EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

MATEMÁTICA ELEMENTAR
UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Antônio Zumpano

EDITORA ufmg

MATEMÁTICA ELEMENTAR

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Antônio Zumpano

MATEMÁTICA ELEMENTAR

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Belo Horizonte
Editora UFMG
2009

Z94m Zumpano, Antônio
Matemática elementar : uma proposta pedagógica / Antônio Zumpano. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2009.

92 p. – il. (Educação a Distância)

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-7041-727-5

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Funções (Matemática). 4. Teoria dos números. I. Título. II. Série.

CDD: 510
CDU: 51

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE MATEMÁTICA: Dan Avritzer
ASSISTÊNCIA EDITORIAL: Euclídia Macedo e Letícia Féres
EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro
REVISÃO E NORMALIZAÇÃO: Maria do Rosário Alves Pereira
REVISÃO DE PROVAS: Beatriz Trindade e Karen M. Chequer
PROJETO GRÁFICO: Eduardo Ferreira
FORMATAÇÃO E CAPA: Sérgio Luz
PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren Marilac

EDITORA UFMG
Av. Antônio Carlos, 6627 - Ala direita da Biblioteca Central - térreo
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Av. Antônio Carlos, 6627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax:+ 55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

Em memória dos meus amigos

Maestro Sérgio Magnani
Maestro Carlos Alberto Pinto Fonseca
Maestro Rafael Grimaldi

Vidas autárquicas: para ser feliz basta (virtuose) ser virtuoso!

Não se hão de admitir mais causas das coisas naturais
do que as que sejam ao mesmo tempo verdadeiras e
suficientes para explicar seus fenômenos.
Quanto a isso dizem os filósofos:
a natureza não faz nada em vão;
quando o menos basta o mais é em vão.

O centro do sistema do mundo está em repouso.

Isaac Newton: Principia, Livro III, O sistema do mundo

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas foi elaborada uma lista de exercícios com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. A lista auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, o aluno deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

Sumário

Apresentação

Uma grande fenda permanece aberta na vasta pavimentação do terreno da Educação Matemática. Apesar de vários esforços, estudos, análises, pesquisas, leis, diretrizes, parâmetros, essa fenda fica, indelével, como uma erosão em terra viva. A fenda consiste precisamente na perda da heurística dos conhecimentos que compõem vários conteúdos. Traçar essa heurística significa aqui resgatar as condições em que determinado conhecimento foi produzido; apresentar as necessidades, as faltas e os desejos que demandaram tal conhecimento. Essa heurística é fundamental para uma hermenêutica, sem a qual não há entendimento, ou seja, não há construção de sentido.

A visão essencialista dos conteúdos matemáticos precisa ser erradicada de forma a permitir que uma malha de relações possa ser tecida, promovendo uma visão associativa que irá mostrar as diversas negociações de significados, convenientes, intencionais, que participaram de conflitos epistemológicos. Essa malha relacional, tecida pela análise heurística, faz aparecer epifanicamente um sentido, que só existe em decorrência de sua conseqüência e não *a priori*. O sentido foi produzido, fabricado, construído através de relações e associações entrelaçadas. Percebe-se então a anterioridade lógica dos conceitos e procedimentos. Desmancha-se o caráter essencialista dos conteúdos e percebem-se suas características associativas.

Para justificar essa crítica, vejamos algumas perguntas, ou melhor, dúvidas que se perpetuam, tornando-se, muitas vezes, indagações metafísicas.

1) Por que, no estudo de frações, a preposição “de” transforma-se em uma bela multiplicação?

2) Por que um número elevado a zero resulta no número um?

3) Por que um expoente negativo inverte o número?

4) Por que um expoente fracionário torna-se raiz?

5) Por que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo?

6) Onde está uma raiz complexa, imaginária? No além?

7) Por que o vértice de uma parábola é tão importante e merece tanta atenção?

8) Por que se iguala a zero para encontrar as raízes de uma função do segundo grau?

9) Por que essas soluções se chamam raízes?

10) Qual a importância de algo tão banal como máximo divisor comum para merecer um nome, sigla e um estudo especial?

11) A fração $\frac{2}{3}$ é uma divisão exata?

12) O número $\frac{7}{(31)}$ é racional ou irracional?

13) O que é um número irracional?

14) Fração é número ou é uma medida?

15) Se houver vida inteligente em outro planeta, esses seres conhecerão necessariamente o lendário número π (pi)?

Várias outras perguntas, dúvidas, indagações que ficam sem respostas podem ser percebidas na prática do ensino de matemática. A crítica se justifica exatamente aí: as abordagens dos conteúdos deixam esse vazio, esse hiato.

Introdução

Tentaremos distinguir dois procedimentos matemáticos. O primeiro é caracterizado pela representação no sentido de mimese: a imitação do real, a recriação da realidade. Neste procedimento, destaca-se a semelhança com o mundo. Marca-se a presença de uma harmonia entre o fazer matemático e o mundo. Essa matemática mimética, ou analógica, constitui-se essencialmente dos processos em que o critério de verdade para os enunciados proposicionais é a possibilidade de verificação física – "imitatio physis". O estabelecimento de validade é feito por argumentos indutivos e não dedutivos. Por exemplo, "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180 graus". Esta proposição é verdadeira porque houve verificação física (medição) dos ângulos de vários triângulos. Logo, por analogia, podemos generalizar e concluir a veracidade da proposição. Quando desejamos processos dedutivos em que a argumentação se faz por inferência racional, então necessitamos de uma gramática da generalização. Ainda, ao lidar com o conceito de infinito de forma dedutiva, essa gramática se torna bem mais complexa. A verificação física não é mais possível. A impossibilidade de verificação não é somente uma impossibilidade física, é muito mais intensa, é uma impossibilidade lógica. Cognitivamente é importante distinguir esses dois tipos de impossibilidades. Chamamos essa última de virtual e a outra de atual. Quando afirmamos que não se podem contar os grãos de areia de uma praia, estamos nos referindo apenas a uma impossibilidade física, atual, por isso esse é um conjunto finito. Quando falamos que não se podem contar os pontos de uma reta estamos fazendo alusão à impossibilidade virtual, potencial ou lógica; por isso temos agora um conjunto infinito. As impossibilidades virtuais são desastrosas em todos os sentidos: pedagógico, epistemológico e cognitivo. Perde-se contato com o mundo, entra-se no "antiphysis", não há mais mimese alguma, temos o sintoma de uma perda de lastro. Os conceitos passam a não ter mais um referente no mundo; o que nos resta é uma gramática. Se não há mais referente, se não há mais lastro, então como se pode produzir um sentido para as proposições matemáticas? O procedimento agora não se caracteriza pela representação, mas pelo entendimento da gramática da proposição. Para isso perguntamos: como a proposição é usada? O que é considerado o critério da sua verdade? Qual é a sua verificação? Este é o segundo procedimento matemático que mencionamos no início. Um exemplo seria: "existe um número real positivo menor do que todas as frações positivas". Podemos usar o verbo "existir" em seu sentido comum: "existe uma folha de árvore que é menor do que todas as folhas das árvores do Parque Municipal". A ocorrência da palavra "existe" na segunda sentença não é suficiente para determinar a gramática da primeira sentença. Tudo que se faz é indicar certa analogia nas regras. Portanto, o que devemos fazer é investigar a gramática da generalização sem deixar que o significado da palavra "existe", em outros casos, se interponha em nosso caminho.

Digamos então que temos dois sistemas: um sistema mimético e um outro sistema que chamaremos de gramatical. O entendimento do sistema gramatical depende de um dispositivo que seja capaz de produzir uma interação, uma comunicação entre os dois sistemas, ou seja, necessitamos de uma interface para os dois sistemas, uma interface gramatical/mimética, um modem (modulador-demodulador) gramatical/mimético. Em uma linguagem modernamente muito utilizada, podemos dizer: precisamos converter seqüências de dados digitais em sinais analógicos, pois nosso mundo mental é analógico. Esta interface é feita através de uma análise heurística das proposições e enunciados matemáticos: resgatar as condições em que determinado conhecimento foi produzido.

Sugestões de leitura

• LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. *Where Mathematics comes from* – How the embodied mind brings Mathematics into being. New York: Basic Books, 2000.
• WITTGENSTEIN, L. *Gramática filosófica* – parte II sobre a lógica e a matemática. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

Advertência

Não temos intenção de apresentar ou construir técnicas operacionais. A preocupação maior é com o conhecimento conceitual. Habilidades operacionais sem conhecimento conceitual não passam de adestramento. A habilidade operacional, sem dúvida, é muito importante e deve ser adquirida, mas, saber fazer está muito longe de conhecer.

Questionamentos são levantados no decorrer do texto. As respostas nem sempre vêm em seguida e nem sempre são explícitas. As respostas devem ser extraídas da totalidade do texto que, em sua complexidade, tenta um esclarecimento, um sossego epistemológico que deve suceder momentos de tensões. Os exercícios e os diagramas (figuras e desenhos) fazem parte do texto.

Procuramos não destacar ou realçar definições, resultados ou afirmações importantes. Há, em cada capítulo, um mínimo de seções. Os conteúdos não estão divididos em seções e subseções. Entendemos que o leitor deve ter suas anotações para destacar pontos julgados importantes e sintetizar conteúdos. Essa é uma tarefa importante para o aprendizado. O livro não é uma cartilha e nem um manual de instruções.

Na seção Exercícios Dirigidos nem todos são dirigidos.

Não há preocupação com uma sistematização rigorosa dos conteúdos. Cabe ao leitor, em seu diálogo com o texto, concatenar idéias e organizá-las. Organizar o pensamento como também o texto de uma maneira particular e individual faz parte do tirocínio. O didatismo (a didactologia) de um texto didático não é pedagogicamente salutar.

O leitor deve se ver como autor, preencher lacunas e construir seus próprios significados. Quem lê atualiza o texto que não é senão potencialidade em seu suporte. Na atualização, o leitor, agora autor, busca uma intersubjetividade.

Cassandra, mulher troiana!
Bela sibila! Vaticina e ninguém lhe dá atenção.
Mulher profeta desacreditada.
Melhor não escutar, não atender.
Desconsiderar e não levar em conta.
No não ouvir, desastrada imprudência.

Nímia taxonomia!
Há apenas dois reinos:
Dos que falam e dos mudos.
Entre os que falam há só duas espécies:
Dos que ouvem e dos surdos.

Um texto depois de escrito, o autor é morto.
O texto é por si próprio um interlocutor.
Autores são como Brás Cubas:
Um defunto autor.
E sua campa, jamais será outro berço.
Cabe a vós.
Leitor e texto.
Travar o diálogo.
Conceber a maiêutica.
Alternar situações:
Mestre-discípulo.
Auscultador-auscultado.
Conhecer ruídos.
Consonâncias e dissonâncias.
Ele, o texto, não se prende ao didatismo.
Sua conduta, nunca didascálica.
Vasculha o leitor em seu conflito epistemológico.
Espera, pacientemente.
Que o leitor.
Em uma ação recíproca.
Também o vasculhe.
Meet yourselves.
Know each other.

AULA 1

Contar e Medir

INTRODUÇÃO

O intento desta aula é destacar a compreensão genuína dos processos racionais de medir e contar. Não cabe aqui, de forma alguma, elaborar métodos e práticas operacionais desenvolvidos no estudo da álgebra e da aritmética. Interessa-nos a cognição dos conceitos primeiros, pois, na gênese de toda ciência, se pode descobrir o fundamento de seu exercício. Cada uma das quatro seções deve ser lida e compreendida dentro de seu próprio discurso sem introdução de práticas já estabelecidas e de domínio escolar. Também os exercícios do final da aula, com exceção do segundo e do terceiro, devem ser feitos sem ajuda de algoritmos ou métodos algébricos.

CONCEITOS

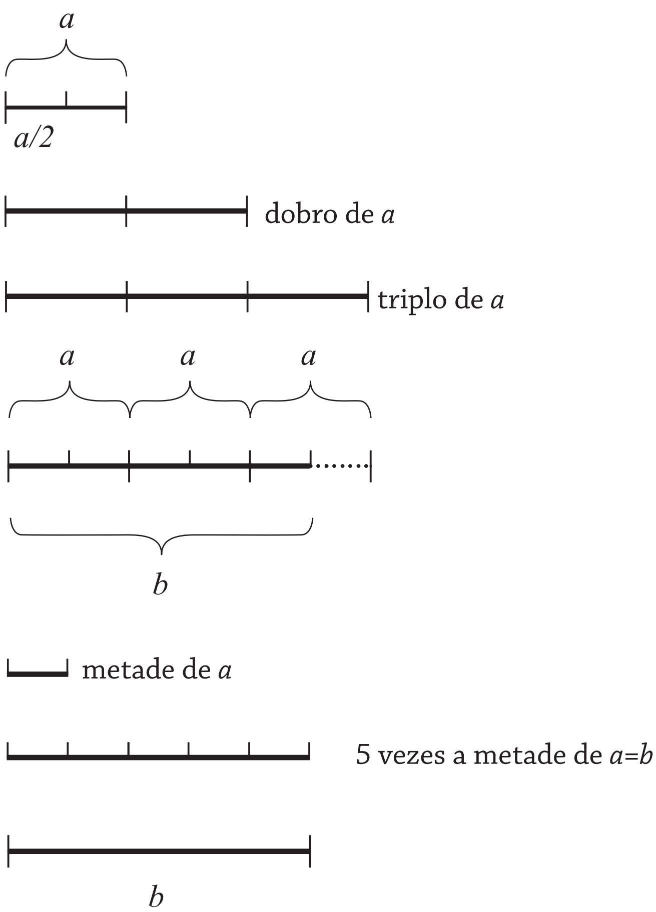
O sistema numérico se baseia no princípio da contagem: nossa noção de cardinalidade (quantidade) e ordinalidade (número ordinal, ordenação; primeiro, segundo, terceiro etc.). Embora conceitualmente diferentes, as duas noções se confundem: a contagem envolve uma ordenação e a ordenação envolve uma contagem. Princípio de racionalidade, logos: contar, reunir, separar, medir, calcular, ordenar. Estamos evidentemente nos referindo aos números naturais: 1, 2, 3... (A quais outros números poderíamos estar nos referindo?) O zero é um símbolo que significa ausência, vacuidade, ausência de unidades.

Consideramos um número como um substantivo abstrato. Os números são características, particularidades dos conjuntos de objetos que podem receber uma denominação, por exemplo, o substantivo oito, mas que não subsistem senão no conjunto de objetos ao qual se referem. No Livro VII de sua obra intitulada *Os elementos*, Euclides reforça essa substantivação dos números com a seguinte definição: um número é uma multidão composta de unidades, e uma unidade é aquilo em virtude do que cada uma das coisas que existem são chamadas uma. Os estudos e comentários de Sir Thomas Heath nos mostram outras definições dadas por intelectuais pitagóricos: uma unidade é o limite de escassez; uma unidade é aquilo que, quando a multidão é diminuída através de repetidas subtrações, está desprovido de todo e qualquer número e toma uma posição de permanência e assim repousa. Se, ao chegar desse modo a uma unidade, prosseguimos em sua divisão em partes, teremos incontinente uma nova multidão.

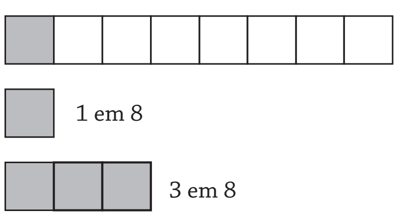
Vemos que para Euclides o “1” não é número, mas unidade formadora dos números. Essas definições, além de bonitas e históricas, são essenciais para que possamos resgatar conceitos primeiros da racionalidade, os quais servirão de guia referencial para a abordagem dos conteúdos que faremos.

A humanidade primeiramente aprendeu a contar somente até dois e um longo período de tempo transcorreu até que aprendessem a contar números maiores. Há uma grande quantidade de evidências para esse fato. Talvez a mais fascinante seja aquela preservada pela linguagem dos povos. Na língua checa, usava-se ter dois tipos de plural: um para dois itens e outro para muitos, mais de dois itens. Aparentemente, em finlandês, esta é a situação até hoje. Não há conexão entre as palavras “dois” e “metade”: em palavras germânicas, “two” and “half”; em línguas românicas, “deux” e “moitié”; em línguas eslavas, “dva” e “pol”; em húngaro, que nem é uma língua indo-européia, “ketto” e “fel”. Porém, em todas as línguas européias, as palavras para 3 e $\frac{1}{3}$, 4 e $\frac{1}{4}$ etc. estão relacionadas. Isso sugere que a humanidade alcançou o conceito de razão e a idéia de uma relação entre um número e seu recíproco somente depois que aprenderam a contar além de dois. (Kronecker, os números naturais também foram criados por nós!)

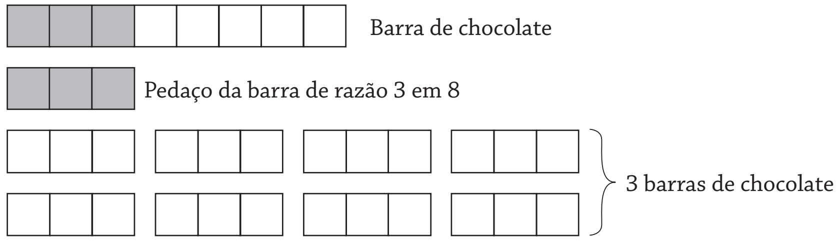
Esse sistema numérico é o único mecanismo que temos para comparar atributos (adjetivos). Além de maior e menor, qualquer comparação utiliza-se do sistema numérico: o dobro, o triplo, metade, terça parte, duas vezes maior, quatro vezes menor etc. Quando essas comparações tornam-se grosseiras, pouco precisas, ou seja, nos deparamos com situações em que algo é maior que o dobro e menor que o triplo de outro algo, então precisamos compará-los com partes, subdivisões do outro: esse algo é cinco meios do outro, denotado por (5/2). Quer dizer, dividimos ao meio e emendamos cinco metades. Esse é o tamanho desse algo em relação ao outro.



Esse artifício lança mão do número como multidão para criar novas unidades de referência e assim poder medir ou comparar magnitudes. Por exemplo, se denominarmos o número oito como unidade de referência, teremos oito subunidades e com isso podemos ampliar o sistema de medição. Podemos medir toda magnitude que guarda uma razão com oito: 1 em 8, 2 em 8, 3 em 8, 4 em 8, 5 em 8, 6 em 8, 7 em 8 e 8 em 8, que é a nova unidade estabelecida. Uma magnitude que mede 3 em 8 ou 3 por 8 é aquela que tem o mesmo tamanho de três subunidades determinadas pelo número oito.



É claro que oito subunidades denominadas pelo número oito constituem uma unidade de referência, a saber, o próprio oito. Ainda, se multiplicarmos 3 subunidades por 8 teremos $8{\times}3=3{\times}8=3$ unidades de referência. Por exemplo, suponha um pedaço de uma barra de chocolate que guarda uma razão de 3 em 8, então oito pedaços desses juntos totalizam 3 barras inteiras.



Podemos então interpretar a razão 3 em 8 como uma distribuição ou divisão de três unidades de referência, denominadas pelo número oito, em oito partes iguais. Por isso, falamos 3 dividido por 8 ou simplesmente 3 por 8.

FRAÇÕES

Quando escrevemos $\frac{n}{m}$, em que n e m são números naturais, queremos dizer que algo foi dividido em m partes iguais e dessas m partes tomamos n partes. O número m denomina (designa) a quantidade de subunidades (partes) e a nova unidade de referência, por isso é chamado de denominador. O número n conta ou enumera as subunidades (partes) a serem tomadas, por isso é chamado de numerador.

O estabelecimento de pares de números n e m, numerador e denominador, constitui o processo de medir ou comparar.

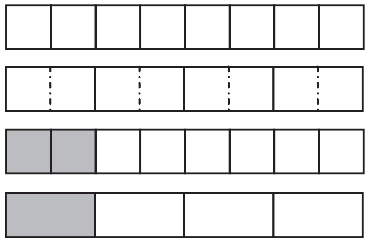
Nosso senso prático acredita que esse processo dá conta de comparar quaisquer tamanhos (magnitudes). Assim também acreditava Pitágoras: o sistema numérico é capaz de proporcionar qualquer comparação (medição). Os conceitos comprimento (tamanho), área, volume são tidos como apriorísticos, existem *a priori*, são conceitos primitivos. Todo segmento tem um comprimento, toda região do plano tem uma área e toda região do espaço tem um volume. O sistema numérico serve para comparar dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes. Quando perguntamos quanto mede tal segmento ou qual é o tamanho (comprimento) de tal segmento, estamos perguntando de fato qual é a relação de comparação de seu tamanho ou comprimento com um padrão preestabelecido. Essa relação é dada por um par de números que indicam um procedimento, um processo que chamamos de comparação ou medição.

Na prática, qualquer comprimento (área ou volume) pode ser medido (comparado com um comprimento padrão). Mas, a noese grega, em oposição ao conhecimento estético dos outros povos, não permite uma certeza vinda da prática, do experimento, dos sentidos. Essa noese (conhecimento noético) faz com que Pitágoras demonstre o teorema que leva o seu nome. Antes fez com que Tales demonstrasse o seu teorema. O método dedutivo, uma invenção grega, junto com a argumentação e a própria razão – o logos – é o único critério de certeza. Para Tales, o importante não é o que sabemos, mas como sabemos. Por esse motivo, o teorema de Pitágoras, conhecido por outros povos bem antes de Pitágoras, leva o seu nome, visto que o conhecimento dos demais povos era apenas empírico e não dedutivo. A certeza vem da dedução e não da experimentação. Portanto, para Pitágoras, comparar ou medir é encontrar ou provar, demonstrar que existe um par de números capaz de realizar o procedimento de comparar. Não é algo prático: pegar uma régua e medir. Assim, ele mesmo demonstra que existem segmentos cujos comprimentos ou tamanhos não podem ser medidos, comparados.

Note que a questão levantada por Pitágoras não é a existência do comprimento, mas sim a impossibilidade de medi-lo, de compará-lo com o comprimento de outro segmento. Ou seja, ele conclui que o sistema numérico não é capaz de comparar todos os tamanhos, áreas ou volumes. Conclui, de maneira angustiante, a insuficiência do sistema numérico. Não temos números suficientes para lidar com as contínuas magnitudes geométricas. A associação entre números e magnitudes geométricas mostrou-se insuficiente.

EQUIVALÊNCIA (IGUALDADE) DE FRAÇÕES

Ao considerar a multidão (número) oito, vemos que, além de ser composta de oito unidades, ela é também composta de quatro partes. Cada uma dessas partes é também uma multidão composta de duas unidades. Em outras palavras (mais usuais, porém, menos elucidativas), oito é múltiplo de dois, isto é, $8=4\times2$. Portanto, a razão 2 em 8 é igual à razão 1 em 4.



Através do mesmo raciocínio, concluímos que a razão 3 em 8 é igual à razão $3k$ em $8k$ para qualquer número k. De maneira geral, para dois números quaisquer a e b, temos que a em b é igual a ak em bk para qualquer número k.

Temos assim o seguinte resultado: duas razões (frações) serão iguais ou equivalentes se os numeradores e os denominadores forem eqüimúltiplos, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se $a = kc$ e $b = kd$ para algum número k.

Será que só há essa maneira de duas frações serem equivalentes? Por exemplo, $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$! Faça um diagrama. Tanto a multidão 8 quanto a multidão 12 são constituídas de 4 partes. As partes do 8 são compostas de 2 subunidades cada uma e as partes do 12 são compostas de 3 subunidades cada uma. Ao tomarmos 6 em 8, vemos que é a mesma coisa do que tomar 3 das quatro partes que compõem o 8. Ao tomarmos 9 em 12, vemos que é a mesma coisa que tomar 3 das quatro partes que compõem o 12. Portanto, há uma complexidade desnecessária na medida $\frac{6}{8}$ e também em $\frac{9}{12}$. Bastam 3 em 4!

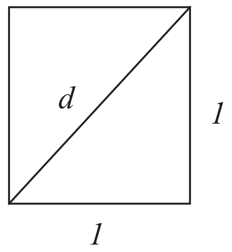
Quando o menos basta, o mais é em vão.

Dizemos que uma fração $\frac{a}{b}$ é genuína (irredutível) quando a e b não são eqüimúltiplos de nenhum par de números. Em outras palavras, quando a e b não possuem divisores comuns (só o 1). Neste caso dizemos que a e b são primos entre si.

Reflita sobre a seguinte afirmação: se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{n}{m}$ são iguais (equivalentes), então os denominadores b e m possuem um divisor comum d; esse divisor comum divide b em d partes iguais, cada uma delas composta de k unidades e também divide m em d partes iguais, cada uma delas composta de r unidades; os numeradores a e n são eqüimúltiplos de k e r.

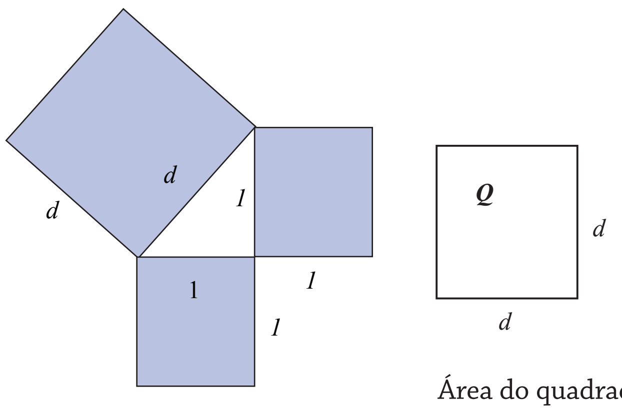
EXISTÊNCIA DO INCOMENSURÁVEL

Vejamos o que fez Pitágoras. O comprimento da diagonal de um quadrado unitário não pode ser comparado com o comprimento do lado desse quadrado. Como o comprimento do lado do quadrado é uma unidade, devemos encontrar um número que denomine a unidade de referência adequada, isto é, denomine a quantidade de subunidades.

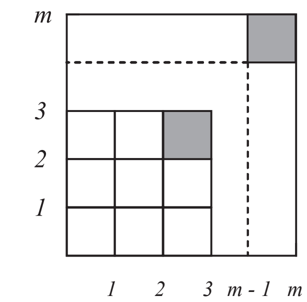


Suponhamos que tal número exista, ou seja, a unidade fica composta de m subunidades. Assim, o comprimento da diagonal deve ser igual a um determinado número dessas subunidades, digamos, n subunidades. Em notação simbólica, temos: $d = \frac{n}{m}$, em que d é o comprimento da diagonal, quer dizer, se emendarmos as n subunidades determinadas pela multidão m, formaremos um segmento com o mesmo tamanho da diagonal.

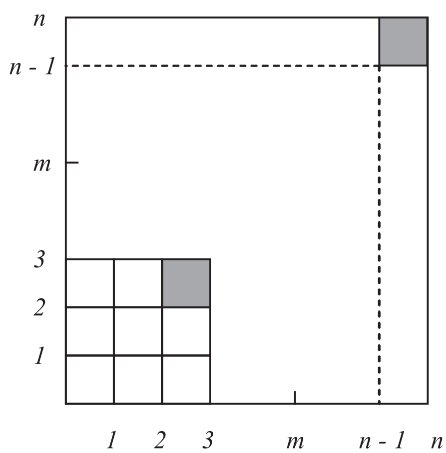
O teorema de Pitágoras nos diz que a área dos dois quadrados unitários juntos é igual à área do quadrado cujo lado é a diagonal. Como a nossa unidade de área é exatamente o quadrado unitário, temos que a área do quadrado cujo lado é a diagonal é igual a 2.



Área do quadrado **Q** é igual a 2.



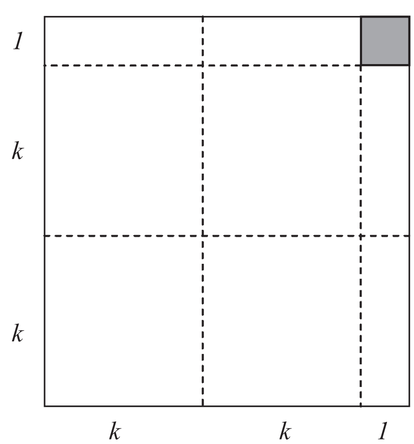
m^2 quadradinhos



n^2 quadradinhos

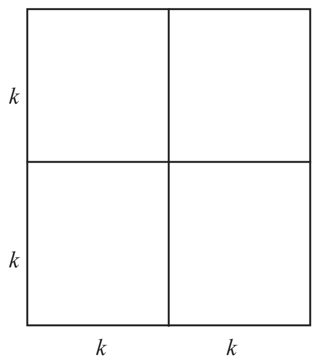
Pois bem, o denominador m dividiu o quadrado unitário em m^2 quadradinhos cujos lados são do tamanho das subunidades determinadas por m. Como a diagonal é formada por n subunidades determinadas por m, então o quadrado cujo lado é a diagonal é formado por n^2 quadradinhos, todos do mesmo tamanho que os quadradinhos que formam os quadrados unitários. Logo, para que a área desse quadrado seja o dobro da área do quadrado unitário, devemos ter $n^2=2m^2$.

O desenho a seguir mostra que, se n for ímpar, então n^2 não pode ser par. Logo, n é par.

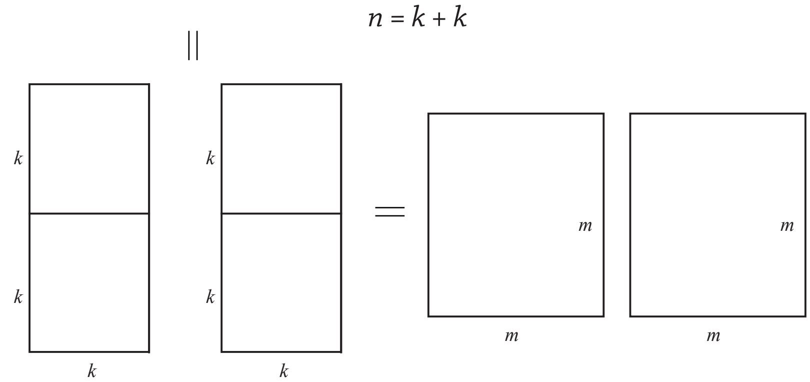


$n=k+k+1$

Sendo n par e uma área o dobro da outra, observemos o desenho abaixo.



$$n = k + k$$



Fica claro que m^2 também tem que ser par. O mesmo raciocínio mostrado na figura anterior nos faz concluir que m é também um número par.

Mostramos, portanto, que a razão que mede a diagonal necessariamente tem que ser uma razão entre números pares. Mas a equivalência de frações nos diz que a paridade se esgotará, e aí temos o absurdo.

EXERCÍCIOS

1) Calcule a área de um retângulo cujos lados medem $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$.

2) Mostre algebricamente que n^2 será par se e somente se n for par.

3) Mostre algebricamente que se $n^2=2m^2$ e n^2 for par, então m^2 também será par.

4) Calcule a área de um retângulo cujos lados medem $\frac{3}{8}$ e $\frac{7}{9}$. Construa então um algoritmo simples para se calcular áreas de retângulos e volumes de paralelepípedos com dimensões arbitrárias.

5) Em uma turma da quinta série, distribuí 4 cadernos para cada aluno dessa turma e me sobraram 90 cadernos. Se tivesse dado 6 cadernos para cada menino, me sobrariam dois cadernos. Essa turma tem quantos alunos?

6) Um googol é a denominação dada para o número 10^{100}. Seja k o menor inteiro positivo tal que $\frac{10^{100}}{2^k} < 3$. É correto afirmar que:

a) $\frac{10^{100}}{2^k} \geq \frac{3}{2}$

b) $\frac{10^{100}}{2^k} < 1$

c) $\frac{10^{100}}{2^k} < \frac{3}{2}$

d) $\frac{10^{100}}{2^{(k+1)}} > \frac{3}{2}$

7) Um círculo de raio unitário é dividido em duas partes. A área de uma parte é $\frac{3}{2}$ da área da outra parte. Quanto mede a área da parte menor?

8) Sabe-se que um terço do peso de uma jaca mais o peso de um melão é igual ao seu próprio peso. O melão pesa 2 quilos. Qual é o peso dessa jaca?

9) Uma chapa metálica com 322 metros quadrados de área é utilizada para fabricar uma caixa em forma de um paralelepípedo com 8 metros de comprimento e altura igual à largura, ambas com x metros de comprimento. Calcule o volume dessa caixa assim construída.

10) O hectare é uma medida agrária equivalente a 10.000 metros quadrados. A área de um grande latifúndio é de 45.000 hectares. Determine a área desse latifúndio em quilômetros quadrados.

11) Se escolhêssemos como unidade de área um círculo de raio 1 em vez de um quadrado unitário, qual seria então a área do quadrado unitário? Qual seria a área de um círculo de raio 2?. Qual seria a vantagem de escolher o quadrado e não o círculo como unidade de área? (Note que não teríamos o problema da quadratura do círculo e sim o problema da circulação do quadrado!) Reflita sobre a questão 15 da apresentação.

12) Sete livros.
Os livros estão aqui.
Eu, sujeito que conta.
Estou aqui também.
Onde está o sete?

AULA 2

Representação decimal e frações

INTRODUÇÃO

Esta aula é composta apenas de duas seções. A primeira, bem curta, sobre representação decimal, aponta alguns fatos importantes para a apreensão do conteúdo em questão. Não há intenção de ensinar ou justificar algoritmos e nem de fazer um estudo sistemático da teoria.

A segunda seção aborda as operações com frações, multiplicação, divisão e adição. Aqui os algoritmos são justificados. Procuramos proporcionar um entendimento profundo das operações, em sua prática e em seu significado. Não há de forma alguma uma preocupação em desenvolver habilidades de efetuação.

A REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Quando falamos em divisão como, por exemplo, $\frac{2}{3}$ (duas barras de chocolate divididas igualmente entre três meninos), cada um recebe exatamente, precisamente, $\frac{2}{3}$ da barra. Então, por que falamos que $\frac{2}{3}$ não é uma divisão exata? Há uma incorreção pedagógica retratada nessa indagação. A questão pedagógica consiste no ensino dos "números decimais". Não se trata de números decimais, mas sim de uma representação decimal posicional dos números. Da maneira como se ensina, passa-se a idéia de que existem dois tipos de números: números fracionários e números decimais. Não há dois tipos de números, apenas representações diferentes, como o sistema de numeração romano, egípcio, arábico, grego etc. Deveríamos falar então de representação decimal posicional (QVL) das frações, e não de números decimais.

Mesmo quando uma fração está representando o resultado de uma divisão, como $\frac{2}{3}$ no exemplo acima, estamos na verdade comparando a quantidade de chocolate que cada menino recebeu com a quantidade total de chocolate (a barra inteira).

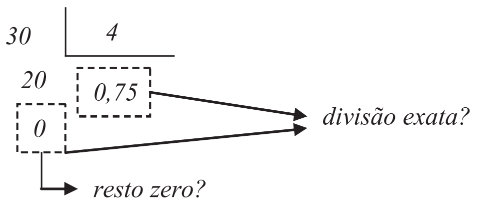
Por que então afirmamos que $\frac{2}{3}$ não é uma divisão exata? Vimos que $\frac{2}{3}$ é o resultado da distribuição (divisão), separação em partes iguais, de duas barras de chocolate entre três meninos. Se cada um recebeu exatamente $\frac{2}{3}$ da barra, qual então o sentido da afirmação? A afirmação tem origem no engano pedagógico que mencionamos, mas psicologicamente a representação decimal é mais confortável e também mais fácil e eficiente como instrumento de comparação pelo uso do sistema posicional. Parece então natural o surgimento de idiossincrasias com relação à representação fracionária. Sempre se tem a impressão de que a conta ainda não acabou, falta ainda alguma efetuação para se chegar a uma resposta capaz de trazer sossego.

Contudo, uma representação decimal tem infinitas casas decimais, o que também causa incômodo. Vejamos, $\frac{2}{3}$ e 0,666... efetuam a mesma comparação ou medida. A representação com infinitas casas posicionais, além de incômoda, impede o uso dos algoritmos das operações, adição e multiplicação. Na prática, precisamos só de algumas casas e não de todas. Então, lidamos apenas com representações em que, a partir de uma determinada casa, todas as casas estão vazias: 0,6670000..., e não 0,6666... Fazemos o arredondamento. Dizemos que uma representação decimal é exata quando se tem, digamos, uma dízima periódica com período zero. É nesse contexto que aparece o desentendimento sobre a exatidão da divisão $\frac{2}{3}$. O que temos é o seguinte: a representação decimal de $\frac{2}{3}$ não é exata. Logo, não se trata da divisão, e sim da representação.

O algoritmo utilizado para encontrar a representação decimal consiste em efetuar sucessivas divisões euclidianas. Por exemplo, 20 dividido por 3, encontra-se quociente 6 e resto 2; continua-se o processo de divisão repetidas vezes para se obter a dízima periódica de $\frac{2}{3}$. Quando uma dessas divisões possui resto zero, então a representação decimal é exata no sentido que falamos acima, ou seja, todas as casas seguintes estarão vazias, com o símbolo zero para mostrar esse fato. (Originalmente o zero não é um número, ele é só um símbolo usado para indicar que a casa posicional está vazia.) Exemplo: $\frac{4}{5}$; 40 dividido por 5, encontramos 8 como quociente e zero como resto; logo, a representação decimal de $\frac{4}{5}$ será 0,800000...; que escrevemos apenas 0,8. Outro exemplo: $\frac{3}{4}$; fazemos duas divisões, 30 por 4 e 20 por 4; a primeira com resto 2 e a segunda com resto zero. Logo, a representação decimal de $\frac{3}{4}$ é 0,750000... e, escrevemos apenas 0,75.

Vimos que não se trata da divisão $\frac{3}{4}$ ser exata e $\frac{2}{3}$ não ser exata, pois ambas são bem exatas, cada um receberá $\frac{3}{4}$ da barra ou $\frac{2}{3}$ da barra no segundo caso. Mas a representação de $\frac{3}{4}$ é exata, enquanto a representação de $\frac{2}{3}$ não é.

Devemos, portanto, evitar a seguinte afirmação muito comum: 3 dividido por 4 resulta em 0,75 e o resto é zero. Não há resto na representação decimal, resto ocorre na divisão euclidiana. O diagrama apresentado a seguir é pedagógica e conceitualmente incorreto, mas aparece com freqüência nos livros didáticos.



Vejamos o princípio do sistema posicional e a necessidade do símbolo zero: a grande invenção que torna possível a representação posicional.

Suponha a seguinte situação. Em um cassino, uma pessoa tem 3 fichas brancas no valor de 1 euro cada uma, 3 fichas vermelhas no valor de 4 euros cada uma e 3 fichas pretas no valor de 16 euros cada uma. Seu amigo tem 15 euros em dinheiro e quer trocar por fichas. Gostaríamos de saber como será feita a troca.

15= *VVVBBB* (3 fichas vermelhas e 3 fichas brancas)

Se fossem 16 euros:
16 = *P* (1 ficha preta)

Se fossem 17 euros:
17 = *PB* (1 ficha preta e 1 branca)

Se fossem 18 euros:
18 = *PBB* (1 ficha preta e 2 brancas)

Não há necessidade do zero, mas, se quisermos escrever números maiores do que 63, teremos que ter mais cores. Para resolver esse problema, a posição do algarismo faz o papel da cor. Por exemplo,

$$15 = VVVBBB = 33$$
$$16 = P = 1 - -$$
$$17 = PB = 1 - 1$$
$$18 = PBB = 1 - 2$$

Observe que temos que colocar um traço para contar as posições. No último número, temos 18=1-2; o 2 está na primeira posição, na segunda não há nada e o 1 está na terceira. Se colocarmos um símbolo, digamos zero =0, resolvemos o incômodo do traço:

$$17 = 101;\ 18 = 102.$$

O que fizemos foi um exemplo do sistema posicional com base 4. O sistema usual é o sistema decimal, isto é, na base 10, com nove números e o zero. O princípio funcional é o mesmo em qualquer base.

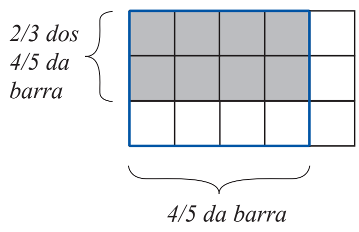
FRAÇÕES

No Capítulo1, vimos os conceitos fundamentais e a ontologia das frações. Agora vamos descrever os processos operacionais desse sistema de medida.

No processo de comparação, suponha que queiramos saber quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Queremos saber quanto é uma parte de outra parte. A pergunta “quanto é” pede uma comparação com o todo. Esse todo é caracterizado pelo contexto. Por exemplo, uma barra de chocolate, uma pizza, um queijo etc.

Temos que traçar uma estratégia de comparação: devemos dividir os $\frac{3}{4}$ da barra em três partes iguais e tomar duas dessas partes; em seguida, queremos saber como essas duas partes que foram tomadas se comparam com o todo original, ou seja, a barra inteira. Exemplos bem mais simples seriam: a metade da metade e a terça parte da metade, que obviamente são um quarto do todo e um sexto do todo, respectivamente.

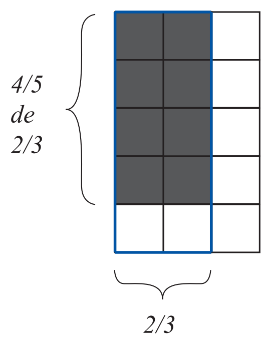
Quando as partes não são tão simples, fica difícil dividir a parte sem perder referência em relação ao todo. Uma estratégia eficaz é fazer divisões horizontais e verticais:



Vemos na contagem que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ equivale a $\frac{8}{15}$ da barra.

Logo, escrevemos $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Vamos agora mostrar um fato que não é nem um pouco trivial nem óbvio. Será que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ é igual a $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$? De outra forma, o procedimento de tomar uma parte de outra parte é comutativo? Para responder a essa questão faremos o seguinte diagrama:



Vemos que $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{8}{15}$, ou seja, é o mesmo que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Basta rodar o retângulo!

Podemos nos convencer, depois de vários exemplos e análises da formação das subdivisões que aparecem no procedimento, que os numeradores ficam multiplicados e os denominadores também. Concluímos, assim, que, para encontrar o resultado do processo de se tomar uma parte de outra parte, basta multiplicar os numeradores e os denominadores:

$$\frac{n}{m} \text{ de } \frac{r}{s} = \frac{n \times r}{m \times s}.$$

Esse é um algoritmo prático, eficaz e funciona para frações aparentes (números) e também frações impróprias. Ainda, esse procedimento coincide com a multiplicação de números quando as frações são aparentes.

Temos então um procedimento que é comutativo e coincide com a multiplicação de números quando a fração é aparente. Ainda, é fácil ver que os dois procedimentos descritos abaixo são iguais, ou seja, acarretam o mesmo resultado.

$$\left(\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5}\right) \text{de } \frac{7}{9} = \frac{2}{3} \text{ de} \left(\frac{4}{5} \text{ de } \frac{7}{9}\right).$$

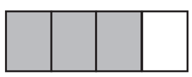
Logo, esse procedimento também é associativo.

A matemática se torna um conhecimento baseado em estruturas, isto é, não importa quem são ou o que são os objetos, mas sim a relação entre eles. O foco é para a relação entre os objetos e não para eles, os objetos. De acordo com esse pensamento, elaboramos a razão pela qual a preposição “de” torna-se uma bela multiplicação.

Por uma analogia estrutural, e não uma analogia semântica, comete-se um abuso de linguagem e de notação e chama-se o procedimento, o processo, de se encontrar uma parte de outra parte, multiplicação de frações.

Suponha agora que queiramos comparar duas partes: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

2/3



3/4

Fazemos as perguntas: qual é maior? Qual é menor? Se for maior, então quanto uma é maior do que a outra? O dobro? O triplo? Maior do que o dobro e menor do que o triplo?

Essa é a questão: $\frac{2}{3}$ é quanto de $\frac{3}{4}$?

Ou seja, procuramos uma fração $\frac{p}{q}$ tal que $\frac{2}{3}$ seja igual a $\frac{p}{q}$ de $\frac{3}{4}$.

Escrevemos: $\frac{2}{3} = \frac{p}{q}$ de $\frac{3}{4}$.

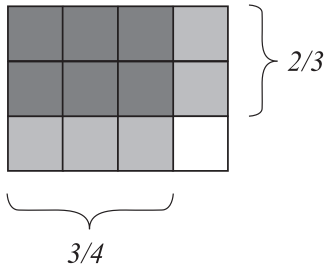
Mas, como a preposição "de" é agora uma multiplicação, a pergunta pode ser reformulada nesses termos e fica assim: qual a fração que multiplicada por $\frac{3}{4}$ resulta em $\frac{2}{3}$?

Também por analogia, vemos que essa pergunta é exatamente a mesma que fazemos para introduzir o conceito de divisão de números como operação inversa da multiplicação.

Por essa analogia, vamos chamar a fração $\frac{p}{q}$ encontrada de divisão da fração $\frac{2}{3}$ pela fração $\frac{3}{4}$. (Observe que, não importa qual delas é maior, a divisão sempre existe.)

O algoritmo desenvolvido para a multiplicação (junto com a simplificação de fração: frações equivalentes) pode ser utilizado para encontrar o resultado $\frac{p}{q}$ e nos fornecer o algoritmo da divisão de frações: "multiplicar invertido".

Mas podemos compreender esse procedimento também da seguinte forma mais visual:



Para comparar $\frac{2}{3}$ com $\frac{3}{4}$, apenas contamos: $\frac{3}{4}$ são 9 retângulos e $\frac{2}{3}$ são 8 retângulos. Logo, $\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ de $\frac{3}{4}$.

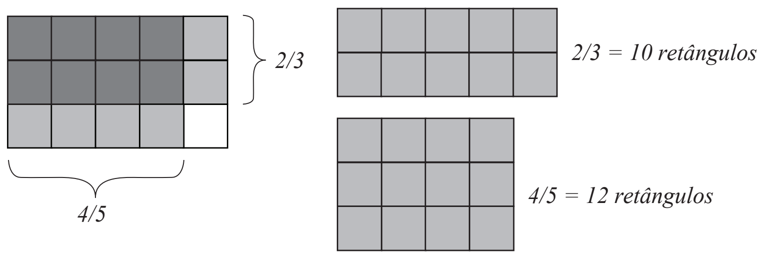
O algoritmo de "multiplicar invertido" pode ser facilmente induzido desse procedimento.

A seguinte observação se faz pertinente: a multiplicação de frações surge da necessidade de se calcular uma parte de outra parte e a divisão de frações é conseqüência natural da necessidade de duas partes serem comparadas.

Vejamos agora o que pode significar a soma ou adição de duas frações. Como desde o início estamos considerando os números como substantivos abstratos, então as frações, um processo de medir, de comparar, também será um substantivo abstrato, ou seja, uma fração é sempre uma fração de alguma coisa. Uma fração não subsiste senão no objeto a que se refere: $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate, $\frac{4}{5}$ da pizza etc.

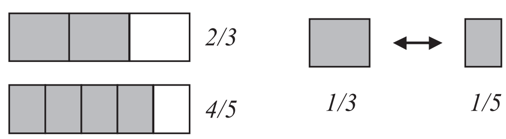
A adição de duas frações será, portanto, definida como sendo a razão entre a junção das partes às quais cada uma das duas frações se refere e o todo. Evidentemente esse todo tem que ser o mesmo para ambas as frações, ou seja, as partes têm que ser partes de um mesmo todo.

Novamente devemos traçar uma estratégia para calcular a soma de duas frações. Suponha uma situação em que seja necessário somar $\frac{2}{3}$ com $\frac{4}{5}$ de uma barra de chocolate. Uma estratégia eficaz é fazer novamente divisões horizontais e verticais.

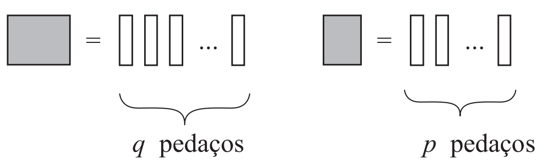


Logo, $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ = 22 retângulos = $\frac{22}{15}$ da barra.

A dificuldade maior consiste em comparar as subunidades determinadas pelas duas frações. No exemplo acima, o diagrama permite a visualização dessa comparação.



Temos que comparar as duas partes: $\frac{1}{5} = \frac{p}{q}$ de $\frac{1}{3}$



Se encontrarmos uma fração tal que $\frac{1}{5} = \frac{p}{q}$ de $\frac{1}{3}$, então $\frac{1}{q}$ de $\frac{1}{5} = \frac{1}{q}$ de $\frac{1}{3}$. Temos, assim, uma subunidade comum às duas subdivisões da barra. A divisão da barra em $5p$ pedaços é igual à divisão dela em $3q$ pedaços, ou seja, a multidão $5p$ é igual à multidão $3q$. Ainda, p desses pedaços formam $\frac{1}{5}$ e q desses pedaços formam $\frac{1}{3}$. Logo, em $\frac{4}{5}$ temos $4p$ pedaços e em $\frac{2}{3}$ temos $2q$ pedaços. Assim,

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{(2q + 4p)}{5p} = \frac{(2q + 4p)}{3q}$$

Repare que o número $m = 5p = 3q$ é um múltiplo comum de 3 e 5.

Poderíamos, em vez de encontrar a fração $\frac{p}{q}$, simplesmente escolher um múltiplo comum c=5a=3b e efetuarmos a soma com a subunidade comum $\frac{1}{a}$ de $\frac{1}{5} = \frac{1}{b}$ de $\frac{1}{3}$. Se escolhermos um outro múltiplo comum qualquer, o resultado será uma fração equivalente? Normalmente escolhemos esse múltiplo comum como sendo simplesmente o produto dos dois denominadores.

Poderíamos também efetuar uma soma de frações usando simplesmente frações equivalentes, isto é, encontramos frações equivalentes de forma que todas tenham o mesmo denominador. A discussão que proporcionamos mostra que comparar duas partes se reduz a encontrar um denominador comum.

EXERCÍCIOS

1) Encontre a representação decimal da fração $\frac{7}{31}$.

2) Discuta uma representação posicional na base 5 com quatro cores.

3) Desenvolva um argumento persuasivo para a seguinte afirmação: 0,9999...=1.

4) Por que a preposição “de” se transforma em uma bela multiplicação?

5) Calcule $\frac{4}{7}$ de $\frac{8}{9}$.

6) Discuta o algoritmo para a divisão de frações.

7) Encontre um algoritmo para a soma de frações.

8) Qual seria a vantagem de escolher o menor múltiplo comum para efetuar uma soma de frações?

9) Mostre que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = cb$.

AULA 3

Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum

INTRODUÇÃO

Discutiremos nesta aula as propriedades notáveis que caracterizam esses dois números. A idéia de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum é bem simples. Basta escolher entre os múltiplos comuns o menor deles e entre os divisores comuns o maior deles. Isso é muito singelo para merecer tanta atenção: sigla, capítulos e seções de livros.

Qualquer problema que envolva *mmc* e *mdc* em uma situação pode ser resolvido com o seguinte raciocínio: preciso de um divisor comum; para otimizar, preciso escolher o maior deles. Analogamente procedemos nas aplicações do *mmc*.

Exemplo de aplicação de *mdc*: tenho duas tiras de pano, uma de 24 metros e outra de 36 metros. Preciso cortar essas tiras para fazer várias fitas de mesmo comprimento. Se não quero deixar sobra de pano, qual o maior comprimento possível de cada fita? Seguindo o raciocínio acima, temos: para não haver sobra, o comprimento das fitas tem que ser um divisor de 24 e de 36, ou seja, um divisor comum. Como eu quero o maior comprimento possível, então, evidentemente, o comprimento deve ser o maior divisor comum. Note que é um raciocínio simples e banal. Não é necessária nenhuma teoria sobre o assunto. Os algoritmos para se encontrar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum também são bastante simples: divisão euclidiana e fatoração primária.

Exemplo de aplicação de *mmc*: um ciclista completa uma volta em 8 minutos enquanto um outro ciclista gasta 12 minutos para completar uma volta. Se os dois partiram de uma mesma posição, quando os dois ciclistas estarão, pela primeira vez, novamente juntos no ponto da largada? Basta contar de 8 em 8 e de 12 em 12 obtendo os múltiplos comuns; depois, verificar qual é o menor deles. Vemos também que o raciocínio é bastante ordinário para se falar em uma teoria de mínimo múltiplo comum, com sigla e tudo a que um conteúdo relevante tem direito.

Qualquer pessoa é capaz de se envolver com esses dois problemas apenas tecendo raciocínios de contagem.

Fica então a pergunta: o que eles têm de notável, o *mmc* e o *mdc*?

CARACTERIZAÇÃO DO *MMC*

O que caracteriza o *mmc* não é ser o menor múltiplo comum e o que caracteriza o *mdc* não é ser o maior divisor comum, apesar do nome!

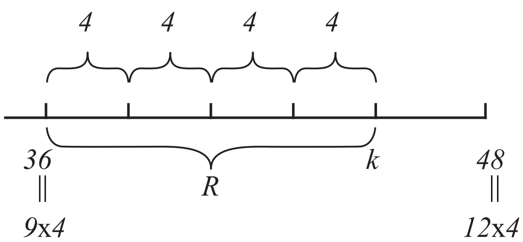
Vejamos: os múltiplos de 3 são $m(3) = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,...\}$ e os múltiplos de 4 são $m(4) = \{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,...\}$. Os múltiplos comuns são aparentemente $\{12,24,36,48,...\}$, ou seja, os múltiplos comuns formam uma progressão aritmética de razão 12. Essa conclusão é apressada. Deve ser investigada com mais cuidado, com indagações mais sofisticadas e menos ingênuas. Claramente vemos que o mínimo múltiplo comum de 3 e 4 é 12. Ainda, a transitividade nos mostra que todo múltiplo de 12 é também um múltiplo comum, pois se k é múltiplo de 12 e 12 é múltiplo de 3, então k também é múltiplo de 3; se k é múltiplo de 12 e 12 é múltiplo de 4, então k é também múltiplo de 4.

A pergunta crucial é: será que todo múltiplo comum de 3 e 4 é também múltiplo de 12? Esse fato não é nada óbvio e demanda alguma investigação.

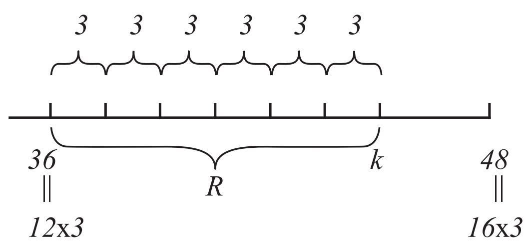
Suponha que um número k seja múltiplo de 3 e de 4. Então, $k = 3r = 4s$ para algum r e algum s. Daí, como concluir que k é múltiplo de 12? Seria necessário concluir a partir da igualdade $3r = 4s$ que 4 é um divisor de r ou que 3 é um divisor de s. Mas isso não é tarefa fácil, veja, 4 é divisor de $6 \times 10 = 60$, mas 4 não é divisor de 6 nem de 10.

Logo, vemos que esse problema de divisibilidade é mais delicado do que parece.

Vamos tentar um outro caminho. Suponha que um número k não seja múltiplo de 12. Decorre então que sua divisão por 12 deixa um resto não nulo, digamos, $k = q12 + R$. Se k for múltiplo de 3, então $R = k - q12$ também será. Se k for múltiplo de 4, então a mesma igualdade mostra que R também será múltiplo de 4. Logo, se k for um múltiplo comum, R também será múltiplo comum. Mas isso seria absurdo, visto que 12 é o menor múltiplo comum e R é menor do que 12. Concluímos assim que k não é um múltiplo comum.



R é múltiplo de 4



R é múltiplo de 3

Provamos que, se um número k não for múltiplo de 12, então ele não é múltiplo comum de 3 e 4.

Portanto, todos os múltiplos comuns de 3 e 4 são múltiplos de 12 e vice-versa.

Evidentemente essa argumentação é válida para qualquer par de números. Com isso temos a propriedade notável do *mmc* e que o caracteriza:

Se m for o *mmc* de a e b, denotado por $m = mmc(a,b)$, então, todo múltiplo comum de a e b é também múltiplo de m e reciprocamente. Ou seja, os múltiplos comuns de dois números a e b formam uma progressão aritmética cuja razão é exatamente o mínimo múltiplo comum de a e b, a saber, $m=mmc(a,b)$. Dizemos que m gera a seqüência dos múltiplos comuns.

CARACTERIZAÇÃO DO *MDC*

Voltemos agora nossa atenção para o máximo divisor comum.

Os divisores de 24 são: $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Os divisores de 36 são: $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Portanto, os divisores comuns são $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Um olhar cuidadoso, investigante, que busca regularidades, propriedades e fatos notáveis perceberá que 12 é múltiplo de todos os divisores comuns, a saber, 1, 2, 3, 4 e 6. Isso é algo notável e a intrigante pergunta deve ser:

Será que o maior divisor comum de dois números é sempre múltiplo de todos os outros divisores comuns?

Vimos que isso é verdadeiro para os números 24 e 36. Mas, como falamos no prefácio, não podemos verificar todos os pares de números. O critério para apurar verdades se baseia em uma gramática (linguagem), e não na verificação por inspeção ou vistoria.

Portanto, para conhecer, temos que traçar uma linha argumentativa capaz de, através da própria linguagem, nos persuadir.

Vamos chamar de d o maior divisor comum de dois números a e b. Se $c=\frac{ab}{d}$, então c é múltiplo de a e de b. Vimos antes que qualquer múltiplo comum é múltiplo do mínimo múltiplo comum, logo, c é múltiplo de m, em que $m=mmc(a,b)$. Escrevemos, então, $c=km$ para algum número k. Daí, $\frac{ab}{d}=c=km$. A igualdade nos diz que $ab=(kd)m$.

Porém, m é o mmc de a e b, ou seja, m é múltiplo de a e de b, digamos, $m=ra$ e $m=sb$, para algum par de números r e s.

Temos então:

$$ab=(kd)m=(kd)ra=(kd)sb.$$

Feitos os devidos cancelamentos, obtemos:

$$a=(kd)s \text{ e } b=(kd)r.$$

Concluímos assim que kd é um divisor comum de a e b. Mas, como d é o maior divisor comum, então k=1. Logo,

$$ab=dm, \text{ ou melhor, } \frac{ab}{m}=d.$$

Essa é uma fórmula conhecida do Ensino Básico, relação entre o *mmc* e o *mdc* de dois números.

Suponha agora que ρ seja um divisor comum de a e b. A mesma argumentação feita acima nos leva ao seguinte resultado:

$$\frac{ab}{\rho}=\lambda m$$

para algum número λ, visto que $\frac{ab}{\rho}$ é múltiplo de a e de b.

Daí,

$$\frac{ab}{\rho}=\lambda m=\lambda\left(\frac{ab}{d}\right), \text{ donde } \frac{1}{\rho}=\frac{\lambda}{d}, \text{ ou seja, } d=\lambda\rho.$$

Portanto, qualquer divisor comum de a e b é divisor de d como queríamos!

A dedução acima mostra o poder do método dedutivo, ou argumentativo: sem precisar averiguar, verificar um a um (o que seria impossível por se tratar de infinitos objetos), nos convencemos de que a afirmação é válida para todos os pares de números. Não precisamos testar!

Esse processo de conhecer a argumentação, a dedução, foi uma invenção dos gregos, desde Tales, passando por Pitágoras, os pré-socráticos, Sócrates, Platão, Aristóteles, Euclides, Arquimedes, e chegou até nós: o debate público, a réplica, a arte da persuasão, a dessacralização das leis, a onipotência do verbo e o ser humano no centro das atenções; os atos heróicos, angústias pelo absurdo da morte; enfim, a própria razão. Tudo é legado grego. Por isso estudamos os gregos e sua cultura (a paidéia); não porque eles são o nosso passado, mas porque nós somos o futuro deles.

Lembre que, em ciência, incluindo a matemática, o importante não é tanto as respostas, mas as perguntas! Uma boa pergunta é mais difícil do que uma boa resposta, e a ciência é feita muito mais de boas perguntas do que de boas respostas.

EXERCÍCIOS DIRIGIDOS

Questão 1

Dois ciclistas percorrem uma pista circular. O primeiro ciclista completa uma volta a cada 3 minutos. O segundo, mais lento, completa uma volta a cada 5 minutos. Se os dois partiram de um mesmo ponto, quando se encontrarão pela primeira vez?

Solução:

- Em um minuto o primeiro ciclista completa $\frac{1}{3}$ da volta, e o segundo, $\frac{1}{5}$.
- Em t minutos o primeiro ciclista percorre $\left(\frac{1}{3}\right)t$ volta, e o segundo, $\left(\frac{1}{5}\right)t$.
- Os dois estarão juntos sempre que $\left(\frac{1}{3}\right)t - \left(\frac{1}{5}\right)t = n$, em que n é um número natural.
- Encontre a solução da equação acima para n = 1, n = 2, n = 3 etc.
- Cada solução é um instante de ultrapassagem.
- Encontre os pontos de ultrapassagem.

Questão 2

Encontre duas velocidades na questão anterior para que haja 4 pontos de ultrapassagem durante o percurso. Será que conseguimos encontrar duas velocidades para que haja 100 pontos de ultrapassagem?

Questão 3

Suponha que o *mdc* de dois números *a* e *b* seja $d=mdc(a,b)$. Construa uma argumentação para mostrar que $cd=mdc(ca,cb)$. Ou seja, o máximo divisor comum de eqüimúltiplos de *a* e *b* é um múltiplo do máximo divisor comum de *a* e *b* com a mesma razão.

Solução:

- Seja $d'=mdc(ca,cb)$.
- Como cd é divisor comum de ca e cb, então d é múltiplo de cd, digamos, $d=r(cd)$.
- Logo, rd é divisor comum de a e b.
- Conclui-se daí que r=1.

Questão 4

Suponha que c seja um divisor do produto ab e que $d=mdc(a,c)$. Então, c é um divisor do produto db. (Em particular, se a e c são primos entre si, concluímos que c é um divisor de b; esse resultado é fundamental em teoria de números e nele se baseia a unicidade da decomposição em fatores primos – Teorema Fundamental da Aritmética).

Solução:

- Pela hipótese, ab é múltiplo de c. Evidentemente ab é múltiplo de a.
- Então, ab é múltiplo comum de a e c.

• Pela caracterização do *mmc* temos que *ab* é múltiplo de $m=mmc(a,c)$.
• Digamos $ab=rm$.
• Mas vimos que $m=\frac{(ac)}{d}$.
• Logo, $ab=r\left[\frac{(ac)}{d}\right]$.

Questão5
Reflita sobre a seguinte afirmação: se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{n}{m}$ são iguais (equivalentes), então os denominadores b e m possuem um divisor comum d; esse divisor comum divide b em d partes iguais cada uma delas composta de k unidades e também divide m em d partes iguais cada uma delas composta de r unidades; os numeradores a e n são eqüimúltiplos de k e r.

Essa reflexão, que foi também solicitada na Aula 1, se apóia nos resultados abaixo.

Resultado A
Sejam a e b dois números e $d = mdc\ (a,b)$. Então, $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Solução:
• Seja c um divisor comum de $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$.
• Então, cd é divisor comum de a e b.
• Assim, $c=1$, pois d é o maior divisor comum de a e b.

Resultado B
$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ se, e somente se, a e b são eqüimúltiplos de $\frac{n}{d}$ e $\frac{m}{d}$, em que $d = mdc\ (n,m)$.

Solução:
• $am=bn$.
• A igualdade mostra que n é divisor do produto (am) e m é divisor de (bn).
• Pela Questão 4, n é divisor de (da) e m é divisor de (db).
• Portanto, $da=\alpha n$ e $db=\beta m$ para algum α e para algum β.
• A primeira igualdade implica que $\alpha=\beta$.

Resultado C
$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ se, e somente se, os numeradores a e n são eqüimúltiplos de $\frac{b}{d}$ e $\frac{m}{d}$, em que $d = mdc\ (b,m)$.

Solução:
• Siga a argumentação do *Resultado B* com as devidas alterações.

Questão 6
Verifique que o algoritmo elaborado para encontrar o resultado da soma de duas frações genuínas nem sempre conduzirá a uma fração genuína, mesmo quando o múltiplo comum escolhido para efetuar o algoritmo for o mínimo múltiplo comum.

Solução:

- $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = ?$

- $\frac{5}{13} + \frac{3}{26} = ?$

Questão 7

Suponha que um número c seja divisor do produto ab. Defina o conjunto A de todos os números com a propriedade de que c seja um divisor do produto xb. Mostre que o menor número de A é um divisor comum de a e c. Dê um exemplo para verificar que nem sempre esse menor elemento do conjunto A é o máximo divisor comum de a e c.

Solução:

- Seja x_0 o menor número do conjunto A.
- Dividindo c por x_0 temos: $c=qx_0+r$.
- Dividindo a por x_0 temos: $a=q'x_0+r'$.
- Multiplique as equações acima por b.
- Conclua que r e r' pertencem ao conjunto A.
- 12 é divisor de 18×4; $mdc(12,18)=6$; 12 é divisor de 3×4 e de 6×4.

Questão 8

Mostre que o resultado da Questão 4 é um corolário do resultado da Questão 7.

Solução:

- x_0 é divisor comum de a e c.
- Logo, x_0 é divisor de $d = mdc(a,c)$.
- c divide x_0b e x_0 divide d.
- Portanto, c divide db.

Questão 9

Seja p um número primo. Suponha que p seja divisor do produto ab. Mostre que, se p não for divisor de a, então p será divisor de b.

Solução:

- p e a são primos entre si, ou seja, $mdc(p,a) = 1$.

Questão 10

Mostre que o menor divisor de um número é primo. Todo número possui um divisor primo. (Evidentemente estamos excluindo a unidade na consideração dos divisores.)

Questão 11

Discuta o Princípio Fundamental da Aritmética: se $p_1p_2=q_1q_2$ e os quatro números forem primos, então $p_1=q_1$ e $p_2=q_2$ ou $p_1=q_2$ e $p_2=q_1$. Esse princípio estabelece a unicidade da decomposição primária.

AULA 4

Números relativos (negativos)

Qual será o sentido da multiplicação de dois números negativos? Número negativo já é algo estranho, o que pensar então sobre a multiplicação deles! Vários matemáticos do século 18 se recusavam terminantemente a multiplicar dois números negativos.

Podemos definir um número negativo como um débito, uma dívida. A todo número corresponde uma dívida de igual valor que chamamos débito. Podemos definir também o tamanho do segmento oposto como número negativo, ou seja, o simétrico de um número.

Repare que na prática não há necessidade de criar esses objetos, lidamos apenas com o conceito de débito e crédito, perda e ganho, direito e esquerdo. Qualquer sistema contábil, por mais complexo que seja, utiliza apenas os conceitos citados acima.

Se uma pessoa está devendo 300 reais e ela paga 100 reais, qualquer um, sem dificuldade, sabe que essa pessoa ainda continua com um débito de 200 reais.

A subtração é suficiente para lidar com as polarizações do cotidiano.

Fica então a pergunta: qual a razão de se criar o conceito de número negativo?

Se fizéssemos a seguinte convenção: escreveremos o número apostrofado para indicar que ele representa um débito, ou seja, para indicar que se trata de um número negativo. Como ficariam então as operações algébricas?

Por exemplo, em nossa convenção, 5′ significa que temos uma dívida ou débito de 5.

Seria conveniente estabelecer regras de operação entre os débitos para, mais facilmente, lidarmos com expressões algébricas. Essas operações deverão ser estruturalmente análogas às operações com números naturais e de forma que coincidam com essas quando os símbolos representarem números, ou seja, forem positivos. Essa será a nossa convenção: os números e as frações serão positivos, e os débitos, apostrofados, negativos. Devemos ter uma multiplicação e uma soma.

É fácil se convencer de que adicionar dívidas é o mesmo que somar os números correspondentes e obter uma dívida igual a essa soma:

$$5'+7'=12'.$$

Também é fácil se persuadir de que adicionar uma dívida ao patrimônio é o mesmo que subtrair o número correspondente:

$$100+18'=100-18=82.$$

Se o patrimônio, ou saldo, for menor do que a dívida, então restará um débito cujo valor será igual à diferença entre os dois números:

$$15+20'=5'.$$

Portanto, subtrair é o mesmo que somar dívidas ou números negativos.

O objetivo é lidar com expressões algébricas sem efetuar as operações. Por exemplo,

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

Estamos usando a propriedade distributiva dos números positivos. Isso é conveniente porque nem sempre podemos efetuar as operações por falta de conhecimento do valor da incógnita. Esse é precisamente o objetivo da álgebra: através de manipulações formais, simbólicas, obter o valor da incógnita. A equação algébrica, em que as expressões tomam parte, é uma condição satisfeita pela incógnita. As manipulações são regras preestabelecidas, são rápidas, efetivas e práticas, no intuito de evitar os percalços do raciocínio aritmético demorado e pouco eficiente para uma sociedade de negociantes.

Como faríamos para desenvolver a expressão

$$(a-b)(c-d) \text{ com } a>b \text{ e } c>d?$$

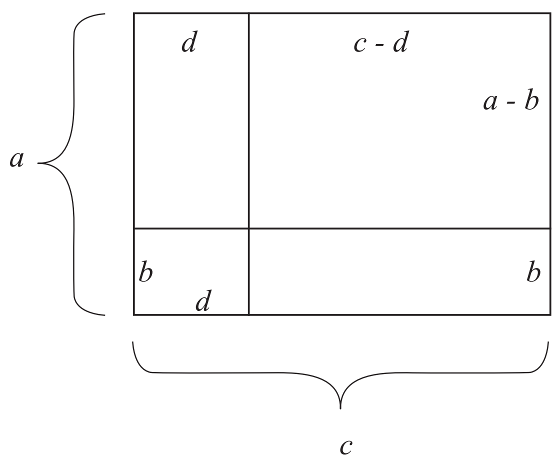
É claro que, se efetuarmos primeiramente as subtrações, fica sem sentido a pergunta, pois

$$(5-3)(8-4)=2\times4=8.$$

A questão se torna relevante quando temos uma incógnita envolvida,

$$(5-x)(x-2)=8.$$

x é um número a ser determinado sabendo que satisfaz a condição expressa pela equação. Devemos usar a propriedade distributiva. Como aplicá-la com a subtração? Vejamos uma representação geométrica.



Na figura acima, vemos que

$$ac=(c-d)(a-b)+ad+bc-bd.$$

Ou seja,

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Na notação apostrofada para débito, simétrico ou número negativo, a propriedade distributiva, se quisermos aplicá-la para esses símbolos, ficaria assim:

$$(a+b')(c+d')=ac+b'c+ad'+b'\mathrm{d}'.$$

Logo, para que a situação geométrica coincida com o formalismo simbólico, devemos ter

$$b'\mathrm{c}=(bc)',\ ad'=(ad)' \text{ e } b'\mathrm{d}'=bd.$$

Ou seja, “menos por mais é menos” e “menos por menos é mais”.

É plausível o reconhecimento da primeira regra, pois uma dívida multiplicada ou uma parte de uma dívida continua sendo uma dívida no valor dos respectivos produtos, assim, $ab'=b'a=(ab)'$.

Perguntamos: por que temos essas regras de sinais? Respondemos: porque definimos assim, não teremos outra escolha se quisermos a propriedade distributiva e a coincidência com a situação geométrica.

Não há uma semântica nem cognição na multiplicação de dois números negativos. Há uma negociação conveniente de significado, uma intencionalidade. Da mesma forma, há também uma negociação para definir frações com denominadores ou numeradores negativos, há uma conveniência nisso.

Quando representamos os números e as frações como pontos da reta, evidentemente estamos considerando o segmento unitário como abstração universal de grandezas ao qual toda quantidade se refere. Por exemplo, uma barra de chocolate com 500 gramas de peso pode ser representada por 500 segmentos unitários cada um deles representando um grama de chocolate. Também pode ser representada por metade de um segmento unitário que representa um quilo de chocolate. Essa abstração é essencial para a construção de modelos abrangentes, que possam representar várias situações.

Com essa representação em mente, chamaremos simplesmente de números tanto os números naturais (multidões) quanto as frações, os números negativos e as frações negativas. Também o zero, ponto que separa, por simetria, os pontos positivos de um lado e os pontos negativos do outro lado, será chamado de número. Ele não é uma multidão. Também não é simétrico de nenhuma multidão. Refere-se à ausência de quantidade, ao vazio, à ausência de qualquer grandeza.

Temos assim uma coleção de objetos que chamamos de números. A nomenclatura se justifica, pois a estrutura desses objetos guarda uma analogia com a estrutura dos números naturais, a saber, operações de soma e multiplicação, comutatividade, associatividade e distributividade da multiplicação em relação à soma.

Na Aula 2, mencionamos que as operações com frações funcionam para frações aparentes (números) e também para frações impróprias. Logo, a estrutura algébrica não se altera se identificarmos um número n com a fração $\frac{n}{1}$. Escrevemos então a igualdade baseada na invariância estrutural: $n = \frac{n}{1}$ para todo número n. (E se n for negativo?)

Vimos que subtrair um número corresponde a somar o seu simétrico. Isso torna a subtração desnecessária nas manipulações simbólicas, pois $x\text{-}y=x+y'$.

Estudamos também que a divisão de frações corresponde a multiplicar pela fração invertida, isto é, $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$

Definimos a fração inversa por: a fração inversa de uma fração $\frac{c}{d}$ é a fração $\frac{d}{c}$, obtida pela permutação do numerador pelo denominador, ou seja, inversão do numerador com o denominador, um toma o lugar do outro. Assim, se quisermos comparar duas partes, basta multiplicar pela fração inversa.

É desejável que todo número tenha um simétrico, pois o simétrico permite desfazer aquilo que foi feito por intermédio da operação de adição. Enriquece a estrutura algébrica. Por exemplo, para resolver a equação,

$$x^2+2x-8=0, \text{ manipulamos}$$
$$x^2+2x+1-8-1=x^2+2x+1-9=0, \text{ o que implica}$$
$$(x+1)^2=9.$$

Conclusão: $x=2$ ou $x=-4$.

Veja o exemplo acima escrito na notação que convencionamos para o simétrico: apostrofar o número.

$$x^2+2x+8'=0, \text{ manipulamos}$$
$$x^2+2x+1+8'+1'=x^2+2x+1+9'=0, \text{ o que implica}$$
$$(x+1)^2=9.$$

Conclusão: $x=2$ ou $x=4'$.

Observamos que foi muito conveniente a existência do simétrico do número 1, a saber, $1'$ ou na notação usual –1. Na última passagem, também usamos a existência do simétrico do 1 quando "passamos o 1 para o outro lado e trocamos o sinal".

Suponha agora que queiramos resolver a equação abaixo:

$$x+3'=5.$$

Fica clara a necessidade de um simétrico para o $3'$ se quisermos desfazer a soma que aparece do lado esquerdo da igualdade.

Quem seria esse simétrico procurado? Em uma interpretação geométrica vemos claramente que o simétrico do simétrico é o próprio número, ou seja, 3' = 3, pois refletimos o número 3 e voltamos com uma nova reflexão oposta. Em caso de débito já não é tão claro o que seja um débito de um débito. Mas, podemos abstrair o conceito e dizer que a todo débito corresponde um crédito de igual valor e a todo crédito também corresponde um débito de igual valor. Assim, podemos definir o simétrico de um débito como sendo o crédito de igual valor correspondente. Sempre que houver uma dualidade recíproca, poderemos utilizar esse modelo. Com base nessas situações, definimos que o simétrico do simétrico de um número x é o próprio número x. De outra forma, apostrofar um número que já está apostrofado é obtê-lo de volta. Note que com essa definição temos que qualquer número, positivo ou negativo, somado ao seu simétrico, resulta em ausência de qualquer quantidade, ou seja, o número zero. Em resumo,

$$x'+x=0 \text{ para todo número } x.$$

Em notação usual temos:

$$(-x)+(x)=0 \text{ para todo número } x.$$

Para então resolver a equação proposta, fazemos a manipulação,

$$x+3'=5,$$
$$x+3'+3'=5+3',$$
$$x+0=5+3,$$
$$x=8.$$

Com relação à multiplicação, a fração inversa desfaz o que foi feito por intermédio da operação de multiplicar. Vejamos:

$$x^2+x+(-2)=0,$$

$$x^2+2\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)+\left[-\left(\frac{1}{4}\right)\right]+(-2)=0,$$

$$\left[x+\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left(-\frac{9}{4}\right)=0,$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ \text{ou}\ x+\frac{1}{2}=\left(-\frac{3}{2}\right),$$

$$x=1\ \text{ou}\ x=-2.$$

A toda fração corresponde uma fração inversa. Os exemplos abaixo são elucidativos.

A fração inversa de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$.

A fração inversa de $-\frac{2}{3}=?$

A fração inversa de $-\frac{2}{1}=?$

Como identificar o número -5 com uma fração aparente?

Vemos que a afirmação feita é ingênua e requer atenção. Quando definimos a fração inversa, o objetivo foi não precisar da divisão de frações. O argumento que tecemos funcionou bem, mas para as frações positivas. O que seria a fração inversa de uma fração negativa?

Para desconstruir o que a multiplicação constrói, a fração inversa multiplicada pela própria fração tem que resultar em 1, pois o número 1 não tem efeito homotético assim como o zero não tem efeito aritmético.

Suponha que queiramos encontrar a fração $\frac{p}{q}$ na equação abaixo.

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{c}{d}\right)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{c}{d}$ encontramos $\frac{p}{q}$.

Evidentemente estamos nos baseando nos algoritmos válidos para frações positivas. Mas, como já temos as regras para a multiplicação de números negativos, fica fácil definir o que seria uma fração inversa de uma fração negativa.

Qual a fração que multiplicada por $-\left(\frac{2}{3}\right)$ resulta em 1? Uma inspeção atenta nos revela que a fração procurada é $-\left(\frac{3}{2}\right)$, visto que "menos por menos é mais".

Logo, a fração inversa de $-\left(\frac{a}{b}\right)$ é $-\left(\frac{b}{a}\right)$.

Temos assim o inverso multiplicativo de todos os números! Será?

Qual o inverso multiplicativo ou a fração inversa de $-2 = \frac{(-2)}{1}$?

O que significa $\frac{(-2)}{1}$ ou $\frac{(-2)}{3}$ ou $\frac{1}{(-4)}$?

É fácil construir um significado para uma fração com numerador negativo. Vimos que $\frac{2}{3}$ corresponde ao segmento de tamanho 2 dividido por 3, ou seja, $\frac{2}{3}$ é a terça parte do segmento de tamanho 2, pois o triplo de $\frac{2}{3}$ é 2. Logo, é plausível definir $\frac{(-2)}{3}$ como sendo o simétrico da terça parte do segmento de tamanho 2, isto é:

$$\frac{(-2)}{3} = -\frac{(2)}{3}$$

De forma geral,

$\frac{(-a)}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$ para todo inteiro a, positivo ou negativo, e b positivo.

Na outra notação,

$\frac{a'}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)'$ para todo inteiro a, positivo ou negativo, e b positivo.

O que fazer agora com $\frac{1}{(-4)}$? Como construir um significado? Quando definimos fração, vimos que o denominador era o número que designava a nova unidade de referência constituída de partes.

Por coerência, a unidade de referência será o simétrico de 4, ou seja, o segmento oposto de mesmo tamanho. Logo, $\frac{1}{(-4)}$ será a quarta parte do segmento oposto ao segmento de tamanho 4, isto é,

$$\frac{1}{(-4)} = -\left(\frac{1}{4}\right)$$

De forma geral,

$\frac{a}{(-b)} = -\left(\frac{a}{b}\right)$ para todo número inteiro b, positivo ou negativo, e a positivo.

Na outra notação,

$\frac{a}{b'} = \left(\frac{a}{b}\right)'$ para todo número inteiro b, positivo ou negativo, e a positivo.

As definições são consistentes com os algoritmos da multiplicação e da adição de frações próprias, impróprias e aparentes.

Será que precisaríamos buscar um sentido para $\frac{(-2)}{(-3)}$? Não necessariamente, mas por razões práticas, para aliviar a mente que manipula símbolos e lida com uma sintaxe, seria desejável.

Se quisermos que a estrutura algébrica seja preservada, e nós queremos, então haverá apenas uma alternativa: $\left(\frac{-2}{-3}\right)$ deve ser consistente com o algoritmo da multiplicação de frações. Logo,

$$\left(\frac{-2}{-3}\right) = \frac{(-2\text{x}1)}{(-3\text{x}1)} = \left[\frac{(-2)}{1}\right]\left[\frac{1}{(-3)}\right] = \left[-\left(\frac{2}{1}\right)\right]\left[-\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

De forma geral,

$\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{a}{b}$ para todo número inteiro a e todo inteiro b, positivos ou negativos.

Temos assim uma estrutura algébrica consistente, ágil, com uma sintaxe simples, que permite uma eficaz manipulação de símbolos.

Resta uma pergunta. Qual o inverso multiplicativo do zero? A própria multiplicação por zero não foi ainda esclarecida.

Podemos interpretar 3×0 como 0+0+0=0. Podemos interpretar também que $\left(\frac{p}{q}\right) \times 0 = \frac{p}{q}$ de 0=0, no sentido de que uma parte de uma ausência é também uma ausência, uma parte do vazio é também um vazio. Mas essas tentativas são forçadas, contrafeitas e afetadas. Como podemos ter metade ou o dobro do vazio? Imaginem as frases: preciso da metade desse vácuo! Preciso de um terço de sua ausência! Necessito de duas saudades! Essas frases não possuem semântica, apenas uma sintaxe. Substantivos abstratos não podem ser contados nem medidos. Quando alguém diz: minha felicidade é maior do que a sua, o significado é: eu sou mais feliz do que você. O adjetivo feliz é atributo do indivíduo e se manifesta nele com intensidades diferentes. A intensidade da manifestação de um atributo pode ser comparada. Minha saudade é grande! Essa frase tem o seguinte sentido: a saudade que não subsiste senão em mim se manifesta de maneira intensa. Preciso de um terço de sua ausência pode significar: quero que você fique mais tempo ao meu lado.

E o que falar de $(-3)\times0$, 0×3 ou $0\times(-5)$? Temos aqui uma dificuldade muito maior para construir alguma semântica possível.

Essa busca angustiante pelo sentido nem sempre é benéfica. Nossa intenção é construir uma estrutura algébrica, eficiente, capaz de resolver expressões e equações que permitam atuar em diversas situações. Criamos para isso símbolos que participam da estrutura, mas não possuem um referente no mundo. Isso nos traz uma sensação de insegurança, de instabilidade, falta de lastro! Nosso apoio deve ser, portanto, na sintaxe.

O zero é um objeto da estrutura construída. Sabemos que ele tem uma participação neutra na soma, ou seja, sua participação não influencia a adição. Façamos então a seguinte operação sintática:

$0\times3=(0+0)\times3=0\times3+0\times3$. (Propriedade distributiva)

Logo,

$$0\times3=0.$$

A mesma operação sintática funciona para a multiplicação pela direita e com qualquer número da estrutura algébrica.

Podemos então concluir que zero “vezes” qualquer número é zero e qualquer número “vezes” zero é zero. Não perdemos a comutatividade.

Voltemos à pergunta inicial: qual seria o inverso multiplicativo do zero?

Suponha que pudéssemos definir um inverso multiplicativo M para o número zero. Teríamos

$$M \times 0 = 1.$$

Mas, como vimos acima, qualquer número multiplicado por zero resulta em zero. Logo,

$$M \times 0 = 0.$$

Chegamos a uma inconsistência da estrutura, qual seja, $1=0$. Portanto, não podemos definir um inverso multiplicativo para o zero sem causar inconsistência na estrutura algébrica. Temos que conviver com isso. Uma deficiência inerente à própria estrutura. Não podemos julgar esse fato como uma deficiência. A impossibilidade apontada é uma característica da estrutura que proporciona a sua riqueza, pois, se um for igual a zero, concluiremos que todo número será igual a zero, ou seja, teríamos apenas um objeto em nosso conjunto de objetos.

EXERCÍCIOS DIRIGIDOS

Questão 1

Mostre que a área de um retângulo é obtida através da multiplicação do comprimento dos seus lados: "base vezes altura".

Solução:

• Suponha um retângulo cuja base mede $\frac{a}{b}$ e a altura $\frac{c}{d}$.

• A base então é constituída de a segmentos, todos eles com tamanho $\frac{1}{b}$ da unidade. Por sua vez, a altura é formada por c segmentos de tamanho $\frac{1}{d}$ da unidade.

• O retângulo ficou dividido em ac partes iguais.

• O quadrado unitário se constitui de bd dessas partes.

• Logo, a área do retângulo é $\frac{(ac)}{(bd)} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$.

• Faça um diagrama com um retângulo de dimensões $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$.

Questão 2

Verifique que as regras de sinais são decorrentes apenas da estrutura algébrica. Não há necessidade do apelo geométrico que fizemos.

Solução:

• $(-a)(b)+(a)(b)=[(-a)+(a)](b)=0\times b=0$. Logo, $(-a)(b)=-(ab)$. Repare que colocar em evidência é desfazer o que a distributividade fez.

• $(-a)(-b)=-[(a)(-b)]=-[(-b)(a)]=-[-(ab)]=ab$.

Questão 3

Responda à pergunta de número 5 da Apresentação.

Questão 4

Explique a denominação "números relativos" utilizada como sinônima de "números negativos".

Questão 5

Procure a palavra distributividade no dicionário e tente compreender a explicação dada.

Questão 6

Verifique que a multiplicação de frações é distributiva com relação à adição.

• Aplique os algoritmos estabelecidos. Verifique que eles funcionam para todas as frações, próprias, impróprias e aparentes, independente do sinal do numerador e do denominador.

• Para frações positivas, reflita sobre o procedimento de se calcular uma parte da soma de duas outras partes dentro do contexto da distributividade.

Questão 7
Pesquise e reflita sobre a seguinte informação: algebrista era o antigo nome dado ao médico, dentista, físico, cuja especialidade é hoje denominada ortopedia ou ortodontia.

Questão 8
Resolva a equação $x^2+x'+2'=0$, utilizando a notação apostrofada.

Solução:

• $0 = x^2 + x' + 2' = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x' + 2' = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)' x + 2' =$

$= \left[x + \left(\frac{1}{2}\right)'\right]^2 + \left(\frac{1}{4}\right)' + 2' = \left[x + \left(\frac{1}{2}\right)'\right]^2 + \left(\frac{9}{4}\right)'.$

• Logo, $\left[x + \left(\frac{1}{2}\right)'\right]^2 = \left(\frac{9}{4}\right).$

• Concluímos que $\left[x + \left(\frac{1}{2}\right)'\right]$ é um número cujo quadrado necessariamente é $\frac{9}{4}$.

• Existem dois números cujo quadrado é $\frac{9}{4}$, a saber, $\frac{3}{2}$ e $\left(\frac{3}{2}\right)'$.

• Daí, $x + \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{3}{2}$ ou $x + \left(\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{3}{2}\right)'$.

• Assim, $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ ou $x = \left(\frac{3}{2}\right)' + \frac{1}{2}$.

• Conseqüentemente, $x = 2$ ou $x = \frac{3'}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(3'+1)}{2} = \frac{2'}{2} = \left(\frac{2}{2}\right)' = 1'$.

Questão 9
Suponha que a fração $\frac{x}{y} = \frac{36}{5}$ e que o resto da divisão de x por y seja 8. Encontre x, y e o quociente q.
Suponha agora que $\frac{x}{y} = \frac{37}{5}$ e que o resto da divisão de x por y também seja 8. Encontre x, y e o quociente q.
Suponha dessa vez que $\frac{x}{y} = \frac{38}{5}$ e que o resto da divisão de x por y seja 8. Encontre x, y e o quociente q. Se por acaso não houver solução, sugira um outro resto.

Questão 10
Reflita e responda se a afirmação abaixo é falsa ou verdadeira.

• Existe uma fração positiva que é menor do que todas as outras frações positivas.

Determine o número (real) positivo que está o mais próximo possível do zero. O ponto que vem logo após o zero, aquele que está encostado no zero.

Questão 11

Construiremos uma estrutura algébrica em um conjunto de objetos. O conjunto em questão será constituído por todos os pontos do plano representados por suas coordenadas cartesianas. Veremos que esse conjunto estruturalmente provido, em vários aspectos formais, é indistinguível do conjunto dos pontos da reta.

Para dois pontos do plano, (a,b) e (c,d) defina as operações de adição e multiplicação: $(a,b)+(c,d)=(ab,cd)$ e $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+cb)$.

Mostre que as duas operações assim definidas são comutativas, associativas e a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Verifique que qualquer ponto (x,y) não se altera quando o ponto $(0,0)$ é adicionado a ele.

Verifique que qualquer ponto (x,y) não se altera quando multiplicado pelo ponto $(1,0)$.

Por analogia aos números negativos e também por sua posição simétrica no plano coordenado, podemos chamar o ponto $(-a,-b)$ de ponto simétrico ao ponto (a,b). A propriedade que o determina é:

$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.

Para todo ponto (a,b) que não seja a origem, verifique que o sistema linear

$(a,b)\times(x,y)=(1,0)$

é possível e determinado.

Reflita sobre as afirmações: todo ponto (a,b) possui um ponto simétrico; todo ponto (a,b) que não seja a origem possui um inverso multiplicativo. Qual a propriedade que determina o inverso multiplicativo?

Tendo em vista as propriedades da estrutura construída, alguém se atreveria a chamar esses objetos, pontos do plano, de números?

Resolva a equação $(x,y)^2=(-1,0)$.

Tente apreender a identificação de um número real a com o par $(a,0)$. Essa identificação guarda uma coerência com as operações definidas, ou seja, ela é compatível com a estrutura algébrica: o produto e a soma de dois números reais se identificam com o produto e a soma dos pares identificados. Para comprovar essa afirmação, verifique as seguintes igualdades:

$(a,0)\times(b,0)=(ab,0)$ e $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$.

Concilie a exposição feita com o que comumente se conhece sobre números reais e números complexos. Explique o significado da raiz quadrada de um número negativo. Faça uma exosmose das considerações enunciadas.

AULA 5

Funções

Função é a nomenclatura utilizada para designar uma relação quantitativa entre duas grandezas. O que seria uma grandeza? Tudo aquilo que pode ser tratado quantitativamente: permite uma ordenação quantitativa. Tudo que pode ser associado às quantidades, às multidões, aos números. Os exemplos mais comuns de grandezas são: temperatura, distância, tempo, velocidade, aceleração, volume, pressão, comprimento, área etc.

A relação quantitativa deve ser uma relação de dependência, uma em função da outra. Justifica-se assim a nomenclatura "função". A relação de dependência se realiza em uma dinâmica: a alteração de uma grandeza produz necessariamente mudança na outra grandeza. Nesse sentido, uma depende da outra; a grandeza A é função da grandeza B. Por exemplo, a distância percorrida por um carro em movimento é função do tempo: quando o tempo passa, a distância percorrida aumenta.

O objetivo do estudo de funções é conhecer a relação quantitativa de dependência, conhecer a dinâmica produzida pela dependência. O que é conhecer? Pergunta difícil! Conhecer é ver, fazer uma teoria, descrever com palavras, símbolos visíveis, com álgebra ou com geometria. O conhecimento é visto. Para esse fim, serve a teoria: "theo" significa ver, enxergar, contemplar. Esse mesmo "theo" aparece na palavra teatro: palco, cenas para serem vistas, contempladas.

Vamos descrever uma dinâmica. Suponha um retângulo em que o comprimento da base seja o dobro de sua altura. Denotemos a altura desse retângulo pela letra h. Sua área A é, portanto, $A=2h^2$, visto que a base mede $2h$ e a altura mede h. A área do retângulo é uma grandeza, e o comprimento da altura, outra grandeza. Percebemos pela igualdade acima que uma depende da outra, ou seja, a área A é função da altura h. Para designar essa dependência, escrevemos $A(h)$ e lemos, oralizamos, A de h. Há uma dinâmica estabelecida.

A descrição dessa dinâmica deve ser capaz de nos trazer informação sobre os seguintes aspectos da situação:

1. Quando a altura aumenta, o que acontece com a área? Aumenta também ou diminui?
2. Quando a altura for igual a 2 centímetros, qual será a área do retângulo?
3. Qual a altura que estabelece uma área de 18 centímetros quadrados?

Para responder à segunda pergunta, fazemos a substituição e efetuamos as operações ditadas pela expressão algébrica. Vejamos:

$$A(h) = 2h^2$$
$$h = 2$$
$$A(2) = 2(2)^2 = 8$$

No lugar do *h,* coloca-se o número 2 e então se efetuam as operações indicadas.

A notação $A(x)$ é um comando. Interpretamos esse comando da seguinte forma: o signo A (no caso uma letra maiúscula do alfabeto) nomeia a expressão algébrica a ser utilizada para efetuações. No caso aqui exemplificado, o signo A designa o procedimento “elevar ao quadrado e depois multiplicar por dois”. Mas um procedimento algébrico é feito em um símbolo. Em qual símbolo devemos operar o procedimento comandado por A? No símbolo que está entre os dois parênteses. Logo,

$$A(x)=2x^2.$$
$$A(\%)=2\%^2.$$
$$A(@)=2@^2.$$
$$A(\&)=2\&^2.$$
$$A(h)=2h^2.$$
$$A(h+5)=2(h+5)^2.$$

O comando é bem claro: o símbolo que aparece entre os parênteses deve se repetir na expressão algébrica. Mas isso pode não fazer sentido! Certamente, não faz sentido mesmo. Estamos lidando apenas com uma sintaxe, o sentido será construído depois e depende do contexto em que estivermos. Cada situação demanda um sentido diferente.

Repare as duas frases a seguir.

“O atleta cantou o hino de seu país." Qual o sujeito da frase? Obviamente o sujeito é “O atleta”.

“A montanha cantou o hino de seu país.” Qual é o sujeito da frase agora? Certamente o sujeito é “A montanha”.

Alguém poderia questionar: mas montanha não canta hino e nem possui país! Ele tem razão, montanha não canta e nem tem país. Mas ser sujeito é uma característica sintática e não semântica. O sentido, se é que vamos querer algum, será construído depois.

A terceira pergunta é mais delicada. Requer uma análise mais acurada. Para a informação requerida não, basta uma mera efetuação.

A busca dessa informação conduz ao que chamamos de equação algébrica e suas técnicas de resolução. A pergunta, qual a altura que estabelece uma área igual a 18 centímetros quadrados, manifesta-se na seguinte indagação: qual número h proporciona-se com a igualdade $18 = 2h^2$?

Desnecessário falar que é essencial a existência de um único número h que satisfaça a igualdade, pois a não existência ou mais de um valor acarreta impossibilidade ou ambigüidade. Essas coisas não são aceitáveis em um processo de investigação. Porém, não vivemos no melhor dos mundos: nem sempre encontramos solução e a ambigüidade nem sempre se faz ausente. O próprio processo operatório de resolução muitas vezes requer muita habilidade devido a sua complexidade e já ocupou a mente de grandes matemáticos ao longo dos tempos. Na resolução de equações, podemos perceber a importância de uma estrutura algébrica rica e ágil.

Em nosso exemplo, podemos desfazer as operações estabelecidas pela função A através de uma divisão e de uma radiciação.

$$18=2h^2.$$
$$9=h^2.$$

Logo, h é necessariamente um número cujo quadrado é 9. Assim, h=3 ou h=-3. Temos, portanto, uma ambigüidade indesejada. Qual dos dois valores será a solução? O contexto em que estamos será utilizado para sairmos do sofisma algébrico. Na situação com que estamos lidando, temos que encontrar a altura de um retângulo. Ora, um retângulo não pode ter altura negativa. Então, tendo em vista a situação, desconsideramos o -3 como resposta e afirmamos com segurança: há apenas um valor para a altura de um retângulo cuja base é o dobro da altura e sua área é 18 centímetros quadrados, esse valor é h=3.

Quando não houver casos de ambigüidade no aspecto retratado pela terceira pergunta, a função recebe uma denominação esdrúxula, mas utilizada universalmente. A função recebe o nome de "função injetiva" ou, mais corretamente, "função injetora".

Portanto, uma função F é injetora quando, para todo número b, a equação $b=F(x)$ possui solução única ou não possui solução. Não pode haver casos de ambigüidade.

Cabe ressaltar que o comando dado por uma função não é necessariamente realizado por expressões algébricas. Por exemplo, considere o seguinte comando: para um número x, estabeleça o menor número primo positivo maior do que ele. Se denotarmos esse comando por F, teremos

$$F(x) = \text{o menor primo positivo maior do que } x.$$

Não há expressão algébrica envolvida no comando. Com relação ao aspecto retratado na segunda pergunta, temos: $F\left(\frac{3}{2}\right)=2$, $F(1)=2$, $F(6{,}5)=7$, $F(-127)=2$. Não há nenhuma efetuação, apenas seguimos o comando para encontrar o valor da função nos pontos indicados. Nem sempre poderemos fazer isso, por exemplo, $F(10^{100})=$? Certamente existe, mas precisaríamos de um potente computador para encontrá-lo. Se o número for ainda maior, nem mesmo o melhor computador conseguirá encontrá-lo antes da eternidade.

Abordaremos agora o aspecto que se manifesta na primeira pergunta. Essa é uma questão bem mais difícil. No desenvolvimento do cálculo, novas técnicas foram inventadas para possibilitar investigações nesse ângulo. Veremos aqui um exemplo em que usaremos apenas manipulações algébricas e senso quantitativo.

Corta-se um fio de arame de um metro de comprimento em duas partes. Com cada uma das partes, constrói-se um quadrado. Se *S* é a soma das áreas dos dois quadrados assim construídos, então qual deverá ser o tamanho de cada parte para se obter o menor valor possível para *S*?

Para resolver essa questão, vamos denominar de x o comprimento de uma parte. Certamente o comprimento da outra parte será $1 - x$. A situação mostra que o número x está entre 0 e 1, sendo que $x = 0$ ou $x = 1$ significa que todo o arame foi utilizado para fazer um quadrado, ou seja, não existe o segundo quadrado, são situações extremas chamadas degeneradas, pois é como se um dos quadrados tivesse área zero, isto é, um quadrado que se degenerou em um ponto.

O lado de um quadrado mede $\frac{x}{4}$ enquanto o lado do outro mede $\frac{(1 - x)}{4}$. Logo, a soma das áreas dos dois quadrado, vale

$$S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left[\frac{(1-x)}{4}\right]^2.$$

Ou melhor,

$$S(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left[\frac{(1-x)}{4}\right]^2.$$

Efetuando algumas operações, obtemos

$$S(x)= \frac{[x^2+(1-x)^2]}{16},$$

$$S(x)= \frac{(2x^2-2x+1)}{16},$$

$$S(x)= \frac{\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)\right]}{8},$$

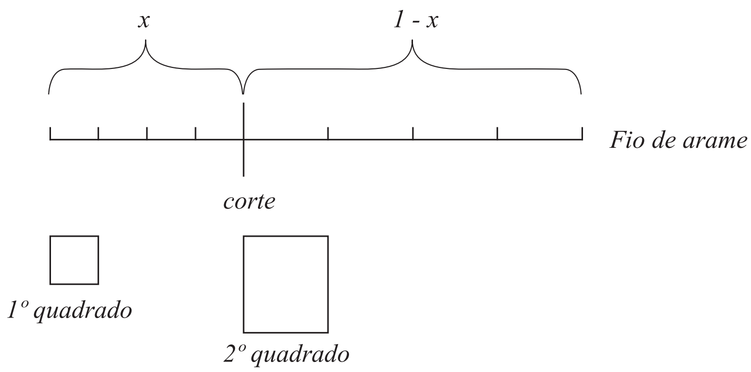
$$S(x)= \frac{\left[x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]}{8},$$

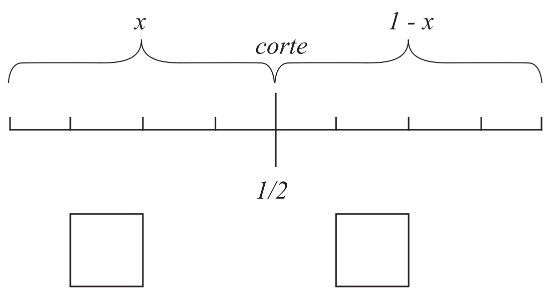
$$S(x)= \frac{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]}{8}.$$

Vemos que, para qualquer valor de x, a primeira parcela do numerador é positiva ou nula, e só se anula quando $x = \frac{1}{2}$. Como a segunda parcela é positiva igual a $\frac{1}{4}$, podemos concluir com segurança que o menor valor possível para S será obtido quando $x = \frac{1}{2}$.

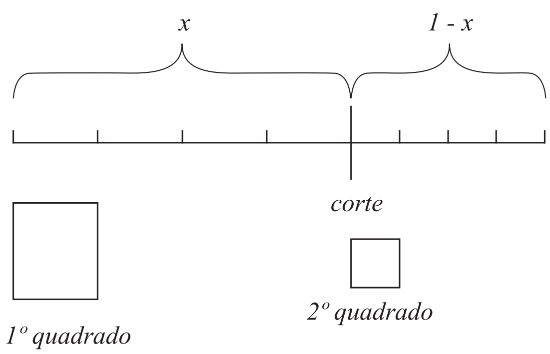
Ainda, como o quadrado de um número aumenta quando esse número aumenta, então $S(x)$ cresce quando x percorre o intervalo $\frac{1}{2} < x < 1$ e $S(x)$ decresce quando x percorre o intervalo $0 < x < \frac{1}{2}$.

Com base no modelo teórico, podemos descrever o processo: a área do primeiro quadrado cresce enquanto a área do segundo decresce, mas o ganho com o aumento da área do primeiro é menor do que a perda com a diminuição da área do segundo, de forma que a soma das áreas diminui até o ponto em que as duas partes serão iguais. Temos nesse ponto a menor soma possível; daí para frente o processo se inverte: a área do primeiro continua a crescer e a área do segundo também continua a diminuir, mas o ganho com o aumento da área do primeiro passa a ser maior do que a perda com a diminuição da área do segundo. Espantoso! Como um modelo teórico pode nos fornecer a descrição de uma dinâmica que jamais conseguiríamos perceber com nossos sentidos limitados! Talvez seja exagero nosso. Uma pessoa observadora poderá muito bem perceber as características dessa dinâmica apenas com o seu senso quantitativo natural: quando se diminui o lado de um quadrado grande, a perda de área é maior do que quando se diminui o lado de um quadrado pequeno. O mesmo raciocínio evidentemente será válido para ganho em vez de perda. Segue daí a compreensão do processo variacional.





Quadrados com área iguais,
menor soma possível.



EXERCÍCIOS DIRIGIDOS

Questão 1

Podemos construir novas funções a partir de funções já estabelecidas utilizando as próprias operações da estrutura algébrica. Suponha que $A(h)=h+1$ e que $B(h)=2h+5$. Encontre a expressão algébrica da função C definida pela ação $C(h)=B(h)A(h)$.

Solução:

$C(h)=(h+1)(2h+5)=2h^2+7h+5$.

Utilizamos a operação produto para formar, digamos, a função produto.

Questão 2

Suponha agora que $f(x)=x^3+4$ e que $g(x)=x^2+8x+9$. Encontre a expressão algébrica da função h definida pelo comando $h(x)=f(x)+g(x)$ e encontre $h(2)$.

Solução:

$h(x)=(x^3+4)+(x^2+8x+9)=x^3+x^2+8x+13$.

$h(2)=8+4+16+13=41$.

Questão 3

A construção de uma nova função pode ser feita também através de composição. Suponha que $R(t)=t^2-4$ e que $S(t)=t-1$. Encontre a expressão algébrica da função definida por $U(t)=R(S(t))$.

Solução:

$U(t)=\mathrm{R}(S(t))=(S(t))^2-4=(t-1)^2-4=t^2-2t+1-4=t^2-2t-3$.

Dizemos que a função U é uma função composta, visto que ela foi formada pela composição de duas outras funções, a saber, R e S.

Questão 4

Verifique se a função $F(h)=h^2+1$ é injetora.

Solução:

Nosso senso comum de quantidade informa que $F(h)$ é sempre maior do que 1, exceto quando $h=0$; neste caso $F(0)=1$. Procuremos então resolver a equação $F(h)=2$. Temos

$$2 = h^2 + 1,$$
$$h^2 = 1,$$
$$h = 1 \text{ ou } h = -1.$$

A função não é injetora, pois apresenta ambigüidade no valor 2.

Questão 5

Verifique que a "injetividade" de uma função F é equivalente à seguinte assertiva.

$$\text{Se } F(x)=F(y)\text{, então } x=y.$$

Questão 6

Suponha que x e y sejam duas grandezas positivas que se complementam, isto é, $x+y=c$, em que c é uma constante. (O comprimento das partes do fio de arame do exemplo estudado no texto são grandezas que se complementam.) Mostre que o menor valor possível para a soma dos quadrados dessas grandezas é $\frac{c^2}{2}$ e esse valor mínimo é alcançado somente quando $x=y=\frac{c}{2}$.

Solução:

Poderíamos proceder exatamente como no exemplo do arame. Faremos, no entanto, de uma maneira diferente que irá permitir o estudo do mesmo problema com três ou mais grandezas que se complementam. Esse novo procedimento requer maior habilidade quantitativa.

• Fixe x e y com $x>y$.

• Aumente x em t unidades. Como y complementa x, então y fica diminuído também de t unidades. Assim,

• $(x+t)^2+(y-t)^2=x^2+y^2+2t(x-y)+2t^2>x^2+y^2$.

• Em um movimento contrário, diminua t unidades de x.

• $(x-t)^2+(y+t)^2=x^2+y^2+2t(y-x)+2t^2=x^2+y^2+2t(y-x+t)<x^2+y^2$ se t for suficientemente pequeno. Por exemplo, se t for menor do que a metade da diferença entre x e y.

• Concluímos que, se x for maior do que y, então, se aumentarmos o valor de x, a soma dos quadrados aumenta e, se diminuirmos um pouco o valor de x, a soma dos quadrados diminui. Logo, não temos um valor mínimo nem máximo para a soma no caso em que x for maior do que y.

• Analogamente procedemos no caso em que x é menor do que y e chegamos à seguinte conclusão simétrica: se diminuirmos o valor de x, aumentamos o valor da soma dos quadrados e, se aumentarmos um pouco o valor de x, diminuímos o valor da soma dos quadrados. Logo, também não temos um valor mínimo para a soma no caso em que x for menor do que y.

• Se x for igual a y, as duas equações acima mostram que qualquer variação de x aumenta o valor da soma dos quadrados.

• Temos, portanto, o valor mínimo quando $x=y$.

Questão 7
Faça a Questão 6 com três grandezas positivas, x, y e z, que se complementam. Mostre que o valor mínimo possível para a soma dos três quadrados $x^2 + y^2 + z^2$ é alcançada somente quando $x=y=z=\frac{c}{3}$.

Questão 8
Faremos agora um exercício que mostra a eficácia do sistema formal simbólico que se compromete com a coerência interna de sua estrutura. Partiremos da hipótese da existência de uma função E que tenha duas propriedades, uma algébrica e outra quantitativa, a saber,

1) $E(x+y)=E(x)E(y)$ para todo valor real x e todo valor real y.
2) $E(0)\neq 0$.

Estamos supondo familiaridade com os números reais, extensão dos racionais, feita para sanar o problema da incomensurabilidade tratado na Aula 1. Mostraremos que as duas únicas propriedades implicam uma série de outras que serão bastante esclarecedoras e sem dúvida trarão perplexidade.

• $E(0)=E(0+0)=E(0)E(0)$. Logo, $E(0)=1$, visto que $E(0)$ não é nulo.

• Suponha que para algum número c, $E(c)=0$. Então, $E(0)=E(c-c)=E(c)E(-c)=0$. $E(-c)=0$, o que é absurdo. Logo, $E(x)\neq 0$ para todo número real x.

• $E(x) = E(x/2 + x/2) = E(x/2)E(x/2) = [E(x/2)]2 > 0$ para todo x.

• $E(2) = E(1+1) = E(1)\, E(1) = a^2$, em que estamos denominando $E(1)=a$.

• $E(3) = E(2+1) = E(2)\, E(1) = a^3$.

• $E(n) = an$, para todo número natural n.

• $E(-x)\, E(x) = E(x-x) = E(0) = 1$. Logo, $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$, para todo real x.

• Em particular, $E(-n)=\frac{1}{E(n)}$, para todo natural n.

• $a = E(1) = E\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{1}{2}\right) E\left(\frac{1}{2}\right)$. Então, $E\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}$

• $a=E(1)=E\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left[E\left(\frac{1}{3}\right)\right]^3$. Ou seja, $E\left(\frac{1}{3}\right)$ é a raiz cúbica de a.

• Em geral, $a=E(1)=E\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right)=\left[E\left(\frac{1}{n}\right)\right]n$, isto é, $E\left(\frac{1}{n}\right)$ é a raiz enésima de a.

• Verifique que, se E for uma função que possui as propriedades 1) e 2), então a função G definida por $G(x)=E(yx)$ também possuirá as duas propriedades qualquer que seja o número real y fixado.

• Utilize a seguinte notação para a função E:$E(x)=[E(1)]x=ax$.

• Verifique, com a notação acima, todas as propriedades da potenciação.

• $E(x)$ coincide com a potenciação com base a quando x é um número natural.

• $a(yx)=E(yx)=G(x)=[G(1)]x=[E(y)]x=[ay]x$.

Suponha agora que, além das duas propriedades 1) e 2), a função E possua também uma terceira propriedade, a saber:

3) $E(x)=1$ somente quando x for nulo.

Mostre que nesse caso não pode haver ambigüidade na equação $E(x)$=z; ou seja, para cada número z, há no máximo um número x tal que $z=E(x)$. Evidentemente a equação pode não ter solução: se z for um número negativo, por exemplo. Surpreendente e muito menos evidente é o fato de que a equação pode não ter solução ainda que o número z seja positivo.

• Se $E(x)$=E(y), então E(x-y)= $\frac{E(x)}{E(y)}$ =1. Logo, de acordo com a propriedade 3) temos que x-y=0, ou seja, $x=y$. Não há, portanto, casos de ambigüidade.

Como não há ambigüidade, podemos definir uma dinâmica, que desfaz o que a função E fez. Denotaremos essa dinâmica inversa pela letra L e a descreveremos assim: se y for um número para o qual a equação $y=E(x)$ tenha solução, então $L(y)=x$; ou seja, $L(y)$ será o único número x para o qual $E(x)=y$.

Mostre que

4) $L(xy)=L(x)+L(y)$ para todo número x e para todo número y para os quais as equações $x=E(t)$ e $y=E(s)$ tenham solução.

• Temos $xy=E(t)E(s)=E(t+s)$. Logo, $L(xy)=t+s=L(x)+L(y)$.

A importância dessa propriedade reside na possibilidade de transformar uma multiplicação em uma soma. Uma progressão geométrica, com suas agruras homotéticas, é transformada em uma confortável progressão aritmética. Uma tabela com os valores da função L e da função E permite efetuar multiplicações através de somas. Repare que o algoritmo da multiplicação é trabalhoso e demorado, em contraste com o algoritmo da adição. Uma função com a propriedade 4) e definida para todos os números positivos é denominada logaritmo, enquanto a função E denomina-se antilogaritmo, ou exponencial. O vocábulo logaritmo foi criado no início do século 17 pelo escocês John Napier a partir dos termos gregos "logos", que significa razão, cálculo, e "arithmós" que significa número.

Vejamos um exemplo. Para multiplicar 723 por 589, consultamos a tabela de logaritmos e efetuamos a soma $L(723)+L(589)$. Em seguida, verificamos na tabela o antilogaritmo dessa soma: $E[L(723) + L(589)] = E[L(723\times589)] = 723\times589$. Evidentemente as calculadoras eletrônicas tornam esse procedimento obsoleto, mas até então o mecanismo foi muito útil. No curso de Cálculo, serão mostradas outras inúmeras aplicações do logaritmo e da exponencial, o que justificará a sua atualidade.

Duas propriedades do logaritmo:

- $L[G(x)]=L[E(yx)]=yx=xL[G(1)]$. Em notação exponencial, temos: $L(bx)=xL(b)$, em que $b=G(1)$.

- Se $y\neq0$, então, se E possuir a propriedade 4), a função G também possuirá essa propriedade. Assim, podemos definir a função F que desfaz o que a função G faz, a saber, $F(y)$ será o único número x para o qual $G(x)=y$. Qual será a relação entre F e L?

- Seja $z=G(x)=E(yx)$. Pela definição de F e L, temos que $F(z)=x$ e $L(z)=yx$. Logo, $L(z)=yF(z)$. Como $G(1)=E(y)$, então $y=L[G(1)]=L(b)$. Assim, $L(z)=L(b)F(z)$. Essa é a fórmula de mudança de base dos logaritmos em que L é o logaritmo na base a e F é o logaritmo na base b.

Escreva a fórmula acima na notação usual de logaritmo. Verifique que $L(b) = \frac{1}{F(a)}$.

Questão 9

Responda às perguntas 2, 3 e 4 da Apresentação.

AULA 6

Proporcionalidade

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Estudaremos nesta aula as funções que tratam dos processos dinâmicos proporcionais, aqueles processos em que a relação quantitativa entre as grandezas se realiza segundo uma razão constante, ou seja, a dependência entre as grandezas guarda uma relação homotética.

Duas grandezas A e B são proporcionais quando acontece o seguinte fenômeno na relação de dependência: se dobrarmos A, a grandeza B também fica duplicada; se triplicarmos A, então B ficará triplicada; se A for dividida ao meio, B também ficará dividida ao meio; se a divisão de A for por três, a divisão de B deverá ser também por três. A operação algébrica que retrata essa relação de proporcionalidade é a multiplicação. Portanto, para representar o fenômeno, escrevemos

$$B=\lambda A.$$

A constante λ se denomina “constante de proporcionalidade”.

Essa constante, por si só, não determina a relação de dependência entre as duas grandezas, ela apenas retrata o fenômeno de proporcionalidade. Para se convencer disso, basta reparar que o fenômeno descrito acima ocorre qualquer que seja a constante $\lambda>0$.

Vejamos:

$$B=\lambda A.$$
$$\lambda(2A)=2(\lambda A)=2B.$$

$$\lambda\left[\left(\frac{1}{3}\right)A\right]=\left(\frac{1}{3}\right)(\lambda A)=\left(\frac{1}{3}\right)B.$$

$$\lambda(3A)=3(\lambda A)=3B.$$

$$\lambda\left[\left(\frac{1}{2}\right)A\right]=\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda A)=\left(\frac{1}{2}\right)B.$$

Um exemplo elucidativo: divida um segmento em partes proporcionais a 3 e 5. A frase não tem muito sentido, sua semântica é de certa forma, digamos, fraca. Mas o sentido de uma frase não é tão importante assim; o mais importante é o sentido do falante: o que a pessoa que proferiu a frase, o enunciador, quis ou quer dizer com ela. Devemos compreender não a frase, mas o enunciador.

Um segmento dividido em partes proporcionais a 3 e 5 significa que o segmento se constitui de duas partes, digamos, x e y, em que x é a medida de uma parte e y é a medida da outra parte; os segmentos de tamanho 3 e o de tamanho 5 vão ser ampliados ou reduzidos na mesma proporção, isto é, multiplicados pelo mesmo número λ; se λ for maior do que 1, eles serão ampliados, se λ for menor do que 1, ele serão reduzidos; o comprimento x deve ser igual a 3λ e o comprimento y deve ser igual a 5λ.

Isso é, portanto, o que o enunciador quer dizer. Em linguagem simbólica, simplesmente temos:

$$x=3\lambda \text{ e } y=5\lambda.$$

Qualquer valor de λ fornece dois segmentos proporcionais a 3 e 5. Se quisermos decisão, precisaremos de mais informação. Suponha que o segmento a ser dividido em partes proporcionais tenha comprimento igual a 16 centímetros. Assim,

$$16=x+y=3\lambda+5\lambda=8\lambda.$$
$$\lambda=2.$$
$$x=6 \text{ e } y=10.$$

A determinação da constante de proporcionalidade λ só foi possível mediante o conhecimento do tamanho do segmento a ser dividido em partes proporcionais. Bem razoável, pois se não se sabe nem mesmo o comprimento de um segmento, como dividi-lo em partes com alguma instrução sobre o tamanho dessas partes?

Iremos agora determinar as possíveis relações de dependência entre duas grandezas que retratam o fenômeno de proporcionalidade. Vimos no início que a multiplicação faz esse papel.

Queremos uma função P com a seguinte propriedade:

$P(\lambda x)=\lambda P(x)$, para todo número λ e todo número x.

Por que iríamos querer essa propriedade? Observe que a propriedade é o fenômeno de proporcionalidade que queremos entre as duas grandezas, a saber, x e $y=P(x)$, em que y é a grandeza relacionada pela função P. Se dobrarmos x, $P(x)$ fica duplicada, se ampliarmos ou reduzirmos x, então $y=P(x)$, grandeza que depende de x e está em função de x, fica também ampliada ou reduzida na mesma proporção.

Exemplos de funções com essa propriedade: $f(x)=2x$, $f(x)=\left(\frac{4}{9}\right)x$, $f(x)=ax$ em que a é um número real qualquer.

Veremos que todas as funções que possuem essa propriedade são desse tipo, ou seja, multiplicação por uma constante.

Com efeito. Suponha que P seja uma função com a propriedade requerida. Então,

$$P(x)=P(x.1)=xP(1).$$

Se denominarmos $a=P(1)$, então

$$P(x)=xP(1)=ax.$$

Toda função desse tipo é denominada função linear. A terminologia se justifica devido à relação entre proporcionalidade algébrica e proporcionalidade geométrica estabelecida pelas linhas retas. Na verdade, não há diferença entre as duas: o tratamento algébrico é uma redefinição de exatidão geométrica.

Suponha um veículo que se movimenta com uma velocidade constante de 60 quilômetros por hora. Isso significa que a variação da distância é proporcional ao tempo que passa. A informação nos diz que a cada hora o veículo percorre 60 quilômetros, e nos tempos fracionados, percorre distâncias proporcionais às frações, ou seja, em meia hora o veículo percorrerá 30 quilômetros; em duas horas e quinze minutos o veículo percorrerá 135 quilômetros, pois quinze minutos correspondem a $\frac{1}{4}$ da hora.

O tempo e a distância percorrida durante esse tempo devem ser eqüimúltiplos de 1 e de 60. Logo, durante um tempo t o veículo percorre $60t$ quilômetros. (Esse é o raciocínio que suporta a famosa regra de três.)

Escrevemos

$$D(t)=60t,$$

em que $D(t)$ é a distância percorrida durante o tempo de t horas. Verificamos que velocidade constante implica que a distância percorrida é uma função linear em relação ao tempo. Ou melhor, a distância percorrida depende linearmente do tempo que passa.

Para localizar a posição do veículo não basta saber a distância percorrida. Precisamos também saber de onde ele partiu, onde o movimento começou. Vamos presumir que às duas horas da tarde o veículo estava em um posto de gasolina conhecido na região. Gostaríamos de saber sua localização às dezessete horas e vinte minutos.

De duas horas da tarde até às dezessete horas e vinte minutos, três horas e vinte minutos transcorreram. Vinte minutos são um terço da hora, 60 quilômetros em cada hora e mais 20 quilômetros, pois 20 é $\frac{1}{3}$ de 60. Logo, nesse intervalo de tempo, o veículo percorreu 200 quilômetros. Como o posto é bem conhecido na região, sabe-se que ele se encontra a 80 quilômetros da cidade. O veículo está, portanto, a 280 quilômetros da cidade. Se quisermos saber sua localização decorridas t horas a partir das duas da tarde, utilizamos o mesmo raciocínio para obter eqüimúltiplos de 1 e de 60, ou seja, $60t$. Em seguida, adicionamos 80 quilômetros. Assim, a posição do veículo será:

$$P(t)=D(t)+80=60t+80.$$

Uma função dessa forma é denominada “função linear afim”, visto que, se subtrairmos uma constante, teremos uma dependência linear.

EQUAÇÃO DA RETA

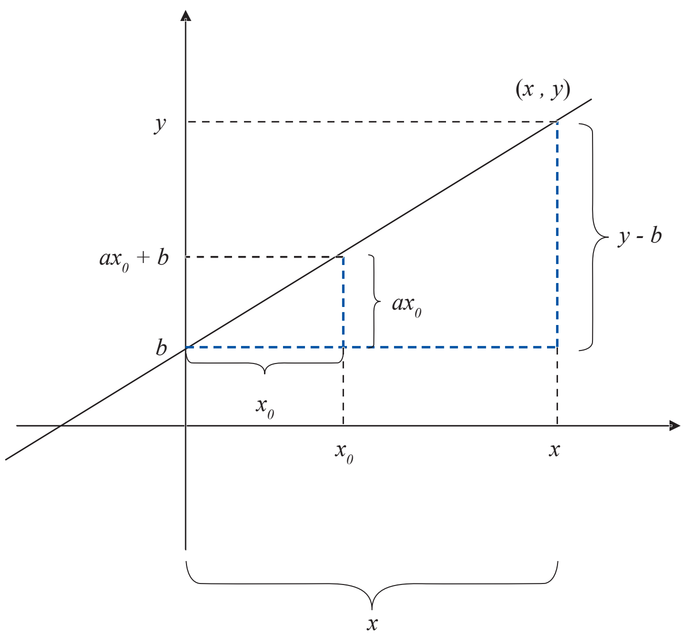
O gráfico de uma função linear afim é uma reta no plano. Essa correspondência com um objeto geométrico requer alguma consideração. As abordagens algébricas e geométricas devem caminhar juntas sempre que a álgebra for uma redefinição da exatidão geométrica.

Como nos convencermos de que o gráfico de uma função é um objeto geométrico chamado de reta?

Vamos escolher dois pontos distintos do gráfico da função $f(x)=ax+b$. Sejam eles

$$(0,b) \text{ e } (x_0,ax_0+b),\ x_0\neq 0.$$

As certezas geométricas nos convencem de que dois pontos distintos no plano determinam uma (única) reta. Então, o gráfico de *f* será uma reta se, e somente se, a reta determinada pelos dois pontos acima estiver inteiramente contida no gráfico da função *f*. Se o gráfico for uma reta, então essa reta será necessariamente a reta determinada pelos dois pontos acima. Mostraremos que um ponto da reta determinada pelos dois pontos pertence necessariamente ao gráfico de *f*. Com efeito,



$$\frac{ax_0}{x_0} = \frac{y-b}{x} \Rightarrow ax = y-b \Rightarrow y = ax+b$$

Seja (x,y) um ponto genérico da reta determinada pelos dois pontos como mostrado no gráfico acima.

Por semelhança de triângulos, concluímos que

$$\frac{ax_0}{x_0} = \frac{y-b}{x},$$

$$ax = y - b,$$
$$y = ax + b.$$

Logo, o ponto (x,y) pertence ao gráfico da função $f(x)=ax+b$, como queríamos.

Nossas certezas geométricas são evidenciadas pela estrutura algébrica. No século 17, as certezas trazidas pelas estruturas algébricas passam a ser mais confiáveis. Mais credibilidade e exatidão foram concedidas à álgebra. Surge a geometria analítica, fundada por René Descartes em três livros publicados como apêndice ao *Discurso do método*.

Na função $f(x)=ax+b$ o número a é chamado de coeficiente angular e o número b, de coeficiente linear. A nomenclatura para a constante a é aceitável, pois esse número é a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo x. O número a, exatamente por isso, é também chamado de inclinação da reta. O nome coeficiente linear é descabido, mas o número b, como mostra o gráfico, é a altura na qual a reta corta o eixo y, pois $f(0)=b$.

EXERCÍCIOS

1) Trace o gráfico da função $f(x)=ax+b$ para o caso em que o coeficiente angular seja negativo e o número b também seja negativo.

2) Dê um exemplo de uma situação em que um veículo se move com velocidade constante e a função que descreve a posição do veículo em função do tempo t tenha coeficientes negativos.

3) Vimos que uma reta é o lugar geométrico dos pontos que estão no gráfico de uma função linear afim. Esse lugar geométrico pode então ser descrito pela equação algébrica que caracteriza o gráfico de uma função como lugar geométrico, a saber, todos os pontos (x,y) tais que $y=f(x)$. No caso da reta, sua equação será $y=ax+b$, em que os coeficientes deverão ser determinados. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (1,1) e (2,2).

4) Encontre a equação da reta que passa pela origem cujo coeficiente angular vale 2.

5) Verifique que duas retas com mesmo coeficiente angular são paralelas.

6) Verifique que duas retas são ortogonais se o produto de seus coeficientes angulares for -1.

7) Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se uma for proporcional ao inverso da outra, isto é, $y=\frac{c}{x}$. Suponha que uma herança no valor de C reais será dividida entre dois irmãos. Normalmente a distribuição de uma herança é eqüitativa, mas os dois irmãos acharam a eqüidade injusta, pois o patrimônio de um é maior do que o do outro. Resolveram que aquele que tivesse maior patrimônio ganharia menos, mas de forma que se mantivesse a proporção do patrimônio de um em relação ao do outro. Sabe-se que o valor do patrimônio de um dos irmãos é de A reais e o do outro irmão é de B reais. Qual a parte da herança que coube a cada um?

8) O movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante, era o único movimento aceito nos fenômenos dinâmicos. Não havia noção de aceleração até Galileu. Newton firmou o conceito definindo a variação da própria variação, a mudança da própria mudança. A estabilidade medieval e o mundo antigo só podiam conceber um movimento com mudanças proporcionais. O próprio ato de mudar, o movimento, já sinalizava imperfeição. O repouso era o estado perfeito; o movimento circular uniforme, o único movimento cósmico permitido, um movimento sem mudança, volta sempre ao mesmo ponto, repete-se. No Renascimento, período turbulento, Camões, em um de seus sonetos, antecipa a aceleração do século seguinte:

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades,
muda-se o ser, muda-se a confiança;
todo o mundo é composto de mudança,
tomando sempre novas qualidades.

Continuamente vemos novidades,
diferentes em tudo da esperança;
do mal ficam as mágoas na lembrança,
e do bem – se algum houve – , as saudades.

O tempo cobre o chão de verde manto,
que já coberto foi de neve fria,
e enfim converte em choro o doce canto.

E, afora este mudar-se cada dia,
outra mudança faz de mor espanto:
que não se muda já como soía.

Camões

Analise o soneto acima e tente perceber como Camões antecipa o conceito de aceleração.

AULA 7

Função do Segundo Grau

Estudaremos nesta aula um tipo de função tão importante quanto as funções lineares. As funções do segundo grau descrevem movimentos regidos pela segunda lei de Newton quando a aceleração é constante. Elas aparecem também em vários problemas de otimização de áreas. Na Aula 5, trabalhamos em vários exemplos que envolveram uma função do segundo grau.

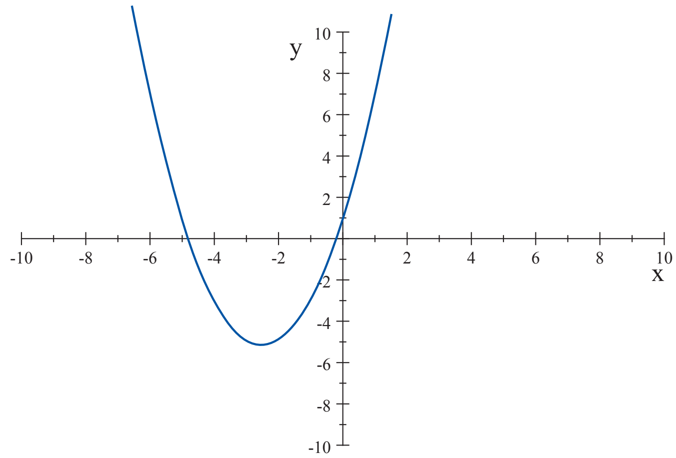
Uma função f é denominada função do segundo grau quando possui a forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

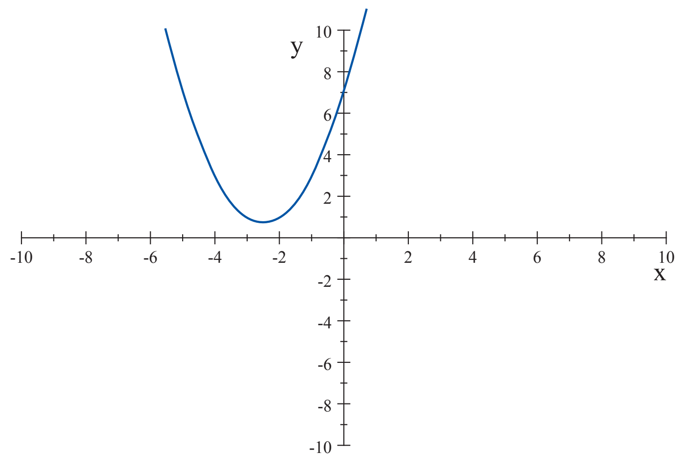
em que a, b e c são constantes reais com $a \neq 0$. (Se $a = 0$, evidentemente temos uma função linear afim, e não uma função do segundo grau, caracterizada pelo expoente 2.)

Vejamos alguns gráficos de funções do segundo grau.

1) $y=f(x)=x^2+5x+1$

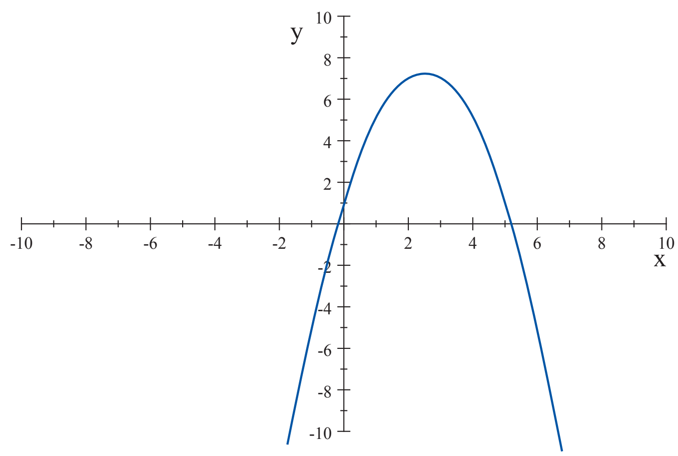


2) $y=f(x)=x^2+5x+7$

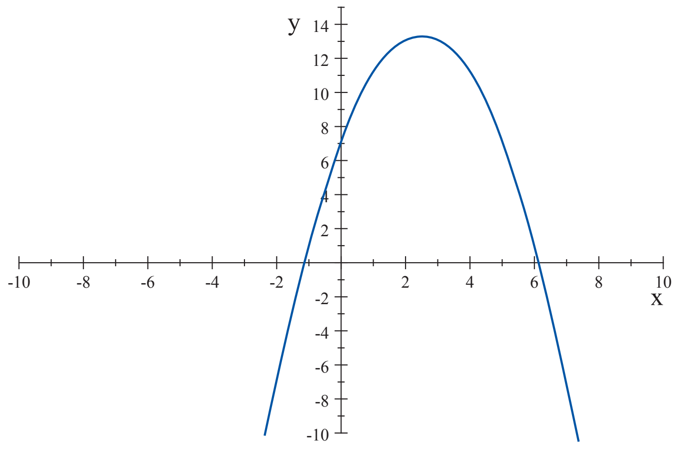


O que podemos observar quando aumentamos a constante *c*?

3) $y=f(x)= -x^2+5x+1$

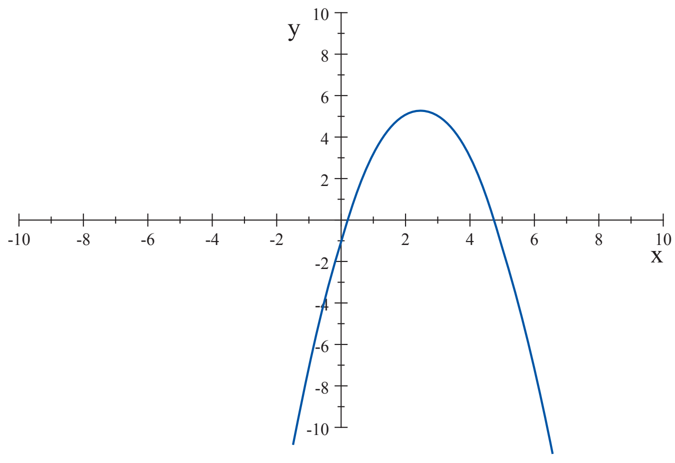


4) $y=f(x)=-x^2+5x+7$

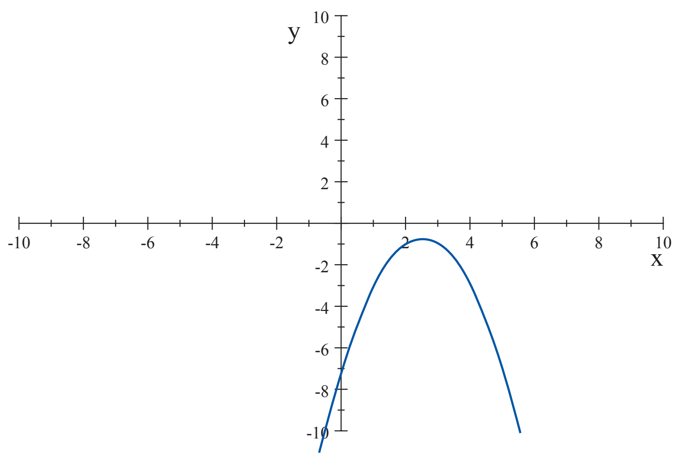


Observe a transformação!

5) $y=f(x)=-x^2+5x-1$



6) $y=f(x)=-x^2+5x-7$



O que se sucedeu?

Se fizermos vários gráficos em um computador, veremos que a curva obtida tem sempre a mesma forma. Ela está virada para cima ou para baixo, mas a forma é a mesma: uma curva convexa ou côncava que se abre nas extremidades, passa por um valor mínimo ou máximo. Esse ponto é chamado de vértice (vértice arredondado!).

Essa curva recebe o nome de parábola. A nomenclatura deriva de sua caracterização geométrica como uma das cônicas: pontos eqüidistantes de uma reta e um ponto; do grego "parabolé", atirar para o lado; narrativa alegórica cujos elementos evocam, por comparação, outras realidades de ordem superior, a reta da qual distam os pontos da curva, ela é a outra realidade de ordem superior cujos pontos são atirados para o lado e atingem a curva.

A função do segundo grau estabelece uma dinâmica entre as grandezas x e y. Como vimos na Aula 5, a descrição dessa dinâmica deve nos trazer informação sobre três aspectos da situação:

1. Regiões de crescimento e decrescimento.
2. Dado um valor para x, qual será o valor de $y=f(x)$?
3. Dado um valor para y, qual o valor de x tal que $y=f(x)$?

A análise do gráfico nos revela que uma função do segundo grau sempre tem uma região de crescimento e outra de decrescimento.

Há um ponto com uma característica particular: ele divide essas duas regiões. Nele, a dinâmica de dependência entre as duas grandezas muda. A dependência passa de crescente para decrescente, ou de decrescente para crescente. Essa característica o faz um ponto singular. Outra característica torna esse ponto ainda mais especial: a grandeza y atinge seu valor mais baixo ou mais elevado.

O gráfico não pode ser confundido com a função. Ele é um artifício geométrico visual que nos ajuda a compreender a dinâmica implicada entre as grandezas. Um ponto do gráfico não é uma grandeza; essas estão representadas nos eixos coordenados: o eixo horizontal da grandeza x e o eixo vertical da grandeza y. O que importa saber é se y cresce ou diminui quando x aumenta ou decresce. Importa ainda saber para quais valores de x teremos y positivo ou negativo. Tudo isso vale para qualquer função com que nos depararmos, em particular para as funções lineares afins, cujos gráficos são retas, e as funções do segundo grau, cujos gráficos são parábolas.

Com relação ao segundo aspecto, não há grandes problemas, pois a expressão algébrica que define uma função do segundo grau é bem simples e de fácil efetuação.

O terceiro aspecto nos trará problemas. Vamos começar com o estudo de um exemplo particular.

Queremos resolver a equação

$$y=x^2+x+1.$$

Para isso fazemos

$$x^2+x+1=y,$$

$$x^2+2\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)+1=y,$$

$$\left[x+\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left(\frac{3}{4}\right)=y.$$

Pela expressão algébrica, agora modificada, vemos que todos os valores de y são maiores do que $\left(\frac{3}{4}\right)$, exceto quando $x=-\left(\frac{1}{2}\right)$. Para esse valor de x, temos que y vale exatamente $\frac{3}{4}$. Concluímos assim que a grandeza y atinge seu valor mais baixo, a saber, $y=\frac{3}{4}$, quando x for igual a $-\left(\frac{1}{2}\right)$. Esse ponto $x=-\left(\frac{1}{2}\right)$ é a abscissa do vértice, e o ponto $y=\frac{3}{4}$ é a ordenada do vértice.

Vemos ainda que, se y for menor do que $\frac{3}{4}$, a equação não terá solução. Se y for igual a $\frac{3}{4}$, a equação possuirá somente uma solução, a saber, $x=-\left(\frac{1}{2}\right)$. Se y for maior do que $\frac{3}{4}$, a equação possuirá exatamente duas soluções, a saber?

Aqui reside nosso maior problema: há mesmo duas soluções? Se houver, temos uma ambigüidade indesejada e cabe lembrar que já temos uma situação péssima de inexistência quando y é menor do que $\frac{3}{4}$.

Para $y>\frac{3}{4}$ temos

$$\left[x+\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=y-\left(\frac{3}{4}\right).$$

Portanto, $x+\left(\frac{1}{2}\right)$ deve ser um número cujo quadrado seja $y-\left(\frac{3}{4}\right)$. Sabemos que para todo número positivo há exatamente dois números cujo quadrado seja ele: sua raiz quadrada e o simétrico dela. Logo, $x = -\left(\frac{1}{2}\right) + r$ ou $x = -\left(\frac{1}{2}\right) - r$, em que r é a raiz quadrada de $y-\left(\frac{3}{4}\right)$. Temos assim uma ambigüidade irreparável. Somente o contexto nos dirá em cada situação qual solução acatar.

A ordenada do vértice tem uma particularidade importante: ela divide o eixo vertical em duas regiões: a região de ambigüidade, $y>\left(\frac{3}{4}\right)$, e a região de inexistência. Ainda, para y igual a essa ordenada, temos determinação, ou seja, única solução.

O procedimento acima justifica a nomenclatura utilizada para uma solução da equação, qual seja, uma raiz da equação.

Analisaremos agora o caso geral. Procuraremos soluções da equação

$$y=ax^2+bx+c, \text{ com } a\neq 0.$$

Vemos que a equação acima é equivalente a

$$ax^2+bx+c-y=0.$$

Como c é uma constante arbitrária, não perdemos generalidade se considerarmos apenas a equação com $y=0$.

Temos

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x^2+\frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}=0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}.$$

Temos três casos a considerar.

Se $b^2- 4ac = 0$, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2= 0$. Daí, $x = -\left(\frac{b}{2a}\right)$ é a única solução.

Se b^2- $4ac$ < 0, então não há solução para a equação, visto que não existe número cujo quadrado seja um número negativo. Temos assim um caso de inexistência.

Se b^2-$4ac$>0, então temos duas soluções distintas, a saber,

$$x = -\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{r}{2a} \text{ ou } x = -\left(\frac{b}{2a}\right) - \frac{r}{2a},$$

em que r é a raiz quadrada de b^2-$4ac$.

Para verificar regiões de crescimento, regiões de decrescimento, valores máximos e mínimos, escrevemos a função $y=f(x)$ na seguinte forma:

$$y=f(x)=a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a}.$$

EXERCÍCIOS

1) Verifique que $-\left(\frac{b}{2a}\right)$ é a abscissa do vértice: o ponto em que y atinge o valor mais baixo possível ou o valor mais alto possível.

2) Verifique que quando $a>0$ a grandeza y atinge um valor mínimo e, quando $a<0$, a grandeza y atinge um valor máximo.

3) Identifique as regiões de crescimento e decrescimento da grandeza y em ambos os casos, $a>0$ e $a<0$.

4) Identifique os valores da grandeza x para os quais a grandeza y será positiva, negativa e nula em ambos os casos, $a>0$ e $a<0$.

5) Encontre a fórmula geral para a abscissa e para a ordenada do vértice.

6) Mostre que a abscissa do vértice é a média aritmética das duas raízes, se existirem.

7) Quando a solução for única, a abscissa do vértice será a própria raiz.

8) **Um corpo que cai**. Uma pedra presa a um barbante com 1 metro de comprimento move-se percorrendo uma trajetória circular de raio 1 metro no sentido anti-horário em um plano vertical. O centro do círculo de rotação está localizado a uma altura do solo igual a seis vezes o seu perímetro. Durante os três primeiros minutos, a função que estabelece a distância percorrida em relação ao tempo é dada pela expressão $u(t)=2\pi(8t-t^2)$. O movimento se inicia quando a posição da pedra no círculo forma um ângulo nulo com o eixo horizontal. No instante t=3 segundos o barbante se parte e, daí para frente, a pedra passa a percorrer uma trajetória vertical. A função que descreve sua altura em relação ao solo a partir do terceiro segundo é dada pela expressão $h(t)= -\left(\frac{1}{2}\right)gt^2+(4\pi+3g)t-\left(\frac{9}{2}\right)g$. Baseado nas informações acima, responda:

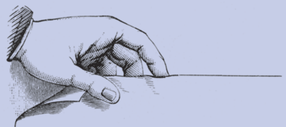
- Quando a pedra atinge a altura máxima?
- Quando e onde ela atinge o solo?
- Quanto tempo ela gastou para completar a primeira volta?
- Quanto tempo ela levou para completar a segunda volta?
- Compare as duas durações.
- No instante $t=3$ quantas voltas ela havia completado?

9) Considere a função linear afim $y=f(x)=ax+b$. Identifique as regiões de crescimento e decrescimento da grandeza y em ambos os casos, $a>0$ e $a<0$. Identifique os valores da grandeza x para os quais a grandeza y será positiva, negativa e nula em ambos os casos, $a>0$ e $a<0$. Verifique que as funções lineares afins não apresentam valores com ambigüidades e nem valores com inexistência de solução.

10) Calcule a distância de um ponto (x_0,y_0) a uma reta que passa pela origem, $y=ax$. Verifique que essa distância d é dada por $d^2= -\frac{(y_0-ax_0)^2}{(a^2+1)}$.

• Sugestão: Um ponto do gráfico da reta tem a forma (x,ax); calcule a distância do ponto (x_0,y_0) ao ponto (x,ax); a distância ao quadrado será uma função do segundo grau com relação à grandeza x.

11) Um fio de arame com 1 metro de comprimento é dividido em duas partes. Com uma delas se faz um círculo e com a outra, um quadrado. Onde se deve cortar o arame para que a soma das duas áreas seja mínima? Onde se deve cortar o arame para que a soma das duas áreas seja máxima?



A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optma Std, e impressa pela Editora O Lutador, em sistema offset 90g (miolo e cartão supremo 250g (capa), em fevereiro de 2009.