1} &= T_{2,S''} T_{S'',S'} T_{S',1} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & \cos\theta_y \sin\theta_z & -\sin\theta_y \\ \begin{pmatrix} \sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z \\ -\cos\theta_x \sin\theta_z \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z \\ +\cos\theta_x \cos\theta_z \end{pmatrix} & \sin\theta_x \cos\theta_y \\ \begin{pmatrix} \cos\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z \\ +\sin\theta_x \sin\theta_z \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z \\ -\sin\theta_x \cos\theta_z \end{pmatrix} & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Geralmente, utilizam-se diferentes símbolos para descrever os ângulos de Euler associados a matrizes de transformação que relacionam diferentes sistemas de coordenadas (DURHAM, 2013). Estes símbolos estão resumidos na TABELA 3.1.

TABELA 3.1 – Resumo de símbolos utilizados para descrever os ângulos de Euler.

$T_{2,1}$	θ_x	θ_y	θ_z
$T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_H}$	ϕ	θ	ψ
$T_{\mathcal{S}_W, \mathcal{S}_H}$	μ	γ	χ
$T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_W}$	0	α	$-\beta$

O mínimo alcance dos ângulos de Euler para cobrir toda a extensão de rotações pode ser definido pelos intervalos $[-\pi, \pi)$, $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, 2\pi)$ para os ângulos θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente, podendo variar convenientemente para diferentes aplicações. No entanto, nota-se que este grupo não é topologicamente equivalente a $SO(3)$, pois existem certos casos nos quais uma única rotação possui um número infinito de soluções. Por exemplo, do ponto de vista dos eixos do corpo, para um ângulo de arfagem (θ) igual a $\pm \pi/2$, os eixos de rolamento e guinada ficam alinhados, logo, quando a aeronave aponta seu nariz para cima os ângulos ϕ e ψ são equivalentes, i.e., para $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\{\psi, \pi/2, \phi\} &\equiv \{\psi - \delta, \pi/2, \phi - \delta\} \\
\{\psi, -\pi/2, \phi\} &\equiv \{\psi - \delta, -\pi/2, \phi + \delta\}
\end{aligned} \quad (3.48)$$

Estas condições são singularidades matemáticas, denotadas por *gimbal lock*¹⁴. As limitações destes ângulos nos intervalos mostrados também acarretarão em outras dificuldades de representação da atitude durante a aplicação em problemas de planejamento de trajetória,

¹⁴ *Gimbal lock*: termo utilizado por analogia a um mecanismo utilizado em giroscópios para medir a orientação 3D. Este mecanismo sofre um travamento quando dois dos seus eixos se alinham, tornando a leitura do instrumento sem utilidade.

restringindo as soluções do problema. Este tópico será discutido em mais detalhe no Capítulo 4.

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na Seção 3.1.3.1 para obtenção das equações cinemáticas da matriz de rotação, obtém-se o conjunto de equações cinemáticas dos ângulos de Euler, dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta_x \tan\theta_y & \cos\theta_x \tan\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x \sec\theta_y & \cos\theta_x \sec\theta_y \end{bmatrix} \{\omega_2^1\}_2. \quad (3.49)$$

Conforme discutido, embora esta representação projete um mapa suave em $SO(3)$, a unicidade de representação pelos ângulos de Euler se rompe em alguns pontos onde a representação se torna degenerada, acarretando em uma singularidade cinemática. Em outras palavras, a função dos ângulos de Euler de $(S_1)^3$ para $SO(3)$ não é homeomorfa ao grupo de Lie (SINGER, 2004), como pode se observar também em sua dinâmica para $\theta_y = \pm 90^\circ$, onde os termos tangente (nas colunas dois e três da linha um) tendem ao infinito. Uma maneira possível para se contornar tais singularidades é utilizar diferentes sequências de ângulos de Euler durante a trajetória, as quais possuem suas singularidades localizadas em diferentes atitudes. Conforme se aproxima da singularidade relacionada a uma das formulações, pode-se alterar o modelo para uma segunda formulação, i.e., uma que use uma sequência diferente, a fim de evitar o *gimbal lock*. Apesar de se evitar a singularidade, esta proposta não se mostra eficiente do ponto de vista computacional na obtenção de trajetória ótimas quando comparada com outras formulações (SINGLA, MORTARIY e JUNKINSZ, 2004). Além disso, ela pode aumentar a complexidade do problema de planejamento de trajetória, como será mostrado no Capítulo 4.

3.1.3.3 Quatérnios Unitários (Parâmetros de Euler-Rodrigues)

Os quatérnios são um sistema numérico proposto por Hamilton em 1843 (ALTMANN, 1989). Assim como os números complexos eles são interpretados como uma extensão dos números reais. De fato, os quatérnios representam uma extensão dos próprios numéricos complexos, sendo definidos por sua equação fundamental de multiplicação:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k} = -1. \quad (3.50)$$

Este conjunto é utilizado em uma série de aplicações matemáticas, dentre as quais se incluem a modelagem de problemas de mecânica quântica e na representação da atitude de um sistema de coordenadas 3D. Os quatérnios utilizados para esta última tarefa são apenas um subgrupo deste conjunto, denotados por quatérnios unitários¹⁵ ou quatérnios rotacionais. Eles são geralmente definidos como:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (3.51)$$

e possuem norma unitária.

Os quatérnios unitários são uma forma de parametrização elegante da representação da atitude de um corpo rígido. Eles são elementos da esfera unitária tridimensional $\mathbb{S}^3$ (ou hiperesfera), definida como:

$$\mathbb{S}^3 \triangleq \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\mathbf{q}\| = 1 \}, \quad (3.52)$$

onde $\|\mathbf{q}\|$ denota a norma Euclidiana. Seus elementos obedecem às leis algébricas convencionais com exceção da multiplicação, a qual não é comutativa. Por exemplo, enquanto $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$. As diversas propriedades algébricas dos quatérnios estão apresentadas no Apêndice.

Alternativamente, interpreta-se $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ como vetores unitários, os quatérnios (3.51) podem ser tratados como $q_0 + \mathbf{q}_n^T$, onde q_0 é denominada componente escalar e $\mathbf{q}_n^T$ é a parte vetorial, cujas componentes q_1 , q_2 , q_3 estão ao longo de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente. Logo, é comum tratar os quatérnios em uma forma vetorial, composta pela componente escalar e pelas componentes vetoriais na forma:

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_n \end{Bmatrix}. \quad (3.53)$$

Quando representados nesta forma, a multiplicação de dois quatérnios $\{\mathbf{q}\}$ e $\{\mathbf{p}\}$ é definida por:

¹⁵ Para simplificação, o termo “quatérnios” será utilizado alternativamente ao longo do texto para se referir aos “quatérnios unitários”

$$\{\mathbf{q}\} \otimes \{\mathbf{p}\} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}_n^T \mathbf{p}_n \\ q_0 \mathbf{p}_n + p_0 \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

onde o operador $\otimes$ indica um produto de quatérnios e é utilizado aqui para distinguir dos produtos vetoriais e produtos escalares.

Uma maneira de entender como os quatérnios podem representar uma rotação 3D, é fazendo uma simples analogia com os números complexos. A multiplicação de um vetor bidimensional $\{\mathbf{v}\}_1$ por um número complexo de norma unitária e argumento θ representa a pura rotação deste vetor no plano por um ângulo θ . Assim, o vetor rotacionado $\{\mathbf{v}\}_2$ é dado por:

$$\{\mathbf{v}\}_2 = e^{\theta i} \{\mathbf{v}\}_1. \quad (3.55)$$

De forma análoga, os quatérnios podem ser utilizados para rotacionar um vetor no espaço Euclidiano tridimensional. Para compatibilidade de multiplicação entre um vetor $\{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^3$ e um quatérnio $\{\mathbf{q}\} \in \mathbb{R}^4$ o vetor Euclidiano pode ser tratado como um quatérnio cuja parte escalar é zero, também chamado de quatérnio puro (KUIPERS, 1999). Como resultado da rotação espera-se que: i) o quatérnio resultante tenha seu termo escalar zero; ii) que a transformação seja reversível por meio do inverso do quatérnio; e iii) e que a norma Euclidiana seja preservada.

Fazendo-se a transformação do tipo $\{\mathbf{u}\}_1 = \{\mathbf{q}\} \otimes \{\mathbf{u}\}_2$, o primeiro requisito para a rotação não é satisfeito. De acordo com Stevens, Lewis e Johnson (2016, p. 48), de fato, a transformação não ocorre através da multiplicação direta do quatérnio pelo vetor, mas pela operação:

$$\{\mathbf{u}\}_2 = \{\mathbf{q}\}^* \otimes \{\mathbf{u}\}_1 \otimes \{\mathbf{q}\}, \quad (3.56)$$

onde $\{\mathbf{q}\}^*$ indica o conjugado do quatérnio $\{\mathbf{q}\}$, e é definido como:

$$\{\mathbf{q}\}^* \triangleq q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}, \quad (3.57)$$

Teorema 3.5 (KUIPERS, 1999) *A operação $\{\mathbf{q}\}^* \otimes \{\mathbf{u}\}_1 \otimes \{\mathbf{q}\}$ representa uma transformação que não altera a norma Euclidiana ou a direção de $\{\mathbf{u}\}_1$, e resulta em um vetor transformado $\{\mathbf{u}\}_2$ cuja componente escalar também é zero.*

Prova Assumindo um dado quatérnio unitário $\{\mathbf{q}\}$, tem-se a transformação dada pela Eq.(3.56), que pode ser expandida para

$$\{\mathbf{u}\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (2\mathbf{q}_n(\mathbf{q}_n\{\mathbf{u}\}_1) + (q_0^2 - \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_n)\{\mathbf{u}\}_1 - 2q_0(\mathbf{q}_n \times \{\mathbf{u}\}_1)) \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

onde observa-se que a parte escalar do vetor transformado é zero. Para verificar a norma do vetor transformado tem-se:

$$\begin{aligned} \|\{\mathbf{u}\}_2\| &= \|\{\mathbf{q}\}^* \otimes \{\mathbf{u}\}_1 \otimes \{\mathbf{q}\}\| \\ &= \|\{\mathbf{q}\}^*\| \cdot \|\{\mathbf{u}\}_1\| \cdot \|\{\mathbf{q}\}\| \\ &= \|\{\mathbf{u}\}_1\|. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para verificar se a direção de $\{\mathbf{u}\}_1$ é inalterada, faz-se que $\{\mathbf{u}\}_1 = \{0 \ \lambda\mathbf{q}_n\}^T$, pois se $\{\mathbf{u}\}_1$ está na direção de $\mathbf{q}_n$ durante a transformação sua direção deve permanecer inalterada. Logo:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\}^* \otimes \{\mathbf{u}\}_1 \otimes \{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{q}\}^* \otimes \lambda\mathbf{q}_n \otimes \{\mathbf{q}\} \\ &= (2\mathbf{q}_n(\mathbf{q}_n \cdot \lambda\mathbf{q}_n) + (q_0^2 - \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_n)\lambda\mathbf{q}_n - 2q_0(\mathbf{q}_n \times \lambda\mathbf{q}_n)) \\ &= \lambda(q_0^2 + \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_n)\mathbf{q}_n \\ &= \lambda\mathbf{q}_n. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Assim, devido às características observadas, tal transformação remete a uma rotação. Para mais detalhes veja, e.g., Kuipers (1999). ■

Uma forma alternativa e conveniente de representação dos quatérnios unitários é a partir da seguinte relação:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \in \mathbb{R}, \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{q}_n = \{\mathbf{n}\} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.61b)$$

Nesta formulação seus elementos podem ser interpretados como uma única rotação de um ângulo η em torno de um dado eixo unitário $\{\mathbf{n}\} = \{n_x \ n_y \ n_z\}^T$ (STEVENS, LEWIS e JOHNSON, 2016, p. 49), também conhecido como eixo de Euler ou autovetor. A relação entre

esta forma e os parâmetros convencionais dos quatérnios pode ser observada calculando sua norma Euclidiana,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad (3.62)$$

onde $q_1 \equiv n_x \sin(\eta/2)$, $q_2 \equiv n_y \sin(\eta/2)$ e $q_3 \equiv n_z \sin(\eta/2)$. Uma vez que o eixo de Euler é um vetor unitário e, considerando a identidade trigonométrica $\cos^2(\eta/2) + \sin^2(\eta/2) = 1$, tem-se que:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (3.63)$$

Esta formulação é equivalente à representação de Euler-Rodrigues (DAI, 2015) (ZHU e ANGELES, 2015), o que justifica denotarmos os quatérnios unitários alternativamente por parâmetros de Euler-Rodrigues (veja e.g. (PHILLIPS, HAILEY e GEBERT, 2000)). Para uma demonstração mais detalhada desta relação veja, e.g., Durham (2013, p. 263) ou Kuipers (1999, p. 117). Através da Eq.(3.56), aplicando as multiplicações e rearranjando os termos, pode-se mostrar que a matriz de transformação $T_{2,1}$, ortogonal entre dois sistemas de coordenadas, quando representando o movimento por quatérnios unitários, é dada por (STEVENS, LEWIS e JOHNSON, 2016, p. 53):

$$T_{2,1} = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Para determinar as equações cinemáticas dos quatérnios, utiliza-se a Eq.(3.41), onde a matriz de transformação é aquela apresentada pela Eq.(3.64). Calcula-se então a derivada de cada elemento da matriz em relação ao tempo (DURHAM, 2013, p. 36). Rearranjando o conjunto de equações obtidas, tem-se que a cinemática rotacional é dada por:

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \frac{1}{2} \Omega_q \{\mathbf{q}\}, \quad (3.65)$$

onde

$$\Omega_q \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

3.1.3.4 Relação entre as diferentes representações

A interpretação física dos quatérnios ou das componentes dos elementos da matriz de cossenos diretores é menos intuitiva do que quando comparada aos ângulos de Euler. Por isso, é conveniente obter a relação entre as três formas de parametrização apresentadas de forma a permitir uma melhor interpretação do movimento do sistema de coordenadas junto à aeronave. De acordo com Durham (2013) e Pamadi (2004), estas relações podem ser obtidas comparando as matrizes de transformação de cada representação, dadas pelas Eqs.(3.28), (3.47) e (3.64). Desta maneira, tem-se que:

$$\theta_x = \tan^{-1} \left(\frac{t_{23}}{t_{33}} \right) = \tan^{-1} \left[\frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right], \quad -\pi \leq \theta_x < \pi \quad (3.67a)$$

$$\theta_y = -\sin^{-1}(t_{13}) = -\sin^{-1}(2q_1 q_3 - 2q_0 q_2), \quad -\pi/2 \leq \theta_y \leq \pi/2 \quad (3.67b)$$

$$\theta_z = \tan^{-1} \left(\frac{t_{12}}{t_{11}} \right) = \tan^{-1} \left[\frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right], \quad 0 \leq \theta_z \leq 2\pi. \quad (3.67c)$$

O mesmo procedimento pode ser feito caso se queira obter os valores dos quatérnios a partir dos ângulos de Euler. No entanto, em uma alternativa à comparação das matrizes de transformação, pode se utilizar as relações propostas por Junkins e Turner (1978), i.e.,

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \quad (3.68a)$$

$$q_1 = \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \quad (3.68b)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \quad (3.68c)$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \quad (3.68d)$$

Para obtenção dos parâmetros de Euler-Rodrigues a partir das matrizes de rotação, pode-se inicialmente obter os ângulos de Euler correspondentes pela Eq.(3.67) e, então, os quatérnios são calculados a partir da Eq.(3.68). Algumas maneiras alternativas são propostas por Markley (2008) e também por Bar-Itzhack (2000).

3.1.4 Equações Dinâmicas do Movimento da Aeronave

As equações obtidas nas Seções 3.1.2 e 3.1.3 podem ser combinadas para montar o conjunto completo de equações dinâmicas que descrevem o movimento da aeronave. A solução deste sistema de equações, também conhecidas como equações de movimento, mostra a evolução dos estados (posição, velocidade linear, velocidade angular e atitude) ao longo do tempo para uma dada entrada conhecida.

Algumas convenções serão adotadas quanto a representação das variáveis de movimento relativas às velocidades lineares, angulares e posição. As componentes de velocidade linear são frequentemente representadas nos sistemas do corpo ou do vento, cuja notação é definida pelos vetores

$$\{\mathbf{v}_{CG}\}_B = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \text{ e } \{\mathbf{v}_{CG}\}_W = \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.69)$$

respectivamente. De forma semelhante, para as velocidades angulares os vetores são definidos na forma¹⁶:

$$\{\boldsymbol{\omega}_B\}_B = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \text{ e } \{\boldsymbol{\omega}_W\}_W = \begin{Bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{Bmatrix}. \quad (3.70)$$

¹⁶ A notação sobrescrita foi omitida nas Eqs.(3.69) e (3.70) por simplificação, uma vez que estes vetores estão representados no sistema de coordenadas inerciais.

A FIGURA 3.14 apresenta as componentes de velocidade linear e angular da aeronave para os eixos do corpo.

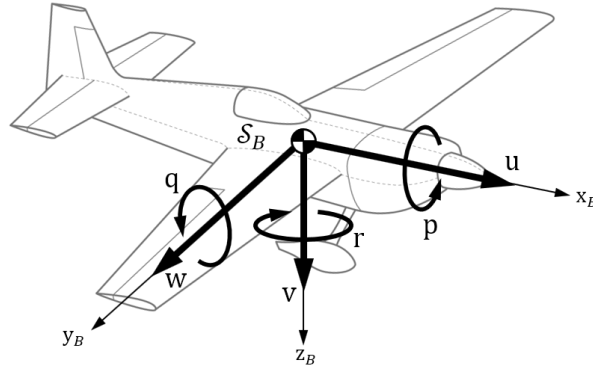


FIGURA 3.14 – Componentes de velocidades nos eixos do corpo.

Assim, a partir dos ângulos apresentados na TABELA 3.1 e dos conceitos de rotação entre eixos discutidos na Seção 3.1.1, pode-se relacionar os ângulos de ataque e derrapagem da aeronave com as velocidades lineares nos eixos do corpo na forma:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right) \quad \text{e} \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right). \quad (3.71)$$

3.1.4.1 Equações de Navegação

Para os movimentos abordados neste trabalho, onde as distâncias percorridas são pequenas quando comparadas ao raio da Terra, a posição da aeronave é relacionada a um sistema cartesiano. Como discutido na Seção 3.1.1, o sistema cartesiano adotado tem seu eixo x_T apontando para o Norte, o eixo y_T para Leste e o eixo z_T ortogonal a x_T e y_T apontado para o centro da Terra. Assim, a posição do centro de gravidade da aeronave é descrita pela localização da origem do sistema do corpo ou do vento em relação ao sistema da Terra, formando um conjunto de equações de navegação, a qual é dada por:

$$\{\mathbf{v}_{CG}^T\}_T = \left\{ \frac{d\mathbf{r}_{CG}^T}{dt} \right\}_T = \begin{Bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \end{Bmatrix}. \quad (3.72)$$

Logo, de acordo com as hipóteses adotadas na Seção 3.1.2 e com as discussões apresentadas na Seção 3.1.3 a respeito das transformações e coordenadas, as velocidades do CG

em relação à Terra podem ser relacionadas às velocidades nos eixos do corpo e do vento através das equações

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \end{pmatrix} = T_{\mathcal{S}_H, \mathcal{S}_B} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \end{pmatrix} = T_{\mathcal{S}_H, \mathcal{S}_W} \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

respectivamente. Ao longo deste trabalho, com o intuito de simplificar a notação, o subscrito T será omitido na Eq.(3.73) e será utilizada a velocidade $\dot{h}_T = -\dot{z}_T$ por permitir uma melhor intuição na interpretação das equações.

3.1.4.2 Forças e Momentos

As forças e momentos externos que agem sobre a aeronave resultando em acelerações lineares e angulares são compostas pelas contribuições do peso, da aerodinâmica e do sistema propulsivo. A força peso $\mathbf{F}_W$ é representada no sistema inercial da terra ou no sistema de horizonte local, apontando para o centro da Terra, ou seja, seu vetor possui componente nula em x_H e y_H , assim:

$$\{\mathbf{F}_W\}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Essa componente pode ser transformada para os eixos do corpo ou do vento utilizando uma das formulações apresentadas na Seção 3.1.3. Para representação por ângulos de Euler, o vetor transformado tem a forma

$$\{\mathbf{F}_W\}_B = \begin{pmatrix} -mg \sin\theta \\ mg \sin\phi \cos\theta \\ mg \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_W\}_W = \begin{pmatrix} -mg \sin\gamma \\ mg \sin\mu \cos\gamma \\ mg \cos\mu \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

para os eixos do corpo e vento, respectivamente. Quando se utiliza quatérnios tem-se:

$$\{\mathbf{F}_W\}_B = \begin{pmatrix} 2mg(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2mg(q_2q_3 + q_0q_1) \\ mg(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

para representação nos eixos do corpo. Para os eixos do vento segue a mesma lógica, no entanto costuma-se denotar os quatérnios utilizados por Quatérnios Aerodinâmicos, como mostrado por Fisch, Lenz e Holzapfel (2012). O mesmo raciocínio segue para a formulação utilizando a matriz de cossenos diretores, onde:

$$\{\mathbf{F}_W\}_B = \begin{Bmatrix} mg(t_{13}) \\ mg(t_{23}) \\ mg(t_{33}) \end{Bmatrix}. \quad (3.77)$$

As forças e momentos relativos aos efeitos propulsivos são representadas no sistema do corpo $\mathcal{S}_B$, uma vez que a relação entre a linha de tração e os eixos do corpo da aeronave apresentam uma relação fixa entre eles para a grande maioria das aeronaves, exceto para aquelas que possuem tração vetorada. O vetor relativo à força de tração do sistema propulsivo é escrito na forma:

$$\{\mathbf{F}_P\}_B = \begin{Bmatrix} T \cos \sigma_T \cos \kappa_T \\ T \cos \sigma_T \sin \kappa_T \\ -T \sin \sigma_T \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

onde T é a força de tração, σ_T é o ângulo entre o eixo x_B e a projeção da linha de tração no plano $x_B z_B$, sendo positivo quando a tração aponta para cima (geralmente este ângulo é negativo e o ângulo formado é denotado por *downthrust*); e κ_T é o ângulo formado entre a linha de tração e o plano de simetria (ou paralelo a este), sendo positivo quando aponta para a asa direita, também denotado por ângulo de *sidethrust*. Tais ângulos podem ser observados pela FIGURA 3.15.

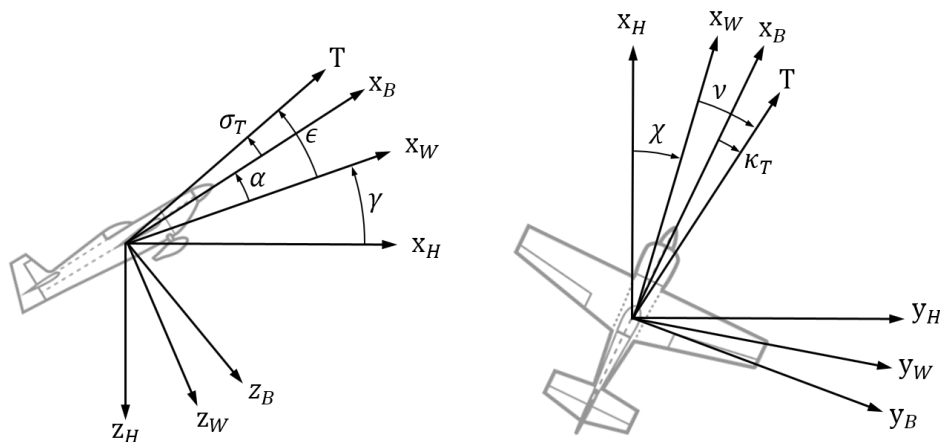


FIGURA 3.15 – Relações das forças propulsivas entre eixos do corpo e eixos do vento

Para boa parte das aeronaves o ângulo κ_T é zero, i.e., a linha de tração está sob o plano de simetria, onde,

$$\{\mathbf{F_P}\}_B = \begin{Bmatrix} T \cos \sigma_T \\ 0 \\ -T \sin \sigma_T \end{Bmatrix}. \quad (3.79)$$

Semelhantemente, caso se queira representar estas forças nos eixos do vento, tem-se:

$$\{\mathbf{F_P}\}_W = \begin{Bmatrix} T \cos \epsilon \cos \nu \\ T \cos \epsilon \sin \nu \\ -T \sin \epsilon \end{Bmatrix}. \quad (3.80)$$

onde ϵ é o ângulo entre o eixo x_W e a projeção da linha de tração no plano $x_W z_W$, sendo positivo quando a tração aponta para cima e ν é o ângulo formado entre a linha de tração e o plano $x_W z_W$, sendo positivo quando aponta para a asa direita, como pode se visualizar pela FIGURA 3.15.

Os momentos que surgem devido ao sistema propulsivo podem ser consequência tanto da presença de eixos rotativos no sistema, induzindo momentos giroscópicos, quanto da condição em que a tração líquida gerada pelo sistema não passe pelo centro de gravidade da aeronave, ou seja, tenha um braço diferente de zero. Este tipo de situações pode ocorrer durante os estudos de trajetórias em condição OEI¹⁷ para multi-motores. Os momentos gerados pelo sistema propulsivo são geralmente representados no sistema do corpo, expressos por:

$$\{\mathbf{M_P}\}_B = \begin{Bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{Bmatrix}. \quad (3.81)$$

O cálculo da força de tração irá depender do tipo de sistema propulsivo utilizado. De maneira geral, os parâmetros relativos à trajetória que terão maior influência sobre a tração do motor são: a velocidade de voo (ou número de Mach), a altitude, a temperatura e a posição da manete de controle dos motores δ_T .

É importante ter em mente que o comportamento dinâmico do motor está relacionado com estas variáveis. Porém, a taxa de variação da velocidade, altitude e temperatura para a maioria das trajetórias de aeronaves são relativamente pequenas em relação à escala temporal da dinâmica dos motores, possibilitando desprezar a dinâmica relativa a estas características durante a modelagem do problema. O mesmo não pode ser dito em relação à manete de potência, a qual, mesmo tendo sua posição alterada rapidamente pelo piloto, não irá acarretar

¹⁷ One engine innoperative

em uma mudança discreta na força de tração do motor. Por isso, para melhor representação do comportamento real do sistema propulsivo, é importante incluir um modelo dinâmico que possa relacionar a variação de δ_T com a força de tração T . Uma maneira comumente adotada para se fazer tal representação simplificada é assumir que a força de tração possa ser calculada por:

$$T = T_{max}(V_{\infty}, h, T_{OAT}) \delta_{T_e} , \quad (3.82)$$

onde T_{max} é a tração máxima do motor para uma determinada velocidade, altitude e temperatura externa (T_{OAT}) e δ_{T_e} é a posição efetiva da manete de tração, cujo intuito é incluir o efeito dinâmico no comportamento do motor, o qual pode ser aproximado por um sistema de primeira ordem na forma:

$$\dot{\delta}_{T_e} = \frac{1}{\tau_m} (\delta_T - \delta_{T_e}). \quad (3.83)$$

A constante de tempo τ_m deve ser ajustada para cada motor utilizado. A posição efetiva da manete deve ser limitada em $\delta_{T_e} \in [0,1]$ de forma que não sejam permitidos valores negativos para a tração e nem valores acima da tração máxima.

Em algumas situações é interessante que se possa avaliar a variação de massa da aeronave ao longo da trajetória. Como na maioria das aeronaves, tal característica está atrelada unicamente ao consumo de combustível, pode-se incluir um estado adicional cuja dinâmica é função da posição efetiva da manete de tração do sistema propulsivo, i.e.,

$$\dot{m} = f(\delta_{T_e}). \quad (3.84)$$

As forças e momentos aerodinâmicos presentes nas equações de movimento são termos que estão diretamente relacionados à interação do avião com a atmosfera. De forma geral, estas características irão variar devido ao ângulo de ataque α , ao ângulo de derrapagem β , à velocidade do escoamento livre V , às taxas de rotação da aeronave, às características da atmosfera local, que podem ser relacionadas com a altitude de voo h , e aos próprios comandos da aeronave. Esses parâmetros irão variar conforme a evolução da trajetória e, por consequência, irão influenciar no valor das propriedades aerodinâmicas durante a análise. As forças de sustentação, de arrasto, lateral e os momentos de rolamento, arfagem e guinada da aeronave são comumente calculados pelas equações

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S C_L , \quad (3.85a)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S C_D , \quad (3.85b)$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S C_Y , \quad (3.85c)$$

$$L_A = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S b C_{\ell} , \quad (3.85d)$$

$$M_A = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S \bar{c} C_m , \quad (3.85e)$$

$$N_A = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V^2 S b C_n , \quad (3.85f)$$

respectivamente, onde os coeficientes aerodinâmicos adimensionais relativos a cada força (C_L , C_D , C_Y) e momento (C_{ℓ} , C_m , C_n) são funções que têm como variáveis independentes a velocidade de voo V , o ângulo de ataque α , o ângulo de derrapagem β , a taxa de rolamento, de arfagem e de guinada, que são tipicamente adimensionalizadas na forma

$$\bar{p} = \frac{pb}{2V}, \quad \bar{q} = \frac{q\bar{c}}{2V} \quad \text{e} \quad \bar{r} = \frac{rb}{2V}, \quad (3.86)$$

respectivamente, e os controles de voo longitudinais η , laterais ξ e direcionais ζ . De maneira mais generalizada, estas últimas três variáveis podem se referir a qualquer tipo de mecanismo (ou conjunto de dispositivos) que atue diretamente na variação das forças e momentos em um dos eixos da aeronave, porém, tradicionalmente esses controles irão se referir ao profundor, aileron e leme, respectivamente. A deflexão do profundor é considerada positiva quando seu bordo de fuga aponta para baixo, a dos ailerons é positiva quando o aileron direito aponta para baixo e o esquerdo para cima e a deflexão do leme é positiva quando a superfície aponta seu bordo de fuga para a direita, conforme FIGURA 3.16.

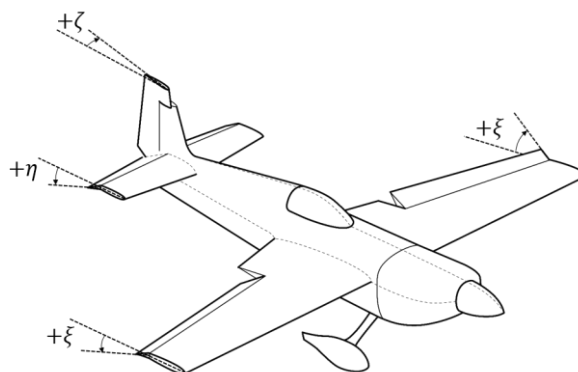


FIGURA 3.16 – Sentido positivo das deflexões dos comandos da aeronave.

As forças aerodinâmicas são comumente representadas sob o ponto de vista dos eixos do vento, sendo denotadas por forças de sustentação (L), arrasto (D) e lateral (C), para os eixos z_w , x_w e y_w , respectivamente, as quais tem sinal positivo no sentido oposto destes eixos. Estas forças muitas vezes são relacionadas com o sistema de forças no corpo por conveniências relacionadas à modelagem do problema, o que pode ser feito pelo uso da matriz de transformação. Logo,

$$\{\mathbf{F}_A\}_B = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_W} \begin{Bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{Bmatrix}, \quad (3.87)$$

onde X , Y e Z representam as forças nos eixos x_B , y_B e z_B , respectivamente. Geralmente as medições aerodinâmicas experimentais fazem uso de um sistema combinado, em que os dados de sustentação e arrasto são obtidos normalmente de acordo com os eixos do vento e a força lateral é medida nos eixos do corpo. Assim a relação destas forças entre o sistema combinado e o sistema do corpo é dada por

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sec \beta & -\cos \alpha \tan \beta & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha \sec \beta & -\sin \alpha \tan \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -D \\ Y \\ -L \end{Bmatrix}. \quad (3.88)$$

Os momentos resultantes das características aerodinâmicas da aeronave são geralmente representados nos eixos do corpo, pois neste sistema assume-se que as propriedades de inércia são constantes, conforme hipótese iii da Seção 3.1.2. Isto simplifica os cálculos das equações dinâmicas e por isso, é também bastante comum que nos ensaios em túnel de vento os momentos sejam medidos nestes eixos, os quais são definidos como:

$$\{\mathbf{M}_A\}_B = \begin{Bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{Bmatrix}. \quad (3.89)$$

3.1.4.3 Equações do Modelo Massa-Ponto

Para obtenção do modelo massa-ponto convencionalmente utilizado (ZHAO e SHANG, 2018) (KIM, PADILLA, *et al.*, 2020) (CARRETERO, NIETO e CORDÓN, 2013), analisa-se o movimento da aeronave sob o ponto de vista dos eixos do vento $\mathcal{S}_W$. As equações obtidas terão diferentes formas para cada tipo de técnica de parametrização da orientação dos eixos da

aeronave. Quando os ângulos de Euler são utilizados para representação da atitude do eixo fixo à aeronave em relação ao sistema inercial, as equações de movimento têm a forma:

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \chi, \quad (3.90a)$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \sin \chi, \quad (3.90b)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.90c)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [T \cos \epsilon \cos \nu - D - mg \sin \gamma], \quad (3.90d)$$

$$r_w = \frac{1}{mV} [T \cos \epsilon \sin \nu - C + mg \sin \mu \cos \gamma], \quad (3.90e)$$

$$q_w = \frac{1}{mV} [T \sin \epsilon + L - mg \cos \mu \cos \gamma], \quad (3.90f)$$

$$\dot{\chi} = \frac{1}{mV \cos \gamma} [T (\cos \epsilon \sin \nu \cos \mu + \sin \epsilon \sin \mu) + L \sin \mu - C \cos \mu], \quad (3.90g)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{mV} [T (\sin \epsilon \cos \mu - \cos \epsilon \sin \nu \sin \mu) + L \cos \mu + C \sin \mu - mg \cos \gamma] \quad (3.90h)$$

onde ϵ e ν são ângulos formados entre a linha de tração do sistema propulsivo e os eixos do vento, e estão diretamente relacionados aos ângulos de ataque e derrapagem da aeronave para sistemas propulsivos fixos em relação aos eixos do corpo. Deste sistema, as Eqs.(3.90a)-(3.90c) representam as equações de navegação, as Eqs. (3.90g)-(3.90h) são as equações cinemática dos ângulos de Euler; e as Eqs. (3.90d)-(3.90f) são obtidas da análise da variação da quantidade de movimento linear em um ponto, Eq.(3.15), ou seja,

$$\left\{ \frac{d\mathbf{v}}{dt_w} \right\}_w = \frac{1}{m} \{\mathbf{F}\}_w - \{\boldsymbol{\omega}_w\}_w \times \{\mathbf{v}\}_w, \quad (3.91)$$

onde $\{\mathbf{F}\}_w$ representa as forças externas relativas ao peso, à aerodinâmica e à propulsão nos eixos do vento.

O conjunto de equações (3.90) apresenta oito variáveis de estado $\{x, y, h, V, \chi, \gamma, r_w, q_w\}^T$, onde duas delas são determinadas algebricamente, e quatro variáveis de controle $\{\mu, \alpha, \beta, T\}^T$. As variáveis L , D e C são funções de V , h , α , e β , sendo que ϵ e ν estão diretamente relacionadas a α e β . Note que tanto este, quanto os demais modelos que serão apresentados neste trabalho, podem sofrer alterações conforme a escolha da maneira de

se considerar os efeitos propulsivos, tanto em termos da dinâmica da tração (3.83), quanto da variação de massa da aeronave em voo (3.84).

Este mesmo conjunto de equações pode ser reescrito para representação da atitude da aeronave em termos dos parâmetros de Euler-Rodrigues, i.e.,

$$\dot{x} = V (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) , \quad (3.92a)$$

$$\dot{y} = 2V(q_0q_3 + q_1q_2) , \quad (3.92b)$$

$$\dot{h} = 2V(q_0q_2 - q_1q_3) , \quad (3.92c)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [T \cos \epsilon \cos \nu - D - 2mg (q_1q_3 - q_0q_2)] , \quad (3.92d)$$

$$r_w = \frac{1}{mV} [T \cos \epsilon \sin \nu - C + 2mg (q_0q_1 + q_2q_3)] , \quad (3.92e)$$

$$q_w = \frac{1}{mV} [T \sin \epsilon + L - mg (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)] , \quad (3.92f)$$

$$\dot{q}_0 = -0,5(q_1p_w + q_2q_w + q_3r_w) , \quad (3.92g)$$

$$\dot{q}_1 = 0,5(q_0p_w + q_2r_w - q_3q_w) , \quad (3.92h)$$

$$\dot{q}_2 = 0,5(q_0q_w + q_3p_w - q_1r_w) , \quad (3.92i)$$

$$\dot{q}_3 = 0,5(q_0r_w + q_1q_w - q_2p_w) , \quad (3.92j)$$

onde as Eqs.(3.92a)-(3.92c) representam as equações de navegação, as Eqs.(3.92d)-(3.92f) são obtidas da análise da variação da quantidade de movimento linear em um ponto Eq.(3.15), e as Eqs.(3.92g)-(3.92j) representam as equações cinemáticas do quatérnios, os quais são responsáveis por relacionar a orientação dos eixos do vento com os eixos inerciais. Este sistema apresenta dez estados que são $\{x, y, h, V, q_0, q_1, q_2, q_3, r_w, q_w\}^T$ e quatro controles: $\{p_w, \alpha, \beta, T\}^T$. Além destas equações, a norma do quatérnio deve permanecer unitária (Eq.(3.52)) durante a solução deste sistema. Porém, como comentado anteriormente, tal relação está incluída implicitamente nas equações dinâmicas dos quatérnios.

Note que nesta formulação a taxa de rolamento p_w é uma variável de controle ao invés do ângulo de rolamento μ . Este controle pode ser compreendido de forma mais natural, uma vez que o piloto controla diretamente o rolamento da aeronave e não o ângulo de rolamento. Vale notar também, pelas equações da cinemática para os ângulos de Euler em relação aos eixos do vento, que uma taxa de variação nula do ângulo de rolamento não corresponde a uma taxa

de rolamento igual a zero. Tais considerações fazem com as variáveis de controle deste caso possam ser entendidas de forma mais intuitiva.

Semelhantemente, para a representação por matrizes de rotação, as equações de movimento da aeronave podem ser expressar por:

$$\dot{x} = V t_{11} , \quad (3.93a)$$

$$\dot{y} = V t_{12} , \quad (3.93b)$$

$$\dot{h} = -V t_{13} , \quad (3.93c)$$

$$\dot{V} = [T \cos \epsilon \cos \nu - D + mg t_{13}]/m , \quad (3.93d)$$

$$r_W = [T \cos \epsilon \sin \nu - C + mg t_{23}]/mV , \quad (3.93e)$$

$$q_W = [T \sin \epsilon + L - mg t_{33}]/mV , \quad (3.93f)$$

$$\dot{t}_{11} = t_{21}r_W - t_{31}q_W , \quad (3.93g)$$

$$\dot{t}_{21} = t_{31}p_W - t_{11}r_W , \quad (3.93h)$$

$$\dot{t}_{31} = t_{11}q_W - t_{21}p_W , \quad (3.93i)$$

$$\dot{t}_{12} = t_{22}r_W - t_{32}q_W , \quad (3.93j)$$

$$\dot{t}_{22} = t_{32}p_W - t_{12}r_W , \quad (3.93k)$$

$$\dot{t}_{32} = t_{12}q_W - t_{22}p_W , \quad (3.93l)$$

$$\dot{t}_{13} = t_{23}r_W - t_{33}q_W , \quad (3.93m)$$

$$\dot{t}_{23} = t_{33}p_W - t_{13}r_W , \quad (3.93n)$$

$$\dot{t}_{33} = t_{13}q_W - t_{23}p_W , \quad (3.93o)$$

onde as Eqs.(3.93a)-(3.93c) representam as equações de navegação, as Eqs.(3.93d)-(3.93f) são obtidas da análise da variação da quantidade de movimento linear em um ponto Eq.(3.15), e as Eqs.(3.93g)-(3.93o) representam as equações cinemáticas dos elementos da matriz de cossenos diretores. Estas equações de movimento apresentam treze variáveis de estado $\{x, y, h, V, t_{11}, t_{21}, t_{31}, t_{12}, t_{22}, t_{32}, t_{13}, t_{23}, t_{33}, r_W, q_W\}^T$ e quatro de controle $\{p_W, \alpha, \beta, T\}^T$. Junto disso,

a evolução da matriz de transformação deve ocorrer de tal forma que ela permaneça ortogonal e com determinante um ao longo de toda trajetória, conforme Eq.(3.27). Tais condições estão implícitas nas Eqs.(3.93g)-(3.93o).

É importante observar que nos modelos massa-ponto apresentados, as velocidades angulares ou são determinadas algebricamente através das demais variáveis de estado, ou são incluídas como variáveis de controle. Ou seja, neste tipo de formulação não leva em consideração a dinâmica rotacional da aeronave através da inclusão de equações diferenciais.

3.1.4.4 Equações do Modelo de Corpo Rígido

As equações do modelo de corpo rígido são compostas de quatro conjuntos que são: as equações de navegação Eq.(3.72), as equações da variação da quantidade movimento linear no corpo Eq.(3.15), as equações da variação da quantidade de movimento angular no corpo Eq.(3.23) e as equações cinemáticas da atitude, que irão variar dependendo do tipo de representação adotado. Ou seja, diferentemente do modelo massa-ponto, este equacionamento leva em consideração também a dinâmica rotacional do corpo.

As equações de alguns dos conjuntos que formam o modelo irão variar devido a escolha da técnica adotada para representação da atitude. O conjunto referente às equações de navegação, i.e., Eq. (3.72), apresenta diferentes expressões devido a escolha da forma de parametrização da matriz $T_{2,1}$. Para os ângulos de Euler a navegação é expressa por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \theta \cos \psi \\ V \cos \theta \sin \psi \\ V \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

para os quatérnios por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \\ 2V(q_0q_3 + q_1q_2) \\ 2V(q_0q_2 - q_1q_3) \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

e para a matriz de rotação por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V t_{11} \\ V t_{12} \\ -V t_{13} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

O mesmo ocorre para as equações cinemáticas da atitude, que têm as formas das Eq.(3.49), Eq.(3.65) e Eq.(3.43) para quando se utilizarem os ângulos de Euler, os quatérnios ou a matriz de cossenos diretores, respectivamente. Nestas equações, note que $\{\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3\}^T = \{p \ q \ r\}^T$ e para a dinâmica dos ângulos de Euler, tem-se $\{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T = \{\phi \ \theta \ \psi\}^T$, conforme TABELA 3.1.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, Eq.(3.15), a equação das forças nos eixos do corpo $\mathcal{S}_B$ tem a forma:

$$\left\{ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\}_B = \frac{1}{m} \{\mathbf{F}\}_B - \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times \{\mathbf{v}\}_B \quad (3.97)$$

onde $\{\mathbf{F}\}_B$ representa as forças externas relativas ao peso, à aerodinâmica e à propulsão nos eixos do corpo. Expandindo a Eq.(3.97), pode-se obter a taxa de variação das componentes de velocidade linear da aeronave, que resultam em:

$$\dot{u} = \frac{1}{m} (X + T \cos \sigma_T \cos \kappa_T) + rv - qw + \{T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_H} \{\mathbf{F}_W\}_H\}_x \quad (3.98a)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} (Y + T \cos \sigma_T \sin \kappa_T) + pw - ru + \{T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_H} \{\mathbf{F}_W\}_H\}_y \quad (3.98b)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m} (Z - T \sin \sigma_T) + qu - pv + \{T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_H} \{\mathbf{F}_W\}_H\}_z \quad (3.98c)$$

onde a representação $\{ \ }_i$ indica a componente na direção i do vetor resultante entre as chaves e $T_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}_H}$ é a matriz de transformação correspondente às diferentes formas de representação da atitude, que têm as formas das Eq.(3.47), Eq.(3.64) e Eq.(3.28) para quando se utilizarem os ângulos de Euler, os quatérnios ou a matriz de cossenos diretores, respectivamente.

Este equacionamento leva em consideração também a dinâmica rotacional do corpo. Assim, seguindo o mesmo raciocínio adotado na obtenção das Eqs.(3.98), as acelerações angulares nos eixos do corpo são dadas por:

$$\left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right\}_B = \mathbf{I}_B^{-1} [\{\mathbf{M}\}_B - \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B \times (\mathbf{I}_B \{\boldsymbol{\omega}_B\}_B)] \quad (3.99)$$

onde $\{\mathbf{M}\}_B$ se refere aos momentos em torno do CG tanto devido aos efeitos aerodinâmicos quanto propulsivos. Para uma aeronave simétrica (caso mais convencional), alguns termos do tensor de inércia são nulos, conforme, Eq.(3.25). A inversa da matriz resultante é dada por:

$$I_B^{-1} = \frac{1}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \begin{bmatrix} I_{zz} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2/I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{xx} \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Assim, substituindo na Eq.(3.99), tem-se na forma expandida:

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \frac{I_{zz}[L_A + L_T + I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr]}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ & + \frac{I_{xz}[N_A + N_T - I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq]}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \end{aligned} \quad (3.101a)$$

$$\dot{q} = \frac{[M_A + M_T - (I_{xx} - I_{zz})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)]}{I_{yy}} \quad (3.101b)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \frac{I_{xz}[L_A + L_T + I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr]}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ & + \frac{I_{xx}[N_A + N_T - I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq]}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \end{aligned} \quad (3.101c)$$

Os estados x, y, z, u, v, w, p, q e r são comuns ao modelo completo, independentemente da maneira em que a atitude é parametrizada, e o restante dos estados que irão compor o modelo são respectivos aos parâmetros da forma de representação da atitude. Assim, para parametrização por ângulos de Euler o modelo final contará com doze variáveis de estado $\{x, y, z, u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi\}^T$ e doze EDOs, para os parâmetros de Euler Rodrigues o modelo terá treze variáveis de estado $\{x, y, z, u, v, w, p, q, r, q_0, q_1, q_2, q_3\}^T$ e treze EDOs, já para a matriz de cossenos diretores ter-se-á dezoito estados $\{x, y, z, u, v, w, p, q, r, t_{11}, t_{21}, t_{31}, t_{12}, t_{22}, t_{32}, t_{13}, t_{23}, t_{33}\}^T$ e dezoito EDOs. Ou seja, conforme a escolha dos modelos para representação da atitude o número de equações diferenciais do sistema irá variar.

Conforme apresentado, as variáveis $X, Y, Z, L_A, M_A, N_A, L_T, M_T$ e N_T são funções de $V, h, \alpha, \beta, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \eta, \xi, \zeta$ e T . Os ângulos de ataque e derrapagem e a velocidade V são obtidos algebricamente a partir de u, v e w , além disso h é uma variável de estado. As variáveis de controle do sistema são $\{\eta, \xi, \zeta, T\}^T$.

Note que, tanto para este modelo quanto para o de massa-ponto, pode-se incluir estados e equações dinâmicas adicionais para uma representação alternativa do comportamento do

sistema propulsivo, como mostrado na Seção 3.1.4.2. É importante observar também que nos modelos onde se utiliza quatérnios ou as matrizes de rotação, tais formas de representação foram utilizadas apenas na parametrização da atitude do sistema de coordenadas fixo à aeronave em relação ao sistema inercial. Já na transformação das forças aerodinâmicas e propulsivas, por conveniência, fez-se uso dos ângulos de Euler, uma vez que os ângulos relacionados a estas rotações são de pequena magnitude para o contexto analisado, i.e., para aeronaves de asa fixa.

3.1.4.5 Proposta de modificação na formulação de modelos para representação da atitude

Os modelos apresentados nas Seções 3.1.4.3 e 3.1.4.4 de menor e maior fidelidade, respectivamente, em combinação com as diferentes técnicas de representação da atitude, permitem seis formulações distintas. De fato, existem diferentes maneiras de se modelar as equações de movimento da aeronave e tal tópico ainda é estudado por pesquisadores a fim de se obter formulações com características adequadas para diferentes aplicações. Por exemplo, Durham (2013), apresenta um conjunto de equações de movimento que misturam referenciais nos eixos do vento e do corpo e incluem a dinâmica do ângulo de ataque e derrapagem em sua formulação. Fisch (2010) apresenta diferentes formas de modelagem das equações de voo, desde casos mais simples que utilizam linearização das equações com possibilidade de solução por funções de transferência, até modelos mais completos como os que estão apresentados neste trabalho. Morales, Silvestre e Neto (2018) propõem um modelo que, assim como o massa-ponto, não contém uma dinâmica rotacional, mas que trabalha a cinemática da rotação da aeronave de uma forma independente. Imado, Heike e Kinoshita (2011) sugere um novo modelo massa-ponto através do qual pode-se considerar efeitos de ventos atmosféricos com precisão e que apresenta respostas com boa similaridade em relação ao modelo de corpo rígido.

De forma geral, os trabalhos desta natureza buscam desenvolver técnicas para um tratamento alternativo do modelo massa-ponto de tal forma que seu comportamento se aproxime ao do modelo de corpo rígido, mas utilizando um menor número de variáveis e equações diferenciais.

Neste estudo, notou-se que outro fator importante a ser avaliado durante a modelagem do movimento da aeronave é o fato de que cada uma das representações da atitude apresenta características particulares em suas equações cinemáticas, relevantes durante o processo de integração que é utilizado na solução numérica do problema de planejamento de trajetória. Encontra-se na bibliografia atual pesquisas que ressaltam as qualidades relacionadas aos quatérnios sob este aspecto em específico (PHILLIPS, HAILEY e GEBERT, 2000)

(PHILLIPS, HAILEY e GEBERT, 2012). Uma das qualidades já comentadas é o fato desta ser uma representação livre de singularidades. A FIGURA 3.17 apresenta uma simulação feita por Erhard, Horn e Diehl (2016) mostrando a evolução dos quatérnios e dos ângulos de Euler para uma taxa rotacional constante de um sistema de coordenadas. Nota-se que os ângulos de Euler apresentam um desvio expressivo da solução quando próximos da condição de singularidade.

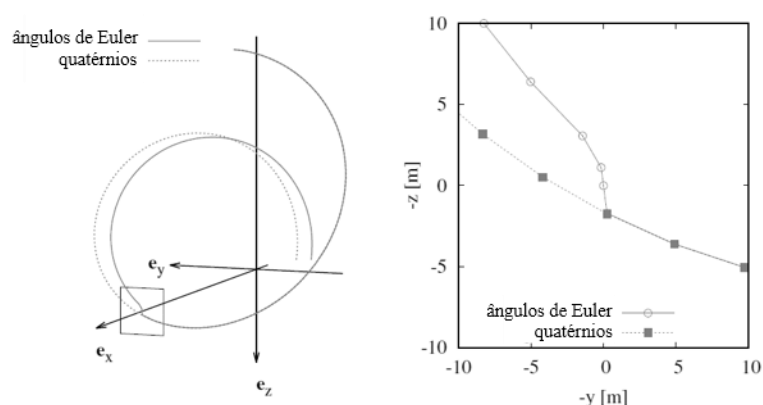


FIGURA 3.17 – Comparação de simulações da rotação de um corpo utilizando os ângulos de Euler e os quatérnios. Adaptado de Erhard, Horn e Diehl (2016).

Além disso, a dinâmica dos parâmetros de Euler-Rodrigues e da matriz de cossenos diretores apresenta apenas equações com relações lineares, enquanto que a dos ângulos de Euler possui funções trigonométricas. Estas não linearidades presentes na formulação fazem com que o custo computacional de integração numérica desta formulação seja maior do que a dos quatérnios. Phillips, Hailey e Gebert (2000) mostram que avaliar as equações cinemáticas dos quatérnios leva cerca de 11 vezes menos tempo do que quando comparado aos ângulos de Euler. Conforme um estudo feito por Stuelpnagel (1964), esse padrão permanece para qualquer tipo de parametrização que utilize três parâmetros. Prova-se que qualquer forma de representação de $SO(3)$ utilizando apenas três parâmetros de rotação sempre levará a uma relação cinemática da atitude com não linearidades, como no caso dos ângulos de Euler. Os quatérnios unitários também apresentam maior eficiência computacional quando comparados com a representação por matriz de cossenos diretores, pois a integração numérica dos nove termos da matriz de rotação consome um maior tempo de cálculo do que quando comparado com os quatro termos dos quatérnios. No entanto, diferentemente dos ângulos de Euler, ambas estas representações contêm restrições algébricas relacionadas às suas respectivas variedades compactas que devem ser levadas em consideração durante a montagem do modelo de simulação.

Sendo assim, neste trabalho propõem-se maneiras diferentes de formulação das transformações pelos quatérnios ou pelas matrizes de rotação, garantindo que tais

representações estejam dentro de suas respectivas restrições de uma forma natural na solução numérica do problema de planejamento de trajetória.

Quando a matriz de rotação ou os quatérnios unitários são utilizados para representar o sistema de atitude do modelo, deve-se ter cuidados adicionais, uma vez que suas estruturas são variedades compactas, conforme mostrado pela Eq.(3.27) e Eq.(3.52). Em outras palavras a matriz de rotação deve ser ortogonal e dextrogira ao longo de toda trajetória, enquanto que os quatérnios devem ter norma unitária de forma a permanecer em suas respectivas variedades. Tais restrições algébricas são denotadas também por “invariantes” (i.e., leis de conservação) (REGO, SCOTT, *et al.*, 2021) (HIRSCH, PUGH e SHUB, 1977).

A inclusão de tais restrições é um desafio na solução da dinâmica rotacional em problemas de simulação onde integradores numéricos Runge-Kutta padrão são utilizados para a solução das equações diferenciais ordinárias, uma vez que estas restrições estão implícitas nas equações diferenciais de seus respectivos modelos. Assim, durante o processo de integração, elas podem perder suas propriedades de grupo. Veja, por exemplo, para o caso dos quatérnios unitários, onde:

$$\{\mathbf{q}\}^T \{\mathbf{q}\} = 1. \quad (3.102)$$

Derivando a Eq.(3.102), tem-se:

$$\begin{aligned} 2q_0\dot{q}_0 + 2q_1\dot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_2 + 2q_3\dot{q}_3 &= 0 \\ 2\{\mathbf{q}\}^T \{\dot{\mathbf{q}}\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Para efeito de análise, supõe-se que a matriz Ω_q da dinâmica dos quatérnios, Eq.(3.65), seja constante. Assim, pela equação cinemática dos quatérnios, tem-se a forma:

$$2\{\mathbf{q}\}^T \{\dot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{q}\}^T \Omega_q \{\mathbf{q}\} = 0. \quad (3.104)$$

Isto pode ser afirmado a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.6 *Seja A uma matriz antissimétrica, i.e., seus elementos satisfazem $a_{ij} = -a_{ji}$, logo $\{\mathbf{x}\}^T A \{\mathbf{x}\} = 0$.*

Prova Assuma que

$$\alpha = \{\mathbf{x}\}^T A \{\mathbf{x}\}, \quad (3.105)$$

ou ainda,

$$\alpha^T = \{\mathbf{x}\}^T A^T \{\mathbf{x}\}. \quad (3.106)$$

Uma vez que A é assimétrica, $A^T = -A$. Então:

$$\alpha^T = -\{\mathbf{x}\}^T A \{\mathbf{x}\}. \quad (3.107)$$

Logo:

$$\alpha^T = \alpha \rightarrow \alpha = -\alpha = 0 \quad \blacksquare \quad (3.108)$$

Portanto, note que para as equações cinemáticas dos quatérnios não há a imposição de que a norma de seus parâmetros seja unitária, pois, pelas relações mostradas, o valor 1 da Eq.(3.102) poderia ser substituído por qualquer outra constante real.

Outra consideração importante é o fato desta forma de representação não apresentar um comportamento de estabilidade assintótico, o que pode se observar fazendo-se uma análise de estabilidade deste sistema. Assuma a seguinte função de Lyapunov para os quatérnios:

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \{\mathbf{q}\}^T \{\mathbf{q}\}. \quad (3.109)$$

Calculando-se a derivada desta função, tem-se:

$$\dot{V}(\mathbf{q}) = \{\mathbf{q}\}^T \{\dot{\mathbf{q}}\}. \quad (3.110)$$

Logo, a função $V(\mathbf{q})$ é definida positiva e a função $\dot{V}(\mathbf{q})$ é semi-definida negativa. Para avaliar a estabilidade deste sistema tem-se o Teorema de Estabilidade de Lyapunov (SASTRY, 1999).

Teorema 3.7 *Se existe em alguma vizinhança Ω em torno da origem de uma função $V(x)$ definida positiva tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo x , então a origem é um ponto de equilíbrio estável.*

Teorema 3.8 *Se a origem satisfaz o Teorema 3.7 e, além disso, $\dot{V}(x)$ é definida negativa, então a estabilidade é assintótica.*

Uma vez considerada que a matriz Ω_q é constante e diferente de zero para uma situação geral, o sistema de equações dinâmicas dos quatérnios é autônomo. Então, de acordo com

Lyapunov, as equações cinemáticas dos quatérnios é apenas estável, mas não assintoticamente estável. Observe que o problema de estabilidade irá se acentuar quando o sistema for não-autônomo, i.e., quando a matriz Ω_q não for constante. Ou seja, após uma perturbação, os quatérnios não apresentam uma tendência natural a retornarem à norma unitária.

Observa-se também que numericamente tais equações podem apresentar um comportamento instável. Assuma, por exemplo, uma integração numérica das equações dinâmicas pelo método de Euler onde o valor dos parâmetros no instante $i + 1$ podem ser obtidos pela aproximação:

$$\{\mathbf{q}\}_{i+1} = \{\mathbf{q}\}_i - \frac{1}{2}\Omega_q\{\mathbf{q}\}_i\alpha \quad (3.111)$$

onde α é o passo de integração do método. Calculando a norma para ambos lados da equação, tem-se:

$$(\{\mathbf{q}\}_{i+1})^T(\{\mathbf{q}\}_{i+1}) = (\{\mathbf{q}\}_i)^T(\{\mathbf{q}\}_i) - (\{\mathbf{q}\}_i)^T\Omega_q(\{\mathbf{q}\}_i)\alpha + (\{\mathbf{q}\}_i)^T\Omega_q^T\Omega_q(\{\mathbf{q}\}_i) \quad (3.112)$$

Observando a parte direita da equação, o primeiro termo é igual a 1, o segundo termo é zero (de forma semelhante ao que foi mostrado pela Eq.(3.104)) e o terceiro termo é maior que zero, ou seja $(\Omega_q(\{\mathbf{q}\}_i))^T(\Omega_q(\{\mathbf{q}\}_i)) > 0$, uma vez que de modo geral Ω_q é diferente de zero. Logo, ao longo do processo de integração mostrado, a norma do quatérnio irá aumentar, pois $(\{\mathbf{q}\}_{i+1})^T(\{\mathbf{q}\}_{i+1}) > 1$.

Ou seja, os quatérnios podem sofrer desvios de sua variedade quando seu valor inicial for diferente de 1, conforme a simples análise de estabilidade mostrada, ou mesmo devido ao próprio processo de integração numérica.

Apesar das questões apresentadas em relação aos parâmetros de Euler-Rodrigues, discussões de mesma natureza podem ser observadas também para as matrizes de rotação (veja e.g. Pamadi (2004)), onde verificam-se complicações na imposição de que estas formas de parametrização estejam dentro de suas restrições durante os processos de integração, o que caracterizam dificuldades adicionais para trabalhar com estas técnicas na solução numérica de problemas de otimização de trajetória.

Para garantir tais quesitos, geralmente as condições iniciais para a matriz de rotação ou para os parâmetros de Euler-Rodrigues são dadas de tal forma que eles estejam inseridos em suas respectivas variedades. Em seguida, métodos de estabilização numérica são aplicados para minimizar os erros de integração numérica, consequentemente, atenuando os desvios das

restrições características. Uma das técnicas de estabilização mais populares é conhecida como método de Baumgarte (BAUMGARTE, 1972), a qual consiste em modificar as equações da dinâmica da atitude utilizando termos artificiais que garantam o amortecimento adequado dos erros de arredondamento numérico. A aplicação deste método, nas equações da cinemática da matriz de cossenos diretores ou dos quatérnios unitários, resulta, respectivamente em (ALLERTON, 2009) (PAMADI, 2004):

$$\dot{R} = -\Omega R + \lambda_R (I_3 - R^T R) R, \quad (3.113)$$

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \frac{1}{2} \Omega_q \{\mathbf{q}\} + \lambda_q (1 - \|\{\mathbf{q}\}\|^2) \{\mathbf{q}\}, \quad (3.114)$$

onde os coeficientes λ_R e λ_q devem ser calibrados empiricamente para garantir a estabilidade das equações diferenciais durante o processo de integração. As equações do modelo de Baumgarte (1972) para os quatérnios, por exemplo, são obtidas a partir do fato de que

$$\frac{d}{dt} \|\{\mathbf{q}\}\| = 0 \quad (3.115)$$

ao longo de toda trajetória. Uma visão similar pode ser feita também para a matriz de rotação, cujo resultado está apresentado pela Eq.(3.113). Em problemas de planejamento de trajetória, tais como aqueles baseados nos métodos de elementos finitos (Seção 5), é comum a utilização deste tipo de técnica, como mostrado em Erhard, Horn e Diehl (2016) e Gros, Zanon, *et al.* (2012). No entanto, quando este método não é propriamente calibrado, é possível que a representação da atitude desvie de sua variedade produzindo representações degeneradas. Se uma matriz de rotação não for ortogonal ou um quatérnio não for unitário, eles não irão apenas rotacionar, mas vão também alterar a magnitude dos vetores sobre onde estão agindo. Quando integrado sobre toda trajetória, isto pode efetivamente produzir uma solução aparentemente melhor, com menor custo, mas que é efetivamente inviável e, conseqüentemente, sem significado.

Uma forma natural de satisfazer tais restrições algébricas é representando a dinâmica do sistema como um conjunto de equações diferenciais e algébricas (EDAs). As restrições dinâmicas então podem ser transcritas para um problema de programação não-linear utilizando técnicas de solução de EDAs, ou as EDAs podem ser convertidas para uma forma semi-explicita (BETTS, 2010, p. 101) das Eqs.(2.6) e (2.7), onde parte das equações serão vínculos dinâmicos

diferenciais outra parte vínculos dinâmicos algébricos. Neste trabalho escolheu-se a última opção devido a sua simplicidade e facilidade de integração através do método de elementos finitos, mostrado no Capítulo 5, para solução de problemas de controle ótimo, mas é sugerido que bibliografias específicas, como Biegler, Campbell e Mehrmann (2012), sejam consultadas para apresentação de esquemas de solução alternativos e discussões mais aprofundadas do tema. Deve-se notar também que as restrições algébricas ligadas a cada uma destas representações não podem ser simplesmente incluídas na formulação EDO, uma vez que elas são redundantes com a sua dinâmica, o que geraria problemas de otimização com a matriz Jacobiana das restrições com posto incompleto.

Quando as Eqs.(2.6) e (2.7) representam uma EDE semi-implícita, os estados $\{\mathbf{x}\}$ do sistema e o controle $\{\mathbf{u}\}$ contém tanto os estados algébricos quanto as entradas exógenas. Para mudar as equações cinemáticas dos quatérnios para esta forma propõe-se uma forma de representação, na qual quatro novos estados algébricos são adicionados ao sistema: q_{0d} , q_{1d} , q_{2d} e q_{3d} . Estes estados são utilizados para converter o sistema de EDA completamente implícito para uma forma semi-implícita:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{0d} \\ q_{1d} \\ q_{2d} \\ q_{3d} \end{Bmatrix}. \quad (3.116)$$

As restrições de trajetória são compostas pela normalização do quatérnio, i.e., pelo invariante, reescrita aqui para entendimento,

$$\|\{\mathbf{q}\}\| - 1 = 0, \quad (3.117)$$

e suas restrições dinâmicas, Eq.(3.65), que podem ser reescritas na forma:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.118)$$

Note que a primeira linha de Eq.(3.118) deve ser retirada uma vez que ela corresponde à equação de normalização dos quatérnios, Eq.(3.102) e, portanto, seria redundante com a Eq.(3.117). Logo, rearranjando as equações restantes, baseadas na Eq.(3.116), tem-se:

$$\omega_1 - 2(-q_1 q_{0d} + q_0 q_{1d} + q_3 q_{2d} - q_2 q_{3d}) = 0, \quad (3.119a)$$

$$\omega_2 - 2(-q_2 q_{0d} - q_3 q_{1d} + q_0 q_{2d} + q_1 q_{3d}) = 0, \quad (3.119b)$$

$$\omega_3 - 2(-q_3 q_{0d} + q_2 q_{1d} - q_1 q_{2d} + q_0 q_{3d}) = 0. \quad (3.119c)$$

Assim, neste caso, o vetor de entrada do problema é descrito como $\{\mathbf{u}\} = [\dots q_{0d} q_{1d} q_{2d} q_{3d}]^T$, e os estados da Eq.(3.116) substituem as equações diferenciais correspondentes à cinemática dos quatérnios no modelo EDO.

Propõe-se também um tratamento similar para a representação por cossenos diretores, onde a ortogonalidade da matriz de transformação é garantida por um grupo de seis restrições algébricas, conforme requerido pela Eq.(3.27), e outras três restrições relacionadas à rotação do eixo para substituição da dinâmica, Eq.(3.43). Logo, adicionam-se nove novos estados algébricos: t_{11d} , t_{21d} , t_{31d} , t_{12d} , t_{22d} , t_{32d} , t_{13d} , t_{23d} e t_{33d} ; convertendo o problema em uma forma semi-explicita. Ou seja:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d, \quad (3.120)$$

sujeito a

$$t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 = 1, \quad (3.121a)$$

$$t_{21}^2 + t_{22}^2 + t_{23}^2 = 1, \quad (3.121b)$$

$$t_{31}^2 + t_{32}^2 + t_{33}^2 = 1, \quad (3.121c)$$

$$t_{12} t_{21} + t_{12} t_{22} + t_{13} t_{23} = 0, \quad (3.121d)$$

$$t_{11} t_{31} + t_{12} t_{32} + t_{13} t_{33} = 0, \quad (3.121e)$$

$$t_{21} t_{31} + t_{22} t_{32} + t_{23} t_{33} = 0, \quad (3.121f)$$

$$\omega_1 + (t_{31d} t_{21} + t_{32d} t_{22} + t_{33d} t_{23}) = 0, \quad (3.121g)$$

$$\omega_2 + (t_{11d} t_{31} + t_{12d} t_{32} + t_{13d} t_{33}) = 0, \quad (3.121h)$$

$$\omega_3 + (t_{21d} t_{11} + t_{22d} t_{12} + t_{23d} t_{13}) = 0. \quad (3.121i)$$

Note que as Eqs.(3.121a)-(3.121f) correspondem às condições de ortogonalização da matriz, i.e., os invariantes da matriz de rotação, e as Eqs.(3.121g)-(3.121i) são referentes à substituição nas equações dinâmicas Eq.(3.43). Uma condição adicional é colocada pra garantir que a matriz de rotação seja dextrogira em todo domínio. Isto é incluído através da seguinte restrição de trajetória:

$$(\{\mathbf{t}_1\} \times \{\mathbf{t}_2\}) \cdot \{\mathbf{t}_3\} > 0. \quad (3.122)$$

Ela ficará inativa ao longo da trajetória, pois é usada apenas para evitar elementos inadequados, uma vez que esta matriz de rotação é própria. Um mesmo raciocínio é seguido aqui, onde são adicionadas nove novas variáveis ao vetor de entrada do problema e as equações cinemáticas dos elementos da matriz de rotação são substituídas por aquelas representadas na Eq.(3.120). Estas formulações EDA apresentadas garantem que a representação da atitude permaneça em suas variedades ao longo de todo intervalo de tempo analisado. Elas se contrastam com as formulações EDO, que garantem isso diretamente em apenas um ponto no tempo (normalmente no início ou no final), e indiretamente através do campo vetorial nos pontos restantes. Além disso, embora o número de variáveis de decisão do problema aumente, o acoplamento entre as variáveis é reduzido, tornando o sistema linear subjacente mais fácil de ser resolvido. Isto pode melhorar o condicionamento do problema de otimização em algumas situações. Conforme mostrado nos experimentos computacionais apresentados na Seção 6.2, a melhoria dependerá também das demais equações dinâmicas do modelo, bem como do funcional de mérito adotado.

3.2 Restrições de Trajetória

Na formulação do problema de otimização de trajetória de aeronaves, as restrições de trajetória $\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \mathbf{p}] \leq \mathbf{0}$, podem ser utilizadas de uma forma direta para limitar os estados e controles do problema, ou através de relações algébricas.

Para os modelos apresentados na Seção 3.1, pode-se utilizar destes artifícios para restringir as posições espaciais onde a aeronave pode operar, através de imposição de limites superiores e inferiores em x , y e h . A limitação das demais variáveis está relacionada ao modelo utilizado. Por exemplo, enquanto no modelo massa-ponto os valores máximos e mínimos da velocidade da aeronave V podem ser incluídos diretamente no problema, no modelo de corpo rígido apresentado esta limitação deve ser incluída através de uma relação algébrica relacionada

à norma do vetor $\{u \ v \ w\}^T$. O mesmo vale para o caso das limitações de certas variáveis como o ângulo de ataque α e de derrapagem β , as quais são tidas como variáveis de controle no modelo massa-ponto, mas que no modelo de corpo rígido apresentado são funções de u , v e w , Eq.(3.71).

As restrições de trajetória também podem ser utilizadas para limitar outras características que sejam relevantes como, por exemplo, as acelerações máximas da aeronave, as quais geralmente estão limitadas a certos envelopes de voo, devido às capacidades estruturais limites da aeronave. Este tipo de abordagem é utilizada nos casos avaliados na Seção 6.3.

3.3 Índice de Desempenho

Como discutido anteriormente, o problema de otimização de trajetória consiste em obter o histórico das variáveis de controle $\mathbf{u}^*(t)$ (Eq.(2.12)), que farão com que a aeronave execute uma trajetória $\mathbf{x}^*(t)$ que minimize um determinado índice de desempenho J (Eq.(2.5)). A escolha deste índice, ou função de mérito, tem forte relação com o que se denota por trajetória ótima e, portanto, com a motivação inicial na formulação do problema. Pode-se citar alguns tipos de funções de mérito geralmente aplicadas aos problemas de otimização de trajetórias de aeronaves:

- **Problemas de tempo mínimo**

São utilizadas quando se deseja obter a trajetória que uma aeronave deve executar, para uma dada condição inicial e final, no menor tempo possível, como feito no exemplo apresentado na Seção 6.3. Neste caso o índice de desempenho, se simplifica a

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0. \quad (3.123)$$

- **Problemas de controle de mínimo esforço**

O termo “controle de mínimo esforço” está intrinsicamente relacionado ao tipo de aplicação em que se está estudando. Portanto, a função de mérito ligada a este tipo de problema pode assumir diferentes formas. Por exemplo, considere que uma aeronave deva executar uma trajetória minimizando o gasto de combustível, e que a taxa de consumo deste combustível seja diretamente proporcional à tração gerada pelo motor ou à posição da manete de tração. Neste caso, o índice de desempenho

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\| dt, \quad (3.124)$$

pode ser utilizado na solução deste problema. Uma dificuldade em se utilizar este índice está ligada à quina presente em $\mathbf{u}(t) \rightarrow 0$, o que afeta nos métodos baseados em gradiente utilizados na solução do problema de programação matemática. Uma forma alternativa bastante comum para evitar tais dificuldades é utilizando a função de mérito na forma

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt, \quad (3.125)$$

ou ainda

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{u}(t) dt, \quad (3.126)$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz definida positiva, cujos elementos representam os pesos relativos à importância dos diferentes componentes do controle na minimização do índice. Este índice de desempenho é geralmente denotado por “controle de mínima energia”, pois em problemas relacionados à sistemas elétricos, a variável de controle $\mathbf{u}(t)$ costuma se referir à tensão elétrica da fonte, e a minimização da dissipação de energia pelo circuito é diretamente proporcional ao quadrado da tensão. Tal terminologia continua sendo aplicada (BETTS, 2010, p. 306), mesmo não estando dentro do contexto de sistemas elétricos, mas é importante ressaltar que o que se está minimizando nestes casos não é necessariamente a energia em si. Tal função de mérito é utilizada na solução do problema apresentado na Seção 6.2.2.

▪ Problemas de rastreamento

Os problemas de rastreamento são aqueles em que se deseja que a aeronave realize uma trajetória mantendo seus estados, i.e., velocidade, atitude, posição espacial, o mais próximo possível de uma determinada referência $\mathbf{r}(t)$. O índice de desempenho utilizado para representar tal problema é escrito como:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|^2 dt, \quad (3.127)$$

ou, de forma mais específica,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{R} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] dt, \quad (3.128)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma matriz semi-definida positiva, cujos elementos representam os pesos relativos a quais estados devem ser prioritariamente rastreados e a quais pode haver um maior distanciamento. Este funcional foi utilizado no trabalho realizado por Oliveira, Pinto e Lima (2004), onde se buscou obter o movimento de profundor necessário para executar um looping exatamente circular com uma aeronave acrobática.

Apesar das funções de mérito terem sido apresentadas separadamente, em alguns problemas pode haver a necessidade da combinação de suas diferentes formas para compor o índice de desempenho desejado. Nestas situações é importante ponderar sobre quais termos terão maior prioridade na solução do problema. Tal ponderação nem sempre é simples de ser feita, devido a subjetividades que podem estar ligadas ao problema. Kirk (2004, p. 42) mostra um caso prático para a seleção da função de mérito para a otimização da trajetória de pouso de um caça em um porta-aviões, onde há a necessidade tanto do rastreamento de uma trajetória específica quanto a minimização dos movimentos dos comandos da aeronave.

3.4 Trajetória Fracionada

Conforme apresentado na Seção 2.2, uma possível abordagem para a formulação do problema de planejamento de trajetória é através do conceito de multi-fase, onde a trajetória é dividida em um grupo de segmentos conectados que representam fases individuais. Na formulação de problemas de otimização de trajetórias de aeronaves, este tipo de aproximação possui uma ampla gama de aplicações, uma vez que na trajetória fracionada pode se atribuir a cada fase diferentes índices de desempenho, modelos dinâmicos, restrições de trajetória e de contorno.

Um tipo de situação onde a aplicação desta forma de abordagem é relevante é aquela em que os parâmetros do modelo dinâmico se alteram rapidamente em um determinado instante do trajeto. Dentre os casos práticos relacionados a esta situação pode-se citar, por exemplo, a trajetória de um lançamento de carga, onde as propriedades de inércia da aeronave antes e após o lançamento são distintas. Outro tipo de aplicação é aquela em que se avaliam as trajetórias ótimas em situações de emergência, tal como na perda instantânea de um dos motores da aeronave, no travamento de determinadas superfícies de comando, entre outras situações

semelhantes. Nestes casos, pode-se separar a trajetória analisada em duas partes, onde as propriedades da primeira fase são distintas da segunda.

Esta abordagem é útil também para se restringir uma determinada fase da missão da aeronave a condições de contorno e de trajetória específicas. Por exemplo, analisar uma trajetória onde a subida é uma fase que deve ocorrer em ângulo de subida e de proa fixos e atingir a condição inicial de cruzeiro a uma velocidade determinada; o cruzeiro deve ser feito a uma altitude e velocidade constantes, e a descida deve ser realizada a um ângulo de aproximação constante. Este tipo de trajetória pode ser dividida em três fases distintas, onde cada uma possui suas próprias restrições.

Outro tipo de circunstância em que esta técnica pode ser empregada está no estudo de missões de alta complexidade, onde certas etapas irão requerer modelos de maior fidelidade, enquanto outras etapas podem-se utilizar modelos de mais baixa fidelidade devido a maior simplicidade dos movimentos. Assim, combinam-se modelos de diferentes fidelidades de tal forma que se utilize os modelos mais adequados para cada segmento da missão, a qual denota-se por abordagem híbrida. Este tipo de aplicação pode ser feita em situações onde deseja-se reduzir os custos da solução numérica do problema.

Esta técnica também pode ser empregada nos problemas em que se deseja impor determinadas restrições internas ao longo da execução da trajetória, fazendo com que a aeronave atinja um determinado ponto de passagem com estados bem definidos. Para isso, atribui-se às condições de contorno de uma determinada fase os estados em que se deseja atingir ao fim do segmento, por exemplo, em conexão com uma fase posterior, cujos vínculos de contorno no seu início são semelhantes aos vínculos de contorno no término do segmento anterior. Este tipo de abordagem é utilizada no planejamento de corridas aéreas (Seção 6.3), onde a aeronave deve passar por determinados pontos do percurso com uma atitude pré-definida.

4 FORMULAÇÃO DOS VÍNCULOS DE CONTORNO

Durante a formulação e solução de um problema de planejamento de trajetória ótima de uma aeronave, deve-se estar atento à escolha da forma de parametrização do grupo de rotações $SO(3)$ e às definições utilizadas nos vínculos de contorno relacionados às variáveis de estado relativas à atitude. Isto porque nesta classe de problemas, todo histórico da evolução dos estados deve ser levado em consideração durante a análise, respeitando a dinâmica do sistema. Ou seja, neste tipo de estudo, não se faz a comparação da atitude da aeronave na sua condição final e inicial apenas, mas observa-se a trajetória percorrida pela atitude desde sua condição inicial até a final como um todo, junto dos demais estados do modelo. Isto constitui um desafio na modelagem dos vínculos de contorno do problema, uma vez que formulações distintas para representação da orientação da aeronave geram problemas matemáticos distintos. Assim, mesmo que se tenha um mesmo problema físico, a representação matemática não é a mesma.

Desta maneira, esta seção tem como foco uma das principais contribuições propostas neste trabalho que é a de apresentar como a escolha e o tratamento das diferentes formas de parametrização da atitude podem influenciar na solução do problema de planejamento de trajetórias ótimas de uma aeronave. São apresentadas as características relacionadas a cada uma das formas de representação da atitude no contexto em questão, os desafios na modelagem das condições de contorno $\psi[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}] = \mathbf{0}$ e são sugeridas maneiras de se formular o problema adequadamente.

4.1 Características das Diferentes Formas de Parametrização da Atitude sobre as Condições de Contorno

Conforme observado nos trabalhos revisados, a maior parte dos problemas de otimização de trajetória de aeronaves faz uso dos ângulos de Euler para parametrização da atitude do corpo, o que se deve principalmente à simplicidade de interpretação destes ângulos, os quais denotam-se por guinada, arfagem e rolamento para θ_z , θ_y e θ_x , respectivamente. Para algumas situações, porém, a trajetória irá envolver determinadas atitudes nas quais este tipo de representação se torna inviável. Nestes casos, utilizam-se convencionalmente os parâmetros de Euler-Rodrigues como alternativa para se evitar as singularidades presentes nos ângulos de Euler, as quais podem ser observadas na cinemática desta representação, Eq.(3.49), para quando $\theta_y = \pm\pi/2$.

Esta maneira de escolha entre um dos dois tipos de representação descende da forma em que se abordam os problemas de simulação de trajetória de uma aeronave. Porém, no contexto da otimização de trajetórias a escolha da forma de representação das rotações da aeronave não é tão simples. Neste caso, existem outras particularidades das parametrizações de $SO(3)$ que devem ser levadas em consideração durante a formulação e solução do problema.

A singularidade apresentada pelos ângulos de Euler, não é a única limitação relacionada a este tipo de parametrização. Note que as restrições adotadas nos intervalos $[-\pi, \pi)$, $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, 2\pi)$ para os ângulos de Euler θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente, são convenientemente colocadas com o intuito de fazer com que estes parâmetros tenham representação única da atitude. Porém, esta descontinuidade aplicada, traz limitações no planejamento de trajetórias de uma aeronave, pois, independentemente da sequência dos ângulos de Euler adotada, sempre será possível encontrar uma atitude em torno da qual orientações sutilmente diferentes acarretarão em ângulos de Euler completamente distintos. Considere, por exemplo, as duas orientações mostradas na FIGURA 4.1, obtidas pela sequência de rotação Z-Y-X.

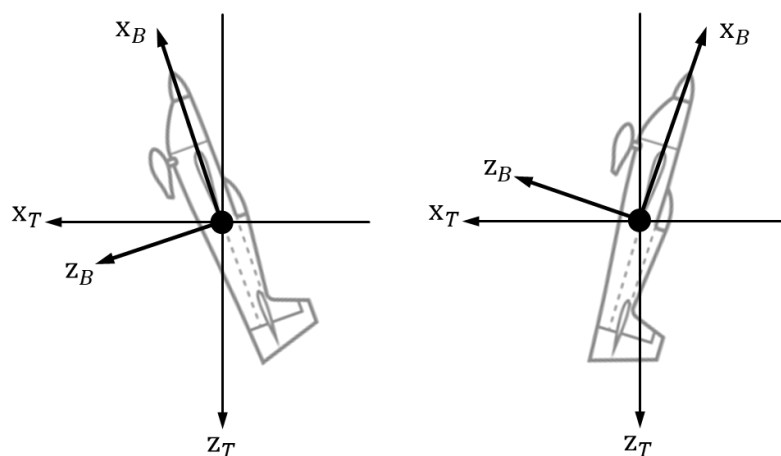


FIGURA 4.1 – Descontinuidade dos ângulos de Euler.

Na aeronave representada a esquerda da FIGURA 4.1, a atitude pode ser atingida realizando uma guinada nula, uma arfagem de quase $\pi/2$ e um rolamento nulo; enquanto que para a representação à direita faz-se uma guinada de π , uma arfagem de quase $\pi/2$ e um rolamento de π . Isso significa que, uma vez impostas as restrições nos ângulos, o mapeamento inverso de $SO(3)$ para os ângulos de Euler é descontínuo. Assim, em algumas situações, para que se tenha um comportamento contínuo dos estados, será realizada uma trajetória mais longa do que aquela necessária.

Deste modo, no contexto do planejamento de trajetórias, devido às características do problema, é importante que os parâmetros sejam representados de forma contínua, ou seja, que os ângulos de Euler não estejam restritos aos intervalos indicados, mas que possam abranger qualquer ponto no espaço $\mathbb{R}$, permitindo uma interpolação suave entre duas atitudes distintas. Para um entendimento mais simples e claro desta questão, assuma uma aeronave que execute uma trajetória em altitude fixa entre os pontos 1 e 2, conforme apresentado na FIGURA 4.2.

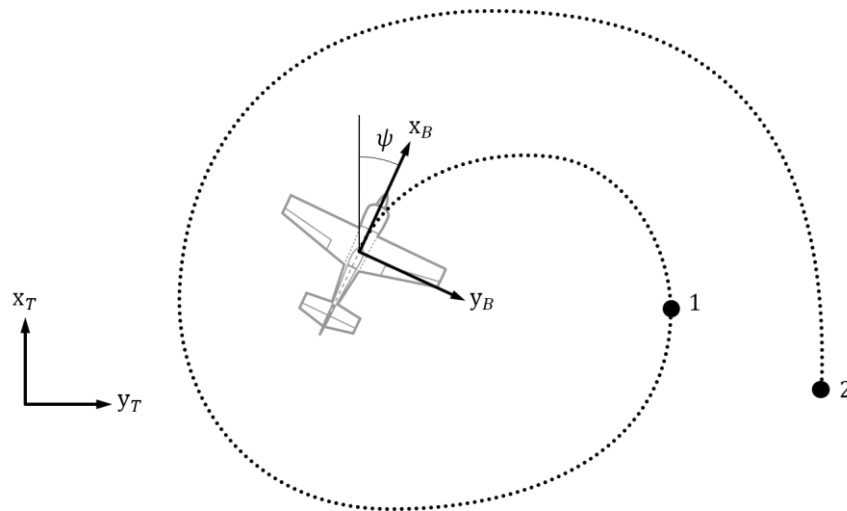


FIGURA 4.2 - Voo de uma aeronave em altitude constante.

Nos pontos 1 e 2 a aeronave apresenta a mesma atitude física, i.e., sem rolamento, sem arfagem e com o nariz apontando para sul. Note que para representar a trajetória dos ângulos de Euler de forma contínua e suave, caso no ponto 1 a aeronave apresente um ângulo ψ igual a π , no ponto 2 será observado um ângulo de 3π . Ou seja, apesar das duas atitudes representarem uma mesma orientação espacial da aeronave, matematicamente elas são distintas, pois na variedade onde os ângulos de Euler estão inseridos, cada parâmetro, e seus infinitos múltiplos de 2π , representam uma mesma atitude em $SO(3)$, o que mostra que a sua projeção no grupo ortogonal especial não é bijetora. Por isso, em problemas de otimização de trajetória, de forma a garantir a continuidade na trajetória, é importante que estes ângulos correspondam ao espaço $\mathbb{R}^3$ ao invés do quociente $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$. Porém, uma vez retirados os intervalos dos ângulos, é importante tomar certas precauções durante a formulação do problema, como será discutido a diante.

De maneira geral, os quatérnios unitários são a alternativa mais comum para a modelagem do movimento de sistemas com trajetórias complexas como: o das aeronaves de alta manobrabilidade (FISCH, 2010) (DRURY e WHIDBORN, 2009), o movimento de robôs (VALENTI, DRYANOVSKI e XIAO, 2015), do reposicionamento de satélites (LI, LI e LI,

2017), entre outros. Isso se deve a uma importante característica desta parametrização de que ela representa todas as orientações de um corpo rígido sem as singularidades da cinemática presentes nos ângulos de Euler.

Apesar desta qualidade, observa-se pela Eq.(3.61) que toda atitude pode ser representada por dois quatérnios, uma vez que uma mesma rotação pode ser obtida adicionando 360° a η , o que inverte o sinal de ambos $\cos(\eta/2)$ e $\sin(\eta/2)$. Consequentemente, $\{\mathbf{q}\}$ e $-\{\mathbf{q}\}$ representam uma mesma atitude para o corpo rígido. Em outras palavras, pode-se dizer que os parâmetros de Euler-Rodrigues, assim como os ângulos de Euler, não possuem representação única.

Formalmente, $\mathbb{S}^3$ é uma variedade de cobertura de $SO(3)$, relacionada através de um mapa de cobertura ou uma projeção (BHAT e BERNSTEIN, 2000, p. 64). Além disso, a topologia global de $\mathbb{S}^3$ é diferente daquela de $SO(3)$, o que torna a ambiguidade de representação difícil de ser contornada. Considere o simples exemplo de uma rotação completa e contínua de um corpo em torno de um eixo $\{\mathbf{n}\}$, iniciando na atitude de referência $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. Quando $\eta = 2\pi$, o corpo terá retornado a atitude inicial, mas $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. Apenas após outra rotação completa, quando $\eta = 4\pi$, ele terá retornado ao quatérnio inicial, i.e., $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. Ou seja, pode-se afirmar que os quatérnios apresentam uma dupla cobertura do espaço de rotações. Este comportamento pode ser visto pela FIGURA 4.3, onde a aeronave executa um voo hipotético em linha reta com rolamento puro.

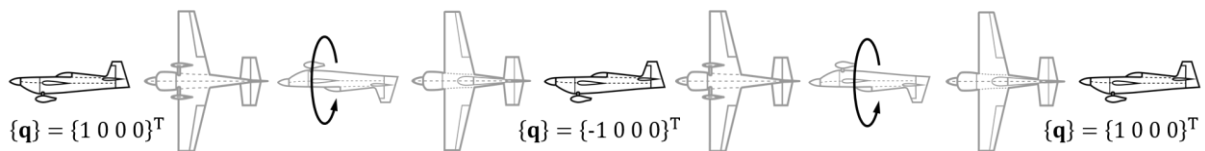


FIGURA 4.3 – Quatérnios antipodais durante o rolamento de uma aeronave.

Isto ilustra como não se pode, em geral, restringir o espaço de estados a apenas um hemisfério de $\mathbb{S}^3$ para remoção da ambiguidade, uma vez que isto requereria uma trajetória descontínua nos quatérnios. Vale ressaltar que esta inversão dos quatérnios irá ocorrer para a rotação do corpo de um ângulo 2π em torno de qualquer eixo. Este comportamento, junto do valor dos quatérnios intermediários ao longo do movimento, está apresentado na FIGURA 4.4, que mostra a rotação da aeronave em torno dos eixos x_B , y_B e z_B , com a sequência de rotação ocorrendo da esquerda para a direita.

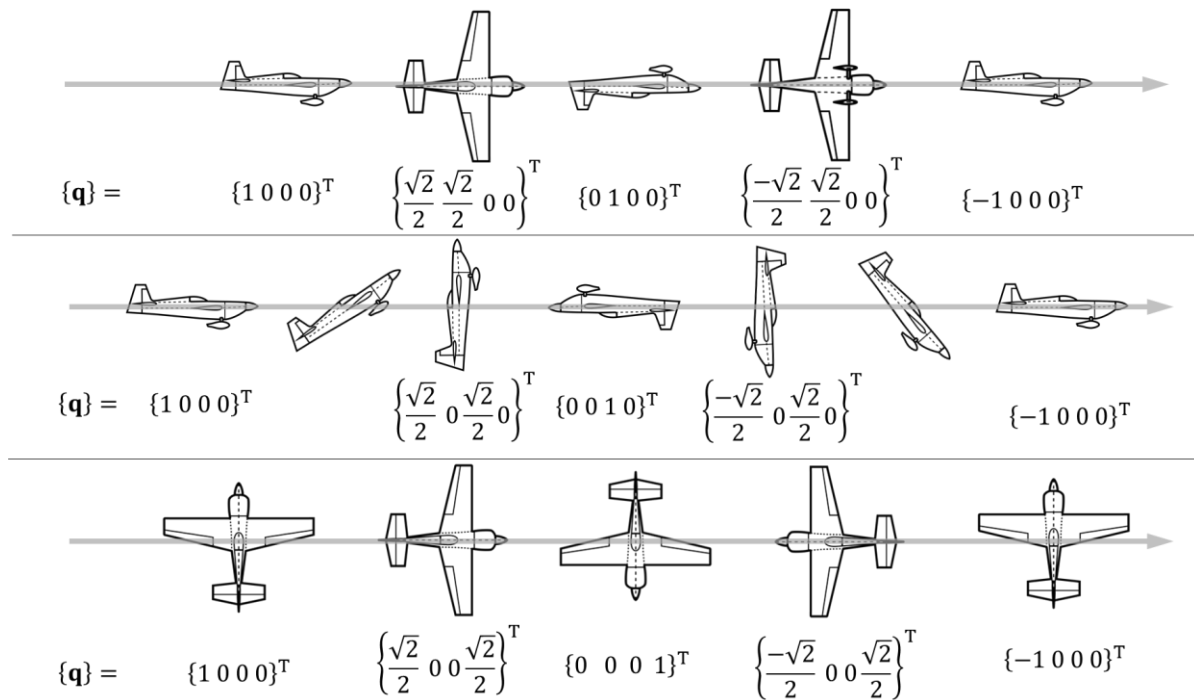


FIGURA 4.4 - Valores dos quatérnios durante a rotação de 2π em torno dos eixos x_B , y_B e z_B .

Logo, os parâmetros de Euler-Rodrigues apresentam limitações de representação similares à dos ângulos de Euler, porém em um menor grau, pois enquanto os quatérnios possuem dupla representação para uma mesma atitude (chamados quatérnios antipodais), os ângulos de Euler apresentam múltiplas representações para uma mesma orientação espacial da aeronave.

Em problemas de planejamento de trajetória onde as condições de contorno relativas à atitude estão em aberto, estas características não serão limitantes, a não ser pela técnica de solução numérica, como será comentado a diante. Porém, para problemas onde uma ou mais condições de contorno são fechadas ($\psi[\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f, \mathbf{p}] = \mathbf{0}$), i.e., situações onde se tem atitudes definidas nas extremidades da trajetória, tanto a escolha do modelo de representação da rotação como a formulação das condições de contorno podem limitar a soluções indesejadas. Isto porque certos vínculos de contorno podem impor ou excluir certos trajetos do domínio do problema.

Para melhor demonstração destes comportamentos, são apresentados alguns casos de simples observação onde se pode notar com mais detalhes a evolução das diferentes representações da atitude ao longo de uma trajetória.

Caso 1: Trajetória em altitude constante entre dois pontos distintos e com proa defasada em π

Suponha que uma aeronave parta de um determinado ponto 1, com seu nariz apontando para norte, asas niveladas e sem ângulo de arfagem, e que termine sua trajetória no ponto 2, ainda com asas niveladas e sem arfagem, mas com a proa para sul. Tal movimento ocorre de tal forma que altitude de voo h não é alterada, o que representa um movimento apenas em um plano. Já as coordenadas de x e y estão defasadas, conforme apresentado na FIGURA 4.5.

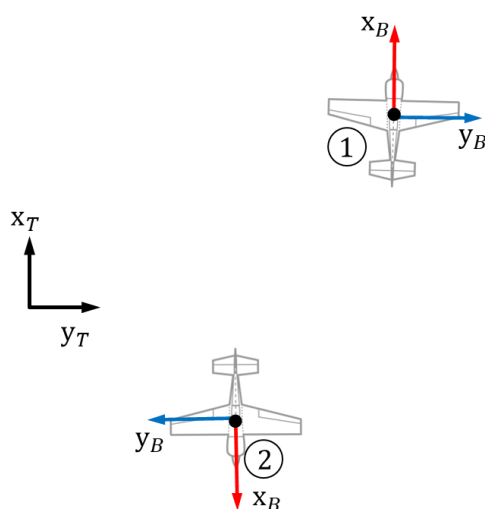


FIGURA 4.5 - Vista superior do início e fim da trajetória do caso 1.

A FIGURA 4.6, apresenta algumas trajetórias possíveis de serem executadas pela aeronave de tal forma a cumprir as condições requeridas. A linha contínua indica o traçado do centro de gravidade da aeronave e a linha pontilhada mostra o percurso de um ponto na extremidade da asa direita.

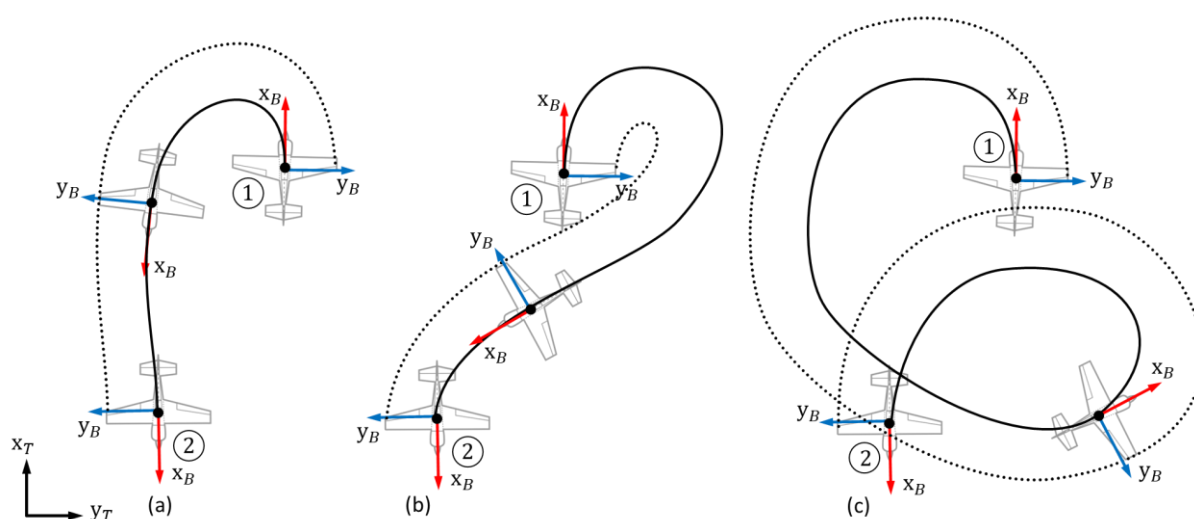


FIGURA 4.6 - Trajetórias distintas para o caso 1.

Apesar das três trajetórias distintas terem uma mesma atitude física no início e fim do movimento, não se pode dizer o mesmo para os modelos de representação matemático da orientação. Note inicialmente os ângulos de Euler. Assuma que no início do movimento estes ângulos sejam $\{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T$. Independentemente do percurso realizado os valores dos ângulos θ_x e θ_y serão iguais a zero ao fim do movimento, o que não se pode afirmar a respeito de θ_z . Caso a aeronave execute a trajetória (a), a evolução dos ângulos de Euler irá resultar em um valor final de θ_z igual a $-\pi$. Para o percurso (b), a aeronave realiza um movimento de rotação positiva em torno de z_B , o que leva a um θ_z igual a π no ponto 2. Já para a trajetória apresentada em (c), a aeronave realiza uma volta em e meia no sentido negativo em torno de z_B , logo, o valor de θ_z ao fim do movimento é igual a -3π .

Para os quatérnios, considere que seus parâmetros no ponto 1 tenham a forma $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. Assim como para os ângulos de Euler, as trajetórias distintas resultam em parâmetros finais distintos, apesar de se ter uma mesma atitude física. Por exemplo, para o caso da trajetória (a), o quatérnio ao final do movimento terá a forma $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ -1\}^T$. Já para o a trajetória (b), o quatérnio final é $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T$, cuja evolução pode ser observada no movimento de guinada apresentado na FIGURA 4.4. Por fim, no percurso (c), o quatérnio final tem a forma $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T$. Isto ocorre porque no primeiro movimento de -180° em torno de z_B os parâmetros terão o mesmo valor que observado para a situação (a), porém, neste último caso a aeronave continua em um movimento adicional de -360° , realizando uma volta adicional completa em torno de um eixo, o que faz com que o quatérnio inverta de sinais.

Já para o caso das matrizes de rotação, independentemente da trajetória, seu valor no início do movimento é

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

e no fim do movimento

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Isto porque a matriz de cossenos diretores é uma parametrização global e única, no sentido que para cada atitude há uma e apenas uma matriz de rotação correspondente, como mostrado na Seção 3.1.3.1.

Caso 2: Trajetória tridimensional entre dois pontos distintos e com proa defasada em π

Suponha um segundo caso, similar ao Caso 1, porém onde aeronave não tenha seu movimento restrito apenas ao plano $x_T y_T$. No entanto, as coordenadas iniciais e finais do movimento estão no mesmo plano $x_T z_T$. Algumas das trajetórias que poderiam ser executadas neste caso são mostradas na FIGURA 4.7.

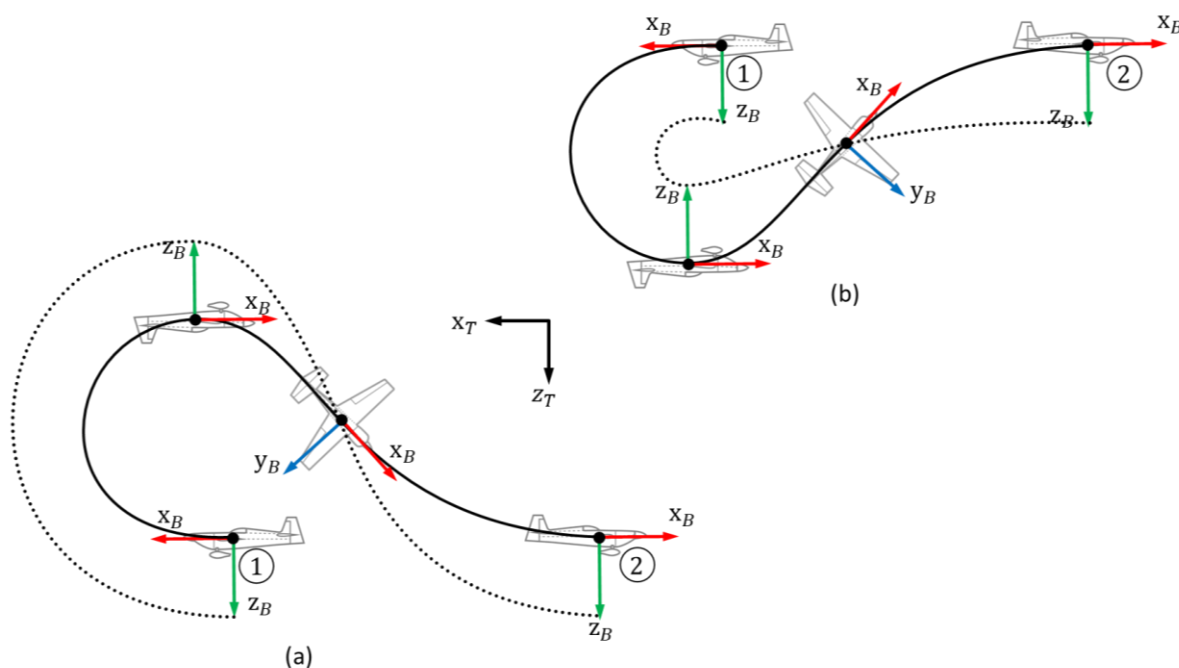


FIGURA 4.7 - Vista lateral de trajetórias distintas para o caso 2.

Novamente, a linha preta contínua mostra o percurso realizado pelo centro de gravidade da aeronave e a linha pontilhada representa o movimento de um ponto na extremidade do eixo z_B . É importante notar que, apesar deste caso não ser semelhante ao caso 1, trajetórias similares às aquelas apresentadas na FIGURA 4.6, seriam viáveis para esta situação também.

Neste tipo de situação, ampliam-se as possibilidades de representação da atitude pelos ângulos de Euler nas extremidades da trajetória. Analisemos inicialmente a trajetória (a), onde a aeronave executa um movimento de arfagem até atingir uma altitude máxima e finaliza o movimento com uma descida em rolamento. Assim, assumindo que os ângulos estejam na forma $\{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T$ no ponto 1, no ponto 2 ter-se-á θ_z igual a zero, uma vez que se assume que apenas os ângulos de arfagem e rolamento estão em evolução. Para θ_y o valor final é π e para θ_x os valores finais π e $-\pi$ são possíveis. Isto depende do sentido de rolamento que a aeronave irá executar durante a descida. Ou seja, caso ela role positivamente em torno de x_B , ter-se-á θ_x igual a π e o valor oposto ocorre quando o rolamento é negativo.

No caso da trajetória (b), tem-se as mesmas observações que para o caso (a), no entanto com $\theta_y = -\pi$.

Para uma visualização mais clara destas questões, a FIGURA 4.8, apresenta, de uma forma aproximada, o histórico de duas trajetórias possíveis para os ângulos de Euler no caso 2.

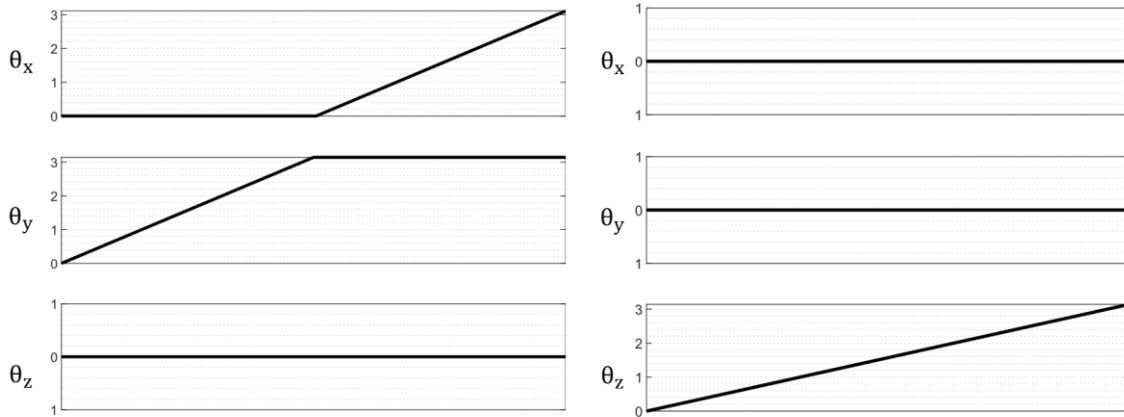


FIGURA 4.8 - Trajetórias distintas para os ângulos de Euler no caso 2.

A trajetória da FIGURA 4.8 à esquerda representa uma situação semelhante ao que se pode observar no movimento (a) da FIGURA 4.7, o que se nota pela variação inicial no ângulo de arfagem e posteriormente pelo rolamento em torno de θ_x . Já a trajetória dos ângulos da FIGURA 4.8 à direita, representam um movimento similar à situação (b) do caso 1, FIGURA 4.6, onde se faz um movimento de guinada positivo. Observe que, apesar de terem sido realizadas trajetórias distintas, os ângulos de Euler finais mostrados na FIGURA 4.8, representam uma mesma atitude. Isso mostra que neste tipo de parametrização existem múltiplas formas de representação de uma mesma orientação espacial. Pelas trajetórias observadas, alguns destes ângulos são:

$$\begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\pi \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -\pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -\pi \\ -\pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

No caso dos parâmetros de Euler-Rodrigues, a orientação final de qualquer uma das trajetórias mostradas na FIGURA 4.7 pode ser representada por um dos quatérnios antipodais $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ \pm 1\}^T$, de forma similar ao que foi visualizado no caso 1. Os valores finais dos parâmetros são definidos pela maneira em como o percurso é executado. Observe a trajetória (a) da FIGURA 4.7 e assumo que o quatérnio que representa a atitude inicial seja $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. Inicialmente a aeronave executa um movimento de arfagem até que fique de dorso

no topo do movimento, onde $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 1 \ 0\}^T$ (vide FIGURA 4.4). A partir deste instante, o valor do quatérnio final irá depender do restante do movimento. Para uma visualização clara desta situação observe duas formas distintas de evolução dos quatérnios a partir deste ponto, como mostrado pela FIGURA 4.9.

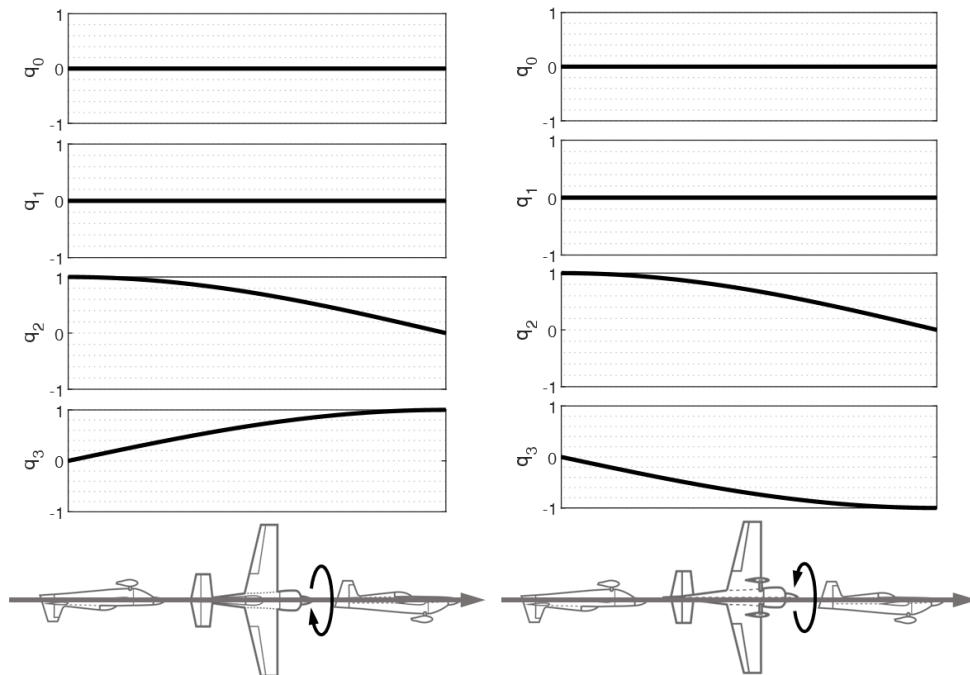


FIGURA 4.9 - Trajetória dos quatérnios durante a rotação da aeronave.

Note que, caso a aeronave realize um movimento de rotação horário em torno de x_B durante a descida os parâmetros finais serão $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ +1\}^T$, enquanto que um rolamento no sentido anti-horário resulta nos quatérnios $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ -1\}^T$. Observações de mesmo caráter podem ser feitas em relação à trajetória (b) da FIGURA 4.7.

Como pode se notar, a visualização desta maneira de representação da atitude é menos intuitiva do que em relação aos ângulos de Euler. Tem-se diferentes representações para uma mesma atitude, porém em um menor grau do que quando comparado aos ângulos de Euler.

Assim como para o caso 1, a matriz de rotação nas extremidades do percurso independe da trajetória executada, tendo o mesmo valor que aqueles da Eq.(4.1) e da Eq.(4.2) para o início o fim da trajetória, respectivamente.

Caso 3: Trajetória tridimensional entre dois pontos distintos e com proa defasada em $\pi/2$

Note que no caso 2, para as trajetórias mostradas na FIGURA 4.7, os ângulos de Euler atingirão em algum momento um ângulo de arfagem $\theta_y = \pm\pi/2$, cuja condição representa o

ponto de singularidade desta forma de parametrização para a sequência de rotações convencionalmente utilizada nas análises de mecânica do voo, i.e., $Z-Y-X$.

Uma das maneiras estabelecidas para se evitar tal singularidade nesta forma de parametrização é utilizar uma sequência de rotações diferente (SINGLA, MORTARIY e JUNKINSZ, 2004), alterando o ponto onde a singularidade ocorre. Isto porque, de acordo com o Teorema de Euler, qualquer ordem de rotações poderia ser adotada, tal que não sejam feitas duas rotações seguidas em torno de um mesmo eixo. Assim, as sequências possíveis, são $Z-Y-X$, $Z-X-Y$, $X-Z-Y$, $X-Y-Z$, $Y-X-Z$, $Y-Z-X$, $X-Y-X$, $X-Z-X$, $Y-X-Y$, $Y-Z-Y$, $Z-X-Z$ e $Z-Y-Z$. Logo, poder-se-ia selecionar diferentes sequencias de rotações para a análise de diferentes trajetórias. Porém, este tipo de abordagem amplia a quantidade de possibilidades de representação de uma determinada atitude pelos ângulos de Euler.

Para compreensão desta questão, considere um terceiro caso onde a aeronave inicia sua trajetória com asas niveladas, sem arfagem e com nariz apontando para norte (x_T), e finaliza de forma similar, porém com a proa voltada para leste (y_T). A FIGURA 4.10, apresenta uma trajetória viável para a situação.

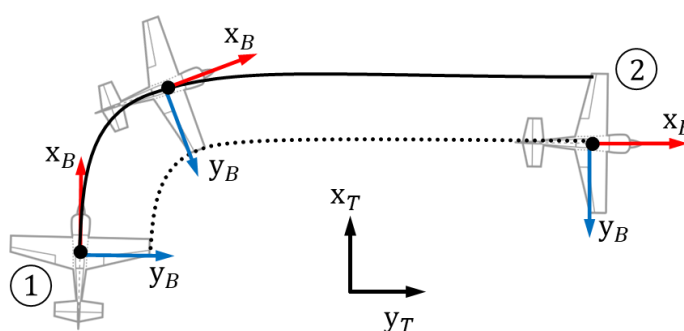


FIGURA 4.10 - Possível trajetória para o caso 3.

Pela sequência convencional dos ângulos de Euler, i.e., $Z-Y-X$, a evolução da trajetória pode ser observada por um aumento do ângulo θ_z partindo de zero até $\pi/2$, representando um movimento de guinada contínuo. Ou seja, ao fim da trajetória, os ângulos θ_x e θ_y são zero e θ_z é igual a $\pi/2$.

Assuma, por exemplo, que uma determinada sequência $X-Y-X$ tenha sido escolhida para evitar certa singularidade nos ângulos de Euler. Especificamente para esta ordem assumida o movimento de guinada realizado fisicamente pela aeronave na trajetória em análise é representado por um rolamento positivo, seguido por uma arfagem positiva e por um rolamento negativo, respectivamente. Assim, ao final da trajetória os ângulos de Euler resultariam em valores de θ_x e θ_z iguais a zero, enquanto que θ_y seria $\pi/2$. Desta forma, observa-se que as

possibilidades de representação por ângulos de Euler ampliam quando se permite a alternância entre diferentes seqüências de rotação.

Caso 4: Trajetória entre dois pontos iguais com mesma atitude

Neste último caso apresentado, avalia-se uma situação onde a posição e atitude da aeronave, tanto na partida quanto no término da trajetória são as mesmas. Para fim desta análise, assume-se que esta atitude inicial e final seja aquela com asas niveladas, sem arfagem e proa para norte (x_H). Algumas das trajetórias que cumprem com tais requisitos estão apresentadas na FIGURA 4.11.

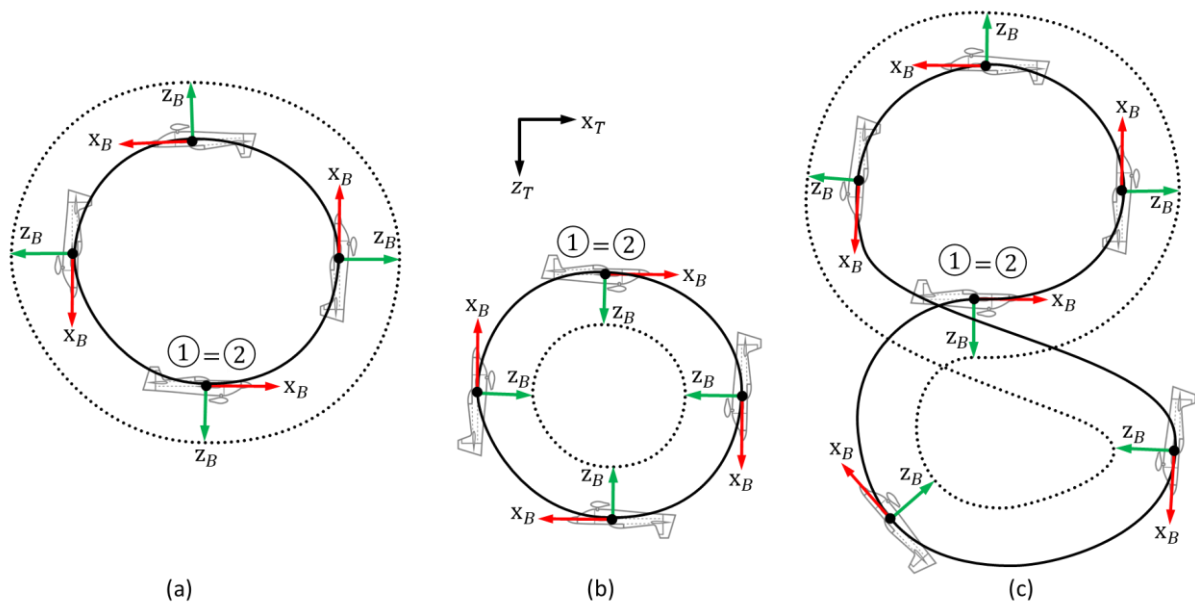


FIGURA 4.11 - Vista lateral de trajetórias distintas para o caso 4.

Apesar de serem mostradas apenas trajetórias que estão no plano $x_T z_T$, outros percursos, que incluem movimentos fora deste plano, também são válidos. Avaliando inicialmente o comportamento dos ângulos de Euler ao longo da execução de tais trajetórias, nota-se que na situação (a), a aeronave realiza um movimento de arfagem positivo ao longo de todo percurso. No fim deste movimento os valores de θ_x e θ_z são zero e θ_y é igual a 2π . Um comportamento próximo a este é visto na trajetória (b). Porém, como o movimento de arfagem ocorre no sentido negativo, θ_y tem um valor final igual a -2π . Já para a situação ilustrada em (c), a aeronave inicia um movimento de arfagem positivo, mas, antes de finalizar o percurso, realiza um movimento de arfagem no sentido negativo. Assim, tem-se no final $\{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T$. Outras trajetórias que não estão ilustradas, mas que podem ser facilmente visualizadas são aquelas em que a aeronave realiza um movimento de guinada constante para a

direita ou para esquerda, o que resultaria em valores finais de θ_z iguais a 2π e -2π , respectivamente.

A relevância deste caso está na possibilidade de observar que, apesar da aeronave realizar uma trajetória que retorna à mesma atitude e posição do início do movimento, isto não significa que os ângulos de Euler irão necessariamente retornar a seu valor inicial. O mesmo pode ser visualizado a respeito da formulação pelos parâmetros de Euler-Rodrigues. Por exemplo, assumindo que os quatérnios no início do movimento tenham a forma $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, tanto para a trajetória (a) quanto para a (b) os quatérnios terão a forma $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ ao fim do movimento. Em ambos estes trajetos, nota-se que a aeronave realiza uma volta de 2π em torno de seu eixo y_B , invertendo o sinal do quatérnio. Já para a situação apresentada em (c), no primeiro movimento de arfagem positivo ocorre a inversão do quatérnio, porém, na continuação da trajetória com arfagem negativa, inverte-os novamente. Logo, ao fim do movimento, tem-se $\{\mathbf{q}\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$.

Assim como para os demais casos apresentados, a matriz de rotação ao fim da execução de qualquer uma das trajetórias tem a mesma forma que aquela do início do movimento, uma vez que esta maneira de parametrização possui uma relação biunívoca com as atitudes do corpo.

Analisando os casos retratados fica claro que, tanto a técnica selecionada para representação da atitude quanto a maneira de definir os vínculos de contorno ligados aos seus parâmetros irá influenciar na formulação dos problemas de planejamento de trajetória. Isto porque diferentes maneiras de se modelar as restrições irão gerar problemas matemáticos distintos, que podem impor ou eliminar certas trajetórias do domínio do problema.

4.2 Proposta para modelagem dos vínculos de contorno

A partir das situações mostradas na Seção 4.1, observa-se que alguns cuidados devem ser tomados quanto a maneira de se modelar as condições de contorno de forma a se evitar comportamentos indesejados na solução do problema de planejamento de trajetória.

Nos trabalhos revisados, notou-se que não existem comentários claros sobre como os vínculos de contorno são definidos. Observou-se que, apesar dos ângulos de Euler e dos quatérnios terem sido encontrados na maior parte dos estudos, é comum que a escolha de seus valores de contorno seja feita de forma intuitiva. Tal medida poderia ser adotada em casos mais simples. Porém, verifica-se que mesmo em trajetórias comuns, como por exemplo o caso 4 da Seção 4.1, a definição dos valores nos contornos para os tipos de parametrização comumente utilizados não é evidente. Tal escolha se torna ainda mais intrincada em situações cujas

trajetórias são mais complexas ou mesmo em problemas de trajetória fracionada, onde os vínculos de contorno de uma determinada fase afetam as fases vizinhas, influenciando a solução de toda a trajetória. Assim, a escolha intuitiva para os vínculos de contorno é um fator limitador durante a formulação do problema.

Portanto, como contribuição, sugerem-se algumas maneiras para uma formulação adequada dos vínculos de contorno do problema. O propósito desta formulação é permitir diferentes possibilidades para os contornos nos casos da utilização dos ângulos de Euler ou dos parâmetros de Euler-Rodrigues para representação da atitude, uma vez que estas são variedades de múltipla e dupla cobertura de $SO(3)$, respectivamente.

Para o caso onde apenas um dos parâmetros da representação possa variar, sugere-se a seguinte abordagem para os vínculos de contorno, final e/ou inicial:

$$\psi: \prod_{i=1}^n (\kappa - \bar{\kappa}_i) = 0, \quad (4.4)$$

onde κ representa o parâmetro com múltiplas soluções nos contornos e $\bar{\kappa}_i$ representa o i -ésimo valor admissível para o parâmetro κ . A Eq.(4.4), sugere uma relação do tipo “ou” para os vínculos, permitindo que diferentes valores de κ sejam admissíveis como condição final ou inicial.

Suponha, por exemplo, a formulação dos vínculos de contorno para um problema semelhante ao caso 1 da Seção 4.1. Nesta situação, no caso da representação por ângulos de Euler, de acordo com a Eq.(4.4), a condição de contorno final pode ser definida na forma:

$$\psi(t_f): (\theta_z - 3\pi)(\theta_z - \pi)(\theta_z + \pi)(\theta_z + 3\pi) \dots = 0, \quad (4.5)$$

onde $\kappa = \theta_z$ e $\bar{\kappa}_i = 3\pi, \pi, -\pi, -3\pi$, etc. Note que neste caso, $\theta_z = \pi + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Um raciocínio semelhante poderia ser utilizado na aplicação dos quatérnios, onde as condições de contorno final poderiam ser definidas como:

$$\psi(t_f): (q_3 - 1)(q_3 + 1) = 0. \quad (4.6)$$

Observe que, em relação aos parâmetros de Euler-Rodrigues, os ângulos de Euler possuem uma maior dificuldade de definição dos vínculos de contorno, pois, mesmo que se utilize da estratégia apresentada, existem múltiplas opções para se definir os valores dos ângulos.

Estes ângulos não são simples de serem definidos, principalmente, quando o problema envolve mais graus de liberdade, como mostrado no caso 2 da Seção 4.1, onde o movimento da aeronave não se restringe ao plano e apenas ao movimento de guinada, sendo necessário inclusive mais do que um ângulo para definição das condições de contorno final (veja Eq.(4.3)). Nestes casos, sugere-se expandir a Eq.(4.4) para abranger situações mais complexas, onde mais do que um parâmetro do modelo precisa ser definido. Assim, de uma maneira mais genérica, para o caso dos ângulos de Euler, propõem-se que as condições de contorno sejam expressas na forma:

$$\psi: \prod_{i=1}^n \left[(\theta_x - \bar{\theta}_{x_i})^2 + (\theta_y - \bar{\theta}_{y_i})^2 + (\theta_z - \bar{\theta}_{z_i})^2 \right] = 0, \quad (4.7)$$

onde θ_x , θ_y , e θ_z são os valores dos ângulos de Euler no início ou final da trajetória e $\bar{\theta}_{x_i}$, $\bar{\theta}_{y_i}$ e $\bar{\theta}_{z_i}$, representam o i-ésimo conjunto de ângulos de Euler relacionados aos vínculos de contorno. Seguindo um mesmo raciocínio para os quatérnios, tem-se a forma generalizada:

$$\psi: \|\{\mathbf{q}\} - \{\bar{\mathbf{q}}\}\| \|\{\mathbf{q}\} + \{\bar{\mathbf{q}}\}\| = 0, \quad (4.8)$$

onde $\{\mathbf{q}\}$ é o vetor de quatérnios no início ou final da trajetória e $\{\bar{\mathbf{q}}\}$ é o vetor de quatérnios determinado para a respectiva condição de contorno.

Desta maneira, na circunstância da formulação de um problema de planejamento de trajetória similar ao caso 2 da Seção 4.1, por exemplo, as condições de contorno para o final da trajetória podem ser definidas para os ângulos de Euler na forma:

$$\begin{aligned} \psi(t_f): & \left[(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z - \pi)^2 \right] \left[(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z + \pi)^2 \right] \dots \\ & \left[(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 + (\theta_z + 3\pi)^2 \right] \left[(\theta_x - \pi)^2 + (\theta_y - \pi)^2 + (\theta_z)^2 \right] \dots \\ & \left[(\theta_x + \pi)^2 + (\theta_y - \pi)^2 + (\theta_z)^2 \right] \left[(\theta_x - \pi)^2 + (\theta_y + \pi)^2 + (\theta_z)^2 \right] \dots \\ & \left[(\theta_x + \pi)^2 + (\theta_y + \pi)^2 + (\theta_z)^2 \right] \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

E para os parâmetros de Euler-Rodrigues, as condições de contorno seriam definidas na forma:

$$\psi(t_f): \|\{\mathbf{q}\} - \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}\| \|\{\mathbf{q}\} + \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}\| = 0, \quad (4.10)$$

onde $\{\mathbf{q}\}$ é o valor do vetor de quatérnios no fim da trajetória.

Note que, mesmo sob a estratégia proposta, a definição das condições de contorno utilizando os ângulos de Euler são complexas de serem definidas, pois é difícil estabelecer a priori quais as trajetórias possíveis para cada um dos ângulos, uma vez que eles apresentam múltiplas representações. Ou seja, mesmo sob as sugestões de formulação para os vínculos de contorno, a escolha dos ângulos de Euler ainda possui um certo caráter intuitivo, o que não é interessante para a modelagem do problema. Por outro lado, o fato dos quatérnios apresentarem apenas duas representações para cada atitude, torna a formulação dos vínculos de contorno da Eq.(4.8) bastante direta. No caso das matrizes de rotação, nenhuma formulação deste tipo é necessária, uma vez que para cada atitude haverá apenas uma matriz correspondente. Ou seja, apesar da matriz de rotação ser um tipo de parametrização pouco utilizada na solução de problemas, nota-se que ela apresenta uma formulação dos vínculos de contorno de uma maneira natural, sem a necessidade de artifícios para representá-la.

Dadas estas características das matrizes de cossenos diretores, propõe-se ainda uma última alternativa para a modelagem dos vínculos de contorno pelos ângulos de Euler ou pelos quatérnios. Nela, fazem-se com que as projeções de $(\mathbb{S}^1)^3$ ou $\mathbb{S}^3$, em $SO(3)$, sejam realizadas apenas nas condições de contorno do problema. Desta maneira, para os ângulos de Euler, os vínculos de contorno seriam definidos na forma:

$$\psi: \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & \cos\theta_y \sin\theta_z & -\sin\theta_y \\ \begin{pmatrix} \sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z \\ -\cos\theta_x \sin\theta_z \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z \\ +\cos\theta_x \cos\theta_z \end{pmatrix} & \sin\theta_x \cos\theta_y \\ \begin{pmatrix} \cos\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z \\ +\sin\theta_x \sin\theta_z \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z \\ -\sin\theta_x \cos\theta_z \end{pmatrix} & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

ou na forma expandida, onde tem-se:

$$\cos\theta_y \cos\theta_z = t_{11}, \quad (4.12a)$$

$$\sin\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z - \cos\theta_x \sin\theta_z = t_{21}, \quad (4.12b)$$

$$\cos\theta_x \sin\theta_y \cos\theta_z + \sin\theta_x \sin\theta_z = t_{31}, \quad (4.12c)$$

$$\cos\theta_y \sin\theta_z = t_{12}, \quad (4.12d)$$

$$\sin\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z + \cos\theta_x \cos\theta_z = t_{22}, \quad (4.12e)$$

$$\cos\theta_x \sin\theta_y \sin\theta_z - \sin\theta_x \cos\theta_z = t_{32}, \quad (4.12f)$$

$$-\sin\theta_y = t_{13}, \quad (4.12g)$$

$$\sin\theta_x \cos\theta_y = t_{23}, \quad (4.12h)$$

$$\cos\theta_x \cos\theta_y = t_{33}, \quad (4.12i)$$

Assim, as condições de contorno são definidas em termos dos senos e cossenos dos ângulos de Euler de tal forma que, para qualquer atitude, ter-se-á apenas uma matriz de rotação correspondente. Ou seja, nesta formulação proposta, todas combinações dos ângulos de Euler associados à uma determinada atitude física são incluídas nos vínculos de contorno, tornando o problema bem posto, i.e., bem formulado.

Apesar da formulação proposta na Eq.(4.8) já ser capaz de incluir ambos quatérnios antipodais nas condições de contorno, uma visão similar pode ser aplicada a esta forma de parametrização, onde ter-se-ia:

$$\begin{aligned} \psi: \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 Condições onde as limitações das formas de parametrização são úteis

Em algumas situações específicas a ambiguidade de representação dos ângulos de Euler e dos parâmetros de Euler-Rodrigues poderão ser úteis na definição das condições de contorno do problema. Assuma o caso da análise de uma trajetória cujo ângulo de rolamento final apresenta uma defasagem de 2π em relação ao seu valor inicial. Pode se aproximar este movimento a um tunô barril, por exemplo, onde a aeronave executa uma rotação em torno do seu eixo longitudinal x_B gerando um movimento helicoidal no espaço, ilustrado na FIGURA 4.12.

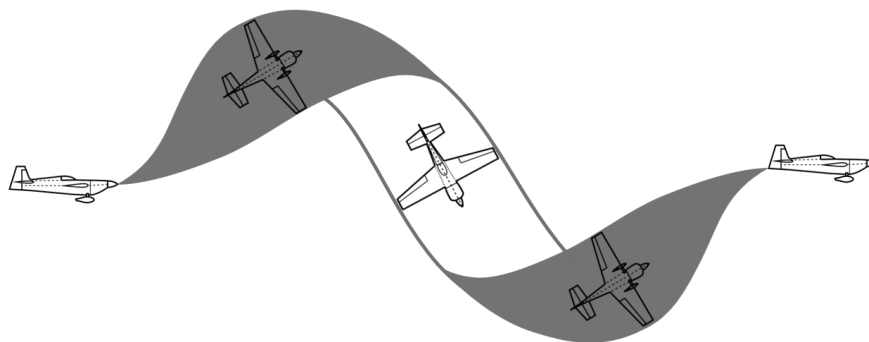


FIGURA 4.12 - Trajetória de um tunô barril.

Neste caso, as condições de contorno para os ângulos de Euler podem ser definidas de tal forma que haja uma diferença de 2π entre o valor inicial e final de θ_x . Tais condições impõem de maneira natural que aeronave realize uma volta completa em torno de x_B . Caso a diferença entre as condições inicial e final seja de -2π , a rotação ocorrerá no sentido contrário. Uma aplicação similar poderia ser feita utilizando os parâmetros de Euler-Rodrigues de tal forma que se assuma o quatérnio final igual ao seu par antipodal definido no início. No entanto, diferentemente dos ângulos de Euler, não se consegue definir naturalmente se a inversão dos quatérnios durante a execução da trajetória ocorrerá através de um rolamento, guinada, arfagem, ou um movimento de 2π em torno de um eixo qualquer. Ou seja, não há como garantir através das condições de contorno que, ao longo da trajetória, a aeronave executará um rolamento em torno de seu eixo x_B utilizando os quatérnios.

Vale citar também, que estas características terão um importante impacto na obtenção de trajetórias periódicas, como é o caso do voo dinâmico¹⁸ dos albatrozes (BOUQUET, TRIANTAFYLLOU e SLOTINE, 2017) repetido muitas vezes por aeronaves com missão de vigilância (ALEXANDRE, 2019) devido à eficiência de voo nestas condições, ou mesmo no estudo de trajetórias de planadores em térmicas, as quais são representadas por movimentos helicoidais ao longo da altitude (OLIVEIRA, 2004). Veja, por exemplo, a trajetória periódica mostrada na FIGURA 4.13.

¹⁸ Dynamic Soaring

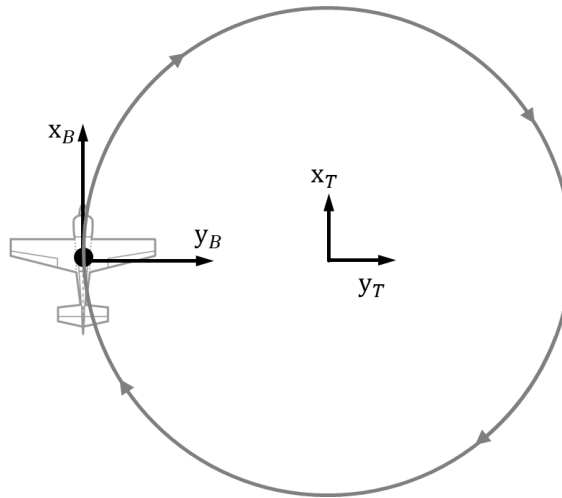


FIGURA 4.13 - Trajetória periódica.

Neste tipo de problema pode-se representar a atitude do corpo por ângulos de Euler, onde as condições de contorno final são definidas como

$$\boldsymbol{\psi}(t_f) \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi n \end{Bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde n é o número de vezes que se deseja executar o ciclo de voo. Ou seja, os ângulos de Euler podem ser usados quando se deseja avaliar um problema onde se tem um número de ciclos pré-estabelecidos. No caso dos quatérnios ou das matrizes de cossenos diretores, não é possível impor um determinado número de ciclos de voo apenas pela formulação das condições de contorno. Nestas situações deve-se utilizar a abordagem de um problema multi-fase, onde cada fase é correspondente a um período do movimento.

Outra característica importante dos ângulos de Euler é o fato de se poder restringir a rotação do corpo apenas em torno de eixos específicos. Suponha, como exemplo, um determinado vínculo de contorno da trajetória onde deseja-se fixar apenas os ângulos de arfagem e guinada ao fim do percurso, ou seja, $\boldsymbol{\psi}(t_f) \rightarrow \theta_y = \text{const.}, \theta_z = \text{const.}$ Nesta formulação permite-se que a aeronave atinja sua condição final em qualquer ângulo de rolamento. Poderia ser utilizada também uma relação de desigualdade caso fosse necessário restringir o ângulo de rolamento da aeronave a uma determinada faixa de valores. Adicionalmente, pode-se utilizar uma relação de igualdade também para impor um ângulo fixo em uma determinada etapa da trajetória. Por outro lado, não há uma forma trivial de se garantir tais restrições do movimento usando quatérnios ou matrizes de rotação. Uma maneira aproximada para isto seria utilizar as relações apresentadas na Seção 3.1.3.4, a qual fornece

relações entre os ângulos de Euler, os parâmetros de Euler-Rodrigues e os elementos da matriz de cossenos diretores. Porém, uma vez que estas projeções não são biunívocas, tais relações são limitadas e devem ser utilizadas com diligência. Um exemplo deste tipo de abordagem é mostrado na Seção 6.3.1.

4.4 Comentários

É importante ressaltar aqui que, dado um problema físico, não é trivial a maneira em como ele deve ser formulado para que se tenha uma representação matemática coerente. Ou seja, dependendo da escolha do modelo de parametrização da atitude e a forma como seus vínculos de contorno são colocados, pode se ter um problema matemático que não representa o problema físico em avaliação, i.e., tem-se um problema mal posto. Em outras palavras, o que se destaca nas discussões apresentadas nesta seção é o fato de que estas questões precedem o problema de programação utilizado na solução da trajetória, uma vez que elas afetam a própria formulação do problema.

Observa-se que, apesar de serem de simples interpretação, os ângulos de Euler apresentam certos desafios em sua utilização na formulação e solução de problemas de planejamento de trajetória. Isto porque definir as condições de contorno neste tipo de representação não é uma tarefa trivial, trazendo limitações indesejadas para o problema. Mesmo na formulação proposta na Eq.(4.7) é necessário que se realize a escolha de algumas das possíveis condições de contorno do problema. Mas a rigor, não se sabe de antemão quais valores devem ser usados. Assim, a escolha dos vínculos de contorno nesta forma de representação é definida, de certo modo, intuitivamente, limitando o espaço de soluções. Logo, não se tem uma representação do problema de forma universal. No entanto, as limitações desta forma de parametrização podem ser aproveitadas para certas situações especiais, conforme mostrado na Seção 4.3.

Os quatérnios são comumente vistos como uma alternativa para se evitar as singularidades presentes nos ângulos de Euler e por isso são tipicamente adotados na representação da atitude em uma série de problemas de mecânica do voo. Apesar disso, eles apresentam algumas limitações quando vistos dentro do contexto de otimização de trajetória que não estão apresentados na bibliografia revisada. Embora em um menor grau do que quando comparado aos ângulos de Euler, o fato de possuir uma dupla cobertura de $SO(3)$ faz com que certos cuidados sejam necessários na utilização destes parâmetros. Ou seja, na aplicação desta técnica de parametrização é importante que os vínculos de contorno do problema sejam tratados

adequadamente. A maneira de formulação do problema sugerida na Eq.(4.7), pode ser aplicada para que se tenha uma representação de todos quatérnios possíveis para os contornos da trajetória.

Por fim, observa-se que a matriz de rotação, apesar de pouco utilizada, mostra-se como uma forma mais simples na representação da atitude sob o ponto de vista da maneira de se incluir as condições de contorno. Pode-se observar esta técnica de parametrização como um atalho para contornar as dificuldades de formulação dos ângulos de Euler e dos quatérnios.

A influência das diferentes características comentadas nesta seção sobre o problema de otimização de trajetórias será abordada detalhadamente nos estudos de caso mostrados no Capítulo 6.

5 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO E O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Dentre as técnicas para a solução de problemas de controle ótimo e, por consequência, de problemas de planejamento de trajetória, pode-se evidenciar duas frentes que são: os métodos indiretos e os métodos diretos. Os métodos indiretos têm como fundamento a teoria do cálculo variacional, onde as condições necessárias de otimalidade obtidas devem ser cumpridas de forma a se chegar à solução ótima do problema (BRYSON e HO, 1975). Isto se dá geralmente através da formulação de um problema de valor de contorno, que consiste em resolver um conjunto de equações diferenciais relacionadas às variáveis de estado e às variáveis adjuntas (RAO, 2010). Este problema é geralmente discretizado e solucionado numericamente através de um método de solução apropriado como, por exemplo, o método de único tiro ou o método de múltiplos tiros (CARVALHO, 1989). Uma vez que os métodos indiretos fazem uso explícito do Princípio de Mínimo de Pontryagin, a solução obtida apresenta uma trajetória correspondente a um ponto extremo do índice de mérito escolhido (ZAVOLI, 2013).

Nos métodos diretos, o problema de otimização infinito-dimensional é transformado em um problema finito-dimensional através de um processo de discretização da trajetória, o que se denota por transcrição. Nos últimos anos foram desenvolvidas diferentes maneiras de se realizar a transcrição do problema. A trajetória parametrizada é colocada em um problema de programação matemática não linear (KELLY, 2017). Nela a dinâmica do sistema é obedecida através de inclusão de restrições de igualdade e o índice de mérito do problema é minimizado diretamente durante o processo de otimização.

Simplificadamente, do ponto de vista da solução numérica, pode-se dizer que a diferença fundamental entre os métodos está relacionada à sequência de otimização e transcrição. Nos métodos indiretos primeiramente se otimiza (aplicação das condições de otimalidade) e então se discretiza (para solução do problema de valor de contorno), enquanto que nos métodos diretos, primeiramente se discretiza e então se otimiza. O foco deste trabalho está relacionado aos métodos diretos abordados através do ponto de vista do método de elementos finitos. Este capítulo apresenta alguns conceitos fundamentais no que diz respeito a utilização dos métodos diretos na solução dos problemas de otimização de trajetória, destacando o método de elementos finitos.

5.1 Métodos Diretos para a Solução de Problemas de Otimização de Trajetória

Nos métodos diretos, o estado e/ou o controle do problema de controle ótimo são aproximados de uma maneira apropriada para minimização da função objetivo, satisfazendo os vínculos de contorno e os vínculos dinâmicos. Tal aproximação pode ser realizada na forma (PINTO, 1982): i) clássica, onde se trabalha diretamente no espaço de funções; ii) na forma sub-ótima¹⁹, onde o controle ou o estado são parametrizados (i.e., parametrização do controle ou estado); ou iii) na forma completamente parametrizada (i.e., parametrização do controle e do estado), onde tanto o controle quanto o estado são parametrizados. Estas últimas metodologias têm sido amplamente empregadas e têm como característica principal a transformação de um problema infinito-dimensional em um problema finito-dimensional através de um processo chamado transcrição. Na transcrição o problema de controle ótimo é convertido em um problema de programação não-linear, sendo que os processos de transcrição mais comumente encontrados nas bibliografias recentes são: único tiro, múltiplos tiros e colocação (BETTS, 2010).

Uma qualidade dos métodos diretos diz respeito ao seu amplo domínio de convergência, o qual reduz significativamente a dificuldade de inicialização das variáveis do problema. Além disso ele possui um tratamento eficiente das restrições dos estados, que geralmente são aplicadas para problemas práticos. Tais características têm tornado as técnicas diretas um importante objeto de estudo para diversos pesquisadores (ANDERSSON, GILLIS, *et al.*, 2018) (ADAMAWI, HAGER e RAO, 2019) (BECERRA e GALVÃO, 2010).

Devido ao processo de transcrição, observa-se que nos métodos diretos os problemas de programação matemática passam a ter grande relevância para a obtenção de uma solução adequada. Esta tem sido uma importante característica para a sua popularização, pois diversos progressos foram feitos nos últimos anos para solução de problemas de programação não-linear esparsos, permitindo a utilização destes métodos em problemas de controle ótimo com um grande número de variáveis sob um razoável custo computacional (BECERRA, 2013). Assim, as discretizações podem gerar malhas altamente refinadas de forma a aumentar a precisão dos resultados obtidos.

¹⁹ Nestes métodos restringe-se a função de controle a uma certa classe. De acordo com Pinto (1982), os procedimentos sub-ótimos podem ser considerados uma classe especial de problemas por possuírem peculiaridades próprias. Porque, em muitas situações, a restrição à forma da restrição de controle é feita pelas próprias circunstâncias do projeto, como por exemplo, naquelas em que o sistema de controle usado não tem a capacidade de reproduzir a lei ótima de controle de uma maneira satisfatória. Para mais detalhes, sugere-se a leitura de Ceballos (1979) e Hull e Edgeman (1975).

O sucesso do problema de otimização para solução de um problema utilizando o método direto irá depender do esquema de discretização (aproximação das variáveis) adotado. Alguns dos processos comumente utilizados são apresentados:

- Único Tiro: são geralmente utilizados para a parametrização das variáveis de controle. Para um dado conjunto discretizado do controle, a solução das equações iniciais para um dado estado inicial pode ser obtida a partir da integração destas equações de uma só vez, i.e., do tempo inicial ao final. Uma das classes amplamente utilizadas são os esquemas de Runge-Kutta. Após a propagação das equações diferenciais (tiro), avalia-se o erro nas condições de fronteira. Um algoritmo de programação matemática não-linear é utilizado para ajuste das variáveis de parametrização do controle até que as condições de fronteira sejam satisfeitas. Uma desvantagem deste método é a dependência do ponto final da função em todas as variáveis de decisão, o que pode gerar instabilidades na solução numérica (BETTS, 2010, p. 93).
- Múltiplos Tiros: Este método foi desenvolvido com o objetivo de reduzir as instabilidades observadas no método de único tiro. Para isso, a integração não ocorre do tempo inicial ao final de uma só vez, mas em múltiplos intervalos. De forma a garantir a continuidade dos estados, condições de fronteira, conhecidas como desvio/resíduo, são adicionadas ao fim de cada intervalo para garantir que os valores coincidam, o que torna o problema maior, porém com uma menor sensibilidade ao longo da solução (RAO, 2010).
- Colocação: No método de colocação direta tanto as variáveis de controle quanto as de estado são aproximadas por funções com um formato específico. A colocação direta é comumente apresentada em duas formas: colocação local e colocação global. Na colocação local, o intervalo de tempo é dividido em intervalos nos quais as variáveis de controle e estado são aproximadas. A terminologia “Colocação Local” é geralmente utilizada neste contexto para a aplicação de esquemas de baixa ordem. A colocação global, também conhecida como método pseudoespectral (ou métodos ortogonais), é uma técnica onde tenta-se aproximar as variáveis discretizadas por um único polinômio global nos intervalos da malha. Uma das dificuldades de lidar com esquemas de integração de alta ordem é a maior necessidade de armazenamento de dados e de poder computacional.

O método de único tiro é geralmente utilizado em problemas de pequeno e médio porte com poucas restrições. Este método foi muito popular ao longo dos anos devido ao pouco

desenvolvimento que se tinha sobre o cálculo matricial esparso (BETTS, 2010, p. 134). Nos métodos de colocação, devido ao acréscimo da representação discreta dos estados, requer-se um maior número de avaliações de funções para se estimar a matriz de gradiente e maior espaço para armazenamento da matriz Hessiana. Tais fatores somados a problemas de controle ótimo de larga escala, onde há um grande número de variáveis a serem otimizadas, fez com que estes métodos fossem pouco competitivos em relação aos métodos de tiro nos últimos anos (BOHME e FRANK, 2017). No entanto, houve um grande desenvolvimento nos problemas de estruturas com matrizes esparsas, uma vez observado que muitas variáveis do vetor de otimização são independentes umas das outras. Isto reduziu intensamente o número de funções a serem avaliadas para o cálculo do gradiente. Combinando a solução de problemas esparsos de larga escala com a facilidade de se lidar com as restrições de estado, o método de colocação tem sido o mais utilizado para a solução de problemas gerais de controle ótimo (RAO, 2010).

A partir da bibliografia consultada, observa-se que apesar dos métodos de colocação serem amplamente utilizados, não se encontram discussões que justifiquem a partir de onde este método surgiu, i.e., seus fundamentos e alicerces matemáticos originais não estão disponíveis de uma maneira clara. De acordo com Arscher e Petzold (1998) “colocação é uma ideia que remete à análise numérica, onde a ideia básica é a de escolher uma função com uma forma simples (geralmente um polinômio) e um conjunto de pontos de colocação, e fazer com que a função satisfaça o problema dado nestes pontos”. Pode-se afirmar que o método de colocação pertence a um grupo mais extenso de problemas, sendo ele um caso singular. Assim, como uma das contribuições propostas neste trabalho, é apresentada nesta seção uma visão dos métodos diretos de parametrização completa dentro de uma perspectiva mais ampla através do Método de Elementos Finitos, que engloba, inclusive, a visão de colocação.

A FIGURA 5.1 apresenta os métodos comumente utilizados para a solução de problemas de controle ótimo de forma direta, destacando a parte que pode ser englobada sob a perspectiva do Método de Elementos Finitos.

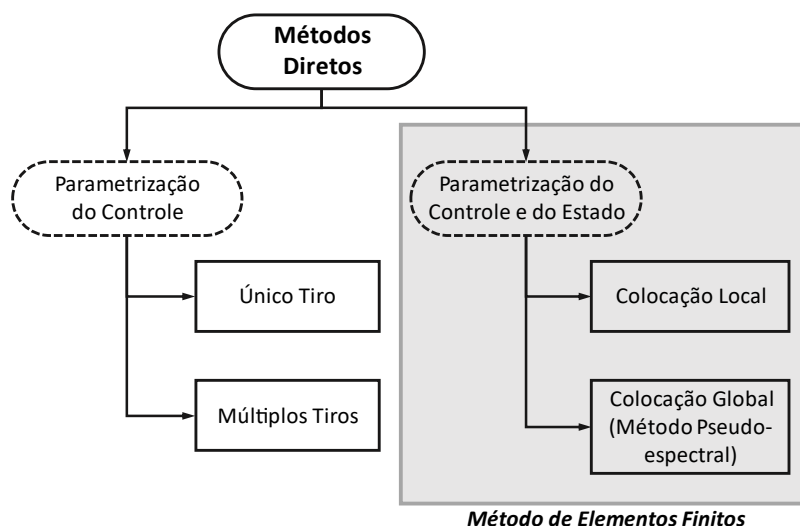


FIGURA 5.1 - Tipos de abordagem por métodos diretos.

5.2 Formulação do Problema pelo Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica desenvolvida para a solução de equações diferenciais parciais em problemas de valor de contorno. Esta técnica tem sido amplamente estudada e aplicada nos últimos anos na solução de problemas de engenharia, como na solução de análise estrutural (LOGAN, 2011), transferência de calor e massa (INCROPERA e DEWITT, 2011), mecânica dos fluidos (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e P.NITHIARASU, 2014), etc. Um dos primeiros trabalhos a destacar com ênfase à possibilidade de utilização deste método na solução de problemas de controle ótimo é aquele apresentado por Nakamichi e Washizu (1978), futuramente rediscutido e apresentado de forma mais consistente por Pinto (1982). Estes trabalhos mostram que o método de elementos finitos é bastante promissor na solução de problemas de controle ótimo uma vez que a estrutura obtida possui bastante flexibilidade quanto às manipulações feitas, além da maior facilidade em se lidar com os vínculos de contorno do problema. No entanto, as discussões sobre esta formulação foram abrandadas nos últimos anos, não tendo sido mais realizadas de forma frequente em trabalhos posteriores. Por isso, estes conceitos serão resgatados aqui.

De forma sintética, pode-se entender que no MEF a trajetória é subdividida em partes menores, denominadas elementos. Este procedimento é chamado de discretização e leva à criação de uma malha, a qual é interpretada como um domínio para a solução numérica com um número finito de pontos, onde faz-se uma aproximação de uma função sobre cada elemento deste domínio. Para o problema discutido neste trabalho, as variáveis de estado e de controle são postas em um espaço de funções de base conhecida e linearmente independentes onde há

coeficientes a serem determinados. A fim de garantir que estas aproximações obedeam aos vínculos dinâmicos estabelecidos, utiliza-se de técnicas de resíduos ponderados para transformar estas equações em novas expressões, as quais não mais dependem do tempo, mas de parâmetros de ajuste. Tais parâmetros são incluídos no vetor de decisão do problema de otimização a ser resolvido para obtenção da trajetória ótima. Cada um destes passos será detalhado ao longo desta seção.

Encontram-se poucos trabalhos com uma discussão específica sobre a aplicação do MEF na solução de problemas de controle ótimo nos últimos anos. Dentre aqueles com maior relevância, pode-se citar Vasile (2010), o qual faz uma discussão mais restrita da aplicação do método à utilização de uma base espectral na formulação dos elementos. Grande parte dos trabalhos publicados nos últimos anos se voltaram para a solução dos problemas de controle ótimo utilizando os denominados métodos de colocação local, como podemos ver em Betts (2010), Hargraves e Paris (1987), Geiger (2009), etc.; ou os métodos pseudoespectrais, como mostrado por: Ross e Karpenko (2012), Becerra e Galvão (2010), Darby, Hager e Rao (2010), Pietz (2003), etc.

Assim, será mostrado que o MEF é uma forma de tratamento do problema mais generalizada, que abrange, inclusive, os métodos de colocação local e métodos pseudoespectrais. De fato, tais métodos podem ser interpretados como casos particulares da aplicação do MEF. Desta maneira, mostra-se que a técnica aplicada neste trabalho pode ser utilizada para o desenvolvimento de uma estrutura unificada para os métodos diretos com parametrização do estado e do controle (parametrização completa).

Embora os problemas de controle ótimo sejam apresentados na forma (2.1) a (2.9), esta nem sempre é adequada para o tratamento do problema sob a ótica do MEF. Como apresentado nesta seção, é interessante que neste método o instante final de tempo seja incluído como um dos parâmetros e que o intervalo de tempo total seja fixo. Desta maneira, faz-se a normalização do tempo pela definição de uma nova variável independente, dada por:

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0}. \quad (5.1)$$

Pode se observar que:

$$\begin{aligned} \tau &= 0 & \text{para } t &= t_0 \\ \tau &= 1 & \text{para } t &= t_f \end{aligned} \quad (5.2)$$

Diferenciando a Eq.(5.1), tem-se:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t_f - t_0}. \quad (5.3)$$

Assumindo que $\mathbf{z}(t)$ seja uma função arbitrária de t , pode-se notar que:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{z}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}. \quad (5.4)$$

Assim, de acordo com a Eq.(5.3):

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \frac{1}{t_f - t_0} \frac{d\mathbf{z}(\tau)}{d\tau}. \quad (5.5)$$

Derivando-se sucessivamente a Eq.(5.5), observa-se que a n -ésima derivada da função $\mathbf{z}(t)$ é dada por:

$$\frac{d^n \mathbf{z}(t)}{dt^n} = \left[\frac{1}{t_f - t_0} \right]^n \frac{d^n \mathbf{z}(\tau)}{d\tau^n}. \quad (5.6)$$

Desta maneira, para aplicações do MEF, o problema (2.1) a (2.9) pode ser reinterpretado fixando os parâmetros estáticos $\mathbf{p}$ e utilizando como base a nova variável τ . O novo problema consiste em:

Minimizar

$$J = \mathcal{M}^*[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1), \dot{\mathbf{x}}(0), \dot{\mathbf{u}}(0), \dot{\mathbf{x}}(1), \dot{\mathbf{u}}(1), \dots, t_0, t_f] \\ + \int_0^1 \mathcal{L}^*[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\mathbf{u}}(\tau), \dots, t_0, t_f, \tau] d\tau, \quad (5.7a)$$

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\mathbf{F}^*[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\mathbf{u}}(\tau), \dots, t_0, t_f, \tau] = 0, \quad (5.7b)$$

às restrições da trajetória

$$\boldsymbol{\varphi}^*[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] \leq 0, \quad (5.7c)$$

e aos vínculos de contorno

$$\boldsymbol{\psi}^*[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1), \dot{\mathbf{x}}(0), \dot{\mathbf{u}}(0), \dot{\mathbf{x}}(1), \dot{\mathbf{u}}(1), \dots, t_0, t_f] = 0, \quad (5.7d)$$

onde, $\mathcal{M}^*$ e $\mathcal{L}^*$ são funções que representam as parcelas de contorno e dinâmica do índice de desempenho do problema, respectivamente; $\mathbf{F}^*$ é um vetor de funções dinâmicas com n componentes; $\boldsymbol{\varphi}^*$ é um vetor de funções de dimensão n_φ para restrição dos estado e controle ao longo da trajetória; $\boldsymbol{\psi}^*$ é um vetor de funções de dimensão n_ψ para as condições de contorno; $\mathbf{x}$ é o vetor de variáveis de estado de dimensão n ; $\mathbf{u}$ é o vetor de variáveis de controle de dimensão m ; t_0 é um parâmetro que corresponde ao instante inicial; e t_f é um parâmetro que corresponde ao instante final. Note que os vínculos dinâmicos $\mathbf{F}^*$ representam tantos aqueles diferenciais $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ quanto os algébricos $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$.

Para a aplicação do MEF, o intervalo de tempo é dividido em N elementos (ou sub-intervalos), onde para cada elemento destes as variáveis dinâmicas, i.e., estado e controle, são expandidas em um espaço de funções conhecidas a menos de certos coeficientes que precisarão ser ajustados. Além disso, as extremidades de cada elemento são denominadas “junções” ou “nós”. Assim, uma determinada trajetória terá N elementos e $N + 1$ nós que são numerados de acordo com a FIGURA 5.2.

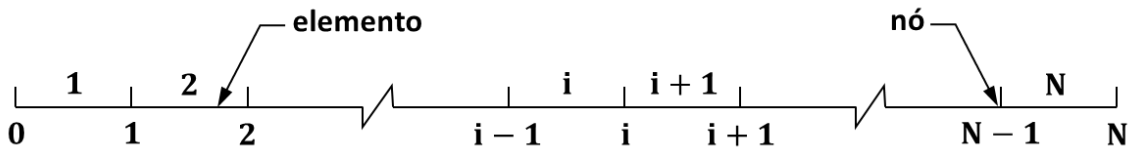


FIGURA 5.2 - Representação da Malha
Adaptado de Pinto (1982)

Desta maneira, o valor de τ correspondente ao i -ésimo nó é dado por τ_i . Assim, o problema (5.7) pode ser reescrito como:

Minimizar

$$J = \mathcal{M}^*[\mathbf{x}_1(0), \mathbf{u}_1(0), \mathbf{x}_N(1), \mathbf{u}_N(1), \dot{\mathbf{x}}_1(0), \dot{\mathbf{u}}_1(0), \dot{\mathbf{x}}_N(1), \dot{\mathbf{u}}_N(1), \dots, t_0, t_f] + \sum_{i=1}^N \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{L}_i^*[\mathbf{x}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau), \dot{\mathbf{x}}_i(\tau), \dot{\mathbf{u}}_i(\tau), \dots, t_0, t_f, \tau] d\tau, \quad (5.8a)$$

com vínculos dinâmicos

$$\mathbf{F}_i^*[\mathbf{x}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau), \dot{\mathbf{x}}_i(\tau), \dot{\mathbf{u}}_i(\tau), \dots, t_0, t_f, \tau] = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.8b)$$

com as restrições de trajetória

$$\boldsymbol{\varphi}^*[\mathbf{x}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau), \tau] \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.8c)$$

e com os vínculos de contorno

$$\boldsymbol{\psi}^*[\mathbf{x}_1(0), \mathbf{u}_1(0), \mathbf{x}_N(1), \mathbf{u}_N(1), \dot{\mathbf{x}}_1(0), \dot{\mathbf{u}}_1(0), \dot{\mathbf{x}}_N(1), \dot{\mathbf{u}}_N(1), \dots, t_0, t_f] = 0, \quad (5.8d)$$

onde os índices subscritos nas variáveis de estado e controle indicam o elemento considerado.

A fim de facilitar o algebrismo envolvido na formulação do MEF é interessante criar uma padronização dos elementos de tal forma que estes correspondam a um intervalo padronizado. Para este processo, utilizam-se os elementos normalizados e aplicam-se translações nos intervalos de forma que seus extremos correspondam aos valores desejados, obtendo-se tempos totalmente normalizados. Este procedimento é bastante útil, pois na aproximação dos estados e controles por polinômios, intervalos como $[0, 1]$, $[-1/2, 1/2]$ e $[-1, 1]$ são comumente utilizados.

Considere um intervalo padrão definido por:

$$[\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1] \quad (5.9)$$

onde $\bar{\xi}_0$ representa o extremo inferior do intervalo e $\bar{\xi}_1$ o extremo superior. Assim, a padronização desejada é obtida na forma:

$$\xi_i = \frac{(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0)\tau - \tau_{i-1}\bar{\xi}_1 + \tau_i\bar{\xi}_0}{\tau_i - \tau_{i-1}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.10)$$

onde $\tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i$. É importante notar aqui que, de acordo com a definição dada pela Eq.(5.10), os elementos não precisam necessariamente possuir intervalos iguais. Além disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \bar{\xi}_0 & \text{para } \tau &= \tau_{i-1} \\ \xi_i &= \bar{\xi}_1 & \text{para } \tau &= \tau_i \end{aligned} \quad (5.11)$$

Desta maneira, todos elementos estarão representados na forma totalmente normalizada caso sejam descritos em termo de ξ_i . Derivando a equação (5.10), tem-se:

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = \left(\frac{\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.12)$$

Logo, a seguinte relação pode ser observada:

$$\frac{d^n \mathbf{z}}{d\tau^n} = \frac{d^n \mathbf{z}}{d\xi_i^n} \left[\frac{\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right]^n, \quad (5.13)$$

onde $\mathbf{z}$, assim como apresentado anteriormente, representa uma função genérica, podendo estender às variáveis de estado e controle; e n indica a n -ésima derivada desta função.

Desta maneira, utilizando as variáveis no intervalo de tempos totalmente normalizados, o problema de controle ótimo sob a ótica do MEF, pode ser reescrito na forma:

Minimizar

$$J = \mathcal{M}[\mathbf{x}_1(\bar{\xi}_0), \mathbf{u}_1(\bar{\xi}_0), \mathbf{x}_N(\bar{\xi}_1), \mathbf{u}_N(\bar{\xi}_1), \dot{\mathbf{x}}_1(\bar{\xi}_0), \dot{\mathbf{u}}_1(\bar{\xi}_0), \dot{\mathbf{x}}_N(\bar{\xi}_1), \dot{\mathbf{u}}_N(\bar{\xi}_1), \dots, t_0, t_f] \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}_1} \mathcal{L}_i[\mathbf{x}_i(\xi_i), \mathbf{u}_i(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}_i(\xi_i), \dot{\mathbf{u}}_i(\xi_i), \dots, t_0, t_f, \xi_i] d\xi_i \quad (5.14a)$$

Submetido aos vínculos dinâmicos:

$$\mathbf{F}_i[\mathbf{x}_i(\xi_i), \mathbf{u}_i(\xi_i), \dot{\mathbf{x}}_i(\xi_i), \dot{\mathbf{u}}_i(\xi_i), \dots, t_0, t_f, \xi_i] = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.14b)$$

Com as restrições de trajetória:

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}_i(\xi_i), \mathbf{u}_i(\xi_i), \xi_i] \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.14c)$$

E com os vínculos de contorno:

$$\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}_1(\bar{\xi}_0), \mathbf{u}_1(\bar{\xi}_0), \mathbf{x}_N(\bar{\xi}_1), \mathbf{u}_N(\bar{\xi}_1), \dot{\mathbf{x}}_1(\bar{\xi}_0), \dot{\mathbf{u}}_1(\bar{\xi}_0), \dot{\mathbf{x}}_N(\bar{\xi}_1), \dot{\mathbf{u}}_N(\bar{\xi}_1), \dots, t_0, t_f] = 0 \quad (5.14d)$$

Onde:

$$\xi_i \in [\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1] \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.14e)$$

5.3 Aproximação das Funções de Estado e Controle

Como já discutido anteriormente, para aplicação do MEF as variáveis do problema são aproximadas por funções definidas localmente em cada elemento. Seja cada componente do estado definida por $\hat{x}_i^{(k)}$, onde o índice sobrescrito especifica que esta representa a k -ésima componente do sistema, e o índice subscrito indica o elemento em questão. O acento circunflexo indica que a função definida é uma aproximação da função exata. Dessa forma, assume-se que $\hat{x}_i^{(k)}$ pode ser representado por:

$$\hat{x}_i^{(k)}(\xi_i) = \sum_{j=1}^{n_E} E_j^{(k)}(\xi_i) X_{i,j}^{(k)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.15)$$

onde $E_j^{(k)}(\xi_i)$ é uma função de base para a variável $\hat{x}^{(k)}$; $X_{ij}^{(k)}$ é um coeficiente relacionado à função $E_j^{(k)}(\xi_i)$ no i -ésimo elemento; e n_E indica o número de funções utilizadas para a aproximação de $\hat{x}^{(k)}$.

As funções $E_j^{(k)}(\xi_i)$ são denotadas funções de base. Elas são conhecidas e escolhidas de forma que sejam linearmente independentes, podendo ser ortogonais ou ortonormais, formando uma base no subespaço de funções. Tais funções podem ser escolhidas como polinomiais, exponenciais, trigonométricas, etc., de forma que esta seja capaz de aproximar de forma satisfatória a função exata local. Durante a escolha destas funções, deve-se levar em consideração a facilidade de se impor a continuidade da trajetória entre elementos vizinhos. Na formulação apresentada pela Eq.(5.15), as funções de base têm a mesma forma em todos elementos da trajetória, e apenas os coeficientes mudam, mas pode-se fazer n_E como função do elemento analisado.

A representação na forma (5.15), pode ser vista também em uma notação vetorial, como segue:

$$\hat{x}_i^{(k)}(\xi_i) = \mathbf{E}^{(k)}(\xi_i) \mathbf{X}_i^{(k)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.16)$$

onde,

$$\mathbf{E}^{(k)}(\xi_i) = \{E_1^{(k)}(\xi_i); E_2^{(k)}(\xi_i); \dots; E_{n_E}^{(k)}(\xi_i)\}, \quad (5.17)$$

e

$$\mathbf{X}_i^{(k)} = \{X_{i,1}^{(k)}; X_{i,2}^{(k)}; \dots; X_{i,n_E}^{(k)}\}^T. \quad (5.18)$$

Aplicando esta aproximação para cada componente do estado, serão obtidas n_x expressões. De forma similar, pode-se obter uma aproximação para as variáveis de controle do problema, dada por:

$$\hat{u}_i^{(k)}(\xi_i) = \sum_{j=1}^{n_C} C_j^{(k)}(\xi_i) U_{ij}^{(k)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.19)$$

onde $C_j^{(k)}(\xi_i)$ é uma função de base para a variável $\hat{u}^{(k)}$; $U_{ij}^{(k)}$ é um coeficiente relacionado à função $C_j^{(k)}(\xi_i)$ no i -ésimo elemento; e n_C indica o número de funções utilizadas para a aproximação de $\hat{u}^{(k)}$.

Semelhantemente, esta aproximação pode também ser representada na forma vetorial:

$$\hat{u}_i^{(k)}(\xi_i) = \mathbf{C}^{(k)}(\xi_i) \mathbf{U}_i^{(k)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.20)$$

onde,

$$\mathbf{C}^{(k)}(\xi_i) = \{C_1^{(k)}(\xi_i); C_2^{(k)}(\xi_i); \dots; C_{n_c}^{(k)}(\xi_i)\} \quad (5.21)$$

e

$$\mathbf{U}_i^{(k)} = \{U_{i,1}^{(k)}; U_{i,2}^{(k)}; \dots; U_{i,n_c}^{(k)}\}^T \quad (5.22)$$

Dadas estas definições, o problema de controle ótimo apresentado por (5.14) pode ser reinterpretado, uma vez que $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{U}_i$ e t_f não dependem de ξ_i ; e $E(\xi_i)$ e $C(\xi_i)$ são dadas por funções conhecidas. Desta maneira, as equações diferenciais podem ser solucionadas e as expressões algébrico diferenciais podem ser representadas por equações algébricas. Uma vez que apenas os parâmetros $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{U}_i$ e t_f são incógnitas do problema, o mesmo pode ser reformulado como:

Minimizar

$$J = \mathcal{M}'[\mathbf{X}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, t_f] + \sum_{i=1}^N \mathcal{L}'_i[\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i, t_0, t_f], \quad (5.23a)$$

sujeito às restrições dinâmicas:

$$\boldsymbol{\zeta}_i[\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i, t_0, t_f, \xi_i] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.23b)$$

com as restrições de trajetória:

$$\boldsymbol{\varphi}'[\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i, \xi_i] \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.23c)$$

e com os vínculos de contorno:

$$\boldsymbol{\psi}'[\mathbf{X}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, t_0, t_f] = 0, \quad (5.23d)$$

onde $\mathcal{M}'$, $\mathcal{L}'_i$, $\boldsymbol{\zeta}_i$, $\boldsymbol{\varphi}'$ e $\boldsymbol{\psi}'$ são funções algébricas de seus argumentos. Através deste procedimento, entende-se que o problema de controle ótimo é “transcrito” em um problema de programação matemática.

As funções $\boldsymbol{\zeta}_i$ são chamadas de resíduos e representam o quanto as restrições dinâmicas estão sendo desrespeitadas, i.e., elas medem o erro das restrições dinâmicas devido à forma de representação das variáveis da trajetória. Elas têm grande importância na solução do problema, pois devido às aproximações feitas, o resíduo não será necessariamente nulo ao longo de todo

elemento. Isto irá depender da maneira como tais resíduos serão considerados durante a solução do problema. Tal discussão será considerada ao longo deste trabalho.

Para o caso de uma abordagem multi-fase, pode-se ainda expandir para:

Minimizar

$$J = \sum_{s=1}^S \left\{ \mathcal{M}^{(s)}[\mathbf{x}_1^{(s)}, \mathbf{u}_1^{(s)}, \mathbf{x}_{N^{(s)}}^{(s)}, \mathbf{u}_{N^{(s)}}^{(s)}] + \sum_{i=1}^{N^{(s)}} \mathcal{L}_i'^{(s)}[\mathbf{x}_i^{(s)}, \mathbf{u}_i^{(s)}, t_0^{(s)}, t_f^{(s)}] \right\}, \quad (5.24a)$$

sujeito às restrições dinâmicas:

$$\boldsymbol{\zeta}_i^{(s)}[\mathbf{x}_i^{(s)}, \mathbf{u}_i^{(s)}, t_0^{(s)}, t_f^{(s)}, \xi_i] = 0 \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, S \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, N^{(s)}, \quad (5.24b)$$

com as restrições de trajetória:

$$\boldsymbol{\varphi}'^{(s)}[\mathbf{x}_i^{(s)}, \mathbf{u}_i^{(s)}, \xi_i] \leq 0 \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, S \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, N^{(s)}, \quad (5.24c)$$

com os vínculos de contorno:

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)}[\mathbf{x}_1^{(s)}, \mathbf{u}_1^{(s)}, \mathbf{x}_{N^{(s)}}^{(s)}, \mathbf{u}_{N^{(s)}}^{(s)}, t_0^{(s)}, t_f^{(s)}] = 0 \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, S, \quad (5.24d)$$

e com os vínculos entre os segmentos:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^{(s)}[\mathbf{x}_{N^{(s)}}^{(s)}, \mathbf{u}_{N^{(s)}}^{(s)}, t_f^{(s)}, \mathbf{x}_1^{(s+1)}, \mathbf{u}_1^{(s+1)}, t_0^{(s+1)}] \leq \mathbf{0} \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, S - 1. \quad (5.24e)$$

Nesta formulação os valores de $t_f^{(s)}$ podem ser descritos em uma porcentagem do tempo final total, uma vez que este valor é também um parâmetro a ser determinado. Pode-se fazer também a relação entre fases do tipo $t_f^{(s)} = t_0^{(s+1)}$. Os vetores de estado e controle têm dimensões próprias, não necessariamente iguais, nos segmentos distintos. Além disso, este tratamento do problema permite a utilização de diferentes dinâmicas em cada fase, o que pode ser utilizado na melhoria da análise em um determinado intervalo, utilizando o modelo mais adequado em cada etapa da trajetória. A vantagem desta característica fica clara, por exemplo, na trajetória de aeronaves onde cada etapa do voo pretende-se utilizar um modelo dinâmico mais apropriado. Esta mesma filosofia das restrições dinâmicas se repete nas restrições de trajetória, nas restrições de contorno e no funcional de desempenho, permitindo a análise de uma maior gama de problemas.

Outra aplicação importante da trajetória fracionada é na análise de problemas com quinas. Uma vez que o tempo em cada segmento é tido como um parâmetro de otimização, as restrições que vinculam cada fração da trajetória podem ser flexibilizadas a fim de detectar as regiões onde as quinas ocorrem. Para isso, deve-se estimar a priori o número de quinas prováveis no problema, e formulá-lo com um número de segmentos compatível. Uma observação importante é que no caso da não existência de quinas, as mesmas serão degeneradas e a solução apresentada será semelhante àquela que seria obtida em uma análise de fase única.

5.4 Método de Resíduos Ponderados

O primeiro passo para a aplicação do MEF na solução de problemas de controle ótimo é definir uma aproximação dimensional para todas as trajetórias variáveis desconhecidas. Em seguida, deve-se fazer com que as restrições do sistema dinâmico (composto por um conjunto de equações diferenciais-algébricas) sejam transformadas em restrições puramente algébricas, que neste caso é realizado pelo Método de Resíduos Ponderados (MRP). Tal técnica também foi pouco discutida dentro do contexto do controle ótimo nos últimos anos, tendo sido citada em poucos trabalhos recentes, como por exemplo em Singh (2010). Assim, apresenta-se nesta subseção seus fundamentos e qual o seu papel na solução do problema de controle ótimo pelo MEF.

Este método consiste em uma técnica utilizada para aproximar a solução de equações diferenciais e será aplicado como ferramenta para solução de problemas de controle ótimo pelo MEF. Para isso, assume-se que a solução é aproximada por uma combinação linear de funções, na forma:

$$\hat{z}(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t) \alpha_j , \quad (5.25)$$

onde $\phi_j(t)$ são funções de base conhecidas e pré-selecionadas, podendo ser polinômios, funções trigonométricas, etc, como por exemplo,

$$\phi_j(t) = t^{j-1} , \quad \phi_j(t) = \sin(j\pi t) ,$$

e α_j são coeficientes desconhecidos e a determinar a partir da solução de um sistema de equações algébricas obtidas pela aplicação do método.

Assim, para um problema do tipo:

$$\dot{z}(t) - f(z(t), t) = 0 \quad z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (5.26)$$

uma vez que se força o comportamento analítico na solução, erros são introduzidos. Quando a solução aproximada (5.25) é introduzida no problema (5.26), esta não será identicamente nula. Logo, pode-se dizer que:

$$\dot{\hat{z}}(t) - f(\hat{z}(t), t) = R(t), \quad (5.27)$$

onde R representa o resíduo interno da equação no intervalo analisado.

Definindo-se a média ponderada de uma função f no intervalo $[a, b]$ por:

$$M_p = \frac{\int_a^b w(t) f(t) dt}{\int_a^b w(t) dt}, \quad (5.28)$$

onde $w(t)$ é denominada por função peso. Pode se dizer que anulando esta média, faz-se com que f seja forçada a zero de forma ponderada em todo domínio do tempo analisado. Logo, substituindo f por R , entende-se, matematicamente, que o produto interno entre as funções peso (mutualmente independentes e pré-selecionadas) e o resíduo no intervalo seja em média nulo, ou seja:

$$\langle w(t), R(\phi_j(t), \alpha_j, t) \rangle = \int_{t_0}^{t_f} w(t) R(\phi_j(t), \alpha_j) dt = 0. \quad (5.29)$$

Uma vez que as Eqs.(5.25) e (5.29) constituem um grupo de n_z equações e n_z incógnitas α_j , e, assumindo que este sistema seja teoricamente resolvível, pode-se utilizar deste método para a solução do problema (5.23), onde os vínculos dinâmicos estabelecidos podem ser tratados em expressões similares ao apresentado pela Eq.(5.29) no MEF. Os integrandos da Eq.(5.29) podem ser resolvidos, uma vez que eles são representados por funções aproximadas e conhecidas, por exceção de alguns coeficientes. Assim, neste processo de transcrição o problema deixa de depender das variáveis de integração ξ_i e passa a depender apenas de coeficientes a serem ajustados.

Uma observação importante está relacionada à escolha das funções de base a serem selecionadas. Para a apresentação clássica do método de elementos finitos, geralmente tais funções são tomadas como polinômios locais de baixa ordem, onde o domínio é dividido em um grande número de elementos. Uma outra abordagem seria a utilização de um único elemento

com a aplicação de um polinômio global de alta ordem, a qual é denotada geralmente por método espectral (CANUTO, QUARTERONI, *et al.*, 2006). Podemos notar aqui, no entanto, que tanto o chamado método de elementos finitos quanto o método espectral podem ser utilizados em uma aplicação conjunta, i.e., ponderando entre o refinamento da malha e a ordem dos polinômios escolhidos. Tal discussão será aprofundada no decorrer deste trabalho.

De forma semelhante, a escolha das funções peso também será determinante na definição dos diferentes casos de MRP, os quais são conhecidos geralmente por métodos separados em seus próprios termos. Podemos citar entre os mais comuns: Colocação, Subdomínios, Galerkin e Mínimos Quadrados.

5.4.1 Colocação

No Método de Colocação, a função peso é escolhida de tal forma que o resíduo seja igual a zero em pontos determinados do domínio. Desta forma, a função peso em cada elemento é escolhida como uma função de delta de Dirac δ , i.e.,

$$w_j = \delta(t - t_j) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = t_j \\ 0 & \text{se } t \neq t_j \end{cases} \quad (5.30)$$

onde os pontos $t_j \in [t_0, t_f]$ são fixos no intervalo e chamados por pontos de colocação. O número de pontos de colocação utilizados deve ser igual ao número de coeficientes α_j a determinar na definição da função de aproximação. Desta maneira, pela Eq. (5.29) tem-se:

$$\zeta_j = \int_{t_0}^{t_f} \delta(t - t_j) R(t) dt = R(t_j) = 0, \quad (5.31)$$

onde o termo do resíduo foi reescrito de uma forma mais simples apenas para facilitar o entendimento da notação utilizada. Logo, assim como notado por Hull (1997), no caso da colocação os resíduos serão anulados apenas em pontos determinados e não ao longo de todo elemento.

Especialmente para esta técnica, a escolha dos pontos onde o resíduo será anulado é de grande relevância no resultado obtido. Uma das formas comuns de se distribuir os pontos de colocação é fazer com que eles fiquem equidistantes ao longo do elemento. Outra maneira também comumente utilizada é posicionar os pontos de tal forma que eles sejam as raízes de um polinômio de Legendre de mesma ordem que o polinômio de aproximação (também conhecidos por pontos de Gauss), dado por:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (5.32)$$

definido no intervalo $t \in [-1, 1]$. Esta forma de distribuição é também conhecida como Colocação Ortogonal.

5.4.2 Subdomínios

No Método de Subdomínios, o domínio do elemento é subdividido em um determinado número de subdomínios que não sejam sobrepostos. O número de subdomínios a ser utilizado é igual ao número de coeficientes a determinar da função de aproximação. Assim, a função peso escolhida é igual a uma unidade sobre um subdomínio específico e igual a zero nas outras partes, ou seja:

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{se } t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.33)$$

Assim, pela Eq.(5.29) tem-se que:

$$\zeta_j = \int_{t_0}^{t_f} w_j R(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} R(t) dt = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z. \quad (5.34)$$

Esta técnica foi amplamente discutida no aspecto do controle ótimo por Pereira (1994).

5.4.3 Galerkin

No Método de Galerkin as funções peso são escolhidas como sendo as próprias funções de base daquela usada para aproximação, ou seja:

$$w_j = \phi_j(t) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z. \quad (5.35)$$

Os coeficientes a determinar na variável de aproximação são obtidos a partir da solução da integral dos resíduos ponderados, dadas por:

$$\zeta_j = \int_{t_0}^{t_f} w_j R(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \phi_j(t) R(t) dt = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z. \quad (5.36)$$

5.4.4 Mínimos Quadrados

No Método de Mínimos Quadrados as funções peso são escolhidas como a derivada do resíduo em relação aos coeficientes da função de aproximação α_j . Desta maneira, tem-se:

$$w_j = \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z. \quad (5.37)$$

Assim, a equação da integral dos resíduos ponderados terá a forma:

$$\zeta_j = \int_{t_0}^{t_f} w_j R(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} R(t) dt = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z. \quad (5.38)$$

A escolha desta função peso tem como motivação o fato desta equação poder ser reinterpretada como:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_{t_0}^{t_f} R^2(t) dt = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_z, \quad (5.39)$$

que implica no fato de que o resíduo médio quadrático atingiu um ponto extremo em relação aos coeficientes de ajuste α_j .

5.4.5 Comentários

As quatro técnicas expostas são amplamente utilizadas na solução numérica de equações diferenciais, como pode se observar em Solsvik e Jakobsen (2015) e Maharana e Nayak (2017). Nestes trabalhos pode se notar que não há um método de resíduos ponderados em especial que gerará sempre resultados com maior qualidade que os demais. Para diferentes tipos de situações cada método apresenta um tipo de comportamento em termos da qualidade da solução da equação diferencial. Ou seja, dependendo da estrutura da equação diferencial a ser solucionada pode haver um método de resíduo ponderado mais adequado do que outro no que diz respeito à solução do problema. Seguindo um mesmo raciocínio, o mesmo pode ser dito a respeito da utilização do método de resíduos ponderados na aproximação dos vínculos dinâmicos do problema de otimização de trajetória.

Como apresentado nas Eqs.(5.34), (5.36) e (5.38), nos métodos de Subdomínios, Galerkin e Mínimos Quadrados, dependendo da forma da equação diferencial em questão, será necessária a utilização de um método de quadratura para a obtenção do grupo de equações

algébricas do problema, o que pode aumentar a complexidade de implementação destes métodos quando comparados com as técnicas de colocação, as quais não exigem o cálculo de uma integral definida em nenhuma situação. Tais observações mostram algumas das razões que podem justificar o motivo do aumento da utilização do Método de Colocação nos últimos anos, uma vez que ele apresenta um tratamento algébrico e uma implementação mais simples. Além disso, pode-se observar que, com o refinamento da malha, a colocação (seja nos pontos de Gauss ou não) apresenta boa convergência em comparação com as demais técnicas (SOLSVIK e JAKOBSEN, 2013).

É importante notar, no entanto, que esta técnica tem sido relatada nos trabalhos de controle ótimo revisados como um método em si e não como uma forma de se aplicar o método de resíduos ponderados. Conforme foi apresentado, enxergar esta técnica sob a ótica do método de elementos finitos e dos resíduos ponderados, mostra que existem maneiras alternativas que poderiam ser utilizadas para obtenção das relações algébricas utilizadas para representação das restrições dinâmicas nos problemas de otimização de trajetória. Ou seja, a colocação não precisa ser vista como um método em si, mas apenas como uma das maneiras de se visualizar o problema, como é mostrado na Seção 5.6.

Apesar das diferentes formas de se abordar o método de resíduos ponderados, no decorrer deste trabalho é dado foco às técnicas de colocação devido às características comentadas. Sugere-se, no entanto, que em trabalhos futuros seja avaliada detalhadamente a influência de cada técnica na solução dos problemas de otimização de trajetória pelo MEF. Adicionalmente vale notar que, embora o método de resíduos ponderados tenha sido apresentado para solução de equações diferenciais, o tratamento por este método também pode ser usado para trabalhar equações algébricas, as quais eventualmente podem compor a descrição de um sistema dinâmico estudado. Neste caso, deve-se seguir a mesma filosofia empregada nesta seção.

5.5 Relação entre Estado e Controle

Observa-se que a fase de aplicação do método de resíduos ponderados é de extrema importância na definição da estrutura do problema. Especificamente para o que foi apresentado na Seção 5.4, as equações diferenciais foram analisadas para problemas de uma única variável z . No entanto, para os problemas de controle ótimo as equações do sistema dinâmico são apresentadas na forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (5.40)$$

Neste caso, tanto as variáveis de estado quanto as de controle são aplicadas na obtenção dos resíduos do problema (5.23), os quais são formados por um conjunto de equações algébricas obtidas da solução do método de resíduos ponderados. Este processo é aquele responsável por transportar o problema infinito dimensional para um espaço finito de funções, comumente denotado pelo termo transcrição.

As funções de aproximação adotadas para o estado e para o controle podem ser feitas de forma independente. Porém, uma vez que a dinâmica do sistema está ligada ao controle, estas aproximações possuirão vínculos inerentes um ao outro. Desta forma, pode-se dizer que controle é aquele responsável por “guiar” o sistema ao cumprimento de uma determinada trajetória, de forma que seja respeitada a dinâmica imposta e buscando minimizar um determinado índice J . Esta observação é muito importante para o devido entendimento do problema de controle ótimo, pois geralmente ele tem sido interpretado como apenas um problema de programação matemática, sem uma abordagem clara sobre “quem é responsável por o quê”. De um ponto de vista mais amplo sobre o problema (5.23), as variáveis de decisão $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$, t_0 e t_f serão obtidas simultaneamente no problema de programação não-linear. No entanto, o controle ($\mathbf{U}$) é aquele verdadeiramente responsável por fazer com que o funcional de desempenho seja minimizado, enquanto que o estado ($\mathbf{X}$) é ajustado de acordo com a evolução da dinâmica do sistema, que por sua vez depende do controle.

Dentro desta mesma perspectiva, nota-se que os coeficientes utilizados para aproximação dos estados são considerados arbitrários, independentemente dos vínculos de contorno existentes. O ajuste dessas variáveis será feito através do problema de programação matemática, de tal maneira que ao longo de sua solução as condições de contorno, bem como a dinâmica do sistema e as restrições de trajetória, sejam automaticamente obedecidas.

5.6 Casos Particulares do Método de Elementos Finitos

Esta seção tem como objetivo mostrar a capacidade de representação unificada que o MEF apresenta, tendo como centro os métodos de colocação. Assim é descrito o processo de concordância do MEF com alguns métodos que utilizam esta técnica e que são amplamente utilizados, como se pode ver em Adamawi, Hager e Rao (2019), Kelly (2017), Liu, Xiao, *et al.* (2019), Pager e Rao (2020), Betts (2010), Becerra e Galvão (2010), Hargraves e Paris (1987), Patterson e Rao (2014), etc., denominados: Método de Colocação Trapezoidal, Método de

Colocação de Hermite-Simpson, Método de Colocação Ortogonal. Estas são as técnicas mais utilizadas no contexto atual e, portanto, o estado da arte. Tais métodos serão abordados na sua forma diferencial, para a forma integral deve-se consultar Kelly (2017) e Herman e Conway (1996), por exemplo.

5.6.1 Colocação Trapezoidal

O método de colocação trapezoidal é um método local. Em outras palavras, isso significa que os polinômios de aproximação dos estados e controle em cada elemento devem ser de baixa ordem. Especificamente neste método, os estados de cada componente são aproximados por um polinômio de 2º grau dado por:

$$\hat{x}_i^{(k)}(\xi_i) = X_{i,1}^{(k)} + X_{i,2}^{(k)} \xi_i + X_{i,3}^{(k)} \xi_i^2, \quad (5.41)$$

onde o intervalo de cada elemento é normalizado em $\xi_i = [0,1]$. Pelo método de colocação trapezoidal o resíduo deve ser anulado no início e no final de cada elemento. Desta maneira, com base na técnica de resíduos ponderados, os desvios são calculados na forma:

$$\frac{d\hat{x}_i^{(k)}(\bar{\xi}_0)}{d\xi_i} = X_{i,2}^{(k)} = f^{(k)}[\hat{x}(\bar{\xi}_0), \hat{u}(\bar{\xi}_0), \bar{\xi}_0], \quad (5.42a)$$

$$\frac{d\hat{x}_i^{(k)}(\bar{\xi}_1)}{d\xi_i} = X_{i,2}^{(k)} + 2 X_{i,3}^{(k)} = f^{(k)}[\hat{x}(\bar{\xi}_1), \hat{u}(\bar{\xi}_1), \bar{\xi}_1]. \quad (5.42b)$$

Estas condições de resíduo são tratadas como condição de restrição de igualdade no problema de programação não-linear. Junto disso, deve-se garantir a continuidade entre as funções de aproximação dos elementos adjacentes. Assim, o valor da extremidade superior ($\xi_i = 1$) de um elemento i deve ser igual da extremidade inferior ($\xi_i = 0$) do intervalo $i + 1$. Ou seja,

$$X_{i,1}^{(k)} + X_{i,2}^{(k)} + X_{i,3}^{(k)} = X_{i+1,1}^{(k)}. \quad (5.43)$$

Observe que esta última consideração não necessita ser tratada como uma condição de restrição adicional, pois o primeiro coeficiente de aproximação do polinômio de um elemento posterior pode ser representado pela soma dos coeficientes de aproximação do seu elemento anterior. Desta maneira, a continuidade dos estados é garantida automaticamente e o resíduo de elementos adjacentes será igual nos nós em comum, sendo assim o problema é composto por

$(N + 1)k_E$ restrições dinâmicas. A primeira e última junções são tratadas como condição de restrição de fronteira do problema. Pode-se notar também que a aproximação dos estados é independente da aproximação adotada para o controle, a qual será discutida posteriormente.

Aproximando a função de custo (5.23a) por um esquema de quadratura trapezoidal obtém-se um problema semelhante àquele apresentado por Betts (2010), denotado por Método de Colocação Trapezoidal, onde o vetor de decisão do problema de programação matemática terá a forma:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} X_{1,1}^{(1)}, X_{1,2}^{(1)}, X_{1,3}^{(1)}, X_{2,1}^{(1)}, X_{2,2}^{(1)}, X_{2,3}^{(1)}, \dots, X_{N,1}^{(1)}, X_{N,2}^{(1)}, X_{N,3}^{(1)}, \dots \\ X_{1,1}^{(2)}, X_{1,2}^{(2)}, X_{1,3}^{(2)}, X_{2,1}^{(2)}, X_{2,2}^{(2)}, X_{2,3}^{(2)}, \dots, X_{N,1}^{(2)}, X_{N,2}^{(2)}, X_{N,3}^{(2)}, \dots \\ X_{1,1}^{(n_E)}, X_{1,2}^{(n_E)}, X_{1,3}^{(n_E)}, X_{2,1}^{(n_E)}, X_{2,2}^{(n_E)}, X_{2,3}^{(n_E)}, \dots, X_{N,1}^{(n_E)}, X_{N,2}^{(n_E)}, X_{N,3}^{(n_E)}, \dots \\ \mathbf{U}^T \\ t_f \end{bmatrix}^T. \quad (5.44)$$

5.6.2 Colocação de Hermite-Simpson

De acordo com Becerra (2013), o polinômio interpolador do estado no método de colocação de Hermite-Simpson possui grau 3, o que classifica este método como local. A aproximação da k -ésima componente é dada por:

$$\hat{x}_i^{(k)}(\xi_i) = X_{i,1}^{(k)} + X_{i,2}^{(k)} \xi_i + X_{i,3}^{(k)} \xi_i^2 + X_{i,4}^{(k)} \xi_i^3, \quad (5.45)$$

onde o intervalo de cada elemento é normalizado em $\xi_i = [0,1]$. Neste caso, é necessário um ponto de colocação a mais em relação ao método trapezoidal para definir completamente os coeficientes do polinômio de aproximação. Assim, além da condição de colocação ser aplicada nos extremos do intervalo, ela será também formada no seu ponto médio. Os resíduos utilizados para que o polinômio satisfaça a dinâmica do sistema tem a forma:

$$\frac{d\hat{x}_i^{(k)}(\bar{\xi}_0)}{d\xi_i} = X_{i,2}^{(k)} = f^{(k)}[\hat{x}(\bar{\xi}_0), \hat{u}(\bar{\xi}_0), \bar{\xi}_0], \quad (5.46a)$$

$$\frac{d\hat{x}_i^{(k)}(\bar{\xi}_1)}{d\xi_i} = X_{i,2}^{(k)} + 2 X_{i,3}^{(k)} + 3 X_{i,4}^{(k)} = f^{(k)}[\hat{x}(\bar{\xi}_1), \hat{u}(\bar{\xi}_1), \bar{\xi}_1], \quad (5.46b)$$

$$\frac{d\hat{x}_i^{(k)}(\frac{1}{2})}{d\xi_i} = X_{i,2}^{(k)} + X_{i,3}^{(k)} + \frac{3}{4} X_{i,4}^{(k)} = f^{(k)}\left[\hat{x}\left(\frac{1}{2}\right), \hat{u}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right]. \quad (5.46c)$$

De forma semelhante ao método Trapezoidal, a continuidade de elementos adjacentes pode ser garantida por:

$$X_{i,1}^{(k)} + X_{i,2}^{(k)} + X_{i,3}^{(k)} + X_{i,4}^{(k)} = X_{i+1,1}^{(k)} . \quad (5.47)$$

Novamente, a condição de continuidade não precisa ser aplicada como uma condição de restrição adicional ao problema de programação matemática, uma vez que o primeiro coeficiente de aproximação de um determinado elemento é igual à soma dos coeficientes usados no polinômio interpolador de um elemento anterior, o que garante de forma natural a continuidade dos estados. Junto, disso observa-se que nesta formulação haverão $(2N + 1)k_E$ restrições dinâmicas.

Outra opção é aproximar as variáveis de estado por cúbicas de Hermite, que podem ser escritas na forma:

$$\hat{x}_i^{(k)}(\xi_i) = N_1(\xi_i)X_{i,1}^{(k)} + N_2(\xi_i)X_{i,2}^{(k)} + N_3(\xi_i)X_{i,3}^{(k)} + N_4(\xi_i)X_{i,4}^{(k)} , \quad (5.48)$$

onde:

$$N_1(\xi_i) = 2\xi_i^3 - 3\xi_i^2 + 1 , \quad (5.49a)$$

$$N_2(\xi_i) = -2\xi_i^3 + 3\xi_i^2 , \quad (5.49b)$$

$$N_3(\xi_i) = \xi_i^3 - 2\xi_i^2 + \xi_i , \quad (5.49c)$$

$$N_4(\xi_i) = \xi_i^3 - \xi_i^2 . \quad (5.49d)$$

Derivando a Eq.(5.48) em relação a ξ_i tem-se:

$$\dot{\hat{x}}_i^{(k)}(\xi_i) = \dot{N}_1(\xi_i)X_{i,1}^{(k)} + \dot{N}_2(\xi_i)X_{i,2}^{(k)} + \dot{N}_3(\xi_i)X_{i,3}^{(k)} + \dot{N}_4(\xi_i)X_{i,4}^{(k)} , \quad (5.50)$$

onde:

$$\dot{N}_1(\xi_i) = 6\xi_i^2 - 6\xi_i , \quad (5.51a)$$

$$\dot{N}_2(\xi_i) = -6\xi_i^2 + 6\xi_i , \quad (5.51b)$$

$$\dot{N}_3(\xi_i) = 3\xi_i^2 - 4\xi_i + 1 , \quad (5.51c)$$

$$\dot{N}_4(\xi_i) = 3\xi_i^2 - 2\xi_i . \quad (5.51d)$$

Pode-se observar que $\hat{x}_i^{(k)}(0) = X_{i,1}^{(k)}$, $\hat{x}_i^{(k)}(1) = X_{i,2}^{(k)}$, $\dot{\hat{x}}_i^{(k)}(0) = X_{i,3}^{(k)}$ e $\dot{\hat{x}}_i^{(k)}(1) = X_{i,4}^{(k)}$. Ou seja, $X_{i,1}^{(k)}$ e $X_{i,2}^{(k)}$ representam o valor de $\hat{x}_i^{(k)}$ nos extremos inferior e superior de cada elemento, respectivamente. E a mesma conclusão pode ser obtida para $X_{i,3}^{(k)}$ e $X_{i,4}^{(k)}$ em relação a $\dot{\hat{x}}_i^{(k)}$. Observe que nesta formulação da cúbica, o valor da função e de sua derivada nos extremos do elemento são compartilhadas com os elementos adjacentes. Isso garante que esta representação implique em continuidade em C^0 e C^1 naturalmente, facilitando a formulação do problema. Note que, pela estrutura do problema, utilizando o polinômio cúbico convencional ou o polinômio cúbico de Hermite a solução obtida para o problema de planejamento de trajetória será a mesma. A diferença está apenas na maneira em como o problema será formulado, alterando a complexidade de implementação ou até mesmo as características de convergência do problema de otimização.

Aproximando o termo integral do funcional de desempenho (5.23a) por uma quadratura de Simpson, concebe-se um problema cujo resultado é semelhante aquele apresentado por Kelly (2017), Becerra (2013) e Hargraves e Paris (1987), na forma “compactada”, denotado por Método de Colocação de Hermite Simpson. Neste caso o vetor de decisão do problema de programação matemática terá a forma:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} X_{1,1}^{(1)}, X_{1,2}^{(1)}, X_{1,3}^{(1)}, X_{1,4}^{(1)}, X_{2,1}^{(1)}, X_{2,2}^{(1)}, X_{2,3}^{(1)}, X_{2,4}^{(1)}, \dots, X_{N,1}^{(1)}, X_{N,2}^{(1)}, X_{N,3}^{(1)}, X_{N,4}^{(1)}, \dots \\ X_{1,1}^{(2)}, X_{1,2}^{(2)}, X_{1,3}^{(2)}, X_{1,4}^{(2)}, X_{2,1}^{(2)}, X_{2,2}^{(2)}, X_{2,3}^{(2)}, X_{2,4}^{(2)}, \dots, X_{N,1}^{(2)}, X_{N,2}^{(2)}, X_{N,3}^{(2)}, X_{N,4}^{(2)}, \dots \\ X_{1,1}^{(n_E)}, X_{1,2}^{(n_E)}, X_{1,3}^{(n_E)}, X_{1,4}^{(n_E)}, X_{2,1}^{(n_E)}, X_{2,2}^{(n_E)}, X_{2,3}^{(n_E)}, X_{2,4}^{(n_E)}, \dots, X_{N,1}^{(n_E)}, X_{N,2}^{(n_E)}, X_{N,3}^{(n_E)}, X_{N,4}^{(n_E)}, \dots \\ \mathbf{U} \\ t_f \end{bmatrix}^T. \quad (5.52)$$

Desta maneira, este método pode ser resumido de acordo com a FIGURA 5.3.

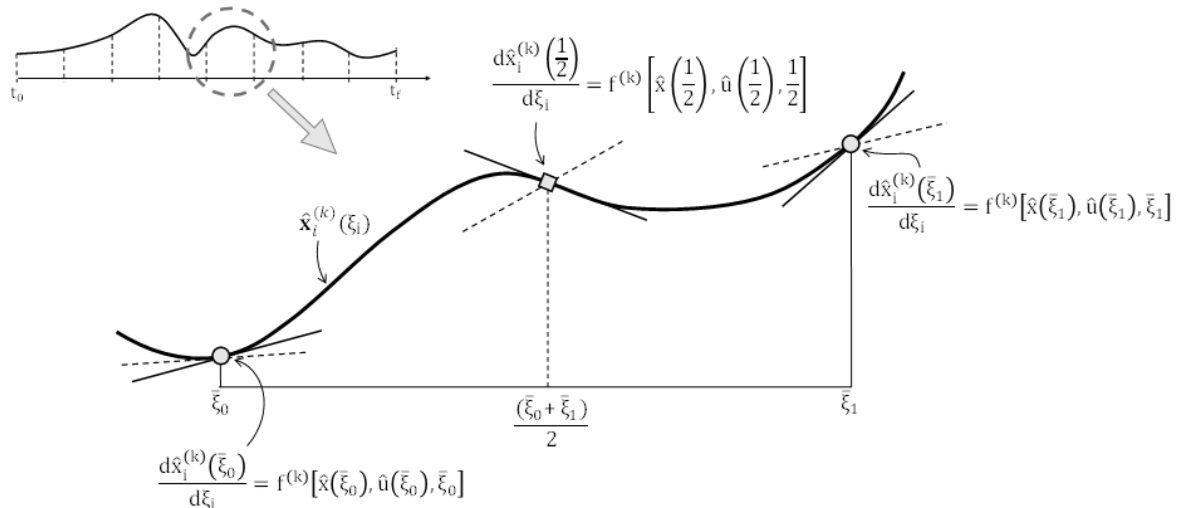


FIGURA 5.3 - Resumo das condições de colocação no método direto de Hermite-Simpson

5.6.3 Colocação Ortogonal

Os métodos de colocação ortogonal são também algumas vezes chamados por métodos pseudoespectrais ou mesmo por métodos de colocação global (RAO, 2010) e têm se tornado bastante populares na solução de problemas de controle ótimo (WANG, MA, *et al.*, 2019) (TOPPUTO e ZHANG, 2016). A principal diferença entre este e os métodos apresentados nas Seções 5.6.1 e 5.6.2 diz respeito aos pontos selecionados para anular o resíduo (pontos de colocação) e também à escolha do polinômio de interpolação para as variáveis do sistema. Os primeiros trabalhos que apresentaram esta ideia propunham a utilização de um polinômio de alta ordem para aproximação de todo o domínio do tempo, o que explica a nomenclatura “global” (BECERRA e GALVÃO, 2010). Uma visão específica disso sob a ótica do MEF, seria aplicar um único elemento ao domínio com um polinômio interpolador de alta ordem. Rao (2010) mostra que nesta situação, para trajetórias suaves e sem descontinuidades, o problema possui uma convergência “espectral” (i.e. a uma taxa exponencial) em função do número de pontos de colocação. Porém, grande parte dos problemas práticos não possui tal característica. Dessa forma, os métodos ortogonais têm sido desenvolvidos considerando um domínio dividido em intervalos, onde as aproximações em cada um destes segmentos são representadas por um polinômio “global”, i.e., de alta ordem. Nesta seção será mostrado como esta formulação pode ser observada como um caso particular da aplicação do MEF.

Suponha o problema (5.23) onde se utiliza a colocação pelo método de resíduos ponderados para transcrição das equações dinâmicas. O polinômio de Lagrange é utilizado como interpolador “global” dos estados em cada elemento. Ao invés de se escolher os pontos de colocação como pontos equidistantes ao longo do elemento, três outros diferentes esquemas geralmente são aplicados: i) Legendre-Gauss-Lobatto (LGL), onde os pontos são colocados no intervalo fechado $[-1, 1]$; ii) Legendre-Gauss (LG), os pontos estão no intervalo aberto $(-1, 1)$; e iii) Legendre-Gauss-Radau (LGR), os pontos são colocados no intervalo com uma das extremidades abertas, i.e., $[-1, 1)$ ou $(-1, 1]$. A escolha destes pontos está relacionada com o polinômio de Legendre de grau n , apresentado pela Eq.(5.32) e reescrito aqui novamente por conveniência:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (5.53)$$

Os pontos LG são obtidos a partir da raiz de $P_n(t)$, os pontos LGR são as raízes de $(P_{n-1}(t) + P_n(t))$ e os pontos LGL são raízes de $P_{n-1}(t)$ junto dos pontos -1 e 1

(PATTERSON, 2013). Uma característica interessante do polinômio de Legendre é o fato de existirem relações de recorrência entre polinômios de diferentes ordens, o que permite obter um novo P_n e suas respectivas derivadas a partir do conhecimento de polinômios de menor grau (ARSIE, 2013), o que reduz os custos computacionais envolvidos. Junto disso, outra vantagem em se utilizar este polinômio para determinação dos pontos de colocação está relacionada à redução do erro de interpolação envolvido conforme aumenta-se o seu grau, evitando o “fenômeno Runge²⁰” (BECERRA e GALVÃO, 2010), conforme apresentado na FIGURA 5.4.

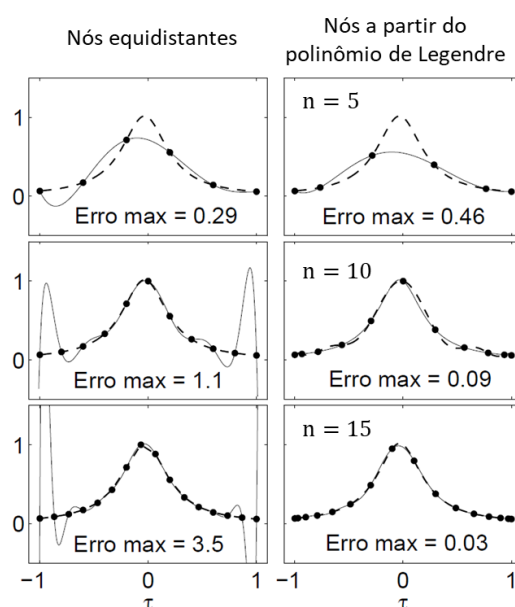


FIGURA 5.4 - Comparação da interpolação polinomial (linha contínua) de ordem $n = 5, 10$ e 15 para a função $f(\tau) = 1/(1+\tau+15\tau^2)$ (linha tracejada) com uma distribuição LGL. Adaptado de Becerra e Galvão (2010).

Dentre as três diferentes formas mostradas para distribuição dos pontos de colocação, o LGR tem sido a principal opção nas pesquisas recentes. Patterson (2013) mostra que este método tem melhor comportamento numérico quando comparado ao LGL, e que diferentemente do LG, onde os pontos da extremidade não estão incluídos como ponto de colocação, no LGR um dos nós coincide com o ponto de colocação externo, o que auxilia no tratamento do problema. Uma discussão mais aprofundada sobre este tópico pode ser encontrada em Garg, Patterson, *et.al.* (2009). Apesar de todos estes métodos terem grande semelhança, neste trabalho será apresentado apenas a relação do método LGR padrão, que inclui o ponto inicial -1 , como situação particular do MEF. Uma observação interessante é o

²⁰ Este fenômeno se refere a um problema de oscilação nas bordas de um determinado intervalo quando se faz uma interpolação por um polinômio de alta ordem.

fato de que a utilização dos pontos LGL com uma aproximação cúbica para o estado resulta no Método de Hermite-Simpson.

Neste caso, as funções de base escolhidas serão na forma de polinômios de Lagrange:

$$\ell_j(\xi) \equiv \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n_p+1} \frac{\xi - \xi_m}{\xi_j - \xi_m}. \quad (5.54)$$

Assim, a componente dos estados em cada elemento é interpolada na forma²¹:

$$\hat{x}(\xi) = \sum_{j=1}^{n_p+1} \ell_j(\xi) X_j \quad (5.55)$$

onde n_p é o grau do polinômio de Legendre e, portanto, o número de pontos de colocação no elemento i . Enquanto os pontos de colocação são aplicados apenas nas raízes do polinômio $(P_{n-1}(t) + P_n(t))$ definido no intervalo $[-1, 1]$, o polinômio interpolador é avaliado também no ponto final do elemento.

Observe que na utilização do polinômio de Lagrange como função de base, nos pontos de colocação, ao longo do elemento, o polinômio de aproximação é igual ao valor do coeficiente a ser determinado. Esta propriedade de isolamento pode ser entendida da seguinte forma:

$$\ell_j(\xi_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad (5.56)$$

Por conveniência, na utilização dos polinômios em questão, adota-se o intervalo $\xi_i = [-1, 1]$ para normalizar totalmente os elementos.

Para avaliar as condições de colocação nos pontos LGR de cada elemento, obtém-se a derivada da Eq.(5.55):

$$\frac{d\hat{x}(\xi)}{d\xi} = \sum_{j=1}^{n_p+1} \frac{d\ell_j(\xi)}{d\xi} X_j \quad (5.57)$$

A condição de colocação é aplicada nos n_p pontos, onde, de acordo com o apresentado pelo método de resíduos ponderados, deve-se avaliar a Eq. (5.57). Assim:

²¹ O sobrescrito para descrever a componente e o subscrito para descrever o elemento na notação utilizada na Eq.(5.15) foram retirados para simplificação do entendimento.

$$\hat{x}(\xi_k) = \sum_{j=1}^{n_p+1} \ell_j(\xi_k) X_j = \sum_{j=1}^{n_p+1} D_{kj} X_j \quad \text{para } k = 1, \dots, n_p \quad (5.58)$$

onde $D_{n_p \times (n_p+1)}$ é conhecida como matriz de diferenciação LGR e os valores de seus elementos dependem apenas da distribuição dos pontos de colocação. Logo, a condição de colocação ao longo de cada elemento tem a forma:

$$\sum_{j=1}^{n_p+1} D_{kj} X_j - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}[\hat{x}(\xi_k), \hat{u}(\xi_k), \xi_k; \tau_i, \tau_{i-1}] \quad \text{para } k = 1, \dots, n_p. \quad (5.59)$$

Aproximando a função de custo (5.23a) por uma quadratura de Radau (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1970), onde os pesos são dados por:

$$w_k = \frac{1}{(1 - \xi_k)[P'_{n-1}(\xi_k)]^2} \quad (5.60)$$

A formulação obtida pela Eq.(5.59) é semelhante àquela apresentada por outros autores pelo que se denota método de colocação ortogonal (PATTERSON, 2013) (ARSIE, 2013) (GARG, PATTERSON, *et al.*, 2009), o que mostra a capacidade de abrangência do MEF.

A forma apresentada dos métodos nesta subseção é uma das maneiras de se interpretar a colocação, onde se faz com que a diferença entre a derivada da função de aproximação dos estados e o valor local da equação dinâmica do sistema tendam a zero sobre pontos específicos ao longo da trajetória. Outra maneira de interpretação das restrições de colocação é através de uma abordagem integral, a qual Betts (2010, p. 100) utiliza para mostrar que os métodos de colocação são, de fato, métodos de Runge-Kutta. Uma comparação entre as diferentes abordagens pode ser feita em Becerra (2013), Kelly (2017) e Betts (2010, p. 97).

5.6.4 Comentários

Um fator importante a ser avaliado sobre a aplicabilidade do MEF está relacionado ao fato das expressões dos resíduos ponderados e do índice de desempenho serem, para algumas situações, representados na forma de uma equação integral. Em uma primeira análise, tal método estaria relacionado à possibilidade de tais equações poderem ser resolvidas de forma analítica. No entanto, embora a solução exata seja desejável, ela não é um requisito necessário à utilização do método. Nas situações onde a solução analítica não existe, pode-se utilizar

expressões de aproximação para elas por meio de métodos de quadratura. Nestes métodos, assumem-se expressões analíticas aproximadas para a solução das integrais, que embora não sejam exatas, são funções apenas dos parâmetros utilizados na relação. Desta maneira, mesmo avaliando os termos integrais de forma aproximada, o problema mantém as características de uma estrutura analítica, o que é essencial para a montagem do problema de programação matemática.

Consoante ao que foi apresentado, dentre os diferentes tipos de MRP, o método de colocação é aquele que ganhou maior destaque nos últimos anos (ADAMAWI, HAGER e RAO, 2019) (KELLY, 2017). Todavia, ele tem sido apresentado como um método em si, ao invés de ser interpretado como uma situação particular do MEF. O que se mostra neste trabalho é uma visão mais abrangente do problema, algo que é de grande relevância para complementação do entendimento do funcionamento deste método, uma vez que as discussões em torno dos princípios básicos do MEF podem trazer maior fundamentação para justificar a sua utilização.

Especialmente nesta técnica de colocação, os resíduos serão zerados apenas em alguns pontos escolhidos. Desta forma, não são necessárias as soluções de integrais das restrições dinâmicas e as equações algébricas resultantes são relativamente mais simples de obter em comparação com outros métodos, reduzindo os custos computacionais envolvidos e simplificando o processo de implementação. Esta é uma razão prática pela qual o método de colocação tem recebido tanta relevância nos últimos anos e que não tem sido discutida nos trabalhos revisados.

Apesar desta qualidade, a técnica de colocação apenas garante que o resíduo se anule sobre pontos específicos do domínio. Além disso, quando se utiliza este método na solução de problemas de controle ótimo não há a satisfação das restrições de trajetória entre os pontos de colocação. Sendo assim, pode-se utilizar de duas ferramentas para amenizar estas dificuldades.

A primeira delas é fazer com que a posição destes pontos tenha uma distribuição ortogonal, que de acordo com Solsvik e Jakobsen (2013), gera uma boa qualidade de aproximação. De fato, esta é uma abordagem que tem sido explorada nas pesquisas recentes (WANG, MA, *et al.*, 2019) (YANG, CUI, *et al.*, 2017) (PATTERSON e RAO, 2014) (ROSS e KARPENKO, 2012). A segunda ferramenta é a utilização de malhas com alto grau de refinamento, pois em se tratando de um sistema contínuo com uma malha suficientemente refinada pode-se afirmar que o resíduo fora dos pontos de colocação será próximo de zero. Do ponto de vista de sua aplicação, o refinamento tenderia a tornar o problema paramétrico em um caso de grande porte, o que não era uma situação interessante para tratamento numérico há

alguns anos atrás, sendo um dificultador na obtenção de uma solução (PEREIRA, 1994, p. 73). No entanto, em pesquisas realizadas nos últimos anos houve um amplo desenvolvimento de técnicas para a solução de problemas de programação com caráter esparso (PATTERSON e RAO, 2012), algo que pode ser naturalmente explorado pelo MEF. Assim, pode-se utilizar de malhas altamente refinadas sem que isso seja uma grande dificuldade na solução de problemas de planejamento de trajetória. Um exemplo extremo a respeito desta questão é o problema da otimização de trajetória de baixa tração Terra-Lua apresentado por Betts e Erb (2003), onde são utilizadas 211031 variáveis de decisão e 146285 restrições. Outros casos com esta mesma abordagem podem ser encontrados em Geiger (2009, p. 5-6), entre outros diversos autores.

Todas estas questões apontam para os motivos pelos quais a técnica de colocação é tão explorada, mas ao mesmo tempo é interessante notar que o MEF gera alternativas quanto à forma de se enxergar o problema, abrindo espaço para novos desenvolvimentos na maneira de se fazer a aproximação das restrições dinâmicas.

5.7 Considerações Sobre a Utilização do Método de Elementos Finitos

A visão do MEF permite a utilização de aproximações diferentes para as distintas variáveis da trajetória. No entanto, não é uma tarefa trivial determinar qual a melhor função a ser utilizada para interpolação em cada caso. Até mesmo em casos bastante simples como:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad (5.61)$$

a trajetória tem a forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) e^{-t} + e^{-t} \int_1^t e^s \mathbf{u}(s) ds. \quad (5.62)$$

Assim, observa-se que interpolações na forma polinomial trarão erros de aproximação para a solução. Porém, como já notado, a utilização de polinômios na aproximação dos estados e controles facilita o algebrismo envolvido durante a transcrição do problema de controle ótimo em um problema de programação matemática. Assim, sabe-se que a solução obtida é apenas um caso sub-ótimo do problema, mesmo que a malha possua um alto grau de refinamento, uma vez que nos problemas práticos não se sabe a priori a forma exata das funções das variáveis dinâmicas.

Para os métodos de resíduos onde a norma é bem definida, o resultado obtido não depende da classe de polinômios que é utilizada, i.e., Hermite, Lagrange, Legendre, Jacobi, etc. Por exemplo, caso seja estudado o método de Hermite-Simpson, utilizando um polinômio cúbico de Hermite como interpolador dos estados, porém com os pontos colocação igual aos pontos de Radau, o resultado gerado é o mesmo que se aplicar a colocação ortogonal nos pontos LGR com um polinômio de Lagrange de grau três para a representação do estado.

Apesar das formulações apresentadas na Seção 5.6 serem as mais aplicadas na atualidade, sob o ponto de vista do MEF existem inúmeras possibilidades para postular o problema, seja alterando a forma de ponderação do resíduo, seja na forma de atribuição das aproximações para as variáveis. Outra característica interessante é que, diferentemente das formulações convencionais (RAO, 2010), na abordagem pelo MEF não há a obrigatoriedade de se reduzir os sistemas dinâmicos dos problemas formulados em um conjunto de equações ordinárias. Assim, sistemas com equações diferenciais de ordem 2 ou superior, podem ser transcritos diretamente em um conjunto de equações algébricas aplicando um dos métodos de resíduos ponderados, o que acarreta em um menor número de restrições para o problema de programação matemática.

É importante notar que, a partir da visão apresentada, há uma diferença entre o ato de se aproximar o estado e o controle visando atingir o ótimo e o ato de solucionar as equações integrais no sentido de obter o menor resíduo possível. Por exemplo, caso o controle ótimo de um sistema seja uma cúbica, representado por segmentos de retas, o funcional de desempenho do problema é comprometido, mas não necessariamente a precisão da solução das equações do resíduo. Outro caso seria aproximar o estado por polinômios de alta ordem, fazendo com que as restrições dinâmicas fossem muito bem satisfeitas e, portanto, permitindo que o desempenho seja bem avaliado. Isso justifica o fato de não ser comum a utilização de aproximações para os controles de ordem maior que a do estado, pois é importante que a dinâmica esteja bem respeitada e a partir disto, avaliar uma precisão melhor para as funções do controle.

Neste cenário, pode-se dizer que resolver um problema de controle ótimo utilizando o MEF é em sua essência um problema de otimização com múltiplos objetivos, que inevitavelmente terá que lidar com a decisão de minimizar a função objetivo (para atingir a otimalidade) ou minimizar os erros de discretização (para melhor precisão).

O resgate destas ideias é uma das importantes contribuições propostas neste trabalho, uma vez que permite um melhor entendimento do caminho tomado pelo estado da arte nas técnicas de solução direta dos problemas de controle ótimo. Junto a isso, pode-se afirmar que a utilização do MEF gera uma arquitetura unificada para representação de problemas utilizados

na definição de métodos diretos com parametrização completa dos estados e controles. Assim, por mais que sejam alterados os polinômios de base utilizados nas aproximações, ou as funções peso para o MRP na criação de um novo método, ou até mesmo a técnica para transformação das equações dinâmicas em um conjunto de equações algébricas, este terá como fundamento uma estrutura comum.

Especificamente para os casos apresentados na Seção 5.6, fazer com que o resíduo se anule nos pontos de colocação não implica que a função polinomial adotada para o controle e para o estado irá satisfazer a dinâmica do sistema e as restrições de trajetória entre eles. Esta mesma visão está presente nas outras formas de ponderação dos resíduos, onde cada uma tem sua própria particularidade de interpretação. Estes erros muitas vezes podem ter magnitude relevante, por este motivo é muito comum a utilização de uma análise posterior do resultado para identificar os intervalos com erros significativos e realizar um refinamento local da malha. Este procedimento é realizado iterativamente até que os desvios estejam dentro de uma tolerância determinada.

Desvios na solução também podem ocorrer em casos onde as trajetórias ótimas possuem descontinuidades. Nestas situações, a interpolação direta por polinômios pode resultar em um comportamento semelhante ao fenômeno de Gibbs (ARFKEN e WEBER, 2005, p. 910), o que induz a trajetória a um comportamento oscilatório não-físico. Este tipo de fenômeno poderia ocorrer em casos similares aos de controle Bang-Bang, por exemplo.

Uma vez solucionado o problema, com o conhecimento dos valores dos coeficientes $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$, t_0 e t_f , as funções de aproximação em cada segmento estão completamente definidas. Porém, devido à aplicação do MRP sabe-se que o resíduo não é nulo em todo elemento, mas apenas em média, podendo variar de acordo com a técnica adotada. Betts (2010) propõe uma maneira de estimar o erro da solução verificando o quão bem a trajetória obtida satisfaz a dinâmica do sistema. Usando esta proposta, a dinâmica do sistema pode ser simulada por um integrador numérico escolhido e os resultados são comparados com a aproximação, na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}(\xi_i) \triangleq \hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}(\xi_i) - \mathbf{F}_i^{(k)}[\hat{\mathbf{x}}_i(\xi_i), \hat{\mathbf{u}}_i(\xi_i), \xi_i] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.63)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}(\xi_i)$ é definido como o erro de discretização ao longo de cada elemento para a k -ésima componente. Pode-se definir ainda um erro local absoluto em cada elemento por:

$$\boldsymbol{\eta}_i \triangleq \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}_1} \|\boldsymbol{\varepsilon}_i(\xi_i)\|_2 d\xi_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.64)$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma-2 de um vetor. Assim, em um problema de múltiplas variáveis, a métrica para o erro absoluto é definida por:

$$\sigma_i^{(k)} \triangleq \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}_1} |\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}(\xi_i)| d\xi_i \text{ para } \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, N \end{matrix} \quad (5.65)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times N}$.

A avaliação destes parâmetros ao longo da malha permite estimar as regiões onde o erro excede uma tolerância estabelecida, indicando uma necessidade de refinamento local para uma melhor representação da trajetória. Neste caso, tanto o número de elementos pode ser acrescido como também se pode alterar a função de aproximação adotada para representação da trajetória, seja usando uma função diferente, seja elevando o grau do polinômio interpolador.

Um aspecto que difere o caso onde se usa o polinômio de Lagrange com colocação nos pontos de Radau daqueles onde se aplica os métodos locais, como é o caso do Trapezoidal e do Hermite-Simpson, diz respeito as formas de convergência da solução geralmente utilizadas. Nos métodos locais tal objetivo é atingido aumentando-se o número de elementos da malha, o que é denominado como refinamento-h. Já na perspectiva pseudoespectral, entende-se que a convergência do problema possa ser atingida tanto alterando o número de elementos quanto o grau do polinômio interpolador, o que se denomina refinamento-hp. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos atualmente na busca de obter um procedimento para realização destes tipos de refinamento de maneira automática (BETTS, 2010) (ADAMAWI, HAGER e RAO, 2019) (LIU, HAGER e RAO, 2015).

5.8 Problema de Programação Não-Linear

Após a aplicação do processo de transcrição, o problema de controle ótimo se resume a um Problema de Programação Não-Linear, o qual está relacionado à obtenção dos valores de um vetor de decisão $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, a fim de solucionar:

$$\min_{\mathbf{y}} F(\mathbf{y}) \quad (5.66)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_L &\leq \mathbf{c}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{c}_U \\ \mathbf{y}_L &\leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_U \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde $F: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é uma função escalar duplamente diferenciável e $\mathbf{c}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ é um vetor de funções duplamente diferenciáveis.

Uma situação particular deste problema ocorre quando apenas restrições de igualdade são consideradas, de tal forma que o problema se simplifica a minimizar $F(\mathbf{y})$, sujeito às restrições de igualdade:

$$\mathbf{c}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} c_1(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ c_m(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.68)$$

onde $n \leq m$. A função Lagrangiana deste problema é definida como:

$$L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{y}), \quad (5.69)$$

a qual é uma função das n variáveis de decisão e dos m multiplicadores de Lagrange. As condições necessárias de primeira ordem para que o ponto $(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ seja um ponto estacionário requerem a solução do sistema (BECERRA, 2013):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{y}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) &= -\mathbf{c}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.70)$$

onde $\mathbf{g}$ é o vetor gradiente da função objetivo:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) \equiv \nabla_{\mathbf{y}} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

e $\mathbf{G}$ é o Jacobiano do vetor de restrições de igualdade:

$$\mathbf{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} & \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial c_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_1} & \frac{\partial c_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial c_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial c_m}{\partial y_1} & \frac{\partial c_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial c_m}{\partial y_n} \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

O sistema de Eqs.(5.70) pode ser resolvido utilizando, por exemplo, um método de Newton para encontrar as $(n + m)$ variáveis $(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Escolhido um valor inicial $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$, as correções $(\Delta \mathbf{y}, \Delta \boldsymbol{\lambda})$ para busca de uma nova solução $(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda} + \Delta \boldsymbol{\lambda})$ são obtidas pela solução do sistema linear de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (BETTS, 2010):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_L & -\mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{g} \\ -\mathbf{c} \end{Bmatrix}, \quad (5.73)$$

onde $\mathbf{H}_L$ é a Hessiana da função Lagrangiana, dada por:

$$\mathbf{H}_L = \nabla_{yy}^2 L = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{yy}^2 c_i, \quad (5.74)$$

em que:

$$\mathbf{H} \equiv \nabla_{yy}^2 F = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n \partial y_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n^2} \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Este problema de Programação Não-Linear formulado pode ser generalizado para o caso onde são impostas restrições de desigualdade na forma:

$$\mathbf{c}(\mathbf{y}) \geq 0. \quad (5.76)$$

Os pontos que satisfazem as restrições são conhecidos como admissíveis, já os pontos inviáveis estão em uma região onde violam uma ou mais restrições do problema. Assim, uma das estratégias utilizadas para avaliar o problema com restrições de desigualdades consiste em separar o problema em dois grupos. Na solução $\mathbf{y}^*$, algumas das restrições serão estritamente satisfeitas, i.e., $c_i(\mathbf{y}^*) > 0$ para $i \in \mathcal{A}'$, onde $\mathcal{A}'$ é o conjunto inativo; e as restrições restantes serão satisfeitas como igualdades, i.e., $c_i(\mathbf{y}^*) = 0$ para $i \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto ativo. Se o grupo de restrições ativas é conhecido, as restrições inativas são ignoradas e o problema é solucionado utilizando a estratégia discutida inicialmente nesta seção. Para a formulação geral do Problema de Programação Não Linear dado pelas Eqs.(5.66) e (5.67) as restrições de igualdade são impostas fazendo $c_{i,L} = c_{i,U}$.

Especificamente para o caso do controle ótimo, o vetor de decisão é composto pelo grupo de parâmetros a serem definidos, dado por:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{X}^{(1)}; \mathbf{U}^{(1)}; t_f^{(1)}; \dots; \mathbf{X}^{(S)}; \mathbf{U}^{(S)}; t_f^{(S)}]^T \quad (5.77)$$

O grupo de restrições $\mathbf{c}(\mathbf{y})$ é composto pelas restrições dinâmicas, que equivalem a restrições de igualdade; por restrições de trajetória e por restrições de contorno, tratadas como condições de desigualdade em sua forma mais geral. Além disso, a função de minimização é semelhante àquela apresentada pela Eq.(5.24), a qual depende apenas dos parâmetros de decisão. A FIGURA 5.5 apresenta um mapa global sobre o processo de transcrição do MEF até que este se torne um Problema de Programação Matemática.

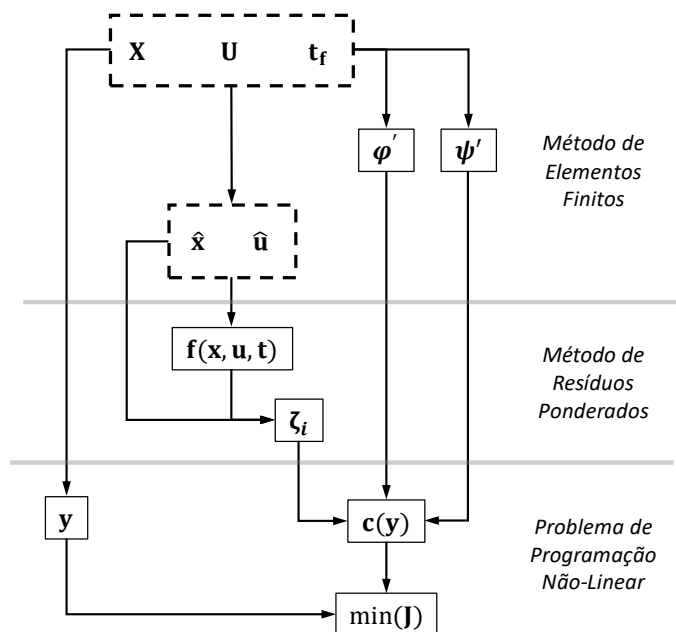


FIGURA 5.5 - Panorama sobre a solução do Problema de Controle Ótimo pelo MEF.

De forma geral o problema obtido é de grande porte, requerendo um tratamento computacional adequado. Na solução de um problema de programação não linear será necessário calcular a primeira e segunda derivadas das restrições e da função objetivo. Com exceção da parte correspondente às condições de contorno do problema, a maior parte da matriz Jacobiana é definida como:

$$G_{i,j} = \frac{\text{variação nas restrições no elemento } i}{\text{variação na variável de otimização no ponto } j} \quad (5.78)$$

Como resultado do processo de criação de uma malha pelo MEF para tratamento do problema, observa-se que a variação de uma variável de decisão em um determinado ponto irá afetar apenas as restrições locais, i.e., apenas elementos da sua vizinhança. Assim, diversos elementos da matriz Jacobiana terão valor zero, o que caracteriza este problema como esparso. Discussões mais aprofundadas sobre este assunto podem ser consultadas em Betts (2010) e Patterson e Rao (2012). É importante ressaltar novamente que devido à esparsidade obtida pela formulação do MEF, mesmo que os problemas de programação matemática resultem em casos de larga escala, estas análises são mais facilmente resolvidas do que os problemas de valor de fronteira resultantes da parametrização do controle, i.e., nos métodos de tiro e múltiplos tiros. Nestes casos, são necessária sucessivas simulações e correções dos resíduos até que haja a convergência do algoritmo, o que acarreta em uma série de dificuldades relacionadas à estabilidade numérica da solução (BECERRA, 2013).

Diversos pacotes computacionais para solucionar problemas de programação não-linear, como SNOPT (GILL, MURRAY e SAUNDERS, 2005), IPOPT (WACHTER, 2002) e KNITRO (BYRD, NOCEDAL e WALTZ, 2006), tiram vantagem da característica esparsa do problema tanto em termos de cálculo quanto de memória. Para solução dos problemas descritos neste trabalho foi utilizado o pacote denominado IPOPT²² (WACHTER e BIEGLER, 2006), pois este código tem sido continuamente atualizado e possui ampla aplicação em diversas pesquisas dentro deste mesmo contexto (PATTERSON e RAO, 2014) (BITTNER, 2017) (BECERRA e GALVÃO, 2010).

5.9 Exemplo de Aplicação do MEF

Nesta seção é apresentado um exemplo de problema de controle ótimo para demonstração da utilização do MEF. Tal exemplo foi escolhido por ser um caso mais simples,

²² Interior Point Method

além de possuir solução analítica e, por isso, ser interessante de comparação com a solução numérica. Ele é solucionado utilizando as formulações particulares discutidas na Seção 5.6, uma vez que estas são conhecidas como o estado da arte na solução de problemas de planejamento de trajetória por método direto. Escolheu-se um problema de controle Bang-Bang por possuir uma solução com descontinuidades na variável de controle, e, portanto, uma situação interessante para mostrar algumas vantagens na abordagem multi-fase (trajetória fracionada) do MEF. De acordo com Betts (2010, p. 217), este tipo de controle pode ocorrer quando as equações diferenciais do sistema são lineares. Assim, suponha um sistema como apresentado na FIGURA 5.6.

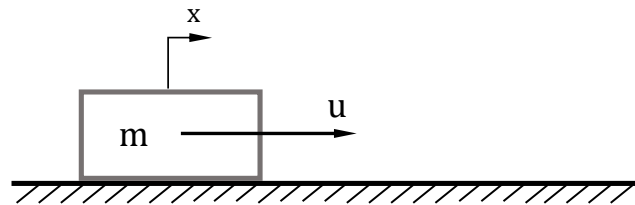


FIGURA 5.6 – Representação de um problema Bang-Bang.

O objetivo é obter o controle ótimo u^* que minimiza o tempo necessário para que o bloco inicie um movimento em repouso e atinja uma posição final determinada com velocidade nula. Além disso, na modelagem do problema, desprezam-se as forças de atrito e é assumido que a massa do bloco é unitária. Desta forma, o problema se simplifica em minimizar o funcional:

$$J = t_f, \quad (5.79)$$

sujeito às restrições dinâmicas:

$$\ddot{x} = u \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (5.80)$$

cujas condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \text{ m} & x_1(t_f) &= 300 \text{ m} \\ x_2(0) &= 0 \text{ m/s} & x_2(t_f) &= 0 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (5.81)$$

Além disso, as variáveis da trajetória estão sujeitas às restrições:

$$\begin{aligned} -20 \text{ m} &\leq x_1(t) \leq 400 \text{ m} & -1 \text{ N} &\leq u(t) \leq 2 \text{ N} \\ -100 \text{ m/s} &\leq x_2(t) \leq 100 \text{ m/s} & 0 \text{ s} &\leq t_f \leq 40 \text{ s} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Este tipo de caso possui extensa discussão em problemas de controle ótimo e é também conhecido como problema de “quina”, por apresentar descontinuidades nas derivadas da

trajetória. A solução analítica desta classe de problemas é apresentada por autores como Bryson e Ho (1975), e Shen e Andersson (2010), cujo resultado para as condições de contorno especificadas tem a forma:

$$u^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } t \leq 10 \text{ s} \\ -1, & \text{se } t > 10 \text{ s} \end{cases} \quad (5.83)$$

Para o controle ótimo obtido, os estados têm a forma:

$$x_1^*(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \leq 10 \text{ s} \\ -t^2/2 + 30t - 150 & \text{se } t > 10 \text{ s} \end{cases} \quad (5.84a)$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \leq 10 \text{ s} \\ -t + 30 & \text{se } t > 10 \text{ s} \end{cases} \quad (5.84b)$$

Este mesmo problema foi solucionado por este autor utilizando uma única fase e diferentes técnicas para obtenção dos resíduos (LAGUARDIA, PINTO e DUTRA, 2019), onde foram testados métodos automáticos para refinamento de malha, propostos por Betts (2010) e Zhao e Shang (2018), a fim de se atingir um resultado satisfatório. No entanto, observa-se que devido às descontinuidades apresentadas no problema, o algoritmo tende a concentrar um grande número de elementos próximo à quina, o que pode levar a um alto custo computacional em sua solução durante as iterações de refinamento. Por exemplo, adotando uma aproximação quadrática para os estados e linear para o controle, e aplicando o método de colocação equidistante nos resíduos, a malha final obtida para o critério de erro adotado possui 38 elementos, conforme FIGURA 5.7.

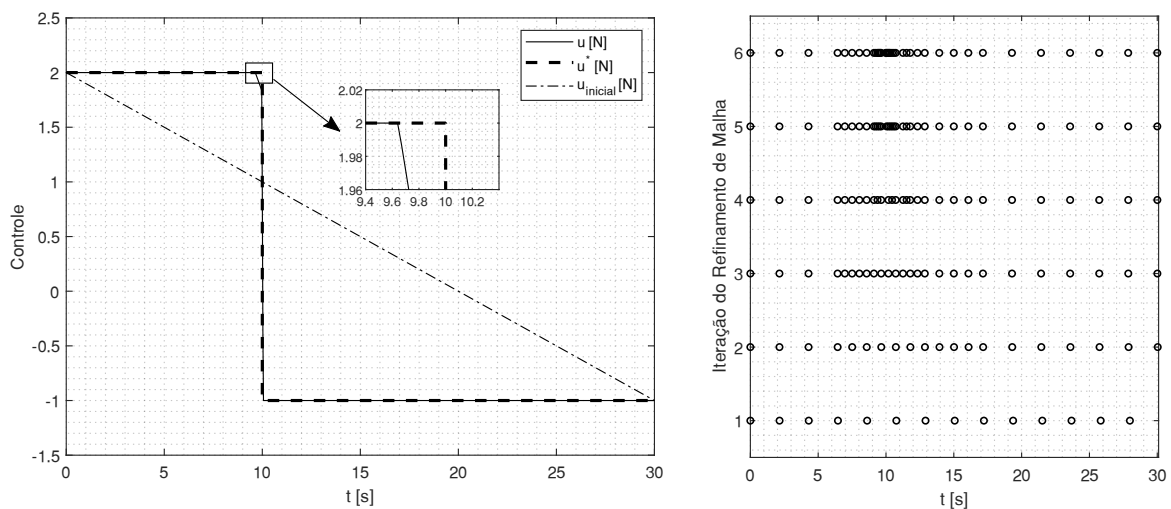


FIGURA 5.7 - Refinamento da malha para solução do problema Bang-Bang.

Isto ocorre devido ao fato de a formulação adotada assumir que o controle é contínuo entre os elementos. Uma outra maneira de abordar este caso e evitar a necessidade da concentração de elementos na solução é assumindo um problema de múltiplas fases.

Assim, sabendo a priori que a solução possui uma única quina, utilizou-se duas fases para a sua formulação, onde foi incluído um vínculo entre os segmentos $\mathbf{r}^{(s)}$ de forma que não haja descontinuidades C^0 nos estados. Além disso, neste tratamento, o tempo final de cada uma das fases é também um parâmetro de decisão do problema de programação matemática, como apresentado pela Eq.(5.24). Observando a solução analítica, teoricamente o problema poderia ser resolvido utilizando um único elemento para cada fase, aproximando a variável de deslocamento (x_1) por um polinômio de segunda ordem, a variável de velocidade (x_2) por um polinômio de primeira ordem e o controle (u) também por uma equação linear. Porém, nesta proposta assume-se que a estrutura da solução analítica não é conhecida a priori, por isso, adotou-se dois elementos para cada fase nesta análise, onde os estados são representados por cúbicas de Hermite e o controle por funções lineares. A solução apresentada na FIGURA 5.8 e FIGURA 5.9 mostra que o resultado obtido é bastante próximo da solução analítica, onde os marcadores indicam o início e fim de cada elemento.

Comparando a solução numérica com a solução analítica do problema, o erro máximo encontrado para as variáveis de estado no domínio é da ordem de 10^{-8} , o qual está relacionado às aproximações numéricas feitas durante a solução. Além disso, os polinômios cúbicos são degenerados em polinômios quadráticos e lineares para x_1 e x_2 , respectivamente, onde os coeficientes de mais alta ordem são numericamente iguais a zero. O controle ótimo obtido é descontínuo na transição entre as fases indo de $2N$ para $-1N$, semelhante à solução analítica.

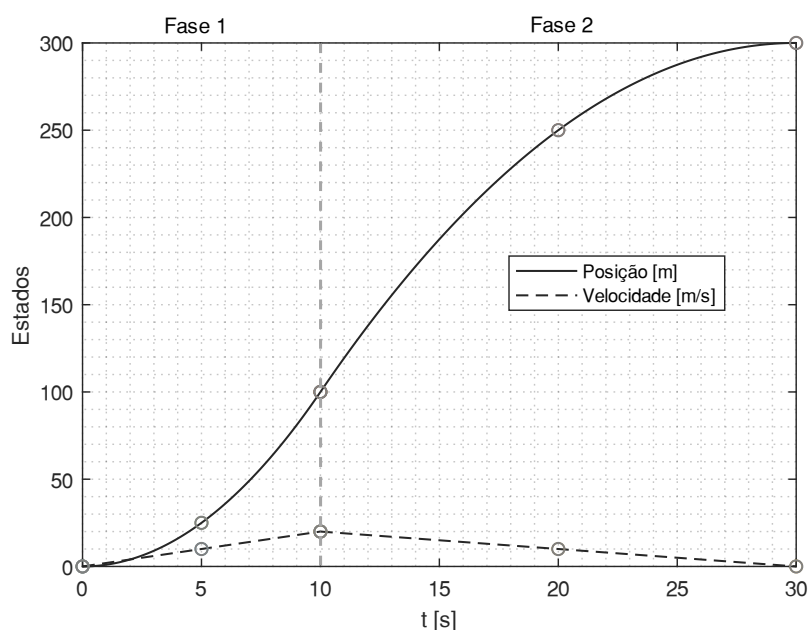


FIGURA 5.8 - Solução numérica dos estados para o problema Bang-Bang.

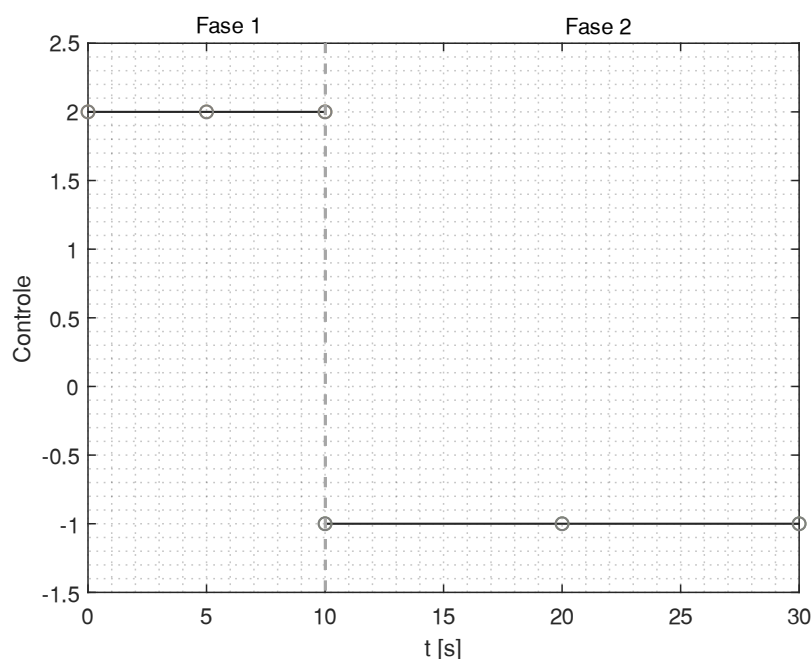


FIGURA 5.9 - Solução numérica do controle para o problema Bang-Bang.

5.10 Ferramentas para a Solução de problemas de Otimização de Trajetória

Atualmente, podemos encontrar uma ampla gama de ferramentas para a solução de problemas de otimização de trajetórias. Diferentes centros de pesquisa têm buscado por desenvolvimentos e melhorias na utilização das técnicas de solução deste problema e disponibilizado os pacotes criados para aplicações acadêmicas e industriais. Nesta seção serão apresentadas algumas dessas ferramentas, com foco naquelas que utilizam métodos diretos para solução:

- DYMOS

É uma ferramenta gratuita desenvolvida em Python e utiliza uma aproximação para a trajetória utilizando métodos pseudoespectrais (FALCK e GRAY, 2019). Ela foi criada como um pacote interno ao OpenMDAO criado pela NASA (GRAY, HWANG, *et al.*, 2019). Assim, o objetivo de seu desenvolvimento não é apenas o de criar uma ferramenta pra solução de problemas de otimização de trajetória, mas para que seja utilizada como uma biblioteca para otimização multidisciplinar em problemas de controle ótimo. Por isso, ela utiliza uma série de sub-rotinas para a melhoria de sua eficiência durante a solução dos problemas numéricos.

- ICLOCS

Este é um pacote computacional de código aberto desenvolvido por Nie, Faqir e Kerrigan (2018) no *Imperial College* de Londres. Possui capacidade de transcrição do problema de controle ótimo tanto por métodos de múltiplos tiros quanto por métodos de colocação,

estando disponível em MATLAB. É capaz de utilizar diferentes pacotes para solução do problema de otimização, como IPOPT, fmincon (função interna do MATLAB) ou WORHP (BÜSKENS e WASSEL, 2013). Este pacote tem sido constantemente atualizado e utilizado em diferentes áreas de pesquisa (CHRIST, WISCHNEWSKI, *et al.*, 2019) (NIE e KERRIGAN, 2020) pelo Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica dessa universidade.

- GPOPS e GPOPS-II

O GPOPS (*General Purpose OPTimal Control Software*) teve sua primeira versão desenvolvida no *Vehicle Dynamics and Optimization Laboratory* pela Universidade da Flórida em 2008. Ele utiliza de métodos pseudoespectrais de Gauss para a representação da trajetória e é disponível gratuitamente para utilização em MATLAB. Ele utiliza do método de diferenças finitas para cálculo dos gradientes e hessianas. A sua segunda versão é um sucessor comercial do mesmo código, porém com algumas melhorias, como, por exemplo, a capacidade de refinamento de malha automático (PATTERSON e RAO, 2014).

- FALCON.m

É uma ferramenta para solução de problemas de controle ótimo cujo desenvolvimento se iniciou no ano de 2016 pelo *Institute of Flight System Dynamics* da Universidade Técnica de Munique (RIECK, BITTNER, *et al.*, 2016). Tem como base a utilização de métodos de colocação trapezoidal, com aproximações lineares para os controles. Tal pacote é disponibilizado através de uma biblioteca de classes em MATLAB, e apresenta algumas rotinas para melhoria de desempenho do código que incluem o cálculo analítico das derivadas das equações dinâmicas do modelo, das restrições de trajetória e de fronteira e da função de custo; e a obtenção automatizada dos padrões de esparsidade do problema. Tal ferramenta tem sofrido permanentes atualizações.

- CasADi

O CasADi é um projeto criado por Andersson, Gillis, *et al.* (2018) em seus respectivos trabalhos de doutorado no Centro de Otimização em Engenharia (OPTEC) da Universidade Católica de Leuven, na Bélgica. Esta é uma ferramenta de código aberto para solução de problemas de controle ótimo e possui uma gama de diferentes sub-rotinas para melhoria de seu desempenho, como, por exemplo, a capacidade de manipulação simbólica das expressões matemáticas. Além disso, ela também apresenta como vantagem a possibilidade de utilização em diferentes linguagens de programação, como MATLAB/Octave, Python e C++.

- PSOPT

Este pacote teve sua primeira versão disponibilizada no ano de 2009, e hoje é mantido e atualizado por Becerra (2010). Esta ferramenta é implementada em C++ e utiliza métodos

de colocação direta com diferentes formas de aproximações para a trajetória como o método trapezoidal, método de Hermite-Simpson e método pseudospectral. Ele utiliza como otimizador numérico o IPOPT, mas também pode ser aplicado outros pacotes como o SNOPT. Apresenta algumas características interessantes como a capacidade de utilização de códigos de diferenciação automática e técnicas de refinamento de malha.

- SOCS

A ferramenta SOCS (Sparse Optimal Control Software) foi desenvolvida por Betts (2009) durante seus anos de trabalho na companhia Boeing. Ela é bastante explorada em seu livro (BETTS, 2010) para solução de problemas de controle ótimo utilizando métodos de colocação. Este software teve a maior parte de seus desenvolvimentos realizados nos anos 1993 e 1994 e é implementado em linguagem FORTRAN.

Apesar das ferramentas apresentadas, existem adicionalmente uma ampla quantidade de outros pacotes sendo desenvolvidos como o DIDO (ROSS, 2020), o TOMLAB/PROPT (HOLMSTRÖM e EDVALL, 2004), o NUDOCSS (HEINTZE, SEELECKE e BUSKENS, 2003), o PYOMO (HART, LAIRD, *et al.*, 2017), etc. A escolha de um pacote para utilização irá depender: da habilidade do usuário com a linguagem de programação utilizada; da possibilidade de alteração das rotinas, uma vez que vários deles não possuem seus códigos abertos; do desempenho apresentado pelo pacote; etc.

6 APLICAÇÕES E RESULTADOS

A partir do que foi apresentado neste trabalho, pode-se afirmar que existe uma série de questões a serem definidas durante a formulação e solução do problema de otimização de trajetória de uma aeronave. Resumidamente, tais questões estão ligadas: a escolha do tipo de método utilizado para montagem do problema, ao modelo dinâmico da aeronave a ser utilizado, ao modelo de atitude mais coerente para a aplicação analisada e à seleção da função de mérito.

Conforme discutido no Capítulo 5, o Método de Elementos Finitos é uma boa alternativa para formulação do problema de controle ótimo caso se opte por uma abordagem na forma direta. Isso se deve especialmente à sua capacidade de generalização e por conseguir lidar com problemas de larga escala. Apesar da técnica de Colocação ter sido mais amplamente discutida neste trabalho, pode-se avaliar como as outras técnicas apresentadas (Subdomínios, Galerkin ou Mínimos Quadrados) irão afetar a solução do problema de otimização da trajetória. Uma das vantagens do método de colocação é a vasta quantidade de pesquisas que têm sido desenvolvidas a seu respeito nos últimos anos, o que justificou a escolha deste método nas aplicações deste trabalho.

Por isto, nesta seção são apresentadas aplicações do MEF na solução de problemas de planejamento de trajetória. As questões apresentadas no Capítulo 4 são expandidas e são solucionados problemas que mostram como a formulação dos vínculos de contorno da atitude da aeronave podem influenciar na representação matemática do problema, limitando a certas trajetórias. Discute-se sobre as principais formas de parametrização utilizadas no estudo da mecânica do voo e como cada uma delas deve ser tratada no contexto do controle ótimo. Mostra-se também o efeito da utilização das formulações propostas na Seção 3.1.4.5, de forma a garantir que os quatérnios e as matrizes de rotação se mantenham em suas respectivas variedades ao longo da solução numérica do problema. Por fim, soluciona-se um problema de otimização de trajetória de aeronave de alta complexidade, que inclui as diferentes discussões e contribuições mostradas neste trabalho. Para trajetórias deste tipo, propõe-se uma nova maneira de solução baseada em uma abordagem multifidelidade híbrida.

Para os problemas apresentados aqui fez-se o uso alternado de alguns dos softwares apresentados na Seção 5.10, uma vez que estas ferramentas já estão estruturadas para obtenção de um melhor desempenho computacional. Deu-se preferência àquelas ferramentas que estão disponíveis gratuitamente e que possuem seu código aberto, pois dessa forma pôde-se verificá-las e ajustá-las de tal maneira que elas estejam em concordância com a formulação do Método

de Elementos Finitos apresentada. Todos os resultados mostrados ao longo deste trabalho foram obtidos em um computador com 2.00 GHz Intel® Core(TM) i7-3537U e 12GB de RAM.

6.1 Influência das Condições de Contorno das Representações da Atitude na Solução do Problema de Planejamento de Trajetória

Para exemplificar as questões relacionadas à formulação das condições de contorno dos diferentes métodos de representação da atitude no planejamento de trajetória são apresentados alguns problemas. Os exemplos propostos representam problemas simples, mas que ilustram os aspectos mais relevantes das discussões levantadas no Capítulo 4. Fixou-se o índice de desempenho utilizado para todos os casos, i.e., analisou-se manobras de tempo mínimo:

$$J = t_f. \quad (6.1)$$

Porém, alternou-se entre diferentes tipos de vínculos dinâmicos e das condições de contorno. Para estas análises utilizaram-se os diferentes modelos massa-ponto da aeronave, apresentados no Capítulo 3, considerando uma atmosfera calma e assumindo que as forças aerodinâmicas laterais na aeronave podem ser desprezadas, i.e., $\beta = 0$. Utilizou-se as características de massa, aerodinâmicas e propulsivas de um caça apresentado por Well e Wever (1984), que podem ser expressas por:

$$C_L(\alpha) = \frac{3,2618E-3 + 1,4558\alpha - 0,61757\alpha^2 - 0,18929\alpha^3}{0,43758 - 0,61310\alpha + 1,1283\alpha^2}, \quad (6.2a)$$

$$C_D(\alpha) = \frac{1,0039E-3 - 8,2115E-2\alpha + 1,4343\alpha^2}{4,4860E-2 + 0,7195\alpha + 0,42795\alpha^2}, \quad (6.2b)$$

$$\rho(h) = 3,6E-9h^2 - 1,16E-4h + 1,114, \quad (6.2c)$$

$$a_{som}(h) = 20,0468\sqrt{288,15 - 6,49E-3h}, \quad (6.2d)$$

$$T = 100000(1 + 0,114M + 9,26E-5h)\delta_T. \quad (6.2e)$$

onde C_L e C_D são os coeficientes de sustentação e arrasto da aeronave respectivamente, ρ é a densidade do ar em kg/m^3 , a_{som} é a velocidade do som em m/s , M é o número de Mach, definido por $M \triangleq V/a_{som}$ e T é a tração gerada pelo grupo motopropulsor. Além disso, esta aeronave possui um peso de 7865 kgf e uma área de asa igual a 57,1 m^2 . Note que neste modelo, a tração é uma função de δ_T , a qual é assumida como variável de controle no lugar de T .

Em todas as trajetórias analisadas, a aeronave parte de coordenadas e uma velocidade inicial fixas que estão relacionadas às condições de contorno

$$\psi(t_0) : x = 0 \text{ m}, y = 0 \text{ m}, h = 1000 \text{ m} \text{ e } V = 120 \text{ m/s.} \quad (6.3)$$

Além disso, o movimento deve iniciar com asas niveladas, sem arfagem e com seu nariz apontando para norte, o que equivale aos seguintes vínculos de contorno

$$\psi(t_0) \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{q}\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \text{ e } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

para os ângulos de Euler, quatérnios e matriz de rotação, respectivamente. Note que apesar das diferentes possibilidades de representação para os ângulos de Euler e para os quatérnios, fixou-se uma delas por motivos de análise.

Todos os casos apresentados nesta seção foram solucionados via método de elementos finitos com as restrições dinâmicas impostas através da técnica de colocação para os resíduos ponderados. Os estados foram aproximados por polinômios de Hermite de terceiro grau e os controles por polinômios de primeiro grau, o que equivale ao denominado método de colocação de Hermite-Simpson. Assim o problema de controle ótimo é transcrito para um problema de programação não-linear esparso (KELLY, 2017) (BETTS, 2010). Para o caso avaliado foram utilizados 100 elementos distribuídos de forma equidistante ao longo do domínio da trajetória. O problema de controle ótimo foi formulado no pacote ICLOCS2 (NIE, FAQIR e KERRIGAN, 2018), e o problema de programação não linear foi solucionado utilizando um otimizador de ponto interior IPOPT (WACHTER e BIEGLER, 2006). Outros pacotes computacionais também foram testados como o CasAdi (ANDERSSON, GILLIS, *et al.*, 2018) e o FALCON.m (RIECK, BITTNER, *et al.*, 2016), onde resultados similares àqueles que serão apresentados a seguir foram obtidos.

6.1.1 Exemplo 1

Para o primeiro problema, analisou-se a trajetória ótima onde a aeronave deve retornar ao ponto de partida, com a mesma atitude inicial, no menor tempo possível e com velocidade final em aberto. Solucionou-se o problema utilizando inicialmente os quatérnios unitários como representação, cujos vínculos de contorno para o final da trajetória foram escolhidos na forma:

$$\psi(t_f) : \{q\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (6.5)$$

A FIGURA 6.1 mostra a vista lateral da trajetória resultante para este problema e a FIGURA 6.2 apresenta os quatérnios resultantes ao longo da trajetória.

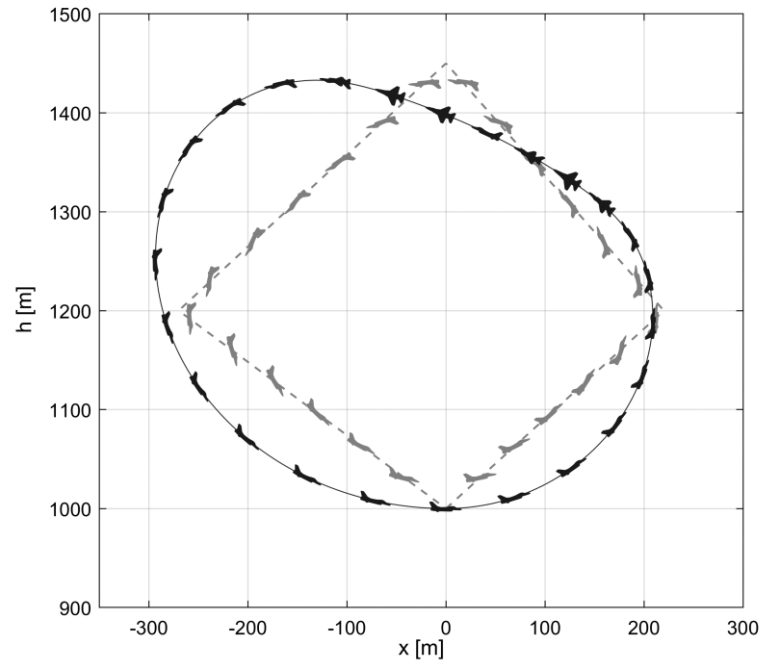


FIGURA 6.1 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. As aeronaves em preto indicam a solução ótima obtida, enquanto que as cinzas representam a solução inicial utilizada no problema.

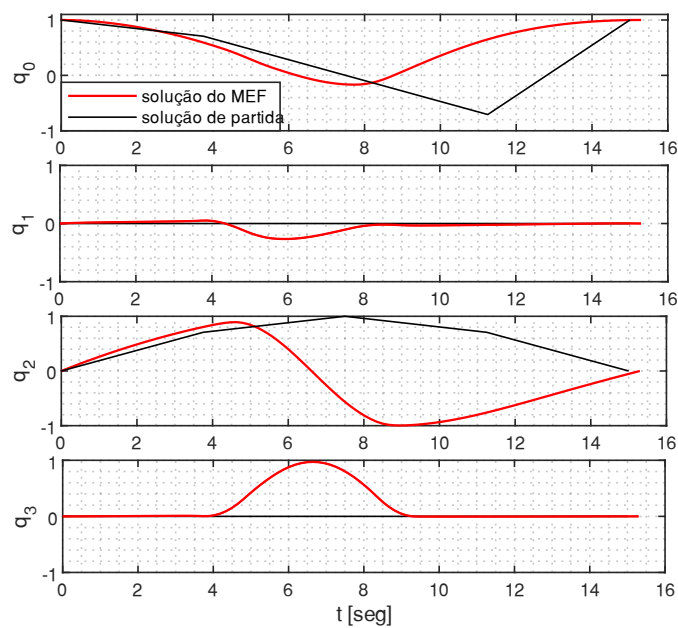


FIGURA 6.2 - Trajetória de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 1, para os quatérnios finais iguais a $\{q\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.

O tempo final obtido é igual a 15,2962 s. Observa-se que aeronave rola em torno de seu eixo longitudinal antes de atingir o topo da manobra. Este comportamento pode ser visto também nos ângulos de Euler da FIGURA 6.3, os quais foram obtidos a partir dos quatérnios pela Eq.(3.67). Pode-se notar a rotação completa do ângulo de rolamento μ entre aproximadamente 4 e 10 segundos do movimento.

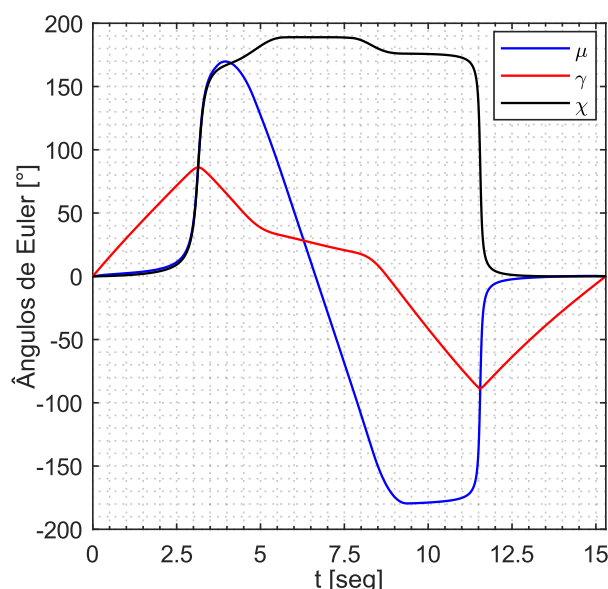


FIGURA 6.3 - Ângulos de Euler relativos à trajetória ótima obtida para os quatérnios finais iguais a $\{\mathbf{q}\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$.

Isto ocorre como consequência dos vínculos de contorno escolhidos para os quatérnios. Para melhor entendimento, podemos retornar à trajetória (a) da FIGURA 4.11 no caso 4 da Seção 4.1. Como discutido naquela situação, após a execução da trajetória, notou-se que os quatérnios sofrem uma inversão em seus valores em relação ao início da manobra, pois durante o movimento a aeronave rotaciona em 2π em torno de y_B . No caso do problema de otimização, uma vez requerido que $q_0 = +1$, a aeronave precisa realizar uma rotação adicional, em torno de um eixo qualquer, para que o quatérnio atinja valor antipodal solicitado.

É importante notar que durante a otimização da trajetória de aeronaves, esta inversão do quatérnio irá ocorrer geralmente a partir de um rolamento. Ela também poderia advir através da rotação completa em torno de y_B ou z_B , caracterizadas pelos movimentos de arfagem e guinada, respectivamente. No entanto, tais trajetórias teriam tempos de execução ainda maiores do que

para a apresentada, uma vez que as rotações nestes eixos oferecem maior resistência ao movimento do que o rolamento.

Este comportamento é um caso particular das limitações intrínsecas às formas de parametrização apresentadas na Seção 4.1, denotado por Fenômeno de Desenrolamento.

Considerando-se inicialmente como ele se manifesta em sistemas de controle realimentado, contexto no qual ele foi primeiramente descrito (BHAT e BERNSTEIN, 2000). Um sistema dinâmico invariante no tempo sob uma lei de controle com uma referência constante é descrito como um campo vetorial sobre a variedade do espaço de estados. Neste tipo de realimentação, o sistema é autônomo e sua função de evolução é um semifluxo. Um semifluxo é definido por uma característica particular de que o restante de uma trajetória que passa por um determinado ponto do espaço de estados é igual à trajetória que se inicia neste ponto²³. Uma propriedade das variedades de cobertura é que a projeção de um semifluxo de $SO(3)$ em $\mathbb{S}^3$ ou em $(\mathbb{S}^1)^3$ não é, em geral, um semifluxo, pois existem trajetórias de quatérnio e de ângulos de Euler sem interseção cujas projeções para o grupo de rotações 3D se intercedem e, como tal, não são sistemas autônomos associados a um campo vetorial. Quando isto acontece, as projeções representam uma família de movimento que apresentam o desenrolamento (BHAT e BERNSTEIN, 2000).

Este fenômeno já havia sido constatado para os quatérnios em problemas de otimização de trajetória (LEE e MESBAHI, 2013), porém apenas em casos mais simples, como os de reorientação de satélites, onde apenas a dinâmica da atitude é considerada. Nestes casos, o fenômeno de desenrolamento pode ser evitado utilizando uma métrica capaz de capturar a distância geodésica²⁴ em $\mathbb{S}^3$ como uma distância Euclidiana entre a atitude inicial e final do movimento. Para tanto, Lee e Mesbahi (2013) mostram que o comprimento de arco entre dois pontos na esfera unitária $\mathbb{S}^3$ é proporcional ao comprimento de corda entre estes pontos, como mostrado na FIGURA 6.4.

²³ Este conceito é análogo ao conceito das linhas de corrente no campo de escoamento de um fluido em regime estacionário, porém aplicado ao espaço de estados.

²⁴ Curva que descreve o menor arco entre dois pontos em uma superfície.

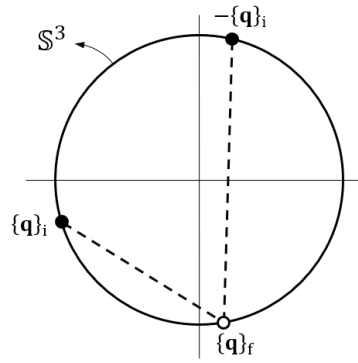


FIGURA 6.4 - Distância entre pontos em uma esfera
Adaptado de Lee e Mesbahi (2013)

Portanto, dada uma atitude inicial $\{q\}_i$ e uma atitude final $\{q\}_f$, pode-se fornecer as condições de contorno e a solução inicial para o problema para o caso onde se obteve o menor comprimento de corda, ou seja, entre:

$$\|\{q\}_i - \{q\}_f\| \quad \text{e} \quad \|\{q\}_i + \{q\}_f\|, \quad (6.6)$$

evitando que o satélite rotacione mais do que o necessário para atingir a sua orientação espacial final.

Para o problema de planejamento de trajetória de aeronaves, no entanto, este fenômeno ainda não havia sido constatado. Nestes casos, as trajetórias são mais complexas, uma vez que o movimento do corpo envolve tanto mudança de atitude quando de posição espacial, ou seja, a dinâmica dele acopla rotação com translação. Portanto, visto que a trajetória deve ser avaliada como um todo, torna-se difícil definir as condições apropriadas para que este comportamento seja evitado.

Quando as condições de contorno finais escolhidas são na forma

$$\psi(t_f) : \{q\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (6.7)$$

o fenômeno não ocorre, conforme mostrado na FIGURA 6.5, FIGURA 6.6 e FIGURA 6.7²⁵.

Neste caso o tempo final obtido foi igual a 14,4053 s. Pela comparação entre os índices de desempenho dos dois casos, nota-se que a utilização indevida dos vínculos de contorno limita, de certo modo, a representação matemática do problema físico, conforme mostrado no Capítulo 4.

²⁵ Observe que quando os ângulos de Euler são obtidos através da Eq.(3.67), pode-se notar certas discontinuidades uma vez que estas equações estão limitadas aos intervalos indicados para que haja uma projeção biunívoca.

Como discutido, pode-se inverter ambas estas condições de contorno e o efeito ainda assim seria evitado. Para ambos os casos, a solução inicial é igual, representada pelas linhas e aeronaves em cinza, exceto para o quaternio final, o qual se assumiu ser o mesmo da condição de contorno de cada caso.

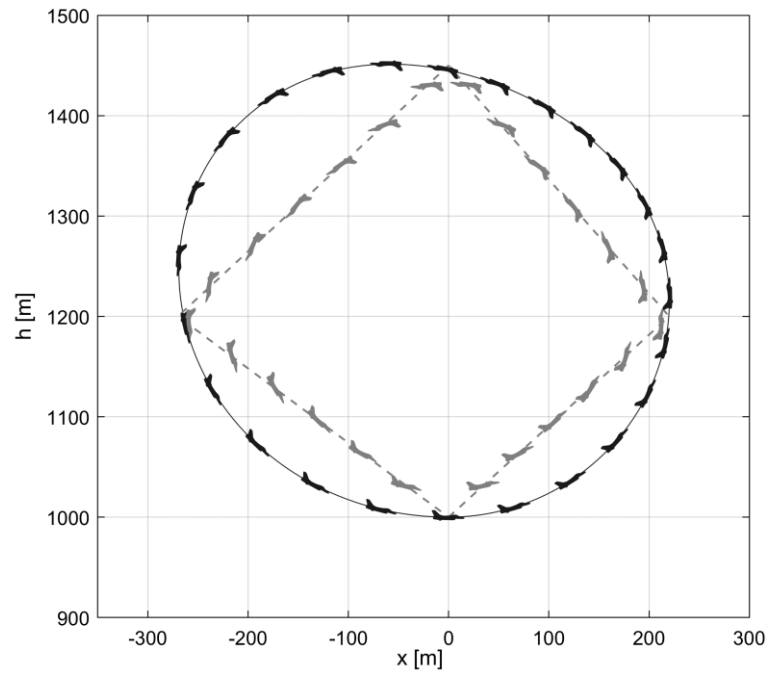


FIGURA 6.5 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1, para os quaternios finais iguais a $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. As aeronaves em preto indicam a solução ótima obtida, enquanto que as cinzas representam a solução inicial utilizada no problema.

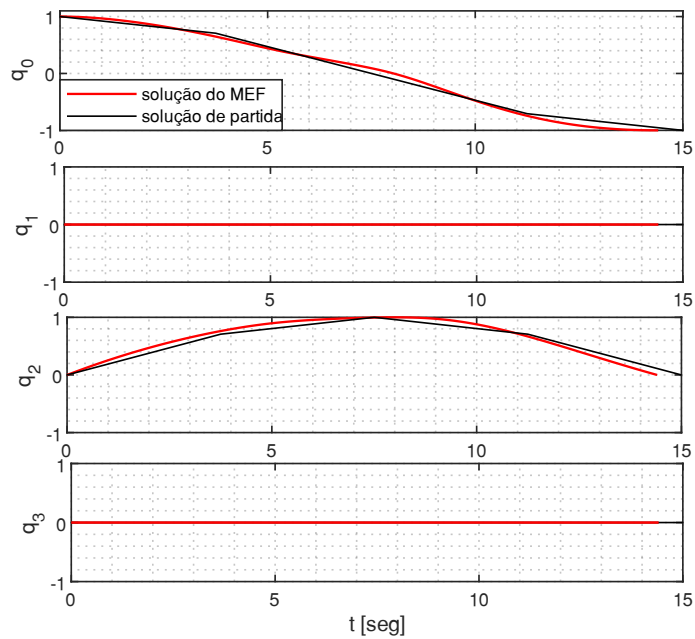


FIGURA 6.6 - Trajetória de tempo mínimo dos quaternios do Exemplo 1, para os quaternios finais iguais a $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.

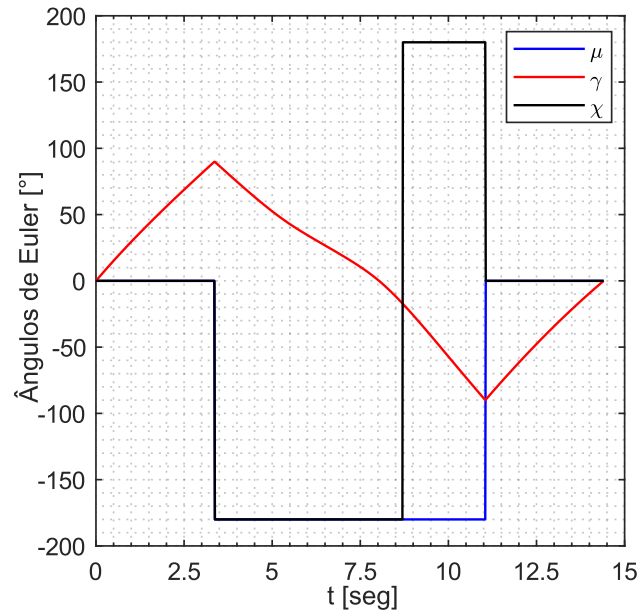


FIGURA 6.7 - Ângulos de Euler relativos à trajetória ótima obtida para os quatérnios finais iguais a $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$.

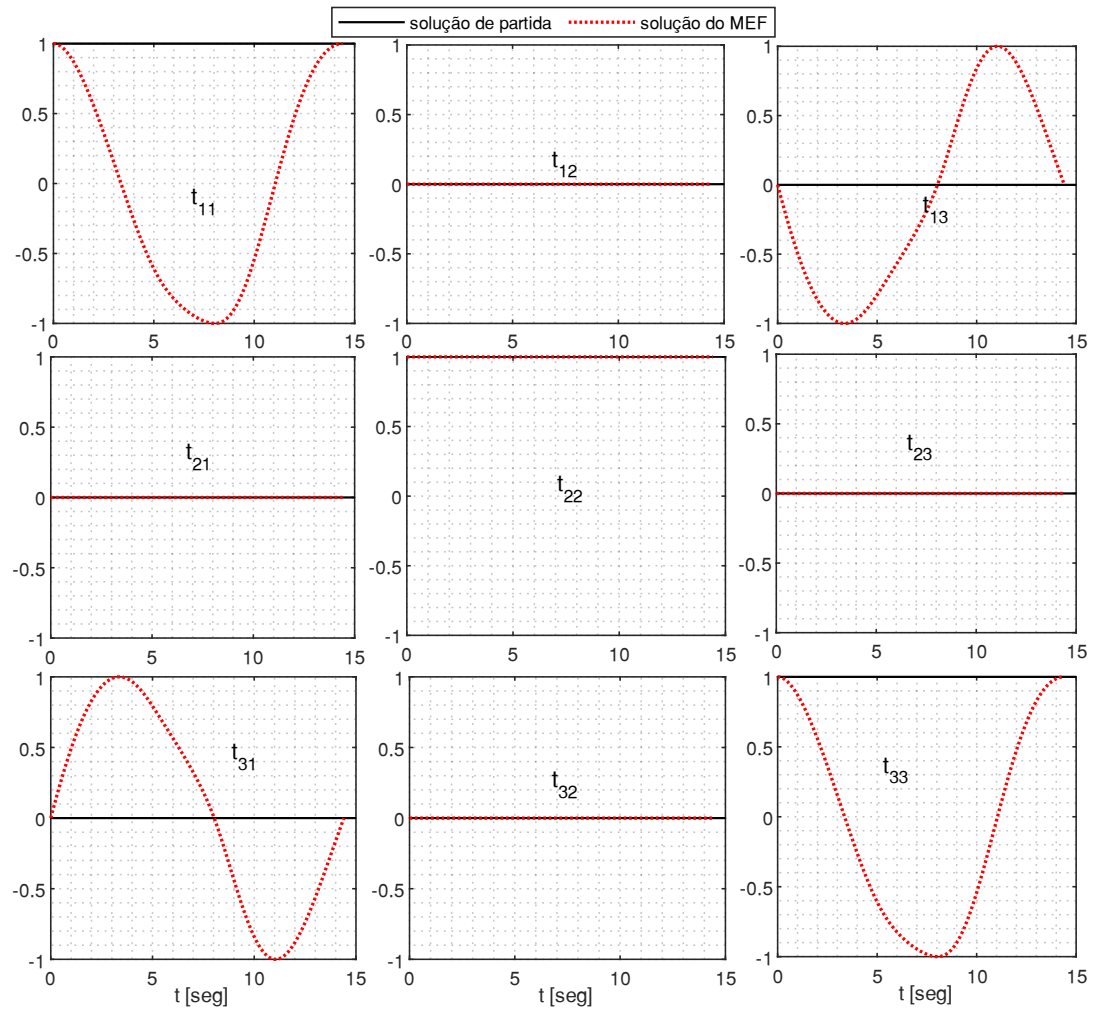


FIGURA 6.8 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 1 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.

Apesar do problema formulado não se restringir ao plano x-h, a trajetória obtida pode ser aproximada por um looping no qual a aeronave executa seu movimento circular em um plano vertical com uma razão de arfagem positiva ao longo de todo percurso.

Ainda neste caso, solucionou-se o problema representando a atitude da aeronave utilizando as matrizes de rotação. O resultado obtido é o mesmo que aquele apresentado pela FIGURA 6.5, obtendo um mesmo tempo mínimo. A trajetória dos elementos da matriz de cossenos diretores desta solução está apresentada na FIGURA 6.8.

Uma consequência de se utilizar esta representação é de que o problema de otimização resultante possui um maior número de variáveis de decisão, podendo levar a um maior tempo de solução do problema. A solução apresentada na FIGURA 6.5 levou 126.7 segundos de tempo de processamento utilizando quatérnios e 165.5 segundos utilizando matrizes de rotação²⁶. No entanto, quando o desenrolamento ocorre a otimização levou ainda mais tempo para ser resolvida, em 248.5 segundos.

6.1.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo, as coordenadas finais da trajetória foram definidas de acordo com as seguintes condições de contorno:

$$\psi(t_f) : x = 1000 \text{ m}, y = 100 \text{ m} \text{ e } h = 1000 \text{ m}. \quad (6.8)$$

Incluiu-se também uma restrição de trajetória adicional para este caso limitando a altitude mínima de voo na forma

$$\varphi(t) : (1000 - h) \leq 0. \quad (6.9)$$

A aeronave deve atingir estas coordenadas com a mesma atitude de partida. Neste caso, os vínculos de contorno relacionados aos parâmetros de Euler-Rodrigues foram formulados conforme a proposta apresentada na Seção 4.2, i.e.,

$$\psi(t_f) : \|\{\mathbf{q}\} - \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}\| \cdot \|\{\mathbf{q}\} + \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}\| = 0. \quad (6.10)$$

Note que a aplicação do vínculo sugerido implica que o quatérnio pode assumir o valor $\{\mathbf{q}\} = \{+1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ ou do seu antipodal, i.e., $\{\mathbf{q}\} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, ao final da

²⁶ Os tempos apresentados são médias de 10 soluções

trajetória. O objetivo é modelar os vínculos de contorno de tal forma que o modelo matemático possa ter uma representação adequada do problema físico.

O problema numérico foi resolvido utilizando duas soluções de partida distintas. Em ambas, os estados são assumidos como retas que partem da sua condição final à inicial. Porém, em um dos casos assumiu-se para q_0 uma reta entre $+1$ e $+1$, enquanto no outro assumiu-se uma reta entre $+1$ e -1 . Todas variáveis de controle foram inicializadas como zero, exceto δ_T , o qual se assumiu um valor unitário constante. As soluções obtidas para ambos estes casos, bem como as soluções de partida dos quatérnios, estão apresentadas na FIGURA 6.9 e FIGURA 6.10.

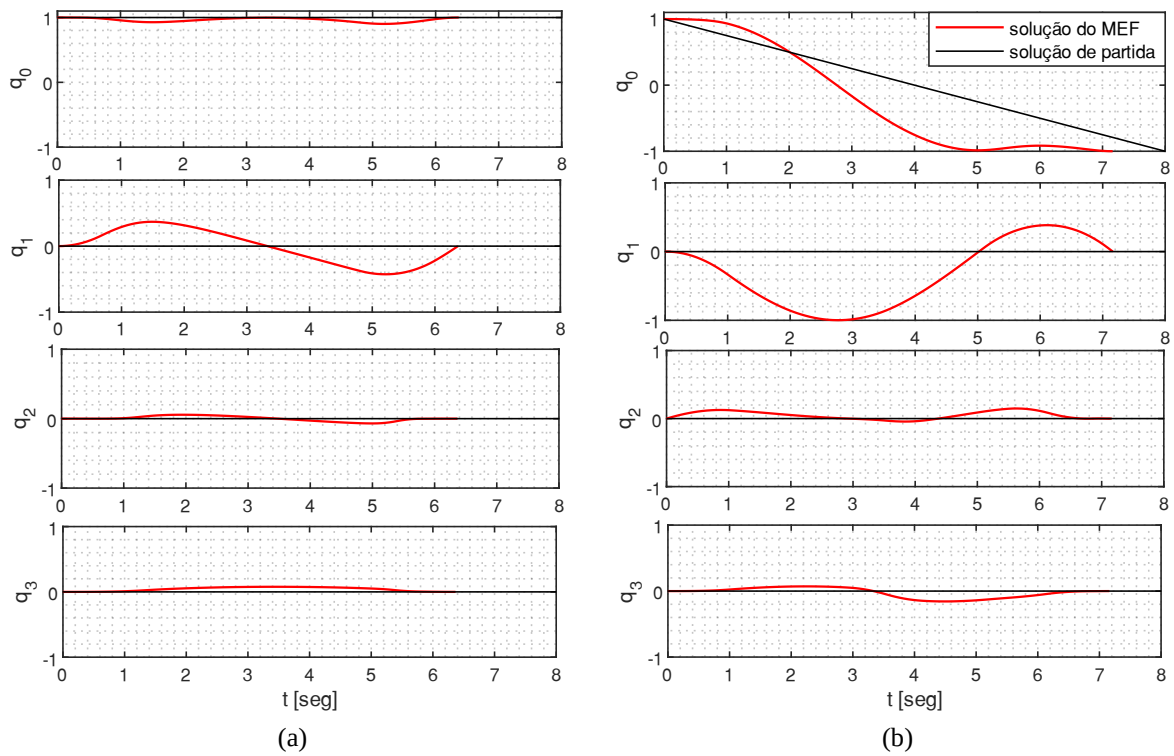


FIGURA 6.9 - Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 2, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_0(t_f) = +1$
(b) $q_0(t_f) = -1$.

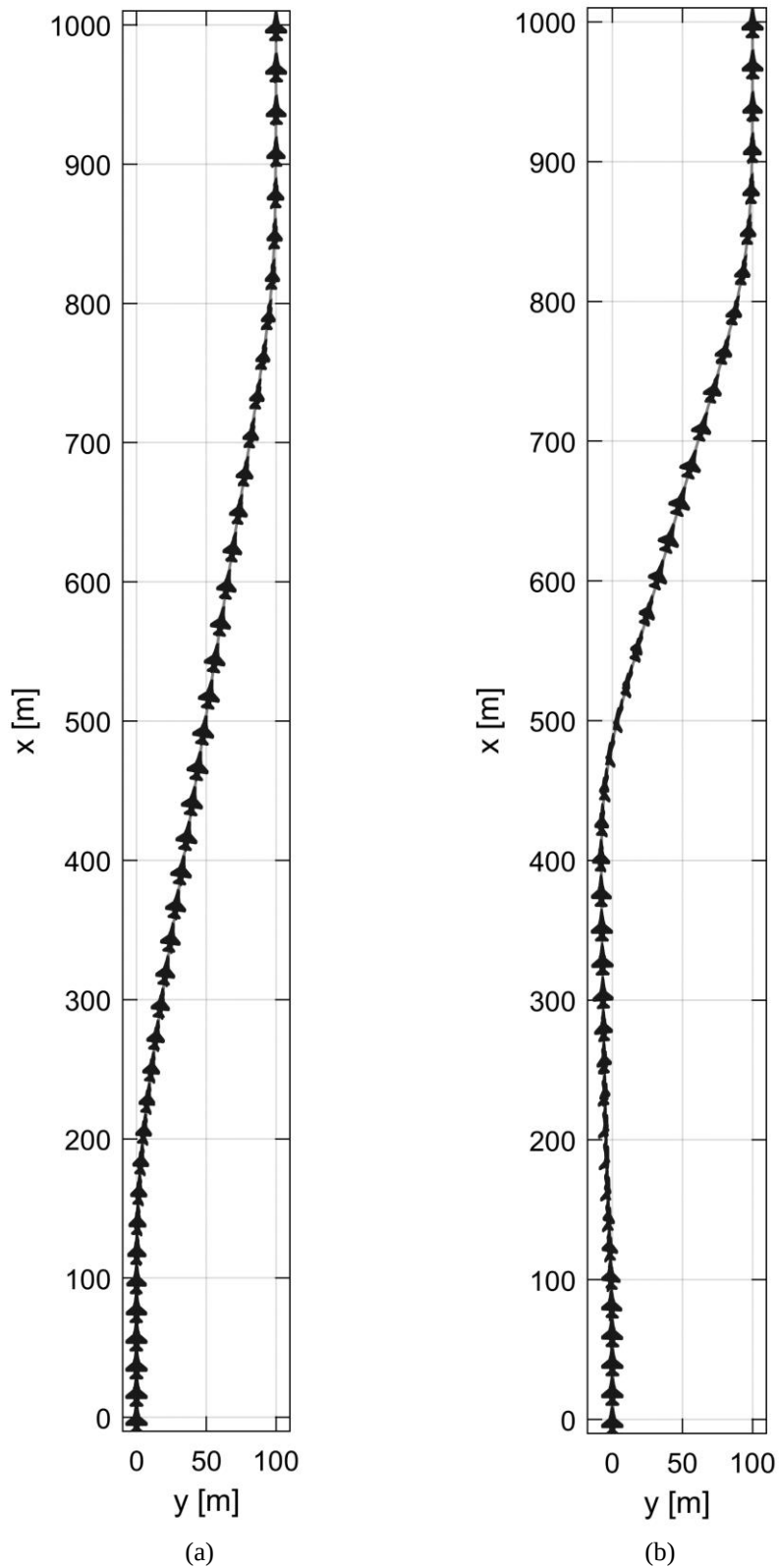


FIGURA 6.10 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 2 utilizando quatérnios unitários, para soluções de partida distintas. (a) $q_0(t_f) = +1$ (b) $q_0(t_f) = -1$.

Os ângulos de Euler foram obtidos a partir dos quatérnios de ambas soluções para melhor visualização da atitude da aeronave, apresentados na FIGURA 6.11.

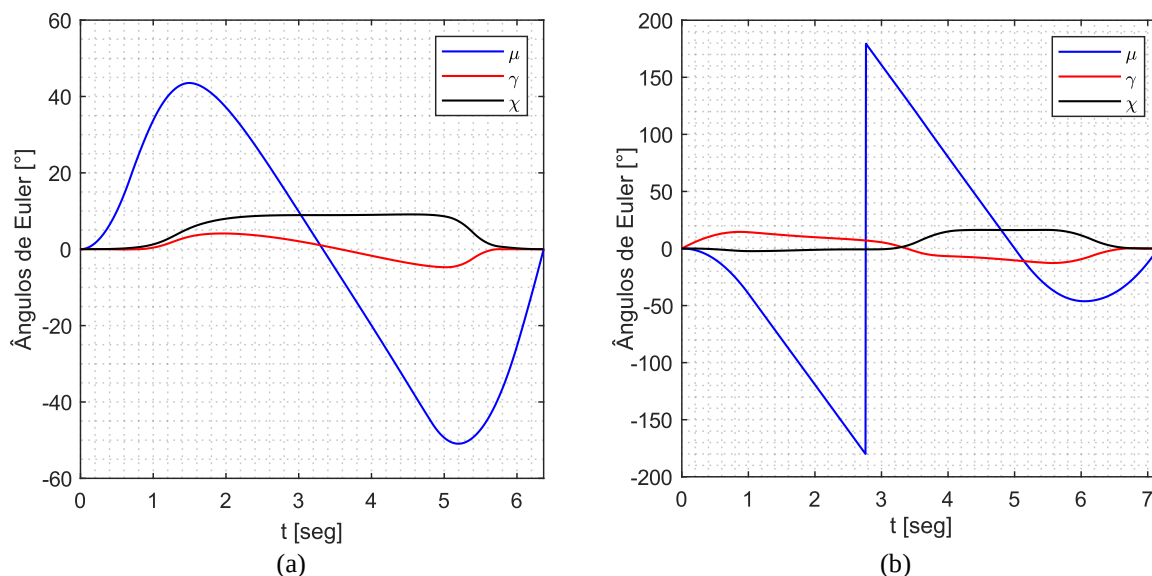


FIGURA 6.11 - Ângulos de Euler relativos à trajetórias ótimas obtidas para as diferentes soluções de partida do Exemplo 2.

Atenta-se para o fato de que na solução (b), apresentada pela FIGURA 6.10(b), a aeronave realiza um rolamento antes de atingir sua condição final, apresentando novamente o fenômeno de desenrolamento. Para a solução (a), apresentada pela FIGURA 6.10(a), o índice de desempenho minimizado apresentou um valor de $t_f = 6.3666$ s, enquanto que para a solução (b), um valor de $t_f = 7.1613$ s. A fim de avaliar se os pontos obtidos são mínimos locais, fez-se uma perturbação em ambas soluções, somando valores aleatórios às variáveis de estado e controle da solução obtida. Um procedimento semelhante foi aplicado a todas soluções obtidas nos exemplos adiante. Os resultados obtidos foram semelhantes àqueles apresentados na FIGURA 6.9(a) e FIGURA 6.10(a). Logo, aparentemente, as soluções alcançadas são ótimos locais do problema.

Pode-se verificar por este exemplo que, mesmo que a formulação dos vínculos de contorno para os quatérnios seja feita de uma maneira coerente, uma escolha inadequada para as soluções iniciais pode resultar em trajetórias onde um comportamento indesejado ocorre. O problema também foi solucionado pela matriz de cossenos diretores, onde utilizou-se valores constantes em cada um dos seus termos na solução de partida, convergindo para a mesma solução mostrada pela FIGURA 6.10(a).

6.1.3 Exemplo 3

Em um terceiro estudo buscou-se a trajetória de tempo mínimo entre dois pontos distintos, onde requer-se que a aeronave realize seu movimento em altitude constante igual a 1000 m, o que é incluído no problema matemático como uma restrição de trajetória de igualdade nos estados na forma:

$$\varphi(t) : (h - 1000) = 0. \quad (6.11)$$

As coordenadas ao final da trajetória são impostas pela restrição de contorno:

$$\psi(t_f) : x = -500 \text{ m}, y = -50 \text{ m} \text{ e } h = 1000 \text{ m}. \quad (6.12)$$

Além disso, ao fim do movimento, exige-se que a aeronave tenha sua proa voltada para sul, com asas niveladas e sem arfagem. Do ponto de vista dos ângulos de Euler, isso significa que ao final da trajetória, ter-se-á:

$$\mu = 2\pi n_1, \gamma = 2\pi n_2 \text{ e } \chi = \pi + 2\pi n_3 \quad \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \quad (6.13)$$

Em outras palavras, existem inúmeras representações possíveis para as condições de contorno final do problema. Por simplificação, assumiu-se que $\mu = 0$ e $\gamma = 0$. Além disso, para efeitos de análise considerou-se que χ pode assumir os valores de $-3\pi, -\pi, \pi$ ou 3π ao fim da trajetória. Logo, de acordo com a técnica de formulação proposta na Seção 4.2, os vínculos de contorno finais têm a forma:

$$\psi(t_f): (\chi + 3\pi)(\chi + \pi)(\chi - \pi)(\chi - 3\pi) = 0 \quad (6.14)$$

Este vínculo impõe que o valor final de χ pode apresentar qualquer uma das quatro condições finais assumidas. Note que apesar da formulação utilizada, i.e., conforme a proposta dada pela Eq.(4.7), este vínculo utilizado não engloba todas as múltiplas possibilidades dos ângulos para o contorno. Uma alternativa seria escolher um conjunto de ângulos prováveis por inspeção. Porém, a rigor, não se sabe quais valores devem ser usados, limitando de certa forma a representação do problema. A maneira mais adequada para a formulação é aquela apresentada pela Eq.(4.11), onde as múltiplas representações dos ângulos de Euler são incluídas nos vínculos de contorno do problema. Apesar de ter-se utilizado uma formulação mais simples para este exemplo, resultados semelhantes aos que serão apresentados a seguir são obtidos também pela formulação dada pela Eq.(4.11). O problema foi solucionado utilizando quatro soluções de partida distintas. Em todas elas assumiu-se uma variação linear entre as condições iniciais e finais dos estados ao longo da trajetória. Dentre as quatro formas utilizadas, a única variável que possui uma solução de partida que varia de um caso para outro é χ . As trajetórias finais obtidas para cada condição de partida, os ângulos de Euler correspondes, bem como os valores na solução de partida dos ângulos χ , estão apresentados na FIGURA 6.12 e na FIGURA 6.13.

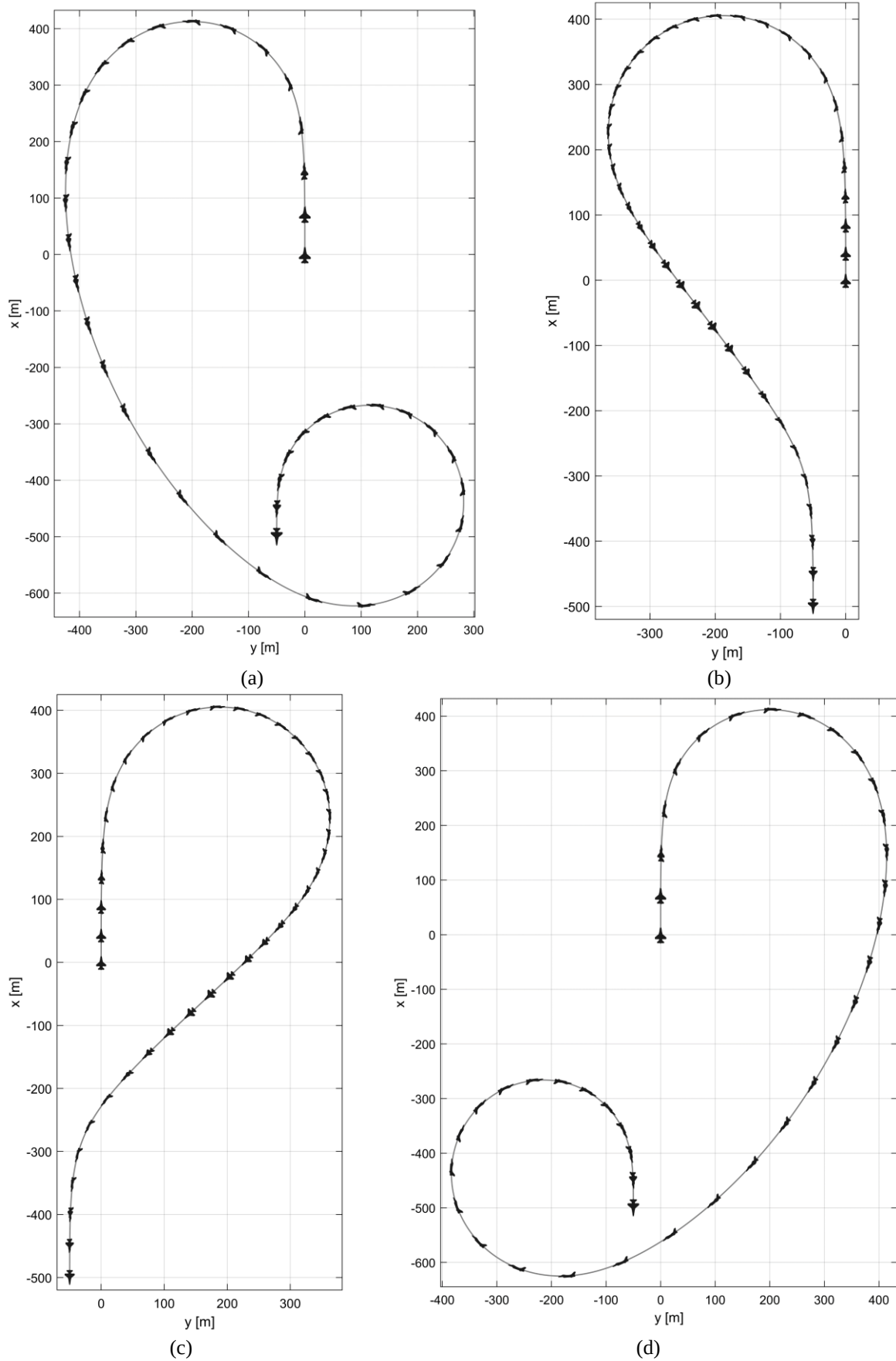


FIGURA 6.12 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 3 utilizando ângulos de Euler, para soluções de partida distintas. (a) $\chi(t_r) = -3\pi$; (b) $\chi(t_r) = -\pi$; (c) $\chi(t_r) = +\pi$; e (d) $\chi(t_r) = +3\pi$.

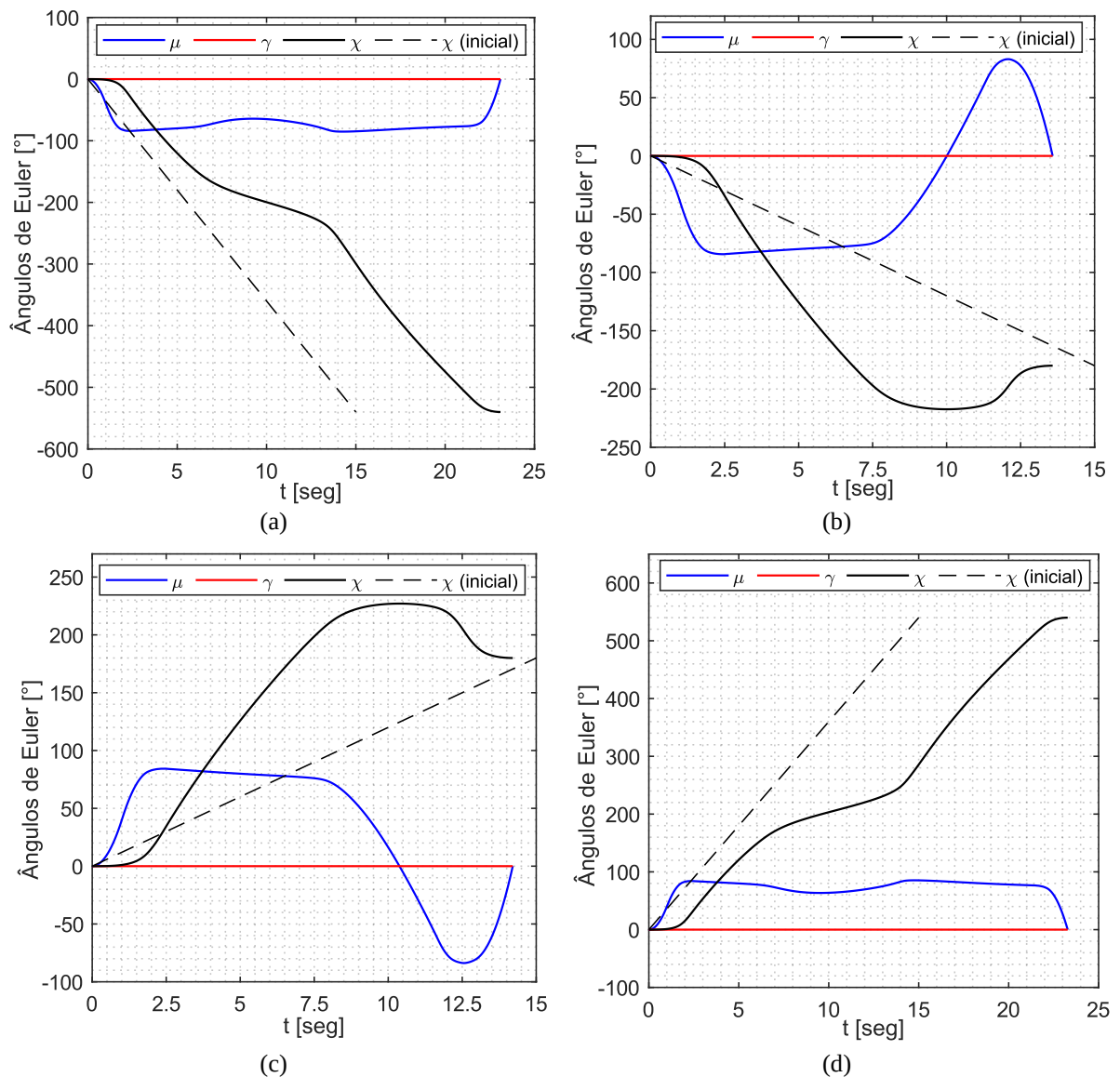


FIGURA 6.13 - Trajetórias de tempo mínimo dos ângulos de Euler do Exemplo 3, para soluções de partida distintas. A linha pontilhada indica as diferentes soluções de partida de χ . (a) $\chi(t_f) = -3\pi$; (b) $\chi(t_f) = -\pi$; (c) $\chi(t_f) = +\pi$; e (d) $\chi(t_f) = +3\pi$.

Observa-se que para cada solução de partida fornecida, a trajetória convergiu para uma solução distinta. Em cada uma delas convergiu-se para uma condição viável pelos vínculos de contorno colocados, uma vez que pela formulação proposta o valor final de χ pode ser -3π , $-\pi$, $+\pi$ ou $+3\pi$. Vale destacar que, devido às coordenadas impostas ao final do trajeto, os movimentos resultantes não são simétricos. Os valores obtidos para os índices de desempenho das trajetórias mostradas na FIGURA 6.12 foram de 23,0966s, 14,1699s, 14,8904s e 23,2802s para os casos (a), (b), (c) e (d), respectivamente. De maneira semelhante ao Exemplo 2 (Seção 6.1.2), perturbou-se as soluções finais obtidas e notou-se que as trajetórias finais retornam para cada solução respectiva, o que sugere que estes resultados são ótimos locais.

Neste exemplo fica claro que não é trivial a formulação dos vínculos de contorno do problema para quando se utilizam os ângulos de Euler como representação da atitude. Pois, mesmo que eles englobassem todas condições possíveis, a trajetória final está sujeita às condições de partida que levam a soluções indesejadas. Além disso, a não inclusão de certas condições de contorno irá excluir determinadas soluções do problema, limitando a representação matemática do problema físico.

Nas trajetórias (a) e (d) da FIGURA 6.12, note que a aeronave precisou executar uma volta adicional para que se atingisse a condição final do movimento, o que mostra o aparecimento do fenômeno de desenrolamento pelos ângulos de Euler também.

Este problema também foi solucionado utilizando os quatérnios unitários, cujos vínculos de contorno para o final da trajetória foram colocados na forma:

$$\boldsymbol{\psi}(t_f): \|\{\mathbf{q}\} - \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}\| \cdot \|\{\mathbf{q}\} + \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}\| = 0. \quad (6.15)$$

Desta maneira, inclui-se tanto o quatérnio referente à atitude final da aeronave quanto seu antipodal, i.e., $\{\mathbf{q}\} = \{0 \ 0 \ 0 \ \pm 1\}^T$, como possibilidades para as condições finais. De forma semelhante aos ângulos de Euler, as soluções iniciais foram dadas de tal maneira que se considerou uma variação linear dos estados iniciais aos estados finais de contorno. Sendo assim, no caso do parâmetro q_3 , utilizam-se duas soluções de partida distintas. Os resultados alcançados são semelhantes às trajetórias obtidas pelos ângulos de Euler, mostradas na FIGURA 6.12 (b) e (c), cujos valores dos quatérnios com suas respectivas soluções de partida estão apresentados na FIGURA 6.14.

Solucionando o problema a partir das matrizes de rotação, os vínculos de contorno ao final da trajetória são únicos e dados na forma:

$$\boldsymbol{\psi}(t_f): \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Utilizando um mesmo raciocínio para a solução de partida do problema em relação ao que foi realizado nos ângulos de Euler e nos quatérnios, assumiu-se como trajetória inicial dos elementos da matriz uma variação linear de cada um deles de sua condição inicial à final estabelecida pelos vínculos de contorno. Logo, neste caso, aplicou-se apenas uma solução de partida. A solução obtida é semelhante àquela apresentada pela FIGURA 6.12(b), cuja trajetória da matriz de rotação, bem como da sua solução inicial, estão mostradas na FIGURA 6.15.

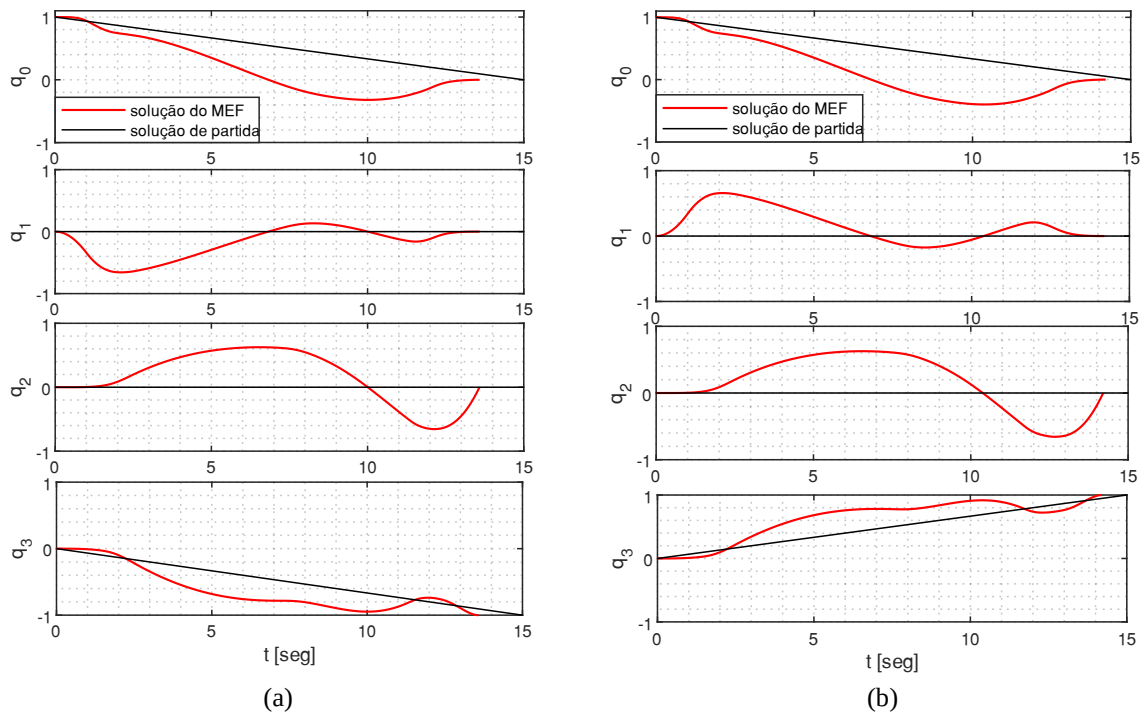


FIGURA 6.14 - Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 3, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_3(t_f) = -1$
(b) $q_3(t_f) = +1$.

Neste exemplo, pode se observar que tanto os quatérnios quanto as matrizes de rotação utilizadas na solução inicial não são necessariamente unitários ou ortogonais, e, portanto, não representam atitudes físicas. Apesar disso, na solução do problema estas representações devem estar contidas em suas respectivas variedades, o que implica em uma dificuldade adicional para estas parametrizações, como mostrado na Seção 3.1.4.5. Isso é bastante distinto dos ângulos de Euler, onde qualquer combinação de seus parâmetros representará necessariamente uma orientação espacial da aeronave. Maiores discussões a respeito deste assunto são tratadas na Seção 6.2.

Buscou-se por fim verificar se as trajetórias (a) e (d) da FIGURA 6.12, obtidas pela solução pelos ângulos de Euler, são também soluções para os casos onde a atitude é representada pelos quatérnios ou pelas matrizes de rotação. Para isso, os ângulos de Euler, obtidos por estas soluções foram convertidos em quatérnios e em matrizes de rotação para utilização como solução de partida em cada um desses casos. Os valores foram dados de forma perturbada a fim de se verificar se estas trajetórias são possíveis mínimos locais. Os resultados obtidos, tanto para os quatérnios quanto para as matrizes de rotação são semelhantes às trajetórias apresentadas na FIGURA 6.12(a) e (d), o que indica que mesmo que a forma de parametrização da atitude seja distinta, os movimentos realizados são também soluções locais

do problema. Porém, verifica-se que nestas técnicas de representação da atitude é mais difícil fornecer uma solução de partida que esteja próxima a estas soluções locais.

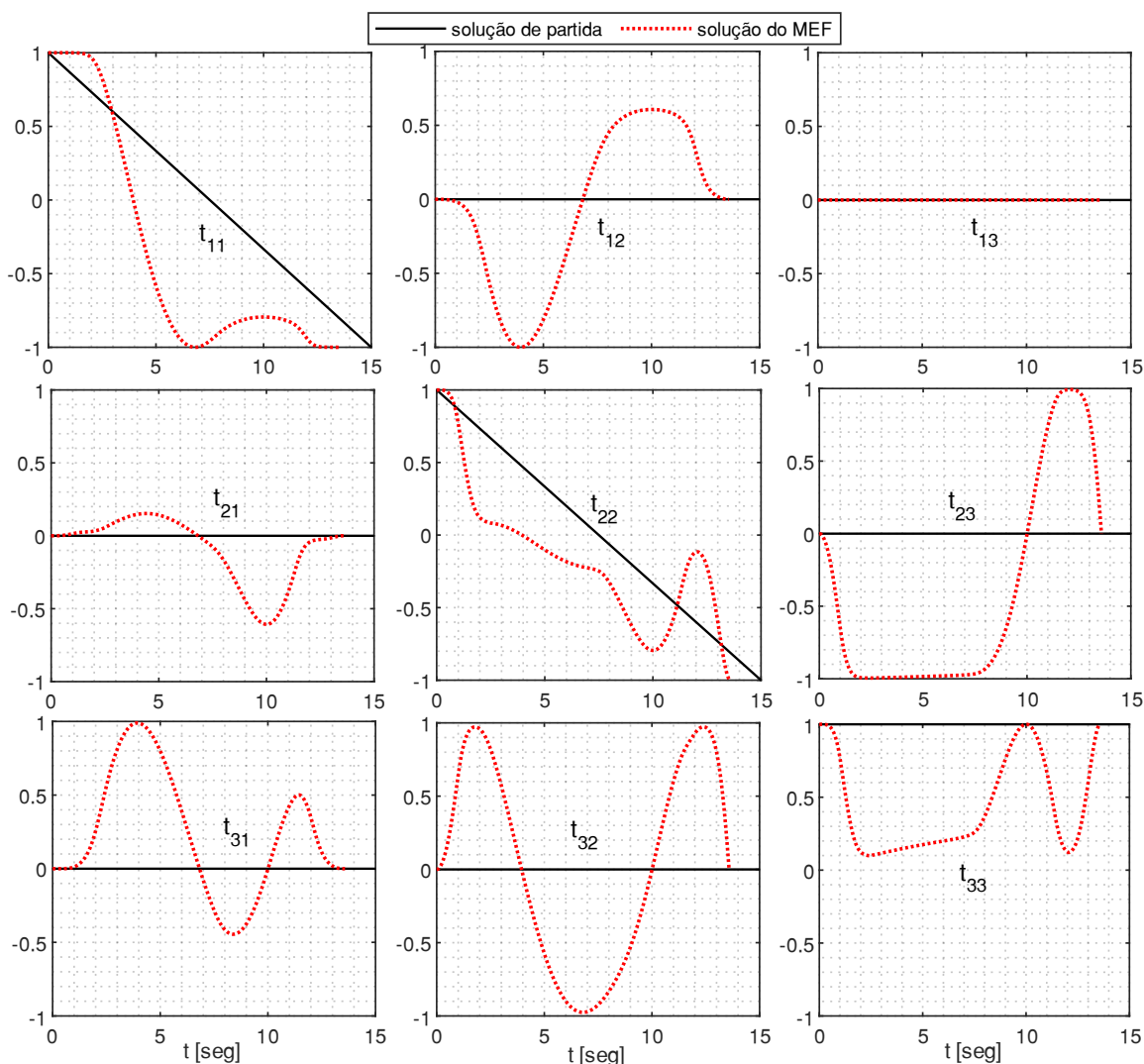


FIGURA 6.15 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 3 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.

6.1.4 Exemplo 4

Neste último exemplo, utilizou-se as mesmas condições de contorno que aquelas do Exemplo 3, porém não se restringiu a trajetória apenas ao movimento no plano x-y. Devido a possibilidade de ocorrência de singularidade nos ângulos de Euler, formulou-se o problema apenas utilizando os parâmetros de Euler-Rodrigues e a matriz de cossenos diretores. As soluções de partida adotadas aqui são iguais aquelas usadas no Exemplo 3, ou seja, empregaram-se duas soluções iniciais distintas para os quatérnios e uma solução inicial para a matriz de rotação. As trajetórias obtidas para cada caso utilizando os quatérnios estão apresentadas nas FIGURA 6.16 e FIGURA 6.17.

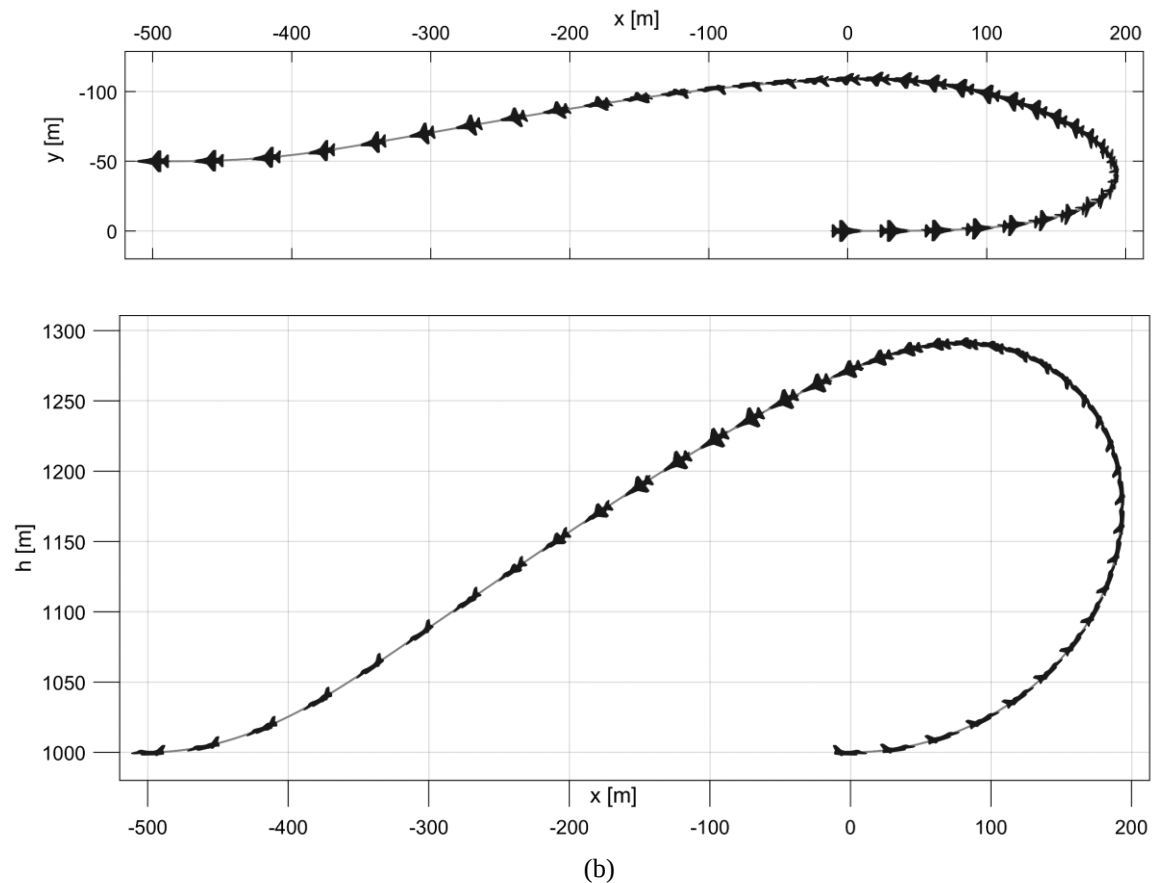
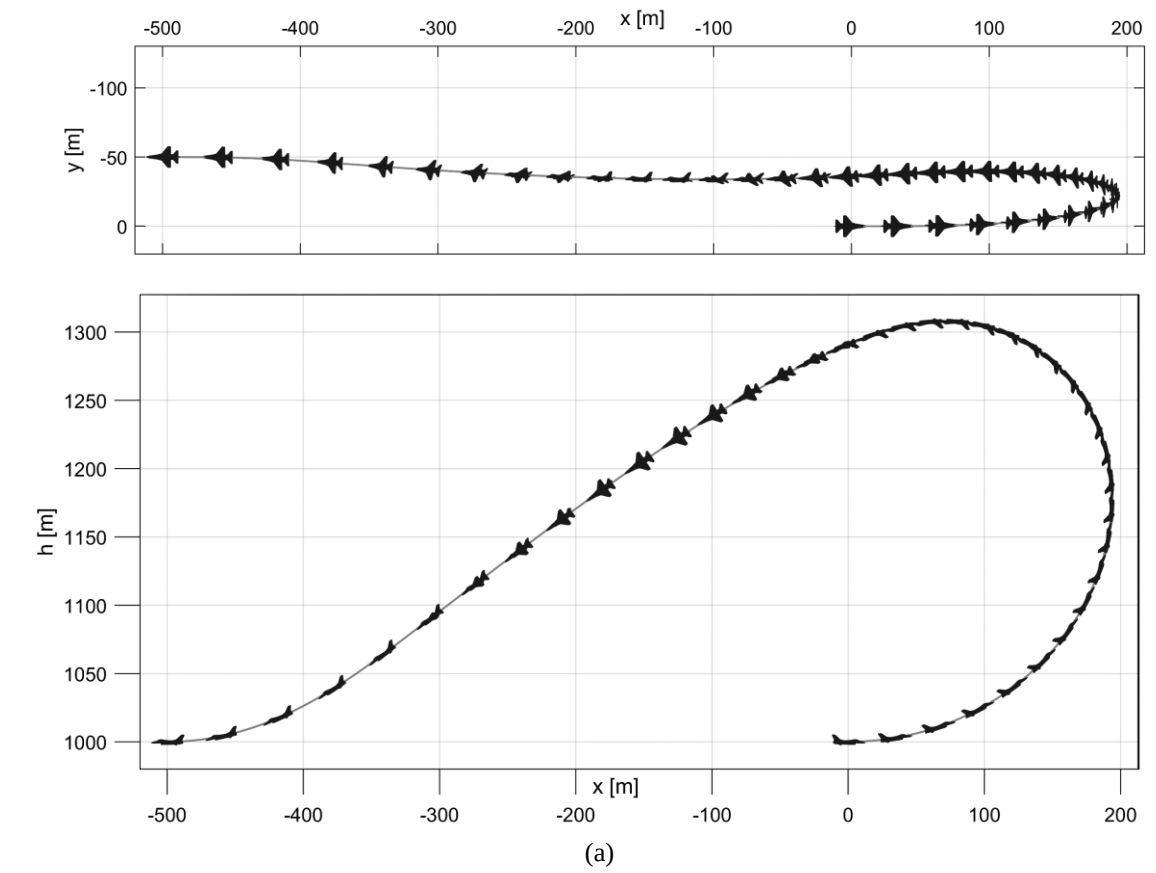


FIGURA 6.16 - Trajetórias de tempo mínimo do Exemplo 4 utilizando quatérnios unitários, para soluções de partida distintas. (a) $q_3(t_f) = +1$; (b) $q_3(t_f) = -1$.

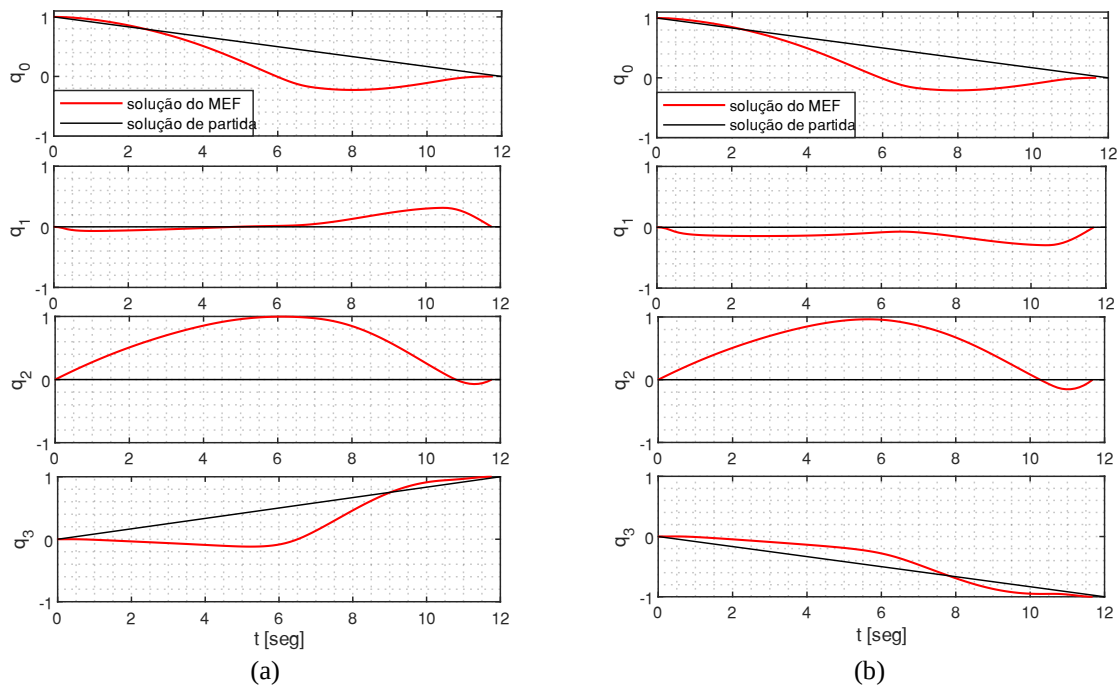


FIGURA 6.17 – Trajetórias de tempo mínimo dos quatérnios do Exemplo 4, para soluções de partida distintas. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida. (a) $q_3(t_f) = +1$ (b) $q_3(t_f) = -1$.

Enquanto a trajetória (a) da FIGURA 6.16 é resultado da solução de partida para $q_3 = +1$, a trajetória (b) é resultado da solução de partida para $q_3 = -1$, cujos valores minimizados para o índice de desempenho foram iguais a 11.7662s e 11.6791s, respectivamente. A partir da projeção lateral do movimento as trajetórias executadas aparentam similares, no entanto, observando-as como um todo, elas são bastante distintas. Isto pode ser mais claramente verificado pelo sentido de rolamento da aeronave após atingir a altitude máxima do movimento, conforme mostrado nos ângulos de Euler obtidos a partir do quatérnios da FIGURA 6.18, após o segundo 3, aproximadamente.

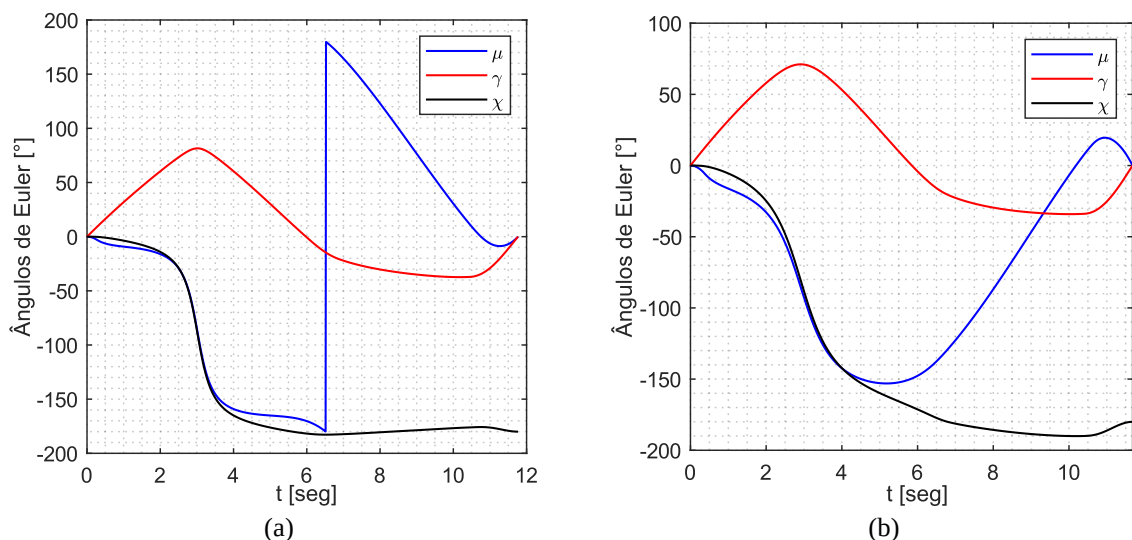


FIGURA 6.18 - Ângulos de Euler relativos à trajetórias ótimas obtidas para as diferentes soluções de partida do Exemplo 4.

Por outro lado, quando se fez uso das matrizes de rotação para expressão da atitude a trajetória obtida foi igual àquela mostrada pela letra (b) da FIGURA 6.16, correspondente à trajetória com menor índice de desempenho. As trajetórias dos parâmetros da matriz podem ser observadas pela FIGURA 6.19. Em um último teste converteu-se os valores dos elementos dos quatérnios referentes à solução (b) da FIGURA 6.17 em matrizes de rotação. Fez uma perturbação destes dados e assim foram utilizados como solução de partida para o problema fazendo uso das matrizes de cossenos diretores na representação da orientação espacial. A trajetória resultante do problema de programação matemática é igual àquela mostrada na FIGURA 6.16(a), indicando que ambas trajetórias obtidas são ótimos locais do problema de otimização.

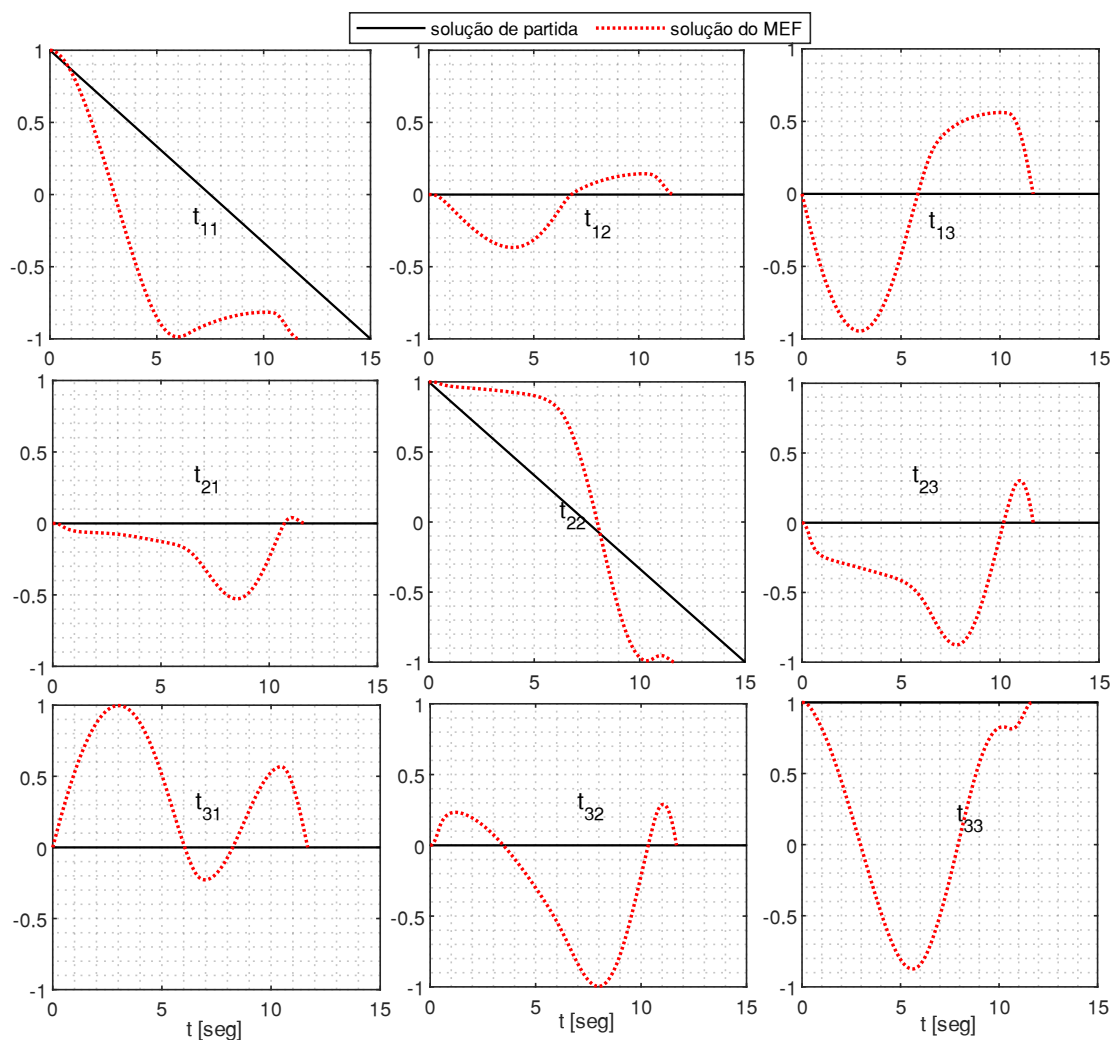


FIGURA 6.19 - Trajetória de tempo mínimo do Exemplo 4 para representação da atitude pelas matrizes de rotação. A linha vermelha indica a solução ótima obtida e a linha em preto a solução de partida.

6.1.5 Comentários

A partir dos exemplos mostrados, identifica-se que, mesmo em problemas de trajetórias aparentemente simples, definir as condições de contorno utilizando os quatérnios não é uma tarefa trivial, ainda que eles apresentem apenas uma dupla representação de $SO(3)$. Devido às múltiplas representações, esta dificuldade se acentua exacerbadamente quando se trata dos ângulos de Euler, que de acordo com a revisão bibliográfica, são a forma mais comum de representação da atitude de uma aeronave na formulação de problemas de planejamento de trajetória de aeronaves.

Além disso, os ângulos de Euler possuem um dificultador adicional que é a presença de singularidade em sua dinâmica, limitando sua aplicação. Como comentado na Seção 3.1.3.2, uma técnica utilizada para evitar tal singularidade é alternando a sequência de rotações dos ângulos, colocando a singularidade em um outro ponto da rotação. Porém, isso traz uma série de novos desafios na aplicação. Um deles está relacionado ao fato de não se saber a priori a trajetória ótima, logo não se conseguiria selecionar antecipadamente a sequência de rotações mais adequada para cada caso. Outra possibilidade seria incluir um artifício numérico para alteração da sequência de rotações durante a trajetória caso a aeronave esteja próxima da singularidade. No entanto, isto se torna uma complicação do ponto de vista de implementação do problema, uma vez que esta mudança irá alterar as equações dinâmicas dos ângulos. E, junto disso, uma vez alterada a sequência de rotações, os vínculos de contorno também devem ser alterados. Logo, pode se afirmar que apesar das qualidades relacionadas a esta forma de parametrização, formular um problema de otimização de trajetória utilizando-os é um desafio de grande complexidade.

O fato dos quatérnios possuírem apenas duas representações de uma mesma atitude simplifica a formulação dos vínculos de contorno, como proposto na Seção 4.2, onde se inclui a possibilidade de ambos quatérnios antipodais poderem ser admitidos na condição final da trajetória. Porém, assim como para os ângulos de Euler, tal sugestão não exclui certos comportamentos que podem surgir naturalmente nesta forma de parametrização, uma vez que as limitações observadas são intrínsecas à própria estrutura destes parâmetros. Dentre estas limitações observou-se um caso particular denotado por Fenômeno de Desenrolamento, o qual ainda não havia sido mencionado em trabalhos anteriores no contexto em estudo.

Diferentemente dos ângulos de Euler, o número de possibilidades para os quatérnios no início e final da trajetória é bem definido. Logo, poder-se-ia tentar encontrar a trajetória ótima por inspeção, analisando cada combinação possível. Contudo, estas possibilidades se ampliam

significativamente em problemas de maior complexidade, onde se faz uso de uma abordagem multi-fase na solução, como mostrado na Seção 6.3. Isto ocorre, pois os quatérnios das extremidades de um determinado seguimento da trajetória irão influenciar as trajetórias adjacentes.

Por fim, verificou-se que, apesar da maior quantidade de vínculos dinâmicos relacionados à matriz de rotação, a formulação das condições de contorno nesta forma de parametrização da atitude é bastante simples e direta, uma vez que há uma e apenas uma atitude da aeronave correspondente a cada matriz de cossenos diretores. Assim, diferentemente dos ângulos de Euler e dos parâmetros de Euler-Rodrigues, os vínculos de contorno não excluem certas trajetórias do problema matemático. Junto disso, apesar desta representação não garantir a otimalidade da solução, ela se mostrou mais robusta em termos da solução inicial fornecida ao problema, o que foi observado em todos testes mostrados. Nela, notou-se uma maior dificuldade de fornecer soluções de partida que convirjam para trajetórias indesejadas. Ou seja, as matrizes de cossenos diretores são uma opção clara para que a formulação do problema de otimização de trajetória seja feita de uma maneira adequada e ao mesmo tempo simples, evitando certas dificuldades relacionadas às demais técnicas de parametrização.

Devido a estas características mostradas, propõe-se na Seção 6.3 uma estratégia de solução multifidelidade híbrida, empregando os modelos dinâmicos de uma forma conveniente na solução dos problemas de planejamento de trajetória.

6.2 Integração Numérica das Equações Cinemáticas da Atitude

Conforme apresentado na Seção 3.1.4.5, as técnicas de parametrização da atitude alternativas aos ângulos de Euler apresentam um importante aspecto que deve ser avaliado quando se faz a solução de um problema de otimização de trajetória através de métodos numéricos, por exemplo, via método de elementos finitos. Tal aspecto está relacionado à representação da dinâmica dos termos dos quatérnios e da matriz de rotação, os quais devem cumprir certas restrições algébricas ligadas à sua respectiva estrutura topológica. Ou seja, os quatérnios devem apresentar norma unitária e as matrizes de rotação devem ser ortogonais e dextrogyras ao longo de toda trajetória. Para isso propuseram-se duas formas de modelagem alternativas que modificam a estrutura convencional implícita das equações diferenciais ordinárias (EDOs) destes modelos para uma estrutura semi-explicita EDA, buscando garantir de forma natural que tais restrições sejam atendidas.

Para comparar as diferentes aproximações propostas é apresentado um problema de reorientação espacial de um satélite, onde as equações dinâmicas do sistema de EDOs são:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\tau_1}{I_X} - \left(\frac{I_Z - I_Y}{I_X} \right) \omega_2 \omega_3 , \quad (6.17a)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\tau_2}{I_Y} - \left(\frac{I_X - I_Z}{I_Y} \right) \omega_1 \omega_3 , \quad (6.17b)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\tau_3}{I_Z} - \left(\frac{I_Y - I_X}{I_Z} \right) \omega_1 \omega_2 , \quad (6.17c)$$

$$\dot{T}_{2,1} = -\{\Omega_2^1\}_2 T_{2,1}. \quad (6.17d)$$

Este sistema foi selecionado, pois suas equações dinâmicas estão restritas apenas ao movimento rotacional, dando maior foco à representação da atitude. A estrutura da matriz de transformação, Eq.(6.17d), dependerá de qual representação é utilizada para descrever a cinemática da atitude do satélite. Quando a atitude é representada pelos parâmetros de Euler-Rodrigues, a matriz de transformação e a dinâmica da atitude são dadas pelas Eqs.(3.64) e (3.65), respectivamente; enquanto que, caso a matriz de cossenos diretores seja utilizada como método de parametrização, as Eqs.(3.28) e (3.43) devem ser utilizadas. Alternativamente, tais equações dinâmicas serão avaliadas também pelas formulações mostradas na Seção 3.1.4.5. O objetivo é obter as técnicas de controle que devem ser utilizadas para reorientar o satélite para executar uma manobra de rolamento de 150° em torno de seu eixo x. Note que este problema poderia ser representado apenas como um movimento bidimensional, no entanto, decidiu-se permitir todos os graus de liberdade na análise por motivo de completude. As propriedades do modelo foram obtidas do satélite NASA X-ray Timing Explorer (XTE) (MCDONALD, GRIZZEL e WANG, 2020), do qual as propriedades de inércia são

$$I_X = 5621 \text{ kg.m}^2, \quad I_Y = 4547 \text{ kg.m}^2, \quad I_Z = 2364 \text{ kg.m}^2, \quad (6.18)$$

e os controles de torque são limitados em:

$$\|\tau\| \leq 50 \text{ N.m.} \quad (6.19)$$

Dois diferentes cenários são utilizados para comparação: um para uma função de custo de mínimo tempo e outra para uma função de custo de mínimo esforço, também conhecida como mínima energia por outros autores (BETTS, 2010). Nos experimentos a seguir, as

variáveis de estado são aproximadas nos elementos por polinômios cúbicos de Hermite enquanto que as variáveis de controle são aproximadas por polinômios de primeiro grau. Além disso, as restrições dinâmicas são aproximadas utilizando a técnica de colocação equidistante, o que equivale ao método de colocação de Hermite-Simpson. O problema foi solucionado utilizando uma estratégia de refinamento do tipo-h (BETTS, 2010) com uma tolerância máxima de $\epsilon = 10^{-7}$, e uma malha inicial com 50 elementos igualmente distribuídos ao longo do domínio do tempo. Utiliza-se também uma linha reta entre as condições iniciais e finais (onde $\{\mathbf{u}\}^0(t_f) = \mathbf{0}$) como solução inicial do problema.

6.2.1 Manobra de Mínimo Tempo

A manobra abordada neste primeiro cenário é muito comum e importante em aplicações do mundo real (BILIMORA e WIET, 1993), onde a reorientação deve ser realizada em tempo mínimo começando e terminando em condição de repouso. Analisou-se inicialmente as características relacionadas à dinâmica dos parâmetros de Euler-Rodrigues. Nesta manobra, o índice de desempenho é descrito por

$$J = t_f, \quad (6.20)$$

e as condições de contorno são

$$\begin{aligned} \psi(t_0): \quad \{\mathbf{q}\} &= \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad \{\boldsymbol{\omega}\} = \mathbf{0} \\ \psi(t_f): \quad \{\mathbf{q}\} &= \left\{ \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \ 0 \ 0 \right\}^T, \quad \{\boldsymbol{\omega}\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Uma vez que os controles aparecem linearmente na dinâmica do problema, tem-se uma solução do tipo “bang-bang” com uma sequência de arcos onde todos os três componentes de controle devem estar nos limites superior ou inferior para minimizar a função de custo (BILIMORA e WIET, 1993). Betts (2010) mostra que, de acordo com as condições de otimalidade, não há uma sequência particular de arcos nos limites do controle, o que significa que diferentes combinações do controle de torque nos extremos máximo e mínimo podem levar a diferentes trajetórias, das quais todas são soluções locais ótimas. Por isso, colocou-se os controles iniciais como $\{\mathbf{u}\}(0) = [+50 \ +50 \ +50]^T$ e supôs-se um valor $t_f^{(0)} = 30$ segundos. Apesar da possibilidade da utilização da abordagem de trajetória fracionada neste problema, solucionou-se o problema considerando-se apenas uma única fase por motivos de análise. Neste problema avaliou-se a formulação EDO para os quatérnios unitários utilizando diferentes

fatores de estabilização para o método de Baumgarte, e também o modelo EDA proposto neste trabalho, i.e., aquele apresentado pelas Eqs.(3.116), (3.117) e (3.119).

A TABELA 6.1 mostra as soluções de tempo mínimo para diferentes análises, o tempo computacional total²⁷, o número total de elementos após o refinamento da malha, e a raiz do erro médio quadrático (REMQ) da norma dos quatérnios unitários nos pontos de colocação, i.e., nos pontos do domínio escolhidos para anular o resíduo relacionado aos vínculos dinâmicos.

TABELA 6.1 - Solução para diferentes análises das formulações dos quatérnios em uma manobra de tempo mínimo

	t_f (segundos)	REMQ ($\ \{\mathbf{q}\}\ - 1$)	Tempo computacional total	Número final de elementos
EDO ($\lambda_q = 0E+0$)	28.083456	7.6924E-06	182.6 s	1271
EDO ($\lambda_q = 1E-5$)	28.083455	7.6939E-06	190.7 s	1271
EDO ($\lambda_q = 1E-4$)	28.080078	4.3362E-06	151.2 s	1280
EDO ($\lambda_q = 1E-3$)	28.086966	7.8764E-06	1332.9 s	1255
EDA	28.630322	8.5426E-15	61.1 s	480

Embora tenha se alterado o fator de estabilização λ_q , todos os casos EDO apresentaram soluções *subótimas* e maiores valores de REMQ quando comparadas à solução com o modelo EDA. No último caso mostrado, as restrições algébricas garantem uma melhor normalização dos quatérnios ao longo da trajetória. O valor mínimo da função de custo e o comportamento do problema de programação não linear é sensível à escolha da constante de estabilização. Principalmente para esta última característica, onde se pode observar que para $\lambda_q = 0.001$, o tempo computacional gasto na solução é aproximadamente oito vezes maior do que para os outros casos, o que indica um mau-condicionamento do problema. Além disso, a formulação EDA apresentou um menor tempo computacional e uma solução coerente quando comparada com os resultados de outros autores (BETTS, 2010), onde foram obtidos tempos mínimos iguais a 28.630408 segundos. Ver-se-á também que a solução obtida por esta formulação é condizente com os experimentos que serão apresentados na próxima subseção.

Um cenário adicional foi proposto e analisado para se obter redundância nos experimentos realizados. Isso se justifica pelo fato de que, uma vez que se tem um controle “bang-bang”, o mesmo poderia ser responsável por induzir erros de integração significativos

²⁷ média de 10 soluções

ao problema, o que poderia justificar de certa maneira o comportamento dos resultados do modelo EDO.

6.2.2 Manobra de Mínimo Esforço

Neste segundo cenário, avaliou-se as diferentes representações para outro movimento comumente utilizado por satélites (MCDONALD, GRIZZEL e WANG, 2020): manobra de repouso a repouso de mínimo esforço, cuja função de custo pode ser escrita como:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt. \quad (6.22)$$

Em contraposição à manobra de tempo mínimo, este problema possui solução única e não apresenta uma resposta descontínua do controle (“bang-bang”) em sua trajetória, a qual pode ser responsável por influenciar fortemente os erros de integração observados na subseção anterior. Portanto, um comportamento coerente entre esta análise e aquela apresentada na subseção anterior é extremamente importante para corroborar os resultados e observações demonstrados anteriormente. Aqui, o vetor de entrada inicial é assumido como condição livre e o tempo final da manobra é fixo em $t_f = 50$ segundos. Similarmente, este caso foi solucionado para as formulações EDO e EDA. O custo mínimo obtido para as diferentes representações dos quatérnios é apresentado na TABELA 6.2.

TABELA 6.2 - Valor mínimo da função de custo para representação dos quatérnios unitários em uma manobra de mínima energia.

	EDO ($\lambda_q = 0E+0$)	EDO ($\lambda_q = 1E-5$)	EDO ($\lambda_q = 1E-4$)	EDO ($\lambda_q = 1E-3$)	EDA
min J	1.7156E+4	1.7125E+4	1.7154E+4	1.7154E+4	2.0823E+4

Nota-se que o comportamento *subótimo* do modelo EDO persiste para este caso. Para um melhor entendimento destes resultados, a solução é obtida utilizando um número fixo de elementos equidistantes, desde uma malha mais grosseira até uma condição refinada, o que permite uma análise qualitativa do comportamento de convergência do problema. É importante salientar que para cada grau de refinamento da malha fez-se uso de uma mesma solução de partida, ou seja, não se utilizou dos resultados de uma malha menos refinada para inicialização do problema com uma malha mais refinada. Os resultados obtidos são apresentados na FIGURA 6.20.

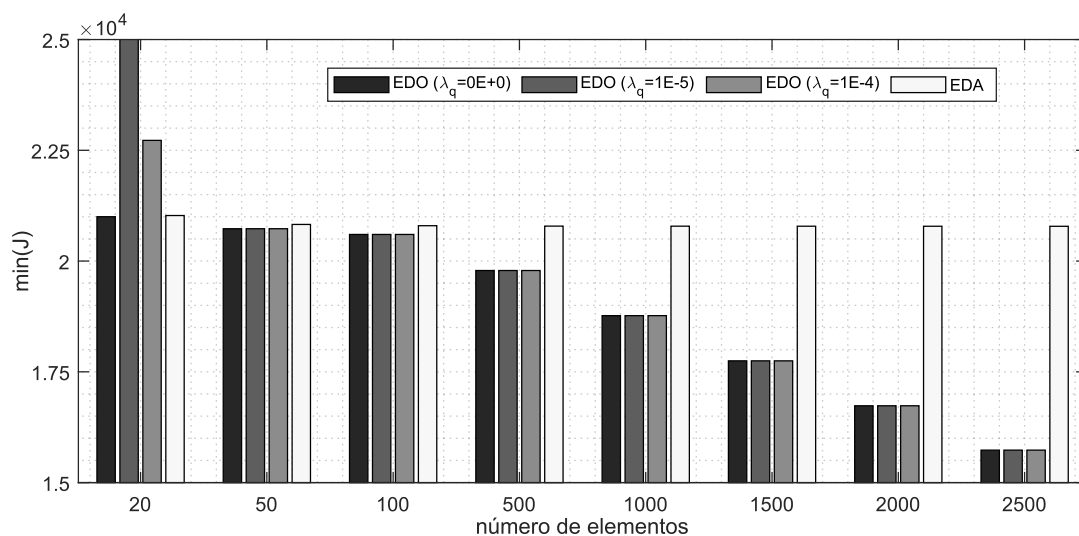


FIGURA 6.20 - Valor mínimo da função de custo para um número fixo de elementos.

Conforme o número de elementos da malha aumenta, observa-se uma convergência monotônica do valor mínimo da função de custo para a formulação EDA. Por outro lado, para o modelo EDO, há uma divergência da solução conforme aumenta-se o número de elementos da malha. Este comportamento persiste mesmo para diferentes valores do coeficiente de estabilização, o qual apresenta uma forte influência no condicionamento do problema de otimização. Os resultados obtidos para $\lambda_q = 1E-3$, não são apresentados na FIGURA 6.20 devido à grande divergência obtida. Para cada configuração da malha, este último caso levou cerca de vinte vezes mais tempo para convergir quando comparado às soluções obtidas com valores de λ_q iguais a $0E+0$, $1E-5$ e $1E-4$.

Um processo de validação foi aplicado onde as técnicas de controle ótimo obtidas de cada caso foram utilizadas junto do modelo apresentado na Eq.(6.17) para uma simulação livre utilizando um método de integração Dormand-Prince de passo variável, ou seja, Runge-Kutta 4^a-5^a ordem (DORMAND e PRINCE, 1980). A FIGURA 6.21 apresenta a comparação entre os estados da solução e da simulação livre para os diferentes casos mostrados na TABELA 6.2.

Para o modelo EDA, nota-se uma boa consistência dos resultados, onde a diferença entre as soluções do problema de controle ótimo e de suas respectivas simulações é de pequena magnitude. Para o modelo EDO, no entanto, os erros de integração obtidos são expressivos. Embora a FIGURA 6.21 apresente os resultados apenas para os casos onde $\lambda_q = 1E-5$ e $\lambda_q = 0E+0$ um comportamento semelhante persiste para os outros valores das constantes de estabilização. Os erros de integração numérica nos casos EDO são reduzidos quando o número de elementos da malha é de aproximadamente 50, o que explica o fato da função de custo para esta configuração de malha ser próxima à da solução EDA, conforme mostrado na FIGURA 6.20. Isso sugere que exista uma quantidade específica de elementos que devem ser utilizados no

modelo EDO para que os erros de integração sejam minimizados, no entanto, não é possível saber qual é este número a priori.

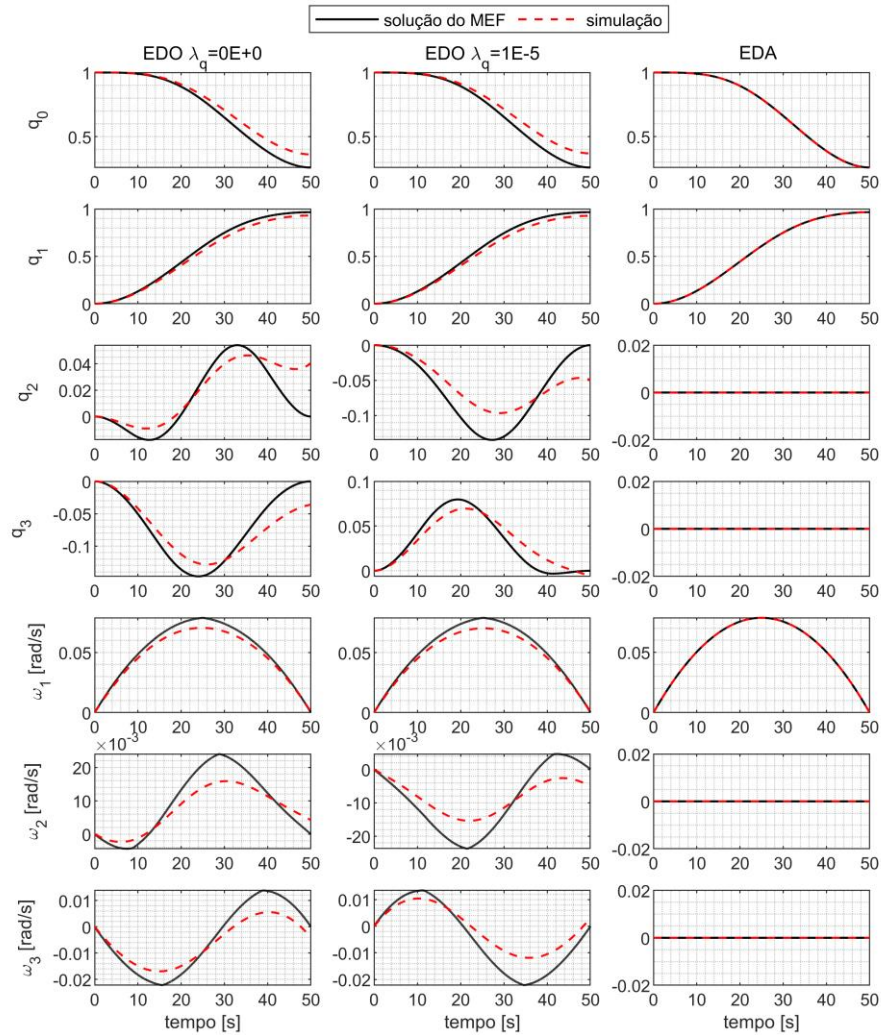


FIGURA 6.21 - Comparação entre as soluções das técnicas de controle ótimo e suas respectivas simulações para diferentes casos apresentados na TABELA 6.2.

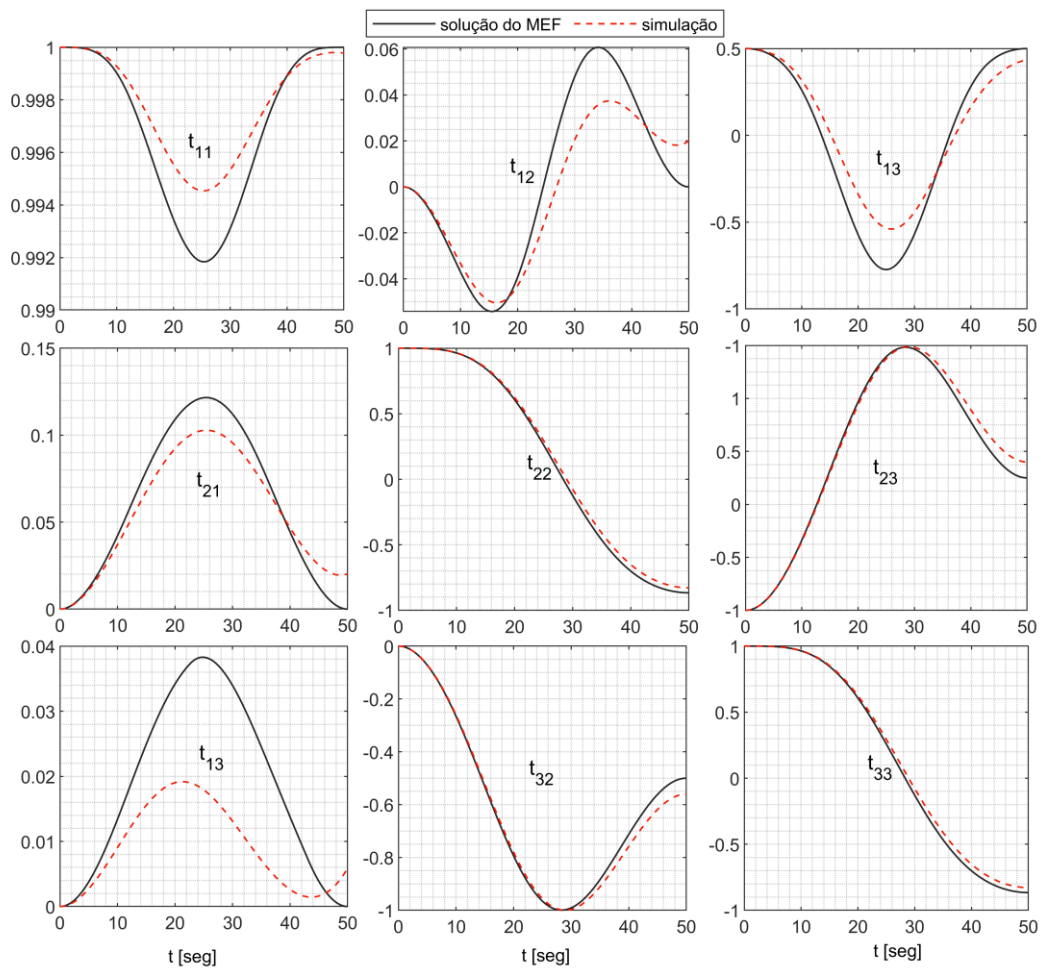
Para esta mesma manobra, a representação por matriz de rotação foi examinada junto à dinâmica do satélite, Eq.(6.17). As condições iniciais e terminais para a matriz de cossenos diretores são:

$$\boldsymbol{\psi}(t_0): \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\psi}(t_f): \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Similarmente, o comportamento da solução utilizando o modelo EDO provou ser bastante sensível ao valor do fator de estabilização λ_R . Conforme mostrado na TABELA 6.3, pequenas variações nesta constante podem tornar o problema mal condicionado.

TABELA 6.3 - Valor mínimo da função de custo para representação da matriz de rotação em uma manobra de mínima energia.

	EDO ($\lambda_R=0E+0$)	EDO ($\lambda_R=1E-7$)	EDO ($\lambda_R=1E-6$)	EDO ($\lambda_R=1E-5$)	EDO ($\lambda_R=1E-4$)	EDA Eq.(3.121)
min J	1.9596E+4	1.9596E+4	1.9596E+4	1.9596E+4	2.4928E+5	2.0827E+4
Tempo computacional	528.9 s	566.1 s	522.6 s	361.6 s	3789.4 s	121.1 s

FIGURA 6.22 - Comparação entre a técnica ótima de controle e sua respectiva simulação para o modelo EDO ($\lambda_R=1E-5$)

O modelo EDA sugerido neste trabalho apresentou um tempo de convergência computacional de aproximadamente 1/3 do caso EDO, um valor de REMQ três ordens de magnitude menor e um custo mínimo em acordo com aqueles obtidos no modelo EDA proposto para os quatérnios unitários, conforme TABELA 6.3. A FIGURA 6.22 e a FIGURA 6.23 mostram a comparação entre os resultados do problema de controle ótimo e suas respectivas simulações livres para os elementos da matriz de cossenos diretores, onde observa-se novamente uma solução coerente para a formulação EDA proposta. Nota-se que modelando a

matriz de rotação como um sistema EDO resulta em uma solução incorreta, uma vez que a manobra é realizada em torno do eixo x e, portanto, os elementos da primeira linha e coluna da matriz não deveriam mudar ao longo da trajetória.

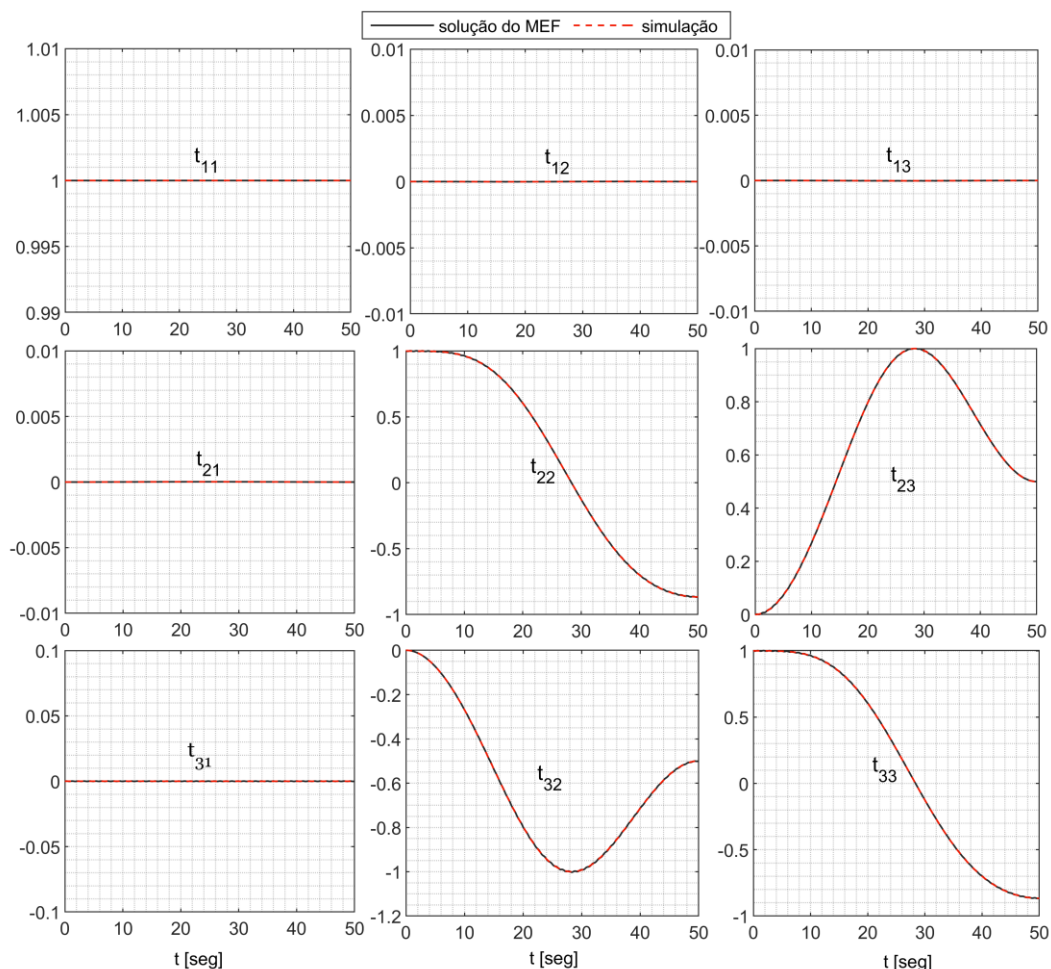


FIGURA 6.23 - Comparação entre a técnica ótima de controle e sua respectiva simulação para o modelo EDA (Eq.(3.121))

6.2.3 Comentários

Verifica-se que as formulações EDA sugeridas, tanto para os quaternions unitários quanto para as matrizes de rotação, melhoraram o condicionamento do problema de programação não-linear, bem como restringiram de maneira mais adequada as parametrizações de $SO(3)$ em suas respectivas variedades. Logo, tais alternativas de modelagem devem ser utilizadas durante a solução de problema de planejamento de trajetória que envolvam tais tipos de modelo de atitude.

6.3 Corridas Aéreas como Estudo de Caso

Conforme apresentado na revisão bibliográfica da Seção 1.1.2, existe uma série de problemas comerciais importantes no que diz respeito ao planejamento de trajetórias de aeronaves. Dentre estes, o problema de otimização de trajetória de aeronaves no contexto das corridas aéreas é um dos casos mais desafiadores, uma vez que nestas situações a aeronave opera nas extremidades de seus envelopes de voo. Neste tipo de trajetória são utilizadas aeronaves acrobáticas com grande agilidade, fazendo com que modelos não-lineares sejam requeridos na representação de seu movimento. O circuito é elaborado de tal forma que o piloto tenha que explorar a dinâmica da aeronave em suas condições limites para que atinja seu objetivo. Além disso, não há regras que especificam exatamente o traçado a ser realizado durante o voo, apenas se definem pontos de passagem, o que acarreta em uma inúmera quantidade de trajetórias que podem ser executadas. Junto a isso, a dinâmica rotacional apresenta uma resposta mais rápida do que quando comparada com a dinâmica translacional, resultando em escalas de tempo diferentes no movimento da aeronave. Dessa maneira, a otimização de trajetória em corridas aéreas se mostra como um caso interessante para se demonstrar as contribuições propostas neste trabalho, uma vez que os diversos conceitos apresentados podem ser amplamente explorados.

Como visto nos trabalhos mostrados, o modelo massa-ponto, junto da parametrização da atitude por ângulos de Euler, é a forma mais comum de representar o movimento da aeronave. Esta forma de modelar o movimento da aeronave (massa-ponto), porém, não incorpora a dinâmica rotacional. Logo, embora as trajetórias resultantes sejam soluções ótimas para este modelo, a dinâmica completa da aeronave não é contabilizada. Assim, não se pode garantir que a trajetória ótima calculada possa ser seguida por uma aeronave em uma condição de voo real. Em trajetórias de voo onde a dinâmica rotacional é de baixa magnitude este modelo pode ser suficientemente representativo, no entanto, para trajetórias que envolvem um maior nível de manobrabilidade da aeronave, esses modelos podem resultar em trajetórias impraticáveis ou sub-ótimas, o que restringe o domínio no qual ele pode ser aplicado. Além disso, para alguns casos, as condições de fronteira ou as restrições de trajetória podem estar relacionadas ao movimento rotacional do corpo da aeronave, as quais não podem ser incluídas nos problemas devido à própria modelagem, o que irá requerer que modelos de maior fidelidade, como o de corpo-rígido, sejam implementados. Por outro lado, é bastante desafiadora a obtenção de uma solução direta por modelos de maior fidelidade em casos de trajetórias complexas como estas, tanto devido à escala do problema em si, quanto à dificuldade

de se fornecer uma solução inicial adequada e também ao número de equações diferenciais envolvidas.

Junto disso, o uso dos ângulos de Euler pode não ser adequado neste caso, uma vez que as trajetórias envolvidas contêm movimentos cuja atitude se aproxima das singularidades desta representação. Tem-se também que no estudo de trajetórias de grande complexidade, como no caso das corridas aéreas, a formulação dos vínculos de contorno pelos ângulos de Euler é bastante desafiadora, conforme mostrado no Capítulo 4 e Seção 6.1.

Assim, dadas estas características, sugere-se uma técnica de solução de problemas de planejamento de trajetória de aeronaves de alta complexidade, como no caso das corridas aéreas. Denota-se esta técnica por abordagem multifidelidade híbrida, onde o problema é solucionado inicialmente utilizando o modelo de massa-ponto, desprezando as forças aerodinâmicas laterais da aeronave (i.e. $\beta = 0$) e representando a atitude pela matriz de cossenos diretores. O propósito deste primeiro passo é combinar um modelo de movimento mais simples e com menor número de equações, com um modelo de atitude mais complexo, mas que facilitem a formulação dos vínculos de contorno do problema. Conforme observado na Seção 6.1, apesar da maior quantidade de variáveis, as matrizes de rotação permitem uma formulação simples e direta das condições de contorno, o que é de suma importância para a montagem do problema. Além disso, nota-se que embora ela não garanta uma solução ótima global, tal forma de parametrização da atitude se mostrou mais robusta quanto à solução de partida utilizada.

No segundo passo, a solução obtida pela formulação massa-ponto e matriz de rotação é utilizada como solução inicial de uma formulação por corpo-rígido e quatérnios unitários. Ou seja, aumenta-se a “fidelidade” das equações do movimento da aeronave e reduzem-se as equações cinemáticas da atitude para uma representação com menor número de variáveis. Uma vez conhecida a trajetória das matrizes de rotação do primeiro passo, a conversão delas para os quatérnios deve ser feita de uma maneira coerente. Para isso, escolhe-se um dos quatérnios antipodais correspondente à atitude em t_0 . Na transformação dos demais parâmetros de Euler-Rodrigues da trajetória deve-se utilizar o de menor distância entre aquele em t_i e t_{i-1} , seguindo um raciocínio semelhante ao que foi mostrado na Seção 6.1.1. Assim, tem-se uma solução de partida coerente para aplicação no modelo de maior fidelidade. Esta proposta é distinta daquela apresentada por Fisch (2010), o qual utiliza sempre os ângulos de Euler para parametrização da atitude e trabalha a fidelidade apenas nas equações de movimento. No caso apresentado nesta seção, utilizaram-se os quatérnios devido ao contexto em questão, porém, poder-se-ia utilizar

também nesta segunda etapa os ângulos de Euler, caso as atitudes em voo não envolvessem condições próximas às singularidades desta representação.

Desta forma, o problema solucionado nesta seção trata do planejamento da trajetória ótima de uma aeronave em uma corrida aérea apresentando a aplicação da abordagem multifidelidade híbrida e mostrando suas características na solução de problemas de grande complexidade através do MEF. Compararam-se as soluções obtidas pelos modelos de menor e maior fidelidade, avaliaram-se adicionalmente os efeitos de algumas características aerodinâmicas não-lineares e, por fim, os resultados obtidos são comparados com dados experimentais para avaliação da solução obtida.

Note que o conceito de fidelidade deve ser avaliado para cada cenário a ser analisado, uma vez que o modelo de corpo rígido, apesar de ter maior fidelidade que o modelo massa-ponto, pode não ser um modelo de alta fidelidade em determinados contextos. No entanto, para o problema em questão, este modelo é suficientemente representativo, como ver-se-á nas comparações das soluções do problema de controle ótimo com os dados experimentais na Seção 6.3.3.

6.3.1 Regras da Corrida e Critério de Segurança

O tipo de trajetória avaliada aqui é baseado no contexto da *Red Bull Air Race* que é um campeonato de corridas aéreas internacional. Na corrida, cada piloto voa individualmente em um percurso predeterminado com o objetivo de executar uma trajetória no menor tempo possível. Logo, a solução do problema de otimização de trajetórias tem como propósito obter as entradas que o piloto deveria executar durante o percurso para que ele o realize em tempo mínimo. Assim, a função de mérito utilizada é dada na forma:

$$J = t_f^{(S)}, \quad (6.24)$$

onde $t_f^{(S)}$ se refere ao tempo final do último segmento da trajetória. Como é mostrado a diante, utiliza-se na formulação deste problema uma abordagem multi-fase.

Ao longo do percurso são colocados pontos de referência (portões), indicados por pilones infláveis, que, em alguns casos, devem ser ultrapassados com uma atitude predeterminada. Em pilones duplos a aeronave deve sempre fazer a passagem com as asas niveladas, já em pilones singulares (ou simples) deve-se fazer a passagem próxima ao ponto referência internamente, ou externamente, dependendo da indicação dos diretores de prova. Estes tipos de portões são apresentados na FIGURA 6.24.

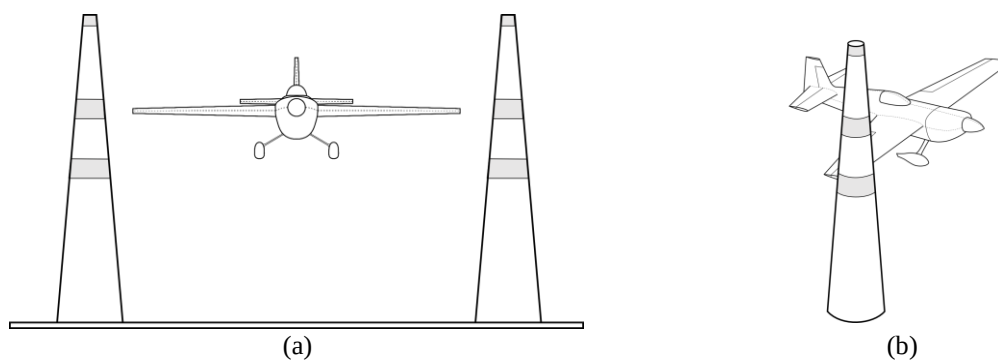


FIGURA 6.24 - (a) Pilone duplo; (b) Pilone simples.

Durante a execução da trajetória alguns movimentos são tipicamente requeridos, como a Chicane, que é a passagem por uma sequência de pilões singulares com rápida variação nas taxas de rolamento do avião (FIGURA 6.25), e a Manobra de Retorno, em que a aeronave geralmente deve alterar sua proa próxima aos 180° . Em algumas situações este movimento se assemelha a um meio oito cubano (FIGURA 6.26), porém a aeronave não precisa necessariamente permanecer sob um plano vertical constante durante o movimento.

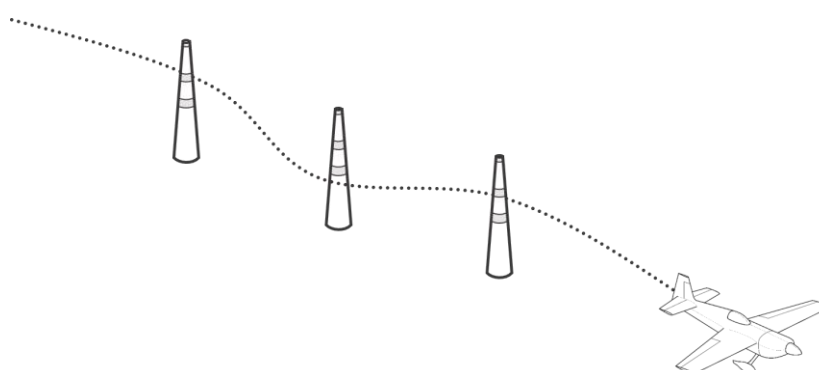


FIGURA 6.25 - Chicane.

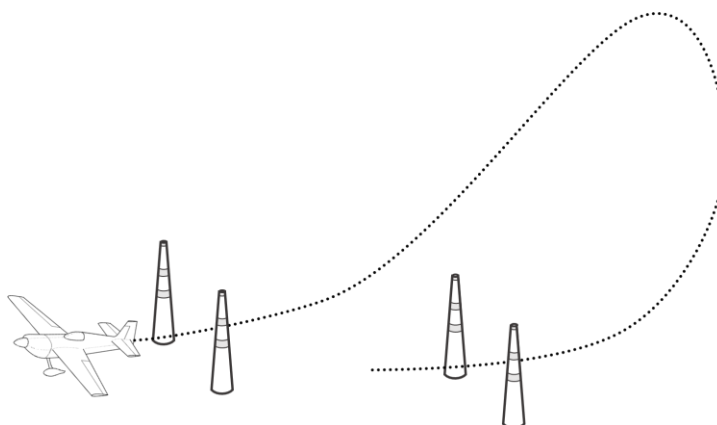


FIGURA 6.26 - Manobra de Retorno.

Dadas as características da corrida, o problema será estudado através de uma abordagem de múltiplas fases (ou trajetória fracionada). Os vínculos de contorno $\psi^{(s)}$ representam as

restrições relativas à passagem em cada portão, i.e., as coordenadas dos portões no início e fim de cada fase, a atitude da aeronave e, para o portão inicial, a velocidade máxima permitida. Já a continuidade da trajetória, tanto nos estados quanto nos controles, é assegurada pelos vínculos de conexão $\mathbf{Y}^{(s)}$. Nestes vínculos são incluídas as ligações entre os parâmetros de tempo final e inicial de fases consecutivas na forma $t_f^{(s)} = t_0^{(s+1)}$.

No contexto destas corridas, existe uma certa tolerância em relação à atitude que a aeronave deve passar nos portões duplos. Tal liberdade poderia ser naturalmente formulada pelos ângulos de Euler, onde poder-se-ia permitir uma faixa de valores para cada um de seus parâmetros nos vínculos de contorno de cada segmento. Porém, como mostrado, em problemas de alta complexidade como este, esta maneira de representação da atitude trará dificuldades para a formulação das restrições de contorno. Logo, é interessante que haja uma forma de se permitir tal tolerância de orientação espacial nos portões duplos utilizando os quatérnios unitários ou as matrizes de rotação. Neste caso, sugere-se que a restrição seja imposta em duas partes. Na primeira delas, busca-se garantir que a aeronave tenha um ângulo de proa próximo àquele exigido pela direção de prova. Para isso, utiliza-se do ângulo formado pelo vetor de velocidades da aeronave em relação ao solo com o vetor de direção do portão. Uma vez que o ângulo entre estes vetores pode ser avaliado a partir de seu produto escalar, a seguinte condição de contorno é utilizada em cada portão duplo:

$$\sin(\theta_{z_{tol}}) - \langle \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{h}\}, \{\boldsymbol{\theta}_g\} \rangle \leq 0. \quad (6.25)$$

A Eq.(6.25), indica que o ângulo entre o vetor de velocidades da aeronave em relação ao solo $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{h}\}$ e vetor que indica a proa de cada portão $\{\boldsymbol{\theta}_g\}$ deve ser menor que um determinado valor $\theta_{z_{tol}}$ predeterminado para cada ponto de passagem, ou seja, nas extremidades de cada fase onde houver um portão duplo. Assumindo que o vetor de direção de cada portão é fixo, as possibilidades para o vetor de velocidades, dado ângulo de tolerância, forma um cone de restrições. Apesar deste vínculo limitar as orientações da aeronave a uma determinada região, tal relação não restringe certas atitudes específicas requeridas na passagem pelos portões. Ou seja, de acordo com a Eq.(6.25), tal que o vetor de velocidade esteja dentro de um ângulo de tolerância especificado, a aeronave pode apresentar qualquer ângulo de arfagem, rolamento ou guinada. Logo, em uma segunda parte, faz-se necessária a inclusão de condições adicionais para limitar os movimentos de rolamento e arfagem na passagem pelos portões. Para isto, sugere-se a utilização das relações apresentadas pela Eq.(3.67) e (3.68), as quais permitem limitar os quatérnios e as matrizes de rotação a uma certa tolerância para os ângulos de

rolamento e arfagem. Note que esta abordagem não altera as dificuldades de formulação dos vínculos de contorno comentadas no Capítulo 4, pois, mesmo que se permita uma certa tolerância nos parâmetros da representação nos contornos da fase, as características apresentadas permanecem, uma vez que elas são intrínsecas à própria estrutura das diferentes formas de representação da atitude.

Especificamente na “entrada” do circuito, ou seja, no início da primeira fase, a velocidade é restrita a um valor máximo, assim deve-se garantir neste ponto que:

$$V_{t_0}^{(1)} - V_{\max_0} \leq 0. \quad (6.26)$$

Ao longo do percurso são aplicadas também restrições de trajetória $\boldsymbol{\varphi}^{(s)}$, que têm como função incluir limitações relacionadas à operação da aeronave e também a limites de segurança. O regulamento da corrida exige que o fator de carga vertical não exceda valores máximos e mínimos na direção z_B . Definindo o fator de carga neste eixo como:

$$n_{z_B}(t) \triangleq \frac{[\{\mathbf{F}\}_B]_z}{mg}, \quad (6.27)$$

tem-se então que

$$n_{z,\min} - n_{z_B}(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad n_{z_B}(t) - n_{z,\max} \leq 0. \quad (6.28)$$

Além disso, para garantir a segurança dos espectadores, definem-se linhas de segurança que não podem ser ultrapassadas durante a execução da trajetória. Optou-se neste trabalho por uma abordagem onde as linhas de segurança são aproximadas por retas na forma

$$f_{LS_k}(y, x) = a_k y + b_k x + c_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (6.29)$$

onde os coeficientes a_k , b_k e c_k definem a equação de uma reta da k -ésima linha de segurança do problema. A menor distância entre estas retas e a posição da aeronave são calculadas a partir do módulo do vetor ortogonal à reta f_{LS_k} e que passa pelo ponto de referência da aeronave (y, x) , conforme a FIGURA 6.27.

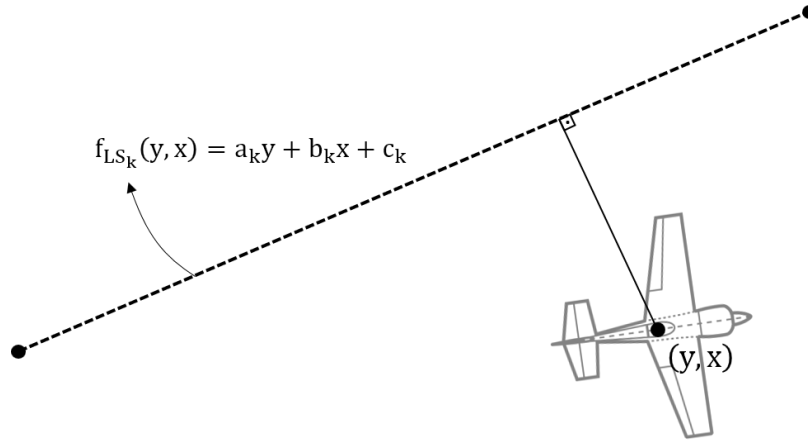


FIGURA 6.27 - Distância da aeronave à linha de segurança.

Assim, a equação que define a distância mínima entre a aeronave e a k -ésima linha de segurança, pode ser escrita na forma:

$$d_k(t) = \frac{(a_k y(t) + b_k x(t) + c_k) \mu_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.30)$$

O parâmetro μ_k deve assumir os valores de 1 ou -1 para o ajuste da Eq.(6.30), de tal forma que a distância entre a aeronave e a linha de segurança seja sempre positiva. Assim:

$$d_k(t) \geq 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.31)$$

O piloto também deve estar sempre a uma distância mínima em relação ao solo, a qual pode ser atrelada ao problema na forma:

$$h_{\min} - h(t) \leq 0. \quad (6.32)$$

Adicionou-se restrições de desigualdade para representação dos limites operacionais relativos à velocidade máxima e mínima (estol) da aeronave, ao ângulo de ataque e ao ângulo de derrapagem, dados, respectivamente, nas formas:

$$V_{\text{estol}} - V(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad V(t) - V_{\max} \leq 0, \quad (6.33)$$

$$\alpha_{\min} - \alpha(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \alpha(t) - \alpha_{\max} \leq 0, \quad (6.34)$$

$$\beta_{\min} - \beta(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \beta(t) - \beta_{\max} \leq 0. \quad (6.35)$$

Os valores correspondentes às várias restrições de trajetória utilizados neste trabalho estão listados na TABELA 6.4.

TABELA 6.4 - Variáveis relativas às restrições de trajetória.

Variável	Unidade	Valor	Restrição
$h_{\min}$	m	15	Altura mínima em relação ao solo
V_{estol}	m/s	25	Velocidade de estol em fator de carga 1
$V_{\max}$	m/s	130	Velocidade máxima
$V_{\max_0}$	m/s	103	Velocidade máxima no <i>gate</i> de partida
$n_{z,\max}$	[]	11	Fator de carga máximo
$n_{z,\min}$	[]	-2	Fator de carga mínimo
$\alpha_{\max}$	graus	20	Ângulo de ataque máximo
$\alpha_{\min}$	graus	-10	Ângulo de ataque mínimo
$\beta_{\max}$	graus	15	Ângulo de derrapagem máximo
$\beta_{\min}$	graus	-15	Ângulo de derrapagem mínimo

6.3.2 Modelo da aeronave

Para aplicação a este estudo de caso, selecionou-se a aeronave Zivko Edge 540, que é uma aeronave acrobática utilizada na principal categoria das corridas aéreas da *Red Bull Air Race*. A FIGURA 6.28 apresenta as três vistas desta aeronave e a TABELA 6.5 resume suas principais características.

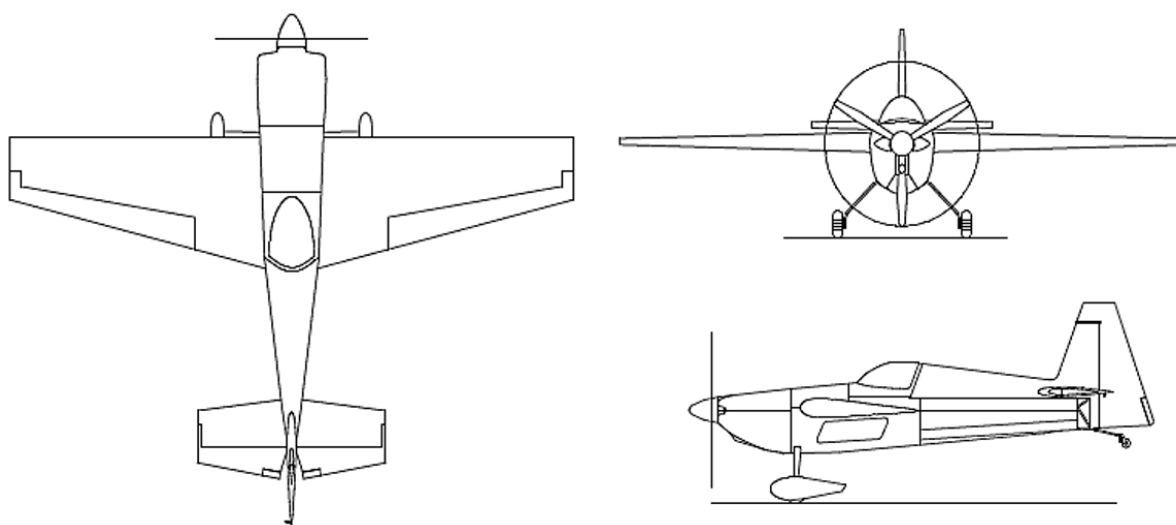


FIGURA 6.28 - Três vistas da aeronave Zivko Edge 540.

TABELA 6.5 - Características geométricas, inerciais e propulsivas da aeronave Zivko Edge 540.

Envergadura	7,417 m	Área da asa	9,10 m ²
Comprimento	6,274 m	Altura	2,865 m
Peso Vazio	530 kgf	Peso Máximo	816,5 kgf
Peso Máximo Acrobático	703 kgf	Taxa de rolamento	420 °/s
V _{NE}	118,3 m/s	V _C (75%)	92,6 m/s
V _S (680 kgf)	26,2 m/s	V _A (680 kgf)	87,5 m/s
Fator de carga máximo	12 g's	Cambustível máximo	230 L
Inércias	I _{XX} = 420,3 kg.m ² I _{YY} = 726,7 kg.m ² I _{ZZ} = 919,2 kg.m ²		
Motor	Lycoming AEIO-540 modificado (340 hp)		
Hélice	Hartzell HC-C3YR-4AX		

Foram utilizados dois tipos de modelos para aproximação dos coeficientes de força e momento aerodinâmicos da Eq.(3.85). Um simplificado, conforme apresentado por Fisch (2010), cujas equações são dadas por:

$$C_L(\alpha, \bar{q}, \eta) = C_{L0} + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{(0,0,0)} \alpha + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \bar{q}} \right|_{(0,0,0)} \bar{q} + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \eta} \right|_{(0,0,0)} \eta, \quad (6.36a)$$

$$C_D(\alpha, \bar{q}, \eta, \beta) = C_{D0} + k \left(C_L(\alpha, \bar{q}, \eta) - C_{L_{C_{D0}=0}} \right)^2 + k_\beta \left(C_{Y_\beta} \beta \right)^2, \quad (6.36b)$$

$$C_m(\alpha, \bar{q}, \eta) = C_{m0} + \left. \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right|_{(0,0,0)} \alpha + \left. \frac{\partial C_m}{\partial \bar{q}} \right|_{(0,0,0)} \bar{q} + \left. \frac{\partial C_m}{\partial \eta} \right|_{(0,0,0)} \eta, \quad (6.36c)$$

$$\begin{aligned} C_Y(\beta, \bar{p}, \bar{r}, \zeta, \xi) &= \left. \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \beta + \left. \frac{\partial C_Y}{\partial \bar{p}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{p} + \left. \frac{\partial C_Y}{\partial \bar{r}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{r} \\ &+ \left. \frac{\partial C_Y}{\partial \zeta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \zeta + \left. \frac{\partial C_Y}{\partial \xi} \right|_{(0,0,0,0,0)} \xi, \end{aligned} \quad (6.36d)$$

$$\begin{aligned} C_\ell(\beta, \bar{p}, \bar{r}, \zeta, \xi) &= \left. \frac{\partial C_\ell}{\partial \beta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \beta + \left. \frac{\partial C_\ell}{\partial \bar{p}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{p} + \left. \frac{\partial C_\ell}{\partial \bar{r}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{r} \\ &+ \left. \frac{\partial C_\ell}{\partial \zeta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \zeta + \left. \frac{\partial C_\ell}{\partial \xi} \right|_{(0,0,0,0,0)} \xi, \end{aligned} \quad (6.36e)$$

$$\begin{aligned} C_n(\beta, \bar{p}, \bar{r}, \zeta, \xi) &= \left. \frac{\partial C_n}{\partial \beta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \beta + \left. \frac{\partial C_n}{\partial \bar{p}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{p} + \left. \frac{\partial C_n}{\partial \bar{r}} \right|_{(0,0,0,0,0)} \bar{r} \\ &+ \left. \frac{\partial C_n}{\partial \zeta} \right|_{(0,0,0,0,0)} \zeta + \left. \frac{\partial C_n}{\partial \xi} \right|_{(0,0,0,0,0)} \xi. \end{aligned} \quad (6.36f)$$

Neste caso, é comum abreviar a notação das derivadas de linearização utilizando um termo subscrito referente à variável de referência, por exemplo,

$$C_{L_\alpha} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Big|_{(0,0,0)}, \quad C_{L_q} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \dot{q}} \Big|_{(0,0,0)}, \quad C_{L_\eta} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \eta} \Big|_{(0,0,0)}, \quad (6.37)$$

e assim por diante. No segundo modelo alguns efeitos não-lineares foram considerados nos coeficientes relacionados às forças e momentos longitudinais da aeronave. A proposta é avaliar como certas não-linearidades aerodinâmicas podem influenciar na trajetória ótima obtida. Em ambos os casos, as características aerodinâmicas da aeronave foram obtidas utilizando o CEA-VLM²⁸ (VARGAS, 2006) com correções semiempíricas sugeridas pelos ESDU *datasheets* (ENGINEERING SCIENCES DATA UNIT, 2007). A variação dos coeficientes aerodinâmicos em função de diferentes parâmetros está apresentada entre a FIGURA 6.29 e a FIGURA 6.36.

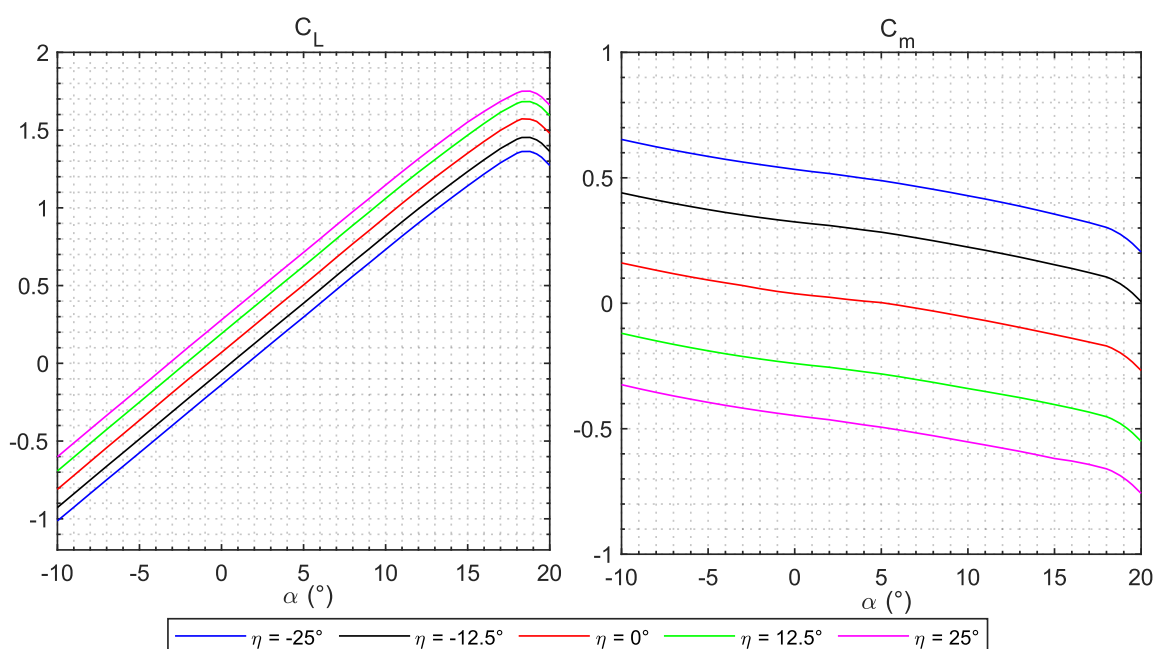


FIGURA 6.29 – Curvas $C_L \times \alpha$ e $C_m \times \alpha$ para diferentes deflexões do profundor.

²⁸ O CEA-VLM é uma ferramenta desenvolvida no Centro de Estudos Aeronáuticos da Universidade Federal de Minas Gerais, cuja implementação teve como objetivo o desenvolvimento de um procedimento numérico capaz de calcular as características aerodinâmicas de conjuntos de superfícies alares, sejam asas, empenagens, etc. Ele tem como base o Método de Weissinger (WEISSINGER, 1947), também conhecido como Método da Linha Sustentadora Estendida.

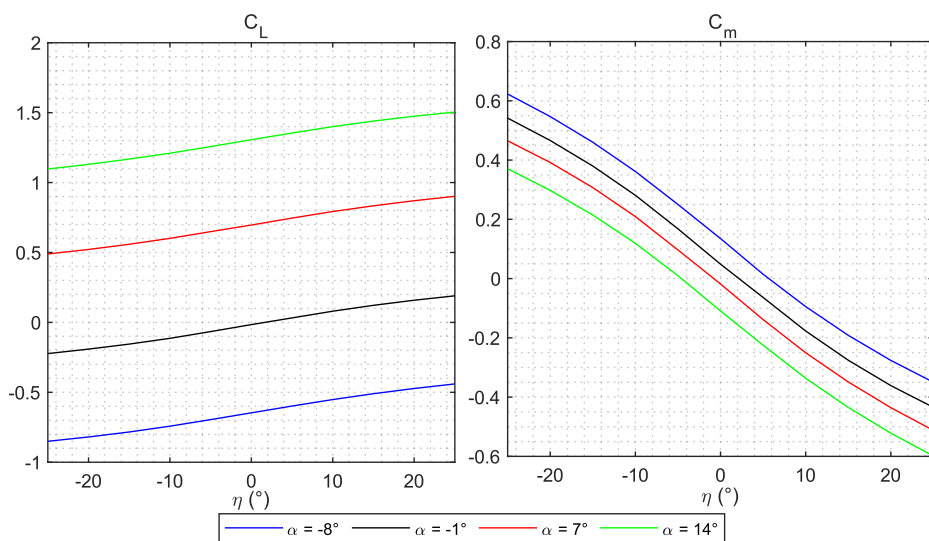


FIGURA 6.30 - Curvas $C_L \times \eta$ e $C_m \times \eta$ para diferentes ângulos de ataque.

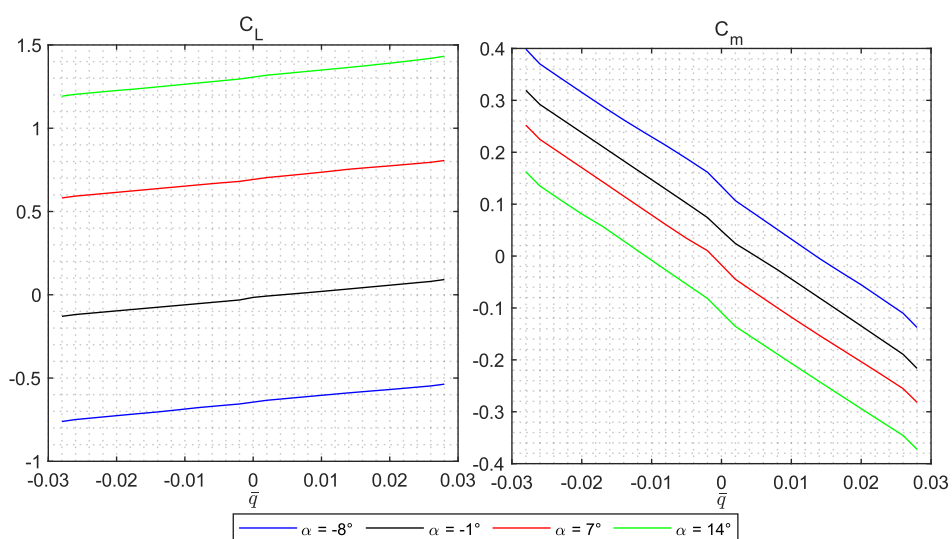


FIGURA 6.31 - Curvas $C_L \times \bar{q}$ e $C_m \times \bar{q}$ para diferentes ângulos de ataque.

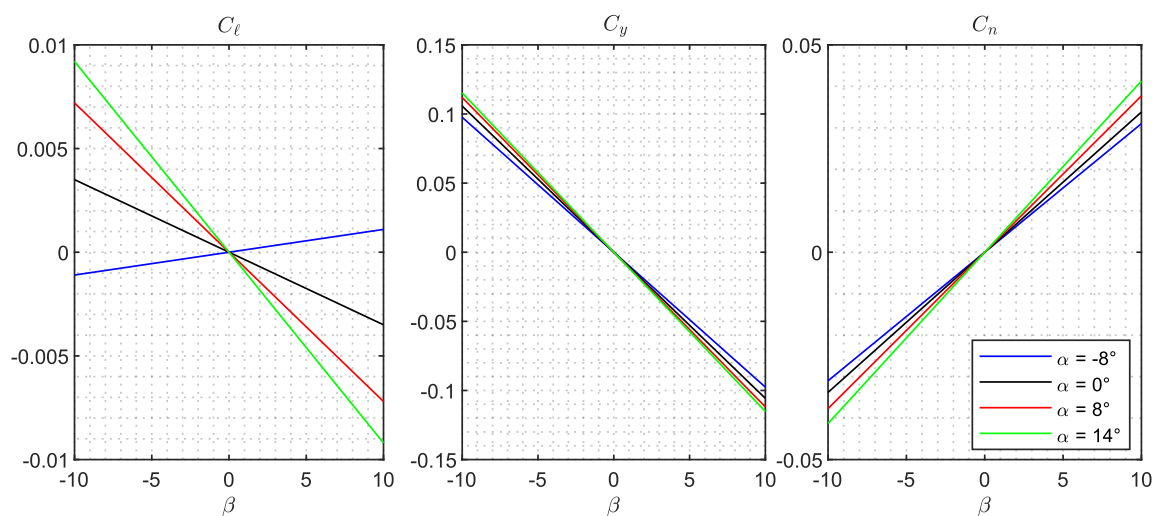


FIGURA 6.32 – Curvas $C_L \times \beta$, $C_y \times \beta$ e $C_n \times \beta$ para diferentes ângulos de ataque.

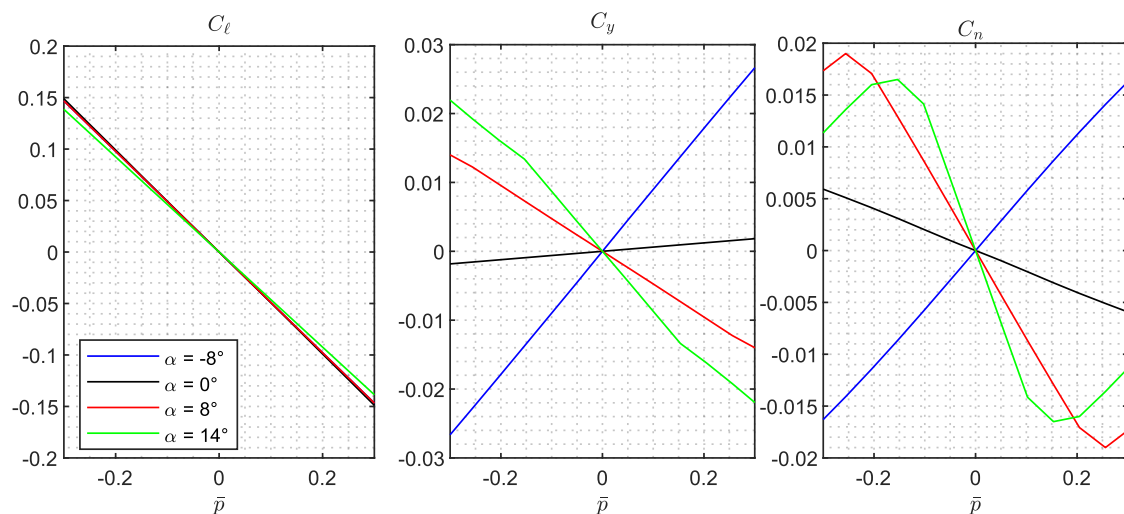


FIGURA 6.33 - Curvas $C_\ell \times p$, $C_y \times p$ e $C_n \times p$ para diferentes ângulos de ataque.

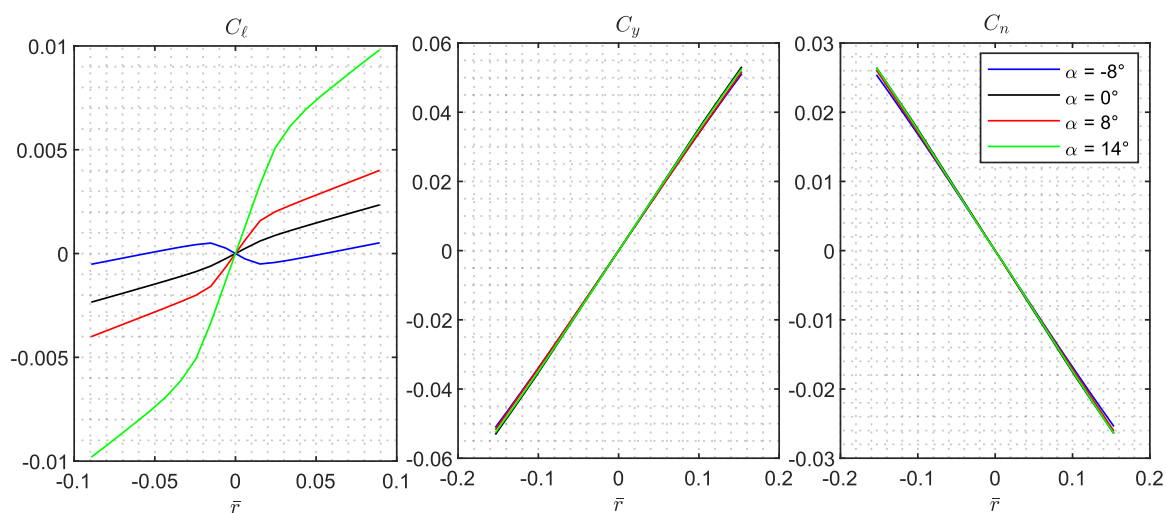


FIGURA 6.34 - Curvas $C_\ell \times r$, $C_y \times r$ e $C_n \times r$ para diferentes ângulos de ataque.

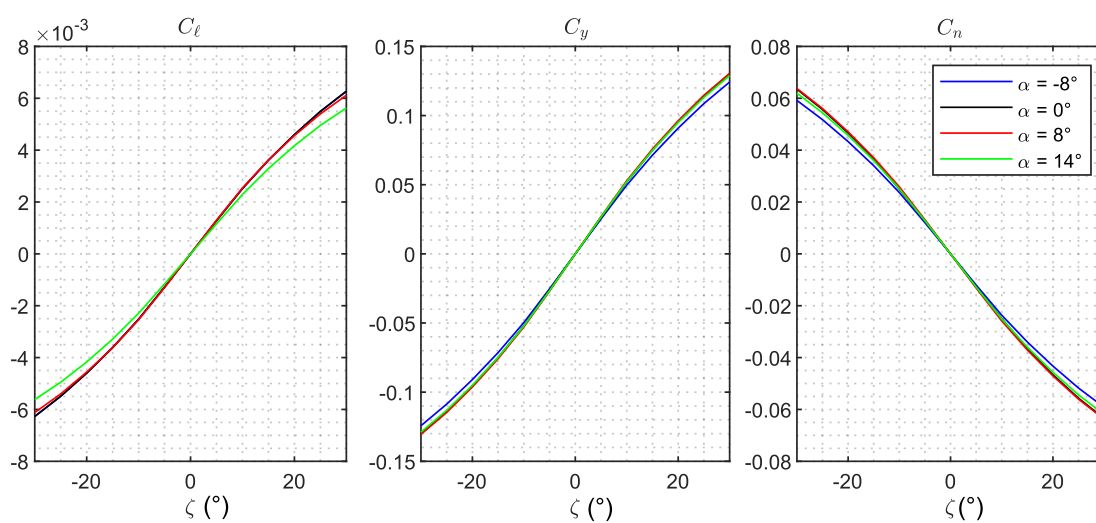


FIGURA 6.35 - Curvas $C_\ell \times \zeta$, $C_y \times \zeta$ e $C_n \times \zeta$ para diferentes ângulos de ataque.

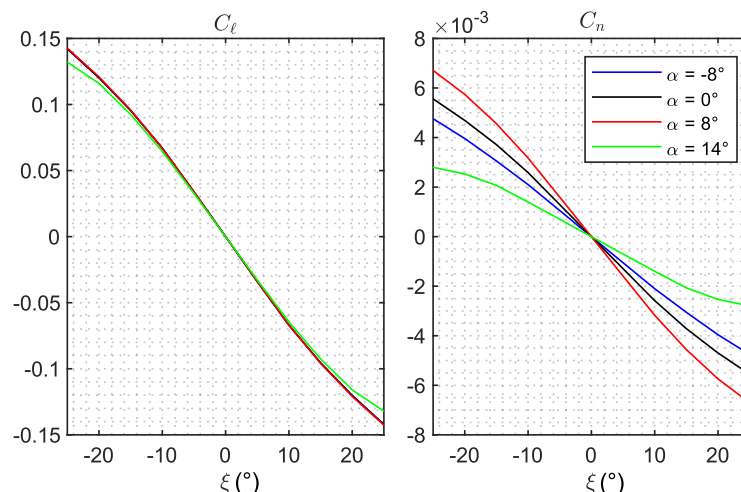


FIGURA 6.36 - Curvas $C_\ell \times \xi$ e $C_n \times \xi$ para diferentes ângulos de ataque.

A TABELA 6.6 apresenta os valores dos coeficientes linearizados utilizados na Eq.(6.36).

TABELA 6.6 - Coeficientes aerodinâmicos linearizados.

Coeficientes Aerodinâmicos Longitudinais					
C_{L0}	0,0594	C_{D0}	0,0160	C_{m0}	0,0416
$C_{L\alpha}$	5,0615	k	0,0681	$C_{m\alpha}$	-0,4585
C_{Lq}	3,9519	k_β	1,6968	C_{mq}	-9,6458
$C_{L\eta}$	0,5529			$C_{m\eta}$	-1,3169
Coeficientes Aerodinâmicos Latero-Direcionais					
$C_{Y\beta}$	-0,6058	$C_{\ell\beta}$	-0,0203	$C_{n\beta}$	0,1935
C_{Yp}	0,0044	$C_{\ell p}$	-0,4910	C_{np}	-0,0194
C_{Yr}	0,3519	$C_{\ell r}$	0,0477	C_{nr}	-0,1750
$C_{Y\zeta}$	0,2989	$C_{\ell\zeta}$	0,0145	$C_{n\zeta}$	-0,1439
		$C_{\ell\xi}$	-0,3846	$C_{n\xi}$	-0,0148

Existem algumas considerações importantes na aplicação do modelo não-linear. De acordo com as FIGURA 6.29 e FIGURA 6.30, nota-se que a influência da deflexão do profundor sobre o valor de C_L ou C_m é praticamente independente do ângulo de ataque. O mesmo pode ser observado em relação à razão de arfagem, que, de acordo com a FIGURA 6.31, apresentam uma relação linear com estes coeficientes. Assim, assumiu-se por simplificação que estes efeitos podem ser superpostos. Ou seja, as curvas $C_L \times \alpha$ e $C_m \times \alpha$ são obtidas para $\eta = 0^\circ$ e $\bar{q} = 0$ e a influência destes dois parâmetros é somada separadamente. Para a modelagem de C_D utilizou-se a mesma aproximação indicada na Eq.(6.36b), cujos valores estão na TABELA 6.6.

Para os coeficientes de força e momentos latero-direcionais, é bastante comum se considerar o comportamento linearizado conforme Eqs.(6.36d)-(6.36f), mesmo em modelos aerodinâmicos genéricos (GRAUER e MORELLI, 2014). Isto porque nas operações comuns de aeronaves este comportamento linear é predominante. Analisando o comportamento da aerodinâmica latero-direcional apresentada entre a FIGURA 6.32 e a FIGURA 6.36, nota-se que certos coeficientes ligados este tipo de movimento são funções também do ângulo de ataque da aeronave. Ou seja, pode-se afirmar que há um determinado acoplamento entre a aerodinâmica longitudinal e latero-direcional. Diferentes valores de C_ℓ , C_Y e C_n irão ocorrer para diferentes ângulos de ataque dependendo do comportamento de β , $\bar{p}$, $\bar{r}$, ζ e ξ , efeito o qual foi incluído nas análises aqui realizadas. Assumiu-se novamente, por simplificação, que os efeitos das diferentes contribuições podem ser sobrepostos, ou seja, os efeitos latero-direcionais devido a cada componente foram calculados individualmente e somados para composição total. Apesar de algumas não linearidades serem observadas entre a FIGURA 6.32 e a FIGURA 6.36, nota-se nas análises da Seção 6.3.3 que a aeronave não irá operar nestas condições no contexto analisado. Assim, apenas as não-linearidades do movimento longitudinal foram consideradas. Para outros tipos de modelos, veja, e.g., Grauer e Morelli (2014) ou Morelli (1998).

Para aproximação e interpolação deste conjunto de dados aerodinâmicos fez-se uso da técnica sugerida por Betts (2010, p. 258), a qual consiste em manipular B-splines cúbicas para representação de dados que podem ser aproximados por funções com uma ou mais variáveis independentes. A ideia básica da técnica é calcular os coeficientes das splines de tal forma que a raiz do erro médio quadrático entre os dados e a linha (ou superfície) obtida pelas splines seja minimizado através da formulação de um problema de programação matemática.

Para a modelagem do sistema propulsivo, estimou-se a tração disponível através das cartas de desempenho do motor disponibilizadas pelo fabricante (LYCOMING ENGINES, 2007) em combinação com dados de uma hélice similar àquela utilizada pela aeronave de estudo (MCCORMICK, 1979). A curva de tração máxima por velocidade de voo está apresentada na FIGURA 6.37. Apesar dos pilotos geralmente não alterarem a posição da manete de controle do motor durante a corrida, utilizou-se o modelo apresentado na Eq.(3.83) por motivos de completude. Foi utilizado também um valor de $\tau_m = 0,5$ e desprezou-se a variação da massa e da posição do CG da aeronave durante a execução da trajetória, uma vez que os tempos de voo são relativamente curtos durante as corridas.

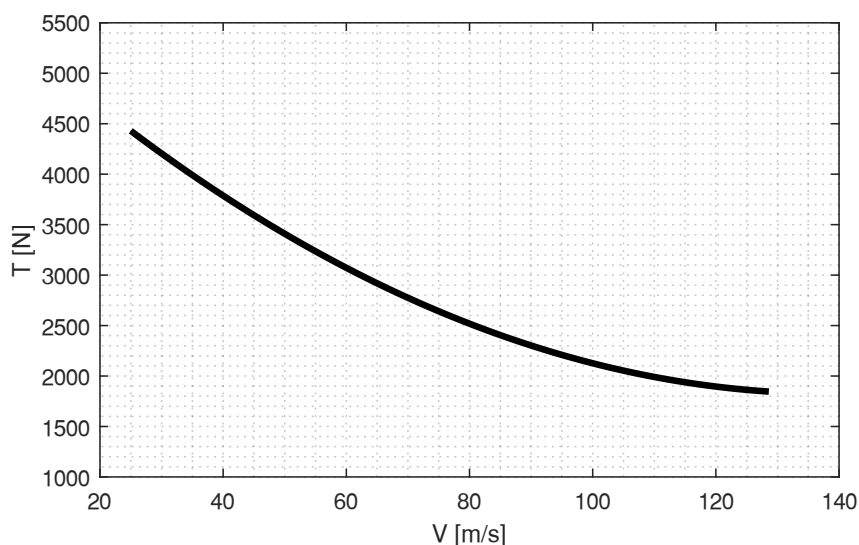


FIGURA 6.37 - Curva de tração máxima para diferentes velocidades de voo.

6.3.3 Análise da trajetória ótima e comparação com dados experimentais

Um percurso similar a uma das etapas do campeonato da *Red Bull Air Race* foi escolhido para análise, onde considerou-se uma atmosfera calma, i.e., sem ventos. A TABELA 6.7, apresenta as coordenadas cartesianas de cada portão e o tipo de portão, i.e., com pilones duplos ou singulares, os quais estão ligados aos vínculos de contorno de cada fase.

TABELA 6.7 - Características dos diferentes portões do circuito analisado.

# nº	x (m)	y (m)	Orientação (°)	Tipo
1	0	0	315	duplo
2	238,1	-228,7	330	duplo
3	379,3	-279,7	315	singular
4	458,3	-380,6	315	singular
5	559,0	-454,4	315	singular
6	620,8	-675,9	315	singular
7	853,1	-844,8	315	duplo
8	639,9	-592,2	135	duplo

A FIGURA 6.38 indica a posição de cada portão junto das linhas de segurança a serem respeitadas.

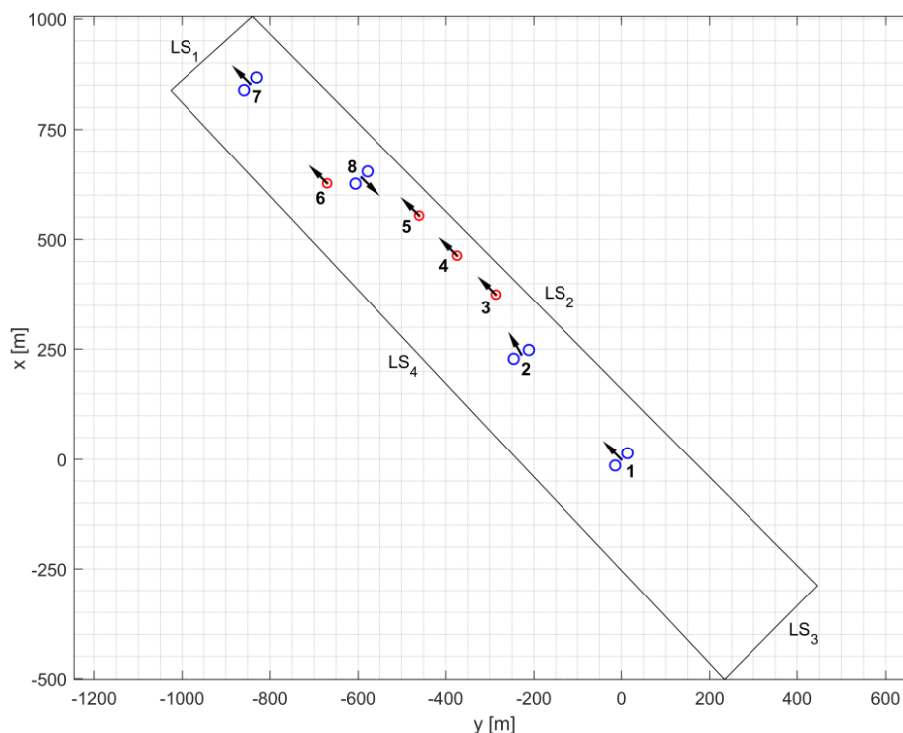


FIGURA 6.38 - Posição dos portões e linhas de segurança do circuito.

A sequência de portões que deve ser seguida pelo piloto é:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - \bar{5} - \bar{4} - \bar{3} - \bar{2} - \bar{1} - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8$$

O símbolo sobrescrito da seta apontando para a esquerda indica que na passagem pelo ponto de referência, a aeronave deve ter uma orientação com 180° de defasagem em relação àquela indicada pela TABELA 6.7. Dessa maneira, observa-se que a trajetória será subdividida em dezenove fases. Dentre as manobras características das corridas aéreas, têm-se duas chicanes, entres os *gates* 3-5 e três manobras de retorno, entre os gates 7-8 e 1-2.

Neste caso, o tratamento multifidelidade proposto foi estendido também ao comportamento aerodinâmico da aeronave. Assim, a solução do problema pode ser resumida nas seguintes etapas:

- i. Aplicou-se o método de elementos finitos com colocação equidistante, utilizando a aproximação local dos estados por polinômios de segundo grau e dos controles por retas. Tal escolha foi realizada devido à maior simplicidade de implementação e pela não necessidade de uma solução em tempo real. Em virtude da natureza do problema, se assumiu que os controles devem apresentar continuidade C^0 (desprezou-se a possibilidade de quinas) e utilizou-se uma abordagem multi-fase, onde cada fração contempla a trajetória percorrida entre dois portões consecutivos.

- ii. O problema foi solucionado inicialmente utilizando o modelo de massa-ponto, com aerodinâmica simplificada, considerando voo simétrico (β) e representando a atitude pela matriz de cossenos diretores.
- iii. A solução obtida na etapa “ii” foi utilizada como solução de partida para a análise utilizando modelo de corpo rígido, com aerodinâmica ainda simplificada e representação da rotação por quatérnios unitários.
- iv. Solucionou-se o problema também utilizando abordagem semelhante à da etapa “iii”, porém, com aerodinâmica longitudinal não-linearizada, conforme mostrado na Seção 6.3.2.
- v. Por fim, comparou-se as soluções obtidas com dados experimentais obtidos no contexto real da corrida.

Para a primeira etapa, foram distribuídos 40 elementos nas fases onde ocorre a manobra de retorno e 20 elementos nas demais. Tais valores foram escolhidos manualmente até que o problema apresentasse um máximo erro local absoluto da ordem de 1×10^{-3} . A FIGURA 6.39, apresenta soluções obtidas neste modelo para diferentes soluções iniciais utilizadas no problema de programação não-linear.

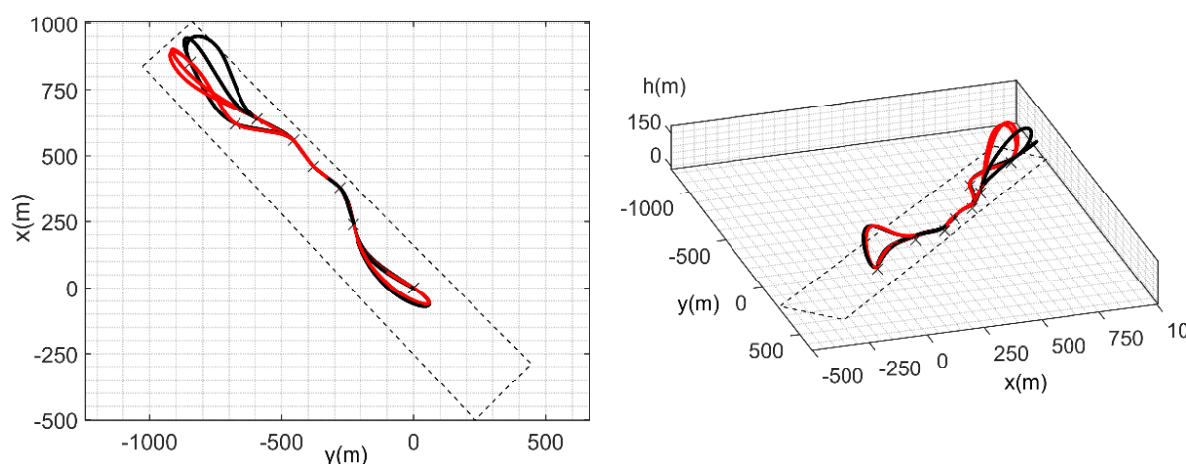


FIGURA 6.39 - Trajetórias obtidas para diferentes soluções de partida utilizando o modelo de massa-ponto com representação da atitude pelas matrizes de rotação.

Em diversas regiões do percurso a trajetória obtida está sobreposta com os movimentos de “ida” e “volta”, como por exemplo as fases na região da chicane. Observa-se que a manobra entre os portões 7-8 na primeira e segunda passagem são diferentes, pois na primeira passagem faz-se uma reserva de energia para que se possa executar a trajetória de retorno, enquanto que na segunda passagem pelo portão 8, a aeronave chegará ao ponto final da corrida. Apesar da utilização das matrizes de cossenos diretores, soluções distintas podem ser obtidas para as

diferentes soluções iniciais fornecidas, onde a trajetória em vermelho apresentou um maior valor em seu índice de desempenho, igual a 56,434 segundos, enquanto que a trajetória em preto apresentou um tempo mínimo de 55,034 segundos. Isto acontece pois, na manobra vertical executada entre os gates 7-8, a aeronave realiza um movimento de arfagem combinada a um rolamento, o qual pode acontecer tanto rolando a aeronave no sentido positivo quanto negativo. Assim, dependendo da solução de partida fornecida ao problema, pode-se convergir para qualquer uma das soluções.

Conforme foi apresentado na Seção 4, a representação por ângulos de Euler ou quatérnios pode limitar a formulação do problema. Em problemas de planejamento de alta complexidade como este, mesmo que se faça uso das formulações sugeridas pelas Eqs.(4.7) e (4.8), soluções iniciais mal escolhidas podem levar a trajetórias indesejadas. Na solução apresentada na FIGURA 6.40, utilizou-se os quatérnios unitários com a formulação nos vínculos de contorno na forma da Eq.(4.8), porém com soluções de partida mal selecionadas.

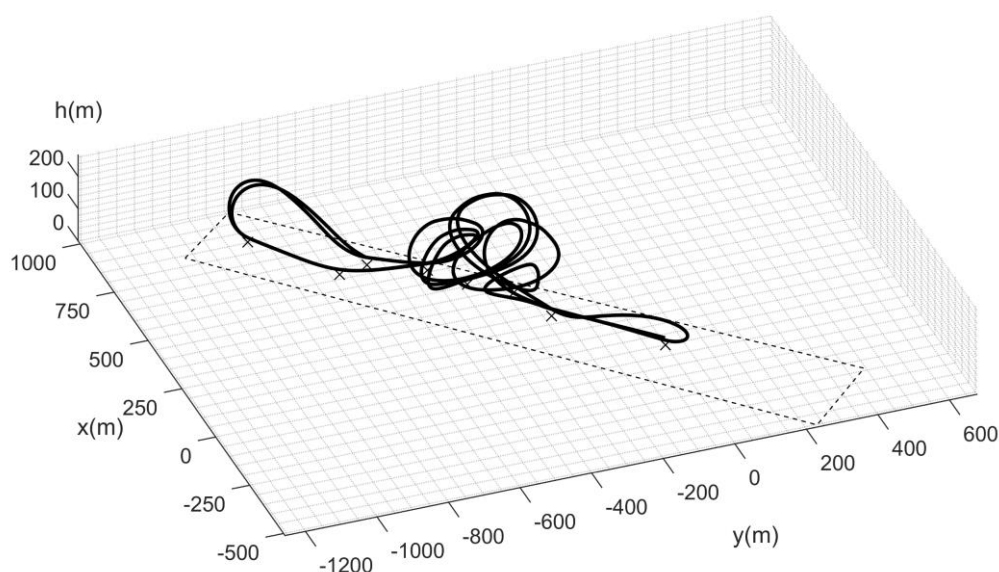


FIGURA 6.40 - Trajetória obtida com atitude representada pelos quatérnios, mas com uma solução de partida mal selecionada.

Note que a trajetória obtida apresentou um comportamento anômalo ao que se espera. O fenômeno de desenrolamento ocorreu nas fases 2-3-4-9-10-11-13-14-15. É interessante observar que nesta situação tal fenômeno não se manifesta através do rolamento da aeronave (como observado Seção 6.1.1), mas através do movimento de arfagem.

Estes resultados mostram que, apesar do maior custo computacional das matrizes de cossenos diretores, sua utilização em uma primeira análise é de grande importância para que se evitem trajetórias indesejadas, uma vez que esta representação possui uma formulação mais

simples dos vínculos de contorno e, aparentemente, é mais robusta quanto à solução inicial do problema. A FIGURA 6.41 à FIGURA 6.45 mostram as variáveis de estado e controle obtidas para a trajetória com menor tempo de execução (trajetória preta da FIGURA 6.39), onde as linhas tracejadas verticais indicam a passagem pelos portões. Os elementos da matriz de rotação foram convertidos em ângulos de Euler (FIGURA 6.41), para facilitar o entendimento da atitude da aeronave ao longo do percurso.

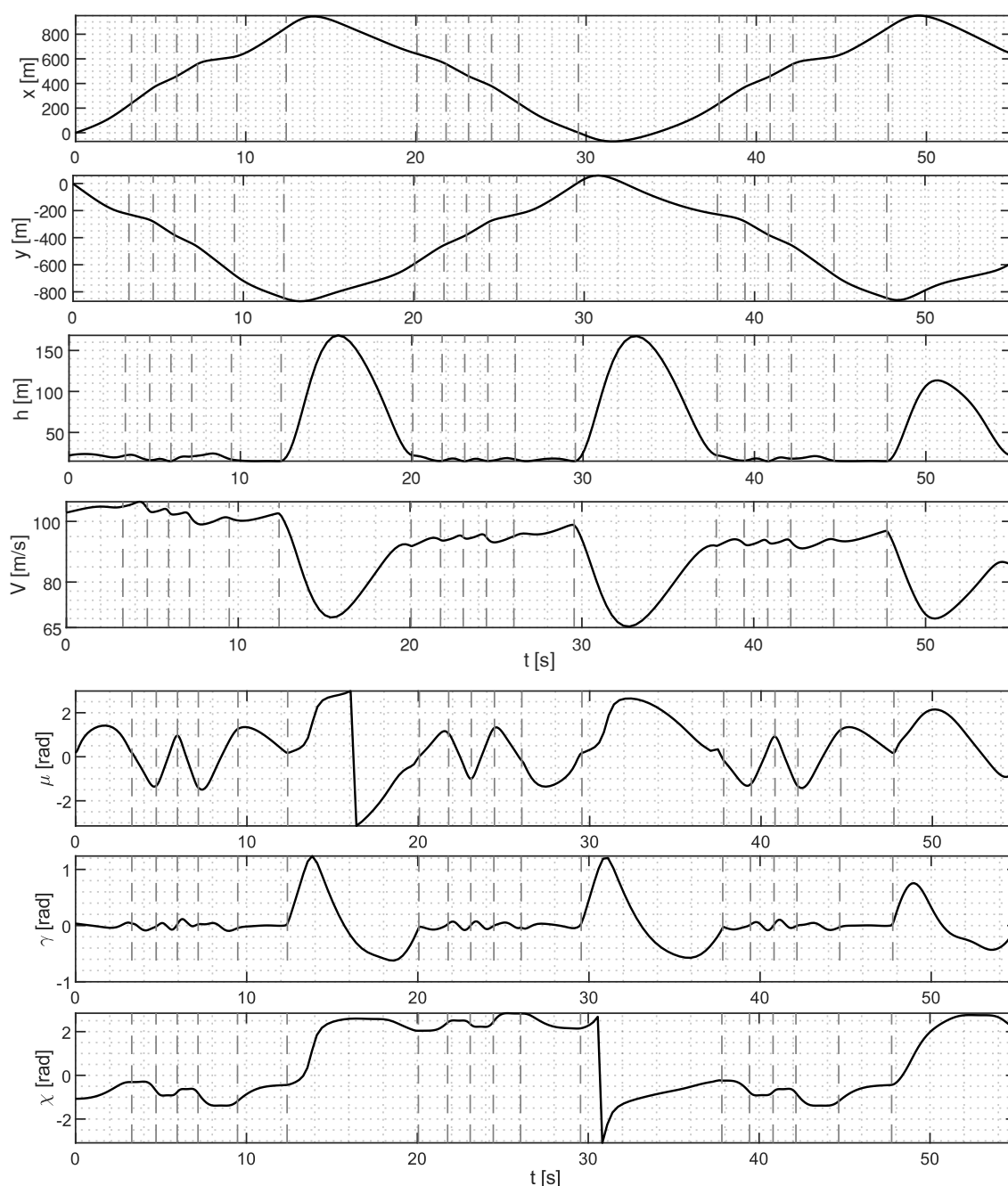


FIGURA 6.41 - Trajetória das variáveis x , y , h e V e dos ângulos de Euler.

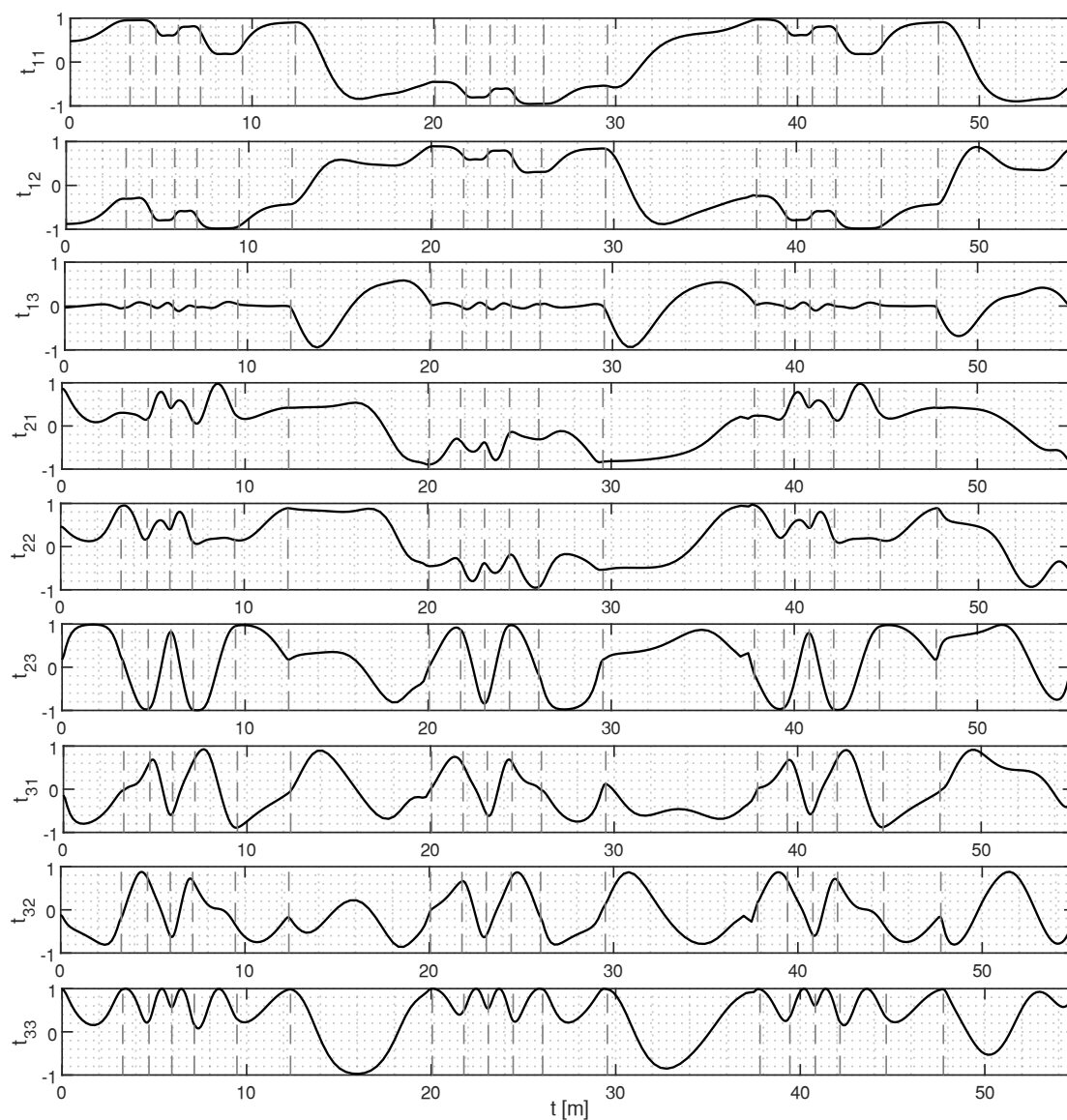


FIGURA 6.42 - Trajetória dos elementos da matriz de rotação.

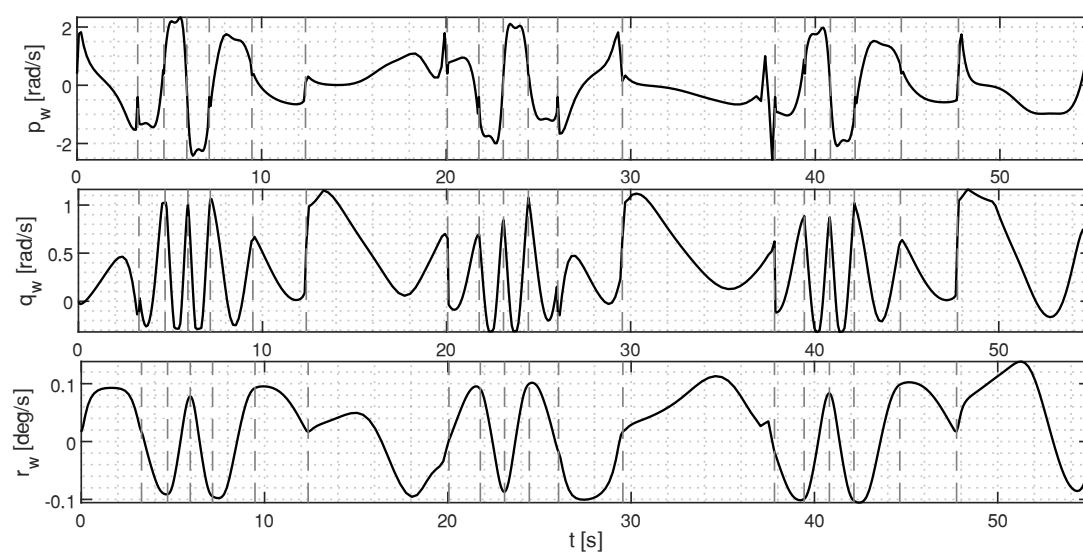


FIGURA 6.43 - Trajetória das velocidades angulares.

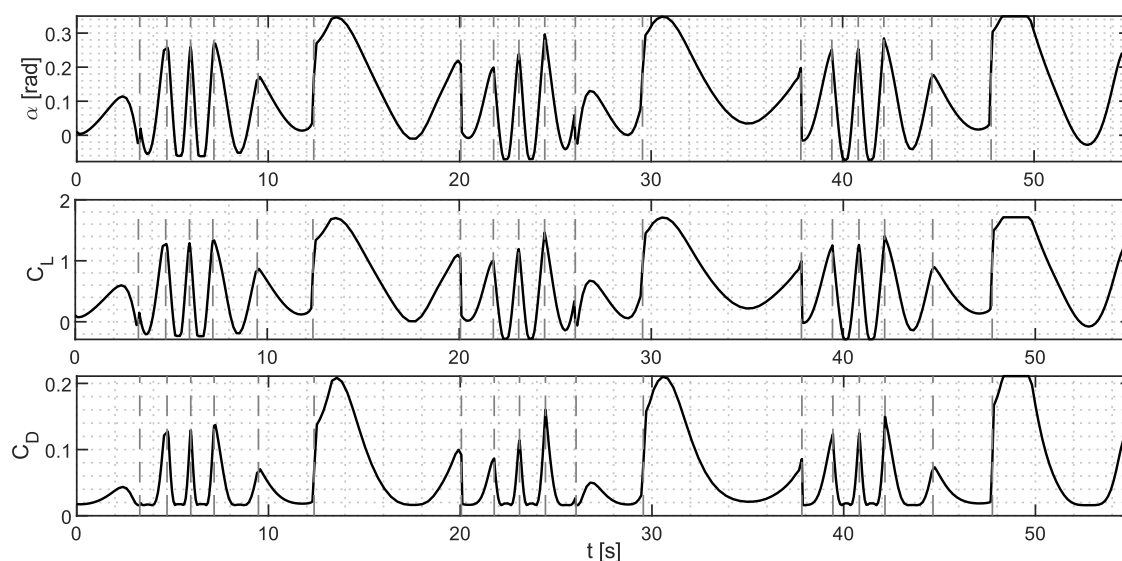


FIGURA 6.44 - Ângulos de ataque, coeficientes de sustentação e de arrasto ao longo da trajetória.

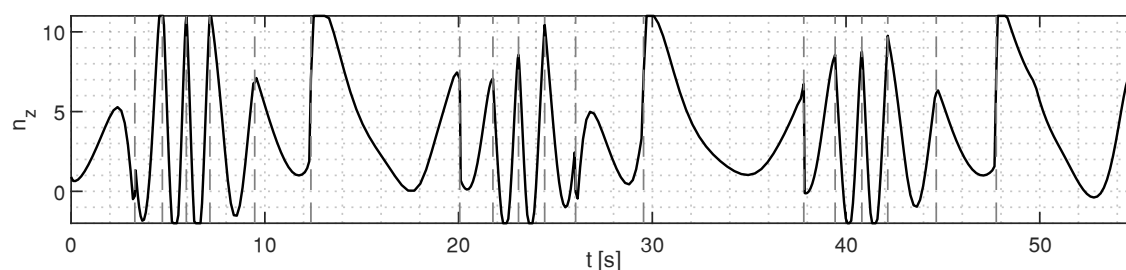


FIGURA 6.45 – Fator de carga vertical ao longo da trajetória.

Nota-se que partes do percurso ocorrem nas extremidades das fronteiras de trajetória permitidas. Por exemplo, no movimento entre os portões 7-8, a trajetória “toca” o limite de uma das linhas de segurança e atinge os limites de fator de carga, conforme FIGURA 6.39 e FIGURA 6.45. Uma vez que tal trajetória será utilizada pelo piloto como referência para o voo, deve-se aplicar margens de segurança em casos práticos reais, uma vez que a extrapolação de tais limites acarretarão na desqualificação dele na corrida. Além disso, é difícil manter a aeronave no fator de carga limite por uma determinada faixa de tempo (conforme mostram os picos na FIGURA 6.45) devido à sensibilidade na resposta dos comandos de uma aeronave acrobática, o que torna a trajetória de referência difícil de ser praticada. Observa-se também que ao longo das chicanes, a aeronave atinge velocidades de rolamento máximas de cerca de 2 rad/s, o que é bastante diferente dos valores observados nas corridas, como será apresentado nos dados de voo a diante. Ou seja, em termos práticos, é importante que se obtenha não apenas uma trajetória para execução em tempo mínimo, mas que também leve em consideração o grau de dificuldade de sua execução pelo piloto, reduzindo as possibilidades de erros.

Apesar das limitações observadas, a solução obtida pelo modelo de massa-ponto apresentou, num aspecto mais amplo, um comportamento coerente, i.e., uma trajetória suave com velocidades lineares e de rotação com ordens de grandeza próximas às de uma aeronave acrobática real. Assim, a solução ótima obtida pelo modelo simplificado foi aplicada como solução de partida para o modelo de corpo rígido, tanto para uma representação aerodinâmica simplificada quanto para aquela em que se considerou as não-linearidades longitudinais. Neste caso, fez-se uso da representação da atitude por quatérnios unitários para reduzir o custo computacional do problema e ao mesmo tempo evitar o aparecimento de singularidades na cinemática da atitude.

A conversão entre os valores da matriz de rotação e os quatérnios foi realizada pelas técnicas apresentadas na Seção 3.1.3.4, tomando os cuidados devidos, conforme Eq.(6.6). Nesta situação, para se obter um máximo erro local absoluto da ordem de 1×10^{-4} , foram necessários 120 elementos nas regiões onde ocorre as manobras de retorno e 60 elementos nas demais fases. A FIGURA 6.46 e FIGURA 6.47 apresentam os resultados das trajetórias ótimas obtidas para estes casos, onde as linhas em vermelho representam o caso com modelo aerodinâmico simplificado e as linhas em preto o modelo cuja aerodinâmica longitudinal é não-linear.

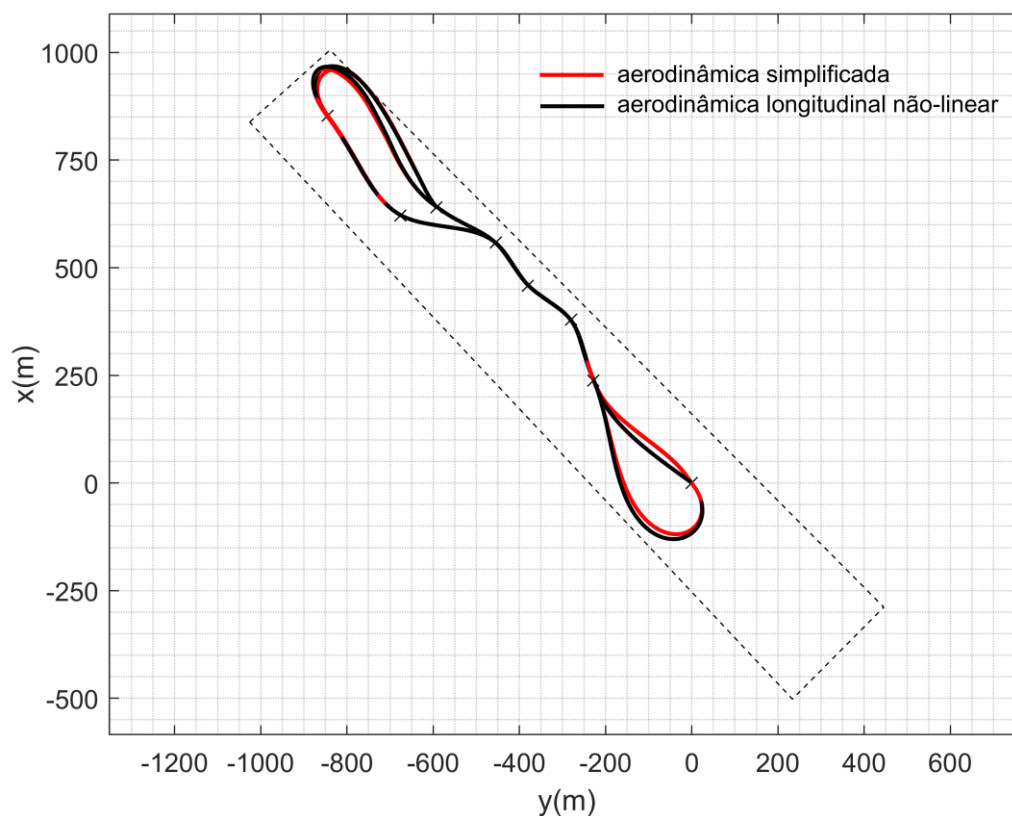


FIGURA 6.46 - Vista superior das trajetórias obtidas pelo modelo de corpo-rígido e diferentes modelos aerodinâmicos.

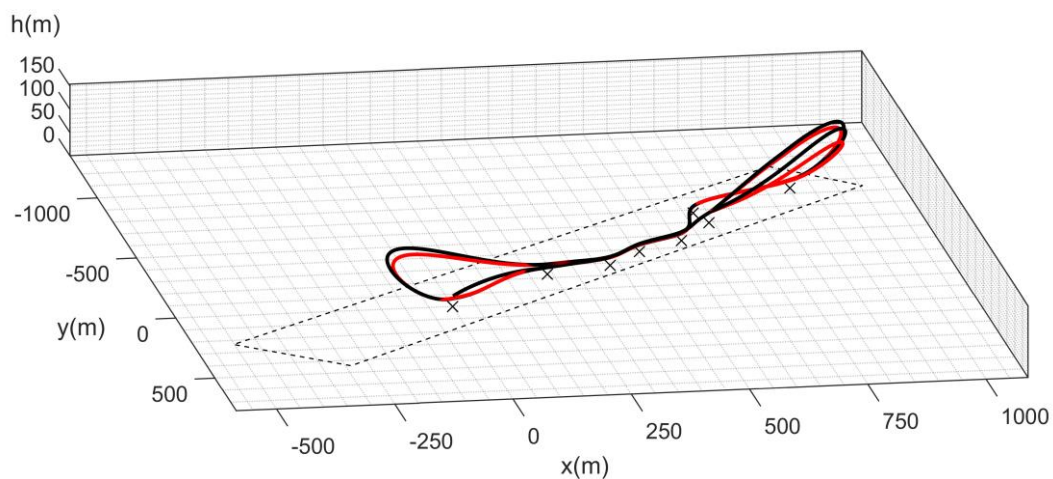


FIGURA 6.47 - Vista tridimensional das trajetórias obtidas pelo modelo de corpo-rígido e diferentes modelos aerodinâmicos

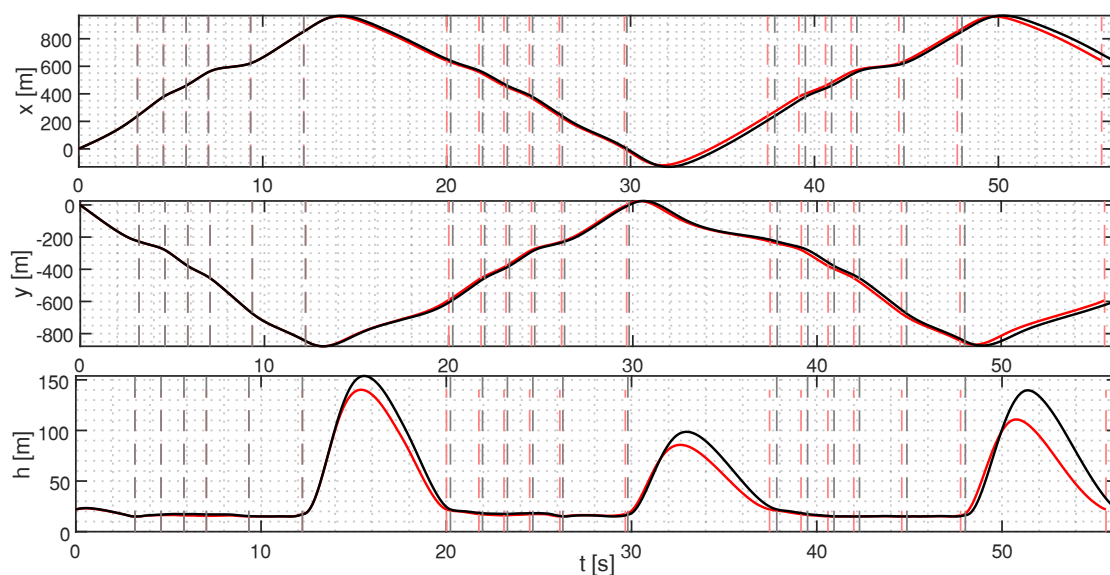


FIGURA 6.48 - Trajetórias obtidas para x , y e h pelo modelo de corpo rígido.

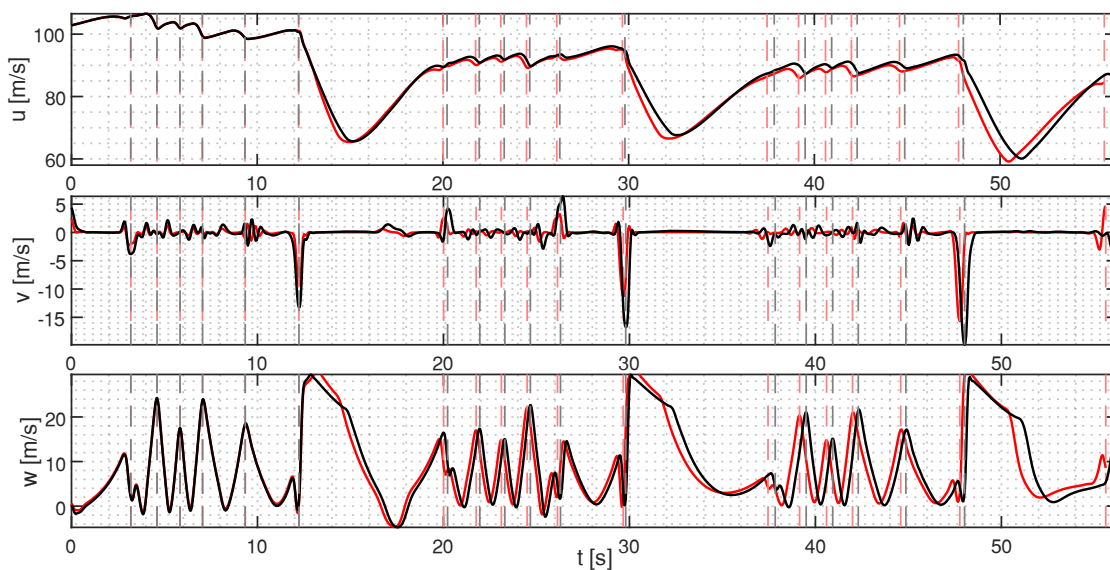


FIGURA 6.49 - Trajetórias obtidas para u , v e w pelo modelo de corpo rígido.

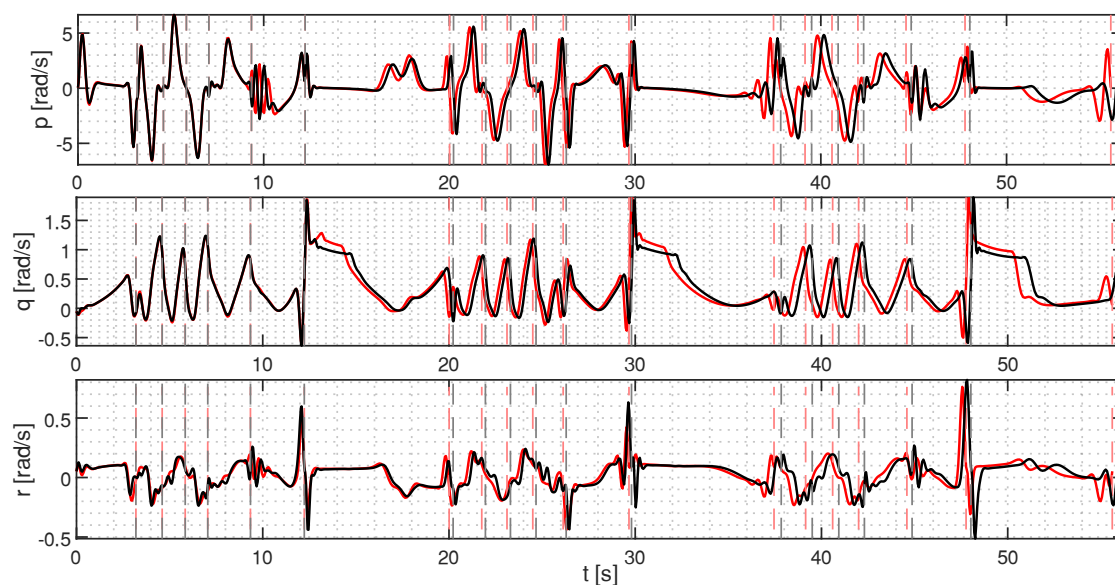


FIGURA 6.50 - Trajetórias obtidas para p , q e r pelo modelo de corpo rígido.

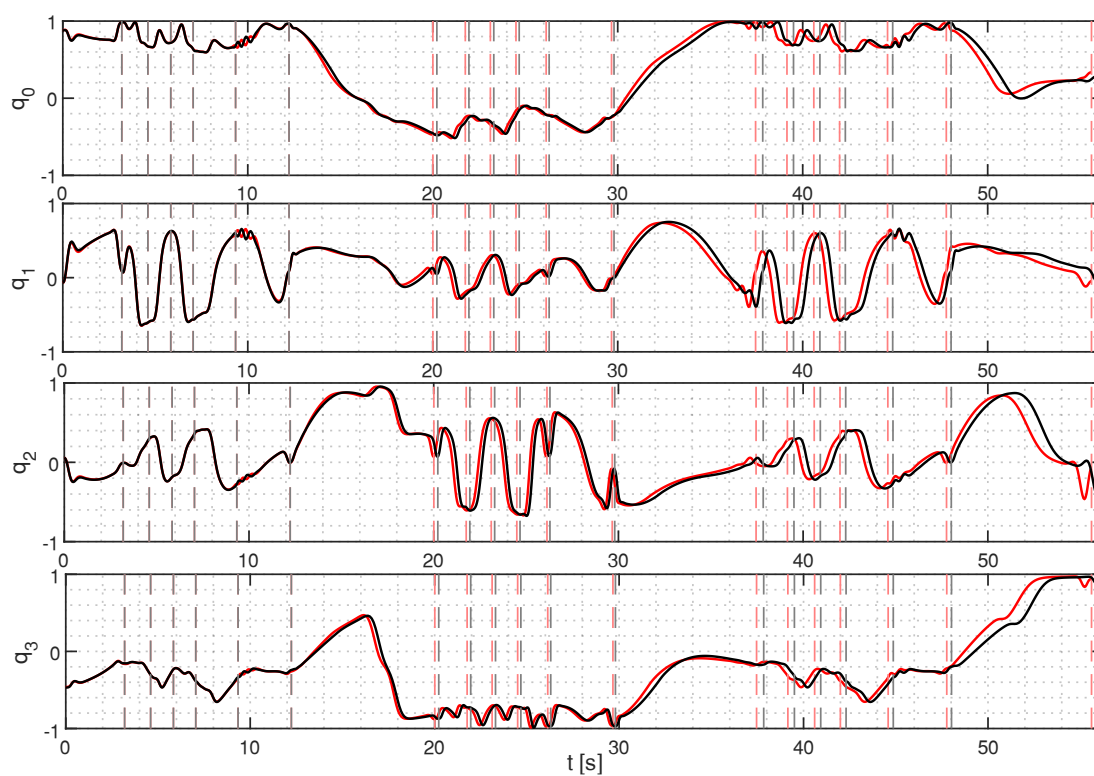


FIGURA 6.51 - Trajetórias obtidas para os quatérnios pelo modelo de corpo rígido.

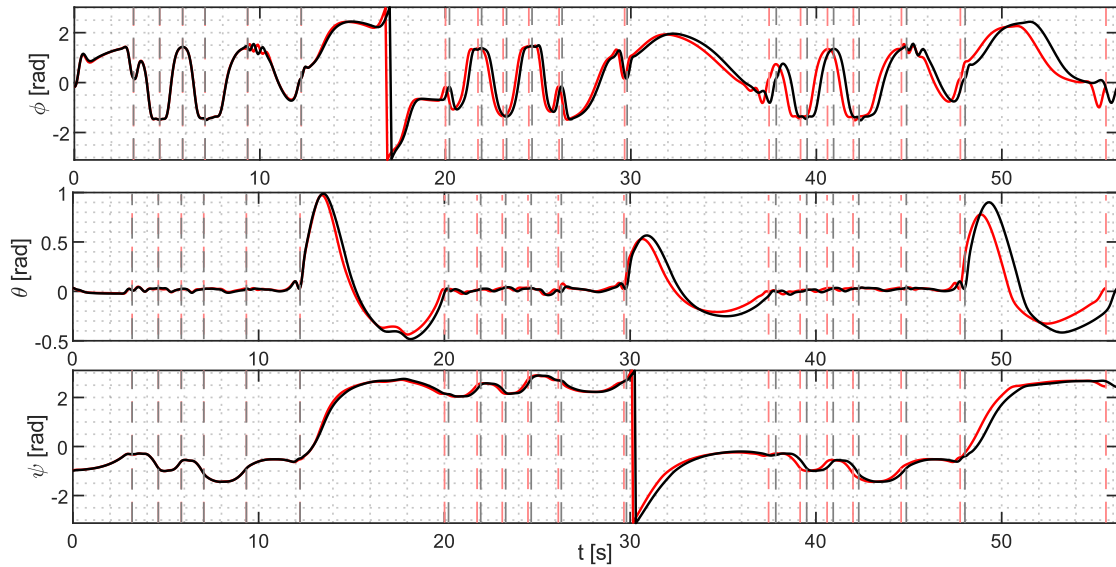


FIGURA 6.52 – Valores dos ângulos de Euler ϕ , θ e ψ convertidos a partir dos quatérnios obtidos pelo modelo de corpo rígido.

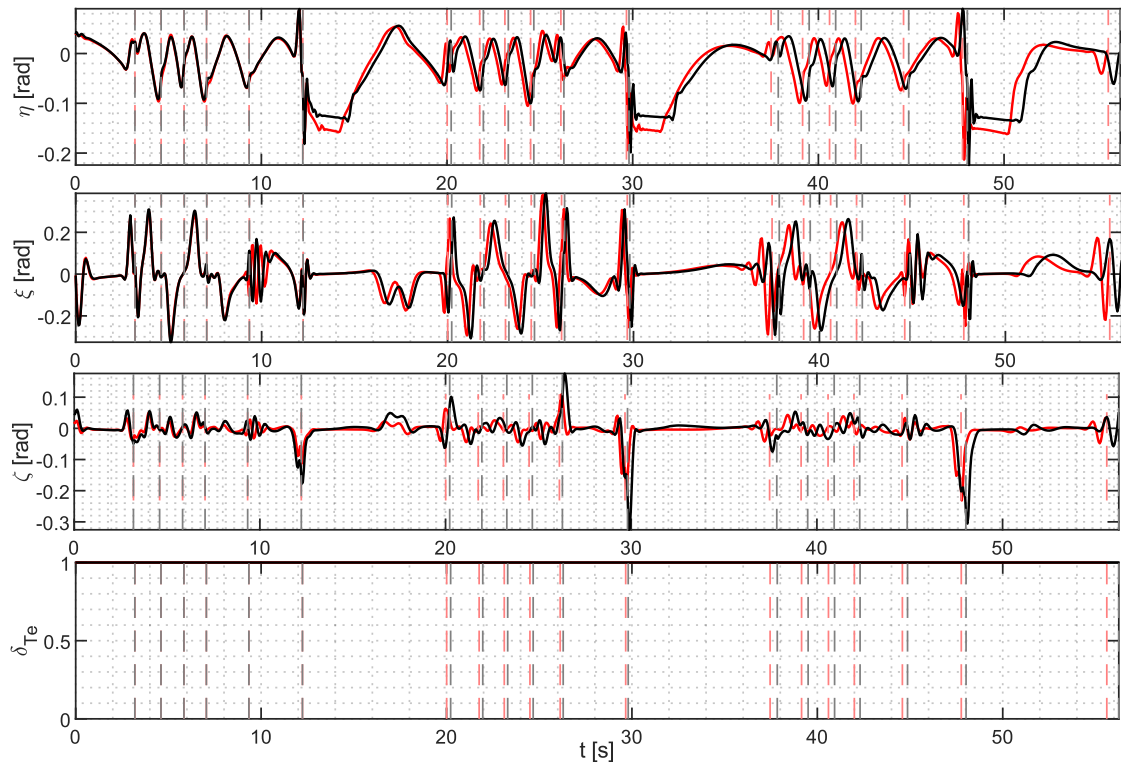


FIGURA 6.53 – Valores das variáveis de controle η , ξ , ζ e δ_{Te} da solução para o modelo de corpo rígido.

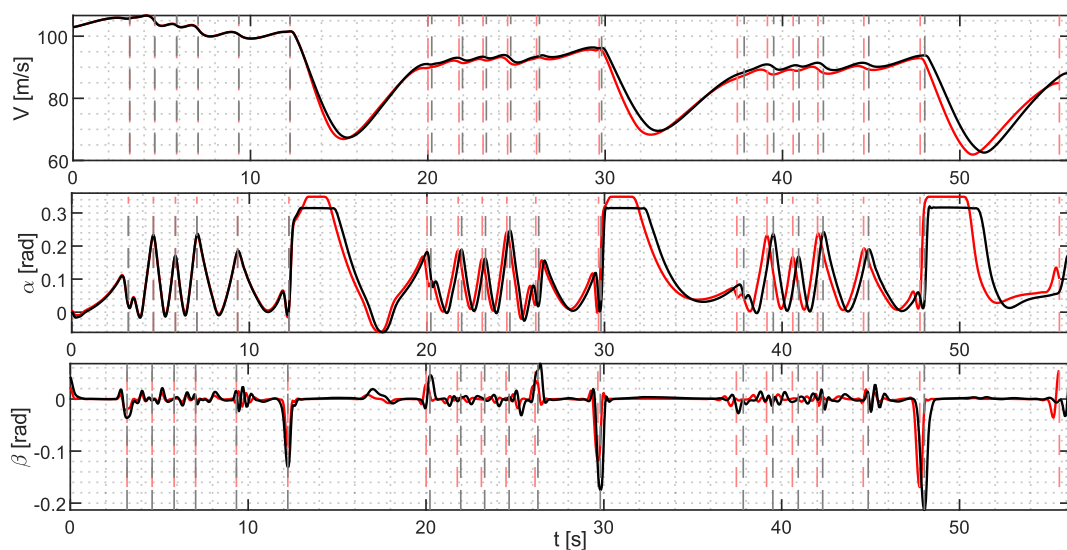


FIGURA 6.54 - Valores das variáveis V , α e β da solução para o modelo de corpo rígido.

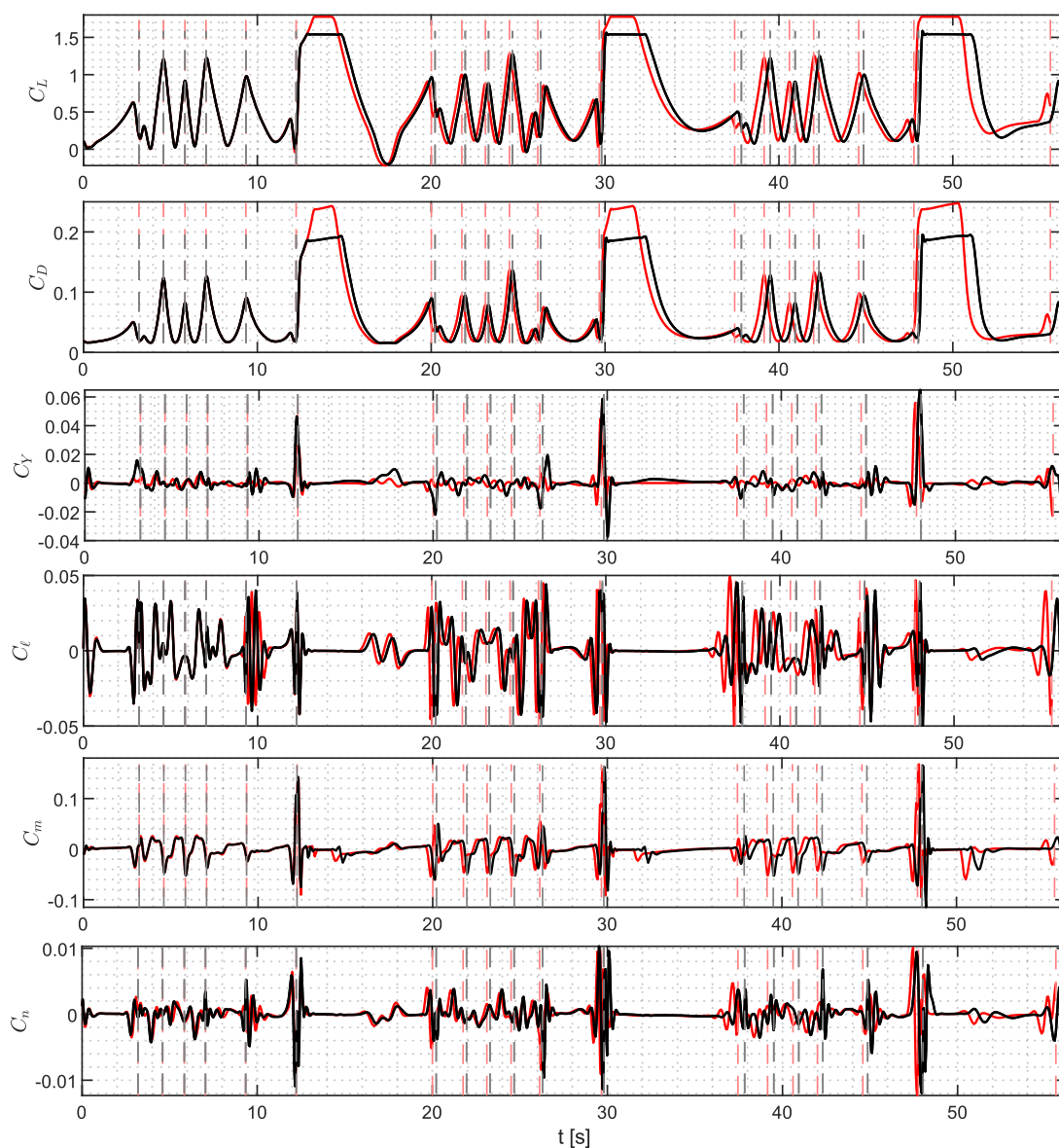


FIGURA 6.55 - Valores dos coeficientes aerodinâmicos C_L , C_D , C_Y , C_l , C_m e C_n da solução para o modelo de corpo rígido.

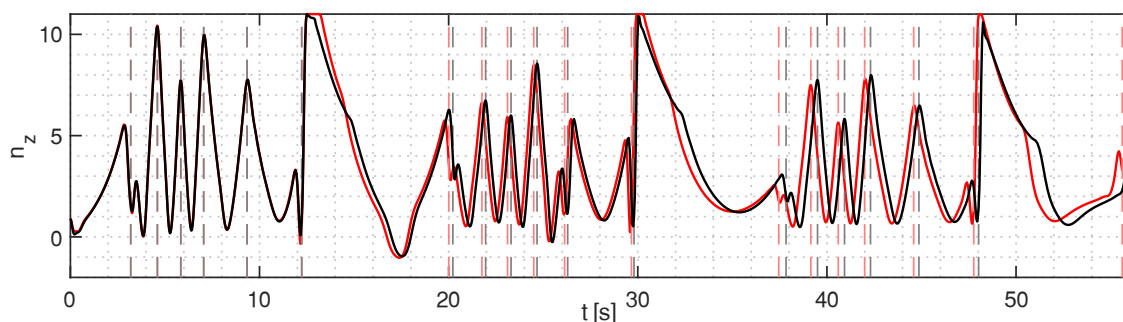


FIGURA 6.56 - Valores dos fatores de carga verticais da solução para o modelo de corpo rígido.

Observa-se que neste tipo de trajetória a utilização do modelo de corpo rígido é de grande importância para obtenção de um resultado mais coerente. Compare, por exemplo, a variação do fator de carga da aeronave durante a execução das chicanes entre o modelo massa-ponto e o modelo de corpo rígido. Nota-se que no modelo de menor fidelidade (massa-ponto), uma vez que não há uma dinâmica rotacional, as taxas de rolamento e arfagem da trajetória fazem com a aeronave atinja fatores de carga nesta região de voo próximos aos limites superiores e inferiores estabelecidos. Tal comportamento é incondizentes com a realidade, como será apresentado na comparação com os dados experimentais a diante. De fato, é nesta região do voo onde as maiores diferenças de aceleração entre os dois modelos são observadas. Também nas fases de manobra de retorno, notam-se diferenças nas trajetórias finais obtidas, pois como o ângulo de ataque é uma variável de controle no modelo massa-ponto, o coeficiente de sustentação irá variar quase que de forma instantânea, o que é corrigido com a inclusão da dinâmica rotacional no modelo. Esta diferença também está relacionada ao fato de ter se considerado um comportamento aerodinâmico simétrico, i.e., $\beta = 0$, no modelo de massa-ponto.

Assim como se esperava, o modelo de corpo rígido apresentou uma resposta mais coerente nas regiões onde a dinâmica rotacional tem maior expressividade. Porém, no que diz respeito aos modelos aerodinâmicos, nas regiões de grande aceleração vertical, a aerodinâmica simplificado ainda apresenta um comportamento diferente do que se espera em um voo real. De fato, nota-se que as diferenças mais significativas nas trajetórias entre este modelo e aquele com aerodinâmica longitudinal não-linear estão nas regiões de maior aceleração vertical. As não-linearidades consideradas são bastante significativas, pois a aeronave irá operar próximo à região de estol nas manobras de retorno. Quando o comportamento não-linear é desprezado o ângulo de ataque chega a atingir o limite de trajetória de 20° (0,349 rad) (FIGURA 6.54), porém, nesta região, o estol já teria ocorrido fazendo com que o arrasto aumentasse e a sustentação diminuísse. Estas características foram consideradas no modelo aerodinâmico não-linear e os

resultados apresentados na FIGURA 6.54 e FIGURA 6.55 mostram que a aeronave irá limitar seu ângulo de ataque até aproximadamente 18° , que é onde o coeficiente de sustentação atinge seu valor máximo. É interessante observar este comportamento pois, de fato, a sustentação é a componente principal na variação da direção do vetor de velocidades da aeronave. Logo, para executar uma manobra de retorno em menor tempo, é importante que a sustentação tenha o maior valor possível. Como se pode observar na FIGURA 6.48, devido à maior sustentação gerada no modelo com aerodinâmica simplificada, a aeronave executa a manobra de retorno com uma menor variação de altitude e em um menor tempo.

Junto a isso, as não-linearidades incluídas fazem com que o fator de carga vertical nas regiões críticas não atinja os valores limites. Note que para a curva vermelha apresentada na FIGURA 6.56, o fator de carga não apenas atinge o seu valor limite, como também permanece por curtos períodos de tempo nestes valores, o que é incondizente tanto com os dados experimentais que serão apresentados quanto com a própria habilidade de um piloto em executar este tipo de voo.

Tais questões justificam o fato de o modelo simplificado apresentar um índice de desempenho menor do que quando se considera as não-linearidade aerodinâmicas. O mesmo pode ser observado em relação ao modelo massa-ponto, cujo tempo mínimo de execução da trajetória é ainda mais otimista por se desprezar a dinâmica rotacional, conforme TABELA 6.8.

TABELA 6.8 - Tempo de execução da trajetória para os diferentes modelos.

Modelo	t_f (s)
Massa-Ponto	55,034
Corpo Rígido (aerodinâmica simplificada)	55,613
Corpo Rígido (aerodinâmica não-linear)	56,259

No mais, as trajetórias do modelo de corpo rígido são bastante similares. É interessante notar que ambas tocam a linha de segurança nº 2 (LS_2) nas manobras de retorno na fase 7, explorando os limites da região permitida para executar o percurso. Além disso, como comentado anteriormente, na solução ótima a manete de tração permanece em 100% ao longo de toda trajetória. Observa-se também que nas passagens pelos portões duplos, os comandos se movem rapidamente para adequar a atitude da aeronave às restrições impostas. Por exemplo, em todas passagens pelos portões duplos prévios a uma manobra de retorno, o piloto deve pressionar rapidamente o pedal do leme, para que a aeronave passe pelo ponto de referência com a proa adequada antes de iniciar o movimento. Nesta mesma região de voo também se nota um movimento brusco do profundor no sentido positivo e logo posteriormente negativo. Isto é

feito para que ao entrar na manobra haja um rápido acréscimo da sustentação global da aeronave e um aumento da aceleração centrípeta no movimento. Porém, ao se defletir o profundor positivamente, a sustentação positiva gerada pela empenagem gera um momento picador que deve ser corrigido com um movimento do profundor na direção oposta, cujo comportamento é condizente com aquele observado em Oliveira, Pinto e Lima (2004).

Em toda trajetória as deflexões máximas dos comandos são de aproximadamente 0,25 rad ($\approx 15^\circ$), que de acordo com as características mostradas na Seção 6.3.2 tem um comportamento linear em relação à variação dos coeficientes aerodinâmicos estimados. Verifica-se que nas corridas aéreas, apesar das taxas de rotação do movimento latero-direcional serem de grande magnitude quando comparadas às de voo convencionais, tais velocidades angulares não atingem as fronteiras do envelope operacional da aeronave. Veja, por exemplo, as taxas de rolamento durante a passagem pela chicane, as quais atingem valores próximos de 5,5 rad/s (315 °/s), enquanto que a aeronave é capaz de executar movimentos com taxa de rolamento de até 7,3 rad/s (420 °/s), i.e., cerca de 35% maior. O mesmo pode ser observado para as velocidades de guinada da aeronave que apresentam valores limites de 0,6 rad/s. Tais verificações explicam o motivo de ter se utilizado um modelo aerodinâmico latero-direcional linearizado para este estudo.

Foi realizado um processo de validação onde as entradas ótimas obtidas foram utilizadas junto do modelo de corpo rígido e aerodinâmica não-linear para uma simulação livre por métodos de Runge-Kutta semelhantes àqueles utilizados na Seção 6.2, para uma revisão sobre diferentes métodos de integração sugere-se a leitura de Rao (1984). A TABELA 6.9 mostra a raiz do erro quadrático médio de cada variável de estado do problema, os quais se apresentaram com valores adequados.

TABELA 6.9 - Raiz do erro médio quadrático da solução obtida pelo MEF em relação à simulação livre para as diferentes variáveis de estado.

</

Fez-se também uma avaliação do tempo computacional gasto por cada um dos modelos, em que a média obtida para dez soluções do problema resultaram nos tempos apresentados na TABELA 6.10. Uma vez que não se tem como objetivo aqui a solução em tempo real, vale frisar que tais valores são apenas para fins de comparação entre os modelos. Para aplicações onde seja necessária uma solução em menor tempo, sugere-se avaliar a utilização das demais estruturas propostas no MEF, e arquiteturas computacionais mais adequadas.

TABELA 6.10 - Tempo computacional para obtenção da solução pelo MEF²⁹.

Modelo	Tempo computacional (min)
Massa-Ponto	15,2
Corpo Rígido (aerodinâmica simplificada)	110,8
Corpo Rígido (aerodinâmica não-linear)	126,3

Com o intuito de avaliar a qualidade dos resultados, comparou-se as soluções obtidas numericamente para o modelo de corpo rígido (utilizando as não-linearidades aerodinâmicas) com dados reais de voo. Tais dados foram medidos durante uma corrida aérea da *Red Bull Air Race* de 2019, cujas características são similares às aquelas utilizadas para estudo da otimização da trajetória neste capítulo. As medições foram realizadas através de um sistema de aquisição (FDAS³⁰) embarcado na aeronave capaz de registrar dados como acelerações lineares, velocidades angulares, posição espacial, velocidade, entre outros; os quais são obtidos através de uma unidade de medição inercial (IMU³¹), um GPS diferencial (DGPS³²), e outros dispositivos instalados na aeronave. Estas medições são utilizadas em tempo real pela direção de prova para avaliar se o piloto excedeu algum dos limites estabelecidos e, posteriormente, pela equipe técnica do piloto para avaliar em quais pontos do percurso pode-se melhorar a trajetória executada. É importante salientar que nesta corrida os pilones foram posicionados sobre barcas flutuadoras sobre a água. Logo, devido à influência do próprio ambiente, o ângulo e a posição dos portões podem ter sofrido variações em relação às coordenadas indicadas na TABELA 6.7. De acordo com os dados obtidos, o vento local durante a prova era de baixa magnitude, o que justifica o fato de ter-se desprezado tais efeitos nas análises apresentadas anteriormente. Desprezou-se também a variação da temperatura externa em relação à atmosfera padrão.

²⁹ Média de 10 soluções

³⁰ *Flight Data Acquisition System*

³¹ *Inertial Measurement Unit*

³² *Differential Global Positioning System*

Foram obtidos dados referentes a dois pilotos, denotados por Piloto 1 (dados apresentados em vermelho) e Piloto 2 (dados apresentados em azul). Observa-se pela FIGURA 6.57, que as trajetórias executadas por cada piloto são distintas, as quais também diferem da trajetória ótima obtida pela análise realizada. O Piloto 1 executou o percurso em 57,306 segundos, o Piloto 2 em 57,912 segundos e a trajetória da solução numérica pelo MEF apresenta um tempo de execução de 56,259 segundos.

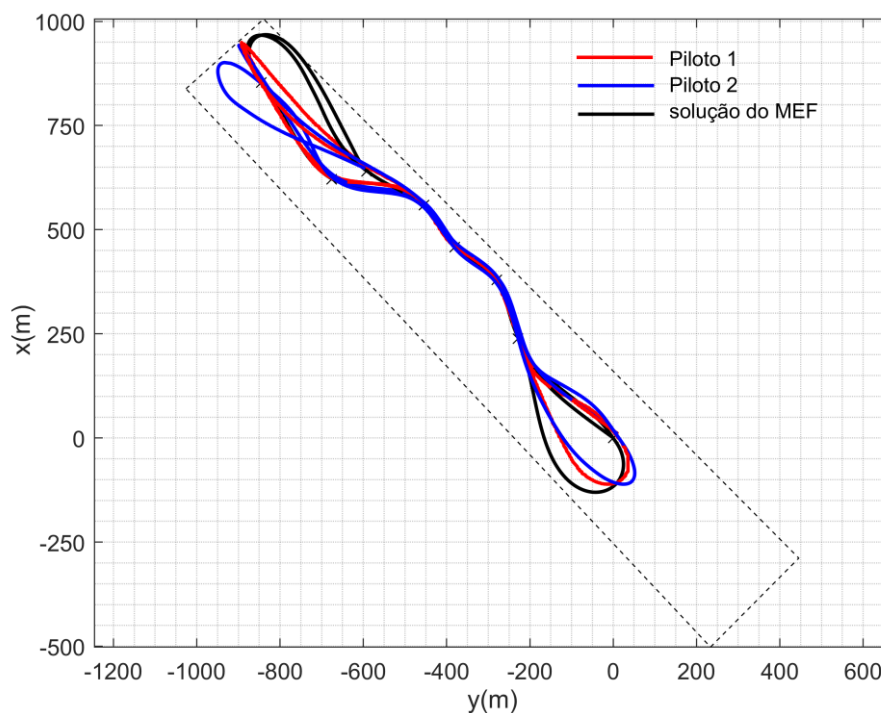


FIGURA 6.57 - Vista superior das trajetórias de dois pilotos em relação à trajetória obtida pela solução do MEF.

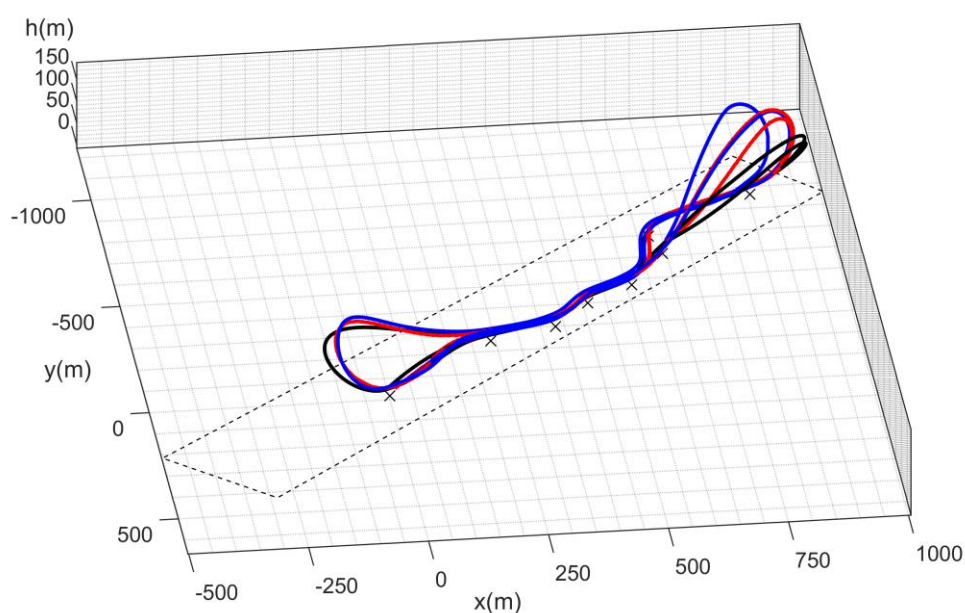


FIGURA 6.58 - Vista tridimensional das trajetórias de dois pilotos em relação à trajetória obtida pela solução do MEF.

Não se sabe exatamente como cada piloto fez a escolha do traçado realizado, mas pode-se afirmar que tal decisão foi avaliada junto de seu time técnico, que geralmente irá ponderar entre uma trajetória que possa ser realizada em um menor tempo e uma que permita uma maior margem para erros de execução do piloto. Também não se tem ao certo se tais decisões foram tomadas através da análise de soluções de problemas de otimização de trajetória ou intuitivamente. Junto disso, sabe-se que apesar das aeronaves utilizadas na corrida serem de um mesmo modelo, cada time realizou uma série de modificações aerodinâmicas, propulsivas e de distribuição de massa a fim de melhorar o desempenho de seu avião para a corrida, o que também pode justificar a diferença de tempos. Tem-se também um fator não avaliado neste trabalho, que está ligado à capacidade do piloto em executar a trajetória planejada e à capacidade de repetibilidade desta execução. A partir destes fatores, não se pode afirmar que a trajetória executada pelo Piloto 1 é o traçado ótimo, apesar dele ter executado o percurso em um menor tempo que o Piloto 2. Apesar disso, pode-se comparar em linhas gerais as características de voo destes pilotos com a trajetória ótima obtida neste trabalho. Assim, a partir do confronto entre os dados de voo com aqueles obtidos pelo MEF avaliou-se a plausibilidade da trajetória obtida ser a ótima e também o comportamento dinâmico do modelo proposto.

Para equiparação entre os dados medidos em voo e aqueles obtidos na solução do problema analisado, realizou-se uma adaptação da escala temporal dos dados experimentais, de tal forma que seu tempo final de trajetória fosse igual ao da solução numérica. Os dados comparados estão apresentados entre a FIGURA 6.59 e a FIGURA 6.64.

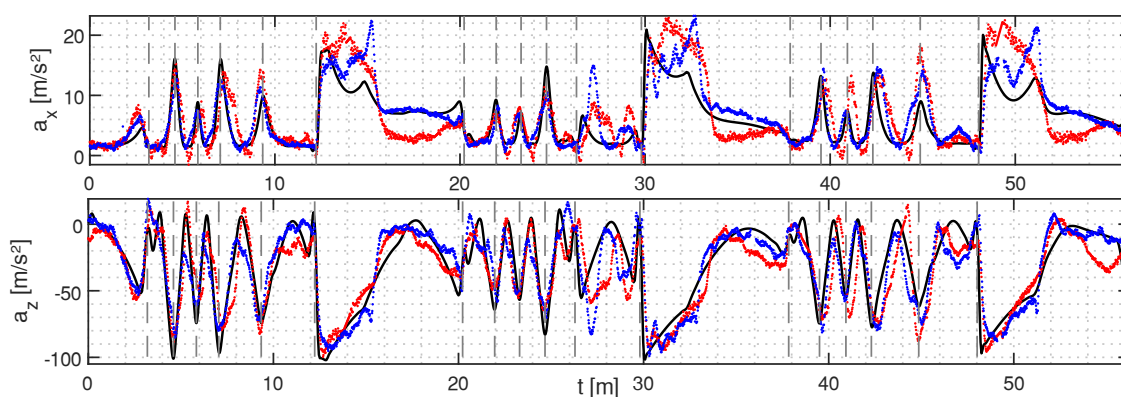


FIGURA 6.59 - Comparação das acelerações nos eixos x_B e z_B entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

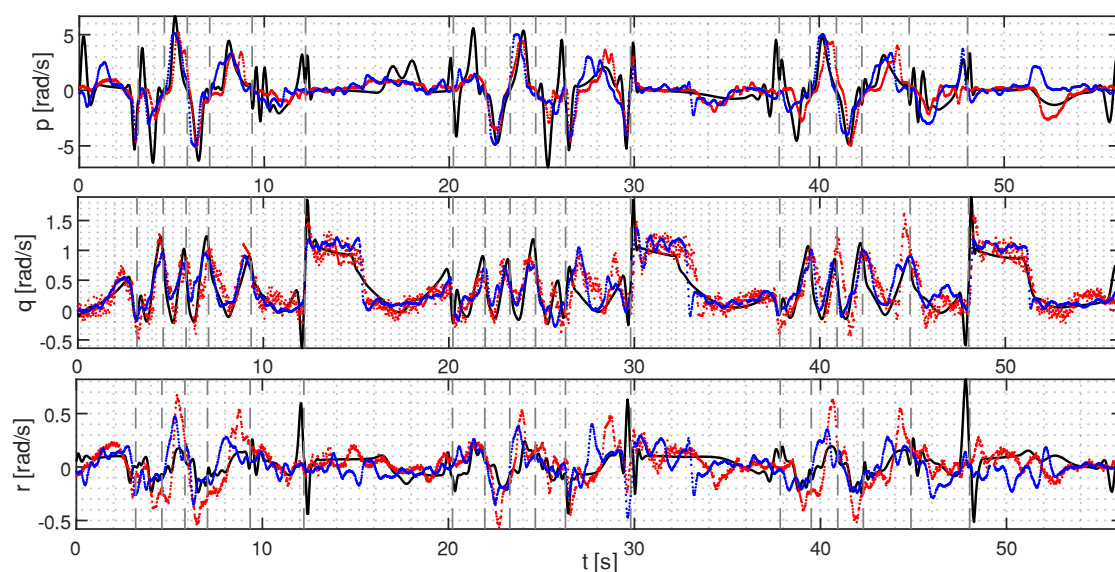


FIGURA 6.60 - Comparação das velocidades angulares nos eixos do corpo entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

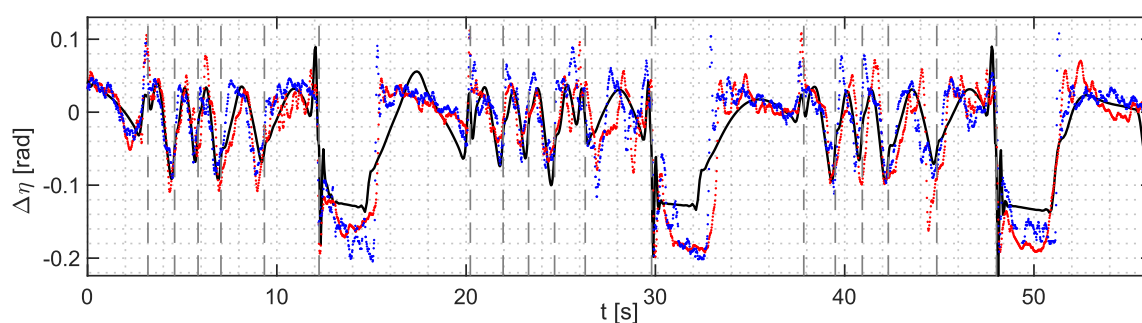


FIGURA 6.61 - Comparação das variações das deflexões no profundor entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

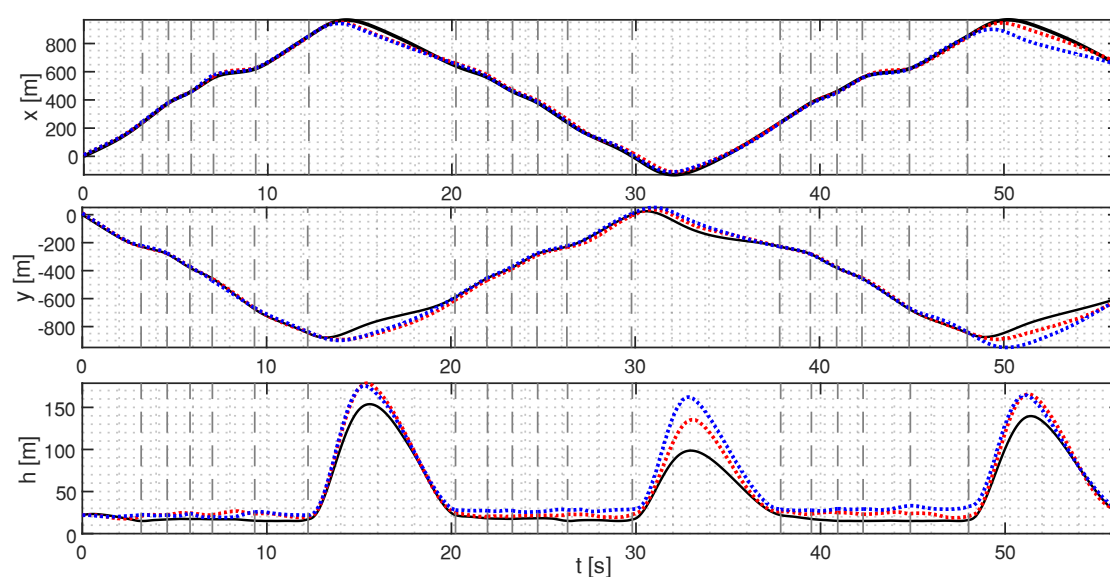


FIGURA 6.62 - Comparação das posições x , y e h entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

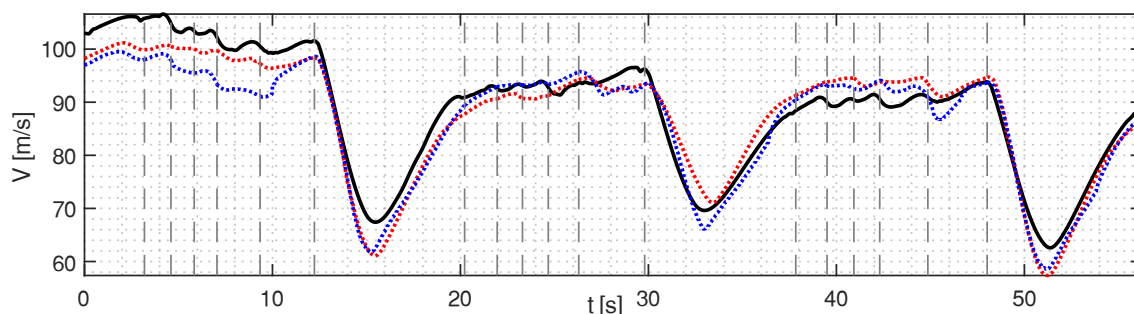


FIGURA 6.63 - Comparação das velocidades de voo (em relação ao referencial inercial) entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

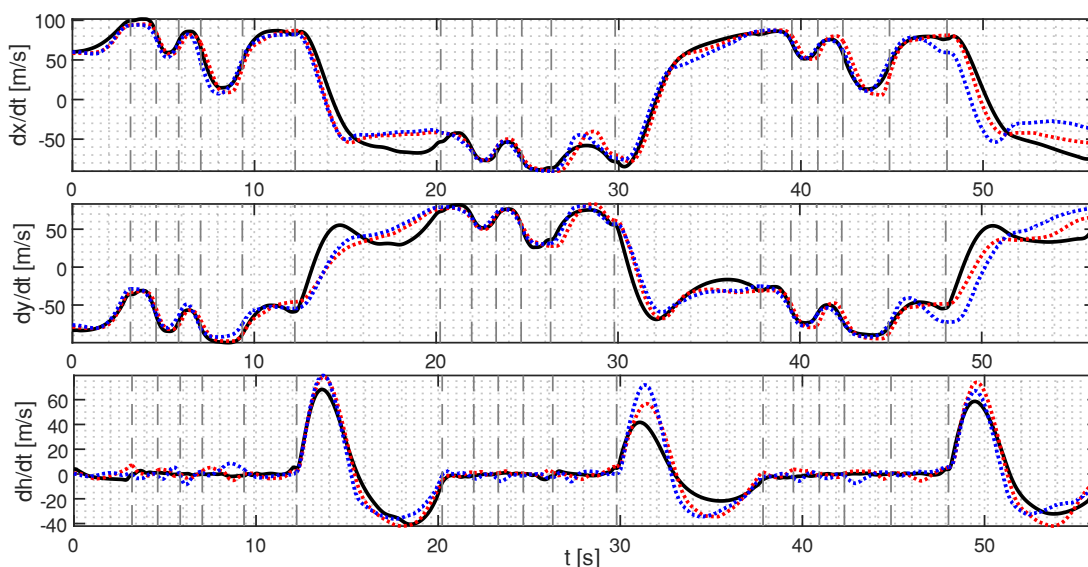


FIGURA 6.64 - Comparação das componentes de velocidades de voo (em relação ao referencial inercial) entre os dados experimentais e da solução obtida pelo MEF.

A FIGURA 6.59 apresenta uma comparação das acelerações nos eixos x_B e z_B do corpo medidas pela IMU com aquelas da solução numérica. O sensor foi instalado na aeronave de tal forma que o sentido positivo das acelerações é oposto àqueles convencionalmente adotados como positivos em S_B . Além disso, posicionou-se o sensor próximo ao centro de gravidade da aeronave a fim de se reduzir a influência das acelerações angulares do corpo nas leituras de aceleração linear. Este mesmo dispositivo foi utilizado para medir as taxas de rotação nos eixos do corpo, conforme FIGURA 6.60. Através da instalação de um transdutor nos comandos da aeronave, registrou-se também o ângulo de deflexão do profundor ao longo do percurso, mostrado na FIGURA 6.61. Cada aeronave possui características de massa, aerodinâmicas e propulsivas específicas que afetam o ângulo de equilíbrio do profundor. Assim, caso se comparasse as deflexões absolutas, seria observada uma diferença sistemática ao longo de toda trajetória da ordem de 3° . Logo, para melhor comparação dos dados, a FIGURA 6.61 apresenta a variação da deflexão dos comandos em relação à deflexão de equilíbrio estimada de cada

aeronave. A posição e velocidade da aeronave em relação ao referencial inercial foram medidos pelo DGPS e estão apresentados na FIGURA 6.62, FIGURA 6.63 e FIGURA 6.64.

Observa-se que, de modo geral, o comportamento das variáveis medidas em voo é concordante com aquele obtido pela solução do problema de otimização de trajetória, tanto em termos de taxa de variação quanto da magnitude destes valores. Nas fases das chicanes, onde todas trajetórias são bastante similares, observou-se uma maior concordância dos dados, tanto em termos de aceleração, taxa de rolamento, deflexão do profundor e velocidade. As principais diferenças observadas estão exatamente nas fases onde os pilotos executaram um trajeto com maior distinção em relação ao da solução numérica, i.e., nas regiões onde se executam as manobras de retorno, e nas regiões logo anteriormente a estas. De acordo com a solução numérica, na trajetória ótima, a aeronave terá uma rápida desaceleração em x_B durante estas manobras, a qual é reduzida quase que de forma gradual ao longo do movimento. Este tipo de comportamento é mais próximo daquele adotado pelo Piloto 2. Já o Piloto 1, realiza uma desaceleração buscando manter-se sempre em um mesmo plano vertical, logo, sua aeronave apresenta tanto uma rápida desaceleração, quanto uma rápida aceleração após ter atingido o ápice do movimento. Apesar dos movimentos serem distintos nestas regiões, as acelerações máximas em z_B são bastante similares, tanto entre os dados experimentais dos dois pilotos quanto da solução ótima, uma vez que em todos os casos a restrição de aceleração máxima neste eixo é a mesma. Logo, nota-se que a minimização do tempo de execução da trajetória nesta etapa esta principalmente ligada à forma em que a aeronave perde e ganha velocidade de voo, i.e., à aceleração em x_B .

Como comentado, as taxas de rotação são bastante similares aos dados experimentais, exceto nas regiões de passagem pelos portões duplos, onde a solução do problema de otimização sugere uma rápida deflexão de todos os comandos para alinhamento da aeronave às restrições de atitude impostas, os quais acarretarão em rápidas taxas de rotação da aeronave em todos os eixos. Ambos pilotos tentam executar este tipo de trajetória no movimento longitudinal da aeronave. Observe, por exemplo, nas deflexões do profundor com movimento similar ao da solução numérica, onde o piloto, empurra (deflexão positiva) e puxa (deflexão negativa) o manche rapidamente, cuja resposta está diretamente relacionada à razão de arfagem observada. O fato das deflexões do profundor apresentarem boa correlação com os dados experimentais é também um indicativo de que os valores relativos aos coeficientes aerodinâmicos ligados à deflexão dos comandos são coerentes.

De acordo com a FIGURA 6.63, ambos pilotos iniciam a corrida com uma velocidade inferior àquela permitida pelo regulamento, enquanto que a trajetória obtida pela solução

numérica sugere que o piloto passe pelo portão inicial com a máxima velocidade permitida. Os pilotos fazem esta passagem com uma margem de segurança, pois iniciar a corrida com uma velocidade acima do limite permitido pode implicar em uma penalização de tempo ou até mesmo na sua desqualificação. No entanto, esta diferença de velocidade de cerca de 4 m/s no portão de entrada implica em uma redução de aproximadamente 0,533 segundos (da solução numérica em relação aos pilotos) no tempo de voo até o portão de número 7. Esta energia cinética também é aproveitada na execução da primeira manobra de retorno, onde ambos pilotos apresentam uma menor velocidade mínima quando comparado com a trajetória obtida pelo MEF. Nota-se também pela FIGURA 6.62 e FIGURA 6.64, que na trajetória ótima sugerida, há uma maior combinação entre movimento vertical e horizontal durante as manobras de retorno de tal forma que a aeronave tenha uma menor perda de altitude e uma menor variação de velocidades na direção h .

Embora a trajetória obtida pela solução numérica apresente um menor tempo de execução, ela contém regiões de voo mais arriscadas para o piloto em termos de penalização de tempo ou desqualificação. Na prática, deve-se aplicar margens para que haja uma menor probabilidade de que o piloto seja penalizado. Apesar de todas distinções comentadas entre a solução numérica e os dados de voo, a solução proposta indica uma trajetória cujas características gerais têm boa semelhança com os dados experimentais, o que aponta para uma boa probabilidade de que a trajetória obtida realmente seja a solução ótima do problema proposto.

6.3.4 Comentários

Diferentemente dos problemas solucionados nas Seções 6.1 e 6.2, este caso estudado teve como propósito abordar os diferentes conceitos discutidos ao longo do trabalho. Verifica-se aqui a importância do MEF na solução de problemas de larga escala como este, uma vez que a estrutura do método gera um caráter esparsa quando visto do ponto de vista do problema de programação matemático. Isto permite que a trajetória possa ser dividida em um grande número de elementos e, portanto, de restrições dinâmicas e de variáveis. Além disso, observa-se uma das vantagens da abordagem da trajetória fracionada, a qual foi utilizada para separar a trajetória em um conjunto de segmentos menores, auxiliando na formulação.

Nota-se que, em casos onde o modelo de alta fidelidade é necessário para a solução e onde o problema apresenta vínculos de contorno complexos de serem definidos, a abordagem multifidelidade híbrida sugerida é bastante útil. Nela combina-se certas qualidades dos modelos dinâmicos necessários para cada etapa da solução do problema. Identificou-se também que é

importante a inclusão de certas não-linearidades aerodinâmicas para alguns casos, principalmente nas condições em que a aeronave explora as extremidades de seu envelope de voo.

Por fim verifica-se que, apesar dos trajetos realizados por ambos pilotos serem distintos da solução obtida numericamente, o comportamento das acelerações, das deflexões, das velocidades em voo, entre outras, são coerentes com os resultados obtidos. Isto indica uma boa possibilidade de que a trajetória obtida pelo método seja uma solução ótima do problema.

7 CONCLUSÃO

7.1 Comentários Finais

Visando substanciar as principais discussões realizadas ao longo deste trabalho, fazem-se os seguintes comentários:

- Quanto à formulação dos vínculos de contorno das representações da atitude

Apresentou-se importantes características do comportamento das principais formas de parametrização da atitude utilizadas na mecânica do voo. Verificou-se que, devido ao fato de tais representações do grupo de rotações $SO(3)$ não pertencerem ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, cada uma delas apresenta particularidades que devem ser bem compreendidas para a solução do planejamento de trajetória.

Mostrou-se que, mesmo na utilização dos clássicos ângulos de Euler, a formulação do problema matemático não é uma questão trivial. O mesmo se observa para os quatérnios unitários, os quais, apesar de não conterem singularidades, apresentam uma dupla representação para cada orientação espacial da aeronave. Sendo assim, uma formulação inadequada dos vínculos de contorno pode limitar a capacidade do problema matemático em representar adequadamente o problema físico, limitando ou até mesmo impondo certas trajetórias.

Apresentou-se também algumas propostas para a modelagem dos vínculos de contorno de maneira a evitar tais problemas de formulação. Observou-se como estas questões implicam na solução do problema através de experimentos numéricos. Por meio deles, notou-se que as formulações sugeridas podem ser utilizadas para uma representação coerente do problema caso se utilize os quatérnios unitários. O mesmo não pode ser afirmado a respeito dos ângulos de Euler, que, por possuírem múltiplas representações de uma mesma atitude, limitam a capacidade de uma modelagem dos contornos que não excluam certas trajetórias do domínio de soluções.

Identificou-se que uma alternativa para uma formulação mais simples do problema matemático se dá através da utilização das matrizes de rotação. Apesar de elas possuírem um maior número de variáveis a serem analisadas ao longo da solução, elas possuem uma representação global e única, simplificando o processo de modelagem do problema matemático. Além disso, notou-se através dos experimentos realizados que, aparentemente, esta representação é mais robusta no que diz respeito à solução de partida do problema de otimização.

Percebeu-se também que as limitações de representação presentes nos ângulos de Euler e nos parâmetros de Euler-Rodrigues podem ser úteis em certas situações, onde se deseja restringir, de certo modo, as trajetórias possíveis para o problema matemático.

Por fim, pode-se afirmar que, apesar do foco destes estudos estarem sob três diferentes maneiras de representação da atitude, estas considerações são válidas para quaisquer outras formas de parametrização. Além disso, estas discussões se estendem a quaisquer sistemas cuja dinâmica envolve movimentos de translação e rotação acoplados.

- Quanto aos modelos EDA para representação dos quatérnios e matrizes de rotação

Observou-se que, devido ao fato dos quatérnios e das matrizes de rotação pertencerem a variedades compactas, deve-se tomar certos cuidados durante o processo de integração numérica de seus elementos. Isto porque, ao longo deste processo, tais modelos de representação das rotações podem se desviar de suas respectivas variedades, fazendo com que seus elementos não atuem apenas sobre a orientação dos vetores, mas também alterando a sua magnitude. Para isso, propôs-se uma forma alternativa de formulação das equações cinemáticas destas técnicas transformando as equações puramente diferenciais em um sistema de equações diferenciais e algébricas. Diferentemente dos problemas de simulação baseados nos métodos de Runge-Kutta, tal forma de representação pode ser facilmente adicionada na formulação do problema através de técnicas como a do método de elementos finitos, onde as restrições algébricas são naturalmente incluídas.

Verificou-se através de alguns experimentos numéricos que, diferentemente das técnicas convencionais, a forma de modelagem sugerida faz com que os quatérnios permaneçam unitários e que as matrizes de cossenos diretores permaneçam ortogonais e com determinante um ao longo de toda trajetória.

- Quanto ao Método de Elementos Finitos para a solução de problemas de controle ótimo

Realizou-se uma apresentação sobre como o Método de Elementos Finitos pode ser utilizado para formulação e solução numérica de problemas de controle ótimo através de técnicas diretas com parametrização completa, i.e., tanto das variáveis de estado quanto de controle. Para isso, foi mostrado como o método de resíduos ponderados pode ser utilizado na aproximação das restrições dinâmicas do problema.

Foi observado que dentre as técnicas mais comuns para ponderação dos resíduos, a colocação é que apresenta maior simplicidade de implementação, uma vez que nela não há a necessidade da solução numérica de integrais definidas, o que não se observa para os demais métodos apresentados. Apesar de ela geralmente precisar de um maior número de elementos

para uma avaliação adequada dos resíduos, verificou-se uma série de desenvolvimentos atuais a respeito da solução de problemas de otimização com estrutura esparsa, a qual ocorre naturalmente na formulação pelo método de elementos finitos. Logo, pode-se utilizar de malhas com um grande número de elementos no domínio de forma a ampliar o número de pontos onde o resíduo será anulado.

A partir disso justificou-se o motivo no qual os denotados métodos de colocação direta terem ganho tanta relevância nos últimos anos. Mostrou-se, porém, que esta discussão não está clara nos trabalhos revisados e, por isso, a técnica de colocação tem sido vista como um método em si. No entanto, mostrou-se que, de fato, ela é apenas um caso particular do método de elementos finitos. Assim, identificou-se o método de elementos finitos como uma estrutura capaz de englobar as diferentes formulações do problema através de técnicas de parametrização completa, visto que esta permite uma ampliação para novos desenvolvimentos.

- Quanto à aplicação da abordagem multifidelidade híbrida

Em alguns trabalhos revisados, notou-se a busca pelo desenvolvimento de técnicas de solução do problema de planejamento de trajetórias de aeronaves através do escalonamento de modelos de equações de movimento com diferentes graus de fidelidade. Sugeriu-se adicionalmente neste trabalho que não apenas as equações de movimento sejam consideradas neste processo, como também aquelas relativas à cinemática da atitude.

Devido às características verificadas ao longo do trabalho, indicou-se a utilização das matrizes de rotação em combinação com um modelo de menor fidelidade (massa-ponto) para obtenção de um resultado inicial do problema, o qual é aplicado como solução de partida de um problema onde utilizam-se modelos de maior fidelidade (corpo rígido) combinados aos quatérnios ou ângulos de Euler. Tal técnica, junto das diversas outras considerações feitas ao longo do trabalho, foi aplicada na solução de um problema de planejamento de trajetória de aeronave de alta complexidade. Notou-se também a importância da consideração de certos efeitos aerodinâmicos não-lineares no planejamento de trajetórias que envolvam movimentos onde a aeronave atinge os limites de seu envelope operacional.

Por fim, verificou-se que a abordagem apresentada possui boa coerência com os dados experimentais obtidos, o que indica, conseqüentemente, que as discussões e sugestões feitas ao longo deste trabalho são de grande importância na formulação teórica e numérica do problema.

7.2 Síntese

Neste trabalho realizou-se uma ampla discussão a respeito da formulação teórica e numérica de problemas de planejamento de trajetória de aeronaves. Foram apresentadas diferentes maneiras de se descrever o movimento da aeronave. Estes modelos são constituídos basicamente: das equações de navegação, das equações de movimento (relacionadas às acelerações lineares e angulares) e das equações cinemáticas da atitude. Estas últimas foram as que receberam maior destaque neste estudo, dando ênfase às principais formas de parametrização da atitude utilizadas na análise da mecânica do voo, as quais são: os ângulos de Euler, os quatérnios unitários e as matrizes de rotação. Mostrou-se que, pelo fato do grupo de rotações $SO(3)$ tridimensionais não pertencerem ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, cada uma destas formas de representação de atitude possui particularidades importantes que devem ser consideradas durante a formulação do problema. Tais características foram apresentadas e sugeriu-se formas de alternativas para a montagem do problema de tal forma que se possa evitar uma formulação equivocada, onde o problema matemático poderia se restringir, limitando a sua capacidade de representação do problema físico. Quanto ao aspecto da formulação numérica, apresentou-se o método de elementos finitos como uma maneira abrangente de se postular problemas de controle ótimo através de técnicas diretas com parametrização completa. Foi identificado que técnicas comumente utilizadas, como o método de colocação direta, podem ser interpretadas como casos particulares do método de elementos finitos onde o método de colocação é utilizado na ponderação dos resíduos dinâmicos do sistema. Verificou-se, por fim, que as contribuições propostas apresentam um importante valor na avaliação dos problemas de planejamento de trajetória ótima de aeronaves.

7.3 Sugestão de Trabalhos Futuros

Como forma de dar continuidade aos estudos apresentados neste trabalho, sugere-se:

- Avaliar como as demais técnicas de resíduos ponderados, além da de colocação, podem influenciar nos resultados obtidos pelo método de elementos finitos.
- Avaliar a utilização de modelos dinâmicos mais simples em fases da trajetória onde a dinâmica rotacional não é tão significativa e desenvolvimento de uma abordagem híbrida combinada. Isto pode ser feito através da utilização da modelagem por trajetória multifase, atribuindo a cada fase um modelo dinâmico mais apropriado, reduzindo o custo computacional envolvido na tarefa.

- Avaliação da utilização de outras técnicas de representação da atitude na modelagem da orientação da aeronave no contexto da otimização de trajetórias, além das formas convencionalmente utilizadas, como, por exemplo: As Matrizes de Rotação de 2 colunas, os parâmetros de Hopf e os parâmetros de Cayley-Klein.
- Desenvolvimento de uma técnica para avaliação da factibilidade e grau de dificuldade na execução por um piloto humano das trajetórias obtidas na Seção 6.3.3.

8 REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. [S.l.]: [s.n.], 1970.
- ADAMAWI, Y. M.; HAGER, W. W.; RAO, A. V. Mesh Refinement Method for Solving Bang-Bang Optimal Control Problems Using Direct Collocation, 2019.
- ALEXANDRE, D. E. D. C. V. **Closed Dynamic Soaring Trajectories for Surveillance Missions of Aerial Vehicles (Dissertação)**. Instituto Técnico de Lisboa. [S.l.], p. 106. 2019.
- ALLERTON, D. **Principles of Flight Simulation**. 1ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- ALTMANN, S. L. Hamilton, Rodrigues and the quaternion scandal. **Mathematics Magazine**, v. 62, n. 5, p. 291-308, 1989.
- ANDERSSON, J. A. E. et al. CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control. **Mathematical Programming Computation**, v. 11, n. 1, p. 1-36, Julho 2018.
- ANTONAKIS, A.; NIKOLAIDIS, T.; PILIDIS, A. P. Multi-Objective Climb Path Optimization for Aircraft/Engine Integration Using Particle Swarm Optimization. **Applied Sciences**, v. 7, n. 5, p. 1-22, Abril 2017.
- ARDEMA, M. D.; ASUNCION, B. C. Flight Path Optimization at Constant Altitude. In: BUTRAZZO, G.; FREDIANI, A. **Variational Analysis and Aerospace Engineering**. New York: Springer, v. 33, 2009. Cap. 2.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6th. ed. San Diego: Elsevier, 2005.
- ARSIE, K. C. **Método de Euler e Método Pseudoespectral usando Pontos Legendre Gauss Radau para uma Classe de Problemas de Controle Ótimo (Dissertação)**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 80. 2013.
- ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. **Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations**. [S.l.]: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- AUGUGLIARO, F.; SCHOELLIG, A. P.; D'ANDREA, R. **Generation of collision-free trajectories for a quadrocopter fleet: A sequential convex programming approach**. 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Vlamoura-Algarve: IEEE. 2012. p. 1-6.
- AZIMOV, D. M. Active Rocket Trajectory Arcs: A Review. **Automation and remote Control**, v. 66, n. 11, p. 1715-1732, 2005.

- BAR-ITZHACK, I. Y. New Method for Extracting the Quaternion from a Rotation Matrix. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 23, n. 6, p. 1085-1087, Abril 2000.
- BAUMGARTE, J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 1, n. 1, p. 1-16, 1972.
- BECERRA, V. M. **Solving Complex Optimal Control Problems at No Cost with PSOPT**. 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. Yokohama: IEEE. 2010. p. 1391-1396.
- BECERRA, V. M. Practical Direct Collocation Methods for Computational Optimal Control. In: FASANO, G.; PINTÉR, J. D. **Modeling and Optimization in Space Engineering**. [S.l.]: Springer, v. 73, 2013. Cap. 2, p. 33-60.
- BECERRA, V. M.; GALVÃO, R. K. H. Um Tutorial sobre Métodos Pseudo-Espectrais para Controle Ótimo Computacional. **Revista Controle & Automação**, v. 21, n. 3, p. 224-244, Maio e Junho 2010.
- BELDERRAIN, J. L. R.; PAGLIONE, P. **Optimal Performance of Airplanes Flying Through Windshear**. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. Monterey: AIAA. 1993. p. 1753-1762.
- BELLMAN, R. **The Theory of Dynamic Programming**. Laramie: American Mathematical Society. 1954.
- BETTIATO, A. C.; PAGLIONE, P. **Otimização da Atitude de Satélites Artificiais**. Second DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control. Rio Claro: [s.n.]. 2003. p. 1614-1623.
- BETTS, J. T. **SOCS User's Guide**. Boeing Aerospace Company. [S.l.], p. 708. 2009.
- BETTS, J. T. **Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming**. 2nd. ed. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
- BETTS, J. T.; ERB, S. O. Optimal Low Thrust Trajectories to the Moon. **SIAM Journal of Applied Dynamical Systems**, v. 2, n. 2, p. 144-170, 2003.
- BHAT, S. P.; BERNSTEIN, D. S. Atopological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. **Systems & Control Letters**, v. 39, n. 1, p. 63-70, Outubro 2000.
- BIEGLER, L. T.; CAMPBELL, S. L.; MEHRMANN, V. **Control and Optimization with Differential-Algebraic Constraints**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012.
- BILIMORA, K. D.; WIET, B. Time-Optimal Three-Axis Reorientation of a Rigid Spacecraft. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 16, n. 3, p. 446-452, Maio 1993.

- BITTNER, M. **Utilization of Problem and Dynamic Characteristics for Solving Large Scale Optimal Control Problems (Tese de Doutorado)**. Fakultät für Maschinenwesen. Aachen, p. 331. 2017.
- BOCK, H. G. **Recent Advances in Parameter Identification Techniques for O.D.E.** Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations. Heidelberg: Springer. 1982. p. 95-121.
- BOHME, T. J.; FRANK, B. **Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles: Theory, Methods and Applications**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017.
- BONALLI, R. et al. **Trajectory Optimization on Manifolds: A Theoretically-Guaranteed Embedded Sequential Convex Programming Approach**. Robotics: Science and Systems. Freiburg: [s.n.]. 2019. p. 1-10.
- BOUQUET, G. D.; TRIANTAFYLLOU, M. S.; SLOTINE, J.-J. E. Optimal Dynamic Soaring Consists of Successive Shallow Arcs. **Journal of the Royal Society Interface**, v. 14, p. 1-11, Julho 2017.
- BREAKWELL, J. V. The Optimization of Trajectories. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 7, n. 2, p. 215-247, Junho 1959.
- BREZOESCU, C.-A. **Small Lightweight Aircraft Navigation in the Presence of Wind (Tese)**. Université de Technologie de Compiègne. [S.l.], p. 157. 2014.
- BRINKMAN, K.; VISSER, H. G. Optimal turn-back manoeuvre after engine failure in a single-engine aircraft during climb-out. **Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering**, v. 2221, n. 1, p. 17-27, Janeiro 2007.
- BRYSON, A. E.; DESAI, M. N.; HOFFMAN, W. C. Energy-State Approximation in Performance Optimization of Supersonic Aircraft. **Journal of Aircraft**, v. 6, n. 6, p. 481-488, Dezembro 1969.
- BRYSON, A. E.; HO, Y.-C. **Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control**. Washington: John Wiley & Sons, 1975.
- BRYSON, A. E.; ROSS, S. E. Optimum Rocket Trajectories with Aerodynamic Drag. **Journal of Jet Propulsion**, v. 28, n. 7, p. 465-469, Dezembro 1958.
- BULIRSCH, R.; MONTRONE, F.; PESCH, H. J. Abort Landing in the Presence of Windshear as a Minimax Optimal Control Problem, Part 1: Necessary Conditions. **Journal of Optimization Theory and Application**, v. 70, n. 1, p. 1-23, Julho 1991a.
- BULIRSCH, R.; MONTRONE, F.; PESCH, H. J. Abort Landing in the Presence of Windshear as a Minimax Optimal Control Problem, Part 2: Multiple Shooting and Homotopy. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 70, n. 2, p. 223-254, Agosto 1991b.

- BÜSKENS, C.; WASSEL, D. The ESA NLP Solver WORHP. **Modeling and Optimization in Space Engineering**, New York, v. 73, n. 1, p. 85-110, 2013.
- BYRD, R. H.; NOCEDAL, J.; WALTZ, R. A. KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization. In: G. DI PILLO, M. R. **Large-Scale Nonlinear Optimization: Nonconvex Optimization and Its Applications**. Boston: Springer, v. 83, 2006. p. 35-59.
- CAMPA, R.; CAMARILLO-GOMEZ, K. A. Unit Quaternions: A Mathematical Tool for Modeling, Path Planning and Control of Robot Manipulators. In: CECCARELLI, M. **Robot Manipulators**. IntechOpen: [s.n.], v. 1, 2008. p. 21-48.
- CANUTO, C. et al. **Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains**. 1ª. ed. Heidelberg: Springer, 2006.
- CARRETERO, J. G.-H.; NIETO, F. J. S.; CORDÓN, R. R. **Aircraft trajectory simulator using a three degrees of freedom aircraft point mass model**. 3rd International Conference on Application and Theory of Automation in Command and Control Systems. [S.l.]: ATACCS. 2013. p. 114-117.
- CARVALHO, C. A. D. P. **Estudo do algoritmo dos múltiplos tiros para controle ótimo em tempo real de veículos aeroespaciais**. Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA). São José dos Campos, p. 64. 1989.
- CEBALLOS, D. C. **Aproximações sub-ótimas para o controle em programas dinâmicos de otimização**. Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). São José dos Campos, p. 69. 1979.
- CHOU, J.-N. **Optimal turning maneuvers for six-degree-of-freedom high angle-of-attack aircraft models**. Universidade do Estado de Iowa. Ames, p. 168. 1995.
- CHRIST, F. et al. Time-optimal trajectory planning for a race car considering variable tyre-road friction coefficients. **International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, v. 1, n. 1, p. 1-25, Dezembro 2019.
- CITRON, S. J. **Elements of Optimal Control**. [S.l.]: Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- CONLON, L. **Differentiable Manifolds**. 2ª. ed. Berlim: Birkhauser Boston, 2001.
- CONWAY, J. H.; SMITH, D. A. **On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry**. 1ª. ed. Natick: K Peters, 2003.
- COTS, O.; GERGAUD, J.; GOUBINAT, D. Direct and indirect methods in optimal control with state constraints and the climbing trajectory of an aircraft. **Optimal Control Applications and Methods**, 2017.
- DAI, J. S. Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections. **Mechanism and Machine Theory**, v. 92, p. 144-152, Março 2015.

- DAI, R.; JR, J. E. C. Three-Dimensional Trajectory Optimization in Constrained Airspace. **Journal of Aircraft**, v. 46, n. 2, p. 627-634, Março 2009.
- DARBY, C. L.; HAGER, W. W.; RAO, A. V. **A Preliminary Analysis of a Variable-Order Approach to Solving Optimal Control Problems Using Pseudospectral Methods**. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. Toronto: [s.n.]. 2010. p. 1-14.
- DIEDAM, H.; SAGER, S. Global optimal control with the direct multiple shooting method. **Global and Robust Optimization of Dynamic Systems**, v. 39, n. 2, p. 449-470, Maio 2017.
- DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, p. 19-26, 1980.
- DRURY, R. G.; WHIDBORN, J. F. Quaternion-Based Inverse Dynamics Model for Expressing Aerobatic Aircraft Trajectories. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 32, n. 4, p. 1388-1392, Julho 2009.
- DURHAM, W. **Aircraft Flight Dynamics and Control**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltda, 2013.
- ENGINEERING SCIENCES DATA UNIT. **Aerodynamics series organisation: Preface, Volumes and guide cards Sections, Location Schedule, Amendment Record**. Engineering Sciences Data Unit. [S.l.], p. 38. 2007.
- ERHARD, M.; HORN, G.; DIEHL, M. A quaternion-based model for optimal control of an airborne wind energy system. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, Lecce, v. 97, n. 1, p. 7-24, Setembro 2016.
- ETKIN, B. **Dynamics of Atmospheric Flight**. 3ª. ed. [S.l.]: Dover Publicarions, Inc., 2005.
- FALCK, R. D.; GRAY, J. S. **Optimal Control within the Context of Multidisciplinary Design, Analysis, and Optimization**. AIAA Scitech 2019 Forum. San Diego: AIAA. 2019. p. 1-17.
- FISCH, F. **Development of a Framework for the Solution of High-Fidelity Trajectory Optimization Problems and Bilevel Optimal Control Problems (Tese)**. Universidade Técnica de Munique. Munique, p. 222. 2010.
- FISCH, F.; LENZ, J.; HOLZAPFEL, F. **Aerobatic Aircraft Modeling Based on Aerodynamic Quaternions**. AIAA Modelling and Simulation TEchnologies Conference. Minneapolis: AIAA. 2012. p. 1-11.
- FLEMING, A.; SEKHAVAT, P.; ROSS, I. M. **Minimum-Time Reorientation of an Asymmetric Rigid Body**. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Honolulu: AIAA. 2008. p. 1-12.
- FREITAS, G. M.; LIZARRALDE, F.; LEITE, A. C. Kinematic Control of Constrained Robotic Systems. **Revista Controle & Automação**, v. 22, n. 6, p. 559-572, Novembro 2011.

- GAMELIN, T. W.; GREENE, R. E. **Introduction to Topology**. 2^a. ed. New York: Dover Publications Inc, 1999.
- GARG, D. et al. **An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems**. Advances in the Astronautical Sciences 135. [S.l.]: [s.n.]. 2009.
- GARG, D. et al. A unified framework for numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods. **Automatica**, v. 46, p. 1843-1851, August 2010.
- GEIGER, B. **Unmanned Aerial Vehicle Trajectory Planning with Direct Methods (PhD Thesis)**. Pennsylvania State University. [S.l.], p. 155. 2009.
- GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. **Calculus of Variations**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M. A. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization. **SIAM Review**, v. 47, p. 99-131, 2005.
- GONZÁLEZ-ARRIBAS, D. et al. Robust aircraft trajectory planning under uncertain convective environments with optimal control and rapidly developing thunderstorms. **Aerospace Science and Technology**, v. 80, n. 1, p. 445-459, Abril 2019.
- GONZÁLEZ-ARRIBAS, D.; SOLER, M.; SANJURJO-RIVO, M. Robust Aircraft Trajectory Planning Under Wind Uncertainty Using Optimal Control. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 41, n. 3, p. 1-16, Março 2018.
- GRAUER, J. A.; MORELLI, E. A. **A Generic Nonlinear Aerodynamic Model for Aircraft**. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference. Maryland: AIAA. 2014. p. 1-16.
- GRAY, J. S. et al. OpenMDAO: An Open-Source Framework for Multidisciplinary Design, Analysis, and Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, n. 4, p. 1075-1104, Abril 2019.
- GROS, S. et al. **Nonlinear MPC and MHE for mechanical multi-body systems with application to fast tethered airplanes**. Proceedings of the 4th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control. Noordwijkerhout: [s.n.]. 2012.
- HARGRAVES, C. R.; PARIS, S. W. Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation. **Journal of Guidance and Control**, v. 10, p. 338-342, July-August 1987.
- HART, W. E. et al. **Pyomo - Optimization Modeling in Python**. 2^a. ed. [S.l.]: Springer International, 2017.
- HEINTZE, O.; SEELECKE, S.; BUSKENS, C. Modelling and Optimal Control of Microscale. **Smart Structures and Materials 2003: Modelling, Signal Processing and Control**, v. 5049, n. 1, p. 495-505, 2003.

- HENTZEN, D. et al. On maximizing safety in stochastic aircraft trajectory planning with uncertain thunderstorm development. **Aerospace Science and Technology**, v. 79, n. 1, p. 543-553, Junho 2018.
- HERMAN, A. L.; CONWAY, B. A. Direct Optimization Using Collocation Based on High-Order Gauss-Lobatto Quadrature Rules. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 19, n. 3, p. 592-599, Maio 1996.
- HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. **Lecture Notes in Mathematics**: Invariant Manifolds. Hieldberg: Springer, 1977.
- HOLMSTRÖM, K.; EDVALL, M. M. The TOMLAB Optimization Environment. **Modeling Languages in Mathematical Optimization. Applied Optimization**, v. 88, n. 1, p. 369-376, 2004.
- HOWE, R. Very Basic Lie Theory. **The American Mathematical Monthly**, v. 90, n. 9, p. 600-623, Fevereiro 1983.
- HULL, D. G. Conversion of Optimal Control Problems into Parameter Optimization Problems. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 20, n. 1, p. 57-60, January-February 1997.
- HULL, D. G.; EDGEMAN, L. J. Suboptimal control using a second-order parameter-optimization method. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 17, n. 5/6, p. 481-491, Dezembro 1975.
- IMADO, F.; HEIKE, Y.; KINOSHITA, T. Research on a New Aircraft Point-Mass Model. **Journal of Aircraft**, v. 48, n. 4, p. 1121-1130, Agosto 2011.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 7th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- JOHNSON, D. T. **Evaluation of Energy Maneuverability Procedures in Aircraft Flight Path Optimization and Performance Estimation**. Air Force Flight Dynamic Laboratory. Dayton, p. 73. 1972. (AFFSL-TR-72-58).
- JUNKINS, J. L.; TURNER, J. D. **Optimal continuous torque attitude maneuvers**. Astrodynamics Conference. Palo Alto: AIAA. 1978. p. 1-20.
- KALAJDZIEVSKI, S. **An Illustrated Introduction to Topology and Homotopy**. 1^a. ed. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2015.
- KELLY, M. An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 59, n. 4, p. 849-904, 2017.
- KIM, S.-H. et al. Flight Path Planning for a Solar Powered UAV in Wind Fields Using Direct Collocation. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 56, n. 2, p. 1094-1105, Abril 2020.

- KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. [S.l.]: Prentice Hall, 2004.
- KJELLBERG, H. C.; LIGHTSEY, E. G. Discretized Quaternion Constrained Attitude Pathfinding. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 39, n. 3, p. 710-716, November 2016.
- KUIPERS, J. B. **Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality**. 1ª. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1999.
- KULUMANI, S.; LEE, T. Constrained Geometric Attitude Control on SO(3). **International Journal of Control, Automation, and Systems**, v. 15, n. 6, p. 1-19, Dezembro 2017.
- LAGUARDIA, J. C. R.; PINTO, R. L. U. F.; DUTRA, D. A. A. **Estudo de Diferentes Técnicas de Refinamento de Malha na Solução de Problemas de Controle Ótimo Utilizando Colocação Direta**. XXII Encontro Nacional de Modelagem Computacional. Juiz de Fora: [s.n.]. 2019.
- LEE, U.; MESBAHI, M. **Quaternion Based Optimal Spacecraft Reorientation Under Complex Attitude Constrained Zones**. Advances in the Astronautical Sciences Volume 150: AAS/AIAA Astrodynamics 2013. [S.l.]: AIAA. 2013. p. 1-16.
- LEITÃO, A. **Cálculo Variacional e Controle Ótimo**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2001.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal Control**. 3ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- LI, G.; LI, H.; LI, B. Spacecraft attitude maneuver control using two parallel mounted 3-DOF spherical actuators. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 30, n. 1, p. 419-425, Fevereiro 2017.
- LIBERZON, D. **Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction**. 1st. ed. [S.l.]: Princeton University Press, v. I, 2012.
- LIU, F.; HAGER, W. W.; RAO, A. V. Adaptive Mesh Refinement Method for Optimal Control Usind Nonsmoothness Detection and Mesh Size Reduction. **Journal of the Franklin Institute**, v. 352, n. 10, p. 4081-4106, October 2015.
- LIU, X. et al. Analytical sensitivity computation using collocation method with non-uniform mesh discretisation for numerical solutions of optimal control problems. **International Journal of Control**, v. 1, n. 1, p. 2-25, Abril 2019.
- LOGAN, D. L. **A Fisrt Course in the Finite Element Method**. 5th. ed. Stamford: Cengage Learning, 2011.
- LUENBERGER, D. G. **Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications**. 1ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1979.
- LYCOMING ENGINES. **Operator's Manual AEIO-540 Series, 2ed Edition**. Lycoming Engines Aviation Company. Williamsport, p. 106. 2007.

- MAHARANA, N.; NAYAK, A. K. A comparative study of finite element method for the numerical solution of reaction-diffusion problem. **International Journal of Computing Science and Mathematics**, v. 8, n. 2, Abril 2017.
- MARKLEY, F. L. Unit Quaternion from Rotation Matrix. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 440-442, Abril 2008.
- MARTIN, R. A. et al. Dynamic Optimization of High-Altitude Solar Aircraft Trajectories Under Station-Keeping Constraints. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 42, n. 3, p. 1-15, Novembro 2018.
- MCCORMICK, B. W. **Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1979.
- MCDONALD, S. T.; GRIZZEL, T. L.; WANG, Z. **A Real-Time Approach to Minimum-Energy Reorientation of an Asymmetric Rigid Body Spacecraft**. AIAA SciTech Forum. Orlando: AIAA. 2020. p. 1-17.
- MELBOURNE, W. G. Three-Dimensional Optimum Thrust Trajectories for Power Limited Propulsion Systems. **American Rocket Society Journal**, v. 31, n. 12, p. 1723-1728, Dezembro 1961.
- MELLINGER, D.; MICHAEL, N.; KUMAR, V. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. **The International Journal of Robotics Research**, v. 31, n. 5, p. 1-11, Janeiro 2012.
- MENDELSON, B. **Introduction to Topology**. 3ª. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1990.
- MENG, S. et al. A novel trajectory planning strategy for aircraft emergency landing using Gauss pseudospectral method. **Control Theory and Technology**, v. 12, n. 1, p. 393-401, Janeiro 2014.
- MEYER, C. D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. 1ª. ed. [S.l.]: SIAM, 2010.
- MORALES, M. A. V.; SILVESTRE, F. J.; NETO, A. B. G. Equations of motion for optimal maneuvering with global aerodynamic model. **Aerospace Science and Technology**, v. 77, n. 1, p. 206-216, Junho 2018.
- MORELLI, E. A. **Global Nonlinear Parametric Modeling with Application to F-16 Aerodynamics**. Proceedings of the American Control Conference. Philadelphia: [s.n.]. 1998. p. 997-1001.
- NAKAMICHI, J.; WASHIZU, K. Application of the Finite Element Method to an Optimal Control Problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, p. 1559-1574, 1978.

- NAPOLITANO, M. R. **Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., v. 1, 2011.
- NASH, R. C. **Analytical and Experimental Investigation of Optimum Fighter Aircraft**. U.S. Air Force Flight Dynamics Laboratory. [S.l.], p. 73-145. 1974.
- NETO, A. R. **Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos: Teoria Aplicada - Exemplos e Referências de Aplicação**. 2ª. ed. São José dos Campos: Clube dos Autores, 2016.
- NIE, Y.; FAQIR, O.; KERRIGAN, E. C. **ICLOCS2: Solve your optimal control problems with less pain**. 6th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control. Madison: IFAC Secretariat. 2018. p. 1-2.
- NIE, Y.; KERRIGAN, E. C. Efficient Implementation of Rate Constraints for Nonlinear Optimal Control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 66, n. 1, p. 329-334, Janeiro 2020.
- NISE, N. S. **Control Systems Engineering**. 6ª. ed. [S.l.]: Wiley, 2010.
- NITSCHKE, M.; KNICKMEYER, E. H. Rotation Parameters: a Survey of Techniques. **Journal of Surveying Engineering**, v. 126, n. 3, p. 83-105, Agosto 2000.
- OLIVEIRA, P. H. I. A. D. **Um Estudo sobre a Otimização de Trajetória de Voo de Planadores de Competição**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 133. 2004.
- OLIVEIRA, P. H. I. A. D.; PINTO, R. L. U. D. F.; LIMA, K. N. D. **Lei de Controle para Loop Acrobático Ótimo**. XIII Congresso Internacional da Engenharia da Mobilidade. São Paulo: SAE Brasil. 2004. p. 1-7.
- PAGER, E. R.; RAO, A. V. **A Proximal Method for the Numerical Solution of Singular Optimal Control Problems Using a Modified Radau Collocation Method**. AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando: AIAA. 2020. p. 1-14.
- PALAIS, B.; PALAIS, R. Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, v. 2, p. 215-220, 2007.
- PAMADI, B. N. **Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes**. 2ª. ed. Reston: AIAA, 2004.
- PAPASTAVRIDIS, J. G. **Analytical Mechanics: A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems**. Danvers: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014.
- PATTERSON, M. **Efficient Solutions to Nonlinear Optimal Control Problems using Adaptive Mesh Orthogonal Collocation Methods**. University of Florida. [S.l.], p. 181. 2013.

- PATTERSON, M. A.; RAO, A. V. Exploiting Sparsity in Direct Collocation Pseudospectral Methods for Solving Optimal Control Problems. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 49, n. 2, p. 364-377, March-April 2012.
- PATTERSON, M. A.; RAO, A. V. GPOPS II: A Matlab Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using hp-Adaptive Gaussian Quadrature Collocation Methods and Sparse Nonlinear Programming. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v. 41, n. 1, October 2014.
- PERANTONI, G.; LIMEBEER, D. J. N. Optimal control for a Formula One car with variable parameters. **Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, v. 52, n. 5, p. 653-678, 2014.
- PEREIRA, A. K. A. **Solução Numérica de Problemas de Controle Ótimo com Restrições de Contorno Duplo e Restrições Não-Diferenciais Mistas pelo Método dos Sub-Domínios**. Proprama de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 105. 1994. (70).
- PHILLIPS, W. F.; HAILEY, C. E.; GEBERT, G. A. **A Review of Attitude Kinematics for Aircraft Flight Simulation**. AIAA Modelling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Denver: AIAA. 2000. p. 1-25.
- PHILLIPS, W. F.; HAILEY, C. E.; GEBERT, G. A. Review of Attitude Representations Used for Aircraft Kinematics. **Journal of Aircraft**, v. 38, n. 4, p. 718-737, Agosto 2012.
- PIETZ, J. A. **Pseudospectral Collocation Methods for the Direct Transcription of Optimal Control Problems (Master Thesis)**. Rice University. Houston, p. 138. 2003.
- PINTO, R. L. U. D. F. **Estudo da Solução de Problemas de Controle Ótimo na forma de Bolza pelo Método de Elementos Finitos**. Instituto Tecnológico da Aeronáutica. São José dos Campos. 1982.
- PINTO, R. L. U. D. F. **Dedução de Condições Necessárias para a Solução de Problemas de Controle Ótimo com Dinâmica Fracionada e Restrições Não-Diferenciais**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, p. 190. 1991.
- PLAS, H. V. D.; VISSER, H. G. **Trajectory Optimization of an Aerobatic Air Race**. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Orlando: AIAA. 2009. p. 14.
- PONTRYAGIN, L. S. et al. **The Mathematical Theory of Optimal Process**. New York: John Wiley & Sons, 1962.
- RAMOS, E. **Controle Ótimo Aplicado em um modelo de Câncer (Dissertação)**. Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, p. 98. 2015.

- RAO, A. V. A Survey of Numerical Methods for Optimal Control. **Advances in the Astronautical Sciences**, p. 32, Janeiro 2010.
- RAO, D. M. K. K. V.; GO, T. H. Optimization of aircraft spin recovery maneuvers. **Aerospace Science and Technology**, v. 90, n. 1, p. 222-232, Maio 2019.
- RAO, R. **A Review on Numerical Methods for Initial Value Problems**. Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE). São José dos Campos. 1984. (INPE-3011-RPI/088).
- REGO, B. S. et al. Set-valued state estimation of nonlinear discrete-time systems with nonlinear invariants based on constrained zonotopes. **Automatica**, v. 129, n. 109638, p. 1-12, Março 2021.
- RIECK, M. et al. **FALCON.m User Guide**. Technical University of Munich. Munich, p. 129. 2016.
- ROSS, I. M. Enhancements to the DIDO Optimal Control Toolbox. **Mathematics, Computer Science**, v. 1, n. 1, p. 1-17, Junho 2020.
- ROSS, I. M.; KARPENKO, M. A review of pseudospectral optimal control: From theory to flight. **Annual Reviews in Control**, v. 36, n. 2, p. 182-197, Dezembro 2012.
- SAGE, A. P. **Optimum Systems Control**. [S.l.]: Prentice-Hall, v. 1, 1968.
- SAGER, S. **Numerical methods for mixed-integer optimal control problems (Tese)**. Universität Heidelberg. Heidelberg, p. 225. 2006.
- SARGENT, R. W. H. Optimal Control. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 124, p. 361-371, Novembro 2000.
- SASTRY, S. Lyapunov Stability Theory. In: SASTRY, S. **Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control**. 1ª. ed. [S.l.]: Springer, 1999. Cap. 5, p. 182-234.
- SHEN, Z.; ANDERSSON, S. B. **Minimum time control of a second-order system**. 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta: [s.n.]. 2010. p. 4819-4824.
- SHIRAZI, A.; CEBERIO, J.; LOZANO, J. A. Spacecraft trajectory optimization: A review of models, objectives, approaches and solutions. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 102, p. 76-98, Agosto 2018.
- SINGER, S. F. **Symmetry in Mechanics: A Gentle, Modern Introduction**. Philadelphia: Springer Science, 2004.
- SINGH, B. **A Weighted Residual Framework for Formulation and Analysis of Direct Transcription Methods for Optimal Control**. Texas A&M University. [S.l.], p. 198. 2010.
- SINGLA, P.; MORTARIY, D.; JUNKINSZ, J. L. **How to Avoid Singularity For Euler Angle Set?** 14th Space Flight Mechanics Meeting. Maui: AIAA. 2004. p. 1-19.

- SOLSVIK, J.; JAKOBSEN, H. A. Evaluation of Weighted Residual Methods for the Solution of a Population Balance Model Describing Bubbly Flows: The Least-Squares, Galerkin, Tau, and Orthogonal Collocation Methods. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 52, n. 45, p. 15988-16013, Outubro 2013.
- SOLSVIK, J.; JAKOBSEN, H. A. Evaluation of the Least-Squares Method for the Solution of the Population Balance Equation. **Journal of Dispersion Science and Technology**, v. 36, n. 1, p. 68-82, Setembro 2015.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems**. 3^a. ed. New Jersey: Wiley & Sons, 2016.
- STRYK, O. V.; BULRISCH, R. Direct and Indirect Methods for Trajectory Optimization. **Annals of Operations Research**, Dezembro 1992. 357-373.
- STUELPNAGEL, J. On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group. **SIAM Review**, v. 6, n. 4, p. 422-430, Outubro 1964.
- TERAMAE, T. et al. Quaternion-Based Trajectory Optimization of Human Postures for Inducing Target Muscle Activation Patterns. **IEEE Robotics and Automation Letters**, v. 5, n. 4, p. 6607-6614, Outubro 2020.
- TOPPUTO, F.; ZHANG, C. Survey of Direct Transcription for Low-Thrust Space Trajectory Optimization with Applications. **Abstract and Applied Analysis**, v. 2014, n. 851720, p. 1-15, January 2016.
- VALENTI, R. G.; DRYANOVSKI, I.; XIAO, J. Keeping a Good Attitude: A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs. **Sensors**, v. 15, n. 1, p. 19302-19330, 2015.
- VARGAS, L. A. T. D. **Desenvolvimento e Implementação de um Procedimento Numérico para Cálculo de Conjuntos Asa-Empenagens de Geometria Complexa em Regime de Voo Subsônico, Assimétrico e Não Linear**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 109. 2006.
- VASILE, M. **Finite Elements in Time: A Direct Transcription Method for Optimal Control Problems**. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Toronto: AIAA. 2010.
- WACHTER, A. **An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering**. Carnegie-Mellon University - Department of Chemical Engineering. Pittsburgh. 2002.
- WACHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, v. 106, n. 1, p. 25-27, 2006.

- WANG, S. et al. Flight strategy optimization for high-altitude long-endurance solar-powered aircraft based on Gauss pseudo-spectral method. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 32, n. 10, p. 2286-2298, Agosto 2019.
- WATTERSON, M.; SMITH, T.; KUMAR, V. **Smooth trajectory generation on SE(3) for a free flying space robot**. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Daejeon: IEEE. 2016. p. 1-8.
- WEISSINGER, J. **The Lift Distribution of Swept-Back Wings NACA TM-1120**. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA). Washington, p. 51. 1947.
- WELL, K. H.; WEVER, U. A. **Aircraft Trajectory Optimization Using Quaternions - Comparison of a Nonlinear Programming and a Multiple Shooting Approach**. IFAC 9th Triennial World Congress. Budapest: [s.n.]. 1984. p. 1595-1602.
- WILLIAMSON, W. E. Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls. **AIAA Journal**, v. 9, n. 11, p. 2271-2273, Maio 1971.
- YANG, S. et al. Trajectory optimization for a ramjet-powered vehicle in ascent phase via the Gauss pseudospectral method. **Aerospace Science and Technology**, v. 67, n. 1, p. 88-95, Agosto 2017.
- ZAVOLI, A. **Indirect Optimization of Bang-Bang Control Problems and Application to Formation Flying Mission**. Universidade Sapienza de Roma. Roma, p. 190. 2013.
- ZERLOTTI, R. F. **Otimização da trajetória ascendente de veículos lançadores de satélites utilizando o algoritmo dos múltiplos tiros**. Instituto Tecnológico da Aeronáutica. São José dos Campos. 1990.
- ZHANG, J. et al. Online four dimensional trajectory prediction method based on aircraft intent updating. **Aerospace Science and Technology**, v. 77, n. 1, p. 774-787, Junho 2018.
- ZHAO, J.; SHANG, T. Dynamic Optimization Using Local Collocation Methods and Improved Multiresolution Technique. **Applied Sciences**, v. 8, n. 1680, p. 1-18, September 2018.
- ZHU, X.; ANGELES, J. A Reparametrization of the Rotation Matrix in Rigid-Body Dynamics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 82, p. 1-9, Março 2015.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; P.NITHIARASU. **The Finite Element Method for Fluid Dynamics**. 7th. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2014.

APÊNDICE

Apresenta-se neste apêndice as operações algébricas fundamentais dos quatérnios:

- Soma e Multiplicação

Considere dois quatérnios definidos como:

$$\{\mathbf{q}\} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\{\mathbf{p}\} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}. \quad (\text{A.1b})$$

A adição de dois quatérnios é dada pela soma algébrica de suas respectivas componentes, i.e.,

$$\{\mathbf{p}\} + \{\mathbf{q}\} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}, \quad (\text{A.2})$$

ou seja, todo quatérnio $\{\mathbf{q}\}$ possui um negativo $-\{\mathbf{q}\}$ com as componentes $-q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

O produto de dois quatérnios satisfaz as regras fundamentais apresentadas por Hamilton (ALTMANN, 1989):

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Desta forma, o produto de dois quatérnios é dada na forma:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\} &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + \\ &\quad p_0(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dada a definição do produto escalar e vetorial de dois vetores em $\mathbb{R}^3$, a Eq.(A.4) pode ser reescrita em uma forma mais concisa, dada por:

$$\{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\} = p_0q_0 - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q}_n + p_0\mathbf{q}_n + q_0\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n \times \mathbf{q}_n, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\{\mathbf{p}\} = \{p_0 \ \mathbf{p}_n\}^T \text{ e } \{\mathbf{q}\} = \{q_0 \ \mathbf{q}_n\}^T. \quad (\text{A.6})$$

▪ Conjugado, Norma e Inverso

O conjugado de um quatérnio $\{\mathbf{q}\}$ é denotado por $\{\mathbf{q}\}^*$ e definido por:

$$\{\mathbf{q}\}^* = q_0 - \mathbf{q}_n = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}.$$

A partir desta definição, tem-se:

$$\begin{aligned} (\{\mathbf{q}\}^*)^* &= q_0 - (-\mathbf{q}_n) = \{\mathbf{q}\}, \\ \{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{q}\}^* &= 2q_0 \\ \{\mathbf{q}\}^*\{\mathbf{q}\} &= (q_0 - \mathbf{q}_n)(q_0 + \mathbf{q}_n) \\ &= q_0q_0 - (-\mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{q}_n + q_0\mathbf{q}_n + (-\mathbf{q}_n)q_0 + (-\mathbf{q}_n) \times \mathbf{q}_n \\ &= q_0^2 + \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_n \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\ &= \{\mathbf{q}\}\{\mathbf{q}\}^*. \end{aligned}$$

Assim, dados dois quatérnios $\{\mathbf{p}\}$ e $\{\mathbf{q}\}$, verifica-se que:

$$(\{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\})^* = \{\mathbf{p}\}^*\{\mathbf{q}\}^*.$$

A norma de um quatérnio $\{\mathbf{q}\}$, denotada por $\|\{\mathbf{q}\}\|$, é o escalar $\|\{\mathbf{q}\}\| = \sqrt{\{\mathbf{q}\}^*\{\mathbf{q}\}}$. Os quatérnios chamados unitários possuem sua norma igual a 1. A norma do produto de dois quatérnios é o produto de suas normas individuais, ou seja:

$$\begin{aligned} \|\{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\}\| &= (\{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\})(\{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\})^* \\ &= \{\mathbf{p}\}\{\mathbf{q}\}\{\mathbf{q}\}^*\{\mathbf{p}\}^* \\ &= \{\mathbf{p}\}\|\{\mathbf{q}\}\|\{\mathbf{p}\}^* \\ &= \{\mathbf{p}\}\{\mathbf{p}\}^*\|\{\mathbf{q}\}\| \\ &= \|\{\mathbf{p}\}\|\|\{\mathbf{q}\}\|. \end{aligned}$$

O inverso de um quatérnio $\{\mathbf{q}\}$ é definido como:

$$\{\mathbf{q}\}^{-1} = \frac{\{\mathbf{q}\}^*}{\|\{\mathbf{q}\}\|}.$$

Verifica-se que $\{\mathbf{q}\}^{-1}\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}\{\mathbf{q}\}^{-1} = 1$. No caso dos quatérnios unitários, o seu inverso é igual ao seu conjugado.