

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



GUILHERME MACHADO GONZAGA DE SIQUEIRA

***NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO:***

**UMA VISÃO ATRAVÉS DO LIVRO DIDÁTICO**

BELO HORIZONTE

2010

GUILHERME MACHADO GONZAGA DE SIQUEIRA

***NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO:***

***UMA VISÃO ATRAVÉS DO LIVRO DIDÁTICO***

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação para professores com ênfase em cálculo, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito final à obtenção do título de Especialista.

Orientador: Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado.

Belo Horizonte

2010

2010, Guilherme Machado Gonzaga de Siqueira.  
Todos os direitos reservados

Siqueira, Guilherme Machado Gonzaga de.

S618n      Noções de cálculo no ensino médio: [recurso eletrônico] uma visão através do livro didático / Guilherme Machado Gonzaga de Siqueira. Belo Horizonte — 2010.  
1 recurso online (44 f. il.): pdf.

Orientador: Paulo Antônio Fonseca Machado.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 44

1. Matemática. 2. Cálculo – Ensino médio. 3. Livros didáticos – Estudo e ensino. I. Machado, Paulo Antônio Fonseca II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg  
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.

**ATA DA 92ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES APRESENTADA PELO ALUNO GUILHERME MACHADO GONZAGA DE SIQUEIRA.**

Aos vinte e quatro dias do mês de novembro de 2010, às 15h00 horas, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia do aluno **Guilherme Machado Gonzaga de Siqueira**, intitulada: "*Noções de cálculo no Ensino Médio: uma visão através do livro didático*", como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: aluno foi considerado aprovado, por unanimidade, com nota 90 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 24 de novembro de 2010.



*Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado*  
Orientador



*Prof. Fernando Antônio Xavier de Souza*  
Examinador



*Prof. Luiz Gustavo Farah Dias*  
Examinador

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a todos que acreditam que é possível melhorar o mundo através da educação.

## **Agradecimento**

Agradecimento a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

“Toda a Educação Científica  
que não se inicia com a  
matemática é, naturalmente,  
imperfeita na sua base”

Auguste Conté

## Resumo

Esse trabalho tem como objetivo sugerir e analisar alguns tópicos dos livros didáticos do ensino médio, que possam transmitir uma noção de cálculo ao aluno. Para que isso fosse possível, foi necessário fazer uma criteriosa análise no processo de seleção dos livros didáticos, sempre observando atentamente o que os editais, os guias dos livros didáticos, os catálogos e as resenhas disponibilizados pelo PNLEM sugeriam. A análise foi feita em três livros didáticos bastante utilizados no ensino médio. Foram abordados tópicos já vistos pelos alunos como: Funções, Séries Geométricas e Logaritmos de base natural. Tal estratégia foi utilizada enfatizando as noções básicas do cálculo, que está mais voltado a noções de limite, infinito e valores infinitesimais, do que à álgebra. Também foram sugeridos, sempre sob respaldo do PNLEM, alguns exercícios que, se trabalhados de maneira correta, podem perfeitamente transmitir noções de cálculo para o aluno, mesmo sem utilizar recursos específicos do cálculo. De fato, são exercícios propostos do próprio conteúdo do ensino médio, onde seria inserido, no máximo, uma notação nova ao aluno. Por fim, foi possível concluir que é perfeitamente possível transmitir um conceito de cálculo ao aluno do ensino médio, inclusive sem a temida complexidade com a qual este é comumente visto. Já os livros didáticos desempenharam um papel fundamental no trabalho, dando sustento às ideias pré-estabelecidas e deixando claro que ele não pode ser a única possibilidade de aprendizado para os alunos e nem mesmo a única referência a ser utilizada pelo professor, mas certamente servirá como um ótimo complemento a ambos, desde que seja utilizado de maneira adequada.

Palavras-chave: cálculo; ensino médio; aluno; noções; PNLEM; livro didático; limite; valores infinitesimais; exercícios.

## **Abstract**

This work aims to suggest and analyze some topics from high school textbooks that can convey a notion of calculus to students. To achieve this, a thorough analysis was necessary during the textbook selection process, always paying close attention to the recommendations made in the notices, textbook guides, catalogs, and reviews made available by the National High School Education Program (PNLEM). The analysis was conducted on three textbooks widely used in high school. Topics already familiar to students were covered, such as Functions, Geometric Series, and Natural Base Logarithms. This strategy emphasized the basics of calculus, which focuses more on limits, infinity, and infinitesimal values than on algebra. Also suggested, always with the support of the National High School Education Program (PNLEM), were some exercises that, if worked correctly, can perfectly convey notions of calculus to students, even without using specific calculus resources. In fact, these are exercises proposed from high school content itself, where at most, new notation would be introduced to the student. Finally, it was concluded that it is perfectly possible to convey a calculus concept to high school students, even without the dreaded complexity that is commonly encountered. Textbooks, however, played a fundamental role in this work, supporting pre-established ideas and making it clear that they cannot be the only learning option for students, nor even the sole reference for teachers. However, they can certainly serve as a great complement to both, as long as they are used appropriately.

Keywords: calculus; high school; student; notions; PNLEM; textbook; limit; infinitesimal values; exercises.

## **Lista de Abreviaturas**

**UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais**

**PNLEM – Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio**

**FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**

**SEB – Secretaria de Educação Básica**

**MEC – Ministério da Educação**

**Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas**

**IPT - Instituto de Pesquisas Tecnológicas**

**P.G. - Progressão Geométrica**

## Sumário

1. Introdução.....	11
2. Discussão.....	13
2.1 Livros didáticos.....	13
2.1.1 Inscrição das editoras.....	13
2.1.2 Avaliação.....	14
2.1.3 Guia do livro.....	14
2.1.4 Escolha.....	14
3. História do cálculo no ensino médio.....	18
4. Cálculo e o ensino médio.....	20
4.1 Função.....	20
4.2 Soma dos infinitos termos de uma P. G.....	25
4.3 A constante $\pi$ e o número $e$ .....	30
4.3.1 O número $e$ .....	30
4.3.2 A constante $\pi$ .....	33
4.4 Derivadas.....	36
5. Prognóstico do cálculo no ensino médio.....	40
6. Conclusão.....	42
7. Referências.....	44

## 1 – Introdução

O cálculo diferencial e integral é um ramo da matemática desenvolvido a partir da álgebra e da geometria. Inicialmente com o objetivo de atender as necessidades matemáticas dos cientistas dos séculos XVI e XVII, atualmente apresenta-se sob uma visão moderna, aprimorada pelo uso da tecnologia, e tornou-se uma ferramenta indispensável em várias áreas do conhecimento (Thomas, 2002).

Tal disciplina é ministrada em caráter obrigatório em todos os cursos superiores na área de ciências exatas e de maneira optativa em cursos de diversas outras áreas, apresentando, de maneira geral, altos índices de reprovação e grande evasão por parte dos alunos (Rezende, 2003). Esse quadro está presente não só no Brasil, mas também em vários países.

Devido ao grande impacto negativo causado por esses índices, várias instituições passaram a utilizar como estratégia o ensino de disciplinas básicas preparatórias para qualificar os alunos no ingresso às disciplinas de cálculo.

Outra estratégia interessante é a inserção, na matemática do ensino médio, de noções de cálculo, que é o que pode ser caracterizado como sendo conceito de limites, continuidades, valor infinitesimal, derivadas e algumas notações frequentes que são vistas apenas em nível superior. Para que tal estratégia renda resultados positivos, é importante que o livro didático adotado pelo professor, apresente uma boa abordagem do assunto.

O livro didático tem adquirido muita importância com o passar dos anos na educação, pois se consolidou como um instrumento indispensável aos alunos, além de ajudar em muitas vezes o próprio professor. No entanto, em se tratando de noções de cálculo no ensino médio, faz-se importante analisar e conhecer o processo que um livro didático passa até que chegue à mesa do aluno para que fique mais clara a ausência, em muitas vezes, da abordagem do assunto.

Esse trabalho tem como foco o livro didático, analisando e sugerindo, quando necessário, exercícios que possam transmitir de maneira satisfatória alguma noção de cálculo ao aluno do ensino médio.

## **2 – Discussão**

### **2.1 - Livros didáticos**

Um bom livro didático tem uma enorme contribuição na educação dos alunos. Para isso, o Brasil implantou em 2004 o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) que prevê a universalização de livros didáticos para os alunos do ensino médio público de todo o país. Inicialmente, atendeu 1,3 milhão de alunos da primeira série do ensino médio de 5.392 escolas das regiões Norte e Nordeste, que receberam, até o início de 2005, 2,7 milhões de livros das disciplinas de português e de matemática. Em 2005, as demais séries e regiões brasileiras também foram atendidas com livros de português e matemática.

Todas as escolas beneficiadas estão cadastradas no censo escolar realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC).

Em 2006, foram adquiridos 7,2 milhões de volumes, para serem utilizados em 2007, por 6,9 milhões de alunos, ficando 300 mil exemplares para compor a reserva técnica. Foram adquiridos, ainda, 1,9 milhão de livros de português e matemática para reposição dos que foram distribuídos no ano anterior.

#### **2.1.1 - Inscrição das editoras**

O edital que estabelece as regras para a inscrição do livro didático é publicado no Diário Oficial da União e disponibilizado no sítio do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação) na Internet. O edital estabelece as regras que vão nortear o processo de cadastramento, pré-inscrição e inscrição das obras que se submeterão à avaliação e seleção pela Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC). Determina, ainda, o prazo para os detentores de direitos autorais participarem do processo.

Atualmente está em vigor o Edital do PNLEM 2012, que foi publicado em 2009. Os livros didáticos inscritos são em Coleção ou Volume Único, das seguintes disciplinas: Português, Biologia, Física, Química, Matemática, Geografia e História ou organizadas por áreas de conhecimento - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias.

### **2.1.2 – Avaliação**

Para analisar se as obras apresentadas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, é realizada uma triagem pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Já a avaliação pedagógica dos livros, coordenada pela SEB, foi feita no primeiro bimestre de 2006 (janeiro / fevereiro).

Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB / MEC), responsável pela avaliação pedagógica. A SEB escolhe os especialistas para analisar as obras, conforme critérios divulgados no edital. Os especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos / catálogo.

### **2.1.3 - Guia do livro**

O FNDE disponibiliza o guia do livro didático / catálogo em seu sítio na internet e, juntamente com a SEB, envia o mesmo material impresso às escolas cadastradas no censo escolar.

### **2.1.4 - Escolha**

Os livros didáticos passam por um processo democrático de escolha nas escolas e com base no guia do livro didático / catálogo, diretores e professores analisam e

escolhem as obras que serão utilizadas. No entanto, os estados de Minas Gerais e Paraná continuam com o seu próprio programa de análise e seleção de livros. Todos os livros adotados no Brasil, são também adotados no estado de Minas Gerais, o que dispensa a discussão acerca da inclusão ou não, da inserção deste estado no programa PNLEM, pois o importante foi verificar que os livros usados em Minas também estão de acordo com o sistema de avaliação do país através do PNLEM.

Lista dos livros de Matemática distribuídos em 2010 para os alunos da rede pública de ensino:

- Livro: Matemática  
Autor: Luiz Roberto Dante  
Editora: Ática S/A  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
  
- Livro: Matemática  
Autores: Oscar Augusto e Guelli Neto  
Editora: Ática S/A  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
  
- Livro: Matemática - Uma Atividade Humana  
Autor: Adilson Longen  
Editora: Base Editora e Gerenciamento Pedagógico Ltda.  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
  
- Livro: Matemática  
Autores: Maria José Couto de Vasconcelos Zampirolo, Maria Terezinha Scordamaglio e Suzana Laino Cândido  
Editora: Editora do Brasil S/A  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática

- Livro: Matemática - Aula por Aula  
Autores: Cláudio Xavier da Silva e Benigno Filho  
Editora: FTD S/A  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
- Livro: Matemática  
Autores: Edwaldo Roque Bianchini e Herval Paccola  
Editora: Moderna Ltda  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
- Livro: Matemática  
Autor: Manoel Rodrigues Paiva  
Editora: Moderna Ltda  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
- Livro: Matemática  
Autor: Adilson Longen  
Editora: Positivo Ltda  
Enfoque: Ensino Regular – Matemática
- Livro: Matemática - Ciência e Aplicações  
Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Hygino Hugueros Domingues, Roberto Perigo, David Mauro Degenszajin e Nilza Silveira de Almeida  
Editora: Saraiva S/A Livreiros Editores  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
- Livro: Matemática - Ensino Médio  
Autores: Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Sousa Vieira e Rokusaburo Kiyukawa  
Editora: Saraiva S/A Livreiros Editores  
Enfoque: Ensino Regular – Matemática

- Livro: Matemática  
Autor: Luiz Roberto Dante  
Editora: Ática S/A  
Enfoque: Educação de Jovens e Adultos - Matemática

Para verificar a abordagem de noções de cálculo nos livros didáticos, foram selecionados, estrategicamente, três livros, sendo um do guia de livros didáticos / catálogo do PNLEN e outros dois muito utilizado pelos professores das escolas particulares, mas que não consta, especificamente, nesta lista, apesar de ser do mesmo autor.

- a) Livro: Matemática - Aula por Aula  
Autores: Cláudio Xavier da Silva e Benigno Filho  
Editora: FTD S/A  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática
- b) Livro: Matemática - Ensino Médio  
Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Roberto Périco  
Editora: Atual  
Enfoque: Ensino Regular – Matemática
- c) Livro: Matemática - Dante  
Autor: Luiz Roberto Dante  
Editora: Ática  
Enfoque: Ensino Regular - Matemática

### **3 - História do cálculo no ensino médio**

Ao longo dos anos ocorreram diversas mudanças na estrutura da escola brasileira, então, o termo ensino médio, refere-se a alunos entre 15 e 18 anos de um modo em geral, pois não faz sentido falar de ensino médio no início do século XIX.

Ao contrário do que se pode pensar, o ensino médio e o cálculo já estiveram bastante juntos. Em 1890, com a reforma de Benjamim Constant, o sistema educacional no Brasil passou por grandes mudanças, sendo uma delas a intenção de substituir a predominância literária pela científica. Então o Cálculo Diferencial e Integral surge nos anos finais da educação, porém por pouco tempo, pois em 1900 foi retirado dos programas oficiais visto que o curso não desenvolvia a ideia de função, estava sem ligação com o restante dos assuntos e, de fato, foi visto de um ponto de vista excessivamente formalístico.

Os anos se passaram até que, em 1931, houve outra reforma, a de Francisco Campos, que tinha como um dos objetivos reestruturar os ciclos da Escola Brasileira e introduzir princípios modernizadores na educação. Neste momento, as disciplinas de Matemática estavam unificadas sob o título de Matemática, sendo essa fragmentada em várias áreas da matemática, o que acabou culminando com a introdução do conceito de função e noções do cálculo infinitesimal.

No entanto, a proposta não foi bem aceita. Tal rejeição se deu, principalmente, por parte dos professores que não estavam habituados e praticamente não possuíam referências bibliográficas adequadas para acompanhar a nova proposta modernizadora. Isto originou, de certa forma, uma turbulência até 1942, quando através de outra reforma, agora a de Capanema, a escola começou a se enquadrar em um esquema semelhante ao dos dias atuais. O cálculo passou então a ser ministrado de uma maneira mais sintética até 1961, quando foi praticamente extinto do ensino médio.

*“... apesar de todas as discussões a respeito do assunto, prevalece a abordagem rigorosa, linear e formal dos conteúdos, assim como a total desarticulação destes com os demais conteúdos.”(Spina, 2002)*

A verdade é que a complexidade do cálculo nunca conseguiu espaço no ensino médio no Brasil, provavelmente pela dificuldade de abordar o assunto de uma maneira mais simples e conecta aos demais conteúdos do ensino básico.

## 4 – Cálculo e o ensino médio

Apesar de vários trabalhos salientarem a importância de se abordar alguma noção de cálculo no ensino médio, obstáculos como a falta de livro didático adequado e, principalmente, o compromisso excessivo da escola para com o vestibular faz com que o cálculo não consiga seu espaço nos anos finais da escola básica. Compromisso que está cada vez mais com o foco na área algébrica, com o uso excessivo de fórmulas, fatorações, simplificações e outras estratégias de ensino que além de contribuírem pouco para o desenvolvimento do raciocínio do aluno, ainda empobrecem o lado crítico e intuitivo da matemática.

*“O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de “infinito”, de “infinitésimos” de “variáveis”, do que com “fatoração de polinômios”, “relações trigonométricas”, “cálculos algébricos” (Rezende, 2003)*

### 4.1 - Função

As funções são as melhores ferramentas para descrever o mundo real em termos matemáticos. Seja através de expressões matemáticas relacionando variáveis (grandezas), diagramas de flechas ou gráficos com uma vasta aplicabilidade. As funções matemáticas se colocam disponíveis a diversas ciências e áreas do conhecimento como ferramenta sólida e necessária para resolução de vários problemas.

Pode se dizer que tanto em nível básico quanto em nível superior as funções são vistas com a mesma importância, porém de maneira bem distinta, sendo em nível superior utilizando-se de ferramentas do cálculo diferencial e integral e em nível básico praticamente sem nenhuma noção de cálculo.

Uma maneira de atenuar esse cenário é através da introdução, no ensino médio, de funções que exijam alguma ferramenta de cálculo em seu estudo, como a Hipérbole. Há de se destacar que as funções do primeiro e do segundo grau, exaustivamente

vistas em nível médio, acabam não transmitindo noções de cálculo ao aluno. Essa falta de transmissão pode estar atribuída a excessiva forma algébrica que essas são vistas em nível médio e, principalmente, ao fato do aluno não precisar, necessariamente, de nenhuma ferramenta do cálculo em seu estudo.

No que se diz respeito a hipérbole, algumas ferramentas utilizadas no cálculo poderão ser introduzidas para justificar alguns comportamentos, tais como a convergência ou não para valores distantes da origem e a tendência de pontos próximos aos pontos ao qual a função não está definida.

O exercício proposto nesse capítulo tem como base o estudo de uma função do tipo hipérbole, da forma  $f(x) = \frac{ax+c}{x}$ . É o tipo de função que propiciará um outro tipo de raciocínio ao aluno, pois levará o aluno a uma interpretação, a princípio, mais intuitiva. Tal exercício foi observado em estágio e teve grande aceitação por parte dos alunos, que até então não possuíam nenhuma noção de cálculo, no que diz respeito a limites e continuidades. Este estágio ocorreu em uma turma de primeiro ano do ensino médio do Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais (COLTEC – UFMG) no ano de 2006.

A princípio, o professor atribuiu valores às variáveis  $a$  e  $c$  e pediu para que os alunos encontrassem o domínio e a imagem da função. Este exercício é comum para funções desse tipo, no ensino médio. Feita a primeira etapa, o professor desafiou os alunos, questionando se eles conseguiriam esboçar o gráfico daquela hipérbole. Foi quando o exercício começou a ficar interessante, pois os dados do domínio e da imagem encontrados por eles, juntamente com as ferramentas utilizadas pelos alunos até aquele momento, não eram suficientes para que tal esboço fosse feito. A discussão continuou até que os primeiros resultados apareceram. Então, o professor decidiu inserir novas ferramentas ao conteúdo dos alunos.

Há de se destacar que tal exercício foi elaborado e passado aos alunos por livre e espontânea vontade do Professor. Este se colocou à frente do livro didático, que

obviamente não fazia referência a tal procedimento, e com sua autonomia, agindo com independência em relação ao livro, acabou atingindo resultados satisfatórios perante a turma. Tal exercício foi ministrado da seguinte maneira:

Seja  $f(x) = \frac{ax+c}{x}$ , sendo  $a e c \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $x \neq 0$ , então:

$$f(x) = \frac{ax+c}{x} \rightarrow f(x) = \frac{ax}{x} + \frac{c}{x} \rightarrow f(x) = a + \frac{c}{x} .$$

Este é o momento adequado para a introdução de uma leve noção de limite, inclusive usando notações que praticamente não são abordadas no nível médio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a$$

Tal resultado pode ser reforçado através de uma sequência numérica, que irá mostrar claramente ao aluno que a fração  $\frac{c}{x}$  irá tender a zero se “x” for

suficientemente grande em módulo, ou seja, se  $x \rightarrow \mp \infty$ , então  $\frac{c}{x} \rightarrow 0$  e  $f(x) = a$

Seja a sequência  $S(n) = \frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{Z}$ , então:

$S(1) = 1$ ;  $S(2) = 0,5$ ;  $S(10) = 0,1$ ;  $S(10^3) = 0,001$  e  $S(\infty) = \text{um valor infinitesimal}$  ou seja, maior que zero em módulo, mas menor que qualquer número real positivo. O mesmo raciocínio irá valer para inteiros negativos, obtendo o mesmo resultado em módulo. Tal sequência pode ser visualizada em gráfico (Fig.1), assim irá reforçar o resultado obtido e ficará perceptível ao aluno a convergência dessa série.

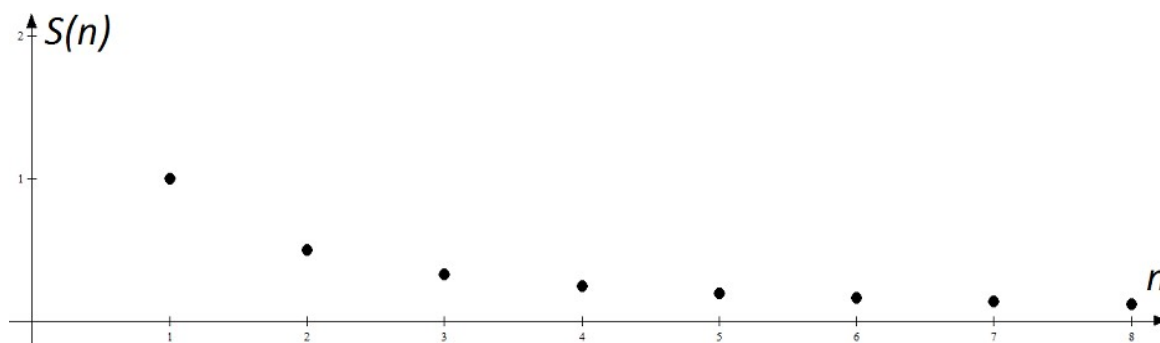


Fig.1

Para verificar a existência ou não de limites quando  $x \rightarrow \pm\infty$  segue a definição, segundo *George B. Thomas*:

“1. Dizemos que  $f(x)$  possui o Limite  $L$  quando  $x$  tende ao infinito e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se, à medida que  $x$  se distancia da origem no sentido positivo,  $f(x)$  fica cada vez mais próximo de  $L$ .

2. Dizemos que  $f(x)$  possui o Limite  $L$  quando  $x$  tendendo a menos infinito e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Se, à medida que  $x$  se distancia da origem no sentido negativo,  $f(x)$  fica cada vez mais próximo de  $L$ .”

O segundo passo seria tentar calcular o limite próximo da descontinuidade da função, ou seja, onde ela não está definida, no caso em  $x = 0$ . Logo:

$$\lim_{x \rightarrow \mp 0} f(x) = \pm \infty$$

Logo o aluno perceberá que para valores bem próximo de zero, porém positivo, a função tende para mais ou menos infinito dependendo dos valores das constantes, o mesmo vale para valores próximo de zero, porém negativos. Logo uma leve definição de limite, extraída do livro de cálculo volume 1 de George B. Thomas, décima edição, poderá ser introduzido ao aluno, ao passo que nesse caso o limite não existe, pois a função está tendendo a valores diferentes em relação a um ponto.

### **Definição informal de Limite**

*“Seja  $f(x)$  definida em um intervalo aberto em torno de  $X_0$ , exceto talvez em  $X_0$ . Se  $f(x)$  fica arbitrariamente próximo de  $L$ , para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $X_0$ , dizemos que  $f$  tem limite  $L$  quando  $x$  tende a  $X_0$  e escrevemos:*

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = L$$

*Essa definição é informal porque as expressões arbitrariamente próximo e suficientemente próximos são imprecisas; seu significado depende do contexto. Para um metalúrgico que fabrica um pistão, próximo pode significar alguns milésimos de centímetros. Para um astrônomo que estuda galáxias distantes, próximo pode significar alguns milhares de anos luz. Entretanto, a definição é suficientemente clara para permitir o reconhecimento e a avaliação dos limites de várias funções específicas”*

Há de se destacar que esses dois passos utilizados na demonstração são necessários, porém não necessariamente nessa ordem. O importante é introduzir noções de limite aos alunos, utilizando-se de notações, definições e valores infinitesimais.

#### 4.2 - Soma dos infinitos termos de uma P. G.

Uma progressão geométrica (P.g. ou P.G.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante não nula. Esta constante é chamada razão da progressão geométrica. A letra “ $q$ ” foi escolhida por ser inicial da palavra quociente. Traduzindo em linguagem matemática, P.G. pode ser representada da forma  $a_n=(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , onde o  $a_2=a_1q, a_3=a_1q^2, a_4=a_1q^3$  até que, por indução, conclui-se que  $a_n=a_1q^{(n-1)}$ , assim  $a_n$  pode ser reescrito da forma  $a_n=(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{(n-1)})$ . De fato, a partir do segundo termo o quociente entre um elemento e o seu antecessor é sempre igual a “ $q$ ”.

Progressão Geométrica tem uma importante ligação ao cálculo quando se trata da soma dos infinitos termos de uma P. G. com razão,  $-1 < q < 1$ , também conhecida como série geométrica.

A soma dos infinitos termos de uma série geométrica é dada pela fórmula  $\frac{a_1}{(q-1)}$ .

Porém, para se chegar a essa conclusão, é necessário uma simples álgebra e alguma noção de limite. Noção que pode, ou não, estar explícita nos livros.

Livro do Benigno:

*“Considere a dízima periódica 0,444..., cuja fração geratriz é igual a  $\frac{4}{9}$  ou seja,  $4 \div 9 = 0,444\dots$ . Assim, podemos escrever:*

$$0,444... = \frac{4}{9}$$

$$0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots = \frac{4}{9}$$

Note que essa adição possui infinitas parcelas, que formam uma P. G., infinita de razão  $q = 0,1$  ( $-1 < q < 1$ )

Quando  $-1 < q < 1$  e quando  $n$  tende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ ), a expressão  $q^n$  tende a zero ( $q^n \rightarrow 0$ ).

Nessa condições, a fórmula  $S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$  fica  $S = -\frac{a_1}{(q - 1)}$ .

Então:

$$S = \frac{a_1}{(1 - q)}, \text{ sendo } -1 < q < 1$$

O autor utiliza um exemplo numérico onde parte do princípio que a soma da P.G. é um número racional. Em seguida utiliza uma fraca noção e notação de cálculo ao leitor, deixando implícito o resultado geral.

É curioso notar que em nenhum momento o autor alerta que esse tipo de dedução numérica não vale para somas de P.G.'s com valores irracionais, o que pode gerar confusão por parte do aluno.

Livro do lezzi:

“Dada uma P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , chama-se série geométrica a soma  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ”

Vejamos o seguinte problema:

O que acontece com a soma dos termos de uma P.G. Quando levamos em conta um número cada vez maior de termos a serem somados?

Vamos analisar dois exemplos.

Seja P.G.  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$  de razão  $q = \frac{1}{2}$

Calculemos a soma de seus  $n$  primeiros termos para alguns valores de  $n$ :

Logo o livro calcula a soma dos cinco primeiros termos, depois a soma dos dez primeiros termos e por fim a soma dos vinte primeiros termos, encontrando, respectivamente, 1,9375, 1,998, 1,999998.

*“Podemos notar que, à medida que  $n$  aumenta, o valor de  $S_n$  fica cada vez mais próximo de 2. Dizemos que, para valores de  $n$  tão grandes quanto se queira, a soma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  converge para 2, ou ainda,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$ ”*

O outro exemplo trata-se de uma série não convergente com  $a_1 = 2$  e  $q = 2$ , onde o autor mostra, por meios numéricos mais uma vez, que ela diverge.

*“Nosso objetivo é estudar apenas as séries geométricas convergentes.*

*Seja a P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  cuja razão  $q$  é tal que:*

$$-1 < q < 1$$

*Assim,  $q^n$  é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente  $n$  aumenta.*

*Então, quando calculamos  $S_n$  para  $n$  suficientemente grande, temos:*

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}, \text{ como } q \rightarrow 0, \text{ então } S_n = -\frac{a_1}{(q - 1)}$$

*Esse é o valor para o qual a soma converge.*

*Daí:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{(1 - q)} ; -1 < q < 1”$$

O autor começa caracterizando a soma desse tipo de P.G. como sendo série geométrica e utiliza dois exemplos numéricos para mostrar que nem toda série geométrica é convergente, sendo a razão o determinante. Em seguida utiliza uma fraca noção e notação de cálculo para concluir a demonstração.

Livro do Dante:

### **“Limite da soma dos termos de uma PG infinita**

#### **Introdução:**

*Consideremos a sequência  $(a_n) = (\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N} e n \neq 0$ , explicitada por:*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

*Para refletir: Essa sequência é uma PG?*

*Ou, ainda, em representação decimal:*

$$1; 0,5; 0,333; 0,25, \dots, 0,01, \dots, 0,001, \dots$$

*Observemos que, à medida que  $n$  cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo  $a_n = \frac{1}{n}$  tende a 0 (zero). Indicamos assim:*

$$n \rightarrow \infty, \text{ então } \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

*ou, então, assim:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

*que lemos: **limite de  $\frac{1}{n}$  quando  $n$  tende a infinito é igual a 0.***

*Nas progressões geométricas em que  $0 < |q| < 1$ , a soma dos  $n$  primeiros termos tem um limite finito quando  $n$  tende a infinito. Nesse caso,  $q^n$  aproxima-se de zero para  $n$  suficientemente grande, ou seja,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

*Sabemos que  $S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$ , sendo  $q \neq 1$ .*

*Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - 0)}{(1 - q)}$ , isto é:*

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{(1 - q)}, \quad 0 < |q| < 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

*Para refletir: O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão maior do que 1?*

**Exemplo:**

*Vamos calcular o limite da soma da progressão geométrica*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \quad n \in \mathbb{N} \text{ positivos.}$$

*Neste caso,  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$  e temos que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{(1 - q)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})} = \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})} = 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

*Para refletir:*

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

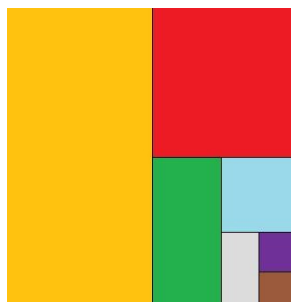
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots \text{tende a } 1.$$

Logo  $\lim S_n = 1$ .

Isso significa que, quanto maior for  $n$ , a soma

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \text{ ser\u00e1 mais pr\u00f3xima de } 1.$$

Veja, abaixo, uma interpreta\u00e7\u00e3o geom\u00e9trica desse fato considerando a \u00e1rea da regi\u00e3o quadrada igual a 1.



Inicialmente pintamos  $\frac{1}{2}$  dela, depois  $\frac{1}{4}$ , depois  $\frac{1}{8}$ , e assim por diante. Continuando esse procedimento indefinidamente, nos aproximamos da \u00e1rea total da regi\u00e3o quadrada, que \u00e9 1.”

O autor inicialmente utiliza uma seq\u00eancia trivial para que ele possa introduzir \u00e0s notações de limite que ser\u00e3o utilizadas posteriormente, inclusive ressaltando como se lê tal notação. Em seguida, o autor parte para a demonstra\u00e7\u00e3o pretendida, mostrado de maneira clara e satisfat\u00f3ria o resultado, transmitindo uma boa no\u00e7\u00e3o de c\u00e1lculo ao leitor.

### 4.3 A constante $\pi$ e o número $e$

A constante Pi, representado pela letra grega  $\pi$ , e o número de Euler, esse denotado pela letra  $e$ , são duas constantes vistas pelos alunos da Escola Básica, porém uma parte ínfima dos estudantes do ensino médio conhece essas constantes e sabe como obtê-las. Tal fato pode ser atribuído a vários fatores e, inclusive, a ausência do conteúdo nos livros didáticos dado a peculiaridade desses números em não serem algébricos, ou seja, não são soluções de equações algébricas como  $\sqrt{2}$  por exemplo, onde é uma das soluções da equação  $x^2 - 2 = 0$ , vista por todos os alunos do ensino médio. Sendo assim, o número de Euler e a constante Pi recebem a classificação de números reais irracionais e transcendentais ou transcendentais.

Tal conteúdo, ao contrário do que se pode pensar, pode perfeitamente estar inserido nos livros didáticos. O edital do PNLEM deixa bem claro que é necessário capacitar os estudantes à fazerem estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados.

São cálculos simples e que podem ser obtidos sem maiores dificuldades por parte dos alunos. Seja através da sequência convergente para a obtenção do Número de Euler ou através da utilização de régua e compasso para a obter a constante  $\pi$ . De fato não será apresentado nada de novo aos alunos, a não ser a notação de limite e o lado intrigante dessas importantes constantes matemáticas.

#### 4.3.1 - O número $e$

O número de Euler é uma das constantes mais importantes da matemática com diversas aplicações em várias áreas. Tal fato deve-se à sua enorme importância no cálculo diferencial e Integral, onde a função  $y = e^x$  tem a intrigante propriedade de ser sua própria derivada, gerando uma vasta aplicabilidade em várias áreas.

Um dos métodos de se chegar a essa constante, é através do limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Já no ensino médio, o número  $e$  não tem apresentado muita importância. Uma hipótese pode ser o fato da escola estar basicamente ligada ao vestibular e importar-se pouco com o desenvolvimento científico do aluno. No entanto, abordar essa constante na sala de aula pode ser bastante proveitoso, mesmo que o foco da escola seja apenas os vestibulares, pois os logaritmos naturais, ou neperiano, ao qual possuem base  $e$ , são vistos em nível médio.

Existem alguns meios de se calcular o limite acima, mas certamente calculadoras científicas, ou até mesmo os computadores, desempenharão enorme importância para um entendimento melhor dos alunos, que irão obter esses valores:

Seja  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , então:

$$\text{Se: } n=1 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$n=2 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$n=3 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,3703$$

$$n=10 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937$$

$$n=1000 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169$$

Logo se  $n \rightarrow \infty$ , então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182\dots = e$$

Esse é o tipo de exercício que não trará muitas dificuldades ao aluno e irá transmitir uma boa noção de limite.

Livro Benigno:

*“Sistema de logaritmos neperianos:*

*É o sistema de logaritmos de base e (e = 2,718 ..., denominado número de Euler), e é apresentado escrevendo-se um das formas:  $\log_e$  ou  $\ln$ . ”*

O livro não apresenta nenhuma noção de cálculo ao leitor. A constante é apresentada, de maneira incompleta, para que o aluno utilize-as nos logaritmos de base natural.

Livro lezzi:

*“O sistema de logaritmos neperianos, que é o de base “e”. O nome neperiano deriva de John Napier (1550 – 1617), matemática escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. Indicaremos com  $\log x$  de base “10”, ou simplesmente  $\log x$ , o logaritmo decimal de x, e representaremos o logaritmo neperiano de x com  $\log_e(x)$  ou  $\ln(x)$ . “*

O livro não apresenta nenhuma noção de cálculo ao leitor. Apresenta, de maneira incompleta, a constante juntamente com o seu precursor, *John Napier*. Em seguida ensina detalhadamente como calcular logaritmos de base “10” e “e” na calculadora científica utilizando-se de dois exemplos com um tipo de base cada um.

Livro Dante:

*“Observação: Existem calculadoras com a tecla  $\ln$ , que permite calcular os logaritmos naturais dos números reais positivos. Os logaritmos naturais têm base “e”, ou seja,  $\log_e(x) = \ln(x)$ . (logaritmo natural de  $x$ ). O número “e”, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja,  $\ln e = 1$ . O número “e” é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é  $e = 2,7182818284$ . Os Logaritmos naturais, de base “e”, são muito importantes nas aplicações.”*

O autor ensina detalhadamente como se calcula logaritmos de base decimal na calculadora científica e depois faz essa observação citada acima, onde o autor não apresenta nenhuma noção de cálculo ao leitor.

#### **4.3.2 – A constante $\pi$**

A constante  $\pi$  é uma constante relacionada ao cálculo de perímetros e áreas de um círculo cujo valor é de aproximadamente 3,1415926535.

No ensino básico, o  $\pi$  geralmente é introduzido antes do ensino médio, onde a constante é dada para que os alunos comecem a calcular áreas e perímetros de circunferências, quadro que infelizmente não muda no ensino médio, o que reforça a tese do uso excessivo de fórmulas no ensino básico.

Uma forma de sair dessa mesmice impregnada no ensino básico é a caracterização, de maneira literal, da constante  $\pi$ , através de um exercício extremamente simples e prazeroso com uso de régua e compasso que consiste na aproximação de áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo de raio “r” com o números de lado cada vez maior (Fig.2). Tal exercício é conhecido como o método clássico para o cálculo de  $\pi$  e era comumente utilizado pelos matemáticos para alcançar o valor real de  $\pi$ .

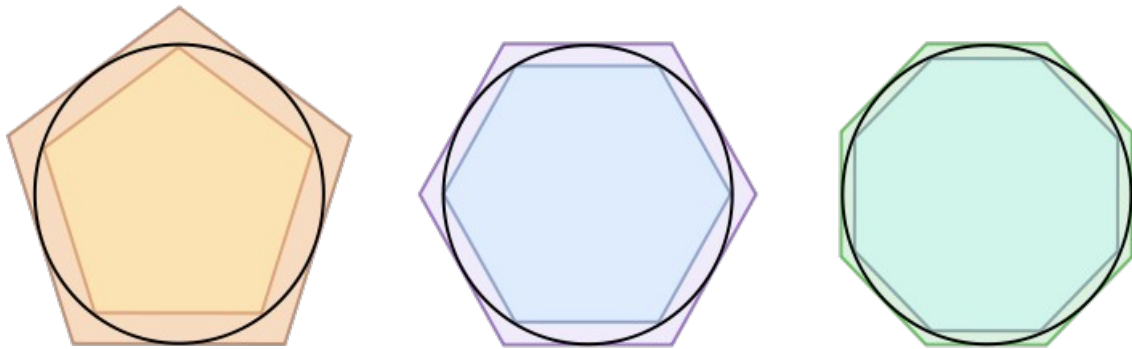


Fig.2

Hoje em dia ainda se calcula o  $\pi$ , porém utilizando-se métodos matemáticos mais avançados juntamente com computadores modernos para obtenção de inúmeras casas decimais conforme tabela abaixo.

<b>Cronologia do cálculo de <math>\pi</math></b>		
<b>Matemático</b>	<b>Ano</b>	<b>Casas Decimais</b>
Egípcios (Papiro de Rhind)	1650 A.C.	1
Arquimedes	250 A.C.	3
Zu Chongzhi	480	7
Jamshid Masud Al-Kashi	1424	16
Ludolph van Ceulen	1596	35
Jurij Vega	1794	126
William Shanks	1874	527
Levi B. Smith, John W. Wrench	1949	1.120
Daniel Shanks, John W. Wrench	1961	100.265
Jean Guilloud, M. Bouyer	1973	1.000.000
Yasumasa Kanada, Sayaka Yoshino, Yoshiaki Tamura	1982	16.777.206
Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura, Yoshinobu Kubo	1987	134.217.700
Chudnovskys	1989	1.011.196.691
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1997	51.539.600.000
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1999	206.158.430.000
Yasumasa Kanada	2002	1.241.100.000.000
Daisuke Takahashi	2009	2.576.980.370.000
Fabrice Bellard	2010	2.699.999.990.000
Shigeru Kondo & Alexander Yee	02/08/10	5.000.000.000.000

Fonte: Wikipédia

É importante ressaltar que nosso trabalho consiste em visualizar noções de cálculo, através do livro didático, no ensino médio, porém nesse exercício que foi proposto não se utiliza basicamente nenhum recurso em específico do cálculo, mas de fato, trará, alguma noção de infinito e convergência ao aluno.

#### 4.4 – Derivadas

Lidar com taxas de variação no ensino básico é algo bem comum para os alunos do ensino médio, seja através da biologia quando se estuda a taxa de crescimento, ou decaimento, de uma determinada bactéria num exato momento, seja na física quando se deseja conhecer a velocidade de um determinado objeto em um determinado momento ou em matemática quando se estuda o ponto de máximo, ou de mínimo, de uma determinada parábola. Esses são apenas alguns exemplos que são vistos em nível médio. Porém, o curioso é que poucos alunos da escola básica sabem que estão lidando com derivadas, que nada mais é do que trabalhar com a taxa de variação de uma função. Em outras palavras é o coeficiente angular da reta que tangencia a função num determinado ponto.

O exercício que será proposto a seguir tem o intuito de desenvolver alguma noção de derivada ao aluno. Tal exercício se baseia em fixar uma parábola, da forma  $f(x)=x^2$ , na origem e traçar uma reta secante a essa até que a mesma se torne uma reta tangente à parábola. Para que isso ocorra, é necessário fixar um ponto “ $p$ ” e outro  $(p+\Delta x)$ , ambos pertencentes à reta e a parábola simultaneamente, até que  $\Delta x$  se torne nulo e a reta secante se torne tangente à parábola (Fig.3). Posteriormente será possível generalizar o resultado obtido para equações do segundo grau da forma geral, ou seja,  $f(x)=ax^2+bx+c$ , e contextualizar o pontos de máximo e mínimo local tanto vistos pelos alunos da escola básica.

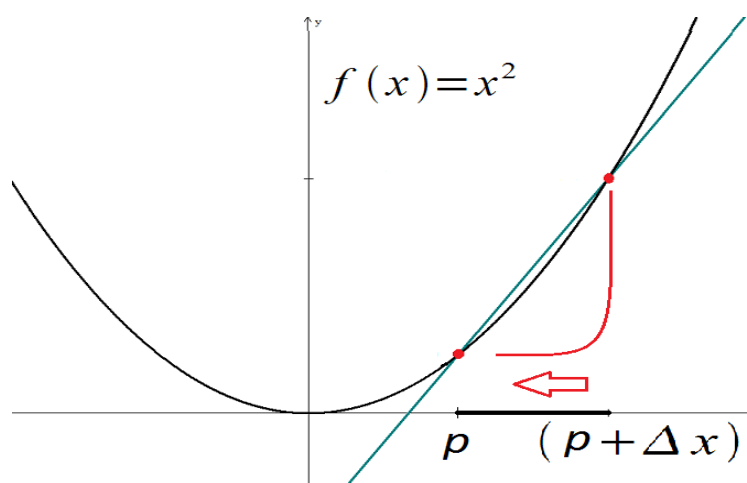


Fig.3

No ensino médio é comum os alunos trabalharem com tangente, onde o coeficiente angular de uma determinada reta é dado pela tangente, ou seja,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ , sendo  $(x_1, y_1)$  e  $(x_0, y_0)$  dois pontos pertencentes a essa reta. Então, se “ $p$ ” pertence à reta “ $r$ ” e a parábola  $f(x) = x^2$ , então o par ordenado é  $(p, p^2)$ . Esse é o ponto fixo, e o ponto variável é  $(p + \Delta x)$ , assim o par ordenado é  $((p + \Delta x), (p + \Delta x)^2)$ , sendo  $\Delta x$  um valor que, a medida que os dois pontos se aproximam, se torna um valor infinitesimal.

Utilizando conhecimentos comumente visto em nível médio, o aluno não terá dificuldade em resolver o coeficiente angular da reta formada pelos pontos  $(p, p^2)$  e

$$((p + \Delta x), (p + \Delta x)^2), \text{ assim } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(p + \Delta x)^2 - p^2}{(p + \Delta x) - p} = \frac{p^2 + 2p\Delta x + (\Delta x)^2 - p^2}{\Delta x} = 2p + \Delta x.$$

Logo, se os pontos são tão próximos, tal que  $\Delta x$  é um valor infinitesimal, então o coeficiente angular da reta tangente será equivalente à  $2p$  para qualquer ponto “ $p$ ” da parábola. Lembrando que o raciocínio para parábolas dessa forma, porém com cavidade voltada para baixo, é o mesmo. Ficando a critério do professor a resolução se necessária.

De fato, se o aluno passa a lidar com pontos pertencentes à parábola e a reta secante ao mesmo tempo, porém extremamente próximos, começa enfim a ter uma leve noção de derivada, que pode posteriormente ser reforçada com a definição formal de derivada, segundo George B. Thomas, onde de maneira similar tem-se que:

***“Definição***

*A derivada de uma função  $f(x)$  em relação à variável  $x$  é a função  $f'$  cujo valor em  $x$  é*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

desde que o limite exista.”

Então, se  $f(x) = x^2$ , pela definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right), \text{ assim}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Logo  $f'(x) = 2x$ , o que reforça o resultado anterior através de ferramentas do cálculo.

É interessante notar que qualquer reta tangente à parábola  $f(x) = x^2$  possui coeficiente angular  $2x$  e pontos da forma  $(p, p^2)$ , assim o aluno poderá concluir o raciocínio deduzindo e generalizando a equação de qualquer reta tangente à parábola, o que de fato é  $y = 2px - p^2$  (fig.4).

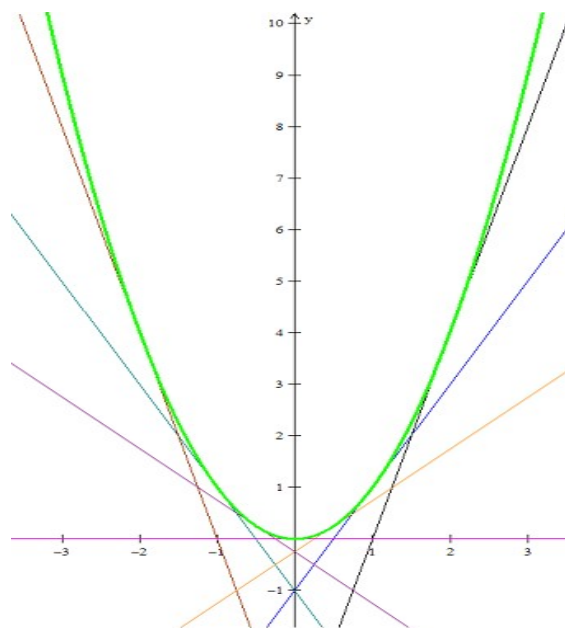


Fig.4

Uma vez feito todo o exercício acima, fica extremamente simples estender o raciocínio para funções do segundo grau em geral, ou seja, funções da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Onde através da definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \frac{a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} = 2ax + b$$

Assim o aluno conseguirá a taxa de variação em qualquer ponto de qualquer parábola da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , e inclusive verificar o exercício feito anteriormente, onde, no caso, as constantes “a” e “b” valem “1” e “0” respectivamente.

Outra questão relacionada à taxa de variação de uma função e muito vista pelos alunos do nível básico, é a questão do ponto de máximo ou mínimo de uma parábola, onde a taxa de variação é nula. Ou seja, se  $f'(x)$  representa a taxa de variação de uma função, então  $f'(x) = 0$  representa onde a taxa de variação é nula. Logo  $f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$ , sendo a coordenada “y” encontrada após substituição na equação geral, o que reforça o resultado tão trabalhado pelos alunos da escola básica.

É importante frisar que esse exercício, além de passar noções de cálculo com simplicidade, fortalece bastante o que os alunos já veem com grande intensidade em nível médio.

## 5 - Prognóstico do cálculo no ensino médio

Fazer o prognóstico do Cálculo Diferencial no ensino médio com certeza não é uma tarefa muito fácil, haja vista a história conturbada que o cálculo e o ensino médio tiveram ao longo dos anos.

Um maneira de realizar o prognóstico é através da fragmentação do cálculo em três tópicos (limite e continuidade, derivada e integral) e da utilização dos editais e resenhas disponibilizados pelo PNLEM. Assim, ficará claro a tendência desses tópicos estarem inseridos, ou não, nos livros didáticos do ensino médio.

Limite, continuidade e derivadas são os tópicos abordados nesse trabalho e mais próximo do ensino médio, pois além de serem pré-requisito de integrais, é algo que os alunos já veem no ensino médio. É curioso apresentar uma série geométrica sem abordar limite ou pensar em hipérboles sem os conceitos de limite e continuidade, e abordar a tão vista taxa de variação sem a devida contextualização.

O Edital do PNLEM 2012 não deixa claro sobre a abordagem, ou não, das noções de cálculo no ensino médio, mas alguns itens relacionados à capacitação que a matemática deve transmitir ao aluno, deixam claro que não existe nenhuma resistência para tal tema estar inserido nas obras. Dentre esses tópicos, destaca-se este a seguir:

*“estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos da aritmética, álgebra, geometria, grandezas e medidas, combinatória, estatística e probabilidade, para resolver problemas, encarando-o sob vários pontos de vista.”*

Sendo de fundamental importância a obra apresentar, entre outros aspectos,:

*“os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito e também propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação,*

*organização, análise, síntese, comunicação de idéias matemáticas, memorização.”*

Através do catálogo do programa nacional do livro didático, instrumento que orienta o professor na escolha dos livros adotados pelo PNLEM para o ensino médio, o livro do Dante, foi criticado por não apresentar nenhum tópico relacionado a limites e derivadas. Mesmo sendo um livro de destaque nesse trabalho, é um livro que não possui um capítulo que aborde especificamente esses temas, conforme mostra a resenha retirada do catálogo do programa nacional do livro didático:

**“Matemática- Volume único  
Luiz Roberto Dante  
1ª edição - Editora Ática**

#### SÍNTESE AVALIATIVA

*A obra, apresentada em volume único, destaca-se pela abordagem inovadora dada aos conteúdos normalmente estudados no ensino médio. Há constante preocupação de dispô-los segundo um encadeamento lógico que privilegia a integração harmônica entre seus tópicos, não os esgotando em único capítulo, mas retomando-os sob distintas perspectivas em outros capítulos. A obra, contudo, não trata de **limites** nem **derivadas**.*

#### RECOMENDAÇÕES AO PROFESSOR

*A obra analisada contempla os tópicos usualmente abordados no ensino médio, mas o professor deve ser **advertido quanto à omissão de dois relevantes temas: limites e derivadas**. Por motivos pedagógicos, um tratamento satisfatório de tais tópicos talvez deva ser postergado ao ensino superior, **mas a sua eventual inclusão no ensino médio, se corretamente implementada, pode propiciar ao aluno estratégias eficazes de resoluções de certos exercícios, notadamente aqueles relacionados à análise de funções elementares**. Assim, convém salientar que a opção metodológica da obra não fornece subsídios ao professor no que diz respeito a esse aspecto.”*

É importante ressaltar que o livro do Dante utilizou-se de limite para demonstrar a convergência da série geométrica, mas com pouco formalismo e sem definições, ficando essa tarefa para o professor.

## 6- Conclusão

Através do PNLEM foi possível entender todo o processo que o livro didático passa até que chegue na mesa do aluno, deixando claro que não existe um único livro nem mesmo o melhor, e sim uma variedade de obras qualificadas que servirá certamente de auxílio aos professores.

A ideia de atribuir elementos do cálculo no ensino médio, ao contrário do que poderia parecer, não está completamente descartada nos dias atuais. Inclusive o PNLEM possui resenhas de livros que cita, ou não, a presença desses tópicos, dando ênfase a obra que aborda limites e derivadas.

A utilização dos três livros didáticos nesse trabalho foram de fundamental importância, deixando claro que ainda falta muito conteúdo relacionado ao cálculo nesses livros, o que acabou gerando uma impossibilidade de citar a abordagem desses livros em alguns tópicos desse trabalho, mas em outros, como o da a série geométrica, foi possível mostrar claramente a divergência de um livro para o outro em assuntos que não toleram muita divergência, como é o caso da demonstração da convergência da série geométrica. A verdade é que alguns livros não demonstram o que têm que demonstrar, apenas tentam induzir o aluno ao raciocínio, o que pode ser bastante perigoso. Casos como esse apenas reforça a tese de que o professor nunca deve ter uma única referência em suas mãos, é sempre importante ter o auxílio de várias referências durante a abordagem de um mesmo tema.

Os exercícios propostos nesse trabalho tiveram como objetivo passar alguma noção de cálculo ao aluno. Eles se basearam em conteúdos já vistos pelos alunos do ensino médio e foram abordados da maneira mais simples possível, para que assim a complexidade e a formalidade do cálculo não servisse de obstáculo para ao aluno.

De fato, o resultado obtido nesse trabalho foi satisfatório, onde foi possível mostrar, tanto através do PNLEM, como através dos temas já vistos pelos alunos do ensino

médio, que é possível passar alguma noção de cálculo ao aluno, sendo que não existe empecilho algum para que isso ocorra.

## 7 - Referências

REZENDE, W.M. ***O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica***. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

THOMAS, G.B. ***Cálculo***. Volume 1 – 10ª edição. São Paulo: 2002.

SPINA, C.O.C. ***Modelagem Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio***. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2002.

- Secretaria de Educação de Estado de Minas Gerais.  
(<http://www.educacao.mg.gov.br>)
  
- Ministério da Educação.  
(<http://www.educacao.gov.br>)
  
- Orientações Curriculares para o Ensino Médio.  
([http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf))
  
- Livro para o Ensino Médio, PNLEM / 2006.  
([http://www.fnde.gov.br/home/ld\\_ensinomedio/matematica%2019-04-2005.pdf](http://www.fnde.gov.br/home/ld_ensinomedio/matematica%2019-04-2005.pdf))
  
- Sítio com diversos conteúdos matemáticos.  
(<http://www.somatematica.com.br>)
  
- Revista do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática.  
([http://cenp.edunet.sp.gov.br/RPM/41/rpm41\\_4.htm](http://cenp.edunet.sp.gov.br/RPM/41/rpm41_4.htm))