

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos

Pedro Lage Andrade

**Quantificação de Incertezas de Amostragem e Quebras de Recorde na
Precipitação Máxima Provável Hidrometeorológica**

Belo Horizonte
2024

Pedro Lage Andrade

**Quantificação de Incertezas de Amostragem e Quebras de Recorde na
Precipitação Máxima Provável Hidrometeorológica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos.

Área de concentração: Recursos Hídricos

Linha de pesquisa: Modelagem de processos hidrológicos

Orientador: Prof. Wilson dos Santos Fernandes

Belo Horizonte
2024

A553q Andrade, Pedro Lage.
Quantificação de incertezas de amostragem e quebras de recorde na precipitação máxima provável hidrometeorológica / Pedro Lage Andrade. – 2024.
1 recurso online (154 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Wilson dos Santos Fernandes.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 141-154.

Bibliografia: f. 132-140.

1. Engenharia sanitária – Teses. 2. Recursos hídricos – Teses. 3. Modelagem de processos – Teses. 4. Precipitação (Meteorologia) – Teses. 5. Monte Carlo, Método de – Teses. I. Fernandes, Wilson dos Santos. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 628(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SANEAMENTO, MEIO AMBIENTE E RECURSOS HÍDRICOS

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Quantificação de incertezas de amostragem e quebras de recorde na precipitação máxima provável hidrometeorológica"

PEDRO LAGE ANDRADE

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Wilson dos Santos Fernandes

Prof. Eber José de Andrade Pinto

Prof. Pedro Luiz Borges Chaffe

Aprovada pelo Colegiado do PG SMARH

Versão Final aprovada por

Profa. Priscilla Macedo Moura

Prof. Wilson dos Santos Fernandes

Coordenadora

Orientador

Belo Horizonte, 05 de março de 2024.



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Luiz Borges Chaffe, Usuário Externo**, em 05/03/2024, às 12:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eber Jose de Andrade Pinto, Professor do Magistério Superior**, em 05/03/2024, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wilson dos Santos Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 21/10/2024, às 15:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Coutinho de Paula, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 21/10/2024, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3064027** e o código CRC **7671B6AD**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de uma forma ou outra contribuíram e me apoiaram ao longo do período de elaboração desse trabalho.

Aos meus pais Cora e Flavio e minha companheira de vida Leticia pelo companheirismo e suporte a todos os momentos ao longo dessa caminhada. Seu apoio foi indispensável.

Ao professor Wilson dos Santos Fernandes, pelo apoio na formulação da linha de pesquisa e horas que passamos discutindo o projeto. Agradeço também pelo constante acompanhamento na elaboração dos estudos e confiança.

Aos meus colegas de trabalho e amigos, em especial Mucio Correa pelas constantes conversas e trocas de ideias sobre hidrologia, PMP e muito mais. Suas contribuições foram fundamentais para a consolidação do trabalho em seu atual formato.

Aos demais professores e funcionários do EHR pelo infalível suporte técnico e estruturação de um excelente ambiente de aprendizado.

Aos meus demais amigos que me acompanharam ao longo dessa jornada.

RESUMO

Definida como a maior precipitação possível para uma duração sobre uma determinada região, a Precipitação Máxima Provável, ou PMP, é frequentemente utilizada como parâmetro para estimativa da Cheia Máxima Provável (CMP) em obras hidráulicas. Na prática da engenharia, essas estimativas da PMP e CMP são rotineiramente aplicadas para dimensionamento de novas estruturas de grande porte, bem como para mensuração do nível de risco de estruturas operacionais. Apesar da definição seu uso como um limite superior é frequentemente criticado em função das incertezas inerentes à sua estimativa. A estimativa da PMP para fins práticos, então, costuma ser utilizada não como um limite superior absoluto, mas sim como uma estimativa de hipotéticos eventos extremos que possam ocorrer em uma certa bacia hidrográfica.

Com base no paradigma probabilístico proposto por Alaya et al. (2018), elabora-se um processo de Monte Carlo para geração de séries sintéticas de estimativas da PMP Hidrometeorológica para diferentes tamanhos de amostra. A partir dessas séries sintéticas aproxima-se o valor esperado, variância, coeficiente de variação e intervalos de confiança das estimativas da PMP Hidrometeorológica, permitindo a caracterização das incertezas de amostragem inerentes à estimativa dessa quantidade. Em um estudo de caso, obtém-se uma estimativa mediana de 271 mm da PMP com base em amostras de 50 anos. Os intervalos de 20% de confiança, por vez, variam de 216 mm (10%) a 374 mm (90%), relevando o considerável nível de incerteza inerente à estimativa da PMP Hidrometeorológica.

Com base nesse mesmo processo de Monte Carlo estima-se a probabilidade de majoração do valor da PMP Hidrometeorológica calculado para dimensionamento de uma estrutura hidráulica durante sua vida útil, bem como o valor desse possível aumento. Essas estimativas possibilitam a avaliação da probabilidade de ocorrência de majorações significativas dos valores calculados da CMP que possam causar uma reclassificação do nível de segurança dessa estrutura. Com base em um estudo de caso, observa-se que, para uma estrutura hidráulica com uma vida útil de 25 anos projetada a partir de uma série histórica de 50 anos, há uma probabilidade de 56 % de ocorrência de ao menos uma majoração das estimativas da PMP durante sua operação. O valor desse possível aumento é em média de 13%, mas pode chegar a respectivamente 20 % e 35 % para os percentis de 75% e 90% de probabilidade de não superação.

Os resultados obtidos destacam a correlação entre o tamanho de amostra disponível e o nível de incerteza das estimativas da PMP, bem como com a probabilidade de modificação do valor calculado da PMP durante processos de revisões periódicas de segurança de estruturas hidráulicas. Entende-se que os resultados obtidos podem servir como base teórica para seleção de critérios adequados para tamanhos de amostra necessários para estimativa e revisão das estimativas da PMP.

Palavras-chave: Precipitação máxima provável; maximização de umidade; análise de incertezas; teoria de valores recordes.

ABSTRACT

Defined as the highest possible precipitation for a given region, the Maximum Probable Precipitation, or PMP, is often used as a parameter to estimate the Maximum Probable Flood (CMP) in hydraulic works. In engineering practice, these PMP and CMP estimates are routinely applied to design new large structures, as well as to measure the risk level of operational structures. Despite the definition, its use as an upper limit is often criticized due to the uncertainties inherent in its estimate. The PMP estimate for practical purposes, then, is usually used not as an absolute upper limit, but rather as an estimate of hypothetical extreme events that may occur in a certain river basin.

Based on the probabilistic paradigm proposed by Alaya et al. (2018), a Monte Carlo process is developed to generate synthetic series of estimates of the Hydrometeorological PMP for different sample sizes. From these synthetic series, the expected value, variance, coefficient of variation and confidence intervals of the PMP estimates are approximated, allowing the characterization of the sampling uncertainties inherent in the estimation of this quantity. In a case study, a median estimate of 271 mm of PMP is obtained based on 50-year samples. The 20% confidence intervals, in turn, range from 216 mm (10%) to 374 mm (90%), highlighting the considerable level of uncertainty inherent in the estimate of the Hydrometeorological PMP.

Based on this same Monte Carlo process, the probability of occurrence of an increase in the estimated PMP value for design of a hydraulic structure during its operational life is approximated, as well as the value of this possible increase. These estimates make it possible to assess the probability of occurrence of significant increases in the estimated CMP values, that could in a final analysis incur in a reclassification of the security level of said structure. Based on a case study, it is observed that for a hydraulic structure with a operational life of 25 years designed from a historical series of 50, there is a 56% probability that at least one increase in PMP estimates occurring during its operation. The value of this possible increase is on average 13% but can reach values as high as 20% and 35% for respectively the 75% and 90% probability of non-exceedance quantiles.

The results obtained highlight the correlation between the available sample size and the level of uncertainty in the PMP estimates, as well as with the probability of modification of the PMP estimates during periodic safety review processes of hydraulic structures. The results obtained can serve as a theoretical basis for selecting appropriate criteria for sample sizes necessary for estimating and reviewing PMP estimates.

Keywords: Probable maximum precipitation; moisture maximization; uncertainty analysis; record values theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Principais etapas dos métodos Hidrometeorológico e Estatístico para estimativa da PMP. Adaptado de WMO (2009) e Almeida <i>et al.</i> (2020).....	25
Figura 2 – Dispersão da distribuição conjunta empírica trivariada de W, Eo e Es. Adaptado de KLEMES <i>et al.</i> , 1993.....	30
Figura 3 – Exemplo de traçado de envoltória de temperaturas de ponto de orvalho máximas de referência. Adaptado de WMO (2009).	33
Figura 4 – Valores de ENn e $ENn \pm DPNn$ como uma função de n	44
Figura 5 – Distribuição de densidade de probabilidade de Nn para $n = 10, 25$ e 50	45
Figura 6 – Probabilidade de superação do intervalo até o k-ésimo recorde (Δk) para valores de $j = 10, 25$ e 50 como função de $k = ENn + 1$	46
Figura 7 – Fluxograma geral da metodologia proposta.	53
Figura 8 – Fluxograma do procedimento proposto para sintetização de séries de precipitação maximizada.	54
Figura 9 – Formulário de requisição de dados da plataforma BDMEP (adaptado de bdmep.inmet.gov.br - acesso em 01/10/2023).	62
Figura 10 – Representação esquemática do procedimento de cálculo da massa de água precipitável na atmosfera.	63
Figura 11 – Representação esquemática do procedimento de cálculo de PE e PW.	64
Figura 12 – Representação esquemática do procedimento de consistência da base de dados.	65
Figura 13 – Porcentagem de dados válidos por ano hidrológico por período sazonal para PE e PW. Em cada coluna, um período sazonal. Em cada linha, uma variável.	66
Figura 14 – Número de anos válidos por período sazonal para PE e PW. Em cada coluna, um período sazonal. Em cada linha, uma variável.	67
Figura 15 – Número de anos válidos mínimos em todos os períodos sazonais de PE e PW.	68
Figura 16 - Distribuição espacial e comprimentos de série mínimos das estações climatológicas consistidas.	69
Figura 17 – Médias dos valores máximos anuais de PE e PW por período sazonal de todas as estações meteorológicas. (A) PE. (B) PW.	70

Figura 18 – Histogramas da estatística de teste dos testes de correlação de Pearson e Spearman aplicados aos pares de PE e PW em cada período sazonal. (A) Primavera. (B) Verão. (C) Outono. (D) Inverno.	72
Figura 19 – Mapa de calor dos pares de máximos anuais de PE e PW em todas as estações meteorológicas. (A) Primavera. (B) Verão. (C) Outono. (D) Inverno.....	74
Figura 20 – Exemplo de processo de quebra de recorde da precipitação maximizada para 5 trajetórias sintéticas.....	88
Figura 21 – Exemplo de aproximação da probabilidade de atualização e da distribuição de probabilidades de uma possível majoração da precipitação maximizada ao final de 50 anos.	89
Figura 22 – Valores de ENn, Ps^* , $ENn, Ps^* + VARn, Ps^*$ e $ENn, Ps^* - VARn, Ps^*$	91
Figura 23 – Probabilidade de superação do intervalo j até o k -ésimo recorde ($\Delta ENn, Ps^*$) para valores de $j = 10, 25$ e 50 , como função de $k = ENn, Ps^* + 1 \dots$	92
Figura 24 – Exemplo da consistência de 25 trajetórias de Ps^* em trajetórias de P^* . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	105
Figura 25 – Exemplo da representação das 2.500 primeiras trajetórias como um mapa de densidades. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.	105
Figura 26 – Valor Esperado e Desvio Padrão (DP) dos estimadores da precipitação maximizada. (A) a (D) – Primavera, Verão, Outono e Inverno. (E) – Período Completo. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	107
Figura 27 – Comparação do Valor Esperado (A), Desvio Padrão (B) e Coeficiente de Variação (C) dos estimadores da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	109
Figura 28 – Aproximação da FDP (A) e FAP (B) do estimador da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	111
Figura 29 – Probabilidade de superação de alturas da precipitação maximizada iguais a 200, 300, 400, 500 e 341 em função de n . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.	112
Figura 30 – Intervalos de confiança aproximados do estimador da precipitação maximizada para $n = 25$ (A), $n = 50$ (B), $n = 100$ (C) e $n = 250$ (D). Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	113

Figura 31 – Valores observados de PE (A), PE_{rec} (A), PW (B), PW_{rec} (B), Ps^* (C) e P^* (D) para os períodos sazonais selecionados. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	115
Figura 32 – Comparação da contagem de Recordes (Nn) de PE e PW para os quatro períodos sazonais com ENn e $ENn \pm DPNn$. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.	116
Figura 33 – Comparação da contagem de Recordes (Nn) da precipitação maximizada para os quatro períodos sazonais com ENn, Ps^* e $ENn, Ps^* \pm DPNn, Ps^*$. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	117
Figura 34 – Valores recordes observados de Ps^* e P^* , em conjunto com a contagem de recordes (Nn) de P^* . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	118
Figura 35 – Aproximação da probabilidade de não ocorrência de recordes no valor calculado de P^* (linhas) e Ps^* (marcadores) com base em uma amostra de n observações durante $j = 10, 25, 50, 75$ e 100 anos. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	120
Figura 36 – Aproximação da FDP (A) e FAP (B) da razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações para $n = 50$ anos e $j = 10, 25, 50$ anos. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	122
Figura 37 – Aproximação da FDP a razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações para $n = 25, 50, 100$ e 250 anos (linhas) e $j = 10, 25, 50$ anos (colunas). Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.	124
Figura 38 – Aproximação do valor esperado da razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações como função de n para e $j = 10, 25, 50, \dots$	125
Figura 39 – Histograma amostral de PE por período sazonal e função de densidade de probabilidade modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.	142
Figura 40 – Histograma amostral de PW por período sazonal e função de densidade de probabilidade modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno	142
Figura 41 – Histograma amostral acumulado de PE por período sazonal e função de probabilidade acumulada modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET	

83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.	143
Figura 42 – Histograma amostral acumulado de PW por período sazonal e função de probabilidade acumulada modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.	143
Figura 43 – Diagrama de quantis modelados e observados de PE por período sazonal. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno	144
Figura 44 – Diagrama de quantis modelados e observados de PW por período sazonal. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno	145

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal da Primavera. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	146
Quadro 2 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Verão. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	147
Quadro 3 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Outono. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	149
Quadro 4 – Má Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Inverno. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	150
Quadro 5 – Trajetória da precipitação maximizada observada na Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	152

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de seleção da temperatura do ponto de orvalho máxima persistente por 12 horas. Adaptado de WMO (2009)	32
Tabela 2 – Quantidade de estações convencionais disponíveis no BDMEP por região brasileira.....	62
Tabela 3 – Número de anos-estação removidos durante o tratamento dos dados ...	67
Tabela 4 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman aos máximos anuais de PE e PW de cada uma das 244 estações selecionadas.....	72
Tabela 5 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman à totalidade dos pares de máximos anuais de PE e PW.....	73
Tabela 6 – Resultados da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov para validação do ajuste da Distribuição de Gumbel aos máximos anuais de PE e PW.....	76
Tabela 7 – Número de anos válidos após aplicação do procedimento de consistência de dados. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.	99
Tabela 8 – Maximização da umidade dos três eventos de referência considerados por Pinheiro (2011) para a região de Minas Gerais. Adaptado de Pinheiro (2011)	100
Tabela 9 – Máximos sazonais de PE e PW e estimativa pontual da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	101
Tabela 10 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman aos pares de máximos anuais de PE e PW. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	102
Tabela 11 – Resultados da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov para validação do ajuste da Distribuição de Gumbel aos máximos anuais de PE e PW. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	103
Tabela 12 – Parâmetros ajustados para a distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.....	103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PMP	- Precipitação Máxima Provável
CMP	- Cheia Máxima Provável
WMO	- <i>World Meteorological Organization</i>
INMET	- Instituto Nacional de Meteorologia
BDMEP	- Banco de Dados Meteorológicos do Instituto Nacional de Meteorologia para Ensino e Pesquisa
CDA	- <i>Canadian Dam Association</i>
ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	- Norma Brasileira
DPA	- Dano Potencial Associado
P	- Precipitação
W	- Massa Água Precipitável
PE	- Eficiência de Precipitação
PW	- Massa de Água Precipitável
E	- Valor Esperado
Var	- Variância
DP	- Desvio Padrão
CV	- Coeficiente de Variação
Cov	- Covariância

max	- Máximo
$\#$	- Contagem
GEV	- Distribuição Generalizada de Valores Extremos
FDP e f	- Função de Densidade de Probabilidade
FAP e F	- Função de Probabilidade Acumulada
β , α e κ	- Parâmetros de posição, escala e forma das Distribuições de Gumbel, GEV e Gama
$\mu_{\ln(x)}$ e $\sigma_{\ln(x)}$	- Parâmetros de Posição e Escala da Distribuição Log-Normal
MOM	- Método dos Momentos
MVS	- Método da Máxima Verossimilhança
MML	- Método dos Momentos-L
N e n	- Tamanho e posição na amostra
M e m	- Contagem e posição de séries sintéticas
j	- Incremento na posição na amostra
I_n	- Variável indicadora de ocorrência de um recorde na posição n
N_n	- Número de recordes até a posição n
Δ_k	- Tempo de espera entre o recorde $k - 1$ e o recorde k
P^* e $\hat{P}^*$	- Precipitação Maximizada e estimador
S e s	- Número de subdivisões sazonais e indexador de período sazonal
P_s^* e $\hat{P}_s^*$	- Precipitação Maximizada para o Período Sazonal s e estimador

$\Delta P^*_{n \rightarrow n+j}$ - Razão entre o valor de P^* nas posições $n + j$ e n

$\Delta P^*_s_{n \rightarrow n+j}$ - Razão entre o valor de P^*_s nas posições $n + j$ e n

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	OBJETIVOS	22
2.1	Objetivo Geral	22
2.2	Objetivos Específicos	22
3	REVISÃO DA LITERATURA	23
3.1	Estimativas da PMP	24
3.2	Quantificação das incertezas da PMP	27
3.2.1	Correlação entre PE e PW	29
3.2.2	Transposição de tempestades	31
3.3	Massa de Água Precipitável de Referência	32
3.4	Cálculo da Massa de Água Precipitável	33
3.4.1	Temperatura do Ponto de Orvalho	34
3.4.2	Relação entre Temperatura e Pressão na Atmosfera	35
3.5	Modelagem Estatística de Eventos Extremos	36
3.5.1	Distribuição Gumbel de Máximos	38
3.5.2	Distribuição de Generalizada de Valores Extremos	39
3.5.3	Distribuição Gama	40
3.5.4	Estimativa de Parâmetros	41
3.6	Teoria de Recordes	42
3.6.1	Tempo de Ocorrência de Recordes	43
3.6.2	Valores Recordes	46
3.6.3	Momentos dos Valores Recordes	47
3.7	Produto de Variáveis Aleatórias	48
4	METODOLOGIA	51
4.1	Modelagem dos Máximos Anuais de PE e PW	55
4.1.1	Testes de Correlação	56
4.1.2	Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov	58
4.2	Momentos e Intervalos de Confiança da Precipitação Maximizada	58
4.3	Intervalos e Valores dos Recordes da Precipitação Maximizada	59
4.4	Estudo de Caso	60
5	ESTRUTURAÇÃO DA BASE DE DADOS	61
5.1	Seleção e Obtenção da Base de Dados	61
5.2	Consistência da Base de Dados	64
5.2.1	Crítérios de Eliminação de Anos Hidrológicos	64
5.2.2	Crítérios de Eliminação de Postos de Medição	68

6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	70
6.1	Modelagem dos Máximos Anuais de PE e PW	71
6.2	Momentos e Intervalos de Confiança.....	76
6.2.1	Momentos da Precipitação Maximizada	80
6.3	Tempos e Valores Recordes.....	87
6.3.1	Tempo de Ocorrência dos Recordes da Precipitação Maximizada	89
6.3.2	Valores Recordes da Precipitação Maximizada	96
7	ESTUDO DE CASO	99
7.1	Precipitação Maximizada Pontual em Belo Horizonte.....	101
7.2	Modelagem dos Máximos Anuais de PE e PW	102
7.3	Momentos e Intervalos de Confiança.....	106
7.4	Tempos e Valores Recordes.....	114
8	CONCLUSÕES	126
9	LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES.....	129
	REFERÊNCIAS.....	132
	APÊNDICE A – Estudo de Caso - Ajuste Distribuição Gumbel	141
	APÊNDICE B – Estudo de Caso - Trajetória da PMP Pontual	146

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos extremos de cheia e precipitação é fundamental para a compreensão e mensuração dos possíveis riscos associados à ocorrência desses eventos, (Marengo, 2009). A ocorrência de cheias é diretamente associada à de precipitações na bacia de contribuição do curso de água ou estrutura em questão. Sendo assim, o estudo das precipitações, quando aplicado em conjunto com técnicas de transformação chuva-vazão, possibilita a avaliação do comportamento dessas bacias hidrográficas diante da ocorrência de eventos chuvosos históricos e hipotéticos.

A *World Meteorological Organization* (WMO) define a precipitação máxima provável (PMP) como a maior altura de precipitação possível para uma dada duração, sobre uma determinada região (WMO, 2009). No dimensionamento de obras hidráulicas com potencial de dano elevado em caso de falha, o estudo da PMP é de particular importância para estimativa da Cheia Máxima Provável (CMP) que, por vez, objetiva garantir embasamento ao projeto e operação dessas estruturas com o máximo grau de segurança possível.

Na prática da engenharia, a PMP é utilizada em conjunto com outras estimativas para definição de cheias de projeto de estruturas de grande porte (WMO, 2009). Em muitos países, a utilização da CMP é estabelecida como uma boa prática de engenharia, como recomendado pela *Canadian Dam Association* (CDA, 2007) ou exigido em norma, como estabelecido pela ABNT NBR 13028 no Brasil e pelo *Mines Safety Act* do estado canadense da Colúmbia Britânica (MEMPR, 2008). O uso da CMP como critério de projeto nos Estados Unidos Também é amplamente difundido desde a década de 70, como documentado por Hansen (1987). Especificamente no Brasil as normas vigentes que definem os critérios para elaboração de projetos de barragens para diversos fins (ABNT NBR 13028 e Resolução nº 95 da Agência Nacional de Mineração) preconizam o uso da CMP em projetos de sistemas extravasores de estruturas com Dano Potencial Associado (DPA) alto.

Conceitualmente, a PMP pode ser entendida como o limite superior para a precipitação, ou seja, como a maior altura de precipitação que a atmosfera é capaz de produzir em uma certa região durante um certo período. A consideração da PMP como um limite superior acima do qual a probabilidade de ocorrência de qualquer

altura de precipitação é nula, entretanto, é reconhecidamente falha para fins práticos. Como discutido nos trabalhos de Bertoni e Tucci (1993) e Papalexiou e Koutsoyiannis (2006) é possível demonstrar a insuficiência das informações disponíveis para precisa inferência de um limite superior para a precipitação. Em complemento à afirmação, Dooge (1986) demonstrou que foram registradas precipitações nos Estados Unidos que superaram os valores até então estimados para a PMP.

Apesar dessa conhecida limitação, conforme discutido por Koutsoyiannis (1999), a PMP é geralmente utilizada não por seu embasamento numérico e científico, mas sim por, hipoteticamente, viabilizar solução de engenharia que deveria permitir a consideração de um risco de falha nulo e remover a responsabilidade associada à mitigação desse risco. Devido às inúmeras incertezas associadas ao cálculo da PMP, portanto, essa não deve ser considerada como um limite racional cuja superação é impossível, mas sim como uma estimativa operacional para alturas de precipitação com reduzida probabilidade de ocorrência (BERTONI e TUCCI, 1993; KLEMES 1993). Diante dessa limitação, Salas *et al.* (2014) e WMO (2009) indicam a possibilidade da distinção do conceito teórico da PMP, como um artifício científico para representação dos limites superiores da precipitação, do conceito operacional da PMP como uma metodologia que deve ser utilizada em conjunto com outras técnicas para estimativa dos eventos chuvosos de mais improvável ocorrência.

De acordo com a WMO, tendo em vista as inerentes incertezas associadas à estimativa da PMP, a utilização de diversas técnicas bem como avaliação do grau de variabilidade das estimativas resultantes é recomendável em detrimento ao uso de estimativas pontuais da PMP. De acordo com Pinheiro (2011) e Alaya *et al.* (2018), entretanto, o número de estudos que objetivam avaliar o grau de variabilidade das estimativas da PMP é limitado, especialmente no contexto brasileiro. Conforme levantado pela WMO (2009 e 2014), ainda, o número de estações e tamanho da amostra utilizada são de fundamental importância na obtenção de estimativas da PMP. Nesse contexto, o conhecimento do grau de incerteza inerente à estimativa da PMP torna-se ainda mais importante para a prática da engenharia do Brasil, a passo que, como um país em desenvolvimento, as séries históricas de medição de variáveis hidrometeorológicas disponíveis são tipicamente curtas, com estações de medições esparsas em certas regiões do país (LIMA *et al.*, 2020; SILVEIRA, 1997).

Outro ponto fundamental referente à aplicação prática da PMP dá-se no momento de possíveis verificações e auditorias de segurança durante a vida útil de estruturas hidráulicas operacionais. Tendo em vista o nível de risco associado à construção e operação de estruturas hidráulicas de grande porte como barragens, é usual que sejam estabelecidos planos de segurança e de auditoria para prevenção de acidentes (FERREIRA, 2022). Conforme Zapzalka e Rivas (2017) a revisão periódica dos valores de precipitação e vazão de projeto é imprescindível e tipicamente realizada como parte desses planos de segurança. Com a exigência normativa de consideração da CMP como critério de projeto, majorações no valor estimado da PMP durante uma dessas revisões podem causar modificação do enquadramento de risco da estrutura em questão, podendo levar à necessidade de intervenção para majoração de sua capacidade de descarga. No caso específico da PMP estimada pela técnica hidrometeorológica, esse processo de revisão periódica mostra-se de particular importância. Conforme demonstrado por Alaya *et al.* (2018) a formulação da precipitação maximizada, que serve como base para estimativa da PMP Hidrometeorológica, pode ser reescrita como o produto de dois máximos amostrais. Sendo assim, a não ser que ocorra a exclusão de dados anteriormente observados, o valor calculado da precipitação maximizada em um certo ponto deve ser necessariamente crescente, já que esses máximos amostrais serão modificados se e somente se for observado um valor recorde de uma dessas variáveis.

Com base no modelo probabilístico proposto por Alaya *et al.* (2018), elabora-se um processo de Monte Carlo para geração de séries sintéticas de possíveis estimativas da PMP para diferentes tamanhos de amostra. A partir da aplicação de técnicas análogas às utilizadas por Salas *et al.* (2014) aproxima-se o valor esperado, variância, coeficiente de variação e intervalos de confiança dessas estimativas da PMP Hidrometeorológica, permitindo a caracterização das incertezas de amostragem inerentes à estimativa da PMP. Adicionalmente, estima-se a probabilidade de serem observados eventos suficientemente extremos durante a vida útil de uma estrutura hidráulica que causem a majoração do valor até então calculado da PMP Hidrometeorológica bem como o valor desse possível aumento, possibilitando a avaliação da probabilidade de ocorrência de possíveis majorações significativas da CMP que possam causar uma reclassificação do nível de segurança dessa estrutura.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Quantificar as incertezas de amostragem inerentes à estimativa da PMP Hidrometeorológica e avaliar a probabilidade de modificação do valor da PMP a partir da teoria dos recordes.

2.2 Objetivos Específicos

- Quantificar o comportamento das estimativas da PMP Hidrometeorológica em função do tamanho da amostra utilizada por meio de estimadores de valor esperado, variância e coeficiente de variação e compara-lo com o da PMP Estatística;
- Quantificar as incertezas de amostragem inerentes à estimativa da PMP Hidrometeorológica como uma função do tamanho da amostra utilizada;
- Estimar a probabilidade de majoração do valor calculado da PMP Hidrometeorológica durante a vida útil de estruturas hidráulicas ; e
- Comparar a ordem de grandeza de possíveis majorações nas estimativas da PMP Hidrometeorológica com as bordas livres tipicamente utilizadas no projeto de estruturas hidráulicas.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Apesar do foco do trabalho nas estimativas da Precipitação Máxima Provável (PMP) pelo método Hidrometeorológico, a revisão da literatura abrange uma gama mais ampla de tópicos, avaliando-se técnicas estatísticas tipicamente utilizadas na modelagem de variáveis hidrológicas, bem como trazendo o embasamento teórico necessário para elaboração da metodologia. Dessa forma, estruturou-se a revisão bibliográfica em 7 itens, a saber:

1 – **Estimativas da PMP:** Descreve-se as principais técnicas de estimativa da PMP recomendadas pela WMO com enfoque nos métodos Estatístico (HERSHFIELD, 1961) e Hidrometeorológico (WMO, 2009);

2 – **Quantificação das Incertezas da PMP:** Apresenta-se os principais trabalhos que tratam da identificação e quantificação de fontes de incertezas nas estimativas da PMP pelos métodos Estatístico e Hidrometeorológico, com destaque para os trabalhos de Koutsoyiannis (1999), Salas et al. (2014), Micovic et al. (2015) e Alaya et al. (2018);

3 – **Massa de Água Precipitável de Referência:** Apresenta-se a definição do conceito de massa de água precipitável de referência utilizada no cálculo da PMP pelo método hidrometeorológico (WMO, 2009), bem como recomendações para cálculo dessa quantidade conforme WMO (2009), Tomlinson (1993) e Alaya et al. (2018);

4 – **Cálculo da Massa de Água Precipitável:** Descreve-se o equacionamento utilizado para cálculo da massa de água precipitável na atmosfera a partir de quantidades mensuráveis na superfície terrestre, conforme descrito no Anexo VII de Eletrobras (1987) e na publicação de Sugai (1989);

5 – **Modelagem Estatística de Eventos Extremos:** Descreve-se os principais fundamentos da teoria assintótica de valores extremos (ver GOMES e GUILLOU, 2015 e GUMBEL, 1958), com destaque para as distribuições de probabilidade utilizadas na literatura para modelagem de variáveis envolvidas na estimativa da PMP: a Distribuição de Gumbel, utilizada por Salas et al. (2014) e a Distribuição Generalizada de Eventos Extremos, utilizada por Koutsoyiannis (1999) e Alaya et al. (2018).

Apresenta-se também as técnicas mais comumente utilizadas (NAGHETTINI e PINTO, 2007) para estimativa de parâmetros em hidrologia;

6 – Teoria de Recordes: Apresenta-se um resumo dos principais equacionamentos da teoria de recordes compilados por Arnold et al. (2011) pertinentes à elaboração desse trabalho, bem como descrição geral de algumas aplicações da teoria de recordes a variáveis climáticas. Destacam-se os trabalhos de Vogel et al. (2001), Wergen e Krug (2010), Serinaldi e Kilsby (2018) e Cebrián et al. (2022); e

7 – Produto de Variáveis Aleatórias: Descreve-se um conjunto de técnicas para cálculo da distribuição de probabilidades exata do produto e soma de variáveis aleatórias que, conforme será descrito ao longo do trabalho, podem ser aplicadas para cálculo da distribuição de probabilidades exata da estimativa da precipitação maximizada.

3.1 Estimativas da PMP

O conceito atualmente definido como a PMP teve origem no que costumava ser conhecido como a Precipitação Máxima Possível, ou seja, na consideração de que existe um limite superior passível ser estimado para a quantidade de precipitação produzida por uma tempestade. Atualmente, em função de avanços científicos que evidenciam a incerteza inerente à estimativa desse hipotético limite superior (PAPALEXIOU E KOUTSOYIANNIS, 2006), a PMP é definida pela WMO (2009) como a maior precipitação provável de ocorrer em uma região para uma certa duração.

De acordo com Hansen (1987), os métodos determinísticos de estimativa da PMP foram originalmente desenvolvidos pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos, culminando nos trabalhos de Hansen *et al.* (1977) e de Schreiner e Riedel (1978). Em outra vertente o trabalho de Hershfield (1961) desenvolveu as bases para o método estatístico para estimativa da PMP. Por fim, WMO (2009) apresenta um compêndio de métodos hidrometeorológicos baseados na seleção e maximização de tempestades históricas.

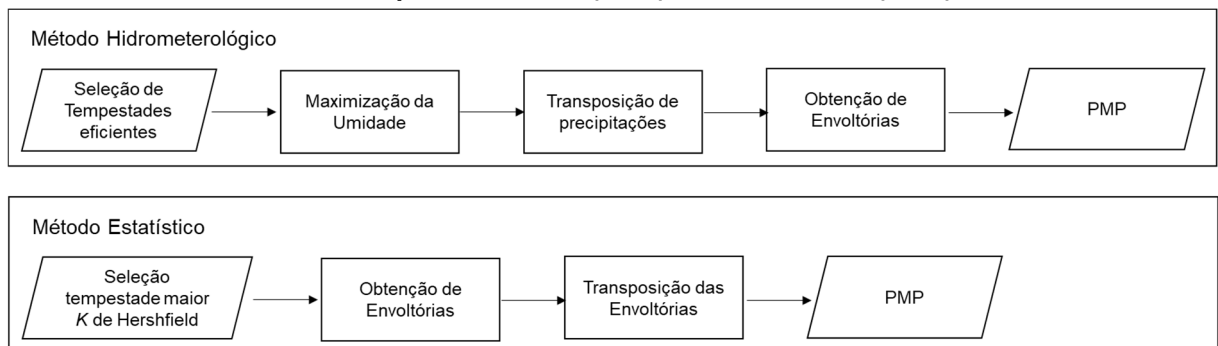
De acordo com WMO (2009), existem seis principais métodos de estimativa da PMP atualmente utilizados na prática da engenharia. A lista apresentada não é extensiva,

existindo algumas publicações que propõem novas metodologias (DOUGLAS E BARROS, 2003):

- O método local de maximização de tempestades;
- O método de transposição de tempestades;
- O método combinado, de maximização temporal e espacial de tempestades;
- O método inferencial, ou modelo teórico de tempestade;
- O método generalizado, ou Método Hidrometeorológico; e
- O método estatístico, ou Método de Hershfield.

Dentre esses, os Métodos Hidrometeorológico e Estatístico de Hershfield são considerados os mais comumente aplicados no Brasil (PINHEIRO, 2011; ALMEIDA *et al.*, 2020; SUGAI, 1989). Na Figura 1, apresenta-se um fluxograma metodológico das principais etapas dos métodos Hidrometeorológico e Estatístico, adaptado de WMO (2009) e ALMEIDA *et al.* (2020).

Figura 1 – Principais etapas dos métodos Hidrometeorológico e Estatístico para estimativa da PMP. Adaptado de WMO (2009) e Almeida *et al.* (2020)



Conforme descrito por WMO (2009), o processo completo de estimativa de envoltórias regionais da PMP pelo método hidrometeorológico inicia-se com a seleção de um conjunto das maiores tempestades já observadas na região. Na sequência, aplica-se a técnica de maximização da umidade para ajustar as alturas das precipitações selecionadas em função das maiores umidades já observadas na atmosfera naquela região. Obtido um conjunto de alturas otimizadas de referência, recomenda-se a elaboração de mapas de distribuição dessas precipitações para sua transposição. Por fim, são obtidas as relações envoltórias de duração-área-precipitação, permitindo-se

o cálculo da altura da PMP para uma bacia de área definida para uma duração definida.

A técnica de maximização da umidade, aplicada anteriormente às etapas de transposição e traçado de envoltórias componentes do método de estimativa da PMP Hidrometeorológica (Figura 1), consiste no produto de uma precipitação observada qualquer P , por um fator de majoração r_m (WMO, 2009). Esse fator de majoração, por vez, é calculado pela razão entre a massa de água precipitável máxima já observada (W_m) e a massa de água precipitável observada na atmosfera durante o evento chuvoso sendo maximizado (W_s):

$$P_{maximizada} = P \cdot r_m = P \cdot \frac{W_m}{W_s} \quad (1)$$

O equacionamento apresentado corrige linearmente a altura da precipitação observada a partir da razão entre uma umidade de referência e a umidade durante a tempestade. Conforme apresentado por Micovic *et al.* (2015), a técnica de maximização da umidade objetiva maximizar a umidade que poderia ter ocorrido em uma tempestade, utilizando-se como referência massa de água precipitável mais elevada já observada durante aquele período do ano naquela região.

A Equação (1) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$P_{maximizada} = P \cdot \frac{W_m}{W_s} = \frac{P}{W_s} \cdot W_m = PE \cdot PW \quad (2)$$

Em que PE denota a razão entre a altura de precipitação e a massa de água disponível na atmosfera durante o evento, tipicamente nomeada de eficiência de precipitação. A massa de água precipitável também será denotada de forma similar à proposta por Alaya *et al.* (2018), pelo símbolo PW , de *precipitable water*.

A elaboração de métodos de integração da umidade como alternativa à análise de frequência da altura de precipitação é bem documentada na literatura. Na publicação de Klemes *et al.* (1993) os autores fazem uma crítica às técnicas convencionais de estimativa de eventos hidroclimáticos extremos a partir de ajuste de distribuições de probabilidades. No trabalho, a necessidade de amostras extensas para obtenção de

estimativas precisas é colocada em contraste com o reconhecido comportamento não estacionário do clima que se torna mais evidente quanto maior a amostra. Como abordagem alternativa, esses autores propõem uma técnica para estimativa da ordem de magnitude de eventos climáticos extremos com base em pequenas amostras a partir da combinação de diversos eventos menos extremos das variáveis envolvidas na formação do fenômeno em questão.

3.2 Quantificação das incertezas da PMP

Na análise dos métodos de estimativa da PMP, as incertezas inerentes a cada uma das etapas do processo de cálculo são tipicamente avaliadas separadamente, com os trabalhos geralmente focando na técnica de maximização da precipitação de referência, e não nas técnicas de transposição e traçado de envoltórias. Na contramão dessa tendência geral, destaca-se o trabalho de Micovic *et al.* (2015). Nessa publicação, os autores buscam quantificar o nível de incerteza gerado pela tomada de decisão necessária ao longo do processo de estimativa da PMP pelo método hidrometeorológico.

Em Micovic *et al.* (2015) são discutidos 10 principais parâmetros que requerem julgamento no processo de estimativa da PMP Hidrometeorológica e, conseqüentemente, incorporam incertezas nos valores estimados: 1 - Na aplicação da técnica de maximização da umidade, para cálculo da umidade de referência não é plenamente conhecida a distribuição da umidade na atmosfera no início da tempestade, bem como o desenvolvimento dessa umidade ao longo da tempestade; 2 – No momento da análise das tempestades orográficas faz-se necessária a adoção de uma técnica de separação das componentes orográficas e convectivas; 3 – A seleção do centro da tempestade é muitas vezes feita com base em critérios arbitrários. Incerteza adicional é incorporada no momento da locação da tempestade transposta sobre a bacia em estudo; 4 – Limitação no conhecimento e modelagem do comportamento hidrológico da bacia de contribuição; 5 – Limitações das técnicas aplicadas para avaliação da umidade em tempestades com mais de um dia de duração; 6 – Possíveis erros, falhas e limitações associados à quantidade e qualidade dos dados históricos disponíveis; 7 – Desconhecimento dos possíveis impactos de processos de mudanças climáticas na PMP; 8 – Não linearidade do processo de

maximização da precipitação; 9 – A existência / consideração ou não de limites superiores para precipitação; 10 – A adoção de margens de segurança.

A partir da definição de curvas de probabilidade do desvio percentual nos diversos processos envolvidos na estimativa da PMP Hidrometeorológica, os autores determinam, em um estudo de caso, o histograma dos possíveis valores estimados para a PMP na bacia da Barragem La Joie, Colúmbia Britânica. Os resultados obtidos indicam que, apesar de uma estimativa original de 273 mm para a PMP sobre a bacia, a média dos valores estudados foi de 321 mm e o quantil 90% de 372 mm, indicando possíveis desvios da ordem de até 36% em função das incertezas consideradas.

Em outra abordagem, Salas *et al.* (2014) apresentam proposta para obtenção de intervalos de confiança para o valor estimado da PMP pelo método estatístico de Hershfield. Os autores denotam o termo $\hat{P}$ como estimador do valor calculado da PMP pelo método de Hershfield, tal que:

$$\hat{P} = \bar{X}_n + K S_n \quad (3)$$

em que K denota o coeficiente K de Hershfield e $\bar{X}_n$ e S_n denotam a média e desvio padrão das chuvas máximas anuais, conforme metodologia proposta por Hershfield (1961) para estimativas pontuais. A partir desse equacionamento, e com conhecimento dos estimadores de média e desvio padrão, calcula-se a média e variância do estimador da PMP $\hat{P}$, assumindo-se um valor constante de K :

$$E(\hat{P}) = E(\bar{X}_n) + K E(S_n) \quad (4)$$

e,

$$VAR(\hat{P}) = Var(\bar{X}_n) + K^2 Var(S_n) + 2Cov(\bar{X}_n, S_n) \quad (5)$$

Os autores então geram séries sintéticas de precipitação distribuídas conforme uma distribuição de Gumbel para corrigir o equacionamento dos valores de $Var(S_n)$ e $Cov(\bar{X}_n, S_n)$ desenvolvidos para a distribuição normal por Kendall e Stuart (1963). Por fim, a partir da desigualdade de Chebyshev (MOOD *et al.*, 1974) e dos valores estimados de $E(\hat{P})$ e $VAR(\hat{P})$, determina-se uma aproximação da probabilidade do estimador $\hat{P}$ encontrar-se fora de um intervalo de confiança qualquer:

$$P[E(\hat{P}) - c.VAR(\hat{P}) < \hat{P} < E(\hat{P}) + c.VAR(\hat{P})] \geq 1 + \frac{1}{c^2} \quad (6)$$

Nesse mesmo sentido, Koutsoyiannis (1999) propõe uma formulação alternativa para o método de Hersfield a partir da constatação de que o equacionamento elaborado por Hersfield (1961) chega aos mesmos resultados dados pelo ajuste de uma distribuição generalizada de valores extremos (GEV) para o período de retorno de 60.000 anos. Além de simplificar a estimativa da PMP, com os resultados obtidos o autor simplifica o processo de obtenção dos intervalos de confiança, tendo em vista que serão idênticos aos intervalos de confiança da GEV ajustada.

Por fim, resultados similares são apresentados por Alaya *et al.* (2018) para o método da maximização da umidade. Os autores propõem um embasamento probabilístico para definição da PMP Hidrometeorológica a partir da modelagem bivariada das distribuições dos máximos anuais das variáveis envolvidas no método da maximização da umidade. No trabalho, a distribuição conjunta dos máximos anuais da eficiência da tempestade (razão P/W, denotada por PE) e da água precipitável na atmosfera (PW) é modelada pelas duas distribuições marginais acopladas por uma função de cópula. A distribuição bivariada ajustada de PE e PW é então utilizada para produzir estimativas da PMP e estimar sua incerteza.

3.2.1 Correlação entre PE e PW

Na modelagem proposta por Klemes *et al.* (1993), é discutida a independência entre a massa de água precipitável máxima anual e a eficiência de precipitação, tanto para chuvas orográficas quanto frontais. De acordo com os autores, a adoção de premissa de descorrelação não contradiz a análise empírica nem física da correlação entre os pares dessas variáveis. Na Figura 2 são apresentadas dispersões dos pares de E_s (Eficiência das chuvas convectivas), E_o (Eficiência das chuvas orográficas) e W (Massa de água precipitável) obtidos por Klemes *et al.* (1993). Em (c), os autores propõem a subdivisão da amostra de W para fim de combinação com E_o em duas, N_1 e N_2 , com o objetivo de minimizar um possível nível de correlação entre as duas variáveis.

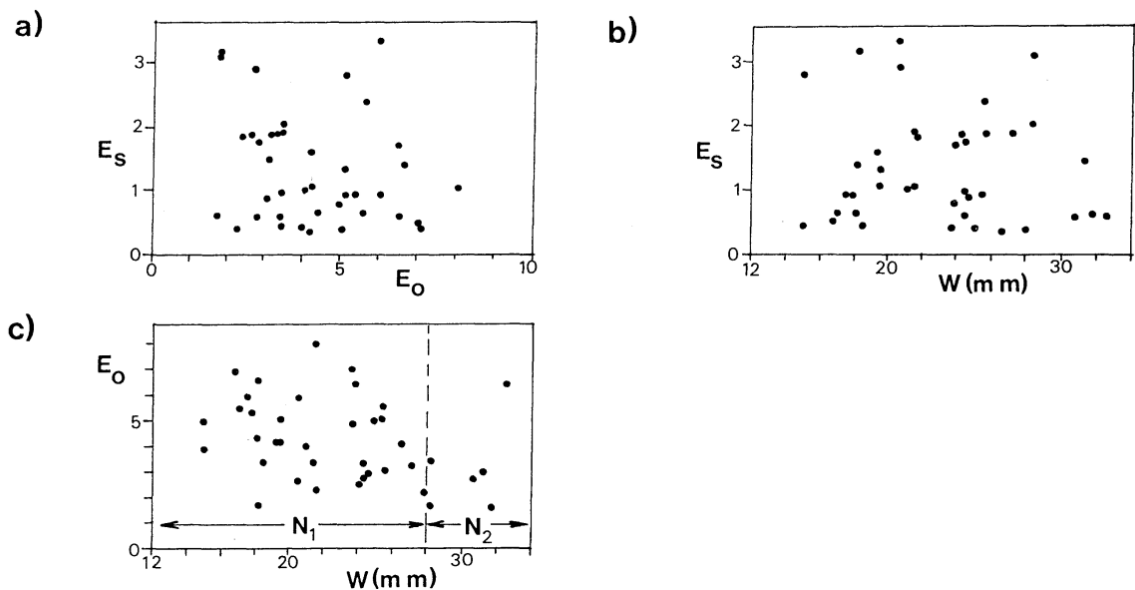


Figura 2 – Dispersão da distribuição conjunta empírica trivariada da Massa de água precipitável (W), Eficiência das chuvas convectivas (E_o) e Eficiência das chuvas orográficas (E_s). Adaptado de KLEMES *et al.*, 1993.

Klemes *et al.* (1993), então, apresentam um estudo de caso da técnica em questão aplicada à estimativa da PMP. No estudo são avaliadas as possíveis combinações de três eventos distintos envolvidos no processo físico de formação da precipitação. São eles: A massa de água precipitável na coluna de ar (W) e a eficiência da precipitação (razão P/W) para eventos chuvosos causados por convergência (E_s) e por orografia (E_o). A partir das 47.680 possíveis combinações das amostras de cerca de 40 anos dos máximos anuais das três variáveis, os autores elaboram uma curva de excedência empírica, com base na qual pode ser realizada inferência de eventos diretamente a partir das probabilidades amostrais com o tempo de retorno de até 1/47.680 anos dentro de uma margem de confiança definida. Esse estudo apresenta uma inédita abordagem do produto das variáveis eficiência de precipitação (PE) e massa de água precipitável (PW), distinto daquele tipicamente utilizado para a PMP Hidrometeorológica, já que os autores recomendam a utilização das possíveis combinações das amostras para análise de frequência, e não para estabelecimento de um suposto limite superior.

Um dos principais focos da publicação de Alaya *et al.* (2018), por vez, é a avaliação dos impactos de uma possível dependência entre os máximos anuais de PE e PW nos valores estimados da precipitação maximizada. No trabalho, os autores avaliam o grau de dependência entre as variáveis a partir da utilização de duas cópulas distintas: a

função de cópula comonotônica e a função de cópula de extremos de Gumbel, que possui um parâmetro passível de ajuste que permite o relaxamento do grau de dependência entre PE e PW . Vale destacar que a obtenção da precipitação pelo caso comonotônico é equivalente à aplicação da técnica de maximização da umidade descrita em WMO (2009), na qual se assume a possibilidade de ocorrência concomitante dos máximos de PE e PW . Nesse caso, o valor calculado da precipitação maximizada será idêntico ao produto dos máximos amostrais de PE e PW . No caso da cópula de Gumbel, por vez, considera-se que a ocorrência concomitante dos máximos de PE e PW é improvável, o que tende a diminuir o valor da precipitação maximizada se comparada à anterior.

Alaya *et al.* (2018) observam que os coeficientes de dependência caudal calculados pela definição do parâmetro da Cópula de Gumbel reduzidos em toda a América do Norte, concluindo a não validade da premissa de ocorrência simultânea de extremos de PE e PW . Diante disso, notam que a técnica da WMO (2009) parece tender a subestimar o valor da PMP, recomendando o uso da Cópula de Gumbel para modelagem da precipitação maximizada, resultando em estimativas mais arrojadas.

3.2.2 Transposição de tempestades

De acordo com Alexander (1963), técnicas de transposição de tempestade são frequentemente utilizadas para estimativa da PMP. De forma geral, essa família de técnicas permite o acesso e utilização de informações disponíveis em locais próximos dentre de áreas climaticamente homogêneas, levando a um resultado equivalente ao aumento do tamanho da amostra disponível.

Hiraga *et al.* (2022) computam estimativas da PMP fazendo o uso de técnicas de transposição de tempestades e as comparam com aquelas estimadas sem a aplicação dessas técnicas. As conclusões dos autores são similares às aquelas obtidas por Alexander (1963), observando que a utilização de técnicas de transposição de tempestades pode aumentar consideravelmente as alturas de precipitação estimadas em bacias com pequenas amostras disponíveis. De forma geral, Hiraga *et al.* (2022) recomendam que técnicas de transposição de tempestade sejam sempre utilizadas em conjunto com a estimativa da PMP Hidrometeorológica, especialmente para estimativas de alturas para longas durações.

3.3 Massa de Água Precipitável de Referência

WMO (2009) recomenda considerar a atmosfera plenamente saturada, com ocorrência de temperatura na superfície igual à de ponto de orvalho. Por conseguinte, o cálculo da massa de água na atmosfera é geralmente realizado a partir da temperatura de ponto de orvalho observada.

Para estimativa da massa de água precipitável durante uma tempestade, quando disponíveis múltiplas medições da temperatura de ponto de orvalho na superfície durante o evento, a WMO (2009) recomenda a seleção da maior temperatura de ponto de orvalho persistente por 12 horas. Na Tabela 1, apresenta-se exemplo de estimativa da temperatura máxima persistente por 12 horas adaptada de WMO (2009) que, nesse caso, seria igual a 24 °C. Ademais, WMO (2009) recomenda que essa estimativa seja realizada com base em amostras de pelo menos 50 anos. Caso uma amostra de 50 anos não esteja disponível, recomenda-se a utilização da temperatura de ponto de orvalho com período de retorno de 100 anos, estimada com base nos dados disponíveis. Tomlinson (1993), por outro lado, sugere a utilização da temperatura de ponto de orvalho média durante a tempestade como referência.

Tabela 1 – Exemplo de seleção da temperatura do ponto de orvalho máxima persistente por 12 horas. Adaptado de WMO (2009)

Tempo	00:00	06:00	12:00	18:00	00:00	06:00	12:00	18:00
Ponto de Orvalho (°C)	22	22	23	24	26	24	20	21
Ponto de Orvalho Persistente por 12h (°C)	-	22	22	23	24	24	20	20

Para aplicação da técnica, por fim, WMO (2009) recomenda a elaboração de envoltória sazonal, mensal ou até mesmo quinzenal das temperaturas de tempo de orvalho máximas observadas. A Figura 3, adaptada de WMO (2009), apresenta um exemplo de envoltória de temperaturas de ponto de orvalho máximas traçada com base em 32 subdivisões sazonais. O trabalho de Alaya *et al.* (2018), por vez, faz o uso de quatro subdivisões sazonais: Primavera, Verão, Outono e Inverno

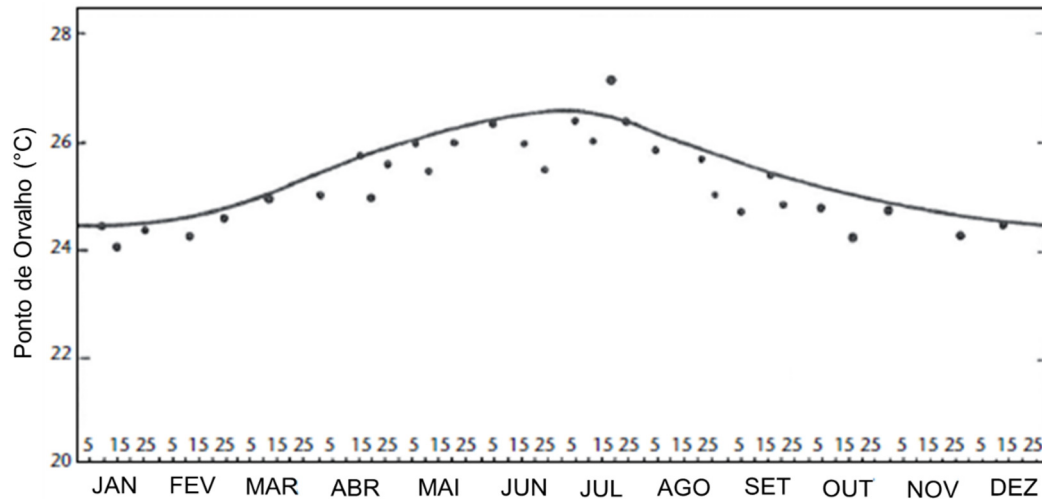


Figura 3 – Exemplo de traçado de envoltória de temperaturas de ponto de orvalho máximas de referência. Adaptado de WMO (2009).

3.4 Cálculo da Massa de Água Precipitável

O cálculo da massa de água precipitável é baseado no processo físico de formação da precipitação na atmosfera. Para estudo do comportamento dos eventos atmosféricos de precipitação, considera-se que a atmosfera se comporta aproximadamente como uma mistura de gases ideais respeitando, consequentemente, a lei de estado de um gás ideal:

$$P.V = n.R.T \quad (7)$$

em que:

- P denota a pressão do gás, em Pa;
- V denota o volume do gás, em m³;
- n denota o número de moles do gás;
- T denota a temperatura do gás, em K; e
- R denota a constante universal dos gases, igual a 8,3143 J.mol⁻¹.k⁻¹.

Cada componente i da mistura também respeita a mesma lei. Tipicamente, denota-se a pressão parcial exercida pelo gás como e_i e a pressão parcial do vapor de água por e . Denotando ρ como a massa específica do gás, dada pela razão de sua massa por seu volume, e R_i como a razão entre a constante universal dos gases e a massa molar

do gás, a equação universal dos gases pode ser reescrita de forma a suprimir o termo volumétrico:

$$e_i = \rho_i \cdot R_i \cdot T \quad (8)$$

Conforme apresentado por Eletrobras (1987) e Sugai (1989), a pressão parcial de vapor em condições de saturação, denotada por e^* , é uma função exclusiva da temperatura, que pode ser estimada com base na relação empírica:

$$e^*(T) = 101.325 \exp (13,3185 \cdot t_R - 1,9760 \cdot t_R^2 - 0,6445 \cdot t_R^3 - 0,1299 \cdot t_R^4) \quad (9)$$

nas quais t_R é uma variável de cálculo auxiliar obtida por:

$$t_R = 1 - \frac{373,15}{T} \quad (10)$$

Dada a pressão parcial de vapor na condição de saturação para uma determinada temperatura, a massa específica de saturação do vapor de água (ρ_V^*) pode ser obtida pela equação universal dos gases. Partindo desse valor, define-se a umidade relativa do ar por:

$$h = \frac{\rho_V}{\rho_V^*} \quad (11)$$

que também pode ser reescrita como função da pressão parcial do vapor de água:

$$h = \frac{e}{e^*(T)} \quad (12)$$

A partir das equações (11) e (12), observa-se dois processos distintos que podem levar à plena saturação da atmosfera. Mantendo-se as condições do gás constantes, um primeiro processo de incremento da massa de vapor de água acarreta o aumento da densidade de vapor de água, causando saturação. Um segundo, de redução da temperatura causa redução da pressão parcial de saturação do vapor de água.

3.4.1 Temperatura do Ponto de Orvalho

A temperatura final que causa saturação da atmosfera pelo segundo processo é nomeada de Temperatura do Ponto de Orvalho, e pode ser obtida pela inversão da relação apresentada na Equação (9) para a condição de saturação, fazendo:

$$e^*(T) = e \quad (13)$$

A partir da medição de um valor de umidade h e de uma temperatura do ar T , logo, estima-se o valor de e e, a partir dele, por otimização, o valor de T que respeite a Equação (9).

3.4.2 Relação entre Temperatura e Pressão na Atmosfera

Conforme demonstrado por Eletrobras (1987), a razão de mistura em massa entre o vapor de água e o ar seco, r , é dada por:

$$r = \frac{\rho_v}{\rho_s} = 0,662 \frac{e}{P - e} \quad (14)$$

em que:

- ρ_v denota a massa específica do vapor de água, em kg.m^{-3} ; e
- ρ_s denota massa específica do vapor do ar seco, em kg.m^{-3} ;

A razão de mistura na condição de saturação, portanto, pode ser obtida por:

$$r^* = 0,662 \frac{e^*(T)}{P - e^*(T)} \quad (15)$$

A partir de desenvolvimento matemático, partindo da lei universal dos gases, da equação de conservação de energia, assumindo processo pseudo-adiabático de transformação gasosa, e da equação de equilíbrio estático na coluna de ar vertical, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$C_{ps} \cdot dT - \frac{1}{\rho} dp + d(Lr^*) = 0 \quad (16)$$

que descreve a relação entre a temperatura e pressão na atmosfera, na qual:

- C_{ps} denota o calor específico do gás atmosférico à pressão de saturação, em K/kg ; e
- Lr^* denota o total de calor latente por unidade de massa de ar seco atmosférico, em J/kg ;

A equação diferencial pode ser solucionada por integração numérica, realizando-se a minimização da relação entre cada par de pontos a e b discretizados ao longo da coluna de ar atmosférico, conforme a Equação (17):

$$C_{ps} \cdot \ln\left(\frac{T_b}{T_a}\right) - R_s \ln\left(\frac{p_b}{p_a}\right) + \left[\frac{L_b \cdot r_b^*}{T_b} - \frac{L_a \cdot r_a^*}{T_a}\right] = 0 \quad (17)$$

Ao longo da coluna de ar o calor latente L pode ser estimado em função da temperatura T pela Equação (18) (LINSLEY *et al.*, 1975):

$$L = 3.145.780 - 2.361,355 \cdot T \quad (18)$$

Discretizando a Equação (17) em j intervalos entre dois níveis de pressão (p_0 e p_t), a variação de pressão em cada camada será:

$$\Delta_p = \frac{p_0 - p_t}{j} \quad (19)$$

Iterando ao longo de todas as camadas e utilizando-se da Equação (17) para estimativa da temperatura em cada camada, a massa de vapor de água precipitável pode ser obtida por:

$$W_p = \frac{1}{g} \int_{p_t}^{p_0} r^*(p, T(p)) \quad (20)$$

em que r^* pode ser obtido pela Equação (15) e $T(p)$ pela solução numérica da Equação (17).

Para mais sobre o cálculo da massa de água precipitável, recomenda-se a leitura do Anexo VII de Eletrobras (1987) e o trabalho de Sugai (1989).

3.5 Modelagem Estatística de Eventos Extremos

O valor máximo de uma amostra de tamanho N de uma variável aleatória X é também uma variável aleatória. Assumindo que a amostra é um conjunto de realizações da variável X , a distribuição de probabilidades do máximo amostral $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$ pode ser obtida:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[(X_1 \leq y) \cap \dots \cap (X_N \leq y)] = [F_X(y)]^N \quad (21)$$

Consequentemente, a FAP de Y será:

$$f_Y(y) = N[F_X(y)]^{N-1} f_X(y) \quad (22)$$

A teoria assintótica de valores extremos, elaborada pelo esforço de uma série de autores (ver GOMES e GUILLOU, 2015), demonstra que a distribuição dos máximos amostrais converge para certas formas características, independentemente da distribuição original da variável X . Mais especificamente, demonstra-se que o comportamento da distribuição de extremos $F_Y(y)$ depende fundamentalmente do comportamento caudal de $F_X(y)$.

Gumbel (1958) classificou três formas assintóticas de máximos mais comuns em:

- Tipo I: a forma dupla exponencial:

$$\exp[-\exp(-y)], \quad y \in [-\infty, \infty]: \quad (23)$$

- Tipo II: a forma exponencial simples:

$$\begin{cases} \exp[-y^{-\gamma}], & y \in (0, \infty] \\ 0 & , \quad y \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

- Tipo III: a forma exponencial com limite superior:

$$\begin{cases} \exp[-(-y)^{\gamma}], & y \in [-\infty, 0): \\ 0 & , \quad y \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

em que γ denota um número real positivo.

Em se tratando da seleção do tipo de distribuição de extremos mais adequada, o comportamento caudal é de fundamental importância. No trabalho de Alaya *et al.* (2018) os autores ajustam uma distribuição GEV para cada ponto para as variáveis PE e PW . Com base no parâmetro de forma ajustado, os autores concluem que não existem indícios de um limite superior para a distribuição de probabilidades de PE , com o fator de forma variando entre os correspondentes às distribuições de Gumbel

e Frechét, com média igual a 0,03. Para *PW* identificam que, durante o inverno, em 91% dos pontos avaliados o parâmetro de forma teve valor positivo, indicando para um possível limite superior da água precipitável durante essa estação. Para as outras estações o fator de forma contínua apontando para a presença de um limite superior, porém menos frequentemente. Os autores concluem que os resultados parecem apontar que *PW* pode apresentar um limite superior (Tipo III), enquanto *PE* não (Tipos I e II).

Nessa mesma linha, Papalexiou e Koutsoyiannis (2006) discutem as evidências estatísticas de possíveis limites superiores da precipitação (*P*) e da água precipitável (*PW*), concluindo que não há indícios para a existência de um limite superior para a precipitação. Na contramão do trabalho de Alaya *et al.* (2018), entretanto, elaboram que não existem indícios da existência de limites superiores para o valor de *PW*, nem técnicas suficientemente eficientes para estimativa desse limite. Consequentemente, os autores não recomendam o uso de distribuições de Tipo III para modelagem dessas variáveis.

3.5.1 Distribuição Gumbel de Máximos

A distribuição de valores extremos Tipo I é tipicamente denominada de Distribuição de Gumbel. A função de densidade de probabilidade de uma variável Gumbel *X* com parâmetros de posição e escala dados por α e β é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{x - \beta}{\alpha} \cdot \exp \left(-\frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \quad (26)$$

A função de acumulada de probabilidade de uma variável Gumbel *X* é dada por:

$$F_X(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \quad (27)$$

Em função de sua simplicidade de uso e propriedades desejáveis, a distribuição de Gumbel é reconhecidamente a mais utilizada para modelagem de eventos hidrológicos extremos (NAGHETTINI e PINTO, 2007 e PAPALEXIOU E KOUTSOYANIS, 2006). Apesar de seu uso frequente, existem situações na qual a distribuição de Gumbel não é a mais adequada para modelagem de extremos,

amplamente discutidas em Papalexiou e Koutsoyiannis (2013), que propõem uma regra geral de uso da distribuição de Frechet (Tipo II) em detrimento da distribuição de Gumbel para amostras reduzidas. Não foram, entretanto, identificados casos de uso da distribuição de Frechet para modelagem da PMP na literatura.

3.5.2 Distribuição de Generalizada de Valores Extremos

A distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) incorpora as três formas assintóticas de valores máximos em uma única distribuição, ficando o comportamento caudal atrelado ao valor do fator de forma κ . A função de densidade de probabilidade de uma variável GEV X com parâmetros de posição e escala dados por α e β é dada por:

$$f_X(X) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \kappa \cdot \frac{x - \beta}{\alpha} \right]^{1/\kappa - 1} \exp \left(- \left[1 - \kappa \cdot \frac{x - \beta}{\alpha} \right]^{1/\kappa} \right) \quad (28)$$

A função de acumulada de probabilidade de uma variável GEV X é dada por:

$$F_X(X) = 1 - \exp \left(- \left[1 - \kappa \cdot \frac{x - \beta}{\alpha} \right]^{1/\kappa} \right) \quad (29)$$

Para valores de $\kappa < 0$, a distribuição tem comportamento de Tipo II e limite inferior em $y > (\beta + \alpha)/\kappa$. Para $\kappa > 0$, a distribuição tem comportamento caudal de Tipo III, com limite superior em $y < (\beta + \alpha)/\kappa$. Por fim, para $\kappa = 0$, a distribuição corresponde à distribuição de Gumbel, de tipo I.

Como pode ser percebido, o comportamento caudal da distribuição GEV é controlado pelo parâmetro de forma da distribuição. Essa característica pode ser vista como uma vantagem, bem como uma desvantagem, a depender do contexto de uso dessa distribuição. Conforme discutido por Papalexiou e Koutsoyiannis (2013), havendo disponibilidade de amostra suficientemente grande, a distribuição GEV tende a ser mais flexível e apresentar melhores ajustes que as outras distribuições de valores extremos com comportamento caudal fixo. Na ausência de séries suficientemente,

entretanto, a estimativa do parâmetro de forma que controla o comportamento caudal da GEV torna-se incerta (HOSKING e WALLIS, 1985).

A definição do termo “suficientemente grande” pode variar consideravelmente a depender do fenômeno sendo modelado e premissas em questão. Como uma regra geral, Hosking e Wallis (1985) concluem pela possibilidade de utilização da distribuição GEV para séries temporais com mais de 50 anos.

3.5.3 Distribuição Gama

A distribuição Gama é definida como a distribuição do tempo de espera para a enésima ocorrência de um processo de contagem de Poisson, e não é uma distribuição de valores extremos. A distribuição Gama, portanto, é o resultado da soma de α variáveis aleatórias exponenciais independentes, cada uma com parâmetro de posição β . Assumindo α como um número real, a função de densidade de probabilidade de uma variável Gama X com parâmetros de forma α e de escala β é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)}{\beta \cdot \Gamma(\alpha)} \quad (30)$$

em que Γ denota a função gama completa.

A função de acumulada de probabilidade de uma variável gama X pode ser por:

$$F_X(x) = \frac{\Gamma_i\left(\frac{x}{\beta}, \alpha\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad (31)$$

em que Γ_i denota a função gama incompleta.

No contexto desse trabalho, é apresentada por ser um caso particular da função hipergeométrica generalizada (DI SALVO, 2008). Adicionalmente, a distribuição Gama possui a característica de interesse de possuir comportamento caudal similar ao de uma distribuição de extremos Tipo II, resultando em ajustes tipicamente bons para modelagem de máximos (NAGHETTINI e PINTO, 2007). Apesar de não ser uma distribuição de valores extremos, tipicamente utilizadas para modelagem de valores

máximos, a distribuição Gama foi utilizada com sucesso na modelagem de variáveis hidrológicas e meteorológicas (*apud* KHUDRI, 2013 e DA COSTA, 2014).

3.5.4 Estimativa de Parâmetros

O processo de inferência de parâmetros populacionais a partir de dados amostrais é, de forma geral, nomeado de estimativa de parâmetros. Existem uma série de técnicas de estimativa de parâmetros, tipicamente categorizadas em estimativas pontuais e estimativas por intervalo (NAGHETTINI e PINTO, 2007). As técnicas de estimativa pontual objetivam a inferência de um único parâmetro mais representativo a um certo parâmetro populacional a partir de uma amostra, enquanto as técnicas de estimativa por intervalos objetivam utilizar as informações amostrais para afirmar acerca do grau de confiabilidade de certos intervalos de valores conterem certo parâmetro populacional.

Dentre os diversos métodos de estimativa pontual de parâmetros tipicamente utilizados para inferência dos parâmetros de uma distribuição populacional selecionada destacam-se como mais tipicamente utilizados na hidrologia (NAGHETTINI e PINTO, 2007): o método dos momentos (MOM); o método da máxima verossimilhança (MVS); e o método dos momentos-L (MML).

O método dos momentos (MOM) é o método de estimação de parâmetros considerado mais simples, consistindo em igualar os momentos amostrais aos populacionais. Os estimadores desse método são de forma geral menos eficientes que os estimadores de MVS e MML, especialmente para distribuições com três ou mais parâmetros.

O método da máxima verossimilhança (MVS) é considerado o mais eficiente entre os três, por assintoticamente produzir os estimadores de menor variância. A aplicação do método da máxima verossimilhança consiste na maximização da função de verossimilhança a partir da variação dos parâmetros da distribuição. Em linhas gerais, define-se a função de verossimilhança a partir da probabilidade de a amostra ter sido extraída da população definida pelos parâmetros selecionados. Consequentemente pode-se afirmar que o MVS maximiza a probabilidade de a amostra observada ter sido extraída da distribuição populacional com os parâmetros estimados. Em alguns casos a aplicação do MVS a amostras de pequeno tamanho pode gerar estimadores piores

que os dos outros métodos (NAGHETTINI e PINTO, 2007). O uso de estimadores de MVS é comum na hidrologia, sendo utilizado, por exemplo, nos trabalhos de Alaya *et al.* (2018) e Papalexiou e Koutsoyiannis (2013).

O método dos momentos-I (MML), por fim, foi introduzido por Hosking (1990) como uma forma de tornar os estimadores de momentos ponderados por probabilidades (MPP – ver GREENWOOD *et al.*, 1979) diretamente interpretáveis como descritores dos parâmetros de posição, escala e forma das distribuições de probabilidades. Os momentos-I consistem, resumidamente, em combinações lineares dos MPP. Esses, por vês, consistem em momentos estimados a partir da ponderação dos valores amostrais observados por suas probabilidades amostrais. O MML consiste em igualar os momentos-I amostrais aos populacionais.

Os momentos-I destacam-se por ser de complexidade computacional menor que o MVS e gerar estimadores com limite de variação limitados se comparados aos gerados pelo MOM (NAGHETTINI e PINTO, 2007). Outras vantagens dos momentos-I, em relação aos momentos convencionais, são discutidas por Vogel e Fennessey (1993). O uso de estimadores de MML é comum na hidrologia sendo utilizado, por exemplo, nos trabalhos de Da Costa (2014) e Pearson (1991).

3.6 Teoria de Recordes

Como será apresentado nesse trabalho e discutido por Alaya *et al.* (2018), a precipitação maximizada pelo método de maximização da umidade pode ser descrita como o produto de dois máximos. A metodologia de contagem de recordes, compilada por Arnold *et al.* (2011), pode ser aplicada para compreensão da distribuição temporal e dos valores dos recordes observados nas variáveis envolvidas na estimativa da precipitação maximizada. Como a precipitação maximizada é o resultado do produto dessas duas variáveis, sempre que ocorrer um recorde de uma delas, também ocorrerá um recorde do valor estimado da PMP.

A Teoria de Valores Recordes propõe-se a descrever o comportamento estatístico da sequência dos maiores ou menores valores obtidos de uma sequência (ou amostra) de variáveis aleatórias. Desenvolvida originalmente por Chandler (1952), foi aplicada a variáveis hidrológicas em estudos para avaliação de estacionariedade de séries de

vazão (VOGEL *et al.* 2001) e de temperatura (WERGEN e KRUG, 2010 e CEBRIÁN *et al.*, 2022), bem como na avaliação do comportamento dos recordes de precipitação máxima diária (SERINALDI e KILSBY, 2018).

3.6.1 Tempo de Ocorrência de Recordes

Arnold *et al.* (2011) apresenta convenções de notações aplicáveis à teoria de recordes. O autor nomeia uma variável X_j como o valor máximo (ou recorde) de uma série $\{X_1, \dots, X_n\}$ se $X_j > X_i$ para todo $i < j$. A partir dessa definição, define-se a série de tempo de ocorrência do k -ésimo recorde, T_k , conforme a Equação (32):

$$T_k = \min\{j: X_j > X_{T_{k-1}}\} \quad (32)$$

Para descrição do tempo de ocorrência de recordes, Arnold *et al.* (2011) então introduzem uma variável indicadora da ocorrência de um recorde I , que assume o valor 1 se e somente se X_n for um recorde:

$$I_n = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ I(X_n > \max\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}) & , n > 1 \end{cases} \quad (33)$$

Constata-se que os I_n 's são variáveis aleatórias de Bernouli com probabilidade de ocorrência de $1/n$:

$$P(I_n = 1) = \frac{1}{n} \quad (34)$$

Define-se então N_n como o número de recordes até a posição n da série $\{X_1, \dots, X_n\}$, de forma que:

$$N_n = \sum_{j=1}^n I_j \quad (35)$$

Como os valores de $\{I_j\}$ são independentes, segue que:

$$E(N_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \approx \ln(n) + \gamma \quad (36)$$

$$VAR(N_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{j}\right) \approx \ln(n) + \gamma - \frac{\pi^2}{6} \quad (37)$$

em que γ denota a constante de Euler.

Na Figura 4, apresenta-se curvas características de $E(N_n)$, $E(N_n) + VAR(N_n)$ e $E(N_n) - VAR(N_n)$ para o tamanho da amostra (n) variando entre 1 e 1.000. Nela, observa-se a tendência de crescimento aproximadamente logarítmica do valor esperado e variância do número de recordes. É fácil constatar que a banda superior de $E(N_n) + VAR(N_n)$ tende a $2 \cdot \ln(n)$ para valores suficientemente grandes de n , enquanto $E(N_n) - VAR(N_n)$ tende para $\pi^2/6$. Sendo assim, fica evidente que a frequência de quebra de recordes decresce com o aumento da amostra, enquanto o intervalo entre esses recordes aumenta.

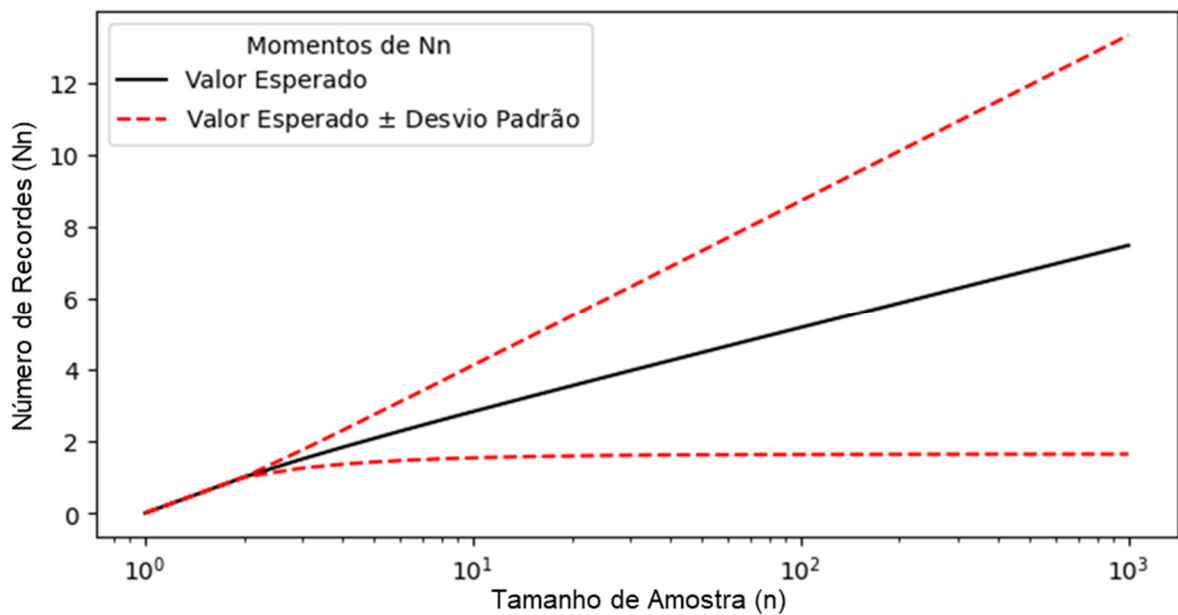


Figura 4 – Valores de $E(N_n)$ e $E(N_n) \pm DP(N_n)$ como uma função de n .

A distribuição exata de N_n também pode ser obtida (ARNOLD *et al.* 2011):

$$P(N_n = k) = \frac{S_n^k}{n!} \quad (38)$$

em que S_n^k é um número de Stirling de primeiro tipo. A forma da distribuição de probabilidades de N_n é apresentada na Figura 5 para os valores de $n = 10, 25$ e 50 . Na Figura 5 demarcam-se também os valores de $k = E(N_n)$, $k = E(N_n) + VAR(N_n)$ e $k = E(N_n) - VAR(N_n)$ no eixo das abscissas. Observa-se que a distribuição de probabilidades de N_n é assimétrica para a direita, com recordes para valores k próximos a n tornando-se mais improváveis quanto maior for o valor de n .

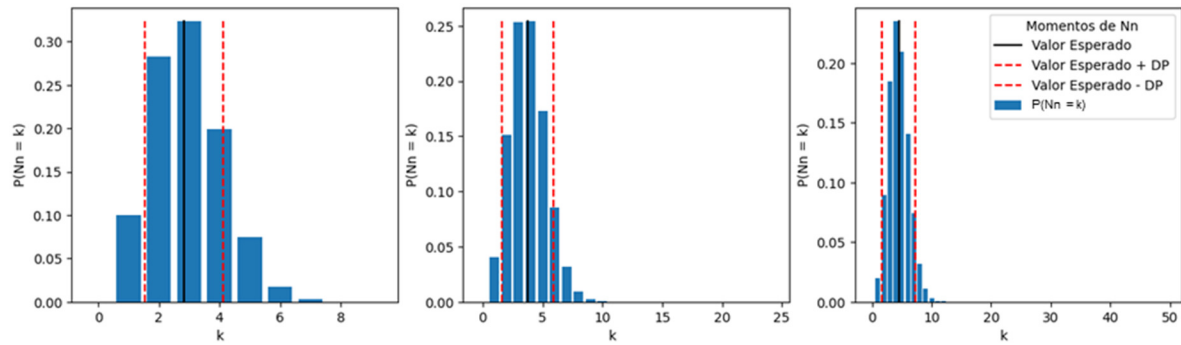


Figura 5 – Distribuição de densidade de probabilidade de N_n para tamanhos de amostra diversos ($n = 10, 25$ e 50).

Outra variável de interesse é o intervalo entre dois recordes $k - 1$ e k , que pode ser denotado por:

$$\Delta_k = T_k - T_{k-1} \quad (39)$$

Assumindo, sem perda de generalidade, que X se distribui como uma Exponencial, Neuts (1967) obtêm a probabilidade de o intervalo entre o k -ésimo recorde e o próximo ser maior que um valor j :

$$P(\Delta_k > j) = \int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-x} (1 - e^{-x})^j dx \quad (40)$$

A forma da distribuição de probabilidades de Δ_k é apresentada para valores de $j = 10, 25$ e 50 na Figura 6, considerando valores de k variando de 2 a 6,87. Esses valores de k são correspondentes ao valor esperado do número de recordes acrescido de um para n variando entre 1 e 200, e objetivam representar a distribuição de probabilidades do tempo de espera entre o recorde esperado até a posição n e o próximo ($k + 1$). Na Figura 6, as linhas azul, laranja, verde e vermelha representam as probabilidades de superação de Δ_k para os valores enumerados de j como função do valor esperado de k para o valor de n apresentado no eixo das abscissas.

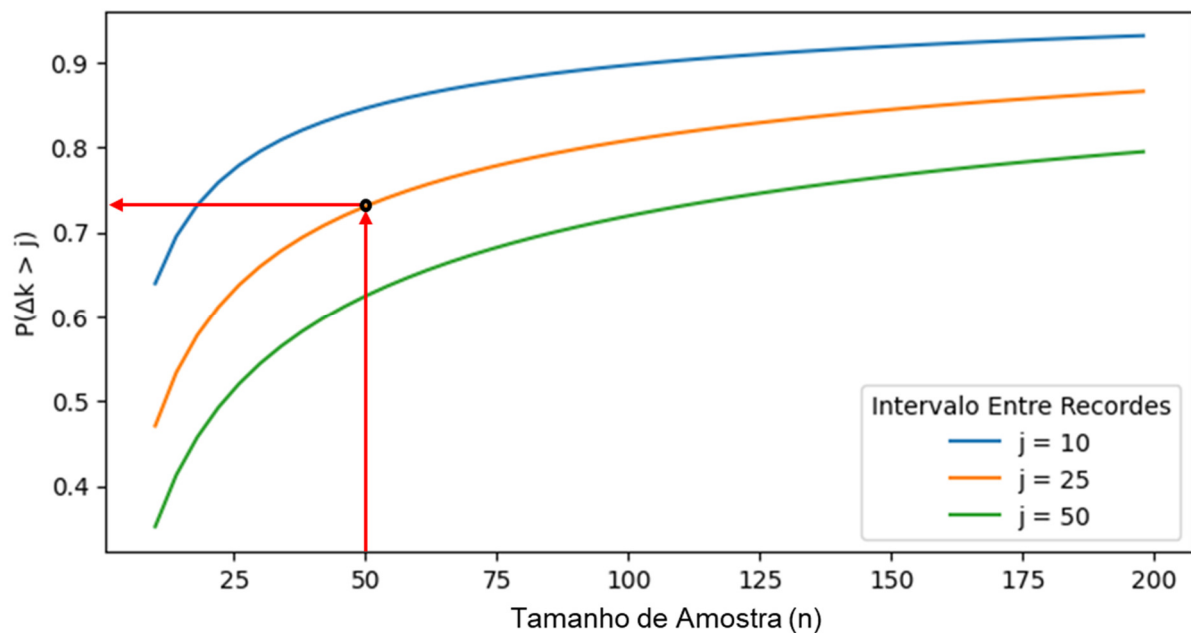


Figura 6 – Probabilidade de superação do intervalo até o k -ésimo recorde (Δ_k) para valores de $j = 10, 25$ e 50 como função de $k = E[Nn] + 1$.

Na Figura 6, com as setas em vermelho, apresenta-se um exemplo de aplicação da curva: considerado uma amostra com 50 observações de uma variável aleatória, espera-se que tenham ocorrido $E[Nn] = 4,48$ (Equação (36)) valores recordes, sendo, então, o índice do próximo recorde $k = 5,48$. Sendo assim, com um aumento de 25 no tamanho da amostra, a probabilidade de não ocorrer uma quebra de recorde é de 73,35 %.

Observa-se que toda a metodologia associada à análise do tempo de ocorrência dos recordes independe da distribuição de probabilidades da variável X .

3.6.2 Valores Recordes

Diferentemente dos intervalos entre os recordes, o valor desses recordes é dependente da forma da distribuição parental da variável em questão. Conforme apresentado em Arnold et al. (2011), o procedimento matemático para desenvolvimento de equações analíticas que descrevem esses valores é único para cada variável em questão e complexo a não ser em casos específicos nos quais a variável possui função de sobrevivência inversa analítica. De acordo com Arnold et al. (2011) a distribuição de probabilidades do valor do n -ésimo recorde R_n é dada por:

$$R_n \sim \psi_F \left(\sum_{i=0}^n X_i^* \right) \quad (41)$$

em que:

- X_i^* denota a i -ésima observação de uma variável aleatória $X^* \sim \text{Exponencial}(1)$
- ψ_F denota a função de sobrevivência inversa da variável em questão:

$$\psi_F = H^{-1}(u) \quad (42)$$

$$H(x) = -\ln[1 - F(X)] \quad (43)$$

Arnold *et al.* (2011) e Teegavarapu *et al.* (2019) apresentam soluções para algumas distribuições. Dentre os exemplos, destaca-se a solução para a distribuição de Gumbel de Mínimos:

$$R_n \sim \mu + \sigma \cdot \ln \left(\sum_{i=0}^n X_i^* \right) \quad (44)$$

Nesse caso, demonstra-se também que a diferença entre dois recordes distintos são variáveis aleatórias exponenciais, denotadas por J , tal que:

$$P(J_i > x) = \exp \left(-i \cdot \frac{x}{\sigma} \right) \quad (45)$$

Essas relações não possuem forma analítica para a Distribuição de Gumbel de Máximos.

3.6.3 Momentos dos Valores Recordes

De acordo com Arnold *et al.* (2011), o momento δ do enésimo recorde da variável aleatória X é dado por:

$$E(R_n^\delta) = \int_0^{-1} [F_X^{-1}(r)]^\delta \frac{[-\ln(1-r)]^n}{n!} dx \quad (46)$$

Novamente, os autores apresentam soluções para algumas distribuições, com destaque para a distribuição de Gumbel de Mínimos. Conforme Arnold *et al.* (2011), para a distribuição de Gumbel de Mínimos, a função geradora de momentos do enésimo recorde é dada por:

$$M_{R_n}(t) = e^{t \cdot \mu} \frac{\Gamma(n+1+t \cdot \sigma)}{\Gamma(n+1)} \quad (47)$$

Logo:

$$E(R_n) = \mu - \sigma \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \gamma \right) \quad (48)$$

e,

$$VAR(R_n) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right) \quad (49)$$

Novamente, essas relações não possuem forma analítica para a Distribuição de Gumbel de Máximos.

3.7 Produto de Variáveis Aleatórias

Conforme raciocínio que será desenvolvido ao longo desse trabalho, análogo ao proposto por Alaya *et al.* (2018), a precipitação maximizada pode ser representada como o produto do máximo amostral de duas variáveis aleatórias. Nesse contexto, apresenta-se um compêndio não extensivo de alguns estudos identificados acerca do cálculo da distribuição de probabilidades exata do produto de variáveis aleatórias.

Conforme apresentado por Glen *et al.* (2004), a distribuição de probabilidades do produto de duas variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{v}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx \quad (50)$$

Ainda conforme Glen *et al.* (2004), apesar de simples de demonstrar, o cálculo da integral é tipicamente complexo a não ser em casos muito específicos. Os autores propõem um algoritmo para auxílio no cálculo da distribuição de probabilidades do produto de duas variáveis aleatórias, fazendo a subdivisão da integral em trechos notáveis para simplificação dos cálculos.

Outra técnica utilizada para o cálculo da distribuição de probabilidades do produto de duas variáveis é a transformação integral de Mellin. Conforme originalmente colocado por Epstein (1948), a integral para cálculo da distribuição de probabilidades do produto

de duas variáveis aleatórias tem forma idêntica à da convolução de Mellin. Conforme apresentado pelo autor, a transformada de Mellin de $f(x)$, definida apenas para $x \geq 0$ é dada por:

$$M(f(x)|s) = E[x^{s-1}] = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad (51)$$

Assumindo s como uma variável complexa, a integral de inversão da transformada de Mellin é:

$$M^{-1}[M(f(x)|s)] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} M(f(x)|s) ds \quad (52)$$

A convolução de Mellin de duas funções $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, por fim, é dada por:

$$g(x) = M^{-1}[M(f_X(x)|s) \cdot M(f_Y(y)|s)] \quad (53)$$

Tomando a forma:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_Y\left(\frac{x}{y}\right) f_X(y) dy \quad (54)$$

Nota-se que a equação (53) é igual à FDP do produto das variáveis aleatórias X e Y . A técnica é posteriormente expandida para o produto ou quociente de qualquer número de variáveis e para todo o domínio dos números reais por Springer e Thompson (1966).

A partir das técnicas desenvolvidas nos trabalhos supracitados, uma série de publicações foram elaboradas apresentando soluções da convolução de Mellin para casos particulares. A seguir, apresenta-se uma lista não extensiva de algumas soluções notáveis apresentadas na literatura.

Springer e Thompson (1970), fazendo uso das técnicas propostas pelos próprios autores em 1966, apresentam solução para o caso particular do produto de variáveis Gama, Beta e Gaussianas, distribuindo-se como uma função G de Meijer, originalmente definida por Meijer (1963). Saxena e Ram (1993), por vez, apresentam solução para produto ou quociente de qualquer número de variáveis aleatórias com

distribuição de probabilidades caracterizadas pela função generalizada hipergeométrica em termos da função H de Fox (FOX, 1961). Conforme apresentado em Saxena e Ram (1993), as distribuições Gama Generalizada, F Generalizada e *Folded-t* são casos particulares da função generalizada hipergeométrica. Finalmente, em Ali (2018), é apresentada a solução por integração simbólica computacional para o produto de duas distribuições Gamma, que toma forma de uma função K de Bessel.

Através da aplicação de transformada logarítmica, o produto de duas variáveis também pode ser convertido na soma de seus logaritmos:

$$X.Y = Z \Rightarrow \text{Log}(X) + \text{Log}(Y) = \text{Log}(Z) \quad (55)$$

Nesse caso, a distribuição da soma é dada pela área sob a distribuição conjunta das variáveis (NAGHETTINI e PINTO, 2007) e pode ser computada conforme a Equação (56):

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y\left(\frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx \quad (56)$$

Alternativamente, a distribuição da soma de variáveis aleatórias positivas pode ser obtida pela convolução das distribuições de probabilidades, tipicamente computada através das convoluções de Fourier ou de Laplace (PISHRO-NIK, 2014), conforme a Equação (57):

$$f_z(z) = f_x(x) * f_y(y) = \mathcal{L}_s^{-1} \left[\mathcal{L}_s(f_x(x)) \cdot \mathcal{L}_s(f_y(y)) \right] \quad (57)$$

4 METODOLOGIA

Conforme descrito em WMO (2009), o método de maximização da umidade pontual de uma tempestade consiste no cálculo de um fator de majoração (r_m) do valor observado de precipitação (P) a partir da razão entre uma umidade máxima de referência (W_m) e a umidade observada durante a tempestade (W_s) (ver Equação (2)). Selecionando um conjunto de N precipitações e, aplicando a metodologia de maximização de umidades a todas elas, o valor da precipitação maximizada resultante é dado pela Equação(58), na qual n denota a posição das observações de P e W na amostra:

$$P^* = \max \left[\frac{P_n}{W_n} \cdot W_m \right] = \max \left[\frac{P_n}{W_n} \cdot \max[W_1, \dots, W_n, \dots, W_N] \right] \quad (58)$$

Como para um N definido o valor de $\max[W_1, \dots, W_n, \dots, W_N]$ é constante:

$$P^* = \max \left[\frac{P_1}{W_1}, \dots, \frac{P_n}{W_n}, \dots, \frac{P_N}{W_N} \right] \cdot \max[W_1, \dots, W_n, \dots, W_N] \quad (59)$$

Para um dado período sazonal denotado por s , então, a partir de duas amostras de mesmo tamanho N , uma de eficiência de precipitação $\{PE_s\}_n = \left\{ \frac{P_1}{W_{s,1}}, \dots, \frac{P_n}{W_{s,n}}, \dots, \frac{P_N}{W_{s,N}} \right\}$ e outra de água precipitável $\{PW_s\}_n = \{W_{s,1}, \dots, W_{s,n}, \dots, W_{s,N}\}$, o valor da precipitação maximizada (P_s^*) pode ser representado pela combinação de valores PE_s e PW_s que resulta no máximo valor (ALAYA *et al.*, 2018):

$$P_s^* = \max[PE_s \cdot PW_s] = \max[\{PE_s\}_n] \cdot \max[\{PW_s\}_n] \quad (60)$$

Nota-se que os máximos anuais de PE_s e PW_s podem ser utilizados diretamente na Equação (60) e o restante da amostra disponível descartada, tendo em vista que o máximo dos máximos anuais é idêntico ao máximo de todas as medições. De forma análoga à elaborada por Salas *et al.* (2014) para o Método de Hershfield, denotando o estimador da precipitação maximizada em um dado período sazonal por $\hat{P}_s^*$, sua distribuição de probabilidades será dada por:

$$P(\hat{P}_s^* = x) = P(\max[\{PE_s\}_n] \cdot \max[\{PW_s\}_n] = x) \quad (61)$$

A precipitação maximizada utilizada para cálculo da PMP¹, por vez, é o máximo de todas as S precipitações maximizadas sazonais:

$$P^* = \max[P_1^*, P_2^*, \dots, P_S^*, \dots P_S^*] \quad (62)$$

Sendo assim,

$$P(\hat{P}^* = x) = P(\max[P_1^*, P_2^*, \dots, P_S^*, \dots P_S^*] = x) \quad (63)$$

Partindo da definição acima para representação da distribuição de probabilidades do estimador da precipitação maximizada, $P(\hat{P}^* = x)$, as incertezas inerentes à estimativa dessa variável com base em uma amostra de tamanho limitado n podem ser quantificadas a partir de características específicas dessa distribuição de probabilidades descritas a seguir.

O procedimento para modelagem e análise de incertezas do estimador da chuva maximizada $\hat{P}^*$ foi subdividido em quatro etapas:

- 1 – Modelagem dos máximos anuais de PE e PW , objetiva dar embasamento para seleção de distribuições e parâmetros representativos dos máximos anuais sazonais dessas variáveis para uso nas etapas subsequentes (Item 4.1);
- 2 – Obtenção dos momentos e intervalos de confiança de $\hat{P}^*$, objetiva a quantificação das incertezas inerentes à estimativa da precipitação maximizada (Item 4.2);
- 3 – Obtenção dos intervalos de tempo entre recordes e do quociente entre dois valores recordes subsequentes, permitindo a quantificação da probabilidade de ocorrência e grandeza de possíveis alterações no valor estimado de $\hat{P}^*$ durante a vida útil de obras hidráulicas (Item 4.3); e

¹ O termo “precipitação maximizada utilizada para cálculo da PMP” será permutado livremente por “precipitação maximizada para o período completo” ao longo do trabalho. Esse termo refere-se ao valor da precipitação maximizada de referência efetivamente utilizado para cálculo da PMP Hidrometeorológica, calculado a partir do valor máximo de todos os períodos sazonais.

4 – Elaboração de estudo de caso, permitindo a estimação de parâmetros para apresentação de alguns dos resultados (Item 4.44.1).

O Fluxograma geral da metodologia proposta é apresentada na Figura 7:

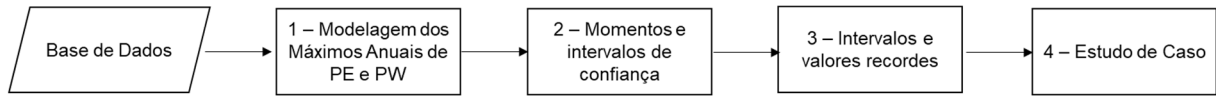


Figura 7 – Fluxograma geral da metodologia proposta.

Quando não encontradas soluções analíticas, as relações desejadas foram estimadas a partir da geração de séries sintéticas de P_s^* . Para tal fim, foi utilizado o processo de Monte Carlo descrito a seguir. Nele, foi considerada a subdivisão do ano em quatro períodos sazonais: primavera, verão, outono e inverno, mesma utilizada por Alaya *et al.* (2018):

- 1) Define-se o tamanho N das séries a serem geradas;
- 2) Define-se a distribuição de probabilidades de $PE = f_{PE}(\hat{\theta}_{PE})$;
- 3) Define-se a distribuição de probabilidades de $PW = f_{PW}(\hat{\theta}_{PW})$;
- 4) Gera-se séries de tamanho N de PE e PW ;
- 5) Obtém-se a série de recordes de PE e PW para cada posição na amostra $n = [1, 2, \dots, N]$ usando as equações (64) e (65).

$$PE_{rec}(n) = \max[PE_1, PE_2, \dots, PE_n] \quad (64)$$

$$PW_{rec}(n) = \max[PW_1, PW_2, \dots, PW_n] \quad (65)$$

- 6) Calcula-se o valor da P_s^* para cada tamanho de amostra $n = [1, 2, \dots, N]$ pelo produto dos valores calculados no passo anterior usando:

$$P_s^*(n) = PE_{rec}(n) \cdot PW_{rec}(n) \quad (66)$$

- 7) Repete-se os passos de 4 a 6 M vezes para obter M séries de P_s^* .

O procedimento acima descrito é apresentado em formato de fluxograma na Figura 8.

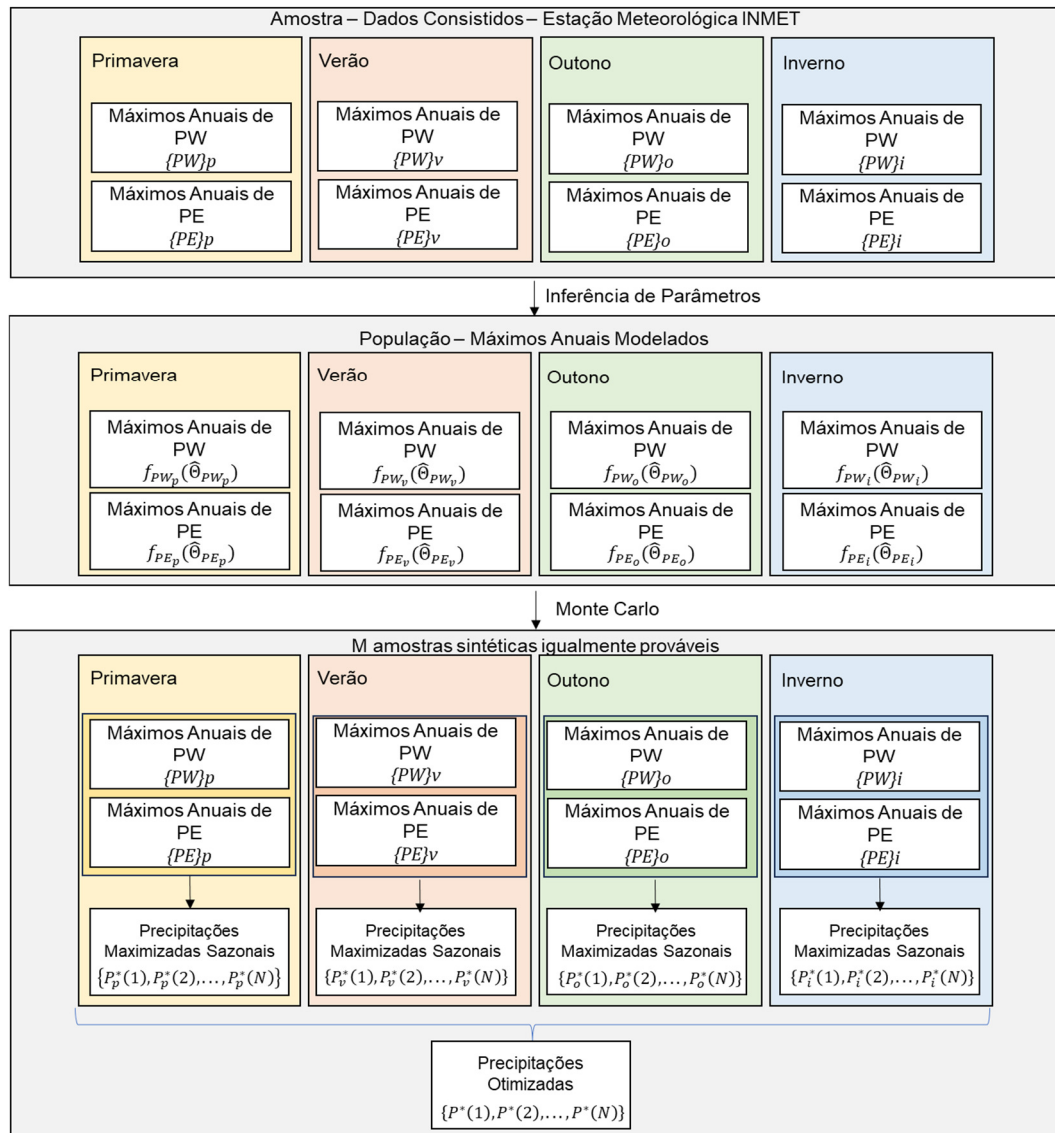


Figura 8 – Fluxograma do procedimento proposto para sintetização de séries de precipitação maximizada.

O processo de Monte Carlo proposto foi implementado na linguagem de programação *Python 3* com auxílio do módulo de estatística *scipy.stats* da biblioteca *SciPy* (ver VIRTANEN *et al.* 2020). As distribuições e probabilidades e estimadores de Momentos-I foram implementados com auxílio da biblioteca *Lmoments3*, que é uma implementação em *Python 3* da biblioteca *Lmoments.f*, originalmente implementada por J. R. M. Hosking

A seguir apresenta-se as metodologias específicas a cada uma das quatro etapas metodológicas propostas.

4.1 Modelagem dos Máximos Anuais de PE e PW

Para modelagem da distribuição de probabilidades de P_s^* , faz-se necessário o ajuste de distribuições para os máximos anuais de PE e PW . Assim, são assumidas as premissas de estacionariedade e de não correlação (independência) das duas variáveis.

O teste não paramétrico de Kruskal-Wallis (bilateral – ver OSTERTAGOVA *et al.* 2014) foi aplicado a um nível de significância de 5% para comparação múltipla dos valores médios sazonais de PE e PW , considerando-se a divisão do ano em primavera, verão, outono e inverno, como proposto por Alaya *et al.* (2018). A existência de diferenças significativas entre as médias sazonais é necessária para justificar a modelagem de distribuições distintas para cada um dos períodos sazonais.

Para validação da premissa de independência entre PE e PW , foram aplicados o teste paramétrico de Pearson e o teste não paramétrico de Spearman a um nível de significância de 5 % às amostras coletadas em todo o território brasileiro.

O ajuste da distribuição de Gumbel, identificada como adequada para modelagem de extremos para estudo da PMP (ALAYA *et al.* 2018 e SALAS *et al.*, 2014), foi realizado pelo Método dos Momentos-L (HOSKING e WALLIS, 1985). Para avaliação do ajuste obtido aplicou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov a um nível de significância de 5 %.

Conforme Papalexiou and Koutsoyiannis (2006) levantam, possíveis limites superiores da precipitação e água precipitável parecem não serem sujeitos a estimativa, consequentemente, a distribuição de Gumbel de dois parâmetros foi selecionada para modelagem de $f_{PE}(\hat{\theta}_{PE})$ e $f_{PW}(\hat{\theta}_{PW})$ em detrimento da GEV utilizada por Alaya *et al.* (2018), já que esses autores observaram uma considerável frequência na qual o parâmetro de forma ajustado foi superior a zero resultando na modelagem de limites superiores, chegando a mais de 50% em alguns períodos sazonais para PW .

4.1.1 Testes de Correlação

Os testes de correlação de Pearson e Spearman foram aplicados para avaliação do grau de correlação entre *PE* e *PW*. Os coeficientes de correlação de Pearson e Spearman são variáveis adimensionais que variam entre -1 e +1, com valores próximos -1 indicando uma forte correlação decrescente e próximos a +1 indicando uma forte correlação crescente. Valores próximos a 0, por vez, indicam a ausência de correlação. O grau de correlação (r) é em alguns casos classificado conforme as seguintes faixas de valores (CALLEGARI-JACQUES, 2005):

- $|r| = 0$: Correlação Nula;
- $0 < |r| \leq 0,3$: Correlação Fraca;
- $0,3 < |r| \leq 0,6$: Correlação Regular;
- $0,6 < |r| \leq 0,9$: Correlação Forte;
- $0,9 < |r| < 1$: Correlação Muito Forte; e
- $|r| = 1$: Correlação Plena ou Perfeita.

Teste de Correlação de Linear de Pearson

O coeficiente de correlação de linear de Pearson mensura o grau de correlação linear de dois pares de dados. O coeficiente de correlação linear de Pearson (ρ) é definido como a covariância normalizada de entre duas variáveis X e Y :

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (67)$$

A hipótese nula do teste é a de não existência de correlação entre as amostras X e Y , ou seja, $H_0: \rho_{X,Y} = 0$. Como não foi assumido que a relação entre *PE* e *PW* é necessariamente crescente ou decrescente, a hipótese alternativa adequada é bilateral: $H_0: \rho_{X,Y} \neq 0$. A estatística de teste é:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \quad (68)$$

A distribuição da estatística nula é uma distribuição T de Student com $n - 2$ graus de liberdade (KIEFER *et al.*, 1964). Sendo assim, o p-valor será:

$$p = 2.P(T > t) \quad (69)$$

onde T segue a distribuição t com $n - 2$ graus de liberdade.

Como o teste de correlação linear de Pearson é paramétrico para variáveis normalmente distribuídas admite-se que os resultados obtidos serão uma aproximação.

Teste de Correlação de Spearman

O coeficiente de correlação de Spearman, por vez, mensura a monotonicidade da relação entre dois conjuntos de dados X e Y . Para uma amostra de tamanho n , os valores medidos das variáveis sendo testadas são nomeados de X_i e Y_i e suas posições (*rank*) de $R(X_i)$ e $R(Y_i)$. O coeficiente de correlação de Spearman (r_s), então, é computado a covariância normalizada dos *ranks* (MYERS *et al.*, 2013):

$$r_s = \frac{Cov(R(X_i), R(Y_i))}{\sigma_{R(X)} \cdot \sigma_{R(Y)}} \quad (70)$$

A hipótese nula do teste é a de não existência de correlação entre os *ranks* de X e Y , ou seja, $H_0: r_s = 0$. Como não foi assumido que a relação entre PE e PW é necessariamente crescente ou decrescente, a hipótese alternativa adequada é bilateral: $H_0: r_s \neq 0$. Similarmente ao teste de correlação linear de Pearson, a estatística de teste é:

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \quad (71)$$

Assintoticamente, a distribuição da estatística nula pode ser aproximada por uma distribuição T de Student com $n - 2$ graus de liberdade (KIEFER *et al.*, 1964). Sendo assim, o p-valor pode ser aproximado por:

$$p = 2.P(T > t) \quad (72)$$

onde T segue a distribuição t com $n - 2$ graus de liberdade.

4.1.2 Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov foi aplicado para verificação da aderência da distribuição de Gumbel aos máximos anuais de *PE* e *PW*. Esse é um teste não paramétrico que testa a diferença máxima entre a FAP populacional assumida $F_X(x)$ e a empírica observada $F_N(x_m)$. Considerando uma amostra com N observações da variável aleatória X , $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, denota-se a sequência ordenada de modo crescente por $\{x_{(1)}, x_{(1)}, \dots, x_{(m)}, \dots, x_{(N)}\}$, em que $m \leq N$ denota a ordem de classificação. A distribuição empírica é definida como (NAGHETTINI e PINTO, 2009):

$$F_N(x_m) = \frac{m}{N} \quad (73)$$

A estatística de teste D_N é a maior diferença entre $F_X(x)$ e $F_N(x_m)$:

$$D_N = \max_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - F_X(x)| \quad (74)$$

A hipótese nula a ser testada é que a distribuição de probabilidades de X é igual a $F_X(x)$, ou seja $H_0: P(X < x) = F_X(x)$. A alternativa, de desigualdade: $H_1: P(X < x) \neq F_X(x)$.

A construção do teste de Kolmogorov-Smirnov assume que os parâmetros da distribuição de $F_X(x)$ são completamente conhecidos, ou seja, de que não foram inferidos a partir de uma amostra. Quando os parâmetros da distribuição são inferidos os valores da estatística de teste devem ser corrigidos. Nesse segundo caso, Crutcher (1975) e Haan (1977) apresentam tabelas de valores críticos da estatística de teste para as distribuições exponencial, gama, normal e Gumbel. O p-valor pode ser aproximado a partir da distribuição de probabilidades da estatística de teste considerada.

4.2 Momentos e Intervalos de Confiança da Precipitação Maximizada

Partindo das definições propostas para o estimador $\hat{P}^*$ do valor da precipitação maximizada, são elaboradas relações para seu valor esperado, variância e coeficiente de variação, bem como para seus intervalos de confiança.

O valor esperado, variância e coeficiente de variação de $\hat{P}^*$ são estimados para quantificação do comportamento geral dessa variável. A partir desses parâmetros

avalia-se a tendência de desenvolvimento do valor estimado e incertezas da precipitação maximizada com o aumento do tamanho da amostra. São calculados a partir dos estimadores de momentos das trajetórias possíveis de $\hat{P}^*$ em função da posição $n = [1, 2, \dots, N]$ na amostra.

Os intervalos de confiança de $\hat{P}^*$ permitem a quantificação de limites de variação da estimativa da chuva maximizada com base em probabilidades definidas. Podem ser obtidos de forma exata a partir da distribuição de probabilidades do produto de PE e PW , ou aproximados pela aplicação da desigualdade de Chebyshev (MOOD *et al.*, 1974).

4.3 Intervalos e Valores dos Recordes da Precipitação Maximizada

Partindo das definições propostas do estimador $\hat{P}^*$ para o valor da precipitação maximizada pelo método da umidade, estima-se as distribuições de probabilidades do intervalo de tempo entre recordes subsequentes e da razão entre os valores desses recordes.

A distribuição de probabilidades do intervalo de tempo entre recordes subsequentes permite avaliar a ocorrência de quebras de recorde do valor calculado da precipitação maximizada durante um período qualquer. Se aplicado no contexto de uma estrutura hidráulica projetada com base em um valor da PMP, permite avaliar a probabilidade do valor calculado da PMP ser modificado durante a vida útil da estrutura, podendo servir como embasamento para avaliação de possíveis custos e riscos inerentes à modificação dessa quantidade. A distribuição de probabilidades do intervalo entre recordes é estimada por extensão dos resultados de tempos de ocorrência de recordes apresentados por Arnold *et al.* (2011), como a contagem de quantas trajetórias superam o valor de $\hat{P}^*$ na posição n até a posição $n + j$ na amostra.

A distribuição de probabilidades da razão entre dois recordes subsequentes e seu valor esperado permitem avaliar a grandeza do aumento do valor de $\hat{P}^*$ em caso de ocorrência de recordes. No contexto de uma estrutura hidráulica é fundamental para interpretação da relevância da probabilidade de ocorrência de majoração no valor calculado da PMP, tendo em vista que pequenas majorações podem ser irrelevantes, enquanto majorações suficientemente grandes podem causar necessidade de

intervenção na estrutura em questão. É estimada pelo processo de Monte Carlo proposto, como a contagem de quantas das trajetórias nas quais ocorre majoração do valor de $\hat{P}^*$ entre duas posições na amostra n e $n + j$ é maior que um valor qualquer.

4.4 Estudo de Caso

A metodologia proposta e resultados obtidos foram aplicados para quantificação das incertezas na estimativa da PMP no município de Belo Horizonte, capital de Minas Gerais. O município foi selecionado em função da familiaridade do autor com o clima regional, disponibilidade de estudos de na área e existência de uma estação meteorológica do INMET (Código INMET 83587) com 57 anos de medições consideradas válidas de PE e PW (Ver Item 5).

5 ESTRUTURAÇÃO DA BASE DE DADOS

Para validação das premissas assumidas para modelagem dos máximos anuais de PE e PW, primeira etapa da metodologia proposta, em conjunto de consulta à literatura científica, faz-se uso de evidência empírica. Para obtenção dessa evidência, foi necessária a utilização de base de dados das variáveis climáticas envolvidas no cálculo da PMP. No presente item, apresenta-se os procedimentos seguidos para seleção, obtenção e consistência dessa base de dados.

5.1 Seleção e Obtenção da Base de Dados

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), fundado em 1909, promove a coleta, consistência e divulgação de informações meteorológicas em âmbito nacional. Por meio do portal digital INMET (portal.inmet.gov.br - Acesso em 01/10/2023), o órgão disponibiliza imagens de satélite com monitoramento de precipitação em tempo real, bem como previsão de temperatura, precipitação, entre outros. Através da plataforma BDMEP (Banco de Dados Meteorológicos do INMET para Ensino e Pesquisa), o instituto permite o *download* de todos os dados de monitoramento das estações climatológicas consolidadas pelo órgão.

No portal BDMEP, são disponibilizados os históricos de medição de postos meteorológicos do INMET, convencionais e automáticos. Para as estações automáticas, são disponibilizadas medições horárias no período máximo de 2000 a 2023, totalizando até 23 anos. Para as convencionais, são disponibilizadas três medições diárias no período máximo de 1961 a 2023, totalizando até 62 anos. Optou-se pela utilização dos dados das estações convencionais, tendo em vista a disponibilidade de amostras de máximos anuais com período de observação mais longo.

Na base de dados são disponíveis 658 estações convencionais, cuja distribuição espacial entre as regiões brasileiras é a apresentada na Tabela 2. A fim de possibilitar o uso de um maior número de dados disponíveis por estação, optou-se em não realizar um recorte temporal unificando todas as estações, ou seja, o comprimento da série histórica avaliada é variável de acordo com os dados disponíveis por estação pluviométrica (SABINO e MACEDO, 2019).

Tabela 2 – Quantidade de estações convencionais disponíveis no BDMEP por região brasileira.

Região	Número estações convencionais
Sudeste	279
Nordeste	139
Sul	117
Norte	65
Centro-Oeste	58

Para as estações convencionais, são disponibilizadas medições de CH (Nuvens Altas), CL (Nuvens Baixas), CM (Nuvens Medias), Nebulosidade, Precipitação Total, Pressão Atmosférica ao Nível da Estação, Temperatura do Ar do Bulbo Seco, Temperatura do Ar do Bulbo Úmido, Direção do Vento, Velocidade do Vento e Visibilidade nas horas de 00:00, 12:00, e 18:00. Disponibiliza-se também valores calculados de Pressão Atmosférica ao Nível do Mar, Umidade Relativa do Ar e Temperatura do Ponto de Orvalho. A Figura 9 apresenta exemplo de formulário de requisição de dados, indicando os campos para seleção de tipo de dado e variáveis desejadas.

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA

Email:

Tipo de Pontuação:

☐ Virgula

☒ Ponto

Tipo de Dados:

☒ Dados Horários

☐ Dados Diários

☐ Dados Mensais

Tipo de Estação:

☐ Automáticas

☒ Convencionais

Abrangência:

☒ País

☐ Região

Data Início:

Data Fim:

Variáveis ▼

☐ Selecionar Todas as Variáveis

- ☐ CH (NUVENS ALTAS)
- ☐ CL (NUVENS BAIXAS)
- ☐ CM (NUVENS MEDIAS)
- ☐ NEBULOSIDADE, HORARIA
- ☐ PRECIPITACAO TOTAL, HORARIO
- ☐ PRESSAO ATMOSFERICA AO NIVEL DA ESTACAO, HORARIA
- ☐ PRESSAO ATMOSFERICA AO NIVEL DO MAR, HORARIA
- ☐ TEMPERATURA DO AR - BULBO SECO, HORARIA
- ☐ TEMPERATURA DO AR - BULBO UMIDO, HORARIA
- ☐ TEMPERATURA DO PONTO DE ORVALHO
- ☐ UMIDADE RELATIVA DO AR, HORARIA
- ☐ VENTO, DIRECAO HORARIA
- ☐ VENTO, VELOCIDADE HORARIA
- ☐ VISIBILIDADE, HORARIA

Figura 9 – Formulário de requisição de dados da plataforma BDMEP (adaptado de bdmep.inmet.gov.br - acesso em 01/10/2023).

Conforme procedimento estabelecido na literatura para cálculo da massa de água precipitável (Item 3.4), essa quantidade é computada como uma função da temperatura do ponto de orvalho e da pressão atmosférica na superfície. Conforme apresentado na Figura 9, ambas variáveis são diretamente disponibilizadas pelo BDMEP. A temperatura de ponto de orvalho, entretanto, é uma variável calculada que nem sempre é disponibilizada em todas as estações, mesmo que ocorram medições das variáveis necessárias para calculá-la. Sendo assim, ela foi calculada a partir das informações de temperatura do ar do bulbo seco e de umidade relativa do ar, conforme procedimento também apresentado no Item 3.4. O cálculo da massa de água precipitável (W) a partir das variáveis disponíveis de pressão atmosférica (P_0), temperatura do bulbo seco (T) e umidade relativa do ar (h) é ilustrado esquematicamente na Figura 10.

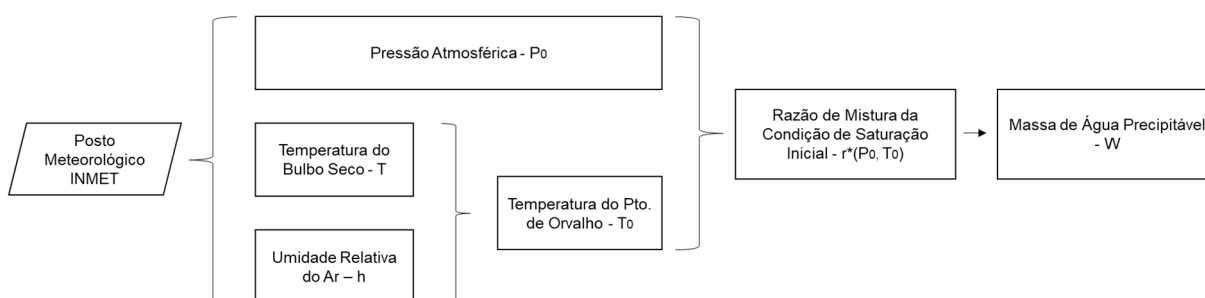


Figura 10 – Representação esquemática do procedimento de cálculo da massa de água precipitável na atmosfera.

Para obtenção da massa de água precipitável máxima de referência de um dia (W) computam-se as temperaturas de ponto de orvalho de cada medição (00:00, 12:00 e 18:00), a partir das quais é selecionada a temperatura de ponto de orvalho persistente por 12 horas máximas de cada dia. Para cada dia, então, computa-se um valor para a massa de água precipitável W . Se houver precipitação (P) em um dia, a eficiência dessa precipitação será $PE = P/W$. A eficiência de precipitação máxima de um período sazonal de um ano qualquer será o valor máximo de PE calculado para aquela estação naquele ano. A massa de água máxima de referência (PW) de cada estação em um ano, igualmente, será a maior massa de água precipitável W calculada para aquele período naquele ano.

De forma análoga à proposta por Alaya *et al.* (2018) foram considerados 4 períodos sazonais: Primavera (out, nov e dez), Verão (jan, fev e mar), Outono (abr, mai e jun) e Inverno (jul, ago, set) para definição os valores de referência de PE_s e PW_s . Assumiu-

se que o ano hidrológico inicia no equinócio de primavera, ou seja, no início da estação sazonal da primavera, tipicamente classificada como o início do período chuvoso no Brasil (DA COSTA, 2014).

Partindo das definições acima enumeradas, que foram embasadas nos referenciais bibliográficos apresentados no Item 3.4, a base de dados foi estruturada conforme seguinte procedimento (ver Figura 11). Para cada uma das 658 estações coletadas, calcula-se o valor da temperatura de ponto de orvalho persistente por 12 horas de cada dia. Calcula-se então a massa de água precipitável e, se houve precipitação, a eficiência de precipitação daquele dia. Agrupando-se os valores calculados de PE e PW para cada estação, calculam-se os valores máximos observados em cada ano.

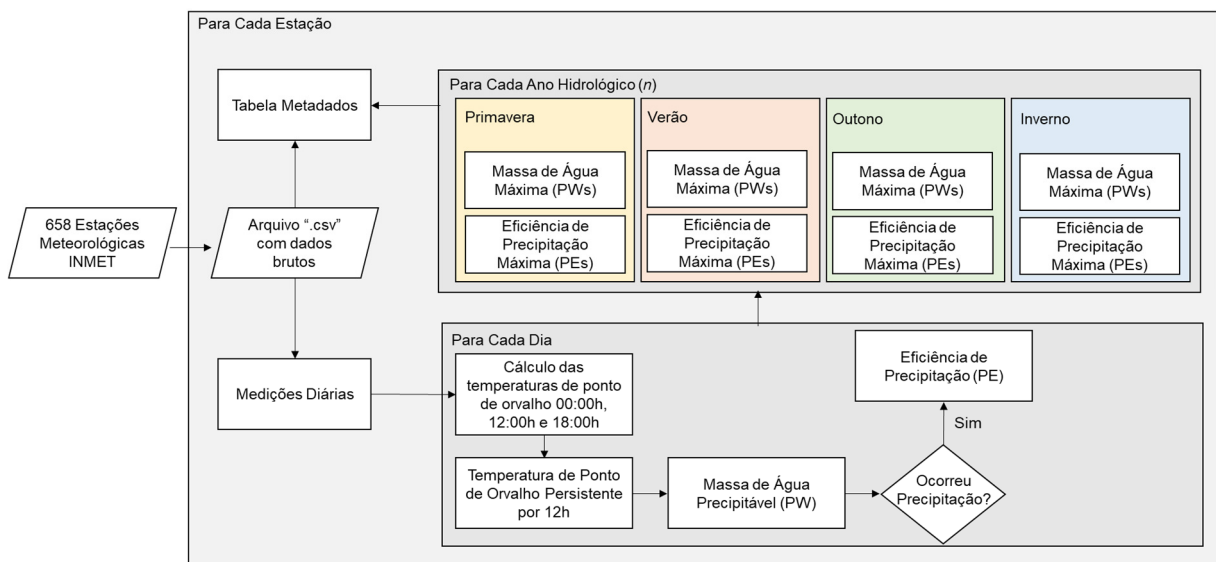


Figura 11 – Representação esquemática do procedimento de cálculo de PE e PW.

Nota-se que, em caso de ocorrência de uma falha em qualquer uma das variáveis necessárias para cálculo de *PE* e *PW* o valor computado também será nulo. Exclusivamente na ocorrência de falhas na medição de pressão, essa foi substituída pela pressão média naquela estação sazonal.

5.2 Consistência da Base de Dados

5.2.1 Critérios de Eliminação de Anos Hidrológicos

A base de dados do INMET possui algumas falhas de medição, que podem impedir o cálculo de uma ou mais das variáveis estudadas. Como esse estudo objetiva a análise

dos máximos anuais sazonais de *PE* e *PW*, toda vez que ocorre uma falha na medição de uma das variáveis necessárias para calculá-las, é possível que tenha sido perdida a medição máxima daquele ano. Por esse motivo, quando utilizadas bases de dados com a presença de falhas de medição para estudo de máximos, é de praxe o estabelecimento de critérios para seleção de anos hidrológicos adequados para desenvolvimento dos estudos. A sistemática completa de tratamento da base de dados é apresentada de forma esquemática na Figura 12, e descrita a seguir.

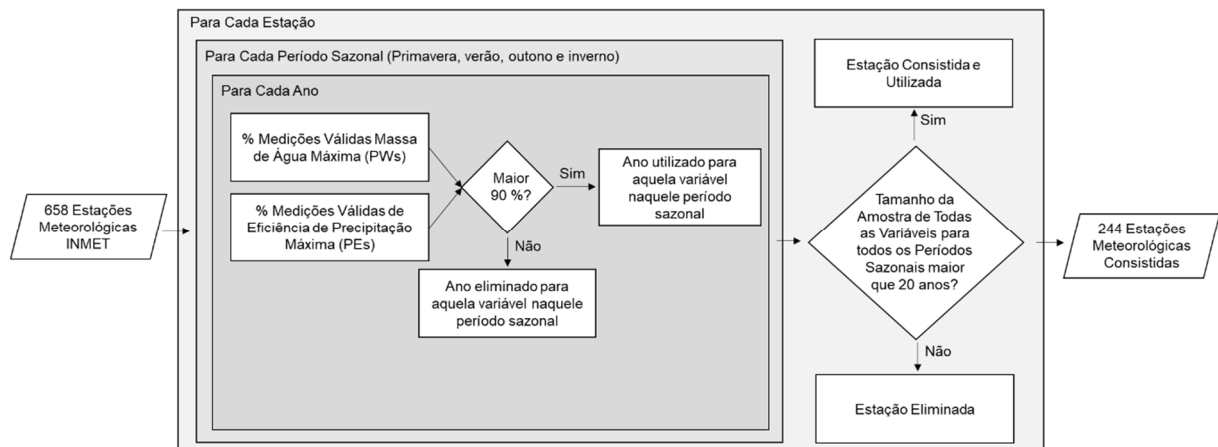


Figura 12 – Representação esquemática do procedimento de consistência da base de dados.

No trabalho de Da Costa (2014), realiza-se a seleção e consistência de séries hidrológicas de valores máximos anuais de vazão média diária em escala nacional para fim da avaliação das distribuições de probabilidades mais adequadas para modelagem dessa variável. Nesse trabalho, a autora nota três possíveis abordagens para a consistência de dados de máximos anuais propostas por Papalexiou e Koutsoyiannis (2013). São elas: 1 – o estabelecimento e aplicação de critérios para validação de máximos selecionados; 2 – a seleção de máximos associados exclusivamente a anos hidrológicos completos e; 3 – a seleção dos máximos de todos os anos.

Cada uma dessas alternativas tem suas vantagens e desvantagens. Na segunda, é garantido que nenhum máximo anual foi perdido, porém, a depender da frequência de falhas na base de dados, boa parte da informação disponível pode ser descartada. Na terceira, nenhum dado disponível é descartado, mas a depender da frequência de falhas na base de dados, é provável que alguns dos reais máximos tenham sido perdidos. A alternativa 1, por vez, é um meio-termo entre as duas, permitindo ao

elaborador do estudo selecionar critérios mais adequados às características da base de dados sendo avaliada.

Sendo assim, optou-se pelo estabelecimento de critério para seleção dos máximos anuais, definido a partir do impacto observado na quantidade de dados perdidos. O critério aplicado foi de eliminação de anos hidrológicos com menos de 90% de medições válidas, aplicado separadamente a cada variável (*PE* e *PW*) em cada período sazonal. Para seleção do valor de corte avaliou-se a distribuição de frequência de falhas amostrada, apresentada na Figura 13. A aplicação do critério de corte selecionado resulta na eliminação de cerca de 50% dos anos disponíveis para cada período sazonal e variável. Esse valor foi selecionado com o intuito de buscar um equilíbrio entre a quantidade de dados descartados e a redução da probabilidade de seleção de anos com falha de medição no dia do máximo. Observa-se que dos 50% dos dados eliminados, mais de 20% são advindos de estações que não possuíam sequer um ano com dados suficientes para cálculo de uma ou ambas as variáveis de interesse.

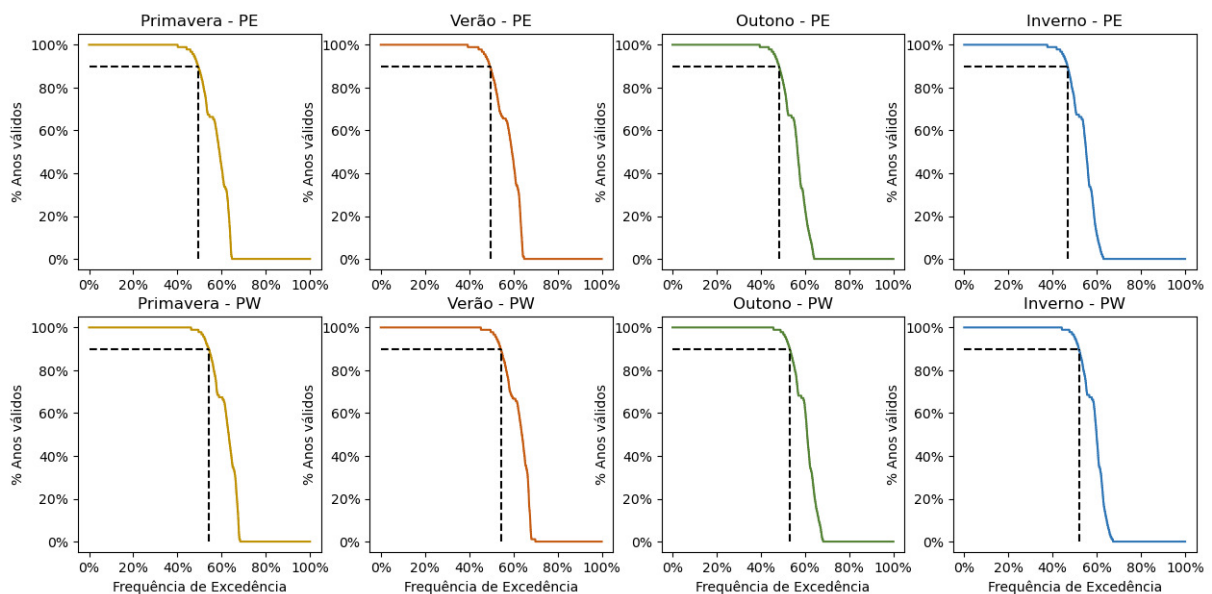


Figura 13 – Porcentagem de dados válidos por ano hidrológico por período sazonal para PE e PW. Em cada coluna, um período sazonal. Em cada linha, uma variável.

Nota-se que, mesmo que se tratando de uma mesma estação de medição, é possível que certos períodos sazonais sejam eliminados em um ano e outros não. Da mesma forma, pode ser que um período sazonal de um certo ano seja eliminado para uma

variável, mas não para outra, resultando no maior aproveitamento possível dos dados disponíveis.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados da aplicação dos filtros propostos à base de dados. Observa-se que são eliminados entre 46 % e 53 % dos anos hidrológicos disponíveis a depender da variável e período sazonal em avaliação. Na Figura 14, por vez, apresenta-se a curva de permanência dos comprimentos de séries disponíveis após remoção dos anos com falhas acima do critério estabelecido para cada um dos períodos sazonais de *PE* e *PW*. Observa-se que os comprimentos de série remanescentes variam entre 60 e 0 anos, com cerca de 20% das estações não apresentando ano algum utilizável para análise.

Tabela 3 – Número de anos-estação removidos durante o tratamento dos dados

Estação	Variável	Quantidade Inicial		Quantidade Removida		Quantidade Restante	
		n°	%	n°	%	n°	%
Primavera	PE	23.658	100 %	11.962	51 %	11.696	49%
	PW	23.658	100 %	10.817	46 %	12.841	54%
Verão	PE	23.977	100 %	12.092	50 %	11.885	50%
	PW	23.977	100 %	10.926	46 %	13.051	54%
Outono	PE	23.963	100 %	12.373	52 %	11.59	48%
	PW	23.963	100 %	11.202	47 %	12.761	53%
Inverno	PE	23.902	100 %	12.718	53 %	11.184	47%
	PW	23.902	100 %	11.488	48 %	12.414	52%

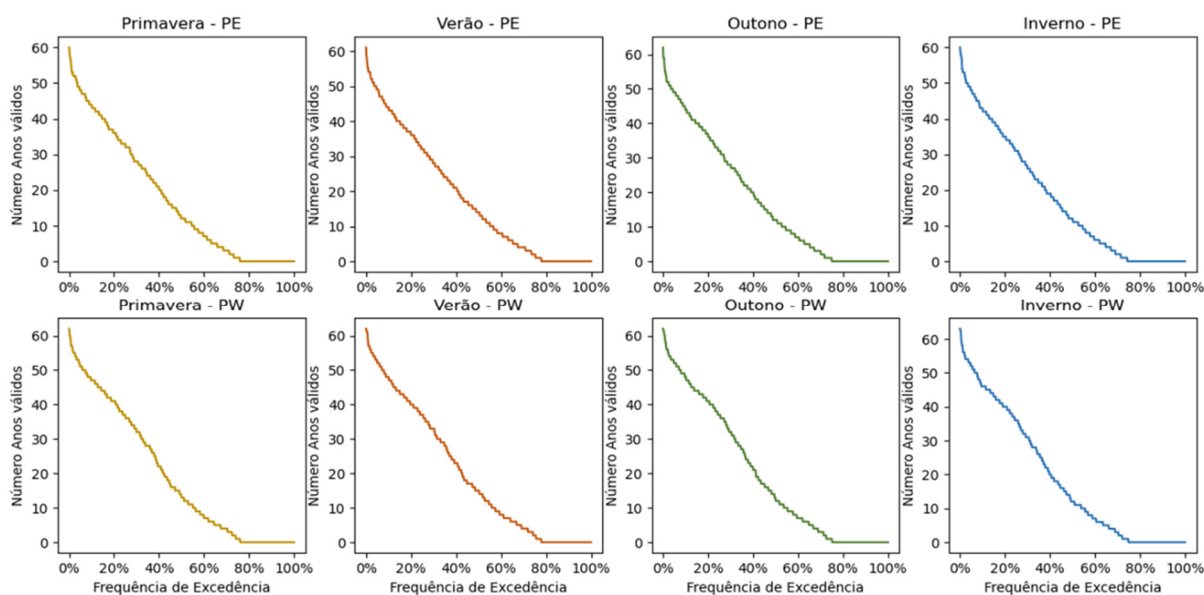


Figura 14 – Número de anos válidos por período sazonal para PE e PW. Em cada coluna, um período sazonal. Em cada linha, uma variável.

5.2.2 Critérios de Eliminação de Postos de Medição

Outro critério aplicado para filtragem de consistência da base de dados foi relativo à seleção de um tamanho de amostra mínimo admissível para desenvolvimento do estudo. A aplicação desse critério objetiva limitar as incertezas inerentes ao processo de inferência de parâmetros. Como para cada posto climatológico são inferidos parâmetros das distribuições de *PE* e *PW* para cada período sazonal, para tomada de decisão acerca da eliminação ou não da estação em questão considera-se a menor das amostras disponíveis de cada variável em cada período sazonal. Na Figura 15, apresenta-se a curva de permanência dos tamanhos de amostra mínimos disponíveis em cada posto meteorológico. O comprimento de série mínimo de 20 anos, representado na figura, foi selecionado buscando garantir o equilíbrio entre o número de estações eliminadas e a representatividade dos dados consistidos. Com a aplicação desse critério, 414 dos 658 postos totais foram descartados (63 %), restando 244 postos com mais de 20 anos com pelo menos 90% de valores válidos de *PE* e *PW* para todos os períodos sazonais.

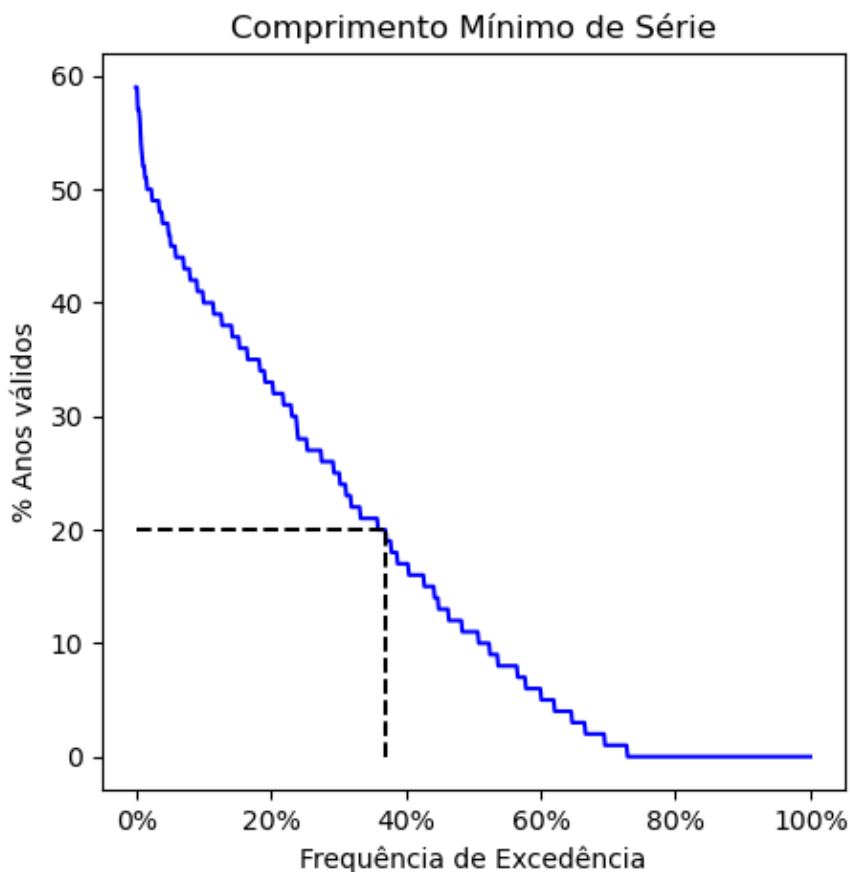


Figura 15 – Número de anos válidos mínimos em todos os períodos sazonais de *PE* e *PW*.

Na Figura 16, apresenta-se a distribuição das estações meteorológicas coletadas do BDMEP. As estações descartadas ao longo do processo de consistência da base de dados são representadas com um símbolo de “x”, enquanto as estações selecionadas são coloridas conforme o comprimento mínimo de série disponível.

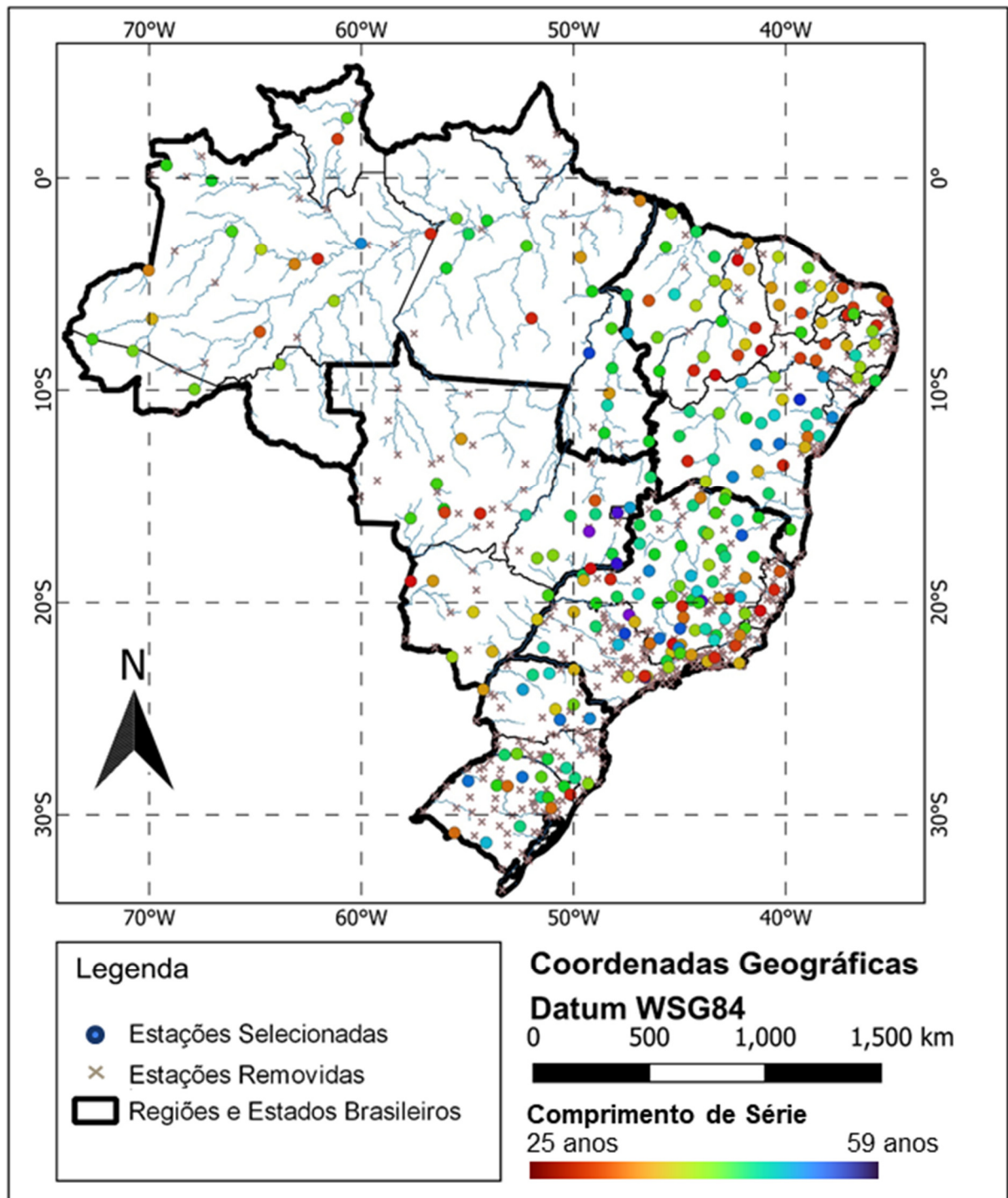


Figura 16 - Distribuição espacial e comprimentos de série mínimos das estações climatológicas consistidas.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A apresentação e discussão dos resultados inicia-se com uma avaliação do comportamento dos máximos anuais de PE e PW , seguida da modelagem dessas variáveis. Feito isso, procede-se com a avaliação dos intervalos de confiança e probabilidade de ocorrência de recordes no valor estimado da precipitação maximizada. Por fim, é apresentado um estudo de caso para a cidade de Belo Horizonte.

Na Figura 17, são apresentadas as médias sazonais dos máximos anuais de PE e PW para todas as estações meteorológicas consistidas, computadas a partir da média das médias sazonais de cada estação. Da análise da figura constata-se que de fato parece existir um comportamento sazonal dos valores de PE e PW que, aparentemente, é mais pronunciado para a eficiência de precipitação (PE). Ambas as variáveis tendem a ser mais elevadas no período mais quente do ano (primavera e verão) e mais reduzidas no período mais frio (outono e inverno), ou seja, as precipitações na estação quente do ano tendem a ser mais eficientes e ter maior disponibilidade de umidade. Como $PE = P/W$, constata-se que o efeito sazonal na precipitação (P) parece ser mais pronunciado que na temperatura do ponto de orvalho e, consequentemente, no valor da massa de água precipitável (W , ou PW), justificando os valores de PE relativamente mais elevados se comparados aos de PW nos períodos de primavera e verão.

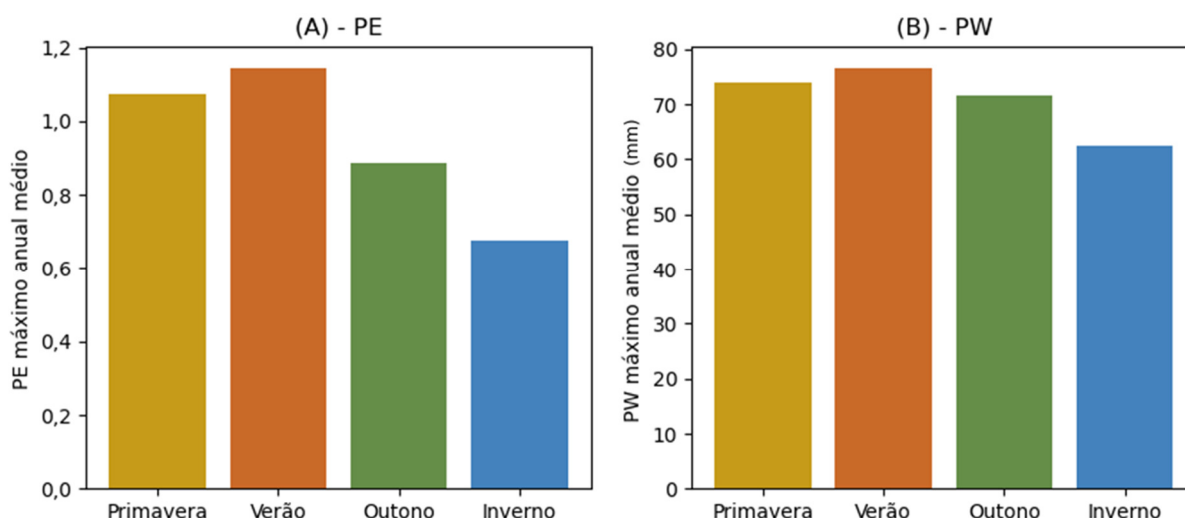


Figura 17 – Médias dos valores máximos anuais de PE e PW por período sazonal de todas as estações meteorológicas. (A) PE . (B) PW .

A aplicação do teste não paramétrico de Kruskal-Wallis (bilateral – ver OSTERTAGOVA *et al.* 2014) e a um nível de significância de 5% para comparação múltipla dos valores sazonais de *PE* e *PW* resulta em rejeição da hipótese nula em ambos os casos. Sendo assim, as diferenças entre os períodos sazonais podem ser consideradas significantes. Essa breve verificação encontra-se em alinhamento com a recomendação da WMO (2009) de segregação dos períodos sazonais para cálculo da PMP.

O simples fato de existirem diferenças sazonais entre as estações do ano nos valores médios dos máximos anuais de *PE* e *PW*, entretanto, não é suficiente para justificar a modelagem dessas diferenças no momento do cálculo da PMP como recomendado pela WMO (2009). Conforme será discutido ao longo do trabalho, a separação do ano hidrológico em vários períodos sazonais tende a minorar o valor calculado da PMP, já que não é considerada a ocorrência concomitante de máximos observados em períodos sazonais distintos. Demonstra-se, também, que a precipitação maximizada obtida sem a consideração de subdivisões sazonais será sempre maior ou igual à estimada com base em subdivisões. Estudos adicionais nessa linha são recomendados com o objetivo de avaliar os impactos causados pelo aumento ou redução do número de períodos sazonais considerados no resultado obtido para a chuva maximizada.

6.1 Modelagem dos Máximos Anuais de *PE* e *PW*

Para modelagem dos máximos anuais de *PE* e *PW* são avaliados o grau de dependência entre os máximos anuais dessas variáveis e a aderência das amostras disponíveis à distribuição de Gumbel. Os resultados obtidos servirão como embasamento para aplicação das soluções analíticas e processo de Monte Carlo propostos.

O primeiro passo na avaliação foi aplicar os testes selecionados de correlação de Pearson e Spearman aos pares de *PE* e *PW* máximos anuais de cada período sazonal de cada estação climatológica. Na Tabela 4, apresenta-se a contagem e frequência de rejeição dos testes para cada um dos períodos sazonais avaliados, bem como mediana do p-valor e das estatísticas de testes resultantes. Na Figura 18, por vez,

apresenta-se histograma da estatística de teste para cada variável para cada período sazonal para cada teste.

Tabela 4 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman aos máximos anuais de PE e PW de cada uma das 244 estações selecionadas.

Período Sazonal	Teste	Número de Rejeições	Frequência de Rejeição	P-Valor mediano	Estatística mediana
Primavera	Pearson	20	8,20 %	0,47	-0,01
	Spearman	23	9,43 %	0,48	0,00
Verão	Pearson	17	6,97 %	0,46	-0,02
	Spearman	23	9,435 %	0,45	0,00
Outono	Pearson	26	10,66 %	0,45	0,00
	Spearman	26	10,66 %	0,44	0,02
Inverno	Pearson	37	15,16 %	0,42	0,01
	Spearman	53	21,72 %	0,36	0,13

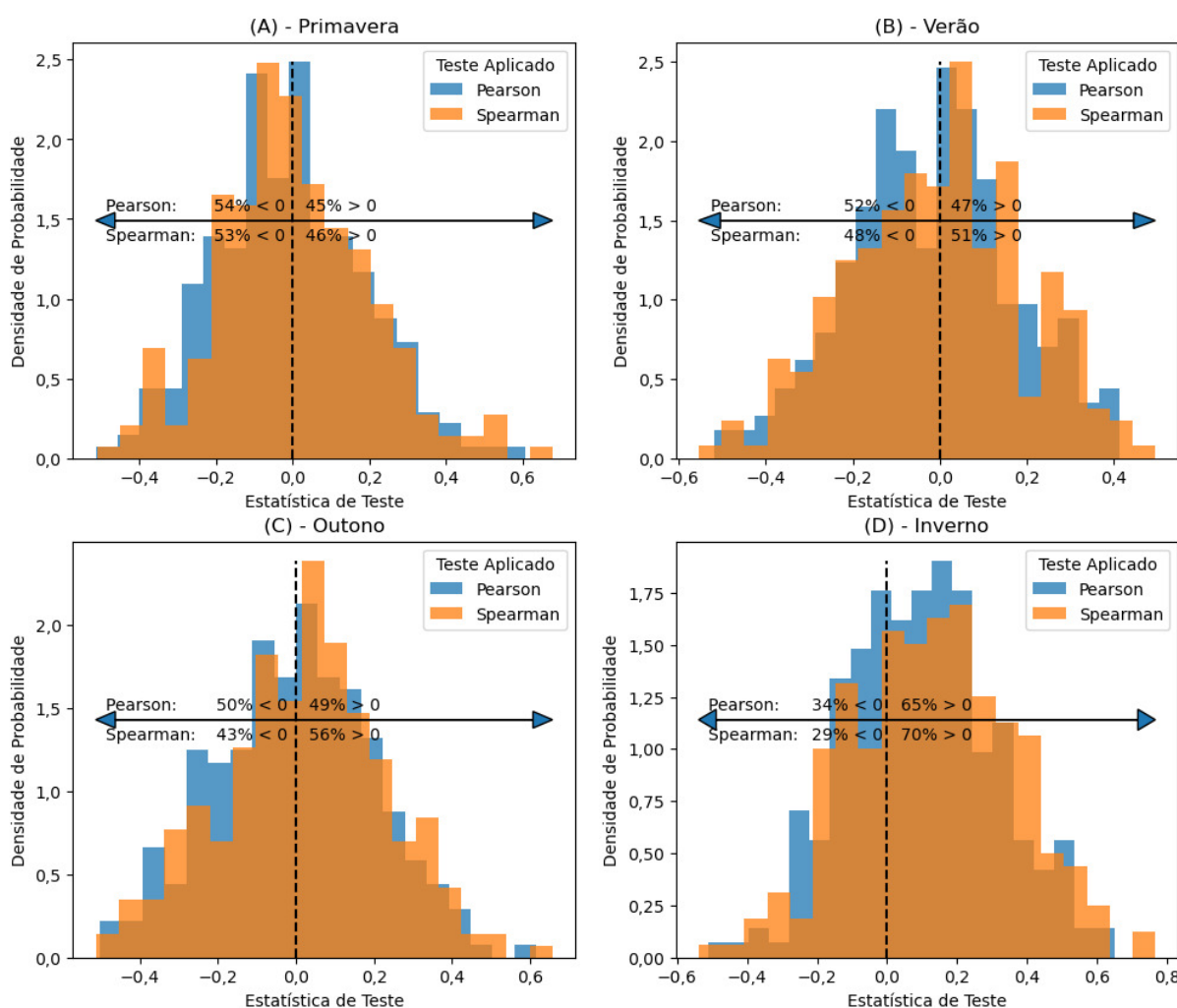


Figura 18 – Histogramas da estatística de teste dos testes de correlação de Pearson e Spearman aplicados aos pares de PE e PW em cada período sazonal. (A) Primavera. (B) Verão. (C) Outono. (D) Inverno.

Na Tabela 4 observam-se frequências de rejeição da hipótese nula de não correlação entre as variáveis variando entre cerca de 7% e 10% na primavera e verão e variando

entre cerca de 10 e 20% no outono e inverno. Sendo assim, assumindo que a probabilidade de rejeição da hipótese nula de independência é de 5%, os resultados apontam no sentido de existência de correlação entre os máximos anuais *PE* e *PW* em algumas das estações, especialmente no outono e inverno. Considerando que o p-valor de um teste não paramétrico (Spearman) é somente uma aproximação da probabilidade de rejeição da hipótese nula e que a aplicação do teste paramétrico de Pearson a uma amostra não normal também resultará em resultados aproximados, os resultados tornam-se menos conclusivos.

Em análise à Figura 18, observa-se que cerca de 50% dos valores da estatística de teste foram positivos e 50% negativos. Sendo assim, mesmo que existam indícios de uma correlação entre *PE* e *PW*, os coeficientes de Pearson e Spearman não são eficientes o suficiente para distinguir o sentido dessa possível correlação no nível de uma única estação. A conclusão, portanto, parece clara: por mais que existem indícios de correlação entre *PE* e *PW*, ao nível de uma estação as informações disponíveis são insuficientes para definição da grandeza dessa correlação.

Como uma avaliação adicional, assumindo uma premissa de homogeneidade das distribuições de máximos de *PE* e *PW* entre as várias estações climatológicas, apresenta-se na Figura 19 a distribuição amostral conjunta dos pares de máximos dessas variáveis unindo as amostras de todas as estações meteorológicas em uma única para cada período sazonal. Na Tabela 5, por vez, são apresentados os resultados da aplicação dos testes de correlação propostos a essas amostras unificadas de *PE* e *PW*.

Tabela 5 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman à totalidade dos pares de máximos anuais de *PE* e *PW*.

Período Sazonal	Teste	Estatística de Teste	p-valor	Resultado
Primavera	Pearson	-0,19	~ 0	Rejeição
	Spearman	-0,22	~ 0	Rejeição
Verão	Pearson	-0,15	~ 0	Rejeição
	Spearman	-0,15	~ 0	Rejeição
Outono	Pearson	-0,15	~ 0	Rejeição
	Spearman	-0,08	~ 0	Rejeição
Inverno	Pearson	-0,21	~ 0	Rejeição
	Spearman	-0,16	~ 0	Rejeição

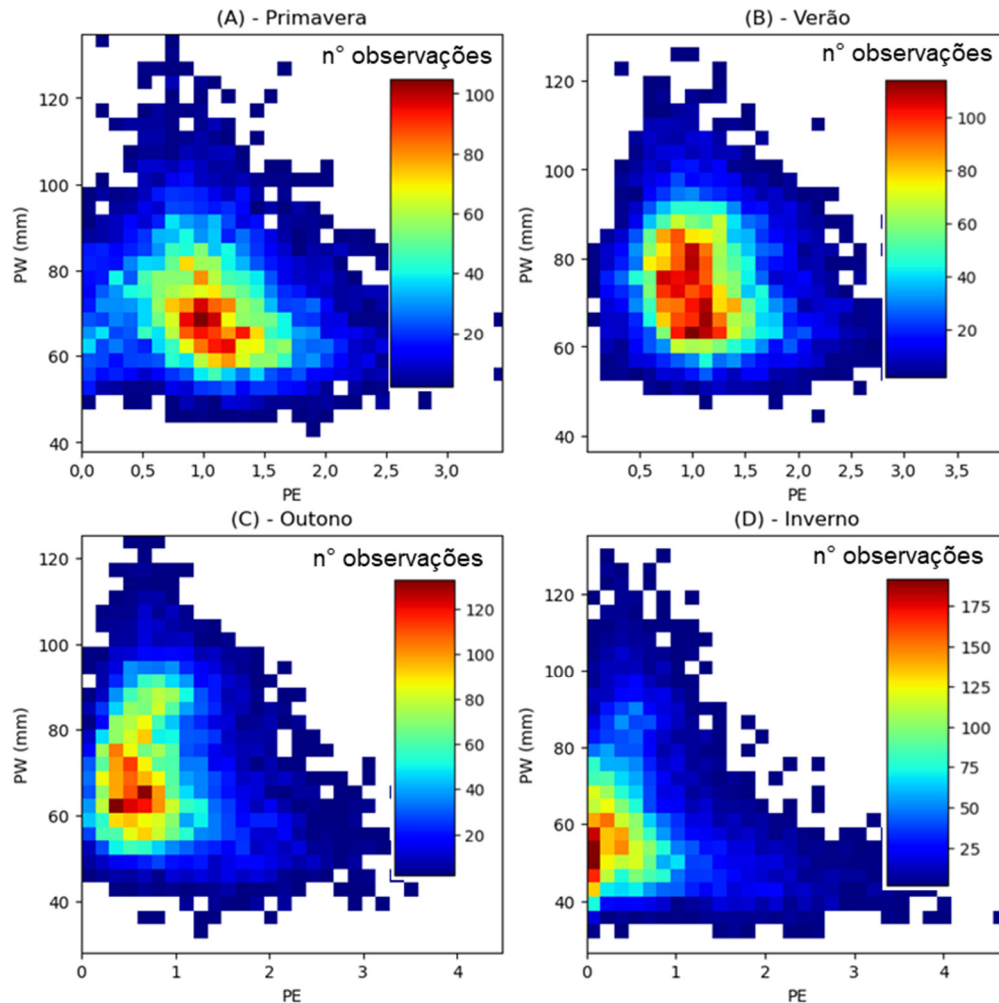


Figura 19 – Mapa de calor dos pares de máximos anuais de PE e PW em todas as estações meteorológicas. (A) Primavera. (B) Verão. (C) Outono. (D) Inverno.

Para a amostra unificada de todas as estações meteorológicas, observa-se que há evidências significativas para rejeição da hipótese nula de desconexão dos pares de máximos anuais de *PE* e *PW* para todos os períodos sazonais, com estatísticas de teste da ordem de -0,1 a -0,2. Essas estatísticas de testes são indicativas de uma fraca correlação entre as variáveis (CALLEGARI-JACQUES, 2005), em concordância com os resultados obtidos por Alaya *et al.* (2018), que indicam a existência de uma correlação “relaxada” entre as variáveis. Novamente, conclui-se que, apesar de existirem indícios de correlação entre os pares de máximos anuais de *PE* e *PW*, especialmente quando considerada uma amostra unificada em escala nacional, ao nível de uma estação as informações disponíveis são insuficientes para quantificação dessa correlação. Sendo assim, a modelagem dessa correlação ao nível de uma estação parece inviável, principalmente dado que os testes de correlação indicam correlação positiva em cerca de 50% dos casos e negativa nos outros 50%.

Novamente, os resultados indicam a existência de uma correlação negativa entre PW e PE , ou seja, que a concomitância dos máximos amostrais de PE e PW é menos provável que a de duas variáveis independentes quaisquer. Esse resultado encontra-se em alinhamento com os achados de Alaya *et al.* (2018). Diferentemente do trabalho desses autores, entretanto, as correlações observadas nas estações meteorológicas do INMET parecem apresentar maior variabilidade que as observadas no modelo de circulação global considerado por Alaya *et al.* (2018), que comentam observar uma preponderância de correlações negativas entre as variáveis. Esse ponto justifica a principal diferença entre a modelagem aqui desenvolvida e a recomendada por Alaya *et al.* (2018), de consideração de dependência entre PE e PW . Sendo assim, o modelo proposto se comportará como o modelo de cópula comonotônica proposta por Alaya *et al.* (2018), modelo o qual os autores comentam tender a estimar valores mais elevados da precipitação maximizada, já que tende a estimar frequências de concomitância dos máximos de PE e PW mais elevadas.

Estabelecida a premissa de independência dos máximos anuais de PE e PW , aplica-se o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov para validação do ajuste da distribuição de Gumbel às amostras dos máximos anuais validados. Na Tabela 6 apresenta-se o número e frequência de rejeições do teste de aderência aplicado a PE e PW em cada um dos períodos sazonais, bem como as medianas dos respectivos p-valores. Em análise aos resultados, observa-se frequência de rejeição da hipótese nula entre 0,82 % e 5,74 %, com p-valores medianos variando de 0,55 a 0,77. Em linhas gerais, como os testes foram aplicados a um nível de significância de 5%, as frequências de rejeição inferiores a 5,00 %, exceto no inverno para PE , são indicativos da distribuição de Gumbel ser adequada para modelagem dos máximos de PE e PW . Novamente, reitera-se que os p-valores são apenas uma aproximação da probabilidade de rejeição da hipótese nula. Independentemente, os resultados são considerados suficientemente indicativos da qualidade de ajuste da distribuição de Gumbel aos dados coletados.

Tabela 6 – Resultados da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov para validação do ajuste da Distribuição de Gumbel aos máximos anuais de PE e PW.

Variável	Período Sazonal	Número de Rejeições	Frequência de Rejeição	p-valor mediano
PE	Primavera	2	0,82 %	0,74
	Verão	3	1,23 %	0,77
	Outono	1	0,41 %	0,77
	Inverno	14	5,74 %	0,64
PW	Primavera	9	3,69 %	0,57
	Verão	6	2,46 %	0,61
	Outono	7	2,87 %	0,55
	Inverno	8	3,28 %	0,59

6.2 Momentos e Intervalos de Confiança

Estabelecidas a premissa de independência entre os máximos anuais de *PE* e *PW* e validada a qualidade do ajuste da distribuição de Gumbel a esses máximos, inicia-se a modelagem probabilística da precipitação maximizada. Conforme mostrado na Equação (61), a precipitação maximizada de um período sazonal pode ser representada como o produto do máximo amostral de duas variáveis aleatórias. Diante desse paradigma, a precipitação maximizada também pode ser considerada uma variável aleatória, cujo comportamento probabilístico pode ser avaliado a partir das características das distribuições de probabilidades de *PE* e *PW*.

O próximo passo do trabalho, então, foi a tentativa de representação do comportamento probabilístico do estimador da precipitação maximizada por meio do cálculo de sua distribuição de probabilidades exata, que pode ser utilizada diretamente para cálculo dos intervalos de confiança e momentos. Assumindo a independência de *PE* e *PW*, as técnicas descritas no Item 3.7 podem ser aplicadas para obtenção da distribuição exata de $\hat{P}_s^*$. Se os valores máximos anuais de *PE* e *PW* em um período sazonal, PE_s e PW_s , distribuem-se como variáveis de Gumbel, suas FAP's serão conhecidas.

A distribuição de probabilidades do máximo (Y_n) de uma amostra de n variáveis Gumbel (X_i) pode ser obtida. Se a FAP de X é dada por $F_X(x)$, então a FAP de $Y = \text{MAX}[X_1, \dots, X_n]$, pode ser obtida pela união de todos os eventos $Y_n \geq X_i$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq Y) \\
&= \prod_{i=1}^n F_X(y) \\
&= \exp \left[-n \cdot \exp \left(\frac{y - \beta}{\alpha} \right) \right] \\
&= \exp \left\{ -\exp \left[\frac{y - [\beta + \alpha \cdot \ln(n)]}{\alpha} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{75}$$

que nada mais é uma variável Gumbel: $Y \sim \text{Gumbel}(\beta + \alpha \cdot \ln(n), \alpha)$. Consequentemente, sua FDP será:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{y - [\beta + \alpha \cdot \ln(n)]}{\alpha} \cdot \exp \left\{ -\frac{y - [\beta + \alpha \cdot \ln(n)]}{\alpha} \right\} \right\} \tag{76}$$

A FDP do produto das variáveis $\text{MAX}(\{PE_s\}_n)$ e $\text{MAX}(\{PW_s\}_n)$ pode ser obtida pela convolução de Mellin das FDP's das duas variáveis (EPSTEIN, 1948). A transformada de Mellin da porção positiva da FDP do máximo amostral (Y_n) de uma variável Gumbel é obtida por:

$$\begin{aligned}
M(f_Y(y)|s)^+ &= \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{y - [\beta + \alpha \cdot \ln(n)]}{\alpha} \cdot \exp \left\{ -\frac{y - [\beta + \alpha \cdot \ln(n)]}{\alpha} \right\} \right\} dy
\end{aligned} \tag{77}$$

para a qual não foram encontradas soluções analíticas. O mesmo procedimento foi testado para as distribuições Normal, Exponencial e Gama, resultando na mesma limitação.

A distribuição Log-normal também se mostra promissora para obtenção da distribuição do produto do máximo de duas amostras, já que o produto de duas variáveis log-normais é também uma variável log-normal. A distribuição de

probabilidades do máximo (Y_n) de uma amostra de n variáveis Log-Normais (X_i) pode ser obtida. Se a FAP de X é dada por:

$$F_X(x) = \Phi \left[\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(x)}}{\sigma_{\ln(x)}} \right] \quad (78)$$

então a FAP de $Y = \text{MAX}[X_1, \dots, X_n]$, pode ser obtida pela união de todos os eventos $Y_n \geq X_i$. Ou seja:

$$F_Y(y) = [F_X(x)]^n = \left\{ \Phi \left[\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(x)}}{\sigma_{\ln(x)}} \right] \right\}^n \quad (79)$$

nesse caso:

$$f_Y(y) = \frac{n}{x \cdot \sigma_{\ln(x)} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ \Phi \left[\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(x)}}{\sigma_{\ln(x)}} \right] \right\}^{n-1} \cdot \exp \left(-\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(x)}}{2 \cdot \sigma_{\ln(x)}} \right) \quad (80)$$

Da Equação (80), observa-se que Y não é uma variável log-normal, sendo perdida a propriedade de interesse.

Tentativas adicionais foram desenvolvidas aplicando-se a transformação logarítmica, bem como pela aplicação direta da definição dos produtos e somas das variáveis aleatórias enumeradas. Em todos os casos, a obtenção de uma solução analítica para a distribuição de probabilidades de $\hat{P}_S^*$ foi frustrada pelas integrais resultantes.

Nota-se que não foi elaborada prova formal da não existência de soluções analíticas para as integrais necessárias para obtenção da distribuição do produto do máximo de duas variáveis aleatórias. De um ponto de vista prático, entretanto, a partir das técnicas de integração dominadas pelo autor e utilização de softwares de matemática computacional como a versão gratuita do *software Mathematica* e a biblioteca *Simpy* (ver wolfram.com e simpy.readthedocs.io – acesso em 01/10/2023) não foi possível obter soluções analíticas para essas integrais.

Apesar de não ter sido possível obter expressão exata para a distribuição de probabilidades de $\hat{P}_S^*$ a partir das técnicas testadas, uma aproximação da probabilidade do estimador ser maior ou menor que um certo quantil x pode ser obtida

de forma análoga à proposta por Salas *et al.* (2014) pela desigualdade de Chebyshev (MOOD *et al.*, 1974):

$$P[E(\hat{P}_s^*) - c \cdot Var(\hat{P}_s^*) < x < E(\hat{P}_s^*) + c \cdot Var(\hat{P}_s^*)] \geq 1 - \frac{1}{c^2} \quad (81)$$

Partindo dessa relação, para um dado valor de c a distância entre os intervalos de confiança é:

$$[(\hat{P}_s^*) + c \cdot Var(\hat{P}_s^*)] - [E(\hat{P}_s^*) - c \cdot Var(\hat{P}_s^*)] = 2 \cdot c \cdot Var(\hat{P}_s^*) \quad (82)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} Var[\hat{P}_s^*] \rightarrow \infty$ (Ver item 6.2.1 - Momentos), para qualquer valor de c diferente de zero, a distância dos intervalos de confiança de $\hat{P}_s^*$ tenderá ao infinito de forma monotônica crescente para $n \rightarrow \infty$. Adicionalmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} CV[\hat{P}_s^*] \rightarrow 0$ (Ver item 6.2.1 - Momentos), a razão entre distância entre os intervalos de confiança e o valor esperado da estimativa da precipitação maximizada tenderá a zero. Em concordância com os valores de $Var[\hat{P}_s^*]$ e $CV[\hat{P}_s^*]$ obtidos mais à frente nesse trabalho, constata-se que a diferença entre os intervalos de confiança superior e inferior de $\hat{P}_s^*$ tende a aumentar com o aumento do tamanho da amostra. Essa distância, porém, tende a aumentar numa taxa mais reduzida que o valor esperado da precipitação maximizada. Sendo assim, apesar de não ocorrer uma convergência dos valores calculados com o aumento da amostra, o desvio desses em relação à média torna-se arbitrariamente reduzido com o aumento do tamanho da amostra. Ressalta-se o resultado é consequência direta da modelagem de PE e PW por uma distribuição sem limite superior.

Estimados os valores de P_s^* para S estações sazonais distintas, o valor da precipitação maximizada para fim de análises em base anual (P^*) é:

$$P^* = \max[P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*, \dots, P_S^*] \quad (83)$$

sendo assim,

$$P(\hat{P}^* > x) = P(\max[P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*, \dots, P_S^*] > x) \quad (84)$$

Consequentemente, a distribuição de probabilidades do estimador $\hat{P}^*$ pode ser obtida a partir das distribuições de probabilidade de cada um dos períodos sazonais:

$$F_{\hat{P}^*}(x) = \prod_{s=1}^S F_{\hat{P}_s^*}(x) \quad (85)$$

Como não foi obtida solução para $F_{\hat{P}_s^*}(x)$, não foi encontrada solução para $F_{\hat{P}^*}(x)$.

6.2.1 Momentos da Precipitação Maximizada

Partindo da Equação (61), o valor esperado do estimador da precipitação maximizada sazonal $\hat{P}_s^*$ é dado por:

$$E[\hat{P}_s^*] = E[\max(\{PE_s\}_n) \cdot \max(\{PW_s\}_n)] \quad (86)$$

Assumindo a independência de PE e PW :

$$E[\hat{P}_s^*] = E[\max(\{PE_s\}_n)] \cdot E[\max(\{PW_s\}_n)] \quad (87)$$

Assumindo que PE e PW são variáveis aleatórias Gumbel com média da variável μ e parâmetro de forma α^2 conhecidos, tem-se (TEEGAVARAPU *et al.*, 2019):

$$E[\max(X)] = \mu_X + \alpha_X \cdot \ln(n) \quad (88)$$

Logo, por fim:

$$E[\hat{P}_s^*] = [\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot \ln(n)] \cdot [\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot \ln(n)] \quad (89)$$

Observa-se que o valor esperado de $\hat{P}_s^*$ tende a infinito quando o tamanho da amostra utilizado n tende para o infinito. Esse comportamento é esperado e é função direta da adoção da distribuição de Gumbel para modelagem de PE e PW . Como uma variável Gumbel não possui limite superior, o valor máximo de uma amostra de tamanho arbitrariamente grande também não terá. Conforme Koutsoyiannis e Papalexiou (2014) constataram, não parece haver evidências da existência de limites superiores para a precipitação. Sendo assim, a adoção de uma metodologia resulta em estimativas sem limite superior é coerente. Esse resultado também demonstra a

adequação da metodologia proposta ao conceito de uma estimativa operacional da PMP, que deve representar um evento de reduzida probabilidade de superação, e não como um estimador do limite superior da chuva.

Desenvolvendo ainda mais a Equação (89), a derivada parcial do valor esperado em relação ao tamanho da amostra toma forma:

$$\frac{\partial E[\hat{P}_s^*]}{\partial n} = \frac{\alpha_{PW_s}}{n} [\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot \ln(n)] + \frac{\alpha_{PE_s}}{n} [\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot \ln(n)] \quad (90)$$

que tende para zero com o aumento de n em direção ao infinito. Quando dividida por $\ln(n)/n$, por vez, tende para um valor constante com o aumento de n :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial E[\hat{P}_s^*]}{\partial n}}{\frac{\ln(n)}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha_{PW_s}}{n} [\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot \ln(n)] + \frac{\alpha_{PE_s}}{n} [\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot \ln(n)]}{\frac{\ln(n)}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{PW_s} \left[\frac{\mu_{PE_s}}{\ln(n)} + \frac{\alpha_{PE_s} \cdot \ln(n)}{\ln(n)} \right] + \alpha_{PE_s} \left[\frac{\mu_{PW_s}}{\ln(n)} + \frac{\alpha_{PW_s} \cdot \ln(n)}{\ln(n)} \right] \quad (91) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{PW_s} \cdot \mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot \mu_{PW_s}}{\ln(n)} + \alpha_{PW_s}^2 \cdot \alpha_{PE_s}^2 \\ &= \alpha_{PW_s}^2 \cdot \alpha_{PE_s}^2 \end{aligned}$$

Da Equação (91) nota-se que a Equação (90) tende para zero para valores de n suficientemente grandes a uma taxa de $\ln(n)/n$. Consequentemente, apesar do valor esperado da precipitação maximizada sazonal tender para o infinito com o aumento da amostra, a taxa de aumento tende a zero. Essa constatação reforça a importância do uso de amostras suficientemente grandes recomendada por WMO (2009), já que a taxa de variação do valor esperado da precipitação maximizada tende a reduzir com o aumento da amostra. Essa tendência de redução da taxa de aumento do valor esperado da precipitação maximizada será diretamente refletida na probabilidade de

ocorrência de recordes nessa variável, que será explorada mais a frente nesse trabalho.

De forma análoga, para a variância:

$$Var[\hat{P}_s^*] = Var[\max(\{PE_s\}_n) \cdot \max(\{PW_s\}_n)] \quad (92)$$

Assumindo independência de PE e PW :

$$\begin{aligned} Var[\hat{P}_s^*] = & E[\max(\{PE_s\}_n)]^2 \cdot Var[\max(\{PW_s\}_n)] \\ & + E[\max(\{PW_s\}_n)]^2 \cdot Var[\max(\{PE_s\}_n)] \\ & + Var[\max(\{PW_s\}_n)] \cdot Var[\max(\{PE_s\}_n)] \end{aligned} \quad (93)$$

Conforme Teegavarapu *et al.* (2019), para a Distribuição de Gumbel:

$$Var[\max(X)] = \sigma_X^2 \quad (94)$$

logo:

$$\begin{aligned} Var[\hat{P}_s^*] = & \sigma_{PW_s}^2 (\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot \ln(n)) \\ & + \sigma_{PE_s}^2 (\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot \ln(n)) + \sigma_{PW_s}^2 \sigma_{PE_s}^2 \end{aligned} \quad (95)$$

De forma análoga ao apresentado para o valor esperado, a variância do estimador $\hat{P}_s^*$ também tende ao infinito, demonstrando que o aumento do tamanho da amostra não necessariamente resulta em uma redução das incertezas associadas à estimativa da PMP. Novamente, deve ser reconhecido que o resultado é consequência direta da adoção da distribuição de Gumbel. Caso selecionada uma distribuição com limite superior, é evidente que a variância tenderia para zero.

Desenvolvendo ainda mais a Equação (95), a derivada parcial da variância em relação ao tamanho da amostra toma forma:

$$\frac{\partial Var[\hat{P}_s^*]}{\partial n} = \frac{\sigma_{PW_s}^2 \cdot \alpha_{PE_s} + \sigma_{PE_s}^2 \cdot \alpha_{PW_s}}{n} \quad (96)$$

Que tende para zero para valores de n suficientemente grandes a uma taxa de $1/n$. Sendo assim, apesar da variância tender para o infinito, ela tende a variar uma taxa cada vez menor, com assíntota horizontal em zero. Novamente, reitera-se a importância da utilização de uma amostra suficientemente grande.

Também pertinente para a avaliação do nível de incerteza associada à estimativa da precipitação maximizada que o valor do valor esperado e variância é o coeficiente de variação CV de $\hat{P}_s^*$:

$$CV[\hat{P}_s^*] = \frac{\sqrt{Var[\hat{P}_s^*]}}{E[\hat{P}_s^*]} \quad (97)$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma_{PW_s}^2 (\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot Ln(n)) + \sigma_{PE_s}^2 (\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot Ln(n))}}{[\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot Ln(n)] \cdot [\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot Ln(n)]}$$

que simplifica para:

$$CV[\hat{P}_s^*] = \frac{\sigma_{PW_s}}{\sqrt{[\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot Ln(n)] \cdot [\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot Ln(n)]}} \quad (98)$$

$$+ \frac{\sigma_{PE_s}}{[\mu_{PE_s} + \alpha_{PE_s} \cdot Ln(n)] \cdot \sqrt{[\mu_{PW_s} + \alpha_{PW_s} \cdot Ln(n)]}}$$

Observa-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} CV[\hat{P}_s^*] \rightarrow 0$, com $CV[\hat{P}_s^*]$ decrescendo de forma monotônica com o aumento de n . Sendo assim, constata-se que o coeficiente de variação de $\hat{P}_s^*$ tende a reduzir com o aumento do tamanho da amostra. Apesar da variância de $\hat{P}_s^*$ tender para o infinito com o aumento da amostra, seu coeficiente de variação tende para zero. Esse comportamento pode ser interpretado como uma consequência de o valor esperado tender para o infinito mais rapidamente que a variância ($Ln(n)/n > 1/n \forall n > e$). Consequentemente, apesar de crescer com o tamanho da amostra, a variância torna-se arbitrariamente reduzida quanto comparada ao valor esperado para valores suficientemente elevados de n . Novamente, ressalta-se o resultado é consequência direta da modelagem de PE e PW por uma distribuição sem limite superior. Se ambas as variáveis fossem modeladas com limite superior, conforme já

discutido, a variância do estimador $\hat{P}_s^*$ tenderia para zero e, por consequência, $CV[\hat{P}_s^*]$ também.

Para a PMP obtida pelo Método de Hershfield (PMP Estatística), Salas *et al.* (2014) obtêm as seguintes relações para o valor esperado e variância, assumindo valor do fator de frequência K de Hershfield (HERSHFIELD, 1961) constante:

$$E[\hat{P}] = \mu + K \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)/2} \cdot \Gamma[(n-1)/2]} \sigma \quad (99)$$

$$Var[\hat{P}] = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{n \cdot K^2 \cdot f_n}{2(n-1)} + 1,084 \left[\frac{n \cdot K^2 \cdot f_n}{2(n-1)} \right]^{1/2} \right) \quad (100)$$

em que:

- μ e σ^2 denotam a média e variância da precipitação máxima anual; e
- f_n denota fator de correção para modelagem da covariância entre a média e variância amostral da distribuição de Gumbel a partir da mesma relação para a Normal, tabelado em Salas *et al.* (2014) para valores variáveis de n .

Da Equação (99), observa-se que para um valor constante de K o valor esperado da PMP pelo Método de Hershfield tende para um valor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{P}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu + K \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)/2} \cdot \Gamma[(n-1)/2]} \sigma = \mu + K \cdot \sigma \quad (101)$$

Enquanto, da Equação (100), observa-se que a variância tende para 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var[\hat{P}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{n \cdot K^2 \cdot f_n}{2(n-1)} + 1,084 \left[\frac{n \cdot K^2 \cdot f_n}{2(n-1)} \right]^{1/2} \right) = 0 \quad (102)$$

Sendo assim, observa-se que as incertezas inerentes à estimativa da PMP Estatística parecem possuir limites de variação bem definidos e necessariamente menores que os da PMP Hidrometeorológica para amostras suficientemente grandes.

Para o estimador da PMP Estatística Salas *et al.* (2014) constatam que o valor esperado das estimativas converge para $\mu + K.\sigma$ e a variância para zero. Se comparados aos resultados obtidos, percebe-se uma diferença significativa entre o comportamento assintótico dos dois métodos, já que, independentemente do comportamento caudal da precipitação, o estimador da PMP Estatística convergirá para um valor finito com variância zero, enquanto o comportamento do estimador avaliado para a PMP Hidrometeorológica dependerá do comportamento caudal assumido de PE e PW . Se se assumido que PE e PW possuem limite superior, o comportamento do estimador proposto da PMP Hidrometeorológica será similar ao modelado por Salas *et al.* (2014) para a PMP Estatística, convergindo para um valor único com variância zero. Se assumido que PE e PW não possuem limite superior, entretanto, o estimador da precipitação maximizada tenderá a ter valor esperado e variância arbitrariamente maiores quanto maior a amostra.

Esses resultados são consequência de a PMP estimada pelo Método de Hershfield ser função da média e variância amostrais, que tendem respectivamente para a média populacional e zero com o aumento da amostra. Nesse ponto, vale constatar que Salas *et al.* (2014) assumem um valor constante do coeficiente K de Hershfield. Esse coeficiente, entretanto, também é sujeito a análise estatística da envoltória de recordes das precipitações observadas. Sendo assim, essa comparação até então elaborada não deve ser tratada como uma representação completa das diferenças entre os comportamentos assintóticos dos dois métodos, já que o comportamento assintótico do valor de K com o aumento da amostra também influenciará, de forma não avaliada, o valor estimado da PMP Estatística.

Até então, foram discutidas as características da precipitação maximizada de um único período sazonal s . Conforme denotado na Equação (62), entretanto, a precipitação maximizada, aqui denotada por P^* , é calculada a partir do máximo dos S períodos sazonais. Sendo assim, o valor esperado do estimador $\hat{P}^*$ pode ser computado a partir do valor esperado do máximo dos S períodos sazonais, ou seja:

$$E[\hat{P}^*] = E[\max(P_1^*, P_2^*, \dots, P_S^*, \dots, P_S^*)] \quad (103)$$

que não pôde ser obtido diretamente por propriedades do valor esperado, devendo ser computado pela transformação integral. Novamente, como não foi encontrada solução analítica para a distribuição de probabilidades de $\hat{P}_s^*$, os esforços para obtenção de soluções para o valor esperado de $\hat{P}^*$ são frustrados. Como não foi possível obter soluções analíticas, esse parâmetro foi estimado pelo processo de simulação em conjunto do estudo de caso. Para tal, sintetiza-se M séries sintéticas para cada um dos períodos sazonais e, para cada $n < N$ calcula-se o valor de P^* daquela trajetória m , e seu valor esperado como a média das M trajetórias.

Nota-se, entretanto, que se feita a estimativa da precipitação de referência sem realização de subdivisões sazonais, denotada por P_{total}^* , se obtém um limite superior para a distribuição de probabilidades da precipitação maximizada:

$$P(\hat{P}^* > x) \leq P(\max(\{PE\}).\max(\{PW\}) > x) \quad (104)$$

E que um limite inferior pode ser obtido a partir do valor da precipitação de referência de um período sazonal qualquer s :

$$P(\hat{P}^* > x) \geq P(\max(\{PE\}_s).\max(\{PW\}_s) > x) \quad (105)$$

Em outras palavras, para uma trajetória qualquer do processo:

$$P_s^* \leq P^* \leq P_{total}^* \quad (106)$$

Sendo assim, o comportamento do valor esperado de $\hat{P}^*$ pode ser avaliado a partir da Equação (107):

$$E[\hat{P}_s^*] \leq E[\hat{P}^*] \leq E[\hat{P}_{total}^*] \quad (107)$$

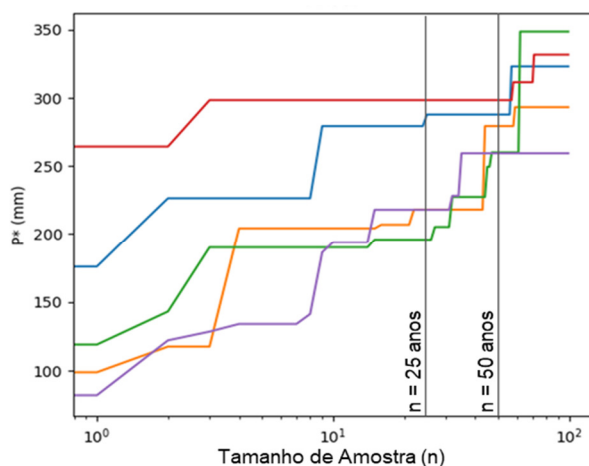
Como o $P_s^* \leq P^*$, o mesmo será válido para os valores esperados: $E[\hat{P}_s^*] \leq E[\hat{P}^*]$. Consequentemente, o valor esperado de P^* também tenderá ao infinito com o suficiente aumento do tamanho da amostra. A variância do máximo de S variáveis aleatórias, entretanto, não é necessariamente maior que a variância de cada uma delas. Sendo assim não são obtidas relações como a de apresentada na Equação (107) para $Var[\hat{P}^*]$ e $CV[\hat{P}^*]$.

Os valores não encontrados analiticamente de $E[\hat{P}^*]$, $Var[\hat{P}^*]$ e $CV[\hat{P}^*]$ serão estimados a partir do cálculo da média, desvio padrão e coeficiente de variação das M trajetórias no processo de simulação na posição $n \leq N$. Aplicação das relações analíticas aqui obtidas serão apresentadas em conjunto com o estudo de caso no item 7, no qual os resultados de suas aplicações em uma situação prática serão discutidos mais a fundo.

6.3 Tempos e Valores Recordes

Conforme Alaya *et al.* (2018), se assumida a independência dos máximos anuais de PE e PW , o valor calculado da precipitação maximizada pode ser representado como o produto do máximo amostral de duas variáveis aleatórias PE e PW (Equação (66)). Sendo assim, sempre que ocorrer um valor recorde na sequência de observações de uma dessas variáveis, ocorrerá um recorde da precipitação maximizada do período sazonal em questão.

Assumindo que os máximos anuais de PE e PW de cada período sazonal são variáveis aleatórias Gumbel, é possível avaliar possíveis trajetórias dessas variáveis e, a partir delas, realizar a contagem de avaliação de valores dos recordes da precipitação maximizada. Na Figura 20, apresenta-se exemplo de algumas possíveis trajetórias anuais do valor da precipitação maximizada, sintetizadas a partir do processo de Monte Carlo proposto para os parâmetros de posição e forma de PE e PW estimados no estudo de caso (ver Item 7 - ESTUDO DE CASO):



Trajetoória	$P^*(25)$ (mm)	$P^*(50)$ (mm)	Ocorre recorde ?	$\frac{P^*(50)}{P^*(25)}$
1	287,71	287,71	Não	1,00
2	217,99	279,23	Sim	1,28
3	195,77	259,94	Sim	1,33
4	298,23	298,23	Não	1,00
5	217,81	259,29	Sim	1,19

Figura 20 – Exemplo de processo de quebra de recorde da precipitação maximizada para 5 trajetórias sintéticas.

Na Figura 20, observa-se que dentre as 5 trajetórias representadas, o valor calculado da precipitação maximizada com base em uma amostra de 25 observações foi modificado em 3 casos com o aumento da amostra para 50 observações. O presente item se propõe a trazer equacionamento para a probabilidade de ocorrência desses recordes, bem como para a distribuição de probabilidades do aumento dessa possível majoração ($P^*(50)/P^*(25)$, no exemplo). Quando não encontradas soluções analíticas para os problemas em questão, o processo de Monte Carlo proposto será utilizado para aproximá-las.

Como exemplo adicional do processo de quebra de recordes do valor calculado da precipitação maximizada, na Figura 21 (A) apresenta-se duas possíveis trajetórias de 50 anos de comprimento de P^* geradas aleatoriamente com base nos parâmetros de posição e forma de PE e PW estimados no estudo de caso (ver ver Item 7 - ESTUDO DE CASO). A partir do final dessas trajetórias ($n = 50$), são plotadas 2.500 possíveis trajetórias do desenvolvimento do valor de P^* ao longo dos próximos 50 anos. Em (B), por vez, apresenta-se a distribuição de probabilidades amostral do valor de P^* em cada uma das 2.500 trajetórias geradas no ano $n = 100$ para cada condição inicial. Da marcação na Figura 21, observa-se que, para a trajetória inferior, cujo processo de quebra de recordes é representado em vermelho, ocorreu modificação do valor da precipitação maximizada em 48% dos casos, enquanto na trajetória superior, em azul, ocorreu menor frequência de modificação da precipitação maximizada, de 16%.

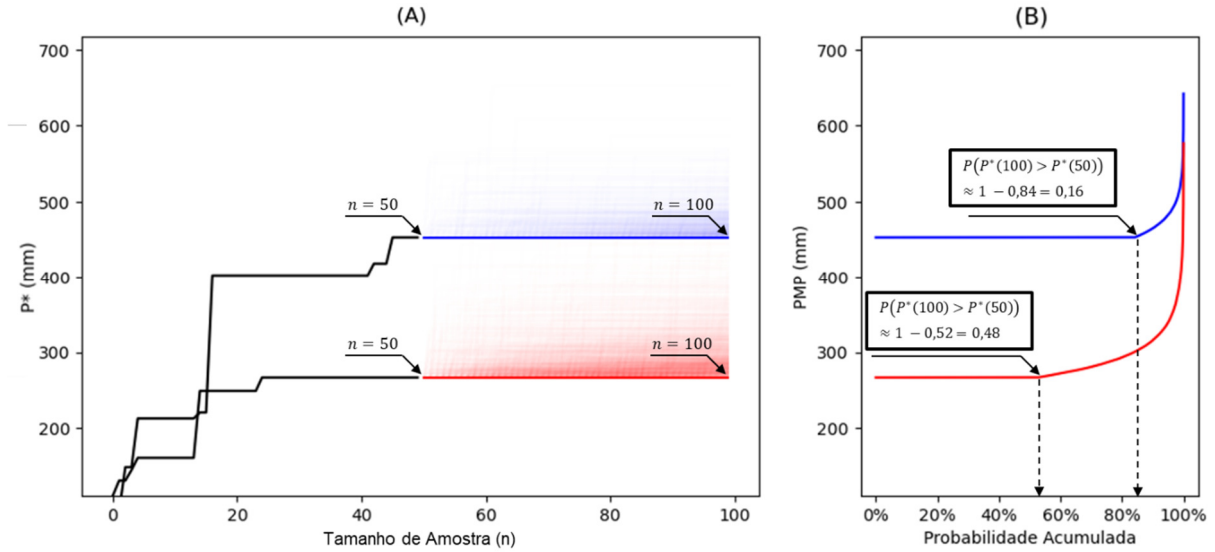


Figura 21 – Exemplo de aproximação da probabilidade de atualização e da distribuição de probabilidades de uma possível majoração da precipitação maximizada ao final de 50 anos. Apresentados exemplos simplificados que ilustram o raciocínio a ser desenvolvido, procede-se com o cálculo formal das soluções propostas.

6.3.1 Tempo de Ocorrência dos Registros da Precipitação Maximizada

Conforme discutido, sempre que ocorrer um recorde de PE ou de PW ocorrerá um recorde na precipitação maximizada. Para P_s^* , que é o produto de duas variáveis PE_s e PW_s assumidas independentes, se denotada a ocorrência de um recorde da variável X na posição n por $I_{n,X}$:

$$I_{n,P_s^*} = 1 \Leftrightarrow I_{n,PE_s} = 1 \cup I_{n,PW_s} = 1 \quad (108)$$

Segue que:

$$P(I_{n,P_s^*} = 1) = P(I_{n,PE_s} = 1) + P(I_{n,PW_s} = 1) - P(I_{n,PE_s} = 1 \cap I_{n,PW_s} = 1) \quad (109)$$

$$P(I_{n,PE_s} = 1 \cap I_{n,PW_s} = 1) = P(I_{n,PE_s} = 1) \cdot P(I_{n,PW_s} = 1) \quad (110)$$

Logo:

$$P(I_{n,P_s^*} = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \quad (111)$$

Por raciocínio análogo ao de Arnold *et al.* (2011), partindo das propriedades da distribuição binomial, segue que:

$$E[N_{n,P_S^*}] = E\left[\sum I_n\right] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{j} - \frac{1}{j^2}\right) \quad (112)$$

$$Var[N_{n,P_S^*}] = Var\left[\sum I_n\right] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{j} - \frac{1}{j^2}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{j} - \frac{1}{j^2}\right)\right] \quad (113)$$

Na Figura 22, são apresentadas curvas características de $E(N_{n,P_S^*})$, $E(N_{n,P_S^*}) + Var(N_{n,P_S^*})$ e $E(N_{n,P_S^*}) - Var(N_{n,P_S^*})$ para valores de n entre 1 e 1.000. Se comparados os resultados acima com os apresentados no Item 3.6.1 - Tempo de Ocorrência de Recordes, observa-se que o valor esperado e variância do número de recordes da precipitação maximizada em um período sazonal é maior que o de PE e PW para um mesmo valor de n . Esse resultado é esperado, já que ocorre um recorde na precipitação maximizada sempre que ocorrem recordes em uma ou ambas as variáveis utilizadas para seu cálculo. Em uma primeira análise, essa parece ser um possível aspecto negativo do método da precipitação da umidade, já que as modificações do valor calculado da precipitação maximizada, utilizada no cálculo da PMP, são relativamente mais frequentes que as de PE e PW . Essa maior frequência de quebra de recordes, por outro lado, pode acarretar uma mais rápida convergência do valor calculado da precipitação maximizada quando comparada a uma variável aleatória, já que, conforme mostrado na Equação (40), a probabilidade de ocorrência de um novo recorde é inversamente proporcional ao número de recordes k já observados.

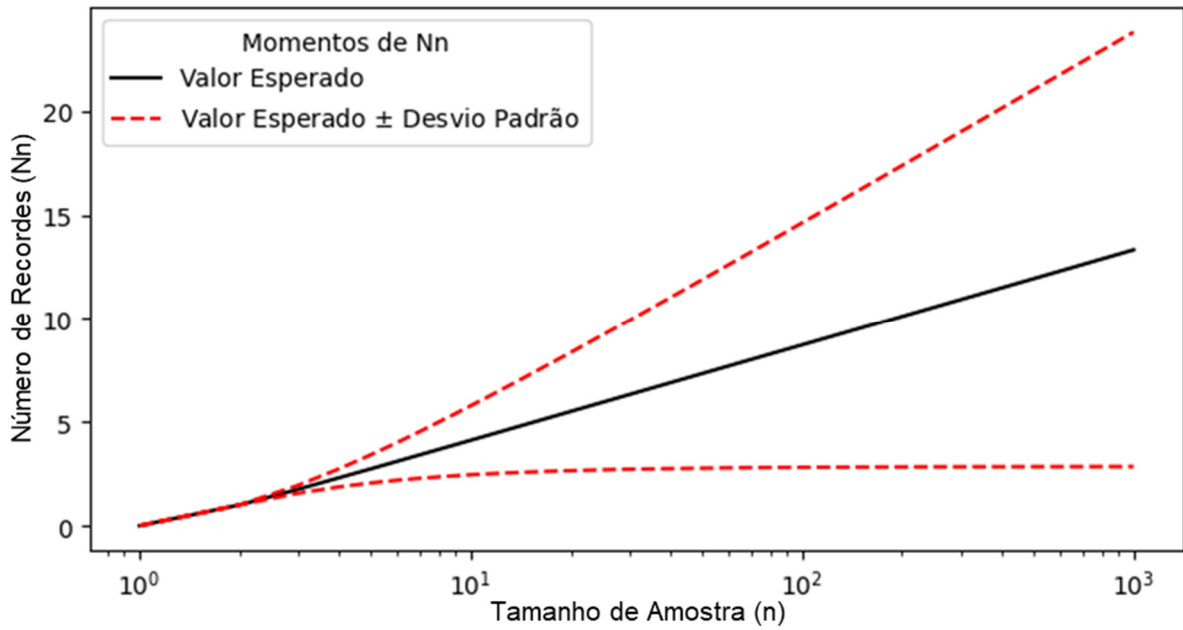


Figura 22 – Valores de $E(N_{n,P_S^*})$, $E(N_{n,P_S^*}) + DP(N_{n,P_S^*})$ e $E(N_{n,P_S^*}) - DP(N_{n,P_S^*})$.

A probabilidade do intervalo entre os registros (Δ_{N_n}) de P_S^* ser superior a um valor j pode ser denotada como função do número de registros (N_n) até a posição n , tal que:

$$\Delta_{N_{n,P_S^*}} > j \Leftrightarrow \Delta_{N_{n,PE_S}} > j \cap \Delta_{N_{n,PW_S}} > j \quad (114)$$

Logo, como PE_S e PW_S são assumidos independentes:

$$P(\Delta_{N_{n,P_S^*}} > j) = P(\Delta_{N_{n,PE_S}} > j) \cdot P(\Delta_{N_{n,PW_S}} > j) \quad (115)$$

Como a ocorrência de registros no valor da precipitação maximizada é mais frequente que a observada em PE e PW , o equacionamento da Equação (97) será reescrito com o objetivo de substituir o valor de $k = N_{n,P_S^*} + 1 \neq N_{n,PE} + 1$ por um valor que permita a comparação com os registros de PE e PW . Para tal, considera-se de forma simplificada, que $N_{n,P_S^*} = E[N_{n,P_S^*}]$, $N_{n,PE} = E[N_{n,PE}]$ e $N_{n,PW} = E[N_{n,PW}]$. Em termo de valores esperados da contagem de registros até a posição n , então, a Equação (97) toma a forma:

$$P(\Delta_{E[N_{n,P_S^*}]+1} > j) = P(\Delta_{E[N_{n,PE}]+1} > j) \cdot P(\Delta_{E[N_{n,PW}]+1} > j) \quad (116)$$

Em que $P(\Delta_k > j) = \int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} \cdot e^{-x} \cdot (1 - e^{-x})^j$, conforme Equação (40).

Comparando a Equação (97) com a Equação (40) observa-se que, assumindo que $k = N_n + 1 = E[N_n] + 1$, a probabilidade de não ocorrência de recordes ao longo de $j \geq 1$ observações da precipitação maximizada é menor que a de PE_s e PW_s para todos os valores de n :

$$P\left(\Delta_{E[N_{n,P_s^*}] + 1} > j\right) = P(\Delta_{E[N_n] + 1} > j) \cdot P(\Delta_{E[N_n] + 1} > j) < \begin{cases} P(\Delta_{E[N_{n,PE_s}] + 1} > j) \\ P(\Delta_{E[N_{n,PW_s}] + 1} > j) \end{cases} \forall j \geq 1 \quad (117)$$

A distribuição de probabilidades $P(\Delta_{E[N_{n,P_s^*}] + 1} > j)$ para valores de $j = 10, 25$ e 50 é apresentada na Figura 23 para valores de n variando entre 0 e 200, ou seja, para valores de $k = E[N_{n,P_s^*}] + 1$ variando entre 2 e 11,11.

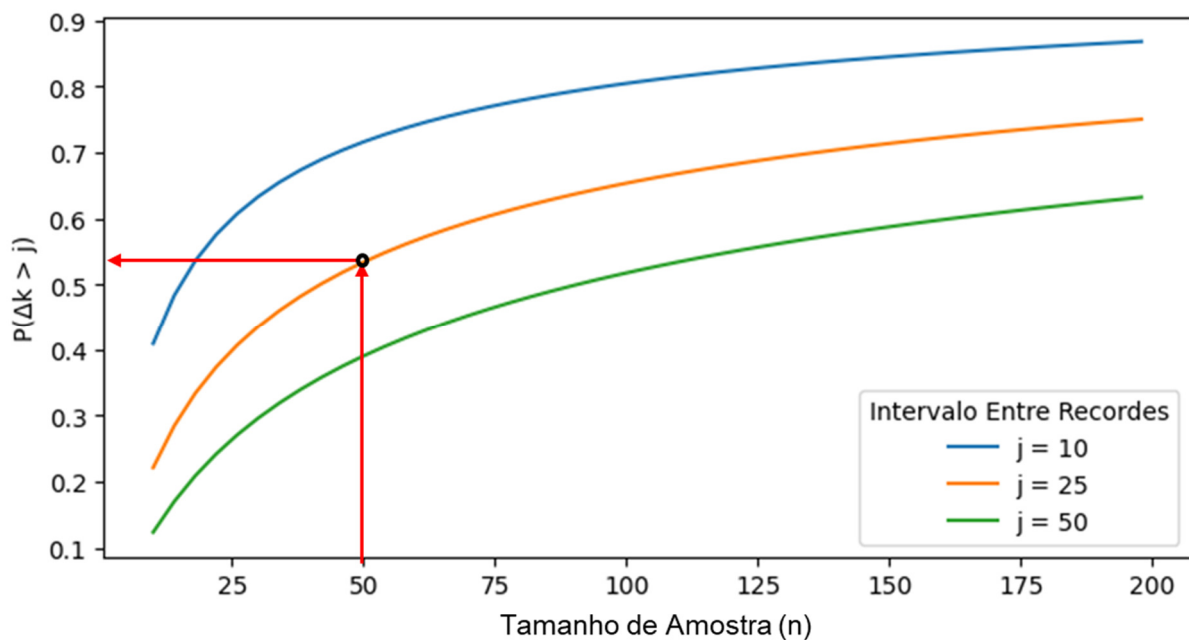


Figura 23 – Probabilidade de superação do intervalo j até o k -ésimo recorde ($\Delta_{E[N_{n,P_s^*}]}$) para valores de $j = 10, 25$ e 50 , como função de $k = E[N_{n,P_s^*}] + 1$.

Essa figura pode ser interpretada da mesma forma que a Figura 4, ou seja, partindo de uma série com um certo comprimento n define-se $k = E[N_{n,P_s^*}] + 1$. Para o valor de k selecionado e um valor definido de j (eixo das abscissas) as curvas indicam a probabilidade de o intervalo até o próximo recorde ser maior que j . Com as setas

vermelhas, apresenta-se um exemplo: partindo de uma amostra com 50 observações de uma variável aleatória, espera-se que tenham ocorrido 7,33 valores recorde, sendo adotado o valor de $k = 8,33$ para indexação do próximo recorde. Sendo assim, com um aumento de 25 no tamanho da amostra, ou seja, passando para 75 observações, a probabilidade e não ocorrência de um recorde durante j observações é de 53 %. Nesse exemplo, observa-se que a probabilidade de ocorrência de um recorde da precipitação maximizada entre as observações de índice 50 e 75 é superior àquela calculada para PE e PW para essa mesma condição (ver Figura 4).

Retoma-se aqui a discussão anteriormente introduzida de que, apesar de existir a probabilidade de quebra de recorde do valor da precipitação maximizada durante a vida útil de uma estrutura hidráulica, essa quebra não necessariamente impactará a estrutura hidráulica em questão, já que o impacto também dependerá da grandeza dessa quebra de recorde relativa à borda livre da estrutura. A partir dos resultados acima apresentados, pode-se constatar que a probabilidade de atualização do valor da precipitação maximizada durante a vida útil de uma obra hidráulica é relevante, tendo valor de 47 % para uma obra hidráulica com 25 anos de vida útil projetada a partir de uma amostra de 50 observações de máximos anuais. Cabe então discutir-se a ordem de grandeza dessa possível quebra de recorde.

Em uma breve tangente, observa-se que o valor do tamanho de amostra de 50 anos recomendado por WMO (2009) não parece efetivo para minimizar a probabilidade de ocorrência de recordes no valor calculado da precipitação maximizada para obras hidráulicas com vidas úteis usuais de 10 a 50 anos.

Reitera-se nesse ponto que os resultados referentes à ocorrência de recordes são independentes das distribuições parentais de PE e PW (ver Arnold *et al.* 2011). Nesse caso, as restrições ao raciocínio consideradas no Item 6.2 não se aplicam, podendo as conclusões até então apresentadas ser aplicadas mesmo caso PE e PW possuam limites físicos superiores. O raciocínio apresentado, entretanto, depende diretamente da independência dos máximos anuais de PE e PW . Se assumido que PE e PW são correlacionados, a covariância das variáveis deve ser levada em consideração no momento do cálculo da probabilidade de ocorrência de recordes concomitantes de PE e PW , que resultam em um único recorde de P_s^* . Sendo assim, uma correlação

positiva, que aumenta a probabilidade de ocorrência de recordes concomitantes causará uma redução na frequência de ocorrência recordes, enquanto uma correlação negativa causará um aumento.

O raciocínio até então foi desenvolvido *a priori* da observação de uma trajetória específica de observações de PE e PW . Se considerada uma trajetória qualquer, ou seja, se considerados valores máximos já observados de PE e PW obtém-se uma situação análoga à apresentada na Figura 21. Partindo de uma série observada de valores de PE e PW é possível descrever a probabilidade de ocorrência de um recorde de P_s^* em função da FAP de PE e PW :

$$P(I_{n,P_s^*} = 1) = P(I_{n,PE_s} = 1) + P(I_{n,PW_s} = 1) - P(I_{n,PE_s} = 1) \cdot P(I_{n,PW_s} = 1) \quad (118)$$

Partindo de valores observados dos máximos amostrais de PE_s e PW_s , denotados por $PE_{rec}(n)$ e $PW_{rec}(n)$, obtém-se que $P(I_{n,PE_s} = 1) = 1 - F_{PE_s}(PE_{rec}(n))$ e $P(I_{n,PW_s} = 1) = 1 - F_{PW_s}(PW_{rec}(n))$. A probabilidade de ocorrência do próximo recorde em uma trajetória específica de PE e PW , portanto, será:

$$\begin{aligned} P(I_{n+1,P_s^*} = 1) \\ = F_{PE_s}(PE_{rec}(n)) + F_{PW_s}(PW_{rec}(n)) \\ - F_{PE_s}(PE_{rec}(n)) \cdot F_{PW_s}(PW_{rec}(n)) \end{aligned} \quad (119)$$

Sendo assim a probabilidade de não ocorrência de recordes durante uma vida útil com j observações de PE e PW pode ser calculada considerando-se uma probabilidade de ocorrência de recordes constante:

$$P(I_{n+1,P_s^*} + I_{n+2,P_s^*} + \dots + I_{n+j,P_s^*} \neq 1) = \prod_{k=n+1}^{n+j} (I_{k,P_s^*} \neq 1) = [1 - P(I_{n+1,P_s^*} = 1)]^j \quad (120)$$

Até então discutiu-se a ocorrência de recordes no valor sazonal da chuva maximizada (P_s^*). Com base nos resultados obtidos, procede-se com a avaliação da ocorrência de recordes para o período completo (P^*). Como $P^* = Var[P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*, \dots, P_S^*]$, a ocorrência de um recorde em quaisquer um dos valores sazonais estimados

acarretará a ocorrência de um recorde no valor da precipitação maximizada. Sendo assim, pode-se notar que:

$$I_{n,P^*} \neq 1 \Leftrightarrow \text{Var}[P_1^*(j), P_2^*(j), \dots, P_s^*(j), \dots, P_S^*(j)] \leq P^* \quad (121)$$

Assumindo que os recordes dos diversos períodos sazonais são descorrelacionados segue que:

$$P(I_{n,P^*} \neq 1) = \prod_{s=1}^S P(P_s^*(j) - P^* \leq 0) \quad (122)$$

e,

$$P(I_{n,P^*} = 1) = 1 - \prod_{s=1}^S P(P_s^*(j) - P^* \leq 0) \quad (123)$$

ou,

$$P(I_{n,P^*} = 1) = 1 - \prod_{s=1}^S P(P_s^*(j) - \max[P_1^*(n), P_2^*(n), \dots, P_s^*(n), \dots, P_S^*(n)] \leq 0) \quad (124)$$

Para a qual não foi encontrada solução independente da distribuição de probabilidades das precipitações maximizadas sazonais. Como não foi possível denotar a probabilidade de ocorrência de um recorde em uma posição n , os análogos às Equações (112) a (114), decorrentes de propriedades da distribuição binomial, não podem ser obtidos analiticamente. Consequentemente, as relações pertinentes aos recordes de P^* serão obtidos pelos métodos aproximativos propostos. Denotando a posição na amostra por $n = 1, 2, \dots, N$ e indexando as trajetórias por $m \leq M$, as quantidades de interesse podem ser estimadas por:

$$E[N_{n,P^*}] \approx \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M N_{n,P^*}(m) \quad (125)$$

$$\text{Var}[N_{n,P^*}] \approx \frac{1}{M-1} \cdot \sum_{m=1}^M (N_{n,P^*}(m) - E[N_{n,P^*}])^2 \quad (126)$$

$$P(\Delta_{N_{n,P^*}} > j) \approx \frac{\#[P^*(n+j, m) = P^*(n, m)]}{M} \quad (127)$$

Os resultados obtidos do modelo aproximativo e discussão serão apresentados em conjunto com o estudo de caso (ver Item 7 - ESTUDO DE CASO).

6.3.2 Valores Recordes da Precipitação Maximizada

Conforme levantado por Arnold *et al.* (2011), os valores da sequência de recordes de uma variável aleatória são função de sua respectiva função de sobrevivência inversa. Como não foram obtidas soluções analíticas para a distribuição de probabilidades de P_s^* e como a função de sobrevivência inversa da distribuição de Gumbel para Máximos também não tem forma analítica, não foi possível encontrar formulações analíticas para os valores recordes da precipitação maximizada.

Denotando o valor de P_s^* estimado com base em uma amostra de tamanho N como $P_{s,n}^*$ e denotando a razão entre $P_{s,n}^*$ e $P_{s,n+j}^*$ como $\Delta P_{s,n \rightarrow n+j}^*$, a distribuição de probabilidades do aumento do valor de P_s^* ao longo de j anos pode ser obtida a partir da distribuição de P_s^* :

$$\Delta P_{s,n \rightarrow n+j}^* \sim \frac{P_{s,n+j}^*}{P_{s,n}^*} \quad (128)$$

A distribuição de probabilidades desse aumento dado que ele ocorreu, por vez, pode ser denotada por:

$$\Delta P_{s,n \rightarrow n+j}^* \Big| P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^* \sim \frac{P_{s,n+j}^*}{P_{s,n}^*} \Big| (P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*) \quad (129)$$

Como não foi encontrada solução analítica para a distribuição de probabilidades de $P_{s,n}^*$, não é possível a obtenção de solução analítica para a distribuição condicional de $\Delta P_{s,n \rightarrow n+j}^* \Big| P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*$. Para valores de n e j definidos, essa distribuição de probabilidades pode ser aproximada a partir do Processo de Monte Carlo proposto. Considerando M séries sintéticas indexadas por $m \leq M$:

$$P \left(\Delta P_{s \rightarrow n+j}^* > x \mid (P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*) \right) \approx \frac{\# \left[\Delta P_{s \rightarrow n+j}^*(m) > x \mid (P_{s,n+j}^*(m) > P_{s,n}^*(m)) \right]}{\#(P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*)} \quad (130)$$

Outro resultado pertinente é o valor esperado desse aumento, ou seja:

$$E \left[\Delta P_{s \rightarrow n+j}^* \mid (P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*) \right] = E \left[\frac{P_{s,n+j}^*}{P_{s,n}^*} \mid (P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*) \right] \quad (131)$$

Que também será aproximado pelo processo de Monte Carlo por não ter sido obtida solução analítica para P_s^* :

$$E \left[\Delta P_{s \rightarrow n+j}^* \mid (P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*) \right] \approx \frac{1}{\#(P_{s,n+j}^* > P_{s,n}^*)} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{P_{s,n+j}^*(m)}{P_{s,n}^*(m)} \mid (P_{s,n+j}^*(m) > P_{s,n}^*(m)) \quad (132)$$

Para obtenção dessas mesmas relações para a precipitação maximizada do período completo, relembra-se que $P^* = \text{MAX}[P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*, \dots, P_s^*]$. Seguindo raciocínio análogo ao apresentado para P_s^* , a distribuição de probabilidades da razão entre a precipitação maximizada na posição $n+j$ e na posição j dada que ocorreu ao menos um recorde é dada por:

$$\Delta P_{n \rightarrow n+j}^* \mid (P_{n+j}^* > P_n^*) \sim \frac{P_{n+j}^*}{P_n^*} \mid (P_{n+j}^* > P_n^*) \quad (133)$$

que, novamente, pode ser aproximada pelo processo de Monte Carlo proposto:

$$P(\Delta P_{n \rightarrow n+j}^* \mid (P_{n+j}^* > P_n^*) > x) \approx \frac{\# \left[\Delta P_{n \rightarrow n+j}^*(m) > x \mid (P_{n+j}^*(m) > P_n^*(m)) \right]}{\#(P_{n+j}^* > P_n^*)} \quad (134)$$

Por fim, para o valor esperado do aumento condicional:

$$E[\Delta P_{n \rightarrow n+j}^* | (P_{n+j}^* > P_n^*)] \approx \frac{1}{\#(P_{n+j}^* > P_n^*)} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{P_{n+j}^*(m)}{P_n^*(m)} \Big| (P_{n+j}^*(m) > P_n^*(m)) \quad (135)$$

Os resultados obtidos do modelo aproximativo e discussão serão apresentados em conjunto com o estudo de caso (ver Item 7 - ESTUDO DE CASO).

7 ESTUDO DE CASO

O estudo de caso foi elaborado com três principais objetivos. O primeiro, de aplicar as metodologias e relações propostas em uma situação prática real de forma a criar uma base para discussão das implicações práticas dos resultados obtidos. O segundo, de permitir a conexão dos resultados obtidos com estudos regionais, de forma a permitir a comparação de resultados e conclusões com trabalhos elaborados por outros autores para a região em questão. Por fim, o terceiro é de contribuição para comunidade acadêmica e para a prática da engenharia de recursos hídricos na região de estudo.

Para desenvolvimento do estudo foi selecionado o Município de Belo Horizonte, em Minas Gerais, Brasil. O município foi selecionado em função da familiaridade do autor com o clima regional, disponibilidade de estudos de PMP na área e presença da estação climatológica do INMET (Código INMET 83587), que possui um dos históricos de medição mais longos do BDMEP.

A Estação Meteorológica INMET 83587, instalada em 1910 e operante até a data atual (2023) encontra-se na Avenida Raja Gabaglia nº 27, coordenadas UTM WGS19 - 19,93 (S) e -43,95° (E), a uma elevação de 915,47 m. A região de Belo Horizonte é caracterizada por um clima subtropical de umidade (NIMER, 1989), marcada por um período seco e frio entre outono e inverno, e um período quente e chuvoso na primavera e verão. A seleção da Estação Meteorológica INMET 83587 é também embasada na disponibilidade e qualidade de dados dessa estação. Na Tabela 7, apresenta-se a quantidade de anos válidos consistidos das variáveis envolvidas na modelagem probabilística proposta para cada um dos períodos sazonais.

Tabela 7 – Número de anos válidos após aplicação do procedimento de consistência de dados. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Período Sazonal	Anos Válidos PE	Anos Válidos PW
Primavera	57	57
Verão	57	58
Outono	59	59
Inverno	57	58

Comparando as quantidades de 57 a 59 anos válidos consistidos (Tabela 7) com a curva de permanência apresentada durante a consistência da base de dados na Figura 15 observa-se a estação de Belo Horizonte encontra-se entre as 95 % com maior quantidade de dados disponível. Vale também constatar que essas faixas se encontram acima das recomendações da WMO (2009) de utilização de amostras de ao menos 50 observações para estimativas pontuais da PMP Hidrometeorológica.

Reitera-se, nesse momento, que esse trabalho e o estudo de caso são voltados para avaliação das estimativas pontuais da PMP Hidrometeorológica. Evidentemente, para fins práticos, recomenda-se a utilização de metodologias espaciais e de transposição de tempestade sempre que disponíveis fontes de dados adicionais representativas da região (WMO, 2009 e HIRAGA *et al.*, 2022). Nessa linha, destacam-se os resultados obtidos por Pinheiro (2011), que avalia a PMP Hidrometeorológica fazendo uso de técnicas de transposição de tempestades no estado de Minas Gerais.

Para estimativa da PMP Hidrometeorológica pelo método da maximização da umidade para uma duração diária, Pinheiro (2011) fez uso de estações operadas por órgãos brasileiros e pela empresa Vale S.A, sendo 93 estações pluviométricas, com séries de comprimento mínimo de 20 anos e 25 estações climatológicas, com séries de comprimento variando entre 10 e 19 anos. No estudo, foram selecionados os três maiores eventos de precipitação identificados na região para aplicação da técnica de maximização da umidade. Um resumo dos resultados do procedimento de maximização dessas três tempestades é apresentado na Tabela 8, adaptada do trabalho de Pinheiro (2011).

Tabela 8 – Maximização da umidade dos três eventos de referência considerados por Pinheiro (2011) para a região de Minas Gerais. Adaptado de Pinheiro (2011)

Evento de Referência	P_{diária} (mm)	P_{24h} (mm)	r_m	PMP_{diária} (mm)
Teófilo Otoni em 04/02/2002	246	-	1,27	312
Belo Horizonte (Mina Águas Claras – Vale S.A.) em 16/01/2003	227	-	1,29	293
Januária em 05/02/2007	-	296 ²	1,16	295

² Pinheiro (2011) considera um fator de 1,10 para conversão de eventos de duração diária em eventos de duração de 24h.

A partir dessas precipitações maximizadas, definiu-se altura da PMP diária igual a 313,63 mm, obtida da maximização do evento chuvoso de Teófilo Otoni em 04/02/2002. Ressalta-se que para obtenção da umidade de referência para utilização na maximização da umidade o autor utilizou a temperatura de ponto de orvalho associada a um tempo de retorno de 100 anos (WMO 2009), calculada com base nos dados da estação na qual a precipitação de referência sendo maximizada ocorreu.

Tendo em vista os resultados disponíveis da literatura para as estimativas da precipitação maximizada na região de Minas Gerais, procede-se com a elaboração do estudo de caso para Belo Horizonte.

7.1 Precipitação Maximizada Pontual em Belo Horizonte

Antes de prosseguir com a avaliação dos momentos e intervalos de confiança das estimativas da precipitação maximizada em Belo Horizonte, apresenta-se o resultado pontual que seria obtido pelo produto dos máximos sazonais de *PE* e *PW*. Para tal, selecionou-se o máximo valor de *PE* e *PW* observado em cada período sazonal dos primeiros 57 anos consistidos para a estação de Belo Horizonte, conforme apresentado na Tabela 9. O valor de 57 anos foi selecionado por ser o menor entre os comprimentos de séries de cada um dos períodos sazonais consistidos para a estação (ver Tabela 7), e foi adotado com o objetivo de permitir a comparação da estimativa pontual com os resultados até então obtidos, que são função de um único comprimento de série.

Tabela 9 – Máximos sazonais de PE e PW e estimativa pontual da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Período Sazonal	PE		PW		Precipitação maximizada
	Máximo	Ano	Máximo	Ano	
Primavera	3,42	2006	83,41	1977	285,26
Verão	3,98	1978	85,76	1980	341,32
Outono	2,00	1981	75,99	1980	151,98
Inverno	1,60	1988	82,99	2022	132,78

A partir dos valores apresentados constata-se que a precipitação maximizada pontual para os 57 anos consistidos seria de 341,32 mm, destacado em negrito na Tabela 9 para o período sazonal do verão. Para fim de comparação com os resultados obtidos, a totalidade da trajetória dos valores máximos observados de *PE* e *PW*, bem como do

desenvolvimento da estimativa da precipitação maximizada é apresentada no Apêndice B.

7.2 Modelagem dos Máximos Anuais de PE e PW

Consistidos os máximos anuais para a Estação Meteorológica de Belo Horizonte conforme procedimento apresentado no Item 5, repetiu-se os mesmos procedimentos apresentados para modelagem dos máximos anuais de *PE* e *PW* em escala nacional para validação da premissa de independência das variáveis e o ajuste da distribuição de Gumbel na escala local. Na Tabela 10 são apresentados os resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman ao nível de significância de 5%. Os resultados obtidos variam consideravelmente a depender do período sazonal e teste aplicado, com rejeições ocorrendo em 4 dos 8 testes aplicados, e a estatística de teste apresentando valores positivos para todas as estações exceto a primavera. Esses resultados parecem confirmar os resultados identificados na análise ao nível nacional de que os testes aplicados não possuem poder de teste suficiente para distinguir o nível e direção de uma possível correlação entre *PE* e *PW*. Novamente, o comportamento conjunto das variáveis não será modelado por parcimônia.

Tabela 10 – Resultados da aplicação dos testes de correlação de Pearson e Spearman aos pares de máximos anuais de PE e PW. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Período Sazonal	Teste	Estatística	P-Valor	Rejeição
Primavera	Pearson	-0,27	0,042	Sim
	Spearman	-0,18	0,17	Não
Verão	Pearson	0,22	0,102	Não
	Spearman	0,19	0,16	Não
Outono	Pearson	0,29	0,024	Sim
	Spearman	0,10	0,45	Não
Inverno	Pearson	0,31	0,020	Sim
	Spearman	0,43	0,001	Sim

Admitida a premissa de independência de *PE* e *PW* procede-se com o ajuste da distribuição de Gumbel aos máximos anuais sazonais dessas variáveis. Os resultados da aplicação do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov às distribuições modeladas de *PE* e *PW* são apresentados na Tabela 11. Nela, observa-se que não ocorreu rejeição em nenhuma das estações, com os p-valores variando entre 0,19 e 0,91. Em conjunto com a avaliação da aderência da distribuição de Gumbel aos

máximos anuais sazonais de *PE* e *PW*, os resultados apresentados na Tabela 11 são considerados suficientes para demonstrar o bom ajuste da distribuição aos dados.

Tabela 11 – Resultados da aplicação do teste de Kolmogorov-Smirnov para validação do ajuste da Distribuição de Gumbel aos máximos anuais de *PE* e *PW*. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Período Sazonal	Variável	Estatística	P-Valor	Rejeição
Primavera	PE	0,10	0,55	Não
	PW	0,14	0,19	Não
Verão	PE	0,09	0,58	Não
	PW	0,07	0,91	Não
Outono	PE	0,07	0,90	Não
	PW	0,06	0,98	Não
Inverno	PE	0,09	0,65	Não
	PW	0,08	0,76	Não

Detalhes adicionais acerca do ajuste da distribuição de Gumbel aos máximos anuais de *PE* e *PW* na Estação Meteorológica de Belo Horizonte são apresentados no Apêndice A. Na Tabela 12 são apresentados os parâmetros de posição e escala ajustados para a distribuição de Gumbel por MML para cada um dos períodos sazonais.

Tabela 12 – Parâmetros ajustados para a distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Período Sazonal	Variável	Posição	Escala
Primavera	PE	1,29	0,40
	PW	58,88	4,16
Verão	PE	1,25	0,45
	PW	61,06	4,25
Outono	PE	0,54	0,27
	PW	54,66	4,20
Inverno	PE	0,46	0,27
	PW	44,15	5,37

Em análise aos resultados apresentados na Tabela 12, observa-se que os parâmetros de posição e escala de ambas as variáveis foram mais elevados na primavera e verão e relativamente mais reduzidos no outono e inverno. Na região de Belo Horizonte, esse comportamento não é uma surpresa. Conforme notado por Nimer (1989), a região, marcada por um clima subtropical de altitude, possui um período chuvoso bem definido durante a primavera e verão, notadamente mais quentes, úmidos e chuvosos que o outono e o inverno. Esses resultados também são concordantes com as

análises de Da Costa (2014), que constata que o período chuvoso costuma coincidir com a primavera e verão na maioria do território nacional. Do aumento do valor de PE durante o período chuvoso (primavera e verão), constata-se que o aumento dos máximos de precipitação parece ser mais intenso que o das massas de água precipitáveis, resultando em uma combinação das duas variáveis (PE) mais elevada. Esse segundo resultado traz uma conclusão adicional sobre as precipitações durante o período chuvoso. Como as eficiências de precipitação tendem a ser mais elevadas nesse período, constata-se que o aumento das precipitações intensas durante essa estação não parece ser causado exclusivamente por um aumento das massas de água disponíveis para a precipitação, mas também por um aumento de eficiência, já que as massas de água precipitável tendem a aumentar menos que as alturas de precipitação.

De forma geral, a partir desses resultados, como PE e PW tendem a ser mais elevados no período quente e chuvoso, conclui-se que a precipitação maximizada também tenderá a ser. Esse resultado é coerente, já que é durante o período chuvoso que tendem a ocorrer os eventos mais extremos de precipitação (DA COSTA, 2014)

A partir das distribuições de probabilidades de PE e PW modeladas para cada período sazonal podem ser geradas séries sintéticas e, a partir delas, obtidos valores da precipitação maximizada para cada período. Na Figura 24, apresentam-se 25 possíveis trajetórias da série de valores de P^* , sintetizadas a partir do processo de Monte Carlo proposto. De (A) a (D), apresentam-se as séries sintetizadas para os períodos sazonais de primavera, verão, outono e inverno, enquanto em (E), apresenta-se a trajetória da chuva maximizada de referência estimada a partir dos máximos de 4 séries sazonais.

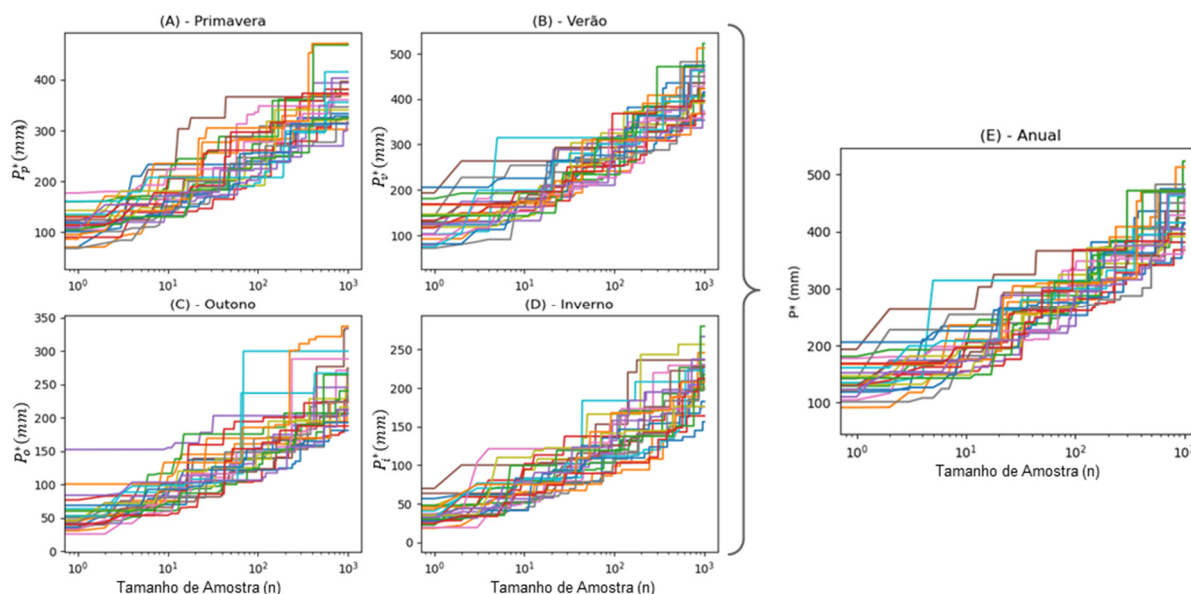


Figura 24 – Exemplo da consistência de 25 trajetórias de P_s^* em trajetórias de P^* . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Evidentemente, a representação de centenas de milhares de possíveis trajetórias em um único gráfico como o acima geraria um resultado ilegível. Por esse motivo, adotou-se a técnica similar à proposta por Moritz (2018) para representação de ensambles com milhares de possíveis trajetórias. Para tal, são plotadas as 2.500 primeiras trajetórias das $M=100.000$ trajetórias sintetizadas com uma transparência de 99,80% ($1-1/500$), conforme exemplo da Figura 25. A escala de cores representada na Figura 25 pode ser entendida como uma aproximação da densidade de probabilidades de P^* em cada pixel da figura, a passo que se 500 linhas passam por um pixel sua transparência será de 0 (pixel preenchido com cor azul) e se apenas uma linha passa, sua transparência será de $1/500$ (praticamente branco).

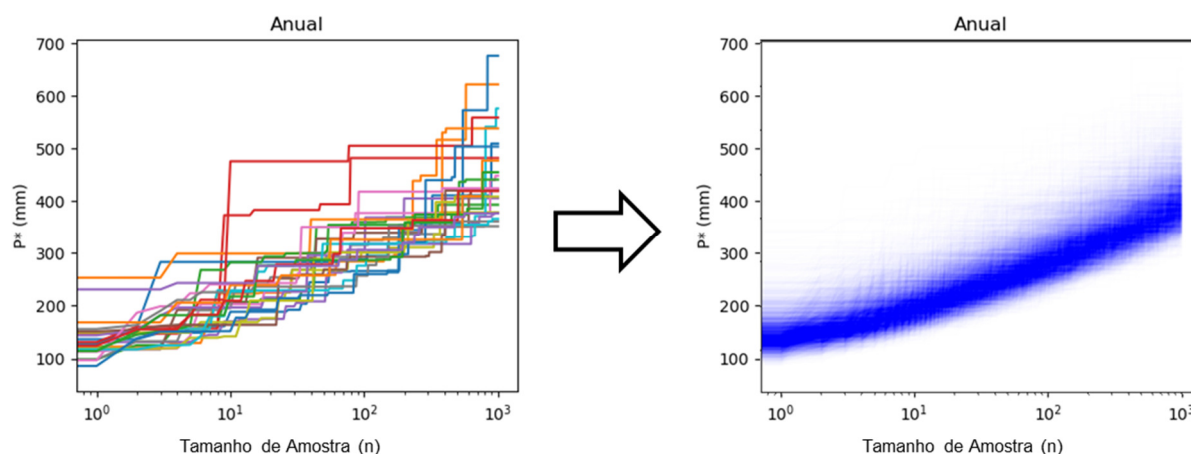


Figura 25 – Exemplo da representação das 2.500 primeiras trajetórias como um mapa de densidades. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

A geração das séries de P_s foi implementada com o auxílio da biblioteca Pytorch Cuda (1.13.1) para processamentos de grandes volumes de informação (Cuda 11.6.1). Fazendo uso de um computador pessoal com placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1660 (1408 Cuda Cores 1,785 GHz, 6 GB memória DDR5), 100.000 séries com 1.000 anos de comprimento podem ser sintetizadas em 2,0 segundos.

O valor de $N = 1.000$ anos foi selecionado por ser assumido suficientemente grande para convergência de quaisquer processos assintóticos que possam ocorrer na análise dos parâmetros desejados, bem como ser consideravelmente maior que qualquer amostra de máximos anuais de PE e PW disponível. Dado o valor de N , o valor de $M = 100.000$ foi selecionado como o maior múltiplo de 10 para o qual a placa de vídeo utilizada tem memória suficiente para processamento das séries sintéticas.

7.3 Momentos e Intervalos de Confiança

Na Figura 26 apresenta-se o resultado de aplicação da técnica proposta para sintetização de 100.000 séries de 1.000 anos de comprimento do valor calculado da precipitação maximizada. De (A) a (D) apresenta-se o valor esperado e desvio padrão de $\hat{P}_s^*$ para cada um dos períodos sazonais avaliados. Nesses gráficos (A a D), os momentos de $\hat{P}_s^*$ foram obtidos diretamente a partir das soluções analíticas apresentadas nas equações (89) e (92). Em (E), por vez, apresenta-se os momentos de $\hat{P}^*$ estimados a partir do processo de Monte Carlo proposto. Ainda, em (E) é plotado a trajetória do valor da precipitação maximizada pontual estimada para Belo Horizonte com base na amostra aumentando de 1 a 57 observações (Ver Apêndice B). Em alinhamento com os resultados apresentados no Item 6.2 – Momentos e Intervalos de Confiança, observa-se a tendência de aumento do valor esperado e variância de $\hat{P}_s^*$ com o tamanho da amostra. Percebe-se também que o mesmo foi válido para $\hat{P}^*$. De (E), observa-se ainda que, enquanto a precipitação maximizada estimada a partir e uma amostra de 50 anos tem valor esperado de 279 mm e desvio padrão de 47 mm, com o aumento da amostra para 100 anos, esses valores aumentam para 313 mm e 49 mm, respectivamente. Observa-se que a precipitação maximizada pontual calculada pelo produto dos máximos de PE e PW dos 57 anos de consistidos (Tabela 9), encontra-se acima do valor esperado para todos os períodos sazonais e para o período completo.

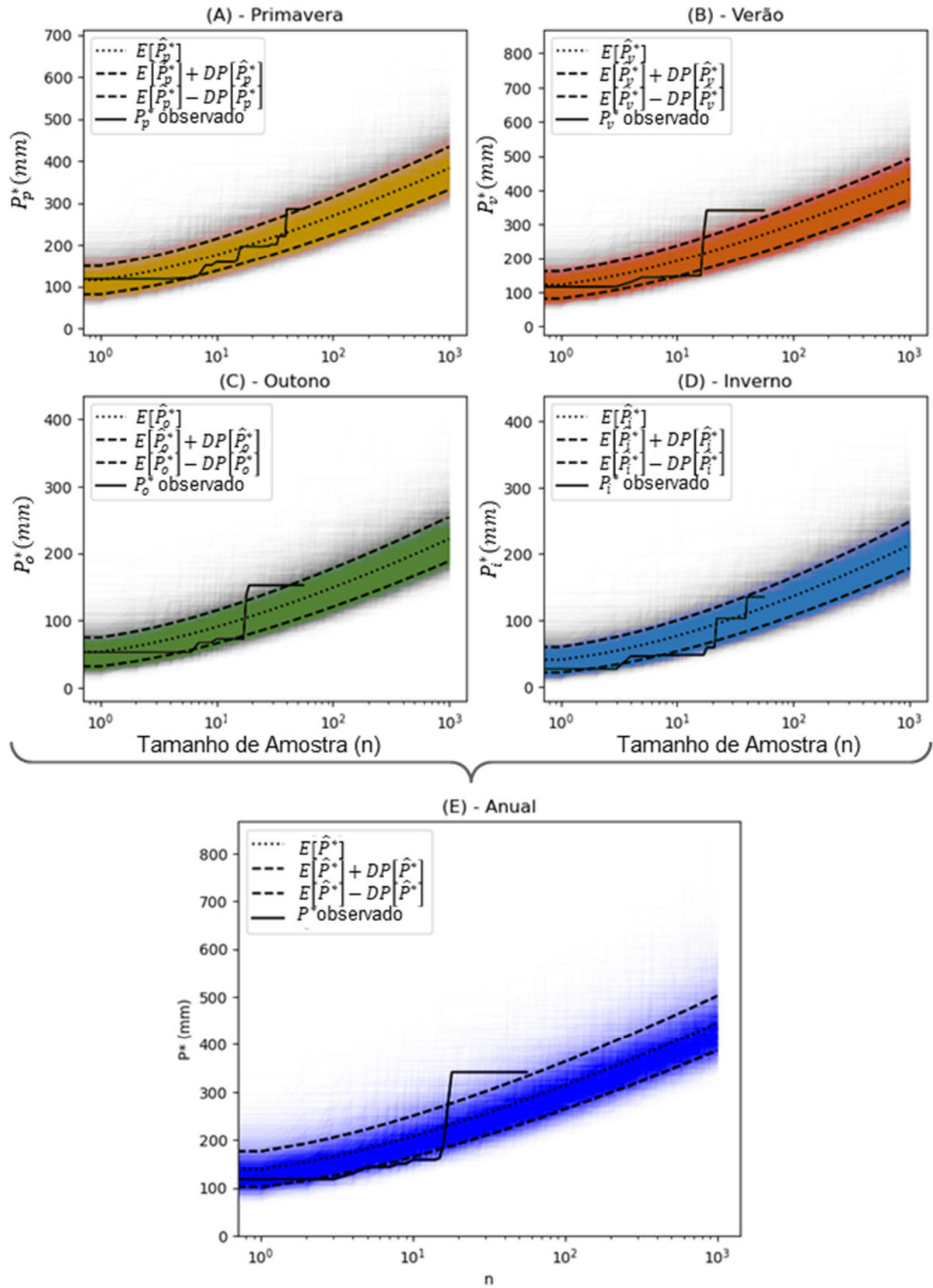


Figura 26 – Valor Esperado e Desvio Padrão (DP) dos estimadores da precipitação maximizada. (A) a (D) – Primavera, Verão, Outono e Inverno. (E) – Período Completo. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Ainda na Figura 26 (E), observa-se que os dois primeiros momentos da precipitação maximizada para o período completo, para os quais não foram obtidas relações analíticas, comportam-se de maneira muito similar aos da precipitação maximizada sazonal, mas com valores sempre superiores. Pela transparência da mancha formada pela plotagem das 2.500 primeiras trajetórias sintetizadas, observa-se que boa parte delas, como esperado, tende a se concentrar em torno do valor esperado, com uma assimetria notável para valores mais elevados da precipitação maximizada.

Na Figura 27, apresenta-se a comparação dos valores esperados, desvios padrão e coeficientes de variação do estimador da precipitação maximizada de cada período sazonal e do período completo. Os valores referentes aos momentos da precipitação maximizada dos períodos sazonais da primavera, verão, outono e inverno foram obtidos a partir das relações analíticas propostas, enquanto os do período completo foram estimados a partir do processo de Monte Carlo. Observa-se que $E[\hat{P}^*] > E[\hat{P}_s^*]$, com a estação sazonal do verão servindo como limite inferior mais próximo para o valor esperado da precipitação maximizada do período completo (Equação (109)). Para a variância (representada na Figura 27 pelo desvio padrão), observa-se que a $Var[\hat{P}^*] < Var[\hat{P}_{verão}^*]$, confirmando a hipótese originalmente formulada de que a variância da precipitação maximizada para o período completo pode ser menor que a de cada um dos períodos sazonais. Essa variância continua tendendo para valores cada vez maiores com o aumento da amostra.

Em comparação dos coeficientes de variação apresentados na Figura 27 (C) observa-se que o coeficiente de variação do estimador da precipitação maximizada para o período completo foi mais reduzido que o de todos os períodos sazonais. Esse resultado é uma consequência da combinação das diferenças dos valores esperados e variâncias de $\hat{P}^*$ e $\hat{P}_s^*$, indicando que a razão $E[\hat{P}^*]/E[\hat{P}_s^*]$ tende a ser relativamente mais elevada que do que razão de $Var[\hat{P}^*]/Var[\hat{P}_s^*]$. Utilizando o coeficiente de variação como uma medida da incerteza (SHECHTMAN, 2013), pode-se interpretar que o processo de subdivisão do ano completo em quatro períodos sazonais não somente tende a resultar em estimativas mais arrojadas de $\hat{P}^*$ (Conforme Equação (107)), mas também tende a resultar em estimativas com menor nível de incertezas.

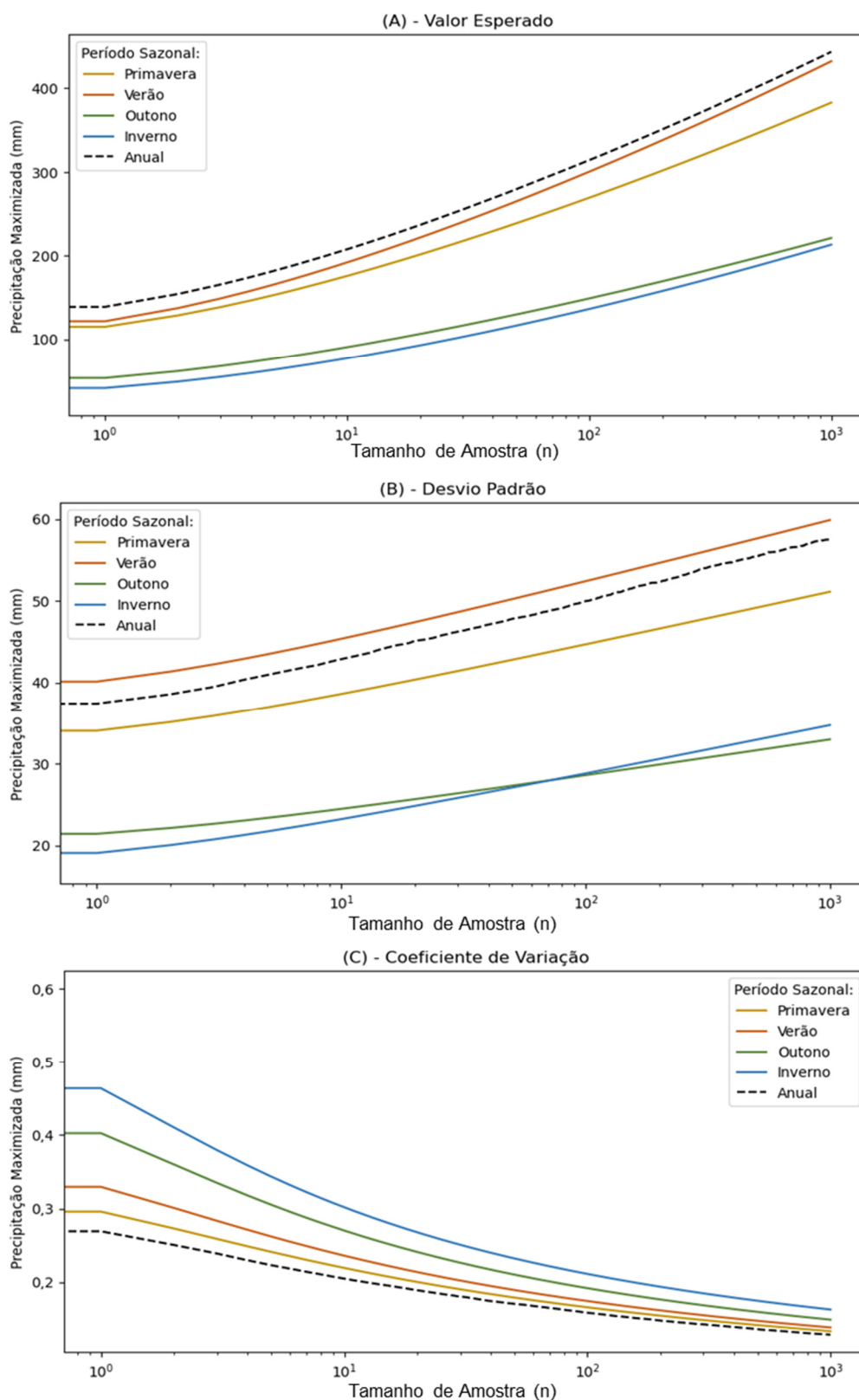


Figura 27 – Comparação do Valor Esperado (A), Desvio Padrão (B) e Coeficiente de Variação (C) dos estimadores da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Em avaliação à Figura 27 (B) observa-se que ocorreu o cruzamento dos desvios padrão da precipitação maximizada dos períodos sazonais do inverno e outono. Essa ocorrência pode ser atribuída ao conjunto específico de parâmetros de posição e escala inferidos para esses períodos sazonais, conforme apresentado na Tabela 12.

A partir das análises elaboradas, entretanto, não é possível concluir diretamente o impacto do número de subdivisões sazonais nos momentos de $\hat{P}^*$, já que não foram avaliados outras subdivisões além da proposta. Nesse sentido, a elaboração de estudos adicionais que variem o número dessas subdivisões e avaliem os impactos nas estimativas da PMP parece de considerável importância.

Avaliados os momentos de $\hat{P}^*$ e $\hat{P}_S^*$, que permitem uma avaliação do comportamento geral dos valores estimados e incertezas da precipitação maximizada em Belo Horizonte, procede-se com a avaliação da distribuição de probabilidades dessa variável. Nesse momento, reitera-se que é assumido que os parâmetros populacionais das distribuições sazonais de PE e PW são idênticos aos inferidos a partir da amostra. Sendo assim, não são quantificadas as incertezas causadas pela estimativa desses parâmetros a partir da amostra finita disponível.

Conforme apresentado, como não foi obtida de forma analítica, a distribuição de probabilidades de $\hat{P}^*$ foi estimada pelo processo de Monte Carlo elaborado. Na Figura 28 (B) e (C) são apresentadas as distribuições de probabilidades incremental (FDP) e acumulada (FAP) de $\hat{P}^*$ para a estação de Belo Horizonte para valores de n igual a 25, 50, 57, 100 e 250 anos, representados respectivamente pelas cores azul, verde, preta, amarela e vermelha. O valor de $n = 57$, representado pelas linhas de cor preta, foi selecionado com o objetivo de permitir a avaliação do resultado da estimativa pontual da precipitação maximizada.

Da avaliação dos resultados apresentados na Figura 28, observa-se tendência de translado para a direita, aumento da variância e aumento da assimetria da distribuição de probabilidades de $\hat{P}^*$ com o aumento do tamanho da amostra (n). Esses resultados concordam com o até então apresentado. Os dois primeiro justificam-se já que o valor esperado e variância de $\hat{P}^*$ aumentam com o tamanho da amostra (Figura 27),

enquanto o aumento da assimetria justifica-se pelo aumento do expoente n , resultante da obtenção da distribuição de probabilidades do máximo de PE e PW (Ver Equação (75))

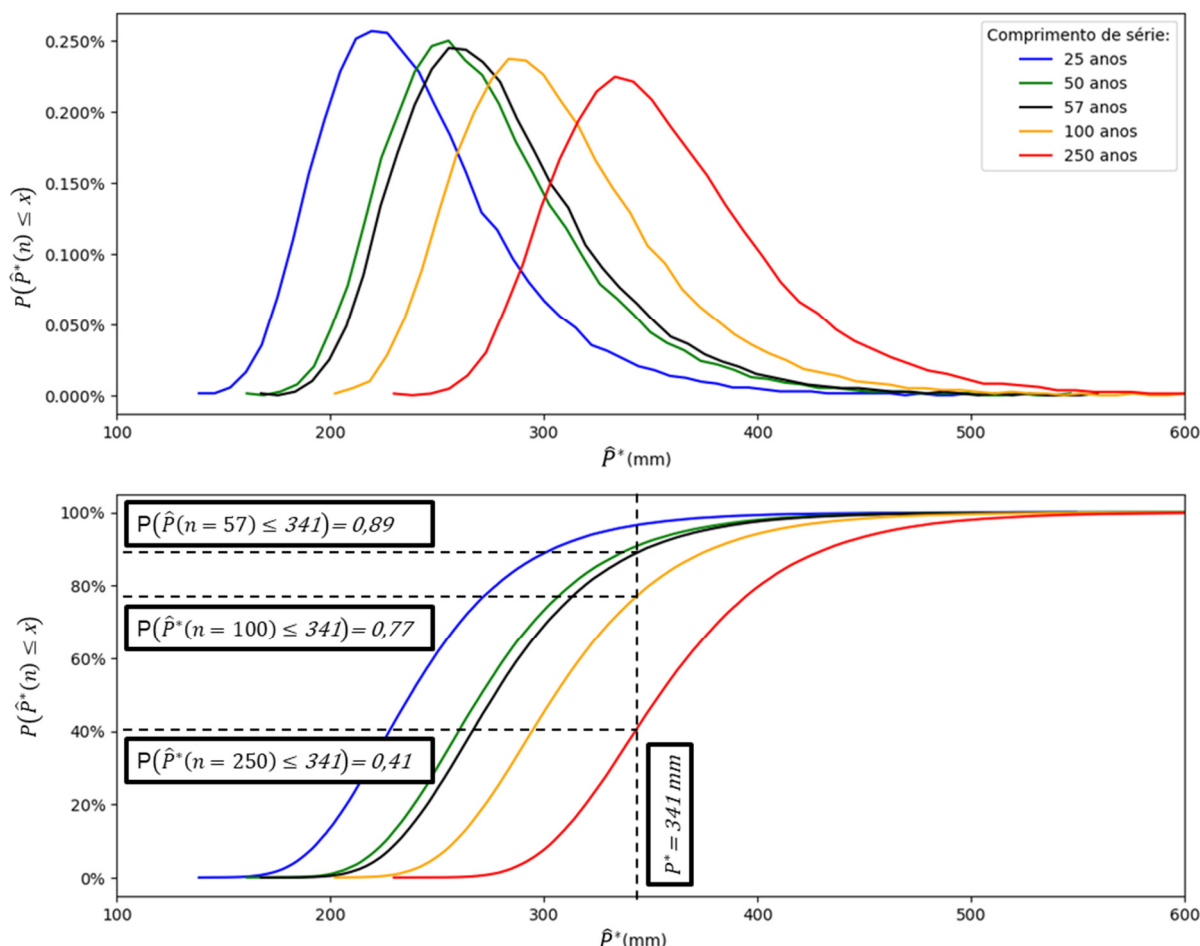


Figura 28 – Aproximação da FDP (A) e FAP (B) do estimador da precipitação maximizada. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Ainda na Figura 28 (B), observa-se que o valor da precipitação maximizada pontual calculada com base na amostra consistida de 57 anos (341 mm) equivale ao quantil de 89% de probabilidade de não superação da distribuição de probabilidades aproximada de $\hat{P}^*$ para Belo Horizonte. Esse valor mesmo valor de 341 mm, que é de improvável ocorrência para uma amostra de 57 anos de comprimento, torna-se mais frequente com o aumento do tamanho da amostra, sendo equivalente à precipitação maximizada com 77% de probabilidade de não superação para $n = 100$ anos e com 41 % de probabilidade para $n = 250$ anos.

Dando seguimento ao raciocínio acima elaborado, na Figura 29 são apresentadas curvas que correlacionam as probabilidades de não superação de alturas do estimador da precipitação maximizada de 200, 300, 400 e 500 mm em função do valor de n . Como evidenciado na Figura 29, precipitações maximizadas de improvável superação para pequenos valores de n tornam-se medianas ou até mesmo de provável superação para valores suficientemente grandes de n . Em adição às alturas enumeradas, em preto, apresenta-se a linha referente a $P^* = 341 \text{ mm}$, valor resultante da estimativa pontual. Observa-se que esse valor, que tem probabilidade de não superação para $n = 57$ de 89%, torna-se o valor mediano para $n = 200$.

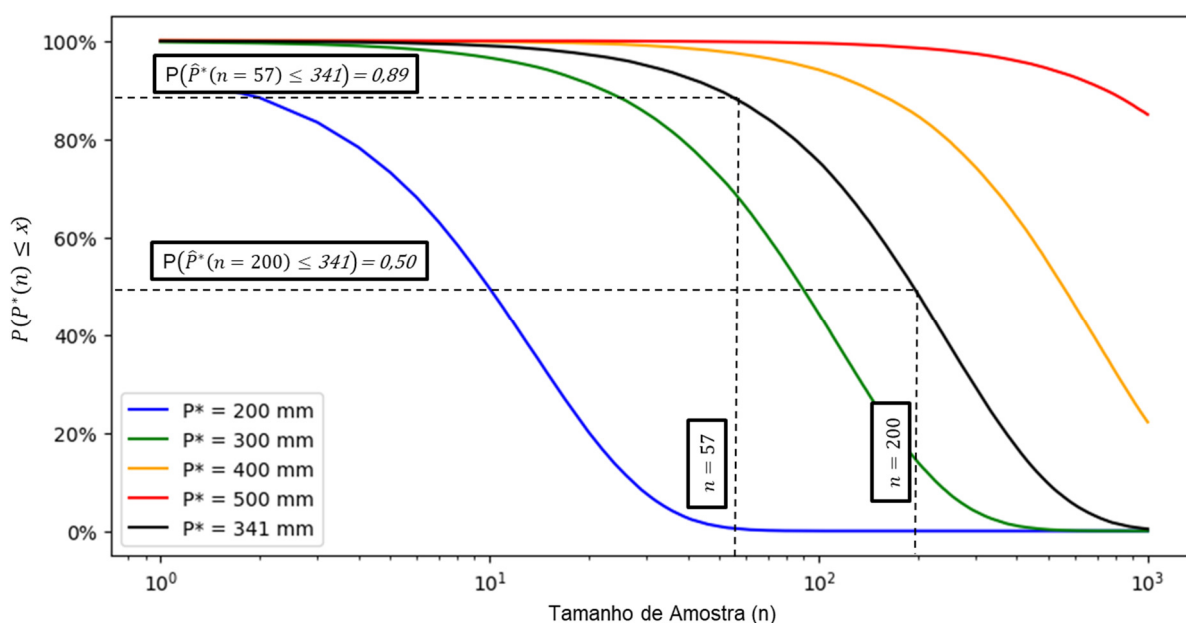


Figura 29 – Probabilidade de superação de alturas da precipitação maximizada iguais a 200, 300, 400, 500 e 341 em função de n . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Essa avaliação evidencia a relevante probabilidade de ocorrência de recordes no valor da precipitação maximizada que também é discutida nesse trabalho, já que com o aumento do tamanho da amostra um determinado valor de P^* torna-se cada vez mais provável de ter sido observado. Ressalta-se que essa afirmação não deve ser confundida com um aumento da probabilidade de superação de um certo valor de P^* em uma observação qualquer com o tamanho da amostra. Para um par de valores máximos de PE e PW , a probabilidade de ocorrência de recordes a cada observação anual dessas variáveis é constante, conforme a Equação (120).

Na Figura 30, a FDP de $\hat{P}^*$ é apresentada separadamente para valores de $N = 25$ (A), 50 (B), 100 (C) e 250 (D). Nas curvas são marcados a mediana e os quantis de 75% e 90% de probabilidade de ocorrência, que podem ser diretamente interpretados como os intervalos de 75% e 90% de confiança. Na Figura 30 também são representados esses mesmos intervalos de confiança estimados pela desigualdade de Chebyshev (MOOD *et al.*, 1974 - Equação (81)), demarcados pela adição do sufixo “Ch.”. Nela, observa-se que os intervalos de confiança estimados pela desigualdade de Chebyshev são consideravelmente mais distantes da média que os aproximados pelo processo de Monte Carlo. De forma geral, recomenda-se que a relação de Chebyshev não seja utilizada quando disponíveis recursos para aproximação da distribuição de probabilidades pelo processo de Monte Carlo proposto. Independentemente, como os intervalos estimados pela relação de Chebyshev se comportam como limites superiores, podem ser utilizados de forma simplificada para rápida avaliação para possíveis limites superiores para a variação dos possíveis valores estimados da maximização precipitada.

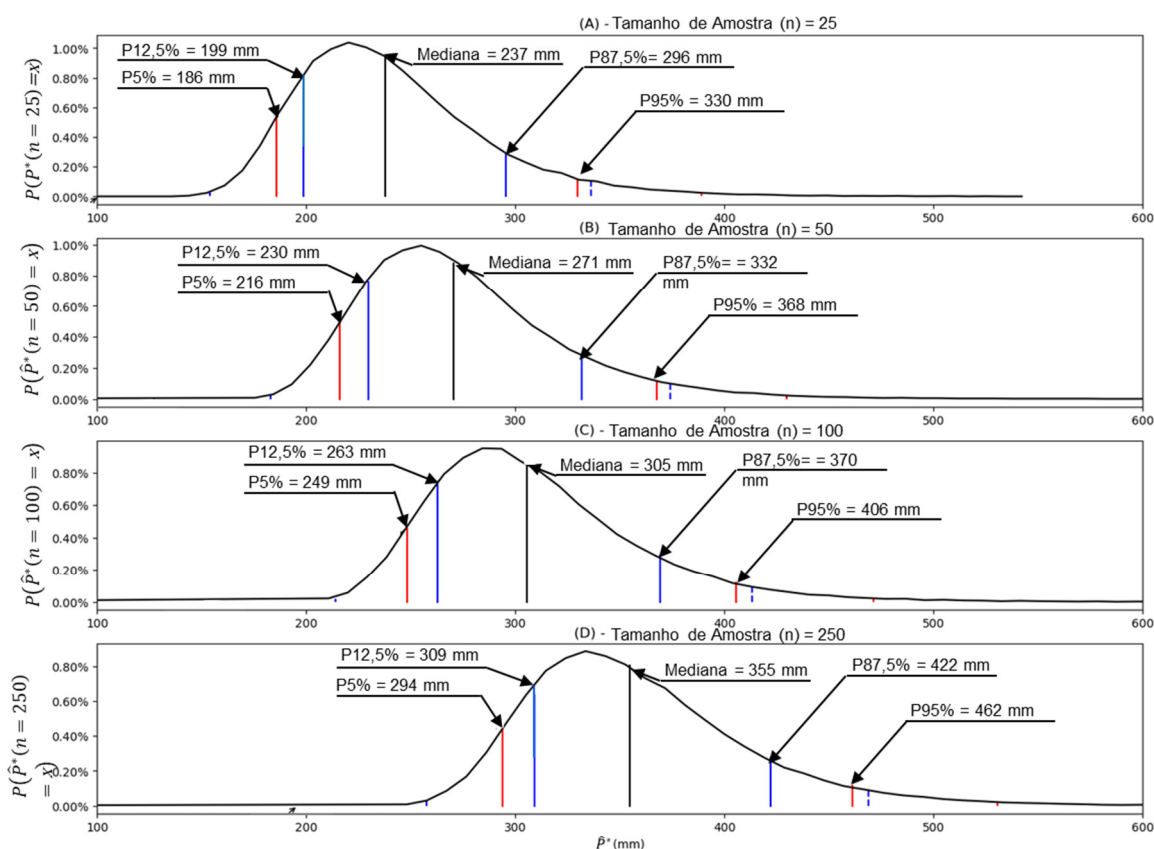


Figura 30 – Intervalos de confiança aproximados do estimador da precipitação maximizada para $n = 25$ (A), $n = 50$ (B), $n = 100$ (C) e $n = 250$ (D). Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

7.4 Tempos e Valores Recordes

Finalizada a estimativa e discussão dos intervalos de confiança da precipitação maximizada pontual para o município de Belo Horizonte, procede-se com a avaliação do processo de quebra de recordes proposto. No Apêndice B são apresentados os máximos anuais de PE e PW , bem como os valores recordes observados até cada ano e valores estimados da precipitação maximizada no Município de Belo Horizonte. Esses mesmos resultados são representados na Figura 31. Nela, as barras azuis representam os valores de PE (A) e PW (B) obtidos em cada ano de cara período sazonal, enquanto as linhas vermelhas representam o valor recorde observado até aquele ano. Em (C), são apresentados os valores calculados de P_s^* a partir do produto do valor dos recordes de PE e PW até aquele ano. Por fim, em (D), são apresentados os valores calculados de P^* , a partir do cálculo do valor máximo dos quatro períodos sazonais.

Todos os processos de quebra de recorde até então discutidos podem ser observados na Figura 31. Em (A) e (B), nas quais as variáveis admitidas estacionárias PE e PW são representadas, observa-se a modificação do valor recorde até então observado (PE_{rec} e PW_{rec}) sempre da ocorrência de um recorde na respectiva variável. Em (C), em que se representa o produto de PE_{rec} por PW_{rec} , observa-se que não há diferença entre a série de observações e a série de recordes, já que a observação em si é o produto de dois recordes. Em (C), ainda, observa-se que sempre que ocorre um recorde em PE e PW , ocorre um recorde em P_s^* . Por fim, em (D) observa-se que a sequência de valores de P^* é igual ao maior valor de P_s^* e que P^* não necessariamente quebra mais ou menos recordes que P_s^* , já que a ocorrência de um recorde em um certo período sazonal apenas majorará o valor de P^* se superar o máximo de todos os outros.

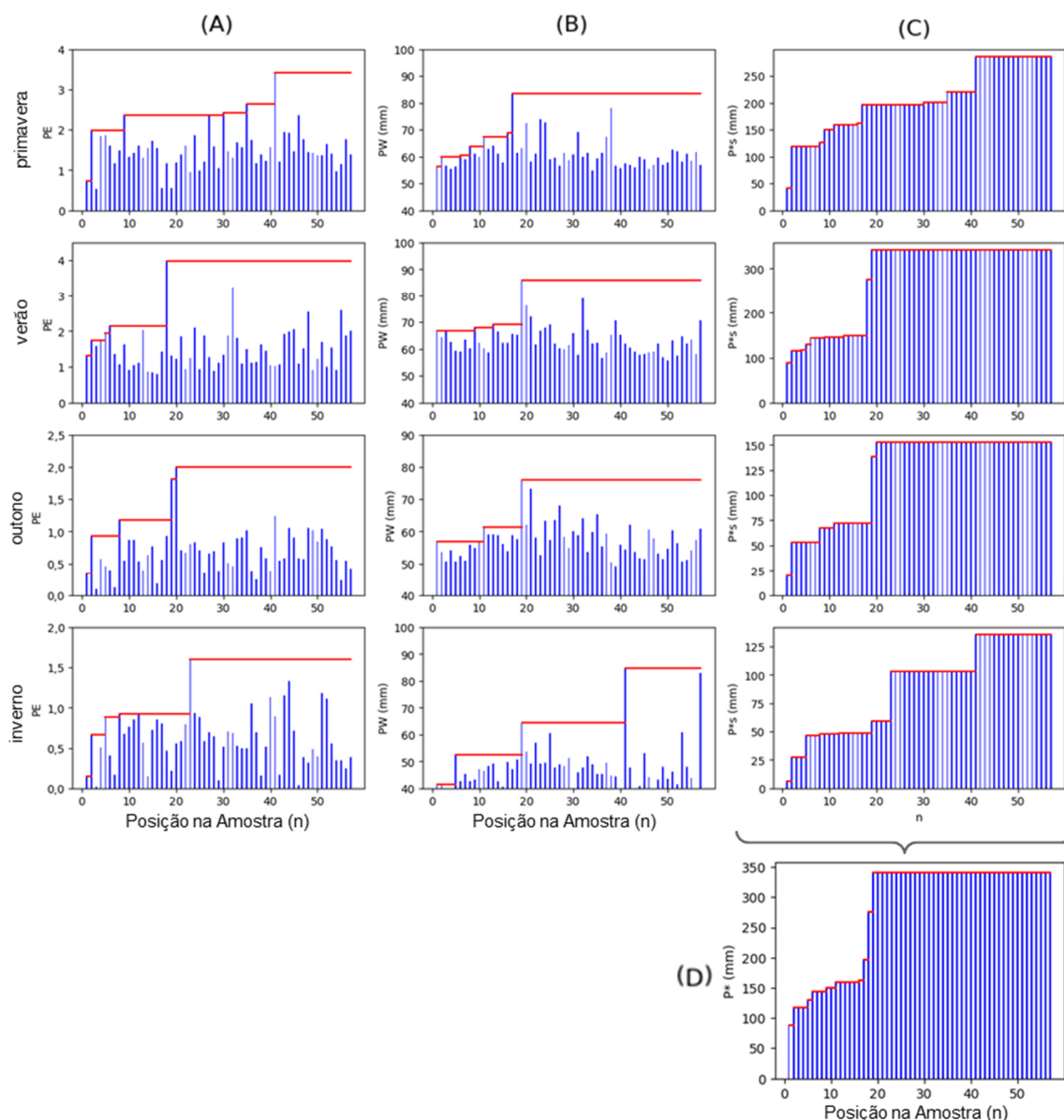


Figura 31 – Valores observados de PE (A), PE_{rec} (A), PW (B), PW_{rec} (B), P_s (C) e P^* (D) para os períodos sazonais selecionados. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Para fim de verificação do comportamento da contagem de recordes, na Figura 32 representa-se o número de recordes até uma posição n na amostra para PW (linhas vermelhas) e PW (linhas azuis) para os quatro períodos sazonais. Assumindo que PE e PW são variáveis aleatórias, a contagem dos seus recordes devem seguir as equações (36), (37) e (38), que descrevem respectivamente, o valor esperado, a variância e distribuição de probabilidades da contagem de recordes de uma variável qualquer, independentemente de sua distribuição de probabilidades.

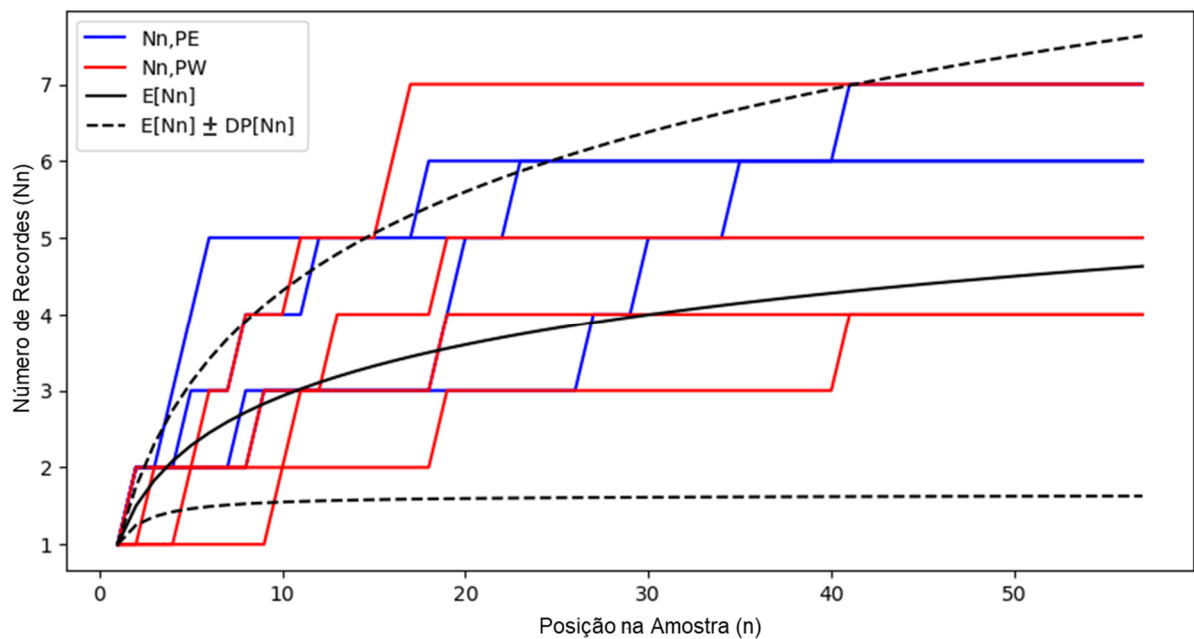


Figura 32 – Comparação da contagem de Recordes (N_n) de PE e PW para os quatro períodos sazonais com $E(N_n)$ e $E(N_n) \pm DP(N_n)$. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Na Figura 32, observa-se que as contagens de recordes de PE e PW em cada um dos períodos sazonais tendem a se concentrar em torno do valor esperado do número de recordes, com algumas observações encontrando-se a mais de um desvio padrão de distância do valor esperado. Cebrián e Castillo-Mateo (2022) fazem uso da distribuição de probabilidades da contagem de recordes para desenvolvimento de um teste de estacionariedade assumindo como hipótese nula que a contagem de recordes de uma variável estacionária deve se concentrar em torno o valor esperado.

Sendo definido pelo produto dos máximos de PE e PW , P_s^* tende a quebrar mais recordes que as variáveis PE e PW . Conforme apresentado, sempre que PE e PW quebrarem um recorde, ocorrerá um recorde no valor de P_s^* , conceito a partir do qual se obtém as Equações (112) e (113), que descrevem o valor esperado e variância do número de recordes até uma posição n . Na Figura 33, apresenta-se a contagem de recordes de cada um dos períodos sazonais, em conjunto com as curvas de valor esperado e valor esperado mais desvio padrão da contagem de recordes de P_s^* . Em uma comparação à Figura 32, como esperado, observa-se que uma dada trajetória de P_s^* necessariamente quebra o mesmo tanto ou mais recordes que as trajetórias de PE e PW que a geraram.

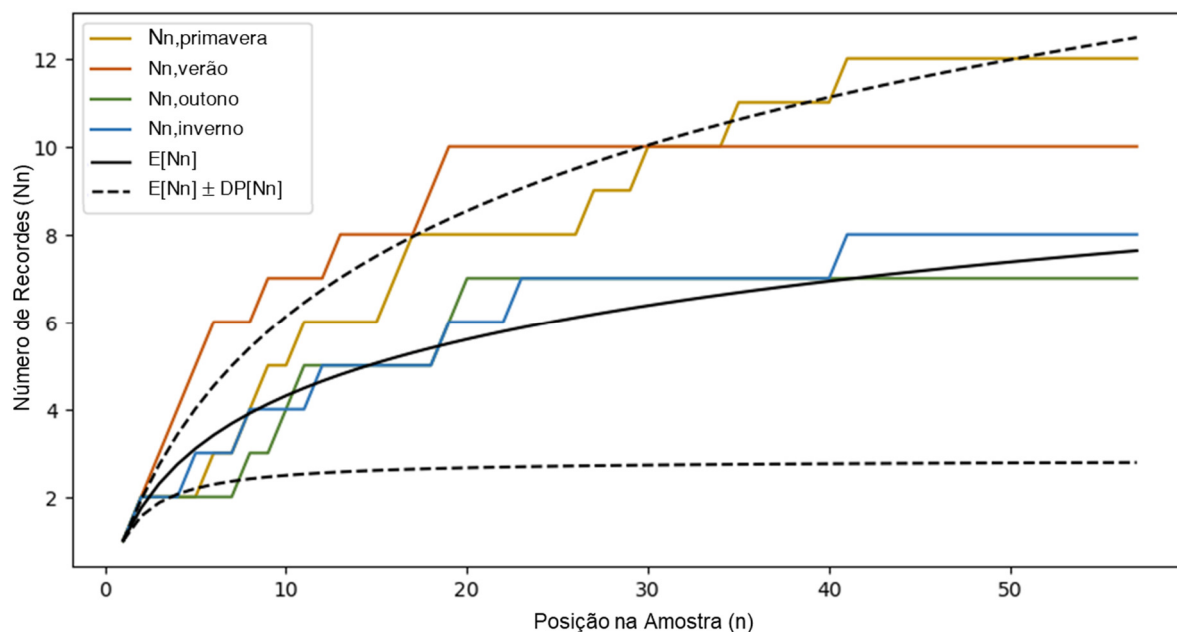


Figura 33 – Comparação da contagem de Recordes (N_n) da precipitação maximizada para os quatro períodos sazonais com $E(N_{n,P_s^*})$ e $E(N_{n,P_s^*}) \pm DP(N_{n,P_s^*})$. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Novamente, constata-se que os valores observados tendem a se concentrar ao redor do valor esperado. Em uma análise visual, entretanto, as trajetórias de PE e PW observadas em Belo Horizonte parecem ter quebrado mais recordes que o esperado, já que as curvas se encontram, de forma geral, acima da característica do valor esperado. Conforme apresentado em Cebrián e Castillo-Mateo (2022), isso pode ser considerado um indício de não estacionariedade dos máximos de PE e PW , que pode ser testada conforme o equacionamento proposto por esses autores.

Por fim, a precipitação maximizada do período completo (P^*) não necessariamente quebrará mais ou menos recordes que P_s^* , já que depende de um dos valores de P_s^* sazonais quebrar o valor máximo até então observado de P^* . Na Figura 34 apresenta-se o desenvolvimento dos valores de P_s^* e a envoltória do valor de P^* resultante, com marcações para a contagem de recordes de P^* . A envoltória para P^* é representada com uma linha preta tracejada na Figura 34 para que possa ser comparada com a linha do período sazonal cujo valor de P_s^* quebrou o recorde que causou a modificação do valor de P^* . Da Figura 34, observa-se que a maioria dos valores de P^* parecem ter sido advindos do período sazonal do verão, que possui os maiores parâmetros de escala e posição de PE e PW (ver Tabela 12). O valor final de P^* advém dos recordes de $PE = 3,98$ e $PW = 85,76$ observados no período sazonal do verão nos anos de

1978 e 1980, respectivamente (ver Tabela 9). Na Figura 34, observa-se ainda que ao longo dos 57 anos avaliados ocorreram 10 quebras de recorde no valor de P^* , contra 12, 10, 8 e 7 nos períodos sazonais da primavera, verão, outono e inverno.

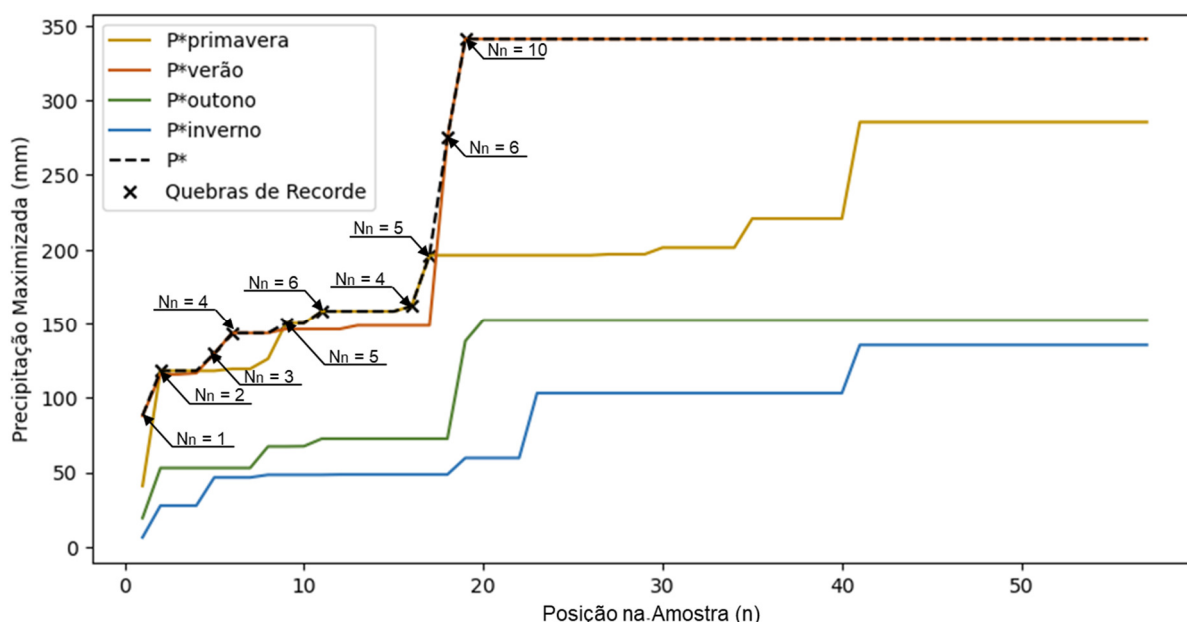


Figura 34 – Valores recordes observados de P_s^* e P^* , em conjunto com a contagem de recordes (N_n) de P^* . Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Até então foi apresentada e discutida a trajetória específica dos valores da precipitação maximizada observada em Belo Horizonte. Assumindo que PE e PW são variáveis aleatórias com distribuições conhecidas, conforme definido na metodologia desse trabalho, essa pode ser considerada apenas uma das inúmeras possíveis trajetórias que poderiam ter sido observadas no período de análise. A partir desse ponto, volta-se à análise dos tempos e valores recordes do conjunto de todas as trajetórias possíveis, a partir da aplicação do processo de Monte Carlo proposto.

Inicia-se essa discussão tratando dos tempos de ocorrência de recordes, que embasarão a avaliação das probabilidades de ocorrência de recordes no valor da precipitação maximizada durante a vida útil de uma estrutura hidráulica. Avaliada essa probabilidade, procede-se para estimativa dos valores dessa possível majoração, já que a simples ocorrência de um recorde na precipitação maximizada por si só não é suficiente para gerar possíveis impactos no nível de risco estimado de uma obra hidráulica se o aumento não for elevado o suficiente.

Conforme discutido no Item 6.3.1 - Tempo de Ocorrência dos Recordes da Precipitação Maximizada, podem ser obtidas expressões analíticas para aproximação das probabilidades de ocorrência de recordes em P_s^* durante um período definido assumindo a contagem de quebras de recordes esperada. Ainda conforme notado, não foi encontrada expressão analítica para a probabilidade da ocorrência de recordes na precipitação maximizada do período completo.

Procede-se, então, com a estimativa da probabilidade de ocorrência de um recorde entre duas posições em uma trajetória de P^* a partir da Equação (127), fazendo uso do processo de Monte Carlo proposto. Conforme discutido, essa probabilidade pode ser utilizada para avaliação da probabilidade de ocorrer uma mudança no valor até então calculado da PMP durante a vida útil de uma estrutura hidráulica. Na Figura 35, apresenta-se o valor da probabilidade de não ocorrência de recordes durante $j = 10, 25$ e 50 observações para valores de n variando entre 1 e 200. Em avaliação às curvas apresentadas na Figura 35 observa-se que a probabilidade de ocorrência de recordes em P^* durante j observações parece ser idêntica à de P_s^* . Para fim de validação dessa aparente identidade, na Figura 35 os marcadores “X” pretos representam as curvas de probabilidade de atualização de P_s^* estimadas também pelo processo de Monte Carlo. Nota-se que não foi encontrada uma prova formal para essa possível identidade identificada.

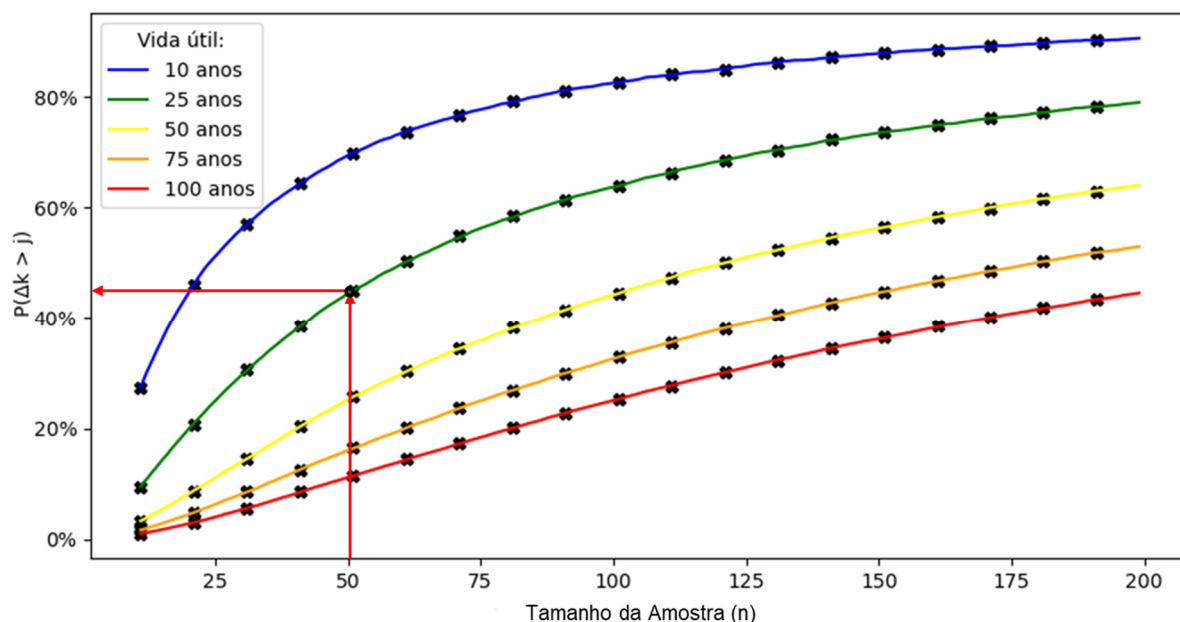


Figura 35 – Aproximação da probabilidade de não ocorrência de recordes no valor calculado de P^* (linhas) e P_s^* (marcadores) com base em uma amostra de n observações durante $j = 10, 25, 50, 75$ e 100 anos. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Essa figura pode ser interpretada da mesma forma que a Figura 6 e a Figura 23, ou seja, partindo de uma série com um certo comprimento n e um valor definido de j , as curvas indicam a probabilidade de o intervalo até o próximo recorde ser maior que j . Com as setas vermelhas, apresenta-se um exemplo: partindo de uma amostra com 50 observações e com um aumento de 25 no tamanho da amostra, ou seja, passando para 75 observações, a probabilidade de não terem ocorrido quebras de recorde ao longo das 25 novas observações é de cerca de 44 %. Assim, a probabilidade de ocorrência de ao menos um recorde será de 66 %. Nota-se que as probabilidades apresentadas na Figura 35 para o período sazonal da primavera, estimadas pela Equação (127), são diferentes daquelas aproximadas pela consideração de $k = E[N_n]$ apresentados na Figura 23, a passo que $E[N_n]$ é diferente da mediana de N_n (Ver Equação (38) e Figura 5).

Como discutido, a ocorrência de recordes no valor até então calculado de P^* somente demonstra-se significativa para uma estrutura hidráulica se a magnitude do novo valor for suficientemente elevada para causar uma modificação da avaliação do nível de risco dessa estrutura. Nesse contexto, nota-se que os resultados apresentados nesse trabalho se limitam à avaliação da magnitude da modificação da precipitação maximizada, não sendo verificados os possíveis impactos no valor da PMP, CMP ou

até mesmo na borda livre de uma estrutura hidráulica, que seriam necessárias para plena caracterização dos possíveis impactos causados por essas hipotéticas quebras de recorde. Nota-se, entretanto, que a integração dos resultados aqui apresentados com o contexto específico de uma bacia hidrográfica e estrutura hidráulica é imprescindível no momento de verificação dos possíveis impactos que possam ser causados nessa estrutura.

Conforme apresentado nas Equações (128) e (129) o cálculo do aumento do valor da precipitação maximizada pode ser feito de duas formas, assumindo ou não que houve a um recorde. Nota-se que a avaliação da distribuição de probabilidades desse aumento parece ser mais adequada assumindo que ocorreu um recorde, com o objetivo de promover a separação dos dois processos, um primeiro binomial de sorteio da ocorrência ou não de um recorde e um segundo, contínuo, de definição do valor do aumento relativo desse recorde.

Em função de não ter sido obtida expressão analítica para a distribuição de probabilidades do valor de P^* , a distribuição de probabilidades do valor desse aumento em caso de ocorrência de recordes não pôde ser obtida de forma analítica, sendo aproximada para Belo Horizonte a partir do processo de Monte Carlo proposto conforme a Equação (134). Na Figura 36 apresenta-se o resultado da estimativa da distribuição de probabilidades do aumento do valor calculado da precipitação maximizada para $n = 50$ e $j = 10, 25$ e 50 . Em (A) e (B), respectivamente, representa-se a FDP e FAP estimadas dos valores do aumento condicional $(\Delta P_{n \rightarrow n+j}^* | (P_{n+j}^* > P_n^*) > x)$ para os valores selecionados de n e j . Para esse tamanho de amostra inicial ($n = 50$), assumindo uma obra hidráulica com 25 anos de vida útil nota-se que, dado que ocorra um recorde (probabilidade de 66% de ocorrência, ver Figura 35), o aumento mediano (demarcado pelas setas vermelhas em B) é da ordem de 10 %, com os quantis de 75 % e 90 % chegando a valores por volta de 20 % e 35 %.

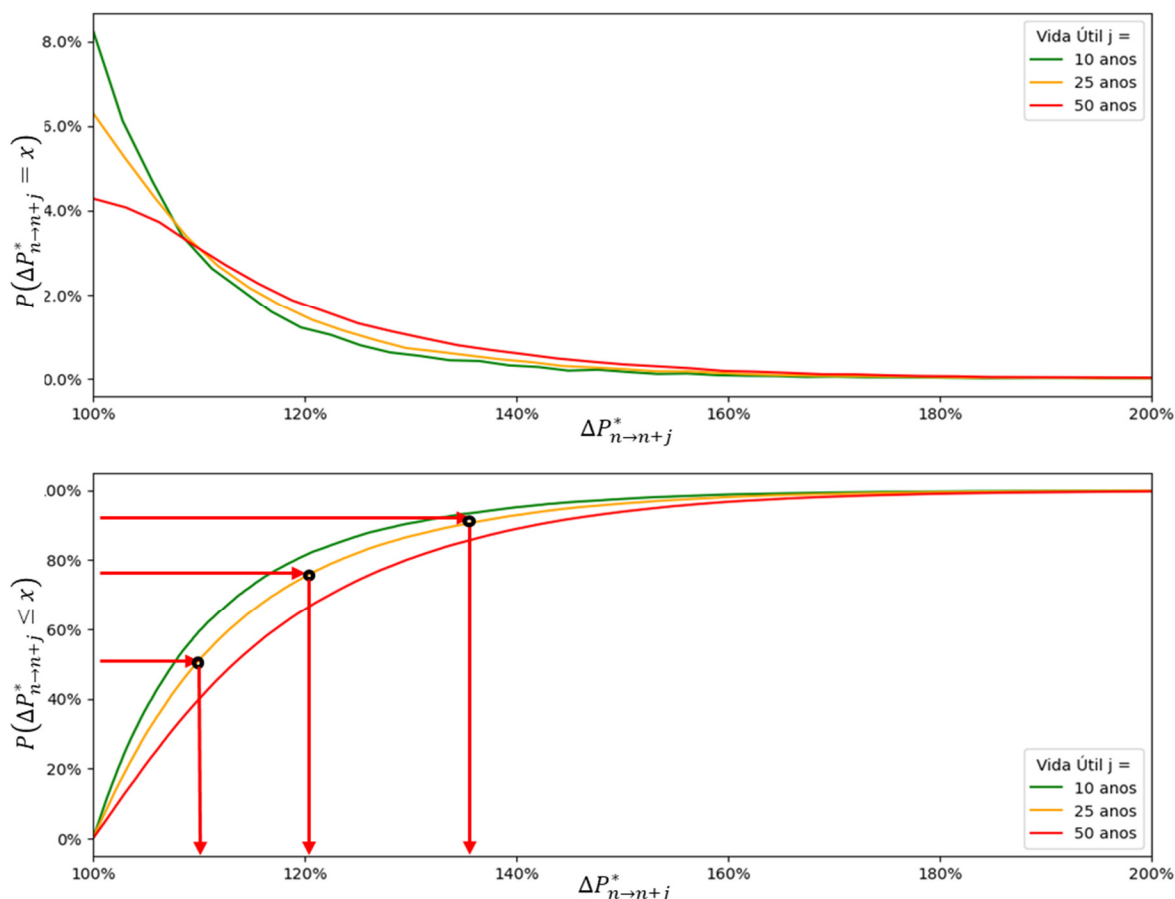


Figura 36 – Aproximação da FDP (A) e FAP (B) da razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações para $n = 50$ anos e $j = 10, 25, 50$ anos. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Comparando os valores de cerca de aumento de 110% para as medianas e de 135% para o quantil de 90% obtidos para $n = 50$ e $j = 25$ com os valores de borda livre operacional tipicamente recomendados na literatura técnica para canais (PINHEIRO, 2011 e TUCCI *et al.* 2015), que tendem a variar entre 20% e 30%, a faixa de possíveis aumentos do valor da precipitação maximizada é relevante. Evidentemente, um aumento de 10% no valor da precipitação não acarretará necessariamente em uma perda de 10% de borda livre, já que o processo de transformação de chuva e vazão, de amortecimento e de escoamento dessas vazões ao longo da bacia e estrutura hidráulica não são lineares. Independentemente, esses resultados parecem apontar para a importância da avaliação dos impactos dessas possíveis majorações no valor da PMP causadas pela majoração da precipitação maximizada no nível de risco de estruturas hidráulicas de grande porte.

O exemplo para $n = 50$ e $j = 10, 25$ e 50 acima apresentado é um de um conjunto muito maior de possíveis combinações de n e j . Como a distribuição de probabilidades do aumento condicional $(\Delta P_{n \rightarrow n+j}^* | (P_{n+j}^* > P_n^*) > x)$ correlaciona quatro variáveis: precipitação, probabilidade, n e j , sua representação em uma única figura fica dificultada. Na Figura 37, apresenta-se a forma da distribuição do aumento condicional para as possíveis combinações de $n = 25, 50, 100$ e 250 (linhas) com $j = 10, 25$ e 50 (colunas). Como esperado, observa-se que quanto maior o valor de n , menores tendem a ser os valores do aumento condicional, enquanto o quanto maior o valor de j , maiores tendem a ser.

Observa-se que o processo de modificação da posição, escala e forma da distribuição de probabilidades do aumento condicional é contínuo, não existindo nenhum par de valores específico de n e j que elimine completamente o risco (Figura 35) ou valor (Figura 36) de quebras de recorde nos valores da precipitação maximizada. Sendo assim, em detrimento da utilização de algo como um fator de majoração para o valor da precipitação maximizada, recomenda-se que, na prática, seja desenvolvida uma análise de riscos específicos para avaliação dos possíveis impactos dessas quebras de recorde na estrutura hidráulica em questão.

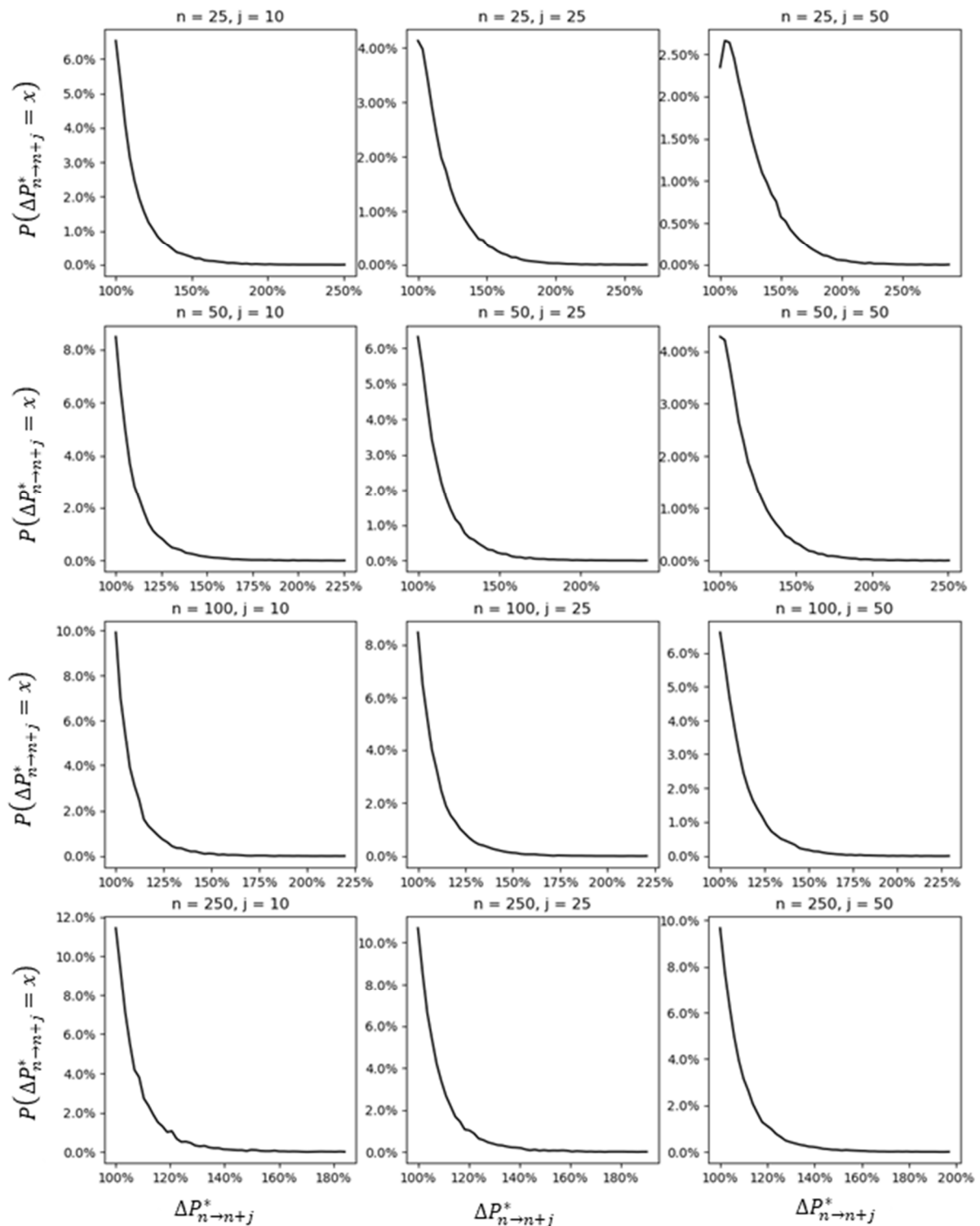


Figura 37 – Aproximação da FDP a razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações para $n = 25, 50, 100$ e 250 anos (linhas) e $j = 10, 25, 50$ anos (colunas). Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Como uma forma de tornar os resultados de mais fácil interpretação e visualização, elabora-se as curvas do valor esperado do aumento condicional ($E[\Delta P^*_{n \rightarrow n+j} | (P^*_{n+j} > P^*_n) > x]$) em função de n e j , representadas na Figura 38. Essas curvas são

apresentadas de forma similar às que representam a probabilidade de ocorrência de recordes no período j (Figura 35), com o eixo das abscissas representando o valor de n , o eixo das ordenadas representando o valor do aumento e cada linha representando uma vida útil j distinta. Evidentemente, para uma dada vida útil (j), com o aumento do tamanho original da amostra (n), o valor esperado do aumento diminui. Observa-se, entretanto, que apesar de possuir uma assíntota horizontal em zero, não há um valor específico de n para o qual o aumento esperado é zero.

Na Figura 38 também são demarcados os aumentos esperados para os diversos valores de j e $n = 50$, que variam de 111 % a 122 %. Novamente, quando comparados com as bordas livres tipicamente recomendadas na literatura de 20 % a 30 % (PINHEIRO, 2011 e TUCCI *et al.* 2015), os aumentos esperados são relevantes. Reitera-se que a relação entre aumento da precipitação de projeto e redução da borda livre não é linear e não foi avaliada, cabendo a avaliação apresentada apenas para análise da ordem de grandeza dos resultados obtidos.

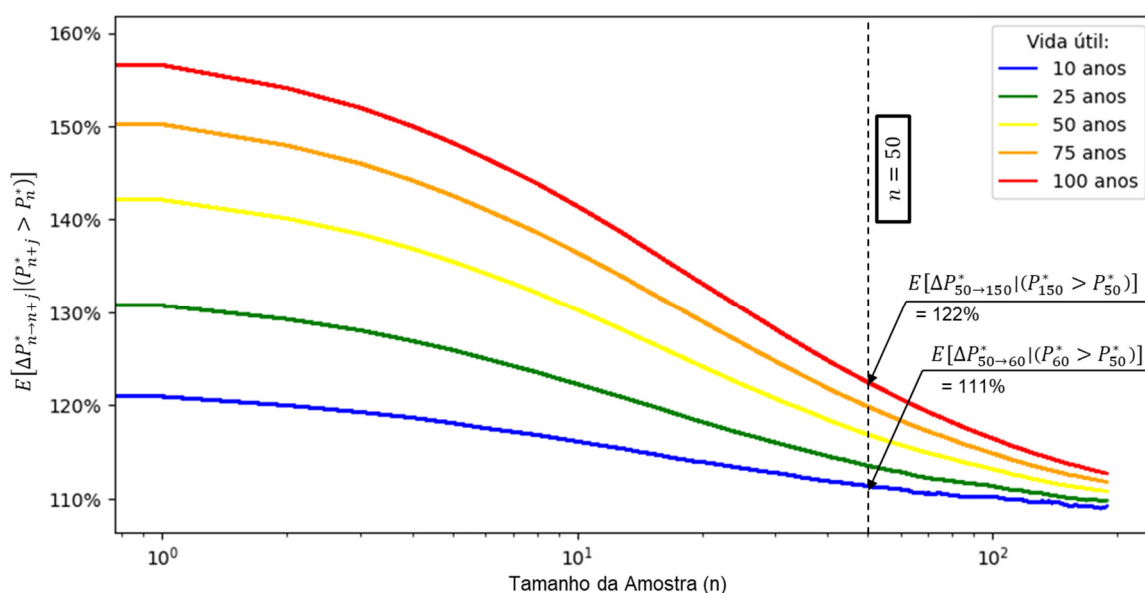


Figura 38 – Aproximação do valor esperado da razão entre o valor calculado de P^* com base em amostras de $n+j$ e n observações como função de n para $j = 10, 25, 50, 75$ e 100 anos. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Reitera-se que as curvas de valor esperado do aumento condicional são apresentadas para avaliação do comportamento geral do aumento condicional, e não foram propostas com o intuito de serem utilizadas como um fator de majoração, já que o uso dessas curvas como fator de segurança desconsidera toda a possível variabilidade desse aumento em torno da média, representado na Figura 38.

8 CONCLUSÕES

Para modelagem probabilística da precipitação maximizada, fez-se uso de sistemática análoga à proposta por Alaya *et al.* (2018), representando o valor da precipitação maximizada de um período sazonal como o produto dos máximos observados de PE e PW daquele período. Para tal, foi necessária a seleção e ajuste da distribuição de probabilidades conjunta de PE e PW . Fazendo o uso da base de dados consitida para todo o território nacional avaliou-se as premissas necessárias para ajuste dessa distribuição. Primeiro, avaliou-se o grau de correlação dos máximos de PE e PW , constatando-se que, apesar de parecer existir certo grau de correlação, ele não parece ser passível de modelagem com base nos dados de uma única estação. Segundo, para validação da representatividade da distribuição de Gumbel, aplicou-se o Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov a um nível de significância de 5 %, observado-se esultados que validam a premissa de utilização da distribuição.

Como consequência da utilização de distribuição sem limite superior para modelagem de PE e de PW o valor esperado e variância de $\hat{P}_s^*$ e $\hat{P}^*$ tendem para o infinito com o aumento do tamanho da amostra. Se a variância cresce para o infinito com o aumento da amostra constatou-se, então, que os valores estimados da precipitação maximizada não tendem a convergir para um valor específico, mesmo com o aumento do tamanho da amostra. Entretanto, o valor esperado cresce para o infinito a uma taxa mais elevada que o desvio padrão, resultando em um coeficiente de variação que tende para zero. Sendo assim, apesar de não haver uma convergência dos valores da precipitação maximizada, o grau de variabilidade das estimativas em torno da média torna-se insignificante. Fazendo uso do coeficiente de variação como uma medida de incerteza (SHECHTMAN, 2013), conclui-se que as incertezas inerentes à estimativa da PMP Hidrometeorológica tornam-se arbitrariamente reduzidas com o aumento da amostra. Obtendo a derivada parcial dos dois primeiros momentos de $\hat{P}_s^*$ em função do tamanho da amostra, por vez, observa-se que a taxa de crescimento do valor esperado e variância tendem a diminuir com o aumento do tamanho a amostra. Ambos resultados reforçam a importância de utilização de amostras suficientemente grandes para estimativa da precipitação maximizada, conforme recomendado pela WMO (2009).

Para o estimador da PMP Estatística Salas *et al.* (2014) constatam que o valor esperado das estimativas converge para $\mu + K.\sigma$ e a variância para zero. Se comparados aos resultados obtidos, percebe-se uma diferença significativa entre o comportamento assintótico dos dois métodos, já que, independentemente do comportamento caudal da precipitação, o estimador da PMP Estatística convergirá para um valor finito com variância zero, enquanto o comportamento do estimador avaliado para a PMP Hidrometeorológica dependerá do comportamento caudal considerado para *PE* e *PW*.

A partir distribuição de probabilidades do estimador $\hat{P}^*$ ajustada no Estudo de Caso são inferidos os intervalos de confiança da precipitação maximizada, demonstrando-se que, apesar de possuir uma mediana de 271 mm para uma amostra de 50 anos em Belo Horizonte, a estimativa da precipitação maximizada pode variar consideravelmente mais. Ainda para uma amostra de 50 observações, nota-se que, os intervalos de confiança de 25% e 10% da precipitação maximizada variam, respectivamente de 230 mm a 332 mm (25%) e de 216 mm a 374 mm (10%). Essas diferenças são consideradas relevantes, já que as distâncias entre esses limites é de respectivamente 103 mm e 158 mm, iguais a 38% e 58% do valor mediano.

Ainda com base no estudo de caso, conclui-se que as probabilidades de ocorrência de recordes nos valores estimados da precipitação maximizada durante a vida útil de obras hidráulicas são relevantes. Assumindo uma estimativa da PMP Hidrometeorológica com base em 50 anos de dados em Belo Horizonte conclui-se que há de 66% de chance de ocorrência de ao menos um recorde durante 25 anos de vida útil, resultando em uma modificação do valor calculado da CMP.

Para a quebra de um recorde no valor calculado da precipitação maximizada ser relevante para uma estrutura hidráulica, entretanto, ele deve ter valor suficientemente elevado para causar uma possível modificação da classificação de nível de risco dessa estrutura. Dado que houve uma quebra de recorde, é esperado que o valor da precipitação maximizada após 25 anos tenha aumentado em cerca de 13% para uma estrutura projetada com base em uma amostra de 50 observações. Nota-se que nesse mesmo contexto, o aumento da estimativa da PMP pode chegar a valores de 20% ou até mesmo 35% para os quantis superiores de 75% e 90% de probabilidade de não

superação, respectivamente. Avalia-se esses possíveis aumentos como relevantes, já que se têm a mesma ordem de grandeza nas bordas livres tipicamente recomendadas para aplicação em obras hidráulicas de canais de 20% a 30% (PINHEIRO, 2011 e TUCCI *et al.* 2015). Nota-se, entretanto, que o aumento da precipitação maximizada em uma certa porcentagem não se converte linearmente em um mesmo aumento da CMP, nem na da redução da borda livre da estrutura. Sendo assim, recomenda-se que, para fim prático, os resultados e técnicas aqui apresentados sejam diretamente conectados com a variação da borda livre por meio de uso de técnicas de transformação de chuva em vazão e de modelos hidráulicos.

Acredita-se que os resultados obtidos são de particular importância para destacar a correlação entre o tamanho de amostra disponível e o nível de incerteza das estimativas resultantes da aplicação da técnica de maximização da umidade, podendo servir como base para seleção de critérios adequados para tamanhos de amostra necessários para estimação da PMP.

9 LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Para elaboração desse trabalho foram adotadas uma série de simplificações, cada uma levando a uma ou mais limitações de aplicação dos resultados obtidos, a saber:

- Para elaboração dos estudos, a técnica de maximização da umidade foi avaliada assumindo sua aplicação da forma mais simples possível dentro dos limites e recomendações estabelecidos por WMO (2009) e Alaya *et al.* (2018). Dentro desses limites, avaliaram-se as incertezas inerentes à estimativa da precipitação maximizada em um ponto com base em uma série histórica de máximos anuais de *PE* e *PW* nesse mesmo ponto ao nível do solo. Sendo assim, desconsiderou-se possíveis efeitos causados pelo transporte de umidade por vento ao longo da totalidade da altura da atmosfera, bem como a possibilidade de aplicação de técnicas de transposição de tempestades e de análise de envoltórias regionais da umidade do ar;
- Assumiu-se que os parâmetros populacionais dos máximos anuais de *PE* e *PW* são idênticos àqueles estimados com base no método dos momentos-I para a distribuição de Gumbel. Evidentemente, no momento da aplicação dos resultados apresentados é necessária a inferência de parâmetros, que incorpora um nível de erro não avaliado nesse trabalho. Sendo assim, para fim da aplicação prática dos resultados aqui obtidos, desconsidera-se quaisquer erros inerente ao processo de inferência de parâmetros;
- Mesmo sendo observados indícios de correlação entre os máximos anuais de *PE* e *PW*, constatou-se que os dados disponíveis em uma estação meteorológica não são suficientes para validação dessa premissa ou definição do sentido da correlação em uma escala local. Por esse motivo, considerou-se que os máximos anuais de *PE* e *PW* são independentes;
- Para fim da modelagem do comportamento sazonal dos máximos anuais de *PE* e *PW* considerou-se a subdivisão do ano hidrológico em quatro períodos sazonais, assim como considerado por Alaya *et al.* (2018). Já que não foram avaliadas outras subdivisões além da proposta, não é possível concluir diretamente o impacto do número de subdivisões sazonais nos valores estimados da precipitação maximizadas a partir das análises elaboradas. Recomenda-se a elaboração de estudos adicionais para fim da avaliação dos

impactos causados pelo aumento ou redução do número de períodos sazonais considerados no resultado obtido para a chuva maximizada;

- Na modelagem dos máximos sazonais de *PE* e *PW* pela metodologia proposta faz-se necessária a seleção do comportamento caudal das respectivas distribuições dessas variáveis. Conforme demonstrado ao longo do texto, entretanto, muitos dos resultados obtidos são consequências diretas desse comportamento caudal modelado. Recomenda-se a posterior avaliação de outros comportamentos caudais, por meio, por exemplo, da avaliação dos impactos da modificação do fator de forma da distribuição GEV nos resultados obtidos;
- Para estimativa dos parâmetros das distribuições de *PE* e *PW* faz-se uso de dados de medição in-situ das estações do INMET. A existência de quaisquer possíveis erros nas medições é desconsiderada. Adicionalmente, foram utilizados anos hidrológicos com frequência de falhas de medição de até 10%. Sendo assim, é possível que os valores máximos de *PE* e *PW* selecionados sejam inferiores aos que e fato ocorreram na realidade, já que é possível que os eventos máximos tenham ocorrido justamente nesses dias de falha.
- Para elaboração dos estudos, desconsideraram-se possíveis efeitos de não estacionariedade dos máximos anuais de *PE* e *PW*. Reconhece-se, entretanto, que os processos climáticos podem apresentar comportamentos não estacionários quando observados em escalas de tempo suficientemente grandes (KLEMES et al., 1993 e KOUTSOYIANNIS, 2020). Alaya *et al.* (2018) discute brevemente a possibilidade de consideração de premissas de não estacionariedade no modelo probabilístico utilizado, que envolveriam a modelagem dessa não estacionariedade em conjunto das distribuições de *PE* e *PW*. Nesse contexto, se destaca a publicação de Salas *et al.* (2020), que apresenta uma revisão das técnicas até então utilizadas para incorporação de premissas de não estacionariedade em estimativas da PMP.
- Para sintetização de séries sazonais de *PE* e *PW* é assumido que não existe correlação entre os máximos anuais dessas variáveis entre os diversos períodos sazonais. Uma breve inspeção dessa premissa, entretanto, demonstra sua fragilidade, já que em um ano sistematicamente mais quente e

úmido os máximos sazonais de PW serão todos mais elevados, enquanto em um ano frio e seco serão todos mais reduzidos.

- Em análise aos parâmetros de posição inferidos para a estação 83587 do INMET, em Belo Horizonte, nota-se que são selecionados valores de eficiência de precipitação (PE) sistematicamente mais elevados do que 1. Sendo $PE = P/W$, constata-se que as técnicas de estimativa da massa de água precipitável utilizadas não foram capazes de contabilizar a totalidade a umidade envolvida no processo de formação das precipitações. Esses resultados parecem confirmar a importância da consideração de possíveis efeitos orográficos (WMO, 2009) e de práticas recentes de rastreamento das fontes de umidade das tempestades para definição da umidade máxima de referência PW (ver SU e SMITH, 2021).

REFERÊNCIAS

- ALAYA, MA Ben; ZWIERS, F.; ZHANG, X. Probable maximum precipitation: Its estimation and uncertainty quantification using bivariate extreme value analysis. *Journal of Hydrometeorology*, v. 19, n. 4, p. 679-694, 2018.
- ALEXANDER, G. N. Using the probability of storm transposition for estimating the frequency of rare floods. *Journal of Hydrology*, v. 1, n. 1, p. 46-57, 1963.
- ALMEIDA, L. V. Q., ALMEIDA, M. C., ANDRADE, P. L. Estudo da influência dos métodos de obtenção da Precipitação Máxima Provável para a determinação da chuva de projeto em reservatórios de barragens. XV Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste. 2020.
- ALI, Mohamed. PDF of the product of two independent Gamma random variables. Disponível em: <https://math.stackexchange.com/questions/2396324/pdf-of-the-product-of-two-independent-gamma-random-variables>. Acesso em: 15 nov. 2023. 2018.
- ARNOLD, Barry C.; BALAKRISHNAN, Narayanaswamy; NAGARAJA, Haikady N. Records: Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 2011.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. NBR 13.028. Mineração – Elaboração e apresentação de projeto de barragens para disposição de rejeitos, contenção de sedimento e reservação de água – Requisitos. Rio de Janeiro, 2017.
- BERTONI, J.C. e TUCCI, C.E. Precipitação, em: *Hidrologia: ciência e aplicação*. Porto Alegre, Ed. UFRG/ABRH/EDUSP, p.177-241, 1993.
- CALLEGARI-JACQUES, Sidia M. Bioestatística: princípios e aplicações. Artmed Editora, 2009.
- CANADIAN DAM ASSOCIATION (CDA). Technical Bulletins. Published as a set to supplemental Dam Safety Guidelines. Disponível em: www.cda.ca. 2007.

CEBRIÁN, A. C.; CASTILLO-MATEO, J.; ASÍN, J. Record tests to detect non-stationarity in the tails with an application to climate change. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2022.

CHANDLER, K. N. The Distribution and Frequency of Record Values. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. Royal Statistical Society. 1952.

CRUTCHER, H. L. A note on the possible misuse of the Kolmogorov-Smirnov test. *Journal of Applied Meteorology*, 14, pp. 1600-1603, 1975.

DA COSTA, Karoline Tenório. Avaliação de distribuições de probabilidades das vazões médias diárias máximas anuais do Brasil. 2014.

DI SALVO, Francesca. A characterization of the distribution of a weighted sum of gamma variables through multiple hypergeometric functions. *Integral Transforms and Special Functions*, v. 19, n. 8, p. 563-575, 2008.

DOOGE, James Cl. Looking for hydrologic laws. *Water Resources Research*, v. 22, n. 9S, p. 46S-58S, 1986.

DOUGLAS, Ellen M.; BARROS, Ana P. Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States. *Journal of Hydrometeorology*, v. 4, n. 6, p. 1012-1024, 2003.

ELETROBRAS. “Guia para Cálculo de Cheia de Projeto de Vertedores”. Diretoria de Planejamento e Engenharia, Rio de Janeiro, 184 p. 1987.

EPSTEIN, Benjamin. Some applications of the Mellin transform in statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 370-379, 1948.

FERREIRA, Jaqueline Antunes et al. Avaliação dos planos de segurança de barragens e sua efetividade em relação à prevenção de acidentes. 2022.

FOX, Charles. The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 98, n. 3, p. 395-429, 1961.

GLEN, Andrew G.; LEEMIS, Lawrence M.; DREW, John H. Computing the distribution of the product of two continuous random variables. *Computational statistics & data analysis*, v. 44, n. 3, p. 451-464, 2004.

GOMES, M. Ivette; GUILLOU, Armelle. Extreme value theory and statistics of univariate extremes: a review. *International statistical review*, v. 83, n. 2, p. 263-292, 2015.

GREENWOOD, J. Arthur et al. Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water resources research*, v. 15, n. 5, p. 1049-1054, 1979.

GUMBEL E. J. *Statistics of Extremes*. New York: Columbia University Press, 1958.

HAAN, C. T. *Statistical Methods in Hydrology*. Ames (IA): The Iowa University Press, 1977.

HANSEN, E. M. Probable Maximum Precipitation for Design Floods in The United States. *Journal of Hydrology*, Amsterdam, 17 out. 1987.

HANSEN, E.M., SCHWARZ, F.K., RIEDEL, J.T. Probable maximum precipitation estimates, Colorado River and Great Basin drainages. *Hydrometeorol. Rep. No. 49*, Natl. Weather Serv., U.S. Dep. Commer., Silver Spring, Md., 161 pp. 1977.

HERSHFIELD, D. M. Estimating the probable maximum precipitation. In: *Journal of Hydraulics Division*. American Society of Civil Engineers., v. 87, n.5, New York Set., p.99-116, 1961.

HIRAGA Y, ISERI Y, WARNER MD, FRANS CD, DUREN AM, ENGLAND JF, KAVVAS ML. Comparison of Model-Based Precipitation Maximization Methods: Moisture Optimization Method, Storm Transposition Method, and Their Combination. *Journal of Hydrologic Engineering*. 2022.

HOSKING, Jonathan RM. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, v. 52, n. 1, p. 105-124, 1990.

HOSKING, Jonathan Richard Morley; WALLIS, James R.; WOOD, Eric F. Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*, v. 27, n. 3, p. 251-261, 1985.

INMET - Instituto Nacional de Meteorologia. "BDMEP - Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa". Brasília. Disponível em: <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep>. Acesso em: 20/05/2023. 2018.

KENDALL, Maurice; STUART, Alan. The advanced theory of statistics. Vol. 1: Distribution theory. London: Griffin, 1977.

KHUDRI, Md Mohsan; SADIA, Farhana. Determination of the best fit probability distribution for annual extreme precipitation in Bangladesh. *European Journal of Scientific Research*, v. 103, n. 3, p. 391-404, 2013.

KIEFER, J. Maurice G. Kendall, Alan Stuart, The Advanced Theory of Statistics, Volume 2, "Inference and Relationship". *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 35, n. 3, p. 1371-1380, 1964.

KLEMES, V. Probability of extreme hydrometeorological events - a different approach. *IAHS PUBLICATION*, p. 167-167, 1993.

KLEMES, V.; NIKLEVA, S.; CHIN, W. Q. Probability of a PMP—A feasibility study. *Dam Safety*, v. 1992, p. 1-16, 1992.

KOUTSOYIANNIS, Demetris. A probabilistic view of Hershfield's method for estimating probable maximum precipitation. *Water resources research*, v. 35, n. 4, p. 1313-1322, 1999.

KOUTSOYIANNIS, D. Stochastics of hydroclimatic extremes—A cool look at risk. National Technical University of Athens: Athens, Greece, 2021.

LIMA, Sâmira Silva; DA SILVA, Kelvis Nunes; LOUREIRO, Glauber Epifanio. XV SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE. 2020

LINSLEY JR, Ray K.; KOHLER, Max Adam; PAULHUS, Joseph LH. Hydrology for engineers. 1975.

MARENGO, Jose Antonio. Impactos de extremos relacionados com o tempo e o clima–Impactos sociais e econômicos. Boletim do Grupo de Pesquisa em Mudanças Climáticas–GPMC, Edição Especial, 2009.

MEIJER, C. S. Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte. Nieuw Archief voor Wiskunde, v. 18, n. 2, p. 10-29, 1936.

MEMPR, B. C. Health, Safety and Reclamation Code for Mines in British Columbia. Victoria, C.-B.: ministère de l'Énergie, des Mines et des Ressources pétrolières de la Colombie-Britannique (MEMRP C.-B.), Division des mines et des minéraux, 2008.

MICOVIC, Zoran; SCHAEFER, Melvin G.; TAYLOR, George H. Uncertainty analysis for probable maximum precipitation estimates. Journal of Hydrology, v. 521, p. 360-373, 2015.

MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA (Brasil). Associação Nacional de Mineração (ANM). Consolida os atos normativos que dispõem sobre segurança de barragens de mineração. Resolução nº 95. 7 fev. 2022.

MOOD, A., GRAYBILL, F. e BOES, D.C. 1974. Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edn., McGraw Hill, New York

MORITZ, Dominik; FISHER, Danyel. Visualizing a million time series with the density line chart. arXiv preprint arXiv:1808.06019, 2018.

MYERS, Jerome L.; WELL, Arnold D.; LORCH JR, Robert F. Research design and statistical analysis. Routledge, 2013.

MYERS, V.A., Estimation of extreme precipitation for spillway design floods. Tech. Mem. WBTM HYDRO-5, U.S. Weather Bur., Washington, D.C., 29 pp. 1967.

NAGHETTINI, M; PINTO, E. J. A. Hidrologia estatística. CPRM, 2007.

NEUTS, Marcel F. Waitingtimes between record observations. *Journal of Applied Probability*, v. 4, n. 1, p. 206-208, 1967.

NIMER, E. *Climatologia do Brasil*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) - Departamento de Recursos Naturais e Estudos Ambientais, 1989.

OSTERTAGOVA, Eva; OSTERTAG, Oskar; KOVÁČ, Jozef. Methodology and application of the Kruskal-Wallis test. *Applied mechanics and materials*, v. 611, p. 115-120, 2014.

PAPALEXIOU, S.M., KOUTSOYIANNIS, D. A probabilistic approach to the concept of Probable Maximum Precipitation. *Adv. Geosci.*, 7, 51–54, <https://doi.org/10.5194/adgeo-7-51-2006>. 2006.

PAPALEXIOU, Simon Michael; KOUTSOYIANNIS, Demetris. Battle of extreme value distributions: A global survey on extreme daily rainfall. *Water Resources Research*, v. 49, n. 1, p. 187-201, 2013.

VIRTANEN, P; Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, CJ Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E.A. Quintero, Charles R Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. (2020) *SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python*. *Nature Methods*, 17(3), 261-272.

PEARSON, C. P. New Zealand regional flood frequency analysis using L-moments. *Journal of Hydrology (New Zealand)*, p. 53-64, 1991.

PINHEIRO M.C. *Diretrizes para Elaboração de Estudos Hidrológicos e Dimensionamentos Hidráulicos em Obras de Mineração*, Porto Alegre, ABRH, 308 p. 2011.

PISHRO-NIK, Hossein. Introduction to probability, statistics, and random processes. Blue Bell, PA, USA: Kappa Research, LLC, 2014.

SALAS, J. D., ANDERSON, M. L., PAPALEXIOU, S. M., & FRANCES, F. PMP and climate variability and change: a review. Journal of Hydrologic Engineering, v. 25, n. 12, p. 03120002, 2020.

SALAS, J. D., GAVILÁN, G., SALAS, F. R., JULIEN, P. Y., & ABDULLAH, J. Uncertainty of the PMP and PMF. Handbook of engineering hydrology, 2, 575-603. 2014.

SAXENA, R. K.; RAM, Chena. Application of Mellin transform to statistical distributions. Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, p. 123-132, 1993.

SCHREINER, L.C., RIEDEL, J.T. Probable maximum precipitation estimates, United States east of the 105th meridian. Hydrometeorol. Rep. No. 51, Natl. Weather Serv., U.S. Dep. Com- mer., Silver Spring, Md., 87 pp. 1978.

SERINALDI F, KILSBY CG. Unsurprising surprises: The frequency of record-breaking and over threshold hydrological extremes under spatial and temporal dependence. Water Resources Research. 2018.

SHECHTMAN, Orit. The coefficient of variation as an index of measurement reliability. In: Methods of clinical epidemiology. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 39-49.

SILVEIRA, Geraldo Lopes da. Quantificação de vazão em pequenas bacias com carência de dados fluviométricos. 1997.

SPRINGER, Melvin Dale; THOMPSON, W. E. The distribution of products of independent random variables. SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 14, n. 3, p. 511-526, 1966.

SPRINGER, Melvin Dale; THOMPSON, William E. The distribution of products of beta, gamma and Gaussian random variables. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 18, n. 4, p. 721-737, 1970.

SU, Yibing; SMITH, James A. An atmospheric water balance perspective on extreme rainfall potential for the contiguous US. *Water Resources Research*, v. 57, n. 4, 2021.

SUGAI, M.R.V.B. Tempo de Recorrência Associado à Precipitação Máxima Provável na Região Sul do Brasil. Tese (Dissertação em Engenharia Hidráulica) - Centro de Hidráulica e Hidrologia Professor Parigot de Souza, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 124 p., 1989.

TEEGAVARAPU, R.V.S, SALAS, J.D., STEDINGER, J.R.. Statistical Analysis of Hydrologic Variables: Methods and Applications. American Society of Civil Engineers. 556p. 2019.

TOMLINSON, E. M. Probable maximum precipitation study for Wisconsin and Michigan. Volume 1, Final report. Electric Power Research Inst., Palo Alto, CA (United States); North American Weather Consultants, Salt Lake City, UT (United States), 1993.,

TUCCI, C., SILVEIRA, A., BENETTI, A., LANNA, A., BIDONE, F., SEMMELMAN, F., LOUZADA, J., BERTONI, J., ZAHED, K., BELTRAME, L. Hidrologia – Ciência e Aplicação, UFRGS, 943p. 2015.

VISSER, J. B., KIM, S., WASKO, C., NATHAN, R., & SHARMA, A. The impact of climate change on operational Probable Maximum Precipitation estimates. *Water Resources Research*, 58, e2022WR032247. 2022.

VOGEL, Richard M.; FENNESSEY, Neil M. L moment diagrams should replace product moment diagrams. *Water resources research*, v. 29, n. 6, p. 1745-1752, 1993.

VOGEL, R. M., ZAFIRAKOU-KOULOURIS, A., & MATALAS, N. C. Frequency of record-breaking floods in the United States. *Water Resources Research*, 37(6), 1723-1731. 2001.

WUEBBLES, D., MEEHL, G., HAYHOE, K., KARL, T. R., KUNKEL, K., SANTER, B. et al. CMIP5 climate model analyses: climate extremes in the United States. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 95(4), 571-583. 2014.

WERGEN G, KRUG J. Record-breaking temperatures reveal a warming climate. *EPL (Europhysics Letters)*. 2010.

WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION (WMO). "Manual on estimation of probable maximum precipitation (PMP) – 3. ed.", WMO issue nº 1045, Geneva, CH. 2009.

World Meteorological Organization (WMO). *Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation: (CIMO Guide)*. Geneva, Suíça. 2014

ZAPZALKA, Aislan Silveira; RIVAS, Ramon Sade Zapata. *A Importância da Revisão Periódica de Frequência de Vazões Máximas Para Barragens Existentes. estudo de Caso: UHE Salto Curucaca*. 2017.

APÊNDICE A – Estudo de Caso - Ajuste Distribuição Gumbel

A adequação do uso da distribuição de Gumbel para modelagem dos máximos anuais de PE e PW foi validada ao longo dos itens 6.1 (em escala nacional) e 7.2 (especificamente para a estação meteorológica do 83587 do INMET, em Belo Horizonte) por meio da aplicação do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov. Em complemento à avaliação da aderência por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov apresentada no estudo de caso, a seguir apresentam-se algumas métricas visuais usuais na hidrologia (NAGHETINNI e PINTO, 2009) para avaliação do ajuste de distribuições.

Na Figura 39 e na Figura 40 apresenta-se, respectivamente, comparação do histograma amostral de PE e PW por período sazonal com a função de densidade de probabilidade modelada pela distribuição de Gumbel. Os gráficos A, B, C e D apresentam, respectivamente, os ajustes da distribuição de máximos a cada um dos períodos sazonais: primavera, verão, outono e inverno. Todos eles são apresentados com a mesma escala de 0 a 4 para PE e de 30 a 100 para PW com o objetivo de permitir a visualização do deslocamento e mudança da forma das distribuições de densidade de probabilidade em função do período sazonal. Nas escalas apresentadas, a densidade amostrada das observações dos máximos anuais de cada estação foi, então, subdividida entre 20 subdivisões uniformes, a partir das quais se construiu o histograma amostral observado.

Na Figura 41 e na Figura 42, por vez, apresenta-se os mesmos resultados acima descritos, porém em termos acumulados, ou seja, apresenta-se a comparação da distribuição acumulada de probabilidades amostral e modelada pela distribuição de Gumbel para cada um dos períodos sazonais de PE e PW.

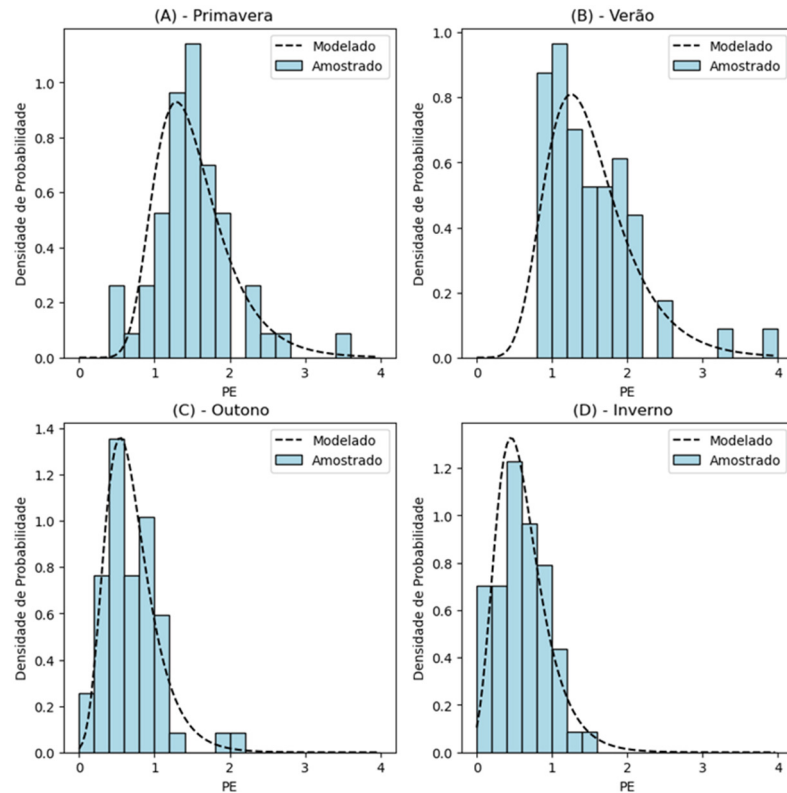


Figura 39 – Histograma amostral de PE por período sazonal e função de densidade de probabilidade modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.

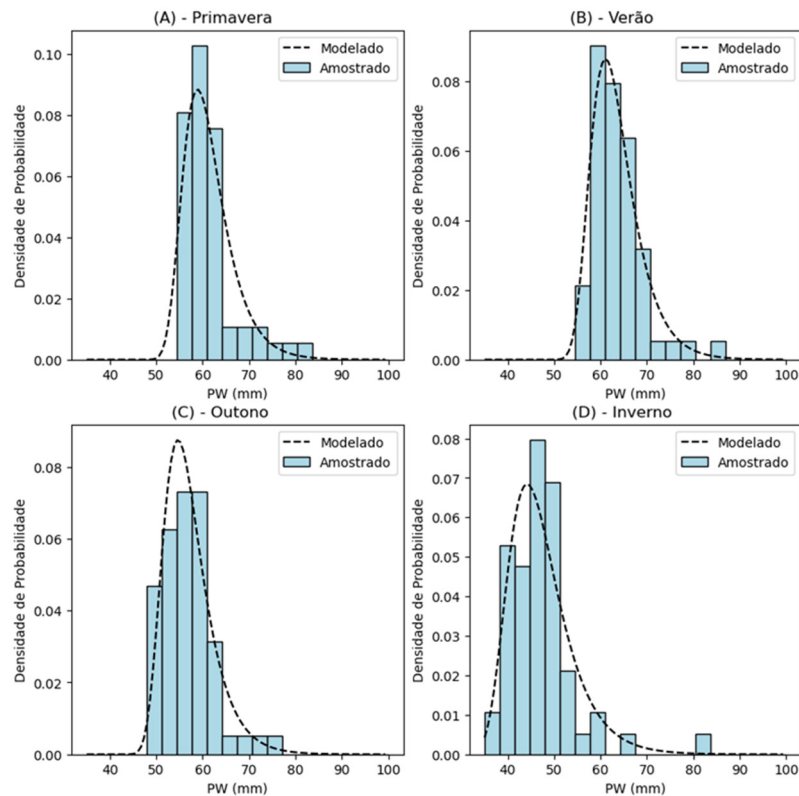


Figura 40 – Histograma amostral de PW por período sazonal e função de densidade de probabilidade modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno

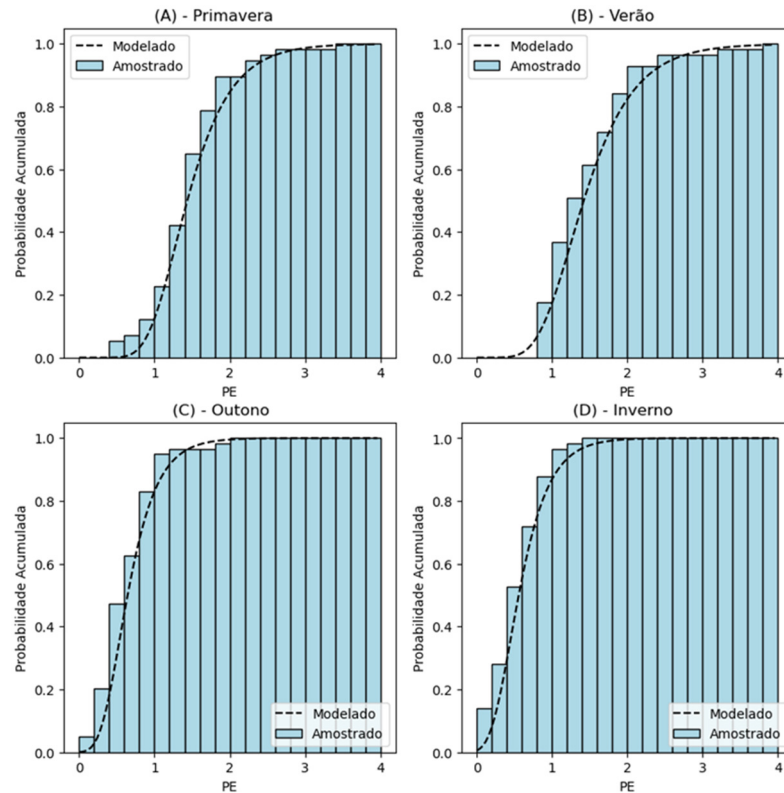


Figura 41 – Histograma amostral acumulado de PE por período sazonal e função de probabilidade acumulada modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.

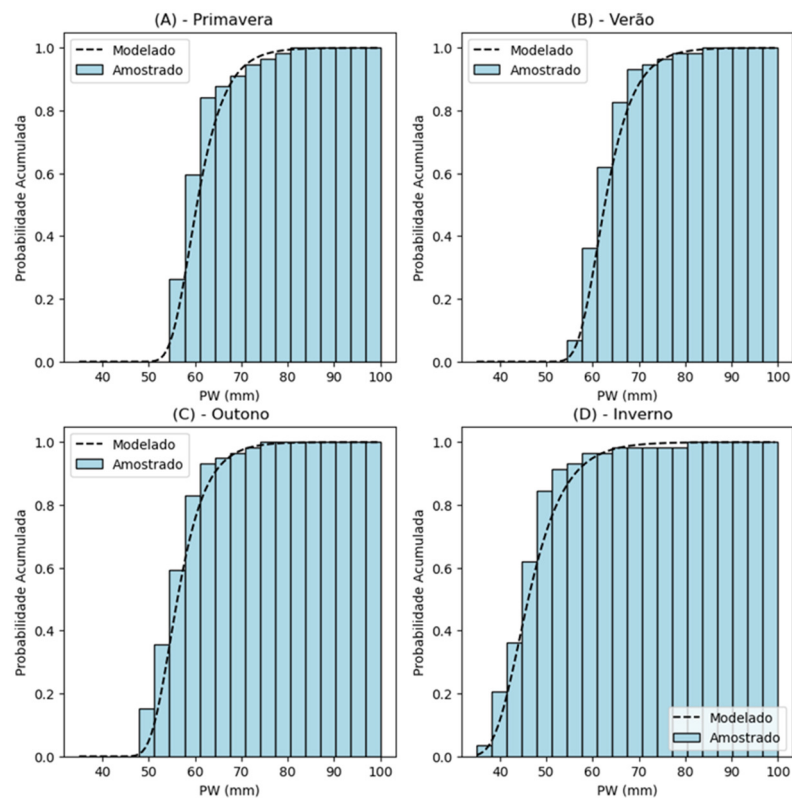


Figura 42 – Histograma amostral acumulado de PW por período sazonal e função de probabilidade acumulada modelada pela distribuição de Gumbel. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno.

Em análise aos pares de figuras, em alinhamento com os resultados apresentados na Tabela 12, observa-se uma tendência de aumento dos parâmetros de forma de PE e PW nas estações do verão e primavera se comparados aos observados no outono e inverno. Em análise visual aos ajustes obtidos não são observados possíveis desvios críticos que possam indicar um mau ajuste das distribuições modeladas.

Ainda em complemento às análises acima apresentadas, na Figura 43 e na Figura 44 apresenta-se comparação dos períodos de retorno amostrais contra os modelados pela distribuição de Gumbel. Para elaboração das figuras a amostra ordenada dos máximos anuais sazonais de PE e PW foi plotada no eixo das abscissas conforme suas posições de plotagem de Gringorten, considerada adequada para modelagem de dados distribuídos conforme a distribuição de Gumbel (ver NAGHETTINI e PINTO, 2009). Os eixos das ordenadas são padronizados para cada uma das variáveis, PE (0 a 4) e PW (30 a 100) com o objetivo de permitir a comparação do comportamento dos máximos de cada período sazonal.

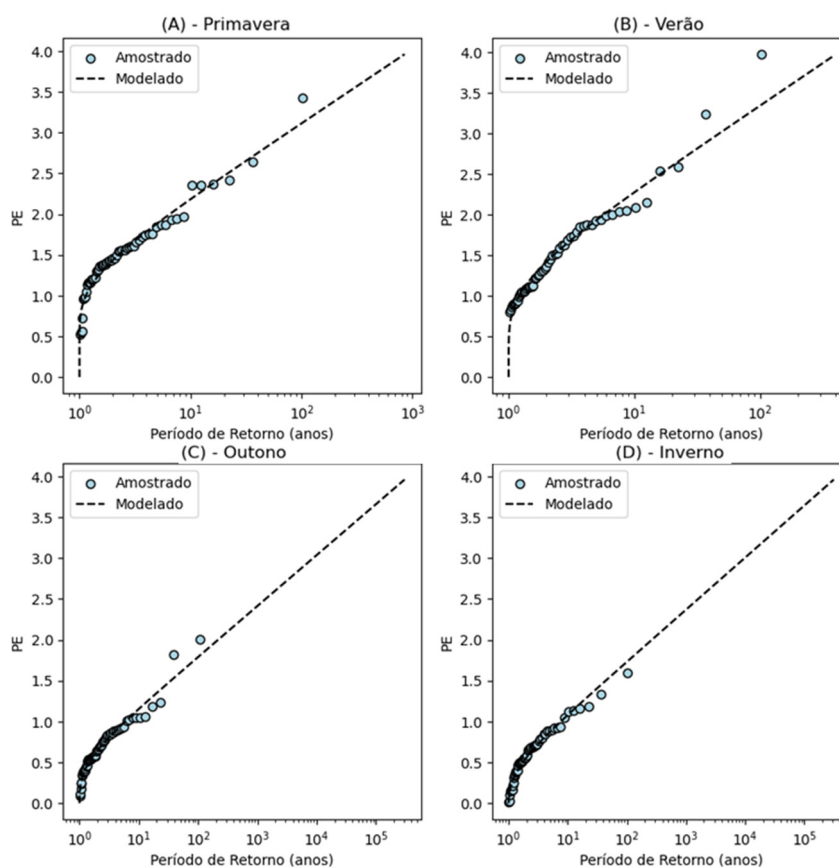


Figura 43 – Diagrama de quantis modelados e observados de PE por período sazonal. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno

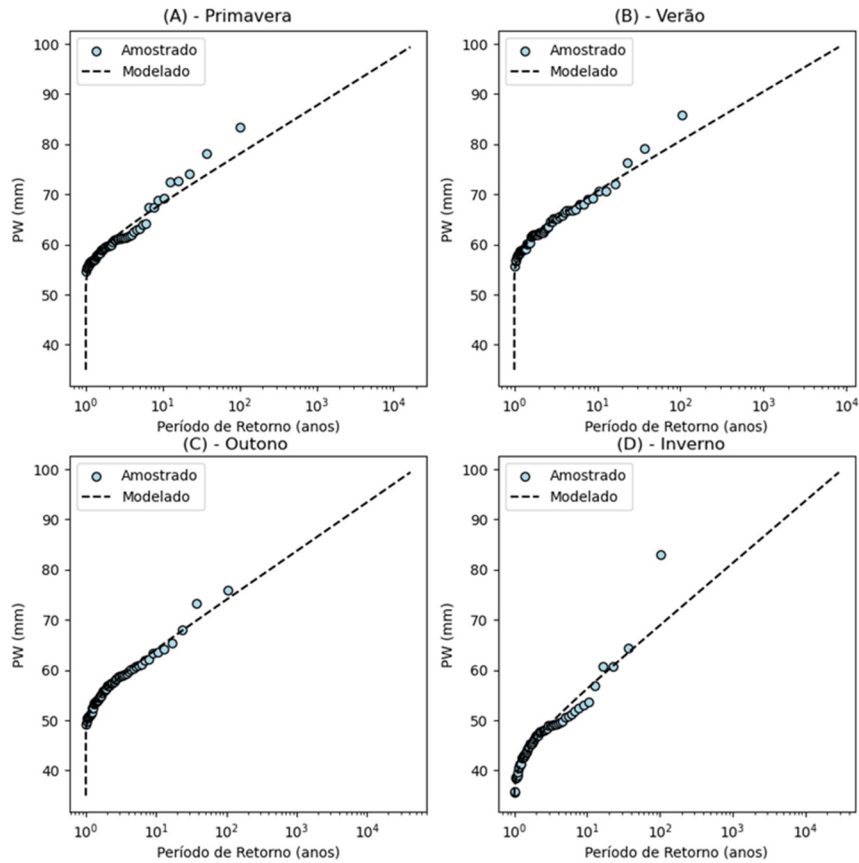


Figura 44 – Diagrama de quantis modelados e observados de PW por período sazonal. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte. (A) – Primavera; (B) – Verão; (C) – Outono; (D) – Inverno

Em análise às figuras, conclui-se que a distribuição de Gumbel é adequada para modelagem dos máximos anuais de PE e PW na estação INMET 83587, no Município de Belo Horizonte.

APÊNDICE B – Estudo de Caso - Trajetória da PMP Pontual

Do Quadro 1 ao Quadro 4 apresenta-se os máximos anuais de PE e PW , bem como os valores recordes dessas variáveis observados até cada posição n . A partir do produto de PE_{rec} e PW_{rec} , calcula-se o valor de P_s^* de cada ano, também apresentados do Quadro 1 ao Quadro 4.

Quadro 1 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal da Primavera. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Índice (n)	PE	PW	$PE_{rec}(n)$	$PW_{rec}(n)$	P_s^*
1	0,72	56,43	0,72	56,43	40,81
2	1,98	59,76	1,98	59,76	118,05
3	0,52	56,71	1,98	59,76	118,05
4	1,85	55,43	1,98	59,76	118,05
5	1,86	56,20	1,98	59,76	118,05
6	1,60	60,43	1,98	60,43	119,37
7	1,16	59,05	1,98	60,43	119,37
8	1,49	63,88	1,98	63,88	126,19
9	2,35	61,08	2,35	63,88	150,30
10	1,33	59,89	2,35	63,88	150,30
11	1,43	67,39	2,35	67,39	158,55
12	1,61	62,87	2,35	67,39	158,55
13	1,31	64,13	2,35	67,39	158,55
14	1,55	61,11	2,35	67,39	158,55
15	1,72	57,88	2,35	67,39	158,55
16	1,55	68,85	2,35	68,85	161,98
17	0,55	83,41	2,35	83,41	196,23
18	1,16	61,37	2,35	83,41	196,23
19	0,56	63,16	2,35	83,41	196,23
20	1,20	72,39	2,35	83,41	196,23
21	1,38	58,24	2,35	83,41	196,23
22	1,60	61,09	2,35	83,41	196,23
23	0,96	74,02	2,35	83,41	196,23
24	1,87	72,74	2,35	83,41	196,23
25	0,98	58,85	2,35	83,41	196,23
26	1,21	59,62	2,35	83,41	196,23
27	2,36	56,51	2,36	83,41	196,90
28	1,58	61,46	2,36	83,41	196,90
29	1,05	58,84	2,36	83,41	196,90
30	2,41	60,83	2,41	83,41	201,34

Índice (n)	PE	PW	PE _{rec} (n)	PW _{rec} (n)	P _s *
31	1,46	69,20	2,41	83,41	201,34
32	1,30	59,77	2,41	83,41	201,34
33	1,68	61,40	2,41	83,41	201,34
34	1,56	54,72	2,41	83,41	201,34
35	2,65	59,40	2,65	83,41	220,80
36	1,74	61,25	2,65	83,41	220,80
37	1,16	67,44	2,65	83,41	220,80
38	1,38	78,06	2,65	83,41	220,80
39	1,22	56,59	2,65	83,41	220,80
40	1,56	55,61	2,65	83,41	220,80
41	3,42	57,46	3,42	83,41	285,50
42	1,20	56,97	3,42	83,41	285,50
43	1,94	55,91	3,42	83,41	285,50
44	1,93	59,86	3,42	83,41	285,50
45	1,46	58,97	3,42	83,41	285,50
46	2,36	55,29	3,42	83,41	285,50
47	1,76	57,00	3,42	83,41	285,50
48	1,44	59,56	3,42	83,41	285,50
49	1,42	56,89	3,42	83,41	285,50
50	1,37	57,77	3,42	83,41	285,50
51	1,36	62,46	3,42	83,41	285,50
52	1,65	61,87	3,42	83,41	285,50
53	1,40	58,19	3,42	83,41	285,50
54	0,97	60,95	3,42	83,41	285,50
55	1,14	58,28	3,42	83,41	285,50
56	1,76	61,74	3,42	83,41	285,50
57	1,39	56,95	3,42	83,41	285,50

Quadro 2 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Verão. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Índice (n)	PE	PW	PE _{rec} (n)	PW _{rec} (n)	P _s *
1	1,32	66,73	1,32	66,73	87,95
2	1,73	64,49	1,73	66,73	115,66
3	1,59	66,73	1,73	66,73	115,66
4	1,75	62,69	1,75	66,73	116,52
5	1,94	59,17	1,94	66,73	129,62
6	2,15	59,11	2,15	66,73	143,54
7	1,36	63,48	2,15	66,73	143,54
8	1,06	60,21	2,15	66,73	143,54

Índice (n)	PE	PW	$PE_{rec}(n)$	$PW_{rec}(n)$	P_s^*
9	1,63	67,95	2,15	67,95	146,18
10	0,90	62,38	2,15	67,95	146,18
11	1,04	60,33	2,15	67,95	146,18
12	1,11	58,80	2,15	67,95	146,18
13	2,04	69,12	2,15	69,12	148,69
14	0,87	66,41	2,15	69,12	148,69
15	0,83	62,33	2,15	69,12	148,69
16	0,80	62,27	2,15	69,12	148,69
17	1,42	65,55	2,15	69,12	148,69
18	3,98	65,23	3,98	69,12	274,97
19	1,31	85,76	3,98	85,76	341,16
20	1,22	76,24	3,98	85,76	341,16
21	1,85	72,00	3,98	85,76	341,16
22	0,94	61,76	3,98	85,76	341,16
23	1,25	66,77	3,98	85,76	341,16
24	2,09	68,00	3,98	85,76	341,16
25	0,94	69,19	3,98	85,76	341,16
26	1,87	61,89	3,98	85,76	341,16
27	1,26	60,13	3,98	85,76	341,16
28	0,90	60,03	3,98	85,76	341,16
29	1,12	61,49	3,98	85,76	341,16
30	1,35	65,83	3,98	85,76	341,16
31	1,87	57,84	3,98	85,76	341,16
32	3,23	79,05	3,98	85,76	341,16
33	1,80	67,07	3,98	85,76	341,16
34	1,10	61,90	3,98	85,76	341,16
35	1,50	62,39	3,98	85,76	341,16
36	1,11	56,60	3,98	85,76	341,16
37	1,13	58,68	3,98	85,76	341,16
38	1,63	65,13	3,98	85,76	341,16
39	1,45	70,54	3,98	85,76	341,16
40	1,05	65,22	3,98	85,76	341,16
41	1,01	61,92	3,98	85,76	341,16
42	1,06	60,42	3,98	85,76	341,16
43	1,93	58,88	3,98	85,76	341,16
44	2,00	57,82	3,98	85,76	341,16
45	2,05	58,16	3,98	85,76	341,16
46	1,10	58,84	3,98	85,76	341,16

Índice (n)	PE	PW	PE _{rec} (n)	PW _{rec} (n)	P _s *
47	1,52	59,14	3,98	85,76	341,16
48	2,54	61,90	3,98	85,76	341,16
49	0,90	56,79	3,98	85,76	341,16
50	1,22	55,67	3,98	85,76	341,16
51	1,69	63,11	3,98	85,76	341,16
52	0,99	57,40	3,98	85,76	341,16
53	1,53	64,64	3,98	85,76	341,16
54	0,92	62,00	3,98	85,76	341,16
55	2,59	63,45	3,98	85,76	341,16
56	1,86	58,21	3,98	85,76	341,16
57	2,00	70,54	3,98	85,76	341,16

Quadro 3 – Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Outono. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Índice (n)	PE	PW	PE _{rec} (n)	PW _{rec} (n)	P _s *
1	0,34	56,81	0,34	56,81	19,28
2	0,93	53,53	0,93	56,81	52,85
3	0,09	50,53	0,93	56,81	52,85
4	0,57	54,02	0,93	56,81	52,85
5	0,46	50,75	0,93	56,81	52,85
6	0,40	52,38	0,93	56,81	52,85
7	0,12	50,88	0,93	56,81	52,85
8	1,18	55,90	1,18	56,81	67,28
9	0,54	54,91	1,18	56,81	67,28
10	0,86	56,95	1,18	56,95	67,44
11	0,86	61,22	1,18	61,22	72,49
12	0,53	58,99	1,18	61,22	72,49
13	0,39	59,01	1,18	61,22	72,49
14	0,63	58,76	1,18	61,22	72,49
15	0,77	56,07	1,18	61,22	72,49
16	0,18	53,81	1,18	61,22	72,49
17	0,56	58,92	1,18	61,22	72,49
18	0,93	57,51	1,18	61,22	72,49
19	1,82	75,99	1,82	75,99	138,10
20	2,00	62,06	2,00	75,99	152,34
21	0,70	73,21	2,00	75,99	152,34
22	0,67	58,17	2,00	75,99	152,34
23	0,80	52,52	2,00	75,99	152,34
24	0,83	63,27	2,00	75,99	152,34

Índice (n)	PE	PW	$PE_{rec}(n)$	$PW_{rec}(n)$	P_s^*
25	0,71	57,27	2,00	75,99	152,34
26	0,36	63,50	2,00	75,99	152,34
27	0,65	67,98	2,00	75,99	152,34
28	0,69	58,25	2,00	75,99	152,34
29	0,38	54,77	2,00	75,99	152,34
30	0,83	60,18	2,00	75,99	152,34
31	0,51	58,76	2,00	75,99	152,34
32	0,46	64,07	2,00	75,99	152,34
33	0,89	53,66	2,00	75,99	152,34
34	0,90	59,76	2,00	75,99	152,34
35	1,01	65,39	2,00	75,99	152,34
36	0,39	55,42	2,00	75,99	152,34
37	0,25	59,31	2,00	75,99	152,34
38	0,75	50,44	2,00	75,99	152,34
39	0,58	49,21	2,00	75,99	152,34
40	0,38	55,96	2,00	75,99	152,34
41	1,24	54,42	2,00	75,99	152,34
42	0,54	61,95	2,00	75,99	152,34
43	0,57	53,63	2,00	75,99	152,34
44	1,06	51,68	2,00	75,99	152,34
45	0,91	51,37	2,00	75,99	152,34
46	0,59	60,67	2,00	75,99	152,34
47	0,57	57,75	2,00	75,99	152,34
48	1,05	53,19	2,00	75,99	152,34
49	1,02	51,25	2,00	75,99	152,34
50	0,84	54,62	2,00	75,99	152,34
51	1,05	60,29	2,00	75,99	152,34
52	0,88	56,23	2,00	75,99	152,34
53	0,77	50,59	2,00	75,99	152,34
54	0,56	51,07	2,00	75,99	152,34
55	0,24	54,08	2,00	75,99	152,34
56	0,54	57,37	2,00	75,99	152,34
57	0,42	60,92	2,00	75,99	152,34

Quadro 4 – Má Máximos anuais de PE e PW e precipitação maximizada no período sazonal do Inverno. Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Índice (n)	PE	PW	$PE_{rec}(n)$	$PW_{rec}(n)$	P_s^*
1	0,15	41,34	0,15	41,34	6,26
2	0,67	41,26	0,67	41,34	27,59

Índice (n)	PE	PW	PE _{rec} (n)	PW _{rec} (n)	P _s *
3	0,02	35,88	0,67	41,34	27,59
4	0,50	38,67	0,67	41,34	27,59
5	0,89	52,41	0,89	52,41	46,48
6	0,40	42,47	0,89	52,41	46,48
7	0,16	45,28	0,89	52,41	46,48
8	0,92	42,75	0,92	52,41	48,26
9	0,67	43,14	0,92	52,41	48,26
10	0,77	46,96	0,92	52,41	48,26
11	0,85	46,58	0,92	52,41	48,26
12	0,92	48,30	0,92	52,41	48,45
13	0,57	49,12	0,92	52,41	48,45
14	0,15	42,55	0,92	52,41	48,45
15	0,72	40,45	0,92	52,41	48,45
16	0,85	49,86	0,92	52,41	48,45
17	0,80	46,96	0,92	52,41	48,45
18	0,46	50,63	0,92	52,41	48,45
19	0,22	64,45	0,92	64,45	59,58
20	0,55	53,67	0,92	64,45	59,58
21	0,58	49,06	0,92	64,45	59,58
22	0,79	56,93	0,92	64,45	59,58
23	1,60	49,18	1,60	64,45	103,09
24	0,93	49,38	1,60	64,45	103,09
25	0,88	60,66	1,60	64,45	103,09
26	0,58	47,77	1,60	64,45	103,09
27	0,69	48,90	1,60	64,45	103,09
28	0,65	48,29	1,60	64,45	103,09
29	0,10	51,24	1,60	64,45	103,09
30	0,51	39,03	1,60	64,45	103,09
31	0,71	45,76	1,60	64,45	103,09
32	0,69	47,59	1,60	64,45	103,09
33	0,53	51,91	1,60	64,45	103,09
34	0,50	48,97	1,60	64,45	103,09
35	0,49	45,37	1,60	64,45	103,09
36	1,05	45,34	1,60	64,45	103,09
37	0,70	49,54	1,60	64,45	103,09
38	0,16	44,82	1,60	64,45	103,09
39	0,52	44,52	1,60	64,45	103,09
40	1,13	39,67	1,60	64,45	103,09

Índice (n)	PE	PW	$PE_{rec}(n)$	$PW_{rec}(n)$	P_s^*
41	0,90	84,67	1,60	84,67	135,44
42	0,16	47,82	1,60	84,67	135,44
43	1,16	38,38	1,60	84,67	135,44
44	1,33	40,78	1,60	84,67	135,44
45	0,71	53,06	1,60	84,67	135,44
46	0,03	44,06	1,60	84,67	135,44
47	0,38	35,70	1,60	84,67	135,44
48	0,32	43,06	1,60	84,67	135,44
49	0,49	47,90	1,60	84,67	135,44
50	0,40	43,47	1,60	84,67	135,44
51	1,18	46,24	1,60	84,67	135,44
52	1,12	41,35	1,60	84,67	135,44
53	0,56	60,79	1,60	84,67	135,44
54	0,34	47,89	1,60	84,67	135,44
55	0,35	43,76	1,60	84,67	135,44
56	0,25	38,72	1,60	84,67	135,44
57	0,39	82,99	1,60	84,67	135,44

A partir dos valores de P_s^* apresentados para os períodos sazonais da primavera, verão, outono e inverno nos quadros acima, calcula-se a precipitação maximizada do período completo ano a ano, apresentada no Quadro 5.

Quadro 5 – Trajetória da precipitação maximizada observada na Estação INMET 83587 - Belo Horizonte.

Índice (n)	$P_{primavera}^*$	$P_{verão}^*$	P_{outono}^*	$P_{inverno}^*$	P^*
1	40,81	87,95	19,28	6,26	87,95
2	118,05	115,66	52,85	27,59	118,05
3	118,05	115,66	52,85	27,59	118,05
4	118,05	116,52	52,85	27,59	118,05
5	118,05	129,62	52,85	46,48	129,62
6	119,37	143,54	52,85	46,48	143,54
7	119,37	143,54	52,85	46,48	143,54
8	126,19	143,54	67,28	48,26	143,54
9	150,3	146,18	67,28	48,26	150,30
10	150,3	146,18	67,44	48,26	150,30
11	158,55	146,18	72,49	48,26	158,55
12	158,55	146,18	72,49	48,45	158,55
13	158,55	148,69	72,49	48,45	158,55

Índice (n)	$P^*_{primavera}$	$P^*_{verão}$	P^*_{outono}	$P^*_{inverno}$	P^*
14	158,55	148,69	72,49	48,45	158,55
15	158,55	148,69	72,49	48,45	158,55
16	161,98	148,69	72,49	48,45	161,98
17	196,23	148,69	72,49	48,45	196,23
18	196,23	274,97	72,49	48,45	274,97
19	196,23	341,16	138,1	59,58	341,16
20	196,23	341,16	152,34	59,58	341,16
21	196,23	341,16	152,34	59,58	341,16
22	196,23	341,16	152,34	59,58	341,16
23	196,23	341,16	152,34	103,09	341,16
24	196,23	341,16	152,34	103,09	341,16
25	196,23	341,16	152,34	103,09	341,16
26	196,23	341,16	152,34	103,09	341,16
27	196,9	341,16	152,34	103,09	341,16
28	196,9	341,16	152,34	103,09	341,16
29	196,9	341,16	152,34	103,09	341,16
30	201,34	341,16	152,34	103,09	341,16
31	201,34	341,16	152,34	103,09	341,16
32	201,34	341,16	152,34	103,09	341,16
33	201,34	341,16	152,34	103,09	341,16
34	201,34	341,16	152,34	103,09	341,16
35	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
36	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
37	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
38	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
39	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
40	220,8	341,16	152,34	103,09	341,16
41	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
42	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
43	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
44	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
45	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
46	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
47	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
48	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
49	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
50	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
51	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16

Índice (n)	$P^*_{primavera}$	$P^*_{verão}$	P^*_{outono}	$P^*_{inverno}$	P^*
52	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
53	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
54	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
55	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
56	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16
57	285,5	341,16	152,34	135,44	341,16