

Marcelo Vieira Corrêa

# **Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Racionais - Aplicação a Sistemas Reais**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais

# Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar aplicação da representação NARMAX racional para representar sistemas dinâmicos não-lineares e compará-la com a representação NARMAX polinomial. Esta estrutura é uma estrutura paramétrica do tipo entrada-saída, teoricamente capaz de representar uma ampla classe de sistemas não-lineares.

O trabalho inicia-se com uma apresentação de cinco etapas necessárias para se obter modelos NARMAX polinomiais, abordando conceitos de agrupamentos de termos e pontos fixos para sua estrutura. A seguir é feita uma abordagem similar para a representação NARMAX racional.

É apresentado um conjunto de rotinas para a identificação de modelos NARMAX racionais desenvolvido no ambiente MATLAB™. Ao longo deste trabalho são discutidos os principais problemas envolvidos na estimação de parâmetros dos modelos NARMAX racionais e algumas soluções são propostas.

Finalmente, a estrutura NARMAX racional é usada na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares reais, sendo testada na modelagem de um forno elétrico sem estrutura de isolamento térmico e no circuito caótico de Chua. Os regimes dinâmicos destes sistemas já tinham sido representados por modelos NARMAX polinomiais o que possibilitou a comparação com os modelos NARMAX racionais.

# Abstract

The main objective of this work is to investigate the application of the rational NARMAX representation in the identification of non-linear dynamic systems and to compare rational models to the polynomial NARMAX representation. This parametric structure input-output type is capable of representing, in theory, a wide class of non-linear systems.

The work begins with the presentation of five necessary steps to obtain polynomial NARMAX models, covering concepts of term clusters and fixed points for its structure. Similar results for the rational NARMAX representation are reviewed.

A set of routines for the identification of rational NARMAX models developed in MATLAB<sup>TM</sup> interface is presented. The main problems involved in estimating parameters of rational NARMAX models as well as some proposed solutions are also discussed throughout this work.

Finally, rational NARMAX models are used in the identification of real non-linear dynamic systems and is tested on an electric furnace modeling without thermal insulation as well as on the chaotic Chua circuit. The dynamic regimes of these systems had already been modeled by polynomial NARMAX models, making the comparison with rational NARMAX models possible.

## Agradecimentos

À minha esposa Márcia, pela revisão do texto final, pelo apoio, pela paciência e principalmente pelo seu incentivo, sem o qual seria impossível a realização deste.

À minha Mãe que sem medir esforços dedicou todo o seu tempo para cuidar do meu filho.

Ao Professor Luis Aguirre que soube, na medida certa, orientar, incentivar e cobrar, além de estar sempre disponível para discutir os assuntos técnicos e/ou simplesmente ouvir minhas angústias, desenvolvendo relação maior que a de Professor/Aluno.

Ao Professor Eduardo Mazoni que não poupou esforços para que nossos encontros fossem realizados, e pela sua inestimável ajuda com críticas, sugestões e com as rotinas computacionais gentilmente cedidas.

Ao Professor Fábio Jota, pela montagem do forno elétrico, que permitiu a coleta de dados no início de 1993, usados nesse trabalho.

Aos colegas do MACSIN, especialmente Giovani, Álvaro, Ubiratan e Leonardo que me ajudaram em várias etapas deste trabalho como: coleta de dados, envio de artigos, envio de programas e alguns cálculos, a ajuda destes foi de fundamental importância.

Aos colegas de trabalho do ICMG que me apoiaram e incentivaram, especialmente às Professoras Mara Camey e Maria Cândida.

Ao Instituto Católico de Minas Gerais - ICMG pelo apoio e suporte financeiro.

# Índice Analítico

|                        |      |
|------------------------|------|
| Resumo.....            | i    |
| Abstract.....          | ii   |
| Agradecimentos.....    | iii  |
| Índice de Figuras..... | vi   |
| Índice de Tabelas..... | viii |
| Nomenclatura.....      | ix   |

## Capítulo 1

|                                                            |          |
|------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1. CONSIDERAÇÃO SOBRE A MODELAGEM DE SISTEMAS .....</b> | <b>1</b> |
| 1.1. INTRODUÇÃO.....                                       | 1        |
| 1.2. ELUCIDÁRIO .....                                      | 2        |
| 1.3. MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS .....                | 6        |
| 1.4. ASPECTOS DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS .....           | 8        |
| 1.5. APRESENTAÇÃO DO TRABALHO .....                        | 9        |

## Capítulo 2

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>2. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS USANDO A REPRESENTAÇÃO NARMAX POLINOMIAL11</b> |    |
| 2.1. INTRODUÇÃO.....                                                           | 11 |
| 2.2. A REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL .....                                          | 12 |
| 2.3. ESCOLHA DO TEMPO DE AMOSTRAGEM .....                                      | 12 |
| 2.3.1. <i>Uma Regra Heurística para Seleção do Tempo de Amostragem</i> .....   | 13 |
| 2.4. ESCOLHA DO SINAL DE EXCITAÇÃO.....                                        | 14 |
| 2.5. ESCOLHA DA ESTRUTURA.....                                                 | 15 |
| 2.5.1. <i>Algoritmo Ortogonal com Regressão-Direta</i> .....                   | 16 |
| 2.5.2. <i>Técnicas de agrupamento de termos e pontos fixos</i> .....           | 19 |
| 2.6. VALIDAÇÃO.....                                                            | 23 |
| 2.7. EXEMPLOS DE APLICAÇÕES .....                                              | 25 |
| 2.8. COMENTÁRIOS FINAIS .....                                                  | 26 |

## Capítulo 3

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS USANDO A REPRESENTAÇÃO NARMAX RACIONAL ...</b>  | <b>27</b> |
| 3.1. INTRODUÇÃO.....                                                            | 27        |
| 3.2. O MODELO RACIONAL .....                                                    | 28        |
| 3.2.1. <i>Descrição de Entrada-Saída</i> .....                                  | 28        |
| 3.3. EXPRESSÃO LINEAR NOS PARÂMETROS.....                                       | 29        |
| 3.4. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS .....                                              | 31        |
| 3.4.1. <i>Estimador Usando Método dos Mínimos Quadrados</i> .....               | 31        |
| 3.4.2. <i>Polarização de <math>\hat{\Theta}</math></i> .....                    | 32        |
| 3.4.3. <i>Estimador de Mínimos Quadrados para o Modelo Racional - RME</i> ..... | 36        |
| 3.5. ESTUDO DOS AGRUPAMENTOS DE TERMOS PARA O MODELO RACIONAL .....             | 36        |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 3.6. NÚMERO, LOCALIZAÇÃO E ESTABILIDADE DOS PONTOS FIXOS ..... | 39 |
| 3.7. DETERMINAÇÃO DE ESTRUTURA .....                           | 40 |
| 3.8. COMENTÁRIOS FINAIS .....                                  | 41 |

## Capítulo 4

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS RACIONAIS .....</b> | <b>42</b> |
| 4.1. INTRODUÇÃO.....                                                           | 42        |
| 4.2. DESCRIÇÃO DAS ROTINAS DE IDENTIFICAÇÃO .....                              | 42        |
| 4.3. ANÁLISE DAS ROTINAS DE IDENTIFICAÇÃO.....                                 | 46        |
| 4.3.1. <i>Estimação dos parâmetros para o modelo racional</i> .....            | 47        |
| 4.4. COMENTÁRIOS FINAIS .....                                                  | 55        |

## Capítulo 5

|                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5. MODELAGEM DE UM FORNO ELÉTRICO .....</b>                                               | <b>57</b> |
| 5.1 INTRODUÇÃO.....                                                                          | 57        |
| 5.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA .....                                                               | 57        |
| 5.3 MODELAGEM DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DO FORNO ELÉTRICO USANDO A REPRESENTAÇÃO RACIONAL ..... | 59        |
| 5.3.1 <i>Descrição dos dados</i> .....                                                       | 59        |
| 5.3.2 <i>Detecção de Não-Linearidades</i> .....                                              | 62        |
| 5.3.3 <i>Modelo NARMAX Polinomial</i> .....                                                  | 62        |
| 5.3.4 <i>Modelagem Utilizando ERR e Agrupamento de Termos</i> .....                          | 63        |
| 5.3.5 <i>Validação dos Modelos Identificados</i> .....                                       | 65        |
| 5.4 COMENTÁRIOS FINAIS .....                                                                 | 73        |

## Capítulo 6

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>6. MODELAGEM DO CIRCUITO DE CHUA .....</b>                      | <b>75</b> |
| 6.1 INTRODUÇÃO.....                                                | 75        |
| 6.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA .....                                     | 75        |
| 6.3 MODELAGEM DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DO CIRCUITO DE CHUA.....      | 78        |
| 6.3.1 <i>Descrição dos dados</i> .....                             | 78        |
| 6.3.2 <i>Detecção de estrutura e estimação de parâmetros</i> ..... | 82        |
| 6.3.3 <i>Validação dos modelos obtidos</i> .....                   | 83        |
| 6.4 COMENTÁRIOS FINAIS .....                                       | 94        |

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| <b>CONCLUSÃO .....</b> | <b>96</b> |
|------------------------|-----------|

## Apêndice A

|                                          |           |
|------------------------------------------|-----------|
| <b>A. ROTINAS EM MATLAB USADAS. ....</b> | <b>98</b> |
| A.1 INTRODUÇÃO.....                      | 98        |
| A.2 ROTINAS.....                         | 98        |
| A.3 EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO.....           | 103       |

|                                         |            |
|-----------------------------------------|------------|
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b> | <b>105</b> |
|-----------------------------------------|------------|

# Índice de Figuras

|                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 Representação de um sistema entrada-saída invariante no tempo .....                                                   | 3  |
| Figura 3.1 Algoritmo de Mínimos Quadrados Estendido proposto em (Billings e Zhu, 1991).....                                      | 37 |
| Figura 4.1 Fluxograma do procedimento de identificação de modelos NARMAX racionais . ...                                         | 43 |
| Figura 4.2 Códigos usados na rotina ratels.m .....                                                                               | 48 |
| Figura 4.3 Códigos usados na rotina ratelsr.m .....                                                                              | 49 |
| Figura 4.4 (a) sinal $u(t)$ ; (b) sinal $y(t)$ , simulado a partir do modelo; (c ) sinal $e(t)$ adicionado a $y(t)$ .....        | 50 |
| Figura 4.5 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando OLS. ....                                                    | 51 |
| Figura 4.6 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando RME sem termos de ruído. ....                                | 53 |
| Figura 4.7 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando RME Modificado e termos lineares de ruído. ....              | 55 |
| Figura 5.1 Diagrama de blocos do forno elétrico implementado do LCPI - CPDEE .....                                               | 58 |
| Figura 5.2 Resposta do forno elétrico ao ruído quantizado.. ....                                                                 | 60 |
| Figura 5.3 Resposta do forno elétrico ao degrau. ....                                                                            | 61 |
| Figura 5.4 Visualização da resposta do modelo $nl391$ , quando excitado pelas entradas de $fd1$ , $frq1$ , $fd2$ e $frq2$ . .... | 63 |
| Figura 5.5 Validação estatística do modelo $mr02f$ .....                                                                         | 66 |
| Figura 5.6 Validação estatística do modelo $mr03f$ .....                                                                         | 67 |
| Figura 5.7 Validação estatística do modelo $mr03f5$ .....                                                                        | 68 |
| Figura 5.8 Validação dinâmica do modelo $mr02f$ .....                                                                            | 69 |
| Figura 5.9 Correção do ganho do modelo $mr02f$ para as massas $fd1$ e $fd2$ .....                                                | 70 |
| Figura 5.10 Zoom na resposta do sistema a massa $fd2$ .....                                                                      | 70 |
| Figura 5.11 Validação dinâmica modelo $mr03f$ .....                                                                              | 71 |
| Figura 5.12 Correção do ganho do modelo $mr03f$ para as massas $fd1$ e $fd2$ .....                                               | 71 |
| Figura 5.13 Validação dinâmica modelo $mr03f5$ .....                                                                             | 72 |
| Figura 5.14 Correção do ganho do modelo $mr03f5$ para as massas $fd1$ e $fd2$ .....                                              | 72 |
| Figura 6.1 - Circuito de Chua.....                                                                                               | 76 |
| Figura 6.2 Curva característica do Diodo de Chua.....                                                                            | 76 |
| Figura 6.3 Dados experimentais da tensão $v_{c1}$ sobre o atrator em espiral.....                                                | 79 |
| Figura 6.4 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir de $dsv1$ .....                              | 80 |

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 6.5 Dados experimentais da tensão $v_{c1}$ sobre o atrator em espiral.....                                  | 81  |
| Figura 6.6 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir de $vc1$ .                     | 81  |
| Figura 6.7 Evolução dos coeficiente de agrupamentos do numerador .....                                             | 83  |
| Figura 6.8 Evolução dos coeficiente de agrupamentos do denominador .....                                           | 83  |
| Figura 6.9 Resultado obtido com predição de $k$ passos a frente do modelo $ratvc1$ .                               | 86  |
| Figura 6.10 Resultado obtido com predição de $k$ passos a frente do modelo $ratvc1r$ .                             | 87  |
| Figura 6.11 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do<br>modelo $ratvc1$ .....   | 88  |
| Figura 6.12 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do<br>modelo $ratvc1r$ .      | 88  |
| Figura 6.13 Evolução do cálculo do expoente de Lyapunov. Dados $vc1.dat$ .....                                     | 89  |
| Figura 6.14 Resultado do cálculo da dimensão de correlação. Dados $vc1.dat$ .                                      | 89  |
| Figura 6.15 Teste de correlação nos resíduos de identificação modelo $ratvc1$ .....                                | 90  |
| Figura 6.16 Teste de correlação nos resíduos de identificação modelo $ratvc1r$ .                                   | 90  |
| Figura 6.17 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do<br>modelo $ratdsvc1$ ..... | 92  |
| Figura 6.18 Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do<br>modelo $dsae1$ .        | 92  |
| Figura 6.19 Evolução do cálculo do expoente de Lyapunov. Dados $dsvc1.dat$ .....                                   | 93  |
| Figura 6.20 Cálculo da dimensão de correlação modelos obtidos a partir de $dsvc1.dat$ .....                        | 94  |
| Figura A.1 Simbologia usada em $gentm41.m$ .....                                                                   | 100 |
| Figura A.2 Sequência de comandos em Matab usados para identificação de modelos<br>racionais.....                   | 104 |

# Índice de Tabelas

|                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 2.1 Agrupamento de termos dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Aguirre e Mendes, 1996) ..... | 23 |
| Tabela 3.1 Agrupamento de termos dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Mendes, 1995a).....           | 40 |
| Tabela 4.1 Resultado da estimação usando mínimos quadrados ordinário rotina <b>ratsm4.m</b>                                                                                                                                                   | 50 |
| Tabela 4.2 Resultado da estimação usando RME sem termos de ruído.....                                                                                                                                                                         | 52 |
| Tabela 4.3 Resultado da estimação usando RME Modificado com termos lineares de ruído                                                                                                                                                          | 53 |
| Tabela 4.4 Comparação entre o somatório dos erros percentuais na estimação de parâmetros para cada procedimento adotado. (i) OLS; (ii) RME sem termos de ruído; (iii) RME Modificado .....                                                    | 55 |
| Tabela 5.1 Desvio padrão dos erros de predição dos modelos do forno (em percentual)....                                                                                                                                                       | 73 |
| Tabela 6.1 Pontos fixos calculados para modelos obtidos a partir de <i>vc1</i> .....                                                                                                                                                          | 86 |
| Tabela 6.2 Períodos médios, calculados a partir dos dados de identificação <i>vc1.dat</i> , e a partir da simulação dos modelo <i>ratvc1r</i> e <i>ratvc1</i> .....                                                                           | 87 |
| Tabela 6.3 Valor estimado para o expoente de Lyapunov .....                                                                                                                                                                                   | 89 |
| Tabela 6.4 Dimensão de correlação, dados <i>vc1.dat</i> e modelos <i>ratvc1</i> e <i>ratvc1r</i> .....                                                                                                                                        | 89 |
| Tabela 6.5 Pontos fixos calculados a partir de <i>dsvc1</i> .....                                                                                                                                                                             | 91 |
| Tabela 6.6 Valor estimado para o expoente de Lyapunov.....                                                                                                                                                                                    | 93 |
| Tabela 6.7 Dimensão de correlação, dados <i>dsvc1.dat</i> e modelos <i>dase1</i> e <i>ratdsvc1</i> .....                                                                                                                                      | 94 |

# Nomenclatura

## Conjuntos Numéricos

|                |                                         |
|----------------|-----------------------------------------|
| $\mathbf{Z}$   | Conjunto dos números inteiros           |
| $\mathbf{Z}^+$ | Conjunto dos números inteiros positivos |
| $\mathbf{N}$   | Conjunto dos números naturais           |
| $\mathbf{R}$   | Conjunto dos números reais              |

## Variáveis

|               |                                                                                           |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{A}$ | Matriz auxiliar, no procedimento de Gram-Schmidt, para estimação ortogonal de parâmetros. |
| $a(\cdot)$    | Função não linear qualquer usada no numerador do modelo NARMAX racional.                  |
| $b(\cdot)$    | Função não linear qualquer usada no denominador do modelo NARMAX racional.                |
| $C(\epsilon)$ | Função de correlação utilizada no cálculo da dimensão de correlação de um atrator.        |
| $c_{ij}$      | Coefficiente de um termo $x(t)$ de um modelo NARMAX                                       |
| $D$           | Matriz diagonal obtida a partir de $W^T W$                                                |
| $D_c$         | Dimensão de Correlação do atrator de um sistema dinâmico não-linear.                      |
| $D_L$         | Dimensão de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.                                   |
| $d$           | Tempo de retardo de um sistema ou tempo morto.                                            |
| $d_i$         | Elementos da matriz diagonal $D$ .                                                        |
| $d_e$         | Dimensão de imersão de um sistema dinâmico.                                               |
| $e(t)$        | Ruído ou perturbações em um sistema dinâmico.                                             |
| $F(\cdot)$    | Função não-linear qualquer.                                                               |

|              |                                                                                                        |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(\cdot)$   | Função escalar qualquer.                                                                               |
| $g$          | Parâmetro do modelo ortogonalizado, no procedimento de Gram-Schmidt.                                   |
| $\hat{g}$    | Estimativa do parâmetro $g$ .                                                                          |
| $J_N(\cdot)$ | Índice de desempenho ou função de custo.                                                               |
| $k$          | Intervalo de predição.                                                                                 |
| $l$          | Grau de não-linearidade de um mapeamento não-linear.                                                   |
| $M$          | Número de parâmetros a ser estimados em um modelo NARMAX.                                              |
| $M$          | Mapa de Poincaré de um sistema dinâmico não-linear.                                                    |
| $m$          | Ordem dos termos $x(t)$ de um modelo NARMAX                                                            |
| $N$          | Comprimento do registro de dados disponíveis.                                                          |
| $n$          | Ordem de um sistema dinâmico.                                                                          |
| $n_e$        | Atraso máximo nos termos em $e(t)$ , em modelos discretos.                                             |
| $n_y$        | Atraso máximo nos termos em $y(t)$ , em modelos discretos.                                             |
| $n_\xi$      | Número de termos de ruído em um modelo NARMAX.                                                         |
| $n_\theta$   | Número de termos em um modelo NARMAX.                                                                  |
| $P$          | Matriz dos regressores de um modelo NARMAX.                                                            |
| $p(t)$       | Regressor de um modelo NARMAX polinomial representado na configuração preditor de “um-passo-a-frente”. |
| $\bar{p}$    | Ponto fixo de um sistema dinâmico.                                                                     |
| $Q$          | Matriz ortogonal (decomposição $QR$ ).                                                                 |
| $\bar{Q}$    | Matriz ortogonal aumentada (decomposição $QR$ ).                                                       |
| $R$          | Matriz triangular superior (decomposição $QR$ ).                                                       |
| $r$          | Dimensão do espaço vetorial onde está situado o atrator de um sistema dinâmico.                        |
| $s$          | Variável complexa de Laplace                                                                           |
| $T_s$        | Período de amostragem.                                                                                 |
| $t$          | Tempo ou número de amostras no caso discreto                                                           |

|                         |                                                                                                      |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sigma_z$              | Parte real do autovalor de um sistema discreto ou discretizado.                                      |
| $u(t)$                  | Sinal medido de entrada de um sistema.                                                               |
| $v(t)$                  | Variável instrumental.                                                                               |
| $W$                     | Matriz de regressores ortogonais.                                                                    |
| $w(t)$                  | Regressor ortogonal.                                                                                 |
| $\omega_z$              | Parte imaginária do autovalor de um sistema discreto ou discretizado.                                |
| $x(t)$                  | Representação geral de um termo do modelo NARMAX polinomial.                                         |
| $Y$                     | Vetor de saídas.                                                                                     |
| $y(t)$                  | Sinal de saída medido de um sistema                                                                  |
| $\hat{y}(t)$            | Saída do preditor de “um-passo-a-frente”                                                             |
| $\mathbf{y}(t)$         | Vetor de coordenadas em atraso.                                                                      |
| $y_1, y_2$              | Vetores auxiliares na estimação ortogonal de parâmetros pelo método da transformação de Householder. |
| $\bar{y}$               | Ponto fixo de um modelo NARMAX.                                                                      |
| $\zeta$                 | Autovalor de um sistema discreto ou discretizado.                                                    |
| $\alpha$                | Autovalor da matriz Jacobiana de um modelo NARMAX polinomial.                                        |
| $\Gamma$                | Seção de Poincaré de um sistema dinâmico não linear.                                                 |
| $\Delta t$              | Passo de integração numérica.                                                                        |
| $\delta(\cdot)$         | Função delta de Dirac.                                                                               |
| $\lambda_l$             | Maior expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.                                        |
| $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ | Espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.                                 |
| $\mu_b$                 | Parâmetro de bifurcação de um sistema dinâmico.                                                      |
| $\Theta$                | Vetor de parâmetros de um modelo NARMAX polinomial.                                                  |
| $\theta$                | Parâmetro nominal de um sistema dinâmico representado por um modelo NARMAX.                          |
| $\hat{\theta}$          | Parâmetro de um modelo NARMAX, estimado pelo método dos mínimos quadrados.                           |

|                         |                                                                                                                           |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Xi$                   | Vetor de resíduos de modelagem em um modelo NARMAX polinomial.                                                            |
| $\xi(t)$                | Resíduo de modelagem.                                                                                                     |
| $\zeta(t)$              | Resultado de $b(t)e(t)$ , obtido devido a linearização dos parâmetros para o modelo NARMAX racional.                      |
| $\Sigma_i$              | Coefficiente de um agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.                                                  |
| $\Sigma_i^\alpha$       | Coefficiente de um agrupamento de termos do numerador em um modelo NARMAX racional.                                       |
| $\Sigma_i^\beta$        | Coefficiente de um agrupamento de termos do denominador em um modelo NARMAX racional.                                     |
| $\tau$                  | Tempo de atraso na definição das coordenadas de atraso.                                                                   |
| $\tau_m$                | Valor mínimo entre $\tau_y$ e $\tau_{y^2}$ .                                                                              |
| $\tau_y$                | Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da auto-correlação linear de um sinal.                                              |
| $\tau_{y^2}$            | Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da auto-correlação não-linear de um sinal.                                          |
| $\sigma_\xi^2$          | Variância dos resíduos.                                                                                                   |
| $\Psi$ e $\psi$         | Matrizes auxiliares no processo de estimação de parâmetros por mínimos quadrados estendido para o modelo NARMAX racional. |
| $\Phi_{y_1 y_1}(\cdot)$ | Função de auto-correlação do sinal $y_1(t)$ .                                                                             |
| $\Phi_{y_1 y_2}(\cdot)$ | Função de correlação cruzada dos sinais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ .                                                             |
| $\Omega$                | Agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.                                                                     |
| $\Omega^\alpha$         | Agrupamentos de termos do numerador em um modelo NARMAX racional.                                                         |
| $\Omega^\beta$          | Agrupamentos de termos do denominador em um modelo NARMAX racional.                                                       |

## Operadores

|                      |                                    |
|----------------------|------------------------------------|
| $E\{.\}$             | Esperança matemática.              |
| $\mathcal{Q}_\alpha$ | Operador de deslocamento temporal. |
| $Var\{y(t)\}$        | Variância de $y(t)$ .              |
| $\ \cdot\ $          | Norma genérica.                    |
| $\ \cdot\ _2$        | Norma euclidiana.                  |
| $ \cdot $            | Valor absoluto de um número.       |
| $[\cdot]^T$          | Transposição de vetor ou matriz.   |

## Siglas

|        |                                                                                                                                                                                                  |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ARMAX  | Modelo (linear) auto-regresivo, de média móvel e entrada externa (“ <u>A</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving- <u>a</u> verage with <u>e</u> xogenous input model”).                      |
| ERR    | Taxa de redução do erro (“ <u>E</u> rror <u>r</u> eduction <u>r</u> atio”).                                                                                                                      |
| FFT    | Transformada rápida de Fourier (“ <u>F</u> ast <u>F</u> ourier <u>t</u> ransform”).                                                                                                              |
| FPE    | Erro de predição final (“ <u>F</u> inal <u>p</u> rediction <u>e</u> rror”).                                                                                                                      |
| NAR    | Modelo não-linear auto-regresivo. (“ <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive model”).                                                                                                |
| NARMA  | Modelo não-linear auto-regresivo, de média móvel e entrada externa (“ <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving- <u>a</u> verage model”).                              |
| NARMAX | Modelo não-linear auto-regresivo, de média móvel e entrada externa (“ <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive, <u>m</u> oving- <u>a</u> verage with <u>e</u> xogenous input model”). |
| NARX   | Modelo não-linear auto-regresivo, com entrada externa (“ <u>N</u> on-linear <u>a</u> uto- <u>r</u> egressive, with <u>e</u> xogenous input model”).                                              |
| NTC    | Elemento sensor de temperatura (“ <u>N</u> egative <u>t</u> hermal <u>c</u> oefficient”).                                                                                                        |
| PID    | “ <u>P</u> roportional- <u>I</u> ntegral- <u>D</u> erivativo”.                                                                                                                                   |
| PRBS   | Sinal binário pseudo-aleatório (“ <u>P</u> seudo <u>b</u> inary <u>r</u> andom <u>s</u> ignal”).                                                                                                 |
| RAM    | Memória de acesso aleatório (“ <u>R</u> andom <u>a</u> ccess <u>m</u> emory”).                                                                                                                   |

---

|     |                                                                            |
|-----|----------------------------------------------------------------------------|
| RBF | Função radiais de base (“ <u>R</u> adial <u>b</u> asis <u>f</u> unction”). |
| SNR | Relação sinal/ruído (“ <u>S</u> ignal-to- <u>n</u> oise <u>r</u> atio”).   |
| TM  | Marca registrada (“ <u>T</u> rade <u>m</u> ark”).                          |

# Capítulo 1

## Consideração sobre a Modelagem de Sistemas

“O papel da matemática para ajuda das pessoas na organização de seus pensamentos é um dos mais fascinantes temas da cultura humana”. (Ljung, 1994).

### 1.1. Introdução

O modelo de um sistema é uma representação mental, física, gráfica ou matemática de observações feitas no mundo real de acordo com certo padrão. A modelagem de sistemas é de vital importância para o desenvolvimento da ciência e tecnologia. A evolução do conhecimento científico ao longo dos séculos vem se apoiando em regras e leis matemáticas que descrevem fenômenos físicos observados na natureza.

O ato de dirigir um veículo pode ser citado como exemplo de utilização de modelos mentais de sistemas físicos, usados naturalmente pelas pessoas em tarefas do cotidiano. Um motorista que dirige pela primeira vez um certo automóvel, inicia identificando o sistema, ou seja, obtém um modelo mental para o mesmo a fim de ajustar suas ações para o controle do automóvel. Várias outras situações do cotidiano podem ser citadas como exemplos de utilização de modelos mentais.

A modelagem matemática de sistemas adquire importância especial na solução de problemas de engenharia. Através dos modelos matemáticos pode-se prever o comportamento dinâmico e estático de um sistema possibilitando simular seu comportamento, sob diversas condições de operação. Com isto podem-se ajustar controladores e/ou estudar formas de melhorar seu desempenho através de simulação dos modelos.

A obtenção de modelos que reproduzem exatamente o comportamento de um sistema é algo impossível. Na prática os modelos se aproximam satisfatoriamente do comportamento do sistema para uma determinada aplicação específica e uma faixa de operação limitada. Deste modo não existe um modelo para um determinado sistema, mas diversos modelos para o mesmo. Nem sempre o modelo que mais se aproxima do comportamento de um sistema é o melhor. Dependendo da aplicação um modelo mais simples pode ser mais adequado.

Um dos objetivos do estudo de técnicas para modelagem é construir métodos simples e eficazes na modelagem de sistemas. Como introdução à modelagem de sistemas vale citar alguns provérbios (Pena e Aguirre, 1994):

- “A planta tem sempre razão”;
- “Má informação é pior que ignorância”;
- “Um modelo contém apenas o que nele foi colocado”;
- “Modelo validado não pode ser sintonizado”;
- “O Universo, apesar de não linear, é, quase sempre, bem comportado”;
- “Uma mente bem educada fica satisfeita com o que é possível saber”;
- “O ‘Ótimo’ é o melhor possível no tempo e no espaço”.

Estes provérbios sintetizam considerações que devem ser feitas durante qualquer procedimento de modelagem.

Este Capítulo apresenta um breve introdução na modelagem matemática de sistemas dinâmicos. Procura estabelecer a importância da modelagem e analisa os principais métodos utilizados para derivar modelos matemáticos de sistemas dinâmicos.

## 1.2. Elucidário

Esta seção tem o objetivo de explicar os principais conceitos utilizados ao longo desta dissertação, não se atendo à definição formal de cada termo, mas do seu significado e/ou aplicação.

- **Sistema autônomo**

Um sistema é dito *autônomo* quando é regido por equações diferenciais (ou equações de diferenças) que não dependem explicitamente do tempo  $t$ . Por outro lado, sistemas que são regidos por equações diferenciais que dependem explicitamente do tempo são denominados *não-autônomos*. Um sistema *não-autônomo* pode ser transformado em um sistema *autônomo* através de uma troca de variáveis, com o tempo se transformando em mais uma variável de estado.

- **Sistema invariante no tempo**

Sistemas que são representados por equações diferenciais cujos coeficientes sejam funções do tempo são chamados sistemas *variantes no tempo*. Caso contrário o sistema é chamado de *invariante no tempo*.

Em um sistema *invariante no tempo* sua resposta  $y(t)$ , a uma entrada  $u(t)$  não se altera com o tempo absoluto. Na Figura 1.1 temos a representação em diagrama de blocos de um sistema invariante no tempo, onde  $u(t)$  é a entrada,  $y(t)$  saída e  $F(.)$  é uma função não linear qualquer.

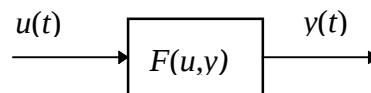


Figura 1.1 Representação de um sistema entrada-saída invariante no tempo

A alteração nas propriedades físicas devido ao desgaste natural com o tempo, isto é, “envelhecimento”, é um dos principais fatores que tornam um sistema variante no tempo, porém em boa parte das aplicações, esta variação é desconsiderada por ocorrer em um intervalo de tempo muito grande.

- **Sistema dinâmico**

Um sistema é dito *dinâmico* quando sua saída  $y(t)$  não depende exclusivamente da entrada  $u(t)$  naquele instante, mas da evolução histórica da entrada e da saída. Sistemas cujas saídas dependem exclusivamente da entrada naquele instante são denominados sistemas estáticos.

As saídas dos sistemas dinâmicos guardam informação do que ocorreu no tempo passado, por isso estes sistemas são ditos *sistemas com memória*. O corpo humano é um exemplo de

sistema dinâmico, por mais que esteja confortavelmente instalado em uma poltrona após um dia de trabalho exaustivo, este dará sinais de cansaço. Já um resistor é exemplo de sistema estático. A tensão em seus terminais depende unicamente do valor instantâneo da corrente (para baixas frequências pelo menos). Sistemas com dinâmica relativamente rápida são muitas vezes considerados estáticos dependendo do contexto em que funcionam.

Os sistemas dinâmicos são representados por equações diferenciais no tempo contínuo e por equações de diferenças no tempo discreto.

- **Sistema caótico**

Sistemas com *dinâmica caótica* possuem evolução temporal que conduz assintoticamente a *atratores estranhos*. Os *atratores estranhos* apresentam dependência sensível às condições iniciais (DCI).

O comportamento caótico determinístico possui as seguintes características (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994):

- *imprevisibilidade*, isto é, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, sua evolução posterior;
- *espectro contínuo de frequências*, caracterizando um *comportamento aperiódico* ;
- *invariança de escala*, significando uma estrutura com características de *auto-similaridade* (tipicamente no espaço de estados);
- “*estacionaridade*”, isto é, embora aperiódico, o sistema atinge regime.

A irregularidade das oscilações associadas a sistemas caóticos não implica que elas sejam completamente arbitrárias. Estas oscilações apresentam amplitude limitada e, em alguns casos, o “período de oscilação” (pseudo-período) varia apenas ligeiramente ao longo do tempo, embora as oscilações sejam erráticas.

- **Atrator**

Um atrator é a “região” do espaço de estados onde o sistema permanece após o término do seu movimento transitório ( $t \rightarrow \infty$ ). Atratores só são possíveis em sistemas dissipativos.

Dentre os atratores possíveis para sistemas não-lineares destaca-se:

- ◇ *atrator pontual*, que é independente do tempo. São trajetórias que convergem para um único ponto, cessando qualquer deslocamento;
- ◇ *ciclos limites*, que periódico no tempo, são caracterizados por sua amplitude e período. São representados por curvas fechadas que podem atrair ou repelir soluções próximas. Os *ciclos limites* são soluções periódicas (movimentos regulares) típicas a osciladores forçados não lineares;
- ◇ *toro*  $T^n$ , ( $2 \leq n < m$ ), que corresponde a um regime *quasi-periódico* com  $n$  frequências fundamentais independentes.  $m$  é o número de graus de liberdade do sistema;
- ◇ *atrator estranho*, que apresentam *dependência sensitiva às condições iniciais* (DCI).

### • Dimensão de Correlação

A dimensão de correlação é uma entre as várias medidas de dimensão do atrator de um sistema dinâmico.

A dimensão de correlação está relacionada com a quantidade de equações diferenciais necessárias para caracterizar a dinâmica sobre um dado atrator. Se a dimensão de correlação de um atrator é  $D_C = d + \delta$ , onde  $d$  é inteiro e  $0 \leq \delta \leq 1$  então o menor número de equações diferenciais necessárias para descrever a dinâmica do sistema original é  $d + 1$ .

O espaço de estados de um sistema dinâmico pode ser reconstruído a partir de uma série temporal  $\{y_i\}_{i=1}^N$ . Sejam  $y_i$  e  $y_j$  dois pontos das trajetórias do sistema no espaço de estados reconstruído  $S_j = \|y_i - y_j\|$ . A função de correlação pode ser definida como (Grassberg e Procaccia, 1983):

$$C(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{ (número de pares } (y_i, y_j) \text{ com } S_j < \varepsilon \text{)}. \quad (1.1)$$

A dimensão de correlação é então definida como:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log_e C(\varepsilon)}{\log_e \varepsilon} \quad (1.2)$$

- **Expoentes de Lyapunov**

Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de divergência (exponencial) de trajetórias vizinhas em certas direções do espaço de estado de um sistema dinâmico não-linear.

A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define direções de instabilidade local na dinâmica do sistema. A soma dos expoentes de Lyapunov de um sistema dissipativo globalmente estável é negativa, embora alguns expoentes possam ser positivos. Esse fato indica que trajetórias vizinhas no espaço de estados de tais sistemas tendem a se aproximar quanto  $t_f \rightarrow \infty$ . Fiedler-Ferrara e Prado (1994) mostram os sinais dos expoentes de Lyapunov de um sistema em função de sua ordem e comportamento dinâmico.

Os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear podem ser calculados a partir da definição  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} [(1/t_f) \log_e (d_{t_f} / d_0)]$ , onde  $d_0$  é a separação inicial e  $d_{t_f}$  é a separação final (após um tempo  $t_f$ ) das trajetórias.

- **Invariantes dinâmicos**

*Invariantes dinâmicos* são grandezas utilizadas para caracterizar o comportamento dinâmico em regime permanente (ou seja atratores) de um dado sistema. Os expoentes de Lyapunov e a dimensão de correlação são exemplos de invariantes dinâmicos.

### 1.3. Modelagem Matemática de Sistemas

O modelo matemático dinâmico de um sistema é um conjunto de equações que descrevem o seu comportamento dinâmico e estático. A obtenção de um modelo matemático deve estabelecer um compromisso entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise (Ogata, 1993).

Modelos matemáticos de sistemas dinâmicos podem ser obtidos basicamente através de duas abordagens diferentes:

- modelagem pela física do processo (Doebelin, 1980; Klamkim, 1987);
- identificação de sistemas (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987).

A modelagem matemática baseada na física do processo parte de leis físicas que regem o comportamento dinâmico do sistema. Esta abordagem exige conhecimento pleno das leis físicas relacionadas com o processo e também conhecimento das grandezas físicas envolvidas. Nesta abordagem os parâmetros obtidos para o modelo guardam uma relação direta com as grandezas físicas. Em geral os modelos são representados por equações diferenciais no domínio do tempo, ou através de funções complexas no domínio de Laplace. Para sistemas muito complexos, a modelagem baseada na física do processo normalmente torna-se inviável, já que não se conhecem todas as relações entre as diversas variáveis e também todas as grandezas físicas envolvidas.

Na identificação de sistemas, o modelo matemático é construído a partir da resposta a uma entrada conhecida. Esta resposta é obtida através de dados de entrada e saída do sistema, sendo realizadas medições destas variáveis simultaneamente a uma taxa de amostragem constante. Os modelos matemáticos obtidos através deste processo conseguem reproduzir características dinâmicas e estáticas do sistema original.

Os métodos desenvolvidos para a identificação de sistemas podem ser divididos em três grupos (Ljung, 1987):

- métodos paramétricos;
- métodos não-paramétricos;
- métodos no domínio da frequência.

Os métodos *paramétricos* partem de estruturas matemáticas parametrizadas para descrever o comportamento dinâmico do sistema original. Os parâmetros destas estruturas são estimados usando-se algoritmos de estimação de parâmetros a partir dos dados medidos (Ljung, 1987). Nos métodos *não-paramétricos* o comportamento dos sistemas dinâmicos é determinado através de funções de correlação calculadas sobre os dados disponíveis. Já a identificação de sistemas no *domínio da frequência* é obtida através da transformada de Fourier (Hougen, 1972) dos dados de entrada e saída, resultando na resposta em frequência do sistema original.

A identificação de sistemas baseada em métodos paramétricos foi inicialmente utilizada na obtenção de modelos lineares para os sistemas em estudo (Box e Jenkins, 1976). Os sistemas físicos no entanto são não lineares, de forma que modelos lineares são limitados para reproduzir todas as suas características. Em geral, modelos lineares de sistemas dinâmicos descrevem o comportamento dos sistemas assumindo linearidade em uma determinada faixa de operação limitada. Mesmo assim, modelos lineares foram e são largamente utilizados, principalmente devido à facilidade com que são obtidos.

Com o advento da teoria de sistemas dinâmicos não lineares, surge interesse pela identificação de modelos não-lineares, principalmente a partir da década de 80. Com esta nova necessidade vem a busca de representações para as equações matemáticas que descreveram a dinâmicas dos sistemas não-lineares, assim como o desenvolvimento de algoritmos de estimação de parâmetros e de técnicas de validação para tais modelos.

## 1.4. Aspectos da Identificação de Sistemas

A identificação de sistemas parte de dados de entrada e saída medidos no sistema que se deseja modelar. Tais dados são denominados *dados de identificação* e são obtidos através da medição simultânea da resposta do sistema  $y(t)$  a uma excitação na entrada  $u(t)$  pré-determinada. A qualidade do modelo obtido estará intimamente ligada com as características do sinal de excitação. O modelo só reproduzirá as características do sistema que tiverem sido adequadamente excitadas pelo sinal de entrada.

Os modelos matemáticos gerados pela identificação de sistemas podem ser divididos em duas classes:

- modelos entrada-saída;
- modelos em espaço de estados.

Os modelos de entrada-saída descrevem a saída  $y(t)$  do sistema em função da entrada  $u(t)$ . Estes modelos não possuem nenhuma informação das variáveis internas do sistema. Já os modelos em espaço de estados permitem analisar o comportamento de variáveis internas para uma dada região de operação.

Uma questão de vital importância na identificação de sistemas é a escolha da estrutura para representação dos sistemas. Conhecimentos *“a priori”* do sistema a ser identificado pode facilitar a escolha da estrutura. De acordo com o nível de conhecimento utilizado nesta escolha, os modelos são classificados em (Ljung, 1987):

- modelos caixa-branca (“white-box”);
- modelos caixa-cinza (“gray-box”);
- modelos caixa-preta (“black-box”).

Os modelos *caixa-branca* tem sua estrutura totalmente definida a partir de conhecimento *a priori* do sistema a ser identificado. Neste caso a forma da equação matemática que representa o sistema é previamente conhecida. Nos modelos *caixa-cinza* a utilização de conhecimento *a priori* simplifica os algoritmos de seleção de estrutura. Os modelos *caixa-preta* não utilizam nenhuma informação conhecida *a priori* do sistema. A estrutura destes modelos é selecionada dentro de famílias conhecidas por apresentar boa flexibilidade na modelagem de sistemas (Ljung, 1995).

Outro ponto importante na identificação de sistemas é a estimação de parâmetros. A estimação de parâmetros consiste em determinar os parâmetros de uma determinada estrutura a fim de que o modelo reproduza o comportamento do sistema original.

A etapa final de um processo de identificação de um sistema é a sua validação. A validação consiste em verificar se todas as dinâmicas presentes nos dados de identificação foram modeladas e se o modelo reproduz a dinâmica do sistema original.

## 1.5. Apresentação do Trabalho

O objetivo principal desse trabalho é avaliar o uso da representação NARMAX racional para a modelagem de sistemas físicos reais. Como consequência deste estudo sugere-se uma modificação no algoritmo de estimação de parâmetros proposto em (Billings e Zhu, 1991) visando a facilitar sua implementação. O novo algoritmo foi testado usando dados reais coletados em dois sistemas diferentes.

Os modelos racionais podem ser considerados como uma evolução natural depois dos modelos lineares e polinomiais não-lineares. Os modelos NARMAX racionais descrevem eficientemente várias não-linearidades com reduzido número de parâmetros (Billings e Zhu, 1991).

O Capítulo 2 apresenta aspectos da identificação de sistemas usando a representação NARMAX polinomial. São apresentadas a forma do modelo NARMAX polinomial e as diversas etapas na obtenção destes modelos como: (i) escolha do tempo de amostragem e dados de identificação; (ii) escolha da estrutura, onde é apresentado o algoritmo ERR e discutidos conceitos de agrupamento de termos e pontos fixos, como técnicas auxiliares para escolha da estrutura; (iv) estimação dos parâmetros através do algoritmo ortogonal com regressão-direta; (v) validação do modelo identificado. Finalmente são apresentadas algumas aplicações dos modelos NARMAX polinomiais.

No Capítulo 3 é apresentada a forma geral de uma representação NARMAX racional, e suas principais características. É discutido o procedimento que transforma a expressão linear nos parâmetros e apresentado o estimador de mínimos quadrados - RME, proposto em (Billings e Zhu, 1991), sendo analisada a polarização provocada por tal procedimento. A seguir apresenta-se um estudo dos agrupamentos de termos e pontos fixos para o modelo racional.

No Capítulo 4 é feita uma breve discussão a respeito das rotinas usadas no processo de identificação. Três procedimentos distintos são testados na estimação de parâmetros de um sistema simulado em computador: (i) estimação de parâmetros usando o algoritmo de mínimos quadrados ordinários; (ii) utilização do algoritmo estimador para modelos racionais - RME, proposto em (Billings e Zhu, 1991) sem introdução de termos de ruído; e (iii) utilização do algoritmo RME modificado com termos aditivos de ruído. A comparação crítica dos algoritmos e a proposição de procedimento em (iii) são contribuições do presente trabalho.

No Capítulo 5 as rotinas de identificação são usadas na obtenção de modelos para um forno elétrico. O forno elétrico utilizado encontra-se no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O sistema possui dinâmica bilinear com constantes de tempo diferentes para o aquecimento e esfriamento. Modelos NARMAX polinomiais para o forno foram obtidos em (Rodrigues, 1996), sendo que as mesmas massas de dados foram usadas na obtenção de modelos NARMAX racionais, o que possibilitou a comparação entre as duas representações na modelagem do comportamento do forno elétrico.

O Capítulo 6 apresenta a modelagem não-linear do circuito caótico de Chua. O circuito de Chua é um circuito eletrônico com comportamento não-linear que tem sido objeto de estudo por um grande número de pesquisadores (Glover e Mess, 1992; Chua e Hasler, 1993; Harley e Mossayebi, 1993; Madan, 1993; Aguirre e Billings, 1994b; Aguirre, 1995b). Foi realizada a modelagem do atrator caótico de dupla volta utilizando dados de operação de um protótipo montado no LCPI (Torres e Aguirre, 1995b). Mais uma vez foi possível estabelecer comparações com modelos NARMAX polinomiais obtidos em (Rodrigues, 1996) com as mesmas massas de dados.

Ao final são apresentadas as conclusões do trabalho, e também algumas propostas de continuação do mesmo. No Apêndice A as principais rotinas em Matlab usadas durante o processo de identificação são descritas.

## Capítulo 2

# Identificação de Sistemas Usando a Representação NARMAX Polinomial

### 2.1. Introdução

A tentativa de explicar ou de reproduzir comportamentos de sistemas físicos é algo que há muito desperta o interesse de pesquisadores. Pode-se citar vários nomes importantes para o desenvolvimento da ciência, que descreveram fenômenos físicos através do enunciado de leis matemáticas, como: Isaac Newton com as leis do movimentos e da gravitação universal, Charles Coulomb com a leis da repulsão e atração de cargas elétricas, Maxwell e Boltzmann com a teoria cinética dos gases, dentre outros.

Com o desenvolvimento dos processos industriais e a necessidade de controlá-los, tornou-se necessário desenvolver modelos que reproduzissem suas características estáticas e também dinâmicas. Por isso a modelagem matemática assume grande importância, pois através dela pode-se prever o que acontecerá com um sistema, conhecendo-se a sua entrada e suas saídas anteriores. A modelagem também permite simular a resposta do sistema quando este é submetido a distúrbios de carga, bem como verificar e descobrir os valores ótimos de sintonia de controladores.

Existem duas linhas básicas de como se obter o modelo matemático de sistemas físicos: (i) modelagem a partir da física do processo (Doebelin, 1980; Klamkin, 1987); (ii) modelagem a partir da resposta do sistema a entradas conhecidas - identificação de sistemas (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987). A primeira parte das leis físicas que regem o processo para se obter uma equação matemática, isto é, um modelo. Geralmente este modelo é representado por uma equação diferencial linear. A segunda obtém um modelo para o sistema a partir da sua resposta a uma entrada conhecida, neste caso o modelo obtido pode ser representado de várias formas, tais como: um polinômio (modelo ARMAX), uma razão de dois polinômios (modelo Racional), uma rede neural, etc.

Este capítulo tem o objetivo de descrever a identificação de sistemas não lineares, utilizando os modelos NARMAX polinomiais. Faz-se uma breve revisão sobre a representação NARMAX polinomial, o efeito do tempo de amostragem na escolha dos termos que compõem o modelo, escolha do sinal de excitação, detecção de estrutura, identificação e validação. No final do capítulo serão apresentadas algumas aplicações em identificação de sistemas reais.

## 2.2. A Representação Polinomial

O modelo polinomial utiliza-se de um polinômio de grau  $l$  para representar a dinâmica de sistemas físicos. Este polinômio é composto por termos contendo informações do passado das entradas e das saídas do processo.

Um modelo NARMAX polinomial pode ser representado por (Leontaritis and Billings, 1985a; Leontaritis and Billings, 1985b; Billings e Chen, 1989):

$$y(t) = F^l[y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n_y), u(t-d), u(t-d-1), \dots, u(t-d-n_u+1), \\ e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-n_e)] + e(t), \quad (2.1)$$

onde  $t = 1, \dots, N$ .  $F^l$  é uma função polinomial qualquer com grau de não linearidade  $l$ .  $y(t)$ ,  $u(t)$  e  $e(t)$  são, respectivamente, saída, entrada e ruído do sistema, cujos atrasos máximos são representados por  $n_y$ ,  $n_u$  e  $n_e$ , respectivamente.  $d$  representa o tempo morto do sistema e  $N$  é o número de pontos dos dados de identificação.

## 2.3. Escolha do Tempo de Amostragem

A escolha correta do tempo de amostragem de um sinal contínuo é o primeiro passo para se identificar um sistema. O tempo de amostragem influi na seleção da estrutura, na estimação dos parâmetros do modelo e na capacidade do modelo reproduzir os diferentes regimes dinâmicos que o sistema possui.

A importância da seleção correta do tempo de amostragem foi estudada em (Billings e Aguirre, 1995). Este autores concluíram que: (i) os dados devem ser amostrados de forma suficientemente rápida para garantir que todas as freqüências de interesse estejam bem representadas no conjunto de dados usados para a identificação; (ii) o tempo de amostragem muito pequeno pode afetar o desempenho do algoritmo de seleção de estrutura e estimação de parâmetros; (iii) algumas interações não lineares só aparecerão e serão reproduzidas se a taxa de amostragem for suficientemente rápida.

Uma superamostragem, ou seja, um sinal amostrado mais rápido do que o necessário, freqüentemente resulta em problemas numéricos durante a estimação de parâmetros (Billings e Aguirre, 1995). Na prática, entretanto, uma superamostragem pode também provocar problemas na seleção de estrutura. Por outro lado uma subamostragem pode provocar o efeito de dados adjacentes não serem correlacionados, impossibilitando assim a identificação.

### 2.3.1. Uma Regra Heurística para Seleção do Tempo de Amostragem

Alguns métodos para escolha do tempo de amostragem utilizam funções de autocorrelação linear (Casdagli et al., 1991; Fraser 1989b) e funções de autocorrelação não linear (Aguirre, 1995a). As função utilizadas em (Billings e Tao, 1991) são definidas como:

$$\Phi_{yy}(\tau_c) = E\{(y(t) - \overline{y(t)})(y(t - \tau_c) - \overline{y(t)})\} , \tau_c = 0, 1, \dots , \quad (2.2)$$

$$\Phi_{y^2, y^2}(\tau_c) = E\{(y^2(t) - \overline{y^2(t)})(y^2(t - \tau_c) - \overline{y^2(t)})\} , \tau_c = 0, 1, \dots , \quad (2.3)$$

onde  $E\{\cdot\}$  é a esperança matemática e a barra indica média com relação ao tempo.  $\Phi_{yy}$  indica a correlação linear e  $\Phi_{y^2, y^2}$  indica a correlação não linear.

O procedimento proposto em (Aguirre, 1995a) para determinação do tempo de amostragem inicia-se através do estudo das auto-correlações, descritas em (2.2) e (2.3), dos dados de identificação a serem usados. Define-se:

$$\tau_m = \min\{\tau_y, \tau_{y^2}\}, \quad (2.4)$$

onde  $\tau_y$  e  $\tau_{y^2}$ , são os primeiros mínimos das funções de auto-correlação linear e não-linear, respectivamente. O tempo de amostragem pode então ser escolhido de acordo com (Billings e Aguirre, 1995):

$$\frac{\tau_m}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{10}. \quad (2.5)$$

Em alguns casos, os limites superiores e inferiores podem ser relaxados para  $\tau_m/5$  e  $\tau_m/25$ , respectivamente.

## 2.4. Escolha do Sinal de Excitação

Na identificação paramétrica, a escolha do sinal de excitação, isto é, o sinal que será aplicado durante o teste, é de primordial importância. A partir da resposta do sistema (saída) ao sinal de excitação (entrada) obtêm-se as relações existente entre saída e entrada, ou seja, seu modelo dinâmico.

As entradas a serem utilizadas para excitar o sistema devem ser projetadas para satisfazer um conjunto de propriedades (Billings, 1980; Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986) que, em princípio, garantirão a adequabilidade dos dados obtidos. É necessário que o sinal de entrada consiga excitar o sistema em toda a faixa de frequência de interesse. Para sistemas não-lineares, nos quais variações da amplitude do sinal de entrada podem provocar mudanças qualitativas no comportamento do mesmo, é necessário projetar um perfil de amplitudes para os sinais de teste (Aguirre e Billings, 1995a), de forma a garantir que todas as não linearidades presentes no sistema sejam visitadas.

Os sinais mais utilizados para excitar os sistemas são ondas quadradas, sinais binários pseudo-aleatórios (PRBS), e ruído branco, por possuírem espectro de frequências relativamente largo.

Os dados obtidos na experimentação do sistema devem ser processados por filtros passa-baixas, a fim de que o falseamento dos sinais amostrados seja evitado. O espectro de frequências de um sinal amostrado corresponde ao espectro do sinal original no intervalo  $-2/T_s \leq f \leq 2/T_s$ , onde  $T_s$  é o tempo de amostragem e  $2/T_s$  é chamada de frequência de Nyquist.

## 2.5. Escolha da Estrutura

A seleção de estrutura adequada é vital para a representação global da dinâmica de um sistema (Aguirre, 1994). A escolha da estrutura pode ser dividida em duas etapas: (i) que agrupamentos de termos<sup>1</sup> devem pertencer ao modelo e, (ii) que termos, dentro dos agrupamentos escolhidos, farão parte do modelo.

A escolha correta dos agrupamentos de termos evitarão efeitos dinâmicos espúrios (Aguirre e Billings, 1994). O número de termos para representar a dinâmica do sistema deve ser suficientemente pequeno para se evitar instabilidade numérica (Aguirre e Billings, 1994), provocada por sobreparametrização.

Uma das questões é como determinar o número de termos que deve ser usado na representação, e quais, dentre a totalidade dos candidatos. As técnicas de escolha de termos podem ser agrupadas em dois grandes grupos, denominados, construtivo e eliminativo (Kadtke et al, 1993; Aguirre, 1994). Na primeira, parte-se de um determinado modelo e em cada passo um termo é acrescentado de acordo com sua importância na representação do sistema. Na segunda, parte-se um “modelo teste” e os termos menos significativos são eliminados a cada passo, neste caso é necessário estimar os parâmetros iniciais do “modelo teste”, eliminando os menos significativos.

Dentre as técnicas usadas na determinação de estrutura será destacado nesta seção o procedimento denominado ERR, “*error reduction ratio*” (Billings et al, 1989). O ERR consiste em associar a cada termo candidato, um índice que corresponde à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída. Desta forma é possível ordenar os termos candidatos de acordo com a contribuição de cada um. O algoritmo ERR gera um lista em ordem decrescente com os termos e suas contribuições na identificação do sistema. O ERR

---

<sup>1</sup> Isto será definido na seção 2.5.2.

é obtido utilizando as propriedades da fatoração ortogonal de matrizes, e será descrita posteriormente, na seção 2.5.1.

Uma vez obtida a lista referida acima, o problema passa para a determinação do número de termos a ser inserido no modelo. A escolha da estrutura de modelos NARMAX tem sido objeto de estudo, e vários artigos vem sendo publicados com diversas abordagens para o tema, estudo de agrupamento de termos em (Aguirre e Billings, 1995), estudo de pontos fixos de modelos polinomiais (Aguirre e Mendes, 1996) e o efeitos dinâmicos da sobreparametrização (Aguirre e Billings, 1995).

### 2.5.1. Algoritmo Ortogonal com Regressão-Direta.

Um algoritmo ortogonal que eficientemente combina seleção de estrutura e estimação de parâmetros foi desenvolvido (Korenberg, 1985) e estendido para a identificação de uma única-entrada e única-saída para sistemas estocásticos (Korenberg et al, 1988), posteriormente aplicado a multi-entradas e multi-saídas (Billings et al, 1989).

Utilizando a representação matricial, a Equação (2.1) pode ser rescrita como:

$$Y = P \Theta + \xi, \quad (2.6)$$

onde  $P$  é a matriz de regressores,  $\Theta$  é a matriz que contém os parâmetros a serem estimados e  $\xi$  é matriz que contém os erros entre o valor medido e o valor estimado. O vetor de parâmetros  $\Theta$  é calculado de forma que a norma Euclidiana  $\|Y - P \Theta\|_2$  seja minimizada. Isto pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados.

O método de Mínimos Quadrados Ortogonal (OLS - “Orthogonal Least Squares”) parte de vetores de base  $p_i$  e encontra um vetor solução  $\hat{\Theta}$ , que satisfaz a condição de  $P\Theta$  projetar os valores de  $y$  no espaço dado pelos vetores base. O método OLS (Billings et al., 1988) envolve a transformação do conjunto de vetores  $p_i$  em um conjunto de vetores de base ortogonais, realizando cálculos para determinar a contribuição individual de cada vetor. A matriz de regressores  $P$  é decomposta como:

$$P = WA ,$$

(2.7)

onde A é um matriz triangular superior  $M \times M$  com 1's na diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1M} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2M} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(2.8)

e W é uma matriz  $N \times M$  com  $w_i$  colunas ortogonais sobre os dados. Então:

$$W^T W = D,$$

(2.9)

e D é diagonal com elementos  $d_i$  :

$$d_i = w_i^T w_i = \sum_{t=1}^N w_i(t) w_i(t), \quad 1 \leq i \leq M .$$

(2.10)

O espaço representado pelo conjunto de vetores de base ortogonais  $w_i$  é o mesmo espaço representado pelo conjunto  $p_s$  podendo-se rescrever a equação (2.6) como:

$$Y = Wg + E .$$

(2.11)

A solução OLS de  $\hat{g}$  é dada por

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{Y}}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.12)$$

Os valores de  $\hat{\mathbf{g}}$  e  $\hat{\Theta}$  satisfazem o sistema triangular

$$\mathbf{A} \hat{\Theta} = \hat{\mathbf{g}}. \quad (2.13)$$

Esta última equação pode ser usada para obter os parâmetros do modelo original a partir dos parâmetros estimados de  $\hat{\mathbf{g}}$ . Os métodos Gram-Shmidt Clássico e Gram-Shmidt Modificado podem ser usados para obter (2.7) e então resolver para os mínimos quadrados estimando  $\hat{\Theta}$  (Golub e Van Loan, 1989).

A variância da saída pode ser expressa por:

$$\frac{1}{N} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i + \frac{1}{N} \mathbf{E}^T \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Nota-se que  $\sum_i g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i / N$  é a parte da variância da saída explicada pelo  $i$ -ésimo regressor, e que  $\mathbf{E}^T \mathbf{E} / N$  é a variância da saída  $y(t)$  não explicada. Então  $g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i / N$  é a porção da variância de saída explicada por  $w_i$ . A taxa de redução de erro (*“error reduction ratio”* - ERR), devido à inclusão de  $w_i$  no modelo é definida como:

$$[ERR]_i = \frac{g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i}{\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.15)$$

A razão acima oferece um meio simples e efetivo de checar a importância de cada regressor na explicação da variância da saída.

### 2.5.2. Técnicas de agrupamento de termos e pontos fixos.

A parte determinística do modelo NARMAX definido na equação (2.1), que é um modelo NARX, pode ser escrito como (Peyton-Jones e Billings, 1989):

$$y(t) = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(t - n_i) \prod_{i=p+1}^m u(t - n_i), \quad (2.16)$$

onde,

$$\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_u} \quad (2.17)$$

e  $l$  é o grau de não linearidade,  $n_y$  refere-se aos fatores em  $y(t - n_i)$  e  $n_u$  aos fatores  $u(t - n_i)$ .

Se o período de amostragem,  $T_s$ , é escolhido suficientemente pequeno ( $T_s \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} y(t-1) &\approx y(t-2) \approx \dots y(t-n_y), \\ u(t-1) &\approx u(t-2) \approx \dots u(t-n_u). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aplicando (2.18) na equação (2.16):

$$y(t) \approx \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^m y(t-1)^p u(t-1)^{m-p}. \quad (2.19)$$

O conjunto de termos na forma  $y(t-i)^p u(t-j)^{m-p}$  é denominado *agrupamento de termos* (“term cluster” em Aguirre e Billings, (1995c). Os *agrupamentos de termos* serão representados por

$\Omega_{y^p u^{m-p}}$  ( $m = 0, \dots, l$  e  $p = 0, \dots, m$ ). A constante  $\sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$  é o *coeficiente do agrupamento de termos*  $\Omega_{y^p u^{m-p}}$  (“cluster coefficient” em Aguirre e Billings, 1995c) e será representada por  $\sum_{y^p u^{m-p}}$ .

*Pontos fixos* (ou pontos de equilíbrio) de um sistema discreto são aqueles pontos tais que  $y(t) = y(t-i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ , fazendo  $u(t-i) = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ .

Os agrupamentos de termos e seus coeficientes podem ser utilizados na determinação dos pontos fixos de um sistema representado por modelos NARMAX. Esta possibilidade oferece, em alguns casos, uma importante contribuição na determinação da estrutura.

A utilização destes conceitos restringe, inicialmente, a procura de termos representativos do sistema aos agrupamentos de termos que deve conter o modelo, e depois, aos termos de cada agrupamento. Este procedimento reduz sensivelmente o universo de procura e torna a estrutura mais robusta.

Aguirre e Mendes, (1996) mostram que (i) o número de pontos fixos de um modelo polinomial depende dos agrupamentos de termos representados na estrutura do modelo, e (ii) que a localização de cada ponto fixo é completamente determinada pelos respectivos coeficientes de agrupamentos.

Os conceitos de agrupamento de termos e coeficientes de agrupamento de termos são utilizados para caracterizar o número de pontos fixos no mapa discreto, como também a localização e a simetria de cada ponto fixo.

Os agrupamentos possíveis de um polinômio autônomo com grau de não-linearidade  $l$  são  $\Omega_0 = \text{constante}, \Omega_y, \Omega_{y^2}, \dots, \Omega_{y^l}$ .

Então, os pontos fixos de um polinômio autônomo com grau de não linearidade  $l$ , são dados pelas raízes do polinômio (2.20), onde foram usados os conceitos de agrupamento e coeficiente de agrupamento de termos (Aguirre e Mendes, 1996):

$$\sum_{y^l} y^l + \dots + \sum_{y^2} y^2 + (\sum_y - 1)y + \sum_0 = 0, \quad (2.20)$$

sendo  $\sum_0 = c_{0,0}$  uma constante. Fica claro que o número de pontos fixos de um polinômio de grau  $l$  é igual a  $l$  se  $\sum_{y^l} \neq 0$ .

A localização dos pontos fixos é dada pelas raízes da equação (2.20), e a álgebra envolvida na sua solução pode ser vista em (Aguirre e Mendes, 1996).

### Estabilidade de pontos Fixos

Uma das vantagens de se utilizar o conceito dos pontos fixos, está na possibilidade de se ter uma idéia do comportamento dinâmico do sistema a partir da determinação da estabilidade dos pontos fixos. Esta estabilidade é determinada, no sentido de Lyapunov, a partir dos autovalores da matriz Jacobiana avaliada nos pontos fixos.

O polinômio NAR de ordem  $n_y$  pode ser representado por um mapeamento  $f: R^{n_y} \rightarrow R^{n_y}$  como a seguir (Aguirre e Mendes, 1996):

$$y(t) = f(y(t-1)), \quad (2.21)$$

onde  $y \in R^{n_y}$  é o vetor de estado, gerado a partir dos dados de identificação e  $t$  é o intervalo de predição.

$$\begin{bmatrix} y(t-n_y+1) \\ y(t-n_y+2) \\ \vdots \\ y(t-1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{0}{f} & \frac{0}{f} & \frac{0}{f} & \cdots & \frac{1}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-n_y) \\ y(t-n_y+1) \\ \vdots \\ y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde  $f/y(t-i) = 0$  se  $f(\cdot)$  não inclui  $y(t-i)$ . Então a matriz Jacobiana é definida como:

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y+1)} & \frac{\partial f}{\partial y(t-n_y+2)} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y(t-1)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Autovalores estáveis serão aqueles que estiverem situados dentro de um círculo de raio unitário, centrado na origem do plano  $z = e^{jT}$  ( $z = \sigma_z + j\omega_z$ , onde  $\sigma_z$  e  $\omega_z$  são as partes real e imaginária do autovalor, respectivamente).

### Simetria dos Pontos Fixos

A simetria de vários sistemas físicos deve ser considerada na obtenção de modelos matemáticos (Holmes, 1977). Neste contexto é importante considerar a simetria de pontos fixos de modelos NARMAX.

Pontos fixos simétricos são aqueles eqüidistantes do sistema de coordenadas considerado. Quando um modelo é estimado a partir de dados que são obtidos através de uma função de medição, os pontos fixos serão geralmente reais (Aguirre e Mendes, 1996).

A partir da equação (2.20) pode-se determinar quais agrupamentos de termos devem estar presentes para que um modelo possua pontos fixos não triviais simétricos. A Tabela 2.1, reproduzida de (Aguirre e Mendes, 1996), apresenta uma relação entre os agrupamentos de termos de um modelo NARMAX polinomial e o número de pontos fixos triviais em função do grau  $l$  do polinômio, para que o modelo possua pontos fixos não-triviais simétricos.

A partir dos conceitos acima temos uma indicação de quais agrupamentos de termos devem estar presentes em um modelo para garantir que seus pontos fixos sejam simétricos.

Tabela 2.1 Agrupamento de termos dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Aguirre e Mendes, 1996)

| $l$ | Nº de pontos fixos triviais | Agrupamentos                                         |
|-----|-----------------------------|------------------------------------------------------|
| 1   | 1                           | $\Omega_y$                                           |
| 2   | 0                           | $\Omega_{y^2}, \Omega_0$                             |
| 3   | 1                           | $\Omega_{y^3}, \Omega_y$                             |
| 4   | 0                           | $\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$               |
| 4   | 2                           | $\Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$                         |
| 5   | 1                           | $\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}, \Omega_y$               |
| 5   | 3                           | $\Omega_{y^5}, \Omega_{y^3}$                         |
| 6   | 0                           | $\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}, \Omega_0$ |
| 6   | 2                           | $\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}, \Omega_{y^2}$           |
| 6   | 4                           | $\Omega_{y^6}, \Omega_{y^4}$                         |

## 2.6. Validação

A validação de modelos é um passo importante em um processo de identificação. Os testes de validação aplicados a um modelo indicam a sua capacidade de representar o sistema original. A validação de modelos pode ser dividida em duas vertentes: (i) validação estatística e (ii) validação dinâmica.

Inúmeros métodos têm sido desenvolvidos para validação de modelos lineares. Alguns destes métodos baseiam-se nas funções de correlação que verificam se os resíduos de identificação  $\xi(t)$  são brancos e não correlacionados com a entrada (Bohlin, 1971; Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987). Outro método é a validação baseada na comparação de modelos, que envolve a aplicação de testes estatísticos para comparar modelos e selecionar o melhor (Wadsworth e Bryan, 1974; Akaike, 1974). Para sistemas não-lineares estes testes não são suficientes por não verificarem não-linearidades nos resíduos (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

Na validação de modelos não-lineares, devem ser verificadas as seguintes identidades (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986; Billings e Zhu, 1994):

$$\Phi_{\xi\xi}(\tau_1) = E\{\xi(t)\xi(t-\tau_1)\} = \delta(\tau_1) , \quad (2.24)$$

$$\Phi_{\xi\xi}(\tau_1) = E\{\xi(t)u(t-\tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.25)$$

$$\Phi_{u^2\xi}(\tau_1) = E\{(u^2(t) - E\{u^2(t)\})\xi(t-\tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.26)$$

$$\Phi_{u^2\xi^2}(\tau_1) = E\{(u^2(t) - E\{u^2(t)\})\xi^2(t-\tau_1)\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.27)$$

$$\Phi_{\xi, \xi'}(\tau_1) = E\{(\xi(t) - E\{\xi(t)\})(\xi'(t-\tau_1) - E\{\xi'(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.28)$$

$$\Phi_{\xi, \xi^2}(\tau_1) = E\{(\xi(t) - E\{\xi(t)\})(\xi^2(t-\tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.29)$$

$$\Phi_{\xi^2, \xi^2}(\tau_1) = E\{(\xi^2(t) - E\{\xi^2(t)\})(\xi^2(t-\tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = \delta(\tau_1), \quad \forall \tau_1 \quad (2.30)$$

$$\Phi_{(y\xi)\xi^2}(\tau_1) = E\{(y(t)\xi(t) - E\{y(t)\xi(t)\})(\xi^2(t-\tau_1) - E\{\xi^2(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.31)$$

$$\Phi_{(y\xi)u^2}(\tau_1) = E\{(y(t)\xi(t) - E\{y(t)\xi(t)\})(u^2(t-\tau_1) - E\{u^2(t)\})\} = 0, \quad \forall \tau_1 \quad (2.32)$$

onde  $\delta(\tau_1)$  é a função delta de Dirac e o apóstrofe indica que a média foi subtraída dos sinais.

Baseado no comprimento do registro de dados disponíveis,  $N$ , é definido um intervalo probabilístico de 95% de confiança, dentro do qual as funções de correlação devem se manter para serem consideradas nulas. Os limites do intervalo de confiança de 95%, para funções normalizadas pelo desvio padrão, são:  $\pm 1,96/\sqrt{N}$  (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

A validação descrita acima garante que não existem correlações não modeladas nos resíduos de identificação e é denominada validação estatística. No entanto, os modelos validados

podem não apresentar o mesmo comportamento dinâmico do sistema original (Aguirre e Billings, 1994a)

Na validação dinâmica de um modelo, é verificado se esse apresenta características dinâmicas semelhantes àsquelas do sistema que está sendo identificado. Esta validação deve ser implementada de acordo com o sistema em questão. Em sistemas SISO, a validação pode ser feita em massas de dados diferentes daquela usada para a identificação. Outras propriedades dinâmicas que podem ser utilizadas para validar modelos em alguns casos são (Aguirre e Billings, 1994a; Letellier e Gouesbet, 1995):

- expoentes de Lyapunov
- mapas e seções de Poincaré
- dimensão de correlação
- diagramas de bifurcação
- propriedades topológicas.

Os invariantes dinâmicos citados descrevem aspectos qualitativos ou quantitativos da dinâmica do sistema. Segundo (Aguirre e Billings, 1994 a), os diagramas de bifurcação são os mais adequados na validação por serem mais sensíveis às mudanças na estrutura do modelo.

## 2.7. Exemplos de Aplicações

A representação NARMAX polinomial tem sido utilizada na identificação de vários sistemas dinâmicos não lineares, para diversas aplicações e em diversas áreas. Nesta seção pretende-se apresentar algumas aplicações desta representação publicadas nos últimos anos.

Em (Vallverdu e outros, 1992), temos a identificação do Controle Neural do Sistema Cardiovascular Humano utilizando modelo NARMAX. Neste artigo, os autores destacam a eficiência da representação NARMAX polinomial em comparação com modelos MA e ARMAX.

Em (Jang e Kim, 1994) descreve-se o modelo NARMAX polinomial aplicado na identificação das não-linearidades presentes em um autofalante. Nesta aplicação, os autores destacam a eficiência da representação NARMAX na reprodução das não-linearidades presente em altofalantes e a precisão obtida com um número relativamente pequeno de termos.

Outra aplicação importante da representação NARMAX pode ser vista em (Jácome e Aguirre, 1996) onde autores apresentam a capacidade da representação NARMAX reproduzir as características estáticas de ganho de uma válvula para controle de processos.

Além das aplicações citadas acima, pode-se destacar a identificação de um forno elétrico em (Rodrigues, 1996) que será objeto de estudo no capítulo 5, e a identificação do circuito de Chua (Rodrigues, 1996) que será visto no capítulo 6.

## 2.8. Comentários Finais

Este capítulo apresentou pontos que devem ser considerados na obtenção de modelos NARMAX polinomiais. Procurou-se enfocar os passos que devem ser seguidos para obter tais modelos.

Um dos principais problemas a ser considerado na obtenção de modelos NARMAX é a escolha adequada do tempo de amostragem. O tempo de amostragem deve ser tal que, os dados de identificação possibilitem obter modelos que reproduzam o sistema na faixa de frequência de interesse e não provoquem instabilidade numérica.

Outro ponto abordado refere-se à escolha do sinal de excitação, de forma a garantir a excitação do sistema na faixa de frequência de interesse, e que os dados contenham informação de toda não linearidade presente no sistema que se deseja modelar.

Outra etapa abordada é a seleção de estrutura. Neste caso foram apresentados os conceitos de agrupamento de termos, coeficientes de agrupamentos e pontos fixos que auxiliam nesta escolha. O algoritmo “ERR” foi descrito como ferramenta importante para a escolha da estrutura e estimação de parâmetros.

A validação do modelo é a etapa final na obtenção dos modelos, através dela pode-se avaliar a capacidade do modelo de reproduzir o comportamento observado no sistema que se deseja identificar.

Ao final do capítulo foram citadas algumas aplicações da representação NARMAX. Pode ser visto que a representação NARMAX vem sendo usada na identificação de sistemas físicos de naturezas diferentes como: sistemas térmicos, humanos, de áudio, ressaltando sua valiosa contribuição na identificação de sistemas.

## Capítulo 3

# Identificação de Sistemas Usando a Representação NARMAX Racional

### 3.1. Introdução

O modelo racional pode ser considerado como o avanço natural depois do modelo linear e do modelo polinomial não linear. Alguns autores têm argumentado que uma das vantagens do modelo racional é a eficiência com que várias não linearidades podem ser descritas (Billings e Zhu, 1991).

Funções racionais são muito mais gerais e capazes de representar com exatidão certos tipos de singularidades, ou características próximas de singular, e operam em faixas infinitas. Funções racionais possuem boa propriedade de extrapolação, são fáceis para avaliar e incluem funções polinomiais como caso especial (Zhu e Billings, 1993). Funções racionais estáticas têm tido sucesso quando usadas para aproximar funções não lineares típicas como  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $\sqrt{x}$  e  $|x|$  (Braess, 1986). As representações racionais dinâmicas foram utilizadas na identificação de sistemas dinâmicos discretos em (Billings e Chen 1989; Billings e Zhu 1991, Zhu e Billings 1991) e em (Gouesbet e Letellier, 1994) na identificação de sistemas contínuos.

Uma desvantagem do modelo racional é sua não linearidade nos parâmetros, o que torna a estimação de parâmetros mais complexa. O algoritmo dos mínimos quadrados pode ser aplicado em situações em que os dados estão livres de ruído, o que na prática não é suposição realista (Billings e Zhu, 1991).

Para a estimação dos parâmetros do modelo racional várias alternativas foram buscadas dentre elas destaca-se: predição do erro (PE - “prediction error”) (Billings e Chen, 1989), Estimador de Modelo Racional (RME - “Rational Model Estimator”) (Billings e Zhu, 1991) e Estimador de Modelo Racional Regularizado (RRME - “Regularized Rational Model Estimator”)(Mao e Billings, 1996).

Esta seção tem o objetivo de fazer uma introdução preliminar sobre modelos racionais. Inicia-se com uma breve descrição do modelo racional e a seguir descreve-se o algoritmo usado para estimação de parâmetros e detecção de estrutura.

## 3.2. O Modelo Racional

### 3.2.1. Descrição de Entrada-Saída

Um modelo racional estocástico de entrada e saída é definido com a razão de dois polinômios envolvendo o passado das entradas, saídas e ruído, como (Billings e Chen, 1989):

$$y(t) = \frac{a(y(t-1), \dots, y(t-r), u(t-1), \dots, u(t-r), e(t-1), \dots, e(t-r))}{b(y(t-1), \dots, y(t-r), u(t-1), \dots, u(t-r), e(t-1), \dots, e(t-r))} + e(t) \quad (3.1)$$

onde  $u(t)$  e  $y(t)$  representam, respectivamente, a entrada e a saída nos instantes discretos  $t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ),  $r$  é a ordem do modelo (onde se supõe que todos os termos possuem o mesmo número de atraso) e  $e(t)$  é um ruído independente não observável igualmente distribuído com média zero e variância finita  $\sigma_e^2$ .

Para simplificar a utilização da equação (3.1) definem-se os polinômios do numerador e denominador, respectivamente como:

$$a(t) = \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(t) \theta_{nj} , \quad (3.2)$$

$$b(t) = \sum_{j=1}^{den} p_{dj}(t) \theta_{dj} , \quad (3.3)$$

onde  $p_{nj}(t)$ ,  $p_{dj}(t)$  são os coeficientes de  $y(t-1), \dots, y(t-r), u(t-1), \dots, u(t-r), e(t-1), \dots, e(t-r)$  e o número total de parâmetros a ser estimado é  $num + den$ .

### 3.3. Expressão Linear nos Parâmetros

Identificação baseada no modelo da equação (3.1) é complicada, pois esta é não linear nos parâmetros. Uma alternativa é a multiplicação da equação (3.1) pôr  $b(t)$  em ambos os seus lados e a movimentação de todos os termos para o lado direito com exceção de  $y(t)p_{d1}(t)\theta_{d1}$  obtendo, como em (Zhu e Billings, 1991):

$$\begin{aligned} Y(t) &= a(t) - y(t) \sum_{j=2}^{den} p_{dj}(t)\theta_{dj} + b(t)e(t) \\ &= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(t)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} y(t)p_{dj}(t)\theta_{dj} + \zeta(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} Y(t) &= y(t)p_{d1}\big|_{\theta_{d1}=1} \\ &= p_{d1}(t) \frac{a(t)}{b(t)} + p_{d1}(t)e(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

e

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= b(t)e(t) \\ &= \left( \sum_{j=1}^{den} p_{dj}(t)\theta_{dj} \right) e(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco como definido em (3.1), e pelo fato de  $e(t)$  ser independente de  $b(t)$  e ter média nula, tem-se:

$$E[\zeta(t)] = E[b(t)]E[e(t)] = 0. \quad (3.7)$$

A Eq. (3.4) mostra que todos os termos  $y(t)p_{dj}(t)$  incluem implicitamente o termo de ruído  $e(t)$ , através de  $y(t)$ , que é altamente correlacionado com  $\zeta(t)$  o que resultará em polarização dos parâmetros mesmo se  $e(t)$  for um ruído branco com média zero. Este problema aparece quando se multiplica a Eq. (3.1) por  $b(t)$  a fim de tornar o modelo linear nos parâmetros.

A Eq. (3.4) pode se expressa como:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(t)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} y(t)p_{dj}\theta_{dj} + b(t)e(t) \\ &= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(t)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} \frac{a(t)}{b(t)}p_{dj}(t)\theta_{dj} + p_{d1}(t)e(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Em notação vetorial tem-se:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \phi(t)\theta + \zeta(t) \\ &= \hat{\phi}(t)\theta + p_{d1}(t)e(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(t) &= [\phi_n(t) \quad \phi_d(t)] \\ &= [p_{n1}(t) \quad \cdots \quad p_{nnum}(t) \quad -p_{d2}(t)y(t) \quad \cdots \quad -p_{dden}(t)y(t)] \\ &= \left[ p_{n1}(t) \quad \cdots \quad p_{nnum}(t) \quad -p_{d2}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right) \quad \cdots \quad -p_{dden}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \theta^T &= [\theta_n \quad \theta_d] \\ &= [\theta_{n1} \quad \cdots \quad \theta_{nnum} \quad \theta_{d2} \quad \cdots \quad \theta_{dden}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t) &= [\hat{\phi}_n(t) \quad \hat{\phi}_d(t)] \\ &= \left[ p_{n1}(t) \quad \cdots \quad p_{nnum}(t) \quad -p_{d2}(t)\frac{a(t)}{b(t)} \quad \cdots \quad -p_{dden}(t)\frac{a(t)}{b(t)} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nota-se que a matriz  $\hat{\phi}(t)$  não pode ser obtida diretamente porque  $a(t)/b(t)$  não pode ser medido, ao passo que a matriz  $\phi(t)$  pode ser montada exclusivamente a partir dos valores medidos de  $y(t)$  e  $u(t)$ .

### 3.4. Estimação de Parâmetros

A razão principal para a expansão do modelo racional em uma expressão linear nos parâmetros é o de desenvolver uma rotina de estimação de parâmetros utilizando mínimos quadrados (Billings e Zhu, 1991).

A rotina que será descrita a seguir foi proposta em (Billings e Zhu, 1991), tendo sido desenvolvida considerando que a estrutura do modelo é conhecida a priori. Na seção 3.7 uma rotina para escolha de estrutura é descrita.

#### 3.4.1. Estimador Usando Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando diretamente a equação dos mínimos quadrados tem-se:

$$\hat{\Theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y, \quad (3.13)$$

onde:

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} P(1)^T & \cdots & P(N)^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{n1}(1) & \cdots & p_{n1}(N) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{num}(1) & \cdots & p_{num}(N) \\ -p_{d2}(1) \left( \frac{a(1)}{b(1)} + e(1) \right) & \cdots & p_{d2}(N) \left( \frac{a(N)}{b(N)} + e(N) \right) \\ \vdots & & \vdots \\ -p_{den}(1) \left( \frac{a(1)}{b(1)} + e(1) \right) & \cdots & p_{den}(N) \left( \frac{a(N)}{b(N)} + e(N) \right) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

e

$$Y = [Y(1) \ \dots \ Y(N)]^T. \quad (3.15)$$

Onde  $N$  indica o número de amostras, e conforme (3.1)  $\Phi$  pode incluir termos de ruído.

### 3.4.2. Polarização de $\hat{\Theta}$

A estimação dos parâmetros de um modelo linear nos parâmetros do tipo  $y(t) = p^T \Theta + e(t)$  pode ser obtida pelas equações:

$$\begin{aligned} y &= P \Theta + e, \\ \hat{\Theta} &= A y, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $P$  é a matriz dos regressores e  $A$  é uma matriz cujos elementos dependem de alguma maneira dos regressores. Os parâmetros estimados não estarão polarizados se:

$$\begin{aligned} E[Ay] - \Theta &= 0, \\ &= E[A(P \Theta + e)] - \Theta, \\ &= E[AP - I] \Theta + E[Ae], \\ &= (E[AP] - I) \Theta + E[Ae], \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\Theta$  foi considerado determinístico. Da equação (3.17) verifica-se que a polarização será nula se:

- $E[AP] = I$ ,
- os elementos de  $A$  não forem correlacionados com o ruído,
- o ruído possuir média nula.

Analisando o estimador de mínimos quadrados (3.13) e a propriedade do limite da probabilidade (Wilks, 1962) para duas matrizes  $A$  e  $B$ , ambas funções das mesmas variáveis aleatórias, tem-se

$$P \lim (A \ B) = P \lim A \ P \lim B . \quad (3.18)$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} A &\equiv P \lim \left[ \frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right] e \\ B &\equiv P \lim \left[ \frac{1}{N} \Phi^T Y \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

existem, e aplicando a propriedade citada acima encontra-se:

$$\begin{aligned} P \lim [\hat{\Theta}] &= P \lim \left[ \left[ \Phi^T \Phi \right]^{-1} \Phi^T Y \right] \\ &= P \lim \left[ \Phi^T \Phi \right]^{-1} P \lim \left[ \Phi^T Y \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assumindo que as seqüências de entrada e saída são estacionárias e que o comprimento dos dados  $N$  é suficientemente grande, tem-se:

$$\begin{aligned} P \lim \left[ \frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right] &\approx \frac{1}{N} \Phi^T \Phi \\ P \lim \left[ \frac{1}{N} \Phi^T Y \right] &\approx \frac{1}{N} \Phi^T Y, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\Phi^T \Phi = & \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N p_{n1}^2(t) & \cdots & \sum_{k=1}^N p_{n1}(t)p_{nnum}(t) & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{n1}(t)p_{d2}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{n1}(t)p_{dden}(t)\frac{a(t)}{b(t)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^N p_{nnum}(t)p_{n1}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^N p_{nnum}^2(t) & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{nnum}(t)p_{d2}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{nnum}(t)p_{dden}(t)\frac{a(t)}{b(t)} \\ -\sum_{k=1}^N p_{d2}(t)p_{n1}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d2}(t)p_{nnum}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d2}^2(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d2}(t)p_{dden}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\sum_{k=1}^N p_{dden}(t)p_{n1}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{dden}(t)p_{nnum}(t)\frac{a(t)}{b(t)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{dden}(t)p_{d2}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{dden}^2(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{d2}^2(t) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{dden}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{dden}(t)p_{d2}(t) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{dden}^2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi^T \mathbf{Y} = & \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N p_{n1}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^N p_{nnum}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right) \\ \sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^N p_{dden}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} + e(t)\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N p_{n1}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^N p_{nnum}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right) \\ \sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^N p_{dden}(t)p_{d1}(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)}\right)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{d1}(t) \\ -\sigma_e^2 \sum_{t=1}^N p_{dden}(t)p_{d1}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Então para  $N \rightarrow \infty$  a estimativa de  $\hat{\Theta}$  converge em probabilidade para  $[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{Y}$ .

Rescrevendo a equação (3.23), usando notação matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi^T \Phi &= [\Phi^T \Phi]_{t-1} + \sigma_e^2 \Psi \\
\Phi^T \mathbf{Y} &= [\Phi^T \mathbf{Y}]_{t-1} + \sigma_e^2 \psi,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sum_{t=1}^N p_{d2}^2(t) & \cdots & \sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{den}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sum_{t=1}^N p_{den}(t)p_{d2}(t) & \cdots & \sum_{t=1}^N p_{den}^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.25a)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sum_{t=1}^N p_{d2}(t)p_{d1}(t) \\ -\sum_{t=1}^N p_{den}(t)p_{d1}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.25b)$$

Todos os termos envolvendo  $e(t)$  aparecem em  $\sigma_e^2 \Psi$  e  $\sigma_e^2 \psi$ , que são os termos de ruído. O subscrito  $(t-1)$  indica que apenas termos de ruído até  $(t-1)$  estão presentes (desde que  $e(t-j), j \leq 1$ ) (Billings e Zhu, 1991).

O estimador de parâmetros dado em (3.13) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y \\ &= \left[ [\Phi^T \Phi]_{t-1}^{-1} + \sigma_e^2 \Psi \right]^{-1} \left[ [\Phi^T Y]_{t-1} + \sigma_e^2 \psi \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Fazendo analogia entre a equação (3.26) e a (3.17) verifica-se que  $[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T$  não poderia estar correlacionada com o ruído para se evitar a polarização do estimador.

A equação (3.26) mostra que a linearização nos parâmetros do modelo racional induz a dois termos adicionais  $\sigma_e^2 \Psi$  e  $\sigma_e^2 \psi$ , provando a correlação entre  $[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T$  e o ruído. Isto,

conforme demonstrado no início desta seção, causa polarização na estimação dos parâmetros, mesmo se a sequência  $e(t)$  for branca. Este problema surge porque os termos  $y(t)p_{\hat{d}}(t)$  em (3.4) contêm implicitamente  $e(t)$  (Billings e Zhu, 1991).

### 3.4.3. Estimador de Mínimos Quadrados para o Modelo Racional - RME

O algoritmo de mínimos quadrados estendido para modelos com equações lineares diferenciais tem sido exaustivamente usado ao longo dos anos (Goodwin e Payne 1977, Norton 1986, Ljung 1987). Ponto comum em todos os algoritmos é que a correlação do vetor de resíduos é reduzida pela incorporação do modelo de ruído na matriz dos regressores.

Este procedimento é um método iterativo onde os parâmetros dos termos de processo e dos termos de ruído são estimados até a polarização ser reduzida a níveis aceitáveis. Na Figura 3.1 tem-se o algoritmo sugerido em (Billings e Zhu, 1991), para implementação do método acima.

O algoritmo proposto na Figura 3.1 foi implementado durante a realização deste trabalho. Detalhes da sua implementação estão descritos no capítulo 4 e os resultados obtidos estão apresentados nos capítulos 4, 5 e 6.

## 3.5. Estudo dos Agrupamentos de Termos para o Modelo Racional

O modelo racional é um caso mais geral da representação NARMAX polinomial, podendo o modelo polinomial ser citado como um caso particular da representação racional. Desta forma a descrição feita no capítulo 2 a respeito dos agrupamentos de termos e pontos fixos para o modelo polinomial são válidas para o modelo racional, diferenciando os agrupamentos de termos do numerador e denominador conforme definições em (Mendes, 1995).

1º passo. Usar um algoritmo de mínimos quadrados ordinários (OLS) para computar:

$$\hat{\Theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y$$

Esta estimação fornece os valores iniciais dos parâmetros para os cálculos seguintes.

2º passo. Calcular a seqüência de resíduos

$$\xi(t) = y(t) - \frac{a(\dots, \hat{\Theta}(i-1))}{b(\dots, \hat{\Theta}(i-1))}.$$

Estimar a variância dos resíduos  $\hat{\sigma}_\xi^2$  como

$$\hat{\sigma}_\xi^2(i) = \frac{1}{N - md} \sum_{t=md+1}^N \left( y(t) - \frac{a(\dots, \hat{\Theta}(i-1))}{b(\dots, \hat{\Theta}(i-1))} \right)^2,$$

onde  $i$  é o número da interação,  $N$  o número de amostras e  $md$  é o máximo atraso presente nos termos.

3º passo. Utilizando as equações (3.22), (3.23), (3.25a) e (3.25b), atualize as matrizes  $\Phi^T \Phi$  e  $\Psi$ , vetores  $\Phi^T Y$  e  $\psi$  usando a seqüência de resíduos calculada no 2º passo. Note que em tais matrizes os resíduos podem aparecer dentro dos polinômios  $a(t)$  e  $b(t)$ .

4º passo. Calcule os novos parâmetros como

$$\hat{\Theta}(i) = [\Phi^T \Phi - \sigma_\xi^2(i) \Psi]^{-1} [\Phi^T Y - \sigma_\xi^2(i) \psi].$$

5º passo. Retorne ao passo (2) e repita até os parâmetros estimados e  $\hat{\sigma}_\xi^2$  convergir em um valor constante.

Figura 3.1 Algoritmo de Mínimos Quadrados Estendido proposto em (Billings e Zhu, 1991)

A equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$y(t) = \frac{\sum_{m=0}^{l^\alpha} \sum_{p=0}^m \sum_{n_1^\alpha, n_m^\alpha}^{n_y^\alpha, n_u^\alpha} \alpha_{p,m-p}(n_{1_1}^\alpha, \dots, n_m^\alpha) \prod_{i=1}^p y(t - n_i^\alpha) \prod_{i=p+1}^m u(t - n_i^\alpha)}{\sum_{m=0}^{l^\beta} \sum_{p=0}^m \sum_{n_1^\beta, n_m^\beta}^{n_y^\beta, n_u^\beta} \beta_{p,m-p}(n_{1_1}^\beta, \dots, n_m^\beta) \prod_{i=1}^p y(t - n_i^\beta) \prod_{i=p+1}^m u(t - n_i^\beta)} \quad (3.27)$$

Esta equação é similar à equação (2.16) definida para o modelo polinomial. Da equação (3.27) os conceitos de agrupamentos de termos são definidos como (Mendes, 1995a):

**Definição 3.5.1.** *Agrupamentos de Termos do Numerador*

As constantes  $\sum_{n_1^\alpha, n_m^\alpha}^{n_y^\alpha, n_u^\alpha} \alpha_{p,m-p}(n_{1_1}^\alpha, \dots, n_m^\alpha)$  na equação (3.27) são os coeficientes dos agrupamentos de termos do numerador  $\Omega_{y^{p_u m-p}}^\alpha$ , que contém termos na forma  $y(t-i)^p u(t-j)^{m-p}$  para  $m = 0, \dots, l^\alpha$  e  $p = 0, \dots, m$ . Os coeficientes são chamados de *coeficientes de agrupamentos do numerador* e representados por  $\sum_{y^{p_u m-p}}^\alpha$ .

**Definição 3.5.2.** *Agrupamentos de Termos do Denominador*

As constantes  $\sum_{n_1^\beta, n_m^\beta}^{n_y^\beta, n_u^\beta} \beta_{p,m-p}(n_{1_1}^\beta, \dots, n_m^\beta)$  na equação (3.27) são os coeficientes dos agrupamentos de termos do denominador  $\Omega_{y^{p_u m-p}}^\beta$ , que contém termos na forma  $y(t-i)^p u(t-j)^{m-p}$  para  $m = 0, \dots, l^\beta$  e  $p = 0, \dots, m$ . Os coeficientes são chamados de *coeficientes de agrupamentos do denominador* e representados por  $\sum_{y^{p_u m-p}}^\beta$ .

### 3.6. Número, Localização e Estabilidade dos pontos fixos

Conforme descrito para o modelo polinomial, os pontos fixos do modelo racional são definidos como os pontos para os quais  $y(i) = y(t + i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  são dados pelas raízes do seguinte “polinômio racional agrupado” (Mendes, 1995a)

$$\left[ \beta_{0,0} + y(t) \sum_{n_1^\beta=1}^{n_y^\beta} \beta_{1,0}(n_1^\beta) + y(t)^2 \sum_{n_1^\beta, n_{21}^\beta}^{n_y^\beta, n_y^\beta} \beta_{2,0}(n_1^\beta, n_2^\beta) + \dots + y(t)^{l^\beta} \sum_{n_1^\beta, n_{l1}^\beta}^{n_y^\beta, n_y^\beta} \beta_{l^\beta,0}(n_1^\beta, \dots, n_{l^\beta}^\beta) \right] y(t) =$$

$$\alpha_{0,0} + y(t) \sum_{n_1^\alpha=1}^{n_y^\alpha} \alpha_{1,0}(n_1^\alpha) + y(t)^2 \sum_{n_1^\alpha, n_{21}^\alpha}^{n_y^\alpha, n_y^\alpha} \alpha_{2,0}(n_1^\alpha, n_2^\alpha) + \dots + y(t)^{l^\alpha} \sum_{n_1^\alpha, n_{l1}^\alpha}^{n_y^\alpha, n_y^\alpha} \alpha_{l^\alpha,0}(n_1^\alpha, \dots, n_{l^\alpha}^\alpha).$$
(3.28)

Nota-se que o polinômio acima possui apenas termos de saída, que é a condição para se determinar os pontos fixos, conforme relatado no capítulo 2.

Usando a definição de coeficientes de agrupamentos para o numerador e denominador e retirando o argumento  $t$ , a equação (3.28) pode ser escrita como a seguir

$$\left( \sum_{y^{l-1}}^\beta - \sum_{y^l}^\alpha \right) y^l + \dots + \left( \sum_{y^1}^\beta - \sum_{y^2}^\alpha \right) y^2 + \left( \sum_0^\beta - \sum_y^\alpha \right) y + \sum_0^\alpha = 0,$$
(3.29)

onde o grau de não-linearidade  $l$  é definido com o máximo valor entre  $l^\alpha$  e  $(l^\beta + 1)$ . Portanto o número de pontos fixos do modelo racional é  $l$ .

Observe que na equação (3.29) os agrupamentos de ordem  $(l - 1)$  do denominador são agrupados com os de ordem  $(l)$  do numerador, isto se dá porque os termos do denominador são sempre multiplicados por  $y(i)$ .

A Tabela 3.1, reproduzida de Mendes (1995a), apresenta o número de pontos fixos triviais em função dos agrupamentos de termos do modelo racional.

A estabilidade dos pontos fixos é determinada, no sentido de Lyapunov, a partir dos autovalores da matriz Jacobiana, avaliada nos pontos fixos, da mesma forma que apresentado nas equações (2.20) e (2.21) para o modelo polinomial.

Tabela 3.1 Agrupamento de termos dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna (Mendes, 1995a)

| $l$ | Nº de pontos fixos triviais | Agrupamentos                                                                                                                             |
|-----|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | 1                           | $\Omega_y^\alpha, \Omega_0^\beta$                                                                                                        |
| 2   | 0                           | $\Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha, \Omega_y^\beta$                                                                                   |
| 3   | 1                           | $\Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_y^\alpha, \Omega_{y^2}^\beta, \Omega_0^\beta$                                                               |
| 4   | 0                           | $\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_y^\beta$                                          |
| 4   | 2                           | $\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_y^\beta$                                                           |
| 5   | 1                           | $\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_y^\alpha, \Omega_{y^4}^\beta, \Omega_{y^2}^\beta, \Omega_0^\beta$                      |
| 5   | 3                           | $\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_{y^4}^\beta, \Omega_{y^2}^\beta$                                                       |
| 6   | 0                           | $\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_y^\beta$ |
| 6   | 2                           | $\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_y^\beta$                  |
| 6   | 4                           | $\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^3}^\beta$                                                       |

### 3.7. Determinação de Estrutura

Uma vez obtida uma expressão linear nos parâmetros é possível aplicar para os modelos racionais, com algumas adequações, o algoritmo de ERR descrito na seção 2.5. Desta forma a escolha de estrutura é feita de forma similar à descrita para modelos polinomiais no capítulo 2.

Neste trabalho a escolha dos termos do modelo polinomial foi feita de maneira eficiente utilizando a rotina **ratsm4.m** (ver Apêndice A) desenvolvida em (Mendes, 1995b). Esta rotina utiliza o método ERR e retorna a partir de um par de entrada-saída e de um conjunto de termos candidatos, uma sequência em ordem decrescente dos termos mais significativos, tanto para o numerador quanto para o denominador, na explicação da variância da saída.

### 3.8. Comentários Finais

Este capítulo introduziu os conceitos referentes à representação NARMAX racional. Fez-se uma breve discussão a respeito desta representação, principalmente no que se refere à estimação dos parâmetros.

Discutiu-se a polarização dos parâmetros estimados provocada pela expressão linear nos parâmetros, o que representa uma dificuldade adicional na estimação de parâmetros do modelo racional e na impossibilidade de se utilizar o método dos mínimos quadrados ordinários. A seguir foi apresentado o algoritmo de mínimos quadrados estendido para resolver o problema da polarização, proposto por (Billings e Zhu, 1991).

Revisou-se a determinação dos pontos fixos do modelo racional, de maneira similar à representação polinomial, ou seja, a partir dos coeficientes de agrupamentos de termos. Neste caso, os agrupamentos são divididos em agrupamentos do numerador e denominador, conforme descrito em (Mendes, 1995a).

Finalmente, foi feita uma breve descrição a respeito da determinação da estrutura para os modelos NARMAX racionais. Para escolha da estrutura de modelos NARMAX racionais é possível aplicar a técnica de ERR, similarmente aos modelos NARMAX polinomiais.

# Capítulo 4

## Ambiente Computacional Para Identificação de Modelos Racionais

### 4.1. Introdução

A identificação de modelos NARMAX racionais passa pelos mesmos caminhos utilizados para a obtenção de modelos NARMAX polinomiais. A principal diferença entre estes é que a representação racional é não linear nos parâmetros, o que resulta numa dificuldade adicional. Este fato impede a utilização do algoritmo de mínimos quadrados ordinários para estimação dos parâmetros.

O objetivo deste capítulo é descrever os procedimentos usados na identificação de sistemas usando a representação NARMAX racional. Inicia-se com uma descrição do ambiente computacional sobre o qual foi desenvolvido o trabalho e apresentam-se os passos que devem ser seguidos para obtenção de modelos. O capítulo termina com um exemplo de identificação a partir de dados simulados.

### 4.2. Descrição das Rotinas de Identificação

O MATLAB™ (MathWorks, 1990) foi o ambiente usado para implementação das rotinas computacionais usadas neste trabalho.

O MATLAB é um ambiente de desenvolvimento projetado para simplificar a manipulação computacional de matrizes. O MATLAB interpreta rotinas codificadas em uma linguagem de programação própria de alto-nível. Esta linguagem de programação é estruturada e foi utilizada para implementar internamente ao ambiente uma série de ferramentas úteis no processamento de sinais e na modelagem e controle de sistemas dinâmicos.

O procedimento de identificação de modelos NARMAX racionais segue praticamente os mesmos passos da identificação de modelos NARMAX polinomiais descritos em

(Rodrigues, 1996). Este procedimento pode ser sintetizado pelo fluxograma apresentado na Figura 4.1.

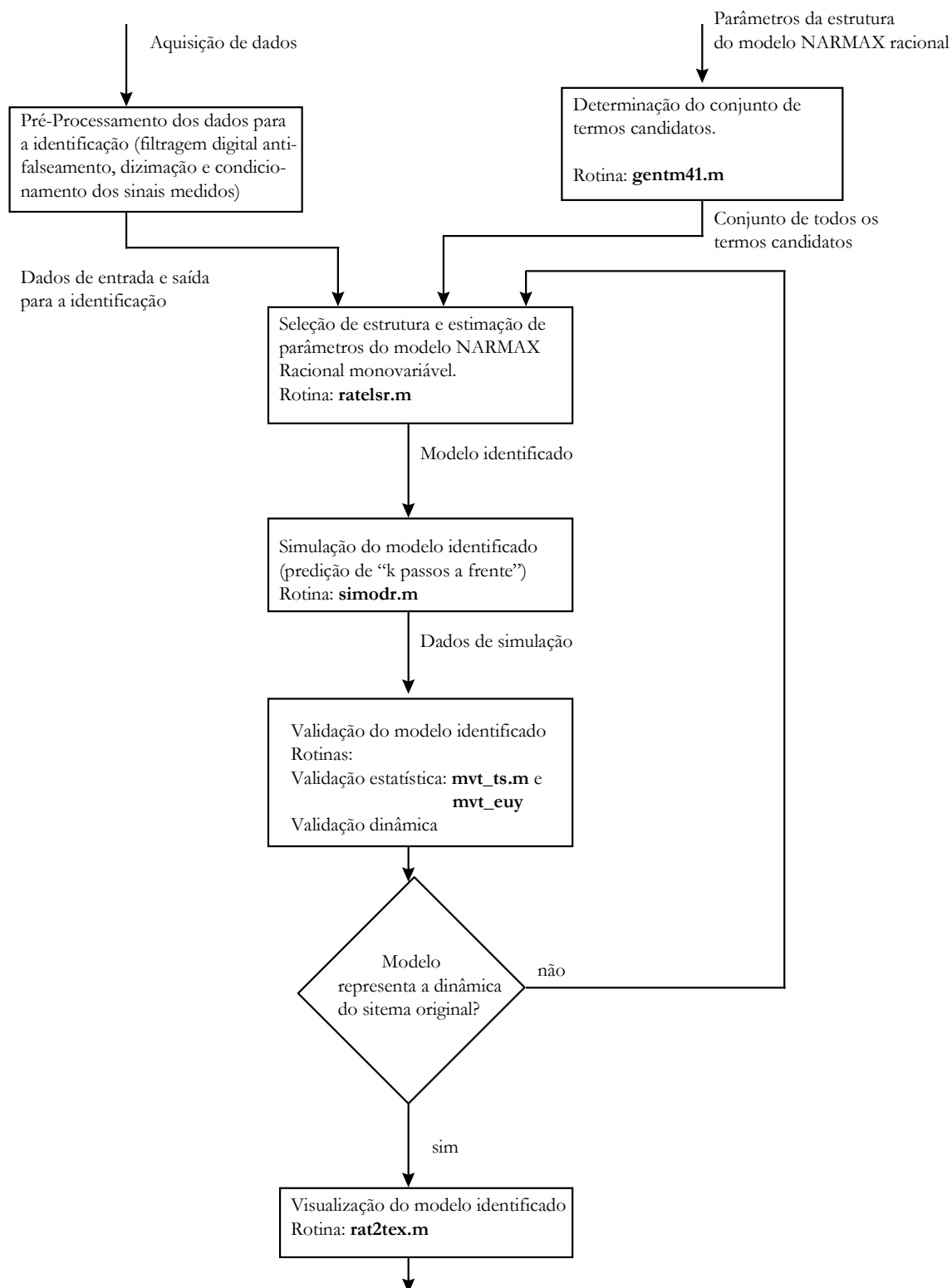


Figura 4.1 Fluxograma do procedimento de identificação de modelos NARMAX racionais.

As rotinas utilizadas neste trabalho podem ser divididas em quatro grupos: (i) rotinas desenvolvidas por (Mendes e Aguirre, 1995) e (Rodrigues, 1996) para identificação de modelos polinomiais, (ii) rotinas desenvolvida por (Mendes, 1995) com aplicação específica para modelos racionais, (iii) rotinas desenvolvidas durante a realização deste trabalho, que visavam atender a algumas demandas específicas e (iv) rotinas internas do MATLAB. Os procedimentos para identificação de modelos podem ser divididos nas seguintes etapas:

- 1 - Obtenção dos dados de identificação
- 2 - Escolha dos termos candidatos
- 3 - Seleção de estrutura e estimação de parâmetros
- 4 - Simulação do modelo
- 5 - Testes de validação

A seguir tem-se uma descrição sucinta de cada passo no processo de identificação de modelos, com as rotinas utilizadas em cada um deles.

### **Passo 1 - Obtenção dos dados de identificação**

O processo de identificação usa dados obtidos a partir da resposta do sistema a uma entrada conhecida. O sinal de entrada é de vital importância para uma boa identificação. Ele deve conseguir excitar o sistema em toda a faixa de frequência de interesse, assim como visitar todas as regiões de interesse para identificação, tendo assim todas informações de não linearidades presentes no sistema.

Além do tipo de sinal de excitação outro fator importante é o tempo de amostragem, conforme descrito na seção 2.3. Como na maioria das situações é impossível saber a priori o tempo de amostragem ideal para a identificação de um sistema, coleta-se dados superamostrados para, através da dizimação dos dados, obter o tempo de amostragem a ser usado. É aplicada uma regra eurística, conforme descrito na seção 2.3.1, para se determinar aproximadamente a faixa do tempo de amostragem a ser usado.

Nesta etapa conta-se com a rotina **mvt\_euy.m**, que retorna, dentre outros, o diagrama de correlação cruzada entre a entrada  $y(t)$ , saída  $u(t)$ , possibilitando aplicar regra descrita em 2.3.1.

## Passo 2 - Escolha dos termos candidatos

Este passo inicia-se com a escolha dos parâmetros da estrutura: grau de não linearidade, número de termos no modelo, número de atraso a se considerar, tanto para termos do numerador quanto para o denominador.

A rotina **gentm41.m** gera um conjunto de termos candidatos a partir da definição de graus de não linearidade requerida e atrasos na entrada, saída e dos resíduos.

## Passo 3 - Seleção de estrutura e estimação de parâmetros

A seleção de estrutura do modelo é feita usando o método ERR, este gera para cada termo candidato um fator correspondente a sua capacidade de explicar a variância do sinal de saída, como descrito na seção 3.7. A seguir os termos mais significativos vão sendo, um a um, introduzidos no modelo, até se obter a reprodução satisfatória da dinâmica contida nos dados de identificação.

Nota-se que a reprodução “satisfatória” da dinâmica dos dados originais é um fator de julgamento subjetivo, que dependerá da aplicação do modelo em questão.

A seleção de estrutura é feita com a rotina **ratsm4.m**. A estimação de parâmetros é feita através de **ratels.m** ou **ratelsr.m**.

A análise dos coeficientes de agrupamentos de termos, para ajuda no processo de determinação da estrutura, quando desejado, é feito com a rotina **coefc.m**. Esta rotina retorna a partir do modelo identificado os coeficientes de agrupamentos, devendo ser usada tanto para o numerador quanto para o denominador.

## Passo 4 - Simulação do modelo

Consiste em simular o modelo com  $k$  passos a frente, possibilitando comparar o modelo identificado com dados de simulação do sistema. Este teste é executado com a rotina **simodr.m**.

### Passo 5 - Testes de validação

Os testes de validação têm o objetivo de estabelecer parâmetros de comparação entre diferentes modelos, assim como quantificar o quão eficiente é o modelo na representação da dinâmica do sistema a ser identificado.

Os testes de validação são divididos em dois grupos: (i) validação estatística e (ii) validação dinâmica.

A validação estatística é feita com testes de autocorrelação e correlação entre os resíduos de identificação e o sinal de saída, linear e não linear conforme descrito na seção 2.7. Um modelo será válido estatisticamente se os resíduos de identificação não contiverem correlação com ele mesmo e nem com a saída, tanto na validação linear quanto não linear.

A validação estatística é feita através das rotinas **mvt\_ts.m** e **mvt\_euy.m**, que geram gráficos de correlação para as séries passadas como argumento.

## 4.3. Análise das Rotinas de Identificação

A rotina central no processo de identificação do modelo racional é **ratsm4.m**. Esta rotina além de aplicar o método ERR para determinação da estrutura, também estima os parâmetros do modelo através do método dos mínimos quadrados ordinários. Esta rotina porém, por não considerar a possibilidade de inclusão de termos de ruído se mostrou ineficiente para estimação de parâmetros para sistemas reais.

A estimação de parâmetros pode ser feita através de duas rotinas que utilizam métodos diferentes, e partem da seleção de estrutura feita em **ratsm4.m**.

A rotina **ratels.m** estima os parâmetros do modelo utilizando um caso particular do RME - Estimador para Modelos Racionais - descrito na seção 3.4.3. O algoritmo utilizado e os principais códigos em MATLAB, estão apresentados na Figura 4.2. Observa-se que a matriz de regressores **P** foi obtida a partir de **ratsm4.m**, por isso não incorpora termos de ruído. No 3º passo, apenas as matrizes  $\psi$  e  $\Psi$ , são atualizadas, diferente da proposta do algoritmo proposto em (Billings e Zhu, 1991) veja Figura 3.1, onde deve-se atualizar também a matriz de regressores em função destas conterem os termos de ruído.

A rotina **ratelsr.m** utiliza a estrutura do RME, de forma similar a **ratles.m**, porém introduz termos de ruídos. Estes termos entram aditivamente na matriz de regressores **P** obtida com **ratism4.m**, conforme pode ser visto na Figura 4.3. A principal alteração feita nesta rotina esta localizada no 4º passo, onde uma matriz para termos de ruído é acrescentada à matriz de regressores **P**.

Uma outra variável é introduzida no processo de identificação: a possibilidade de se escolher a estrutura para os termos de ruído. Neste trabalho a escolha de termos de ruído foi feita de forma não sistemática, em geral optou-se apenas por acrescentar termos lineares de ruído.

Conforme será visto na seção 4.3.1. a rotina **ratelsr.m** se mostrou bastante eficiente na estimação de parâmetros.

### 4.3.1. Estimação dos parâmetros para o modelo racional

Nesta seção o procedimento de estimação de parâmetros através das rotinas descritas na seção anterior são discutidos através de um exemplo simulado. Gerou-se uma massa de teste a partir de um modelo conhecido com 500 pares de entrada e saída, sendo os resultados apresentados a seguir.

#### Exemplo 4.1

Neste exemplo não houve a preocupação de escolher a estrutura, aqui deseja-se apenas verificar a eficiência das rotinas na estimação dos parâmetros.

Modelo usado para gerar os dados

$$y(t) = \frac{0,2y(t-1) + 0,1y(t-1)u(t-1) + u(t-1)}{1 + y^2(t-1) + y^2(t-2)} + e(t) \quad (4.1)$$

Onde  $e(t)$  é um ruído branco com média zero, variância  $8,34 \times 10^{-6}$ , amplitude variando de  $\pm 5,0 \times 10^{-3}$  com uma relação sinal/ruído<sup>1</sup> (SNR) de 73,38 dB.  $u(t)$  é um ruído quantizado.

---

<sup>1</sup> A definição empregada aqui é:  $SNR \text{ (dB)} = 20 \log(\text{var}(y(t))/\text{var}(e(t)))$ , onde  $\text{var}$  indica variância,  $y(t)$  é o sinal medido e  $e(t)$  é o ruído acrescentado ao sinal  $y(t)$ .  $\log$  indica logaritmo decimal.

## ALGORITMO - RME sem termos de ruído

## 1º Passo

Estimação dos coeficientes iniciais e obtenção da matriz de regressores

```
[xn,xd,num,den,ve,va,Pn,Pd]=ratsm4m1(modeln,modeld,u,y,np,[0 0 0], 'y');
```

```
P=[Pn -Pd];
```

```
x=inv(P'*P)*P'*yt;
```

## 2º Passo

Cálculo dos resíduos

```
e=yt-P*x;
```

Obtenção da variância

```
var=cov(e);
```

## 3º Passo

Construção das matrizes  $\psi$  e  $\Psi$

```
SIGMA=zeros(cP,cP);
```

```
aux1=Pd'*Pd;
```

```
SIGMA(cP+1-cPd:cP,cP+1-cPd:cP)=aux1;
```

```
sigma=zeros(cP,1);
```

```
for ii=1:cPd
```

```
    aux2(ii,:)=sum(Pd(:,ii));
```

```
end
```

```
sigma(cP+1-cPd:cP,1)=-aux2;
```

## 4º Passo

Nova estimação dos coeficientes

```
x=inv(P'*P-var*SIGMA)*(P'*yt-var*sigma);
```

## 5º Passo

Retorno ao segundo passo até a convergência.

Figura 4.2 Códigos usados na rotina ratels.m

## ALGORITMO - RME Modificado

## 1º Passo

Estimação dos coeficientes iniciais e obtenção da matriz de regressores

```
[xn,xd,num,den,ve,va,Pn,Pd]=ratsm4m1(modeln,modeld,u,y,np,[0 0 0], 'y');
```

```
P=[Pn -Pd];
```

```
x=inv(P'*P)*P'*yt;
```

## 2º Passo

Cálculo dos resíduos

```
e=yt-P*x;
```

Obtenção da variância

```
var=cov(e);
```

## 3º Passo

Construção das matrizes  $\psi$  e  $\Psi$ .

```
SIGMA=zeros(cP,cP);
```

```
aux1=Pd'*Pd;
```

```
SIGMA(cP+1-cPd:cP,cP+1-cPd:cP)=aux1;
```

```
sigma=zeros(cP,1);
```

```
for ii=1:cPd
```

```
    aux2(ii,:)=sum(Pd(:,ii));
```

```
end
```

```
sigma(cP+1-cPd:cP,1)=-aux2;
```

Introdução de termos de ruído na matriz de regressores P

```
Pr=build_noise(ruido,e,e,e);
```

```
P=[Pn -Pd Pr];
```

## 4º Passo

Nova estimação dos coeficientes

```
x=inv(P'*P-var*SIGMA)*(P'*yt-var*sigma);
```

## 5º Passo

Retorno ao segundo passo até a convergência.

Figura 4.3 Códigos usados na rotina ratelsr.m

Através deste exemplo são apresentados resultados de estimação de parâmetros utilizando as três estratégias diferentes para estimação dos parâmetros, ou seja, (i) estimação por mínimos quadrados - rotina **ratism4.m**, (ii) utilizando RME sem termos de ruído - rotina **ratles.m** e (iii) RME Modificado - rotina **ratelsr.m**. Em todos os testes partiu-se de uma estrutura conhecida. Os dados usados na identificação estão apresentados na Figura 4.4.

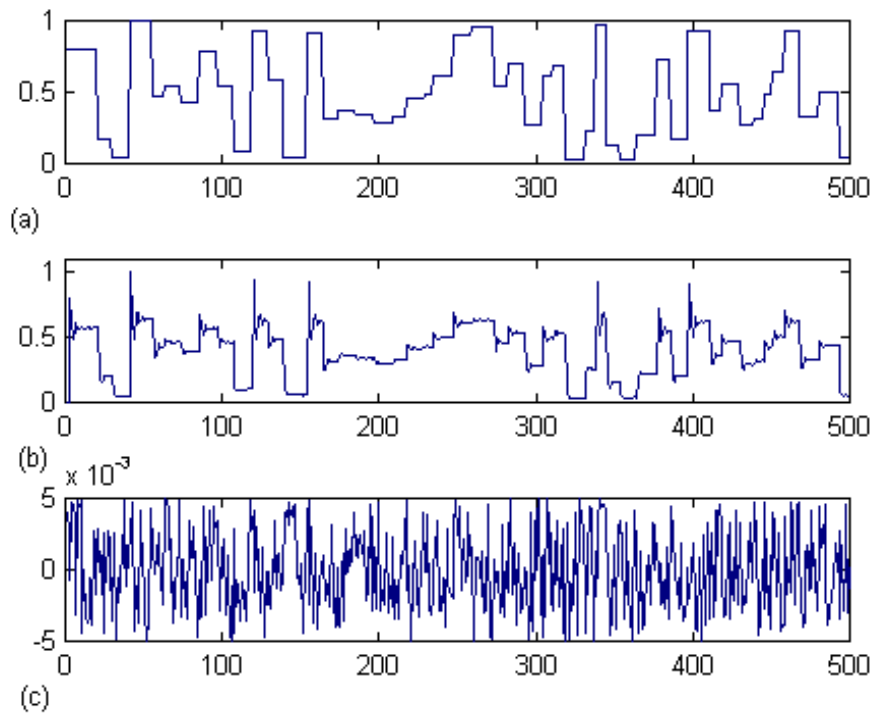


Figura 4.4(a) sinal  $u(t)$ ; (b) sinal  $y(t)$ , simulado a partir do modelo; (c) sinal  $e(t)$  adicionado a  $y(t)$

#### (i) - Estimação por mínimos quadrados ordinário - Rotina: **ratism4.m**.

Neste caso utilizou-se a rotina original **ratism4.m**, que não prevê termos de ruído. O resultado deste procedimento pode ser verificado na Tabela 4.1 onde se verifica que o estimador não conseguiu estimar os parâmetros do modelo inicial. Note também que os resíduos de identificação estão correlacionados (Figura 4.5), o que invalida estatisticamente o modelo.

Tabela 4.1 Resultado da estimação usando mínimos quadrados ordinário rotina **ratsm4.m**

|                    | Termos do numerador |          |                | Termos do denominador |                |                |
|--------------------|---------------------|----------|----------------|-----------------------|----------------|----------------|
|                    | $u(t-1)$            | $y(t-1)$ | $y(t-1)u(t-1)$ |                       | $y(t-2)y(t-2)$ | $y(t-1)y(t-1)$ |
| Parâmetro Estimado | 1,0127              | 0,1977   | -0,0151        | 1,0000                | 0,9375         | 0,8321         |
| Valor Real         | 1,0000              | 0,2000   | 0,1000         | 1,0000                | 1,0000         | 1,0000         |

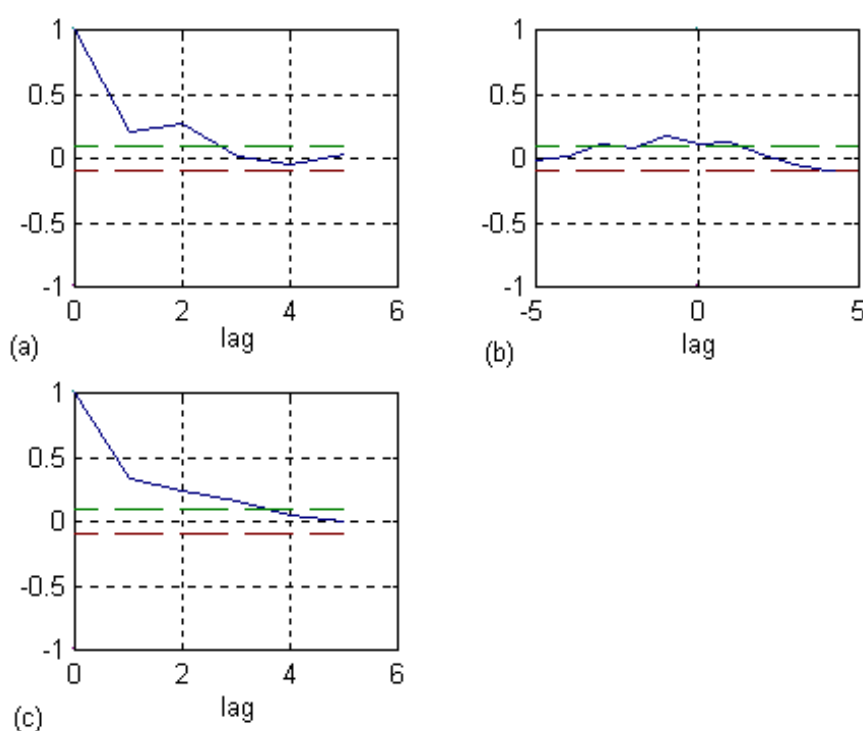


Figura 4.5 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando OLS. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $\xi(t) \times \xi'(t)$ ; (c)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$

Nos testes de correlação a apóstrofe representa que o valor médio do sinal foi extraído. As linhas tracejadas delimitam os intervalos probabilísticos.

## (ii) - Estimação usando RME - rotina **ratels.m**.

Neste caso utiliza-se a rotina **ratels.m**, desenvolvida com base no algoritmo descrito na seção 3.4.3 para a estimação dos parâmetros. Esta rotina utiliza **ratsm4.m** para seleção da estrutura e retorna os coeficientes estimados a cada iteração, assim como os respectivos resíduos de identificação.

O resultado da utilização desta rotina, no exemplo em questão, pode ser verificado na Tabela 4.2. Observa-se que ocorre convergência a partir da quarta interação, com sensível melhora dos valores estimados dos parâmetros. No teste de correlação, Figura 4.6, observa-se que os resíduos se encontram ainda correlacionados. Este fato já era esperado devido a ausência de termos de ruído durante a fase de estimação de parâmetros.

**(iii) - Identificação com RME Modificado com termos lineares de ruído - rotina `ratelsr.m`.**

Neste caso utilizou-se a rotina **`ratelsr.m`** que adota uma estrutura linear para os termos de ruído. A estrutura usada para estimação dos parâmetros é a seguinte:

$$Y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-1)u(t-1) + a_3 u(t-1) - b_2 y(t)y^2(t-1) - b_3 y(t)y^2(t-2) + \sum_{i=1}^6 \theta_i \xi(t-i) + \xi(t) \quad (4.2)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são os parâmetros do modelo a serem estimados,  $Y(t) = y(t)$  pois o primeiro termo do denominador é  $b_1 = 1$ ,  $\xi(t-i)$  são os termos de ruído.

Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados obtidos com este método. Observa-se uma melhora nos parâmetros estimados ficando mais próximos dos valores reais. No teste de correlação dos resíduos, Figura 4.7, verifica-se que a correlação linear se encontra dentro do intervalo probabilístico. O fato de apresentarem uma pequena correlação não linear fora deste intervalo pode indicar que existe dinâmica não linear, não modelada. Este problema talvez pudesse ser eliminado se fossem adicionados termos não lineares de ruído ao modelo.

Tabela 4.2 Resultado da estimação usando RME sem termos de ruído.

|            | Termos do numerador |          |                | Termos do denominador |                |                |
|------------|---------------------|----------|----------------|-----------------------|----------------|----------------|
|            | $u(t-1)$            | $y(t-1)$ | $y(t-1)u(t-1)$ |                       | $y(t-2)y(t-2)$ | $y(t-1)y(t-1)$ |
| 1          | 1,0051              | 0,1992   | 0,0471         | 1,0000                | 0,9706         | 0,9213         |
| 2          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0481         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9227         |
| 3          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0481         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 4          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 5          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 6          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 7          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 8          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| 9          | 1,0050              | 0,1992   | 0,0482         | 1,0000                | 0,9712         | 0,9228         |
| Valor Real | 1,0000              | 0,2000   | 0,1000         | 1,0000                | 1,0000         | 1,0000         |

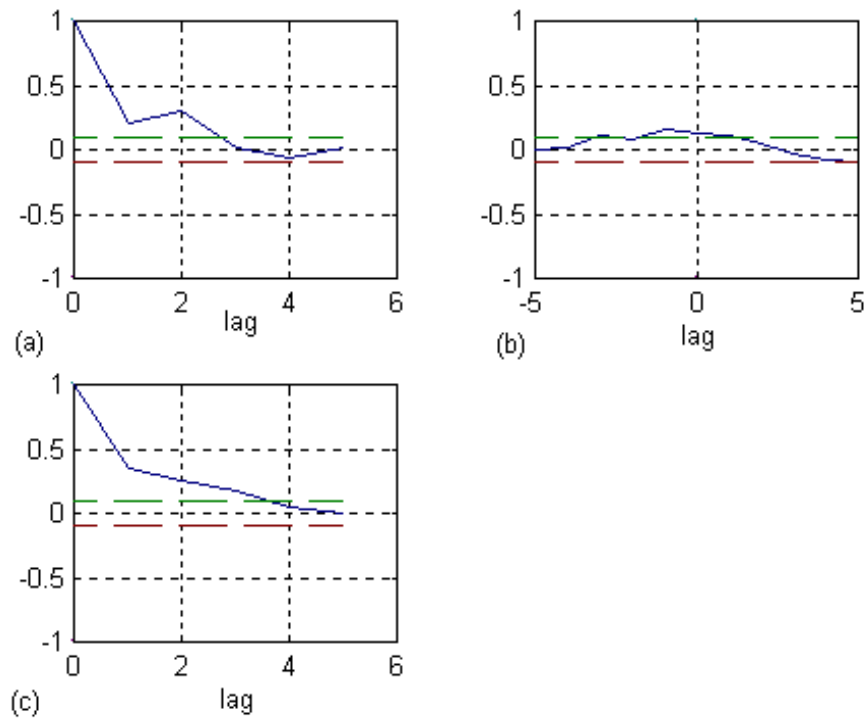


Figura 4.6 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando RME sem termos de ruído. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $\xi(t) \times \xi'(t)$ ; (c)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$

Tabela 4.3 Resultado da estimação usando RME Modificado com termos lineares de ruído

|            | Termos do numerador |          |                | Termos do denominador |                |                |
|------------|---------------------|----------|----------------|-----------------------|----------------|----------------|
|            | $u(t-1)$            | $y(t-1)$ | $y(t-1)u(t-1)$ |                       | $y(t-2)y(t-2)$ | $y(t-1)y(t-1)$ |
| 1          | 1,0103              | 0,1974   | 0,0094         | 1,0000                | 0,9495         | 0,8677         |
| 2          | 1,0030              | 0,1988   | 0,0685         | 1,0000                | 0,9807         | 0,9520         |
| 3          | 1,0022              | 0,1992   | 0,0745         | 1,0000                | 0,9844         | 0,9609         |
| 4          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0759         | 1,0000                | 0,9853         | 0,9631         |
| 5          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0760         | 1,0000                | 0,9854         | 0,9632         |
| 6          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0762         | 1,0000                | 0,9855         | 0,9634         |
| 7          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0762         | 1,0000                | 0,9855         | 0,9634         |
| 8          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0762         | 1,0000                | 0,9855         | 0,9635         |
| 9          | 1,0021              | 0,1992   | 0,0762         | 1,0000                | 0,9855         | 0,9635         |
| 10         | 1,0021              | 0,1992   | 0,0762         | 1,0000                | 0,9855         | 0,9634         |
| Valor Real | 1,0000              | 0,2000   | 0,1000         | 1,0000                | 1,0000         | 1,0000         |

Para comparar quantitativamente os diversos resultados, criou-se um índice de qualidade baseado na soma dos erros percentuais absolutos de cada parâmetro estimado definido como:

$$iq = \sum_{i=1}^{num} \left| \frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\alpha_i} \right| + \sum_{i=2}^{den} \left| \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\beta_i} \right|, \quad (4.3)$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são os parâmetros reais do numerador e denominador, respectivamente. O chapéu representa parâmetros estimados e  $iq$  é o índice de qualidade, calculado em percentual.

A Tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos com o cálculo do índice de qualidade descrito na equação (4.3). Verifica-se que o RME (Billings e Zhu, 1991), sem termos de ruído, melhora significativamente a estimação dos parâmetros, em relação ao mínimos quadrados ordinário - OLS. A colocação de termos lineares de ruído no algoritmo RME modificado, reduz sensivelmente a polarização dos parâmetros estimados.

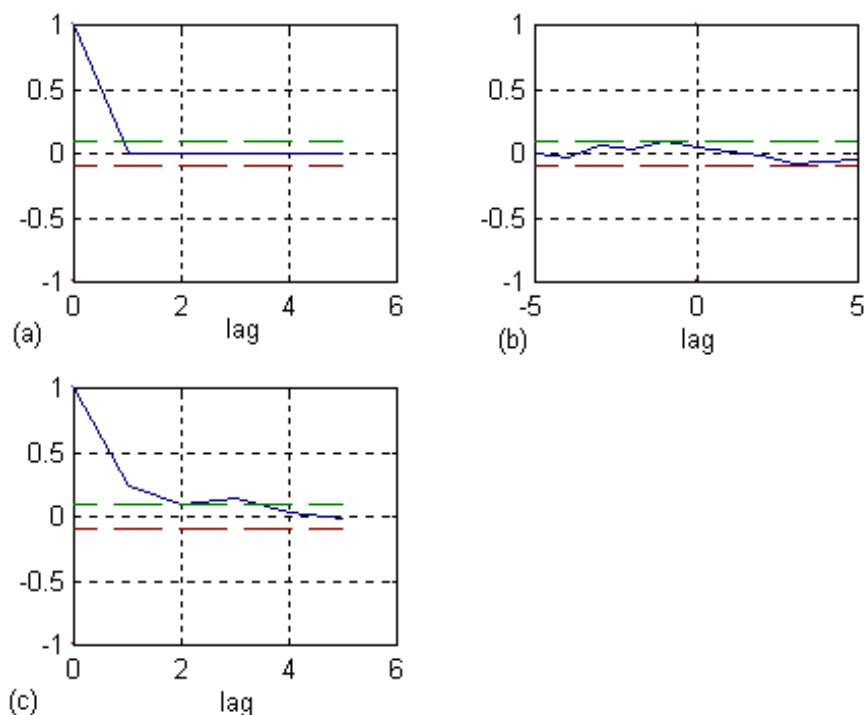


Figura 4.7 Teste de correlação dos resíduos de identificação usando RME Modificado e termos lineares de ruído. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $\xi(t) \times \xi'(t)$ ; (c)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$

Tabela 4.4 Comparação entre o somatório dos erros percentuais na estimação de parâmetros para cada procedimento adotado. (i) OLS; (ii) RME sem termos de ruído; (iii) RME Modificado

|             | Procedimento (i) | Procedimento (iii) | Procedimento (iii) |
|-------------|------------------|--------------------|--------------------|
| Índice $iq$ | 140,56 %         | 63,30 %            | 29,52 %            |

#### 4.4. Comentários Finais

Este capítulo apresentou rotinas em MATLAB para identificação de modelo racionais. Descreveu de forma sucinta os passos a serem seguidos para obtenção de modelo NARMAX racionais, citando as rotinas usadas em cada procedimento.

A seguir foi feita uma análise das principais rotinas usadas na identificação. Foram apresentadas três formas diferentes para estimação de parâmetros: (i) algoritmo de mínimos quadrados ordinário - OLS (Mendes, 1995); (ii) estimador de modelos racionais RME, proposto em (Billings e Zhu, 1991) sem termos de ruído; e (iii) RME modificado, sendo que esta última, é uma proposta deste trabalho. Os procedimentos citados acima foram testados em dados obtidos via simulação de um sistema conhecido.

Os testes mostraram que, entre os três procedimentos usados na estimação dos parâmetros, o algoritmo RME modificado, mostrou ser o procedimento mais eficiente de estimação dos parâmetros do modelo racional. O algoritmo apresentou um bom desempenho mesmo com dados de identificação contaminados por ruído, apesar de usar estrutura linear para os termos de ruído.

## Capítulo 5

# Modelagem de um Forno Elétrico

### 5.1 Introdução

O forno elétrico, descrito neste capítulo, foi escolhido para avaliar a eficiência do modelo racional na representação de sistemas dinâmicos. A razão desta escolha é a possibilidade de comparação com modelos polinomiais já obtidos para este sistema, descrito na Dissertação de Mestrado de Rodrigues (1996).

O forno elétrico encontra-se no Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O sistema é não linear e sua descrição foi feita em (Rodrigues, 1996) sendo reproduzida na seção 5.2.

Este capítulo inicia-se com uma descrição do sistema a ser modelado e dos dados de identificação. A seguir são apresentados os modelos racionais obtidos e a validação dos mesmos. No decorrer do capítulo são feitas comparações entre os modelos racionais e polinomial. Finalmente são feitos comentários a respeito dos resultados obtidos.

### 5.2 Descrição do Sistema

O forno elétrico do LCPI - CPDEE (Abreu, 1993) é uma caixa metálica com dimensões 15x10x31 cm, construído a partir de uma chapa de alumínio com espessura igual a 2mm. O elemento de aquecimento interno é uma lâmpada elétrica de 200 W. O forno não é isolado termicamente, de modo que variações na temperatura ambiente afetam o seu comportamento dinâmico.

O sensor utilizado para medição de temperatura é um resistor com coeficiente de temperatura negativo (NTC) ligado em ponte de Wheatstone, a qual encontra-se equilibrada à temperatura ambiente. O sinal de tensão resultante do desbalanceamento da ponte é processado por conversor A/D de 12 bits e por um microcomputador, onde são implementados os algoritmos de controle. O sinal de controle gerado é aplicado à planta conforme Figura 5.1.

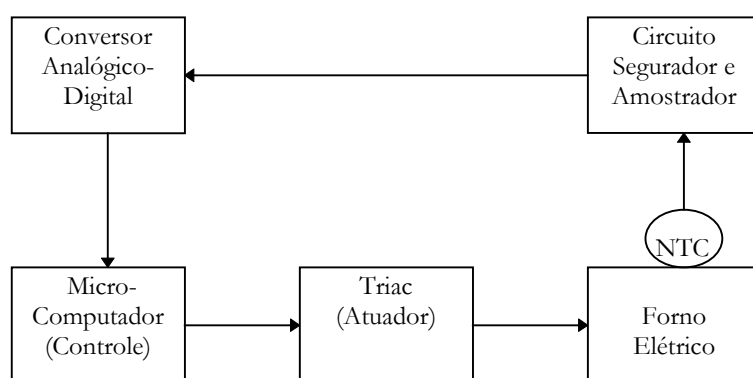


Figura 5.1 Diagrama de blocos do forno elétrico implementado do LCPI - CPDEE.

O sensor de temperatura é apoiado sobre a superfície externa do forno elétrico, sem ser afixado a sua estrutura metálica. Essa configuração de medição torna o sistema sensível a distúrbios externos tais como flutuações da temperatura ambiente e a existência de correntes de ar.

O objetivo do controle é ajustar a temperatura de um ponto na superfície externa do forno a um perfil de referência previamente estabelecido. O controlador determina o tempo em que a lâmpada permanece acesa entre duas amostragens, gerando um sinal de controle normalizado entre 0 e 100%. A lâmpada permanece acesa por um tempo  $\mu T_s/100$ , onde  $\mu$  é o sinal de controle e  $T_s$  é o período de amostragem. O elemento atuador é um triac operando como chave.

Abreu (1993) desenvolveu um modelo do sistema baseado na física do processo. A troca de calor entre a lâmpada e a superfície externa do forno se processa através de dois fenômenos: convecção e radiação. A taxa de transferência de calor por radiação depende da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor, o que torna o processo não-linear e dependente da condição de operação (ganhos e parâmetros variantes como o ponto de operação). A transferência de calor por convecção depende diretamente da diferença de temperatura absoluta entre os meios envolvidos.

A transferência de calor por radiação irá predominar em relação à transferência por convecção durante o período de aquecimento do forno. Esse fato ocorre porque as dimensões reduzidas do forno impedem a circulação das ondas de convecção. Por outro lado, durante o resfriamento do forno predomina a transferência de calor por convecção (do forno para o meio ambiente). Este mecanismo de transferência de calor faz com que o forno apresente diferentes constantes de tempo de aquecimento e resfriamento (Abreu, 1993). Estas constantes de tempo e o ganho do sistema em regime permanente dependem das condições iniciais do sistema e da região de operação considerada. Maiores detalhes sobre o comportamento dinâmico do forno são encontradas em (Abreu, 1993).

### **5.3 Modelagem da Dinâmica Não-Linear do Forno Elétrico usando a Representação Racional**

A modelagem do forno elétrico seguiu os passos descritos no capítulo 4, sendo descrita nas seções seguintes.

#### **5.3.1 Descrição dos dados**

A escolha do par de dados, entrada e saída, é um passo de extrema importância para a obtenção de modelos que reproduzam tanto as características estáticas com o dinâmicas de um sistema. A entrada deve excitar o sistema na faixa de frequência de interesse da identificação assim como as não linearidades do mesmo, contendo tanto informação da variação da constante de tempo como variação do ganho em função da saída ou do sinal de excitação na entrada.

Além dos pontos ressaltados acima, é importante que os dados tenham sido amostrados com tempo suficientemente pequeno para conter a faixa de frequência desejada para identificação e tempo de amostragem suficientemente grande para evitar problemas de mau condicionamento dos dados que grandemente dificultam a identificação (Billings e Aguirre, 1995), conforme descrito na seção 2.3.

Os dados usados nessa identificação são os mesmos usados por (Rodrigues, 1996) para a obtenção de modelo polinomial e estão apresentados na Figura 5.2 - respostas ao “ruído quantizado” e Figura 5.3 - respostas ao degrau. O sinal de saída é a temperatura da superfície

externa do forno, normalizada em relação a uma temperatura máxima possível e a entrada é o sinal que define a tensão aplicada ao comando do triac que controla a potência média fornecida à lâmpada. O intervalo de amostragem utilizado foi de  $T_s = 70$  s e  $t$ , na figura indica o número de amostras.

O sinal de saída dos dados *frq1* apresenta variações bruscas em  $t \approx 30$  e  $t \approx 130$  sem correspondente mudança do sinal de entrada. Acredita-se que estas variações ocorram por falhas de comunicação entre o microcomputador e o processo, constituindo condições anormais de funcionamento (Jota, 1995). O sistema operou em malha fechada até  $t = 10$ .

A Figura 5.3 revela que o forno possui constante de tempo de aquecimento diferente da constante de tempo de resfriamento. Isto ocorre porque o aquecimento é causado pelo fornecimento de calor através da lâmpada e o esfriamento é devido a perda de calor do forno para o ambiente.

Outra característica observada nas massas de dados *fd1* e *fd2* relatada em (Rodrigues, 1996) é o fato da saída do sistema continuar a aumentar lentamente enquanto o sinal de controle é mantido constante, intervalo  $60 \leq t \leq 130$ . Este fato mostra que o sistema possui duas constantes de tempo de aquecimento uma rápida e outra lenta, fenômeno explicado em (Rodrigues, 1996).

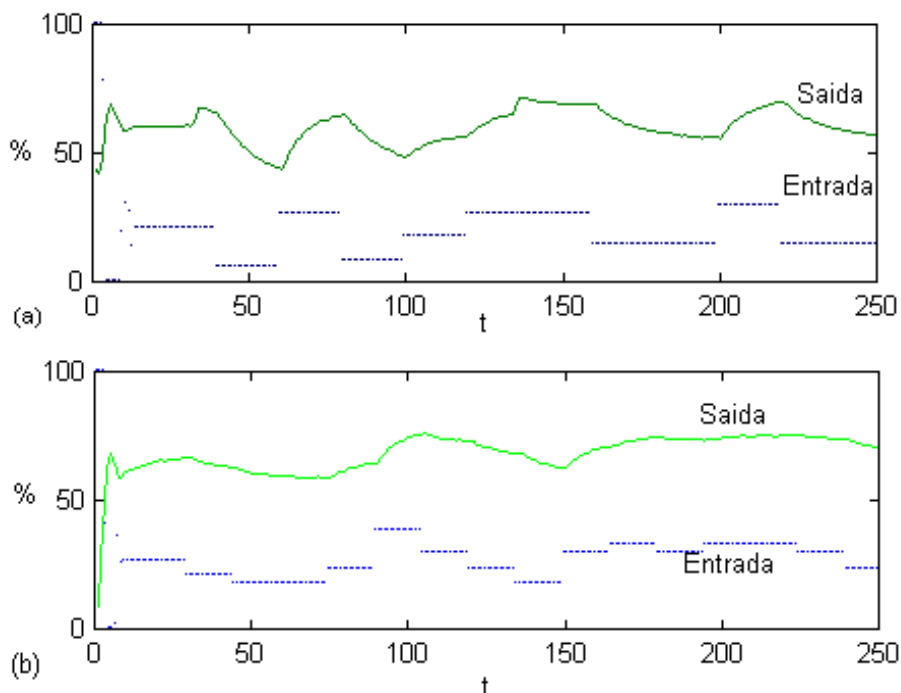


Figura 5.2 Resposta do forno elétrico ao ruído quantizado. (a) Massa de dados *frq1* (b) Massa de dados *frq2*.

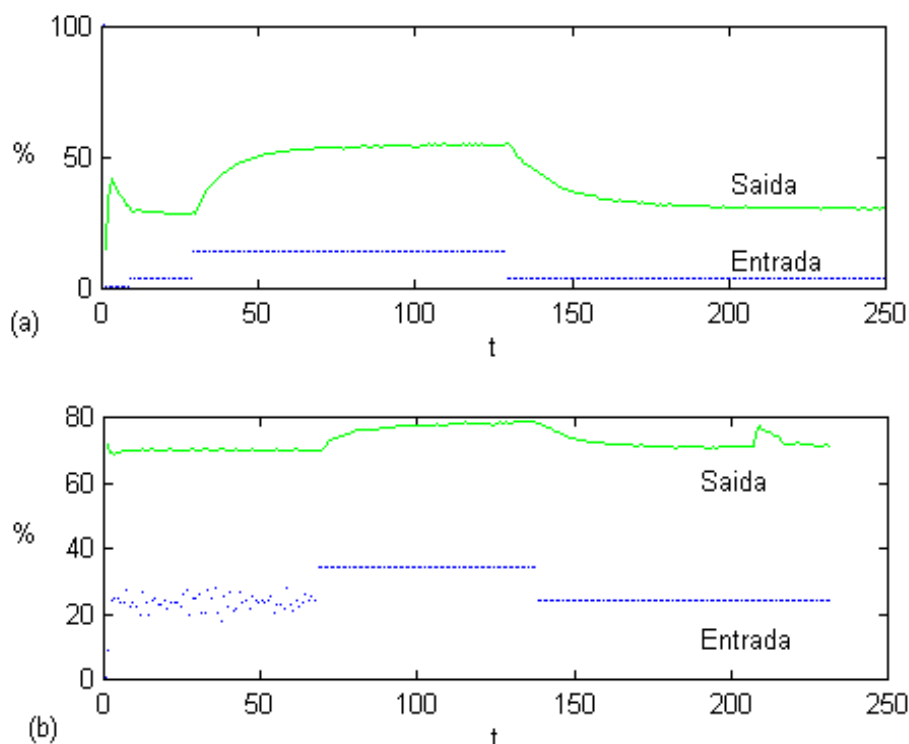


Figura 5.3 Resposta do forno elétrico ao degrau. (a) Massa de dados fd1. (b) Massa de dados fd2.

No procedimento de aquisição de dados do forno, a planta operou em malha fechada com um controlador automático proporcional-integral-derivativo (PID) até que um dado perfil de referência fosse ajustado. Em seguida, a malha de realimentação foi aberta, o sinal de teste aplicado ao comando do triac e o correspondente sinal de temperatura da chapa do forno foi medido e processado (Rodrigues, 1996).

Respostas ao “ruído quantizado” são mais adequados para identificação de sistemas por excitarem o sistema em uma faixa maior de frequências. Devido a este fato a massa de dados *frq2* foi utilizada para a identificação tanto neste trabalho quanto em (Rodrigues, 1996).

As demais massas de dados serão usadas na validação dos modelos obtidos conforme descrito na seção 5.3.5.

Os dados descritos acima foram amostrados com tempo de amostragem  $T_s = 70$  s, porém os dados de identificação foram obtidos escolhendo uma em cada três amostras perfazendo um período de amostragem final de  $T_s = 210$  s. Este período de amostragem foi escolhido em (Rodrigues, 1996) através dos critérios descritos seção 2.3.1.

### 5.3.2 Detecção de Não-Linearidades

A detecção de não linearidades foi suprimida neste trabalho, pois as mesmas já eram conhecidas. A principal não linearidade presente no forno elétrico são as constantes de tempo diferentes para aquecer e para esfriar. Assim como em outros sistemas, só temos controle do fluxo de energia para aquecer, o processo de esfriamento ocorre apenas pela perda de calor para o ambiente, ou seja, o aquecimento é forçado e o esfriamento é natural, por este motivo o forno aquece mais rápido do que esfria.

### 5.3.3 Modelo NARMAX Polinomial

Nesta seção é apresentado um modelo NARMAX polinomial do forno elétrico descrito em (Rodrigues, 1996). O objetivo desta seção é possibilitar a comparação entre o modelo polinomial e os modelos racionais descritos ao longo deste trabalho.

- modelo não-linear NARMAX polinomial *nl391*

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = n_u = 3$ , 9 termos de processo e 22 termos lineares de ruído.

$$\begin{aligned} y(t) = & 0,44551y(t-1) + 0,57773y(t-2) - 0,63628u(t-2) + 0,48606u(t-1) - 1,14580 \times 10^{-6}y(t-1)^2u(t-1) \\ & - 9,97760 \times 10^{-5}u(t-3)u(t-1)^2 - 2,92710 \times 10^{-5}y(t-3)^3 + 7,88310 \times 10^{-3}y(t-2)u(t-2) + \\ & + 7,43860 \times 10^{-8}y(t-3)^2u(t-3) + \sum_{i=1}^{22} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t). \end{aligned}$$

O modelo *nl391* é de 3ª ordem, e foi obtido através da massa de teste *frq2*, mesma que será usada para obter os modelos racionais descritos na seção 5.3.4. Não será discutido neste trabalho aspectos da validação do modelo polinomial *nl391*, fato que pode ser visto em (Rodrigues, 1996), apenas será apresentado seu comportamento quando excitado pelas entradas das massas de testes *fd1*, *fd2*, *frq1* e *frq2*, afim de comparar com os modelos racionais.

A Figura 5.4 apresenta o resultado da simulação do modelo *nl391*, com as entradas de *fd1*, *frq1*, *fd2* e *frq2*. O modelo foi simulado a partir da 3ª amostra. Observa-se que *nl391* não reproduziu o comportamento do forno quando excitado pela entrada de *fd1*. Na massa de teste *fd2* verifica-se um pequeno erro no ganho do modelo. Na massa de teste *frq1* verifica-

se uma pequena instabilidade em torno da amostra 40. Como era de se esperar, o modelo *nl391* reproduz bem o comportamento dos dados de identificação *frq2*.

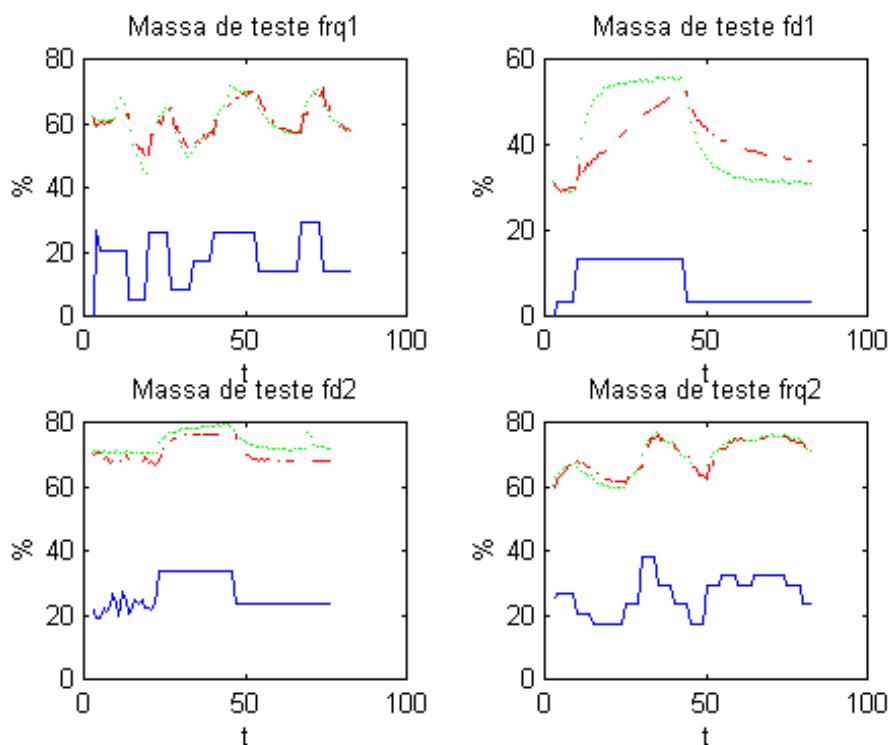


Figura 5.4 Visualização da resposta do modelo *nl391*, quando excitado pelas entradas de *fd1*, *frq1*, *fd2* e *frq2*.  
— : Entrada; ..... : Planta; - - - : Modelo

Existe uma diferença nos resultados apresentados na Figura 5.4 com os apresentado em (Rodrigues, 1996). Na Figura 5.4 o modelo é simulado a partir da 3ª amostra e em (Rodrigues, 1996) os modelos são todos simulados a partir da 23ª amostra. Esta diferença de comportamento, em função do ponto em que se inicia a simulação, demonstra que o modelo polinomial reproduz melhor a dinâmica de esfriamento do forno do que a de aquecimento.

### 5.3.4 Modelagem Utilizando ERR e Agrupamento de Termos

A obtenção do modelo racional para o forno elétrico foi feita através dos passos descritos no capítulo 4. Obteveram-se modelos com número de termos de processo variáveis. O algoritmo iterativo de mínimos quadrados estendido, descrito no capítulo 3, foi usado na estimação dos parâmetros.

Será mostrado a seguir que a estrutura racional é eficiente na reprodução da dinâmica não-linear do forno elétrico, inclusive com um número reduzido de termos de processo.

Para modelagem do forno optou-se por um universo de procura onde os termos candidatos possuíam grau de não linearidade 3, como em (Rodrigues, 1996), e atraso de 2 e 3 tempos de amostragem. O número de termos de processo foi variado de 5 a 15, escolhendo dentre os diversos modelos, aqueles que melhor representaram as características dinâmicas do forno.

Dentre os modelos obtidos podem-se destacar:

- modelo racional *mr02f*

Especificações:  $l = 2$ ,  $n_y = n_u = 2$ , 11 termos de processo e 6 termos lineares de ruído.

$$y(t) = \frac{1}{den} \times \{ 9,0923 \times 10^{-1} y(t-1) + 5,7474 \times 10^{-1} u(t-1) - 5,6471 \times 10^{-3} y(t-1)u(t-1) + \\ + 8,3607 \times 10^{-4} u(t-1)^2 + 1,5590 \times 10^{-5} y(t-1)u(t-1)^2 - 7,8166 \times 10^{-5} u(t-2)u(t-2) - \\ - 1,0777 \times 10^{-3} u(t-1)u(t-2) \} + \sum_{i=1}^6 \theta_i \xi(t-i) + \xi(t)$$

onde:

$$den = 1 - 1,2194 \times 10^{-3} u(t-1) + 2,6018 \times 10^{-5} u(t-1)u(t-1) - 1,5826 \times 10^{-6} u(t-1)u(t-2)$$

- modelo racional *mr03f*

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = n_u = 2$ , 7 termos de processo e 6 termos lineares de ruído.

$$y(t) = \frac{1}{den} \times \{ 9,0478 \times 10^{-1} y(t-1) + 5,4438 \times 10^{-1} u(t-1) - 4,3480 \times 10^{-3} y(t-1)u(t-1) + \\ + 2,7631 \times 10^{-3} u(t-1)^2 - 5,1448 \times 10^{-5} y(t-1)u(t-1)^2 \} + \sum_{i=1}^6 \theta_i \xi(t-i) + \xi(t)$$

onde:

$$den = 1 - 4,9397 \times 10^{-4} u(t-1)$$

- modelo racional *mr03f5*

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = n_u = 2$ , 5 termos de processo e 6 termos lineares de ruído.

$$y(t) = \frac{1}{den} \times \{ 9,1215 \times 10^{-1} y(t-1) + 6,1849 \times 10^{-1} u(t-1) - 6,0287 \times 10^{-3} y(t-1)u(t-1) \} + \\ + \sum_{i=1}^6 \theta_i \xi(t-i) + \xi(t)$$

$$den = 1 - 4,9366 \times 10^{-4} u(t-1)$$

Observa-se que os modelos *mr03f* e *mr03f5*, apesar de no conjunto de termos candidatos existir atraso de até 2 Ts, o algoritmo de seleção de estrutura escolheu apenas termos com um tempo de atraso.

### 5.3.5 Validação dos Modelos Identificados

Nesta seção é discutida a validação estatística e dinâmica dos modelos obtidos. A validação estatística foi feita através das funções de correlação descritas na seção 2.7. A validação dinâmica foi feita observando a capacidade do modelo de reproduzir o comportamento do sistema quando excitado pelas entradas presentes nas massas de teste *frq1*, *fd1*, *fd2* além da massa *frq2*, usada para identificação.

A Figura 5.5 apresenta a validação estatística do modelo *mr02f*, na Figura 5.6 temos a validação estatística do modelo *mr03f* e na Figura 5.7 o mesmo para o modelo *mr03f5*. Nestas observa-se que todos os modelos obtidos são estatisticamente válidos, pois os casos onde as funções de correlação usadas para validação saem dentro do intervalo de confiança de 95%, definido nas figuras pela linha tracejada, não parecem ser suficientemente fortes para rejeitar a hipótese dos resíduos serem brancos.

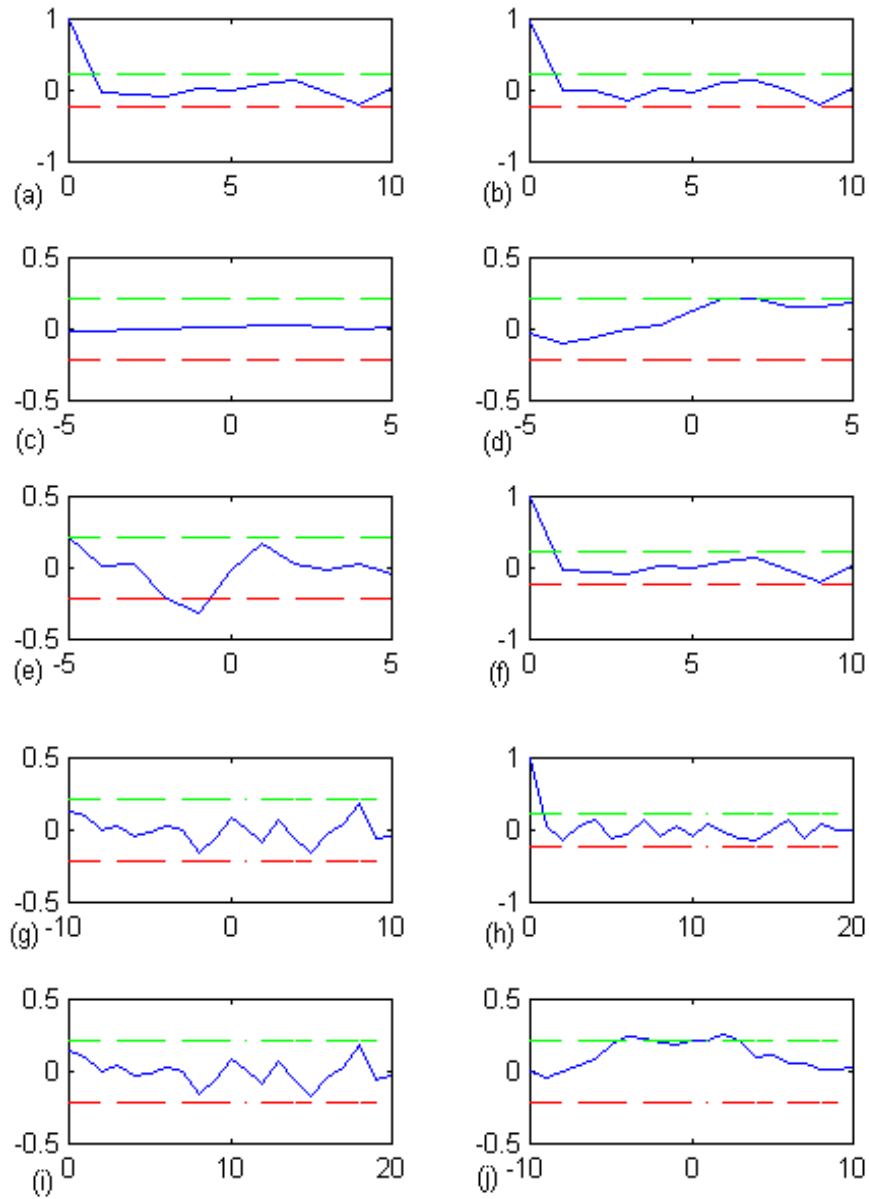


Figura 5.5 Validação estatística do modelo *mr02f*. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $u(t) \times \xi(t)$ ; (c)  $e(t) \times e(t) \times u(t)$ ; (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$ ; (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$ ; (f)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$ ; (g)  $\xi'(t) \times \xi^{2'}(t)$ ; (h)  $\xi^{2'}(t) \times \xi^{2'}(t)$ ; (i)  $(y(t) \times \xi(t))' \times \xi^{2'}(t)$ ; (j)  $(y(t) \times \xi(t))' \times u^{2'}(t)$

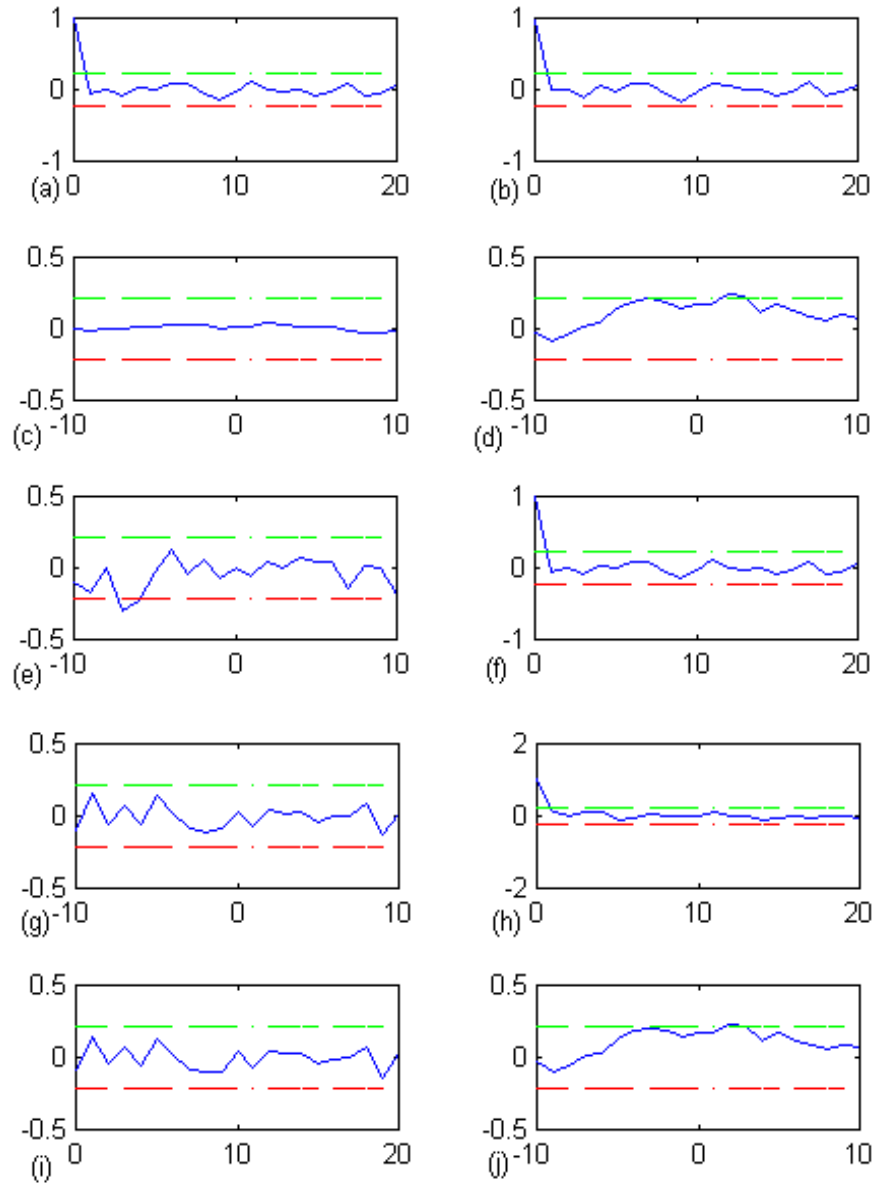


Figura 5.6 Validação estatística do modelo *mr03f*. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $u(t) \times \xi(t)$ ; (c)  $e(t) \times e(t) \times u(t)$  (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$ ; (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$ ; (f)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$ ; (g)  $\xi'(t) \times \xi^{2'}(t)$ ; (h)  $\xi^{2''}(t) \times \xi^{2''}(t)$ ; (i)  $(y(t) \times \xi(t))' \times \xi^{2''}(t)$ ; (j)  $(y(t) \times \xi(t))' \times u^{2''}(t)$

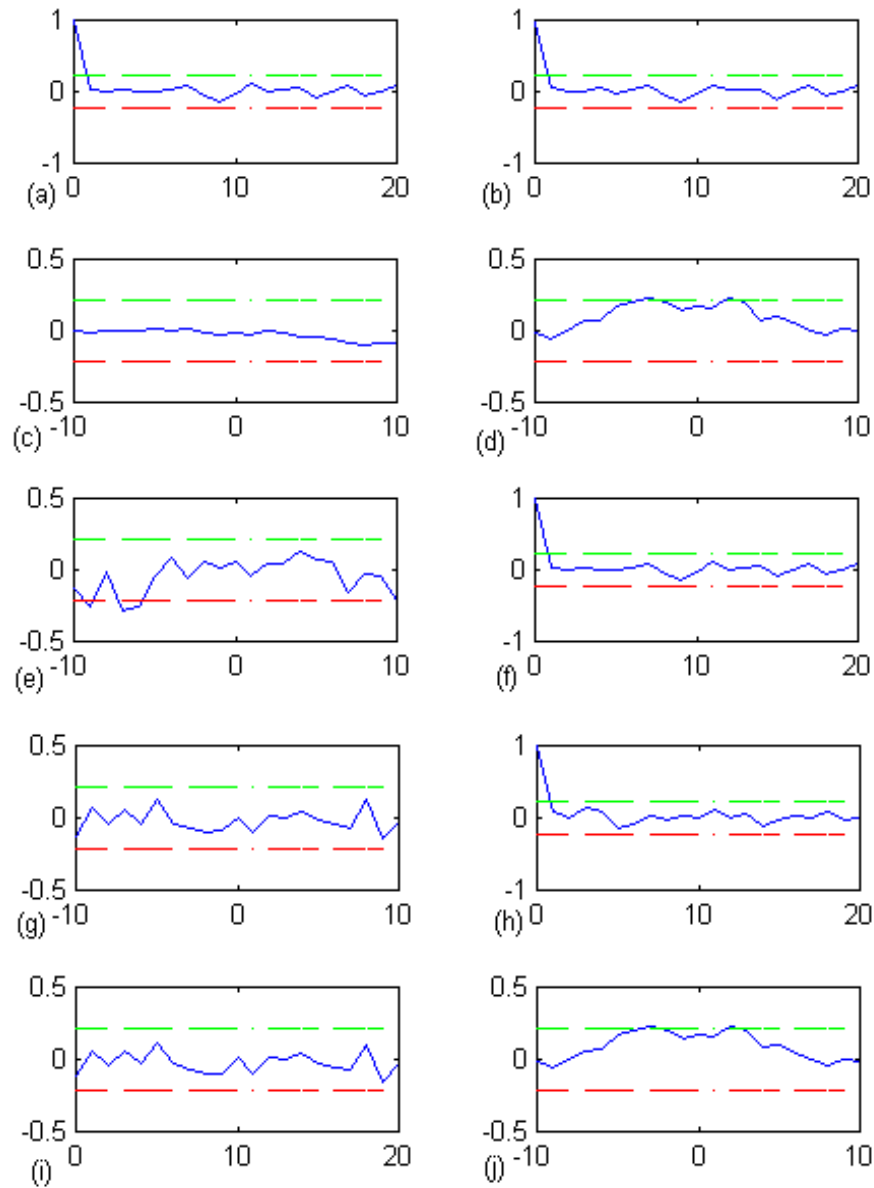


Figura 5.7 Validação estatística do modelo *mr03f5*. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $u(t) \times \xi(t)$ ; (c)  $e(t) \times e(t) \times u(t)$  (d)  $u^2(t) \times \xi(t)$ ; (e)  $u^2(t) \times \xi^2(t)$ ; (f)  $\xi'(t) \times \xi'(t)$ ; (g)  $\xi'(t) \times \xi^{2'}(t)$ ; (h)  $\xi^{2'}(t) \times \xi^{2'}(t)$ ; (i)  $(y(t) \times \xi(t))' \times \xi^{2'}(t)$ ; (j)  $(y(t) \times \xi(t))' \times u^{2'}(t)$

Estatisticamente não se verifica nenhuma diferença significativa entre os três modelos analisados, apesar da diferença entre o número de termos de processo utilizados.

A validação dinâmica dos modelos, foi feita a partir da comparação entre a resposta dos modelos às entradas das massas de dados *frq1*, *frq2*, *fd1* e *fd2*, e a resposta do forno elétrico a estas mesmas entradas, sendo que a massa *frq2* foi usada para identificação.

A Figura 5.8 apresenta o resultado da validação dinâmica do modelo  $mr02f$ . Verifica-se que o modelo reproduz bem o comportamento observado nas massas de dados  $frq1$  e  $frq2$ , porém apresenta um erro de ganho na resposta ao degrau, massa  $fd1$  e  $fd2$ .

Com o objetivo de melhor visualizar o comportamento dinâmico do modelo na resposta ao degrau, o ganho do modelo foi corrigido através da multiplicação dos valores calculados por 1,04 para  $fd2$  e 1,1 para  $fd1$ , sendo os resultados apresentados na Figura 5.9. A correção do ganho foi feita pelo processo de tentativa e erro e, com essa correção, verifica-se que o modelo  $mr02f$  reproduz satisfatoriamente as constantes diferentes de aquecimento e resfriamento do forno, observadas em  $fd2$ , e também as duas constantes de tempo de aquecimento são verificadas. Na Figura 5.10, onde é ampliado um trecho dos dados  $fd2$ , observa-se que o modelo reproduz o comportamento do forno de ir aumentando lentamente a temperatura mesmo quando a entrada permanece constante (entre as amostras 30 a 40). Este fato é importante porque os modelos polinomiais obtidos em (Rodrigues, 1996) não conseguiram reproduzir tal fenômeno, como pode ser verificado na Figura 5.4.

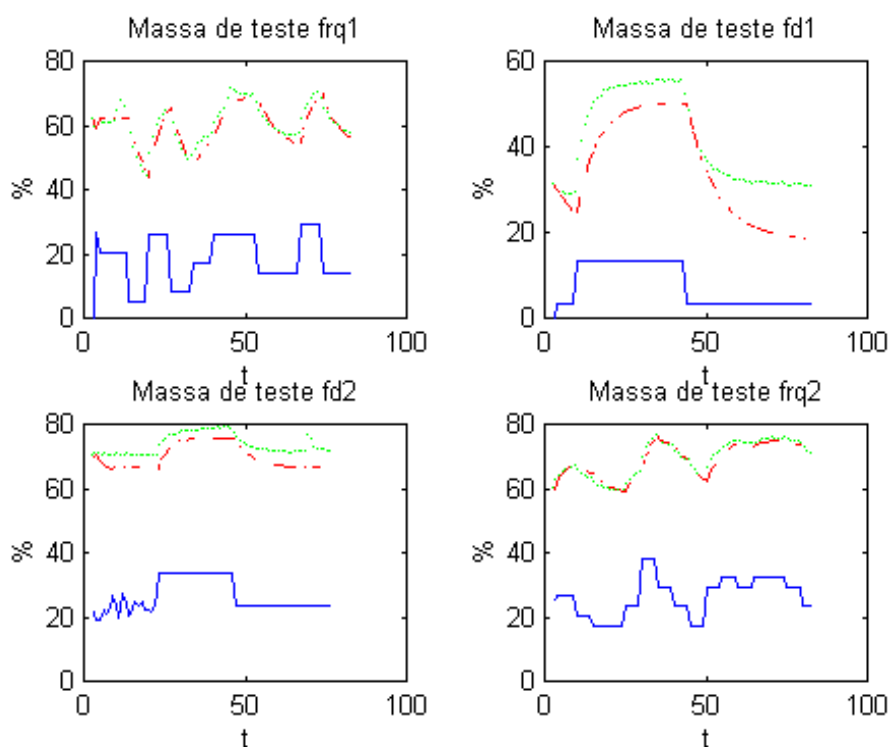


Figura 5.8 Validação dinâmica do modelo  $mr02f$ . — : Entrada; ..... : Planta; - - - : Modelo

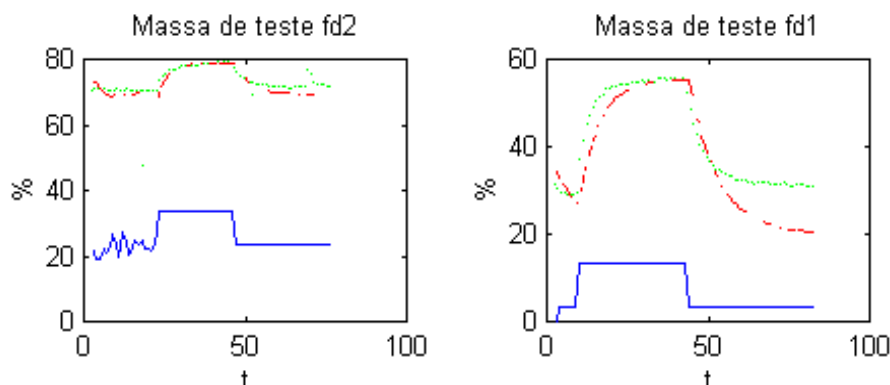


Figura 5.9 Correção do ganho do modelo  $mr02f$  para as massas  $fd1$  e  $fd2$  - — : Entrada; ..... : Planta; - . - : Modelo

Na validação de  $mr02f$  na massa de teste  $fd1$ , observa-se que o modelo não conseguiu reproduzir o comportamento do sistema. Este fato pode ser explicado tendo em vista as regiões visitadas pelos dados de identificação  $frq2$  e os dados de validação  $fd1$ . Nos dados  $frq2$  o sistema foi excitado com entrada de valores numéricos entre 20 a 40, e na massa  $fd1$  a entrada ficou entre 5 a 15. Conclui-se que a massa de dados usada na identificação não visitou a região visitada por  $fd1$ , por isso o modelo não reproduz a dinâmica verificada em  $fd1$ . Ainda assim nota-se uma boa aproximação de seu comportamento, deixando claro a existência de constantes de tempo diferentes para aquecimento e esfriamento.

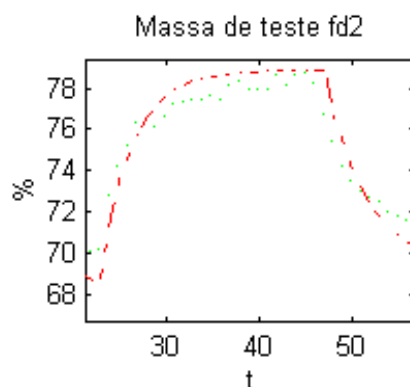


Figura 5.10 Zoom na resposta do sistema a massa  $fd2$

A validação dinâmica do modelo  $mr03f$ , Figura 5.11, mostrou que este modelo apresenta as mesmas características observadas para o modelo  $mr02f$ . Verifica-se a mesma diferença do ganho para as respostas ao degrau  $fd1$  e  $fd2$ . Na Figura 5.12 foi feita correção de ganho para o modelo utilizando os mesmos valores usados para correção do ganho do modelo  $mr02f$ .

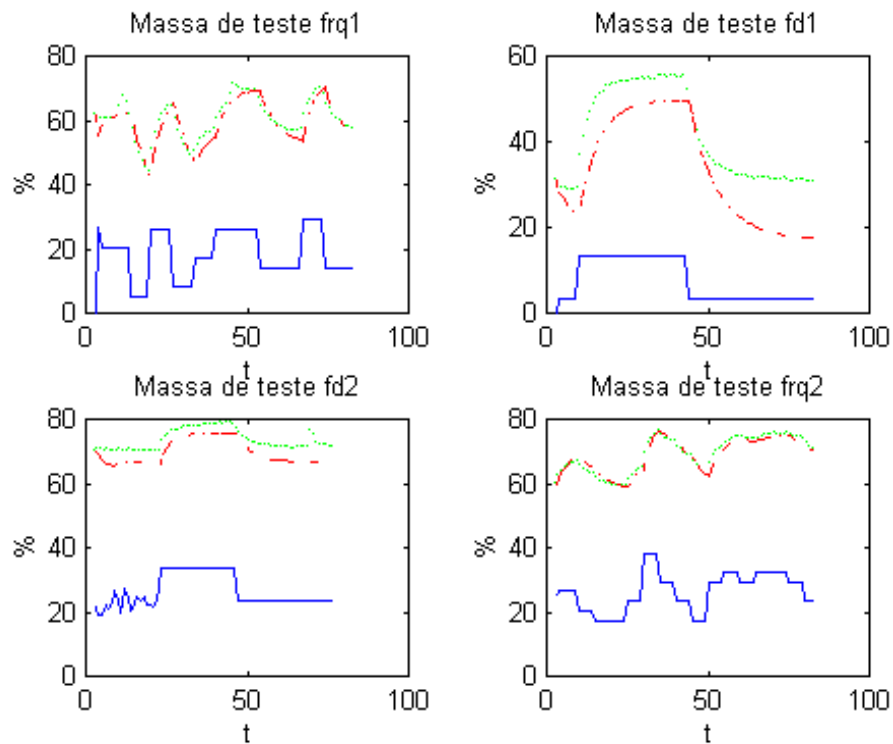


Figura 5.11 Validação dinâmica modelo *mr03f* - — : Entrada; - . - . : Planta; - - - : Modelo

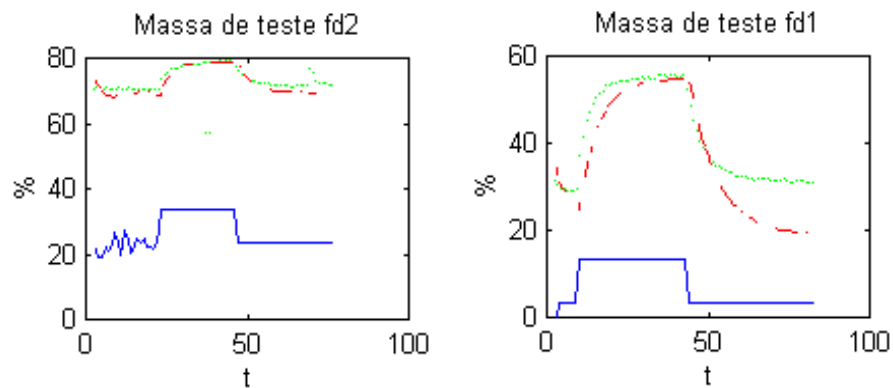


Figura 5.12 Correção do ganho do modelo *mr03f* para as massas *fd1* e *fd2* - — : Entrada; - . - . : Planta; - - - : Modelo

A validação dinâmica do modelo *mr03f5*, Figura 5.13, mostra que apesar de possuir apenas cinco termos de processo, este modelo se comporta da mesma forma que os anteriores, inclusive para a resposta ao degrau. No caso da correção do ganho para a resposta ao degrau, verifica-se na Figura 5.14, que os fatores 1,04 e 1,1 se mostraram um pouco elevados para este modelo.

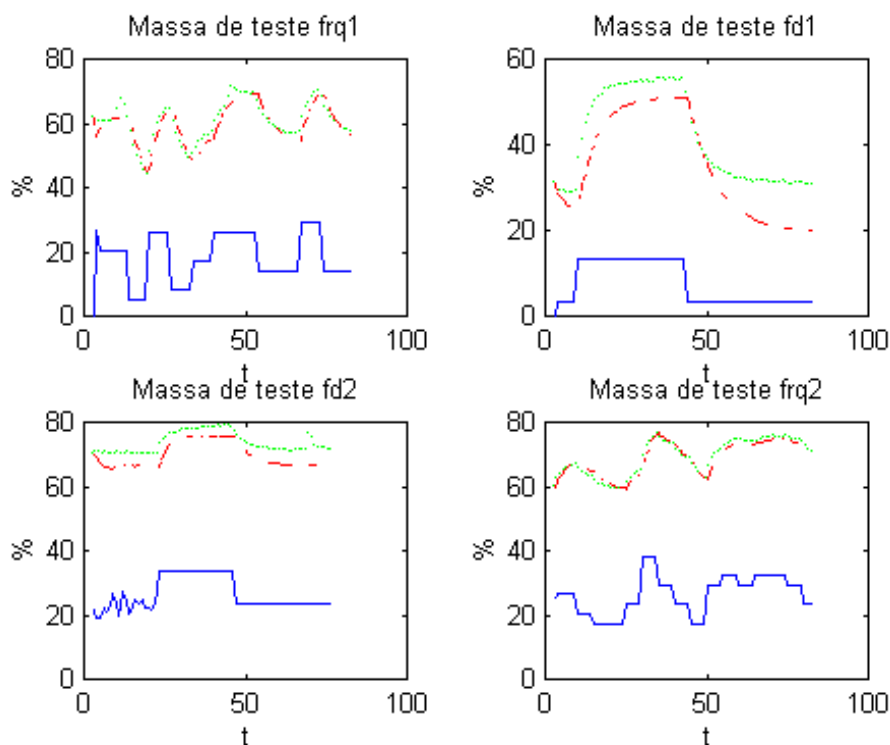


Figura 5.13 Validação dinâmica modelo *mr03f5* - - — : Entrada; ..... : Planta; - - - : Modelo

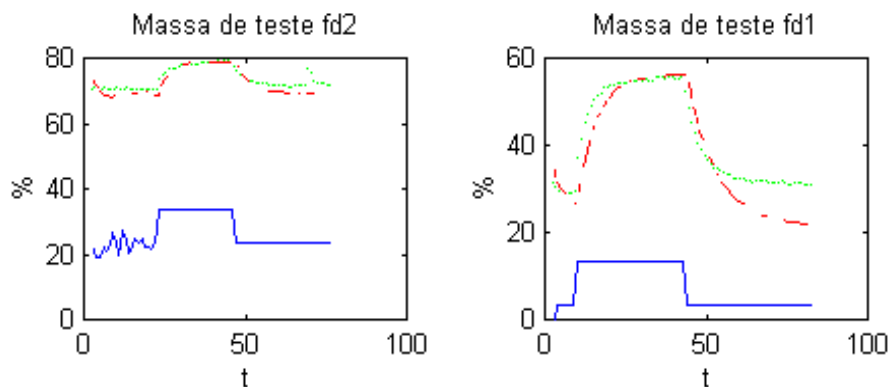


Figura 5.14 Correção do ganho do modelo *mr03f5* para as massas *fd1* e *fd2* - — : Entrada; ..... : Planta; - - - : Modelo

Todos os modelos analisados reproduziram satisfatoriamente o comportamento do forno na região visitada pelos dados de identificação. Os modelos não reproduziram adequadamente o comportamento do forno para a região visitada por *fd1*, porém reproduziram o fato do forno possuir duas constantes de tempo de aquecimento além de constantes de tempo diferentes para aquecer e esfriar. Todos os modelos obtidos se apresentaram estáveis independente da massa de dados usada na validação e não houve preocupação com a amostra onde se iniciavam os testes de validação.

A Tabela 5.1 compila o valor do desvio padrão dos erros de predição dos modelos analisados sem a correção do ganho. Com exceção da massa *fd1*, se observa que em todas as situações testadas para os modelos racionais, o desvio padrão percentual máximo apresentado foi de 3,4%, isto para o modelo *mr03f5* que possui apenas cinco termos de processo. Verifica-se, mais uma vez, que os modelos racionais apresentaram menor erro de predição do que o modelo polinomial.

Tabela 5.1 Desvio padrão dos erros de predição dos modelos do forno (em percentual)

| Dados       | Modelos      |               |              |              |
|-------------|--------------|---------------|--------------|--------------|
|             | Racionais    |               |              | Polinomial   |
|             | <i>mr02f</i> | <i>mr03f5</i> | <i>mr03f</i> | <i>nl391</i> |
| <i>fd1</i>  | 11,95        | 11,37         | 13,08        | 18,26        |
| <i>fd2</i>  | 1,97         | 2,04          | 1,87         | 1,72         |
| <i>frq2</i> | 1,31         | 2,52          | 1,34         | 1,83         |
| <i>frq1</i> | 2,73         | 3,40          | 2,89         | 3,67         |

Mais uma vez, os resultados obtidos não demonstram nenhuma diferença significativa entre os diversos modelos racionais obtidos. Este resultado mostra que através da representação racional é possível reproduzir a dinâmica não linear do forno elétrico com reduzido número de termos de processo.

Em (Jácome, 1996) tem-se que se uma das constantes de tempo de um sistema for variável, a representação NARX preditiva é do tipo racional. Este fato, além das observações feitas no decorrer deste, apontam para o modelo racional como sendo melhor para representar a dinâmica do forno elétrico, em comparação com o modelo polinomial.

## 5.4 Comentários Finais

Este capítulo descreveu a modelagem de um sistema não-linear real utilizando a representação racional. O sistema modelado foi o forno elétrico o que possibilitou comparações entre a representação racional e a polinomial.

O forno elétrico é um sistema dinâmico que apresenta diversas não linearidades, como por exemplo: (i) constantes de tempo diferente para aquecimento e esfriamento; (ii) ganho estático diferentes dependendo da faixa de operação. Estas não linearidades são devidas a

diversos fatores como: aquecimento devido ao fornecimento de potência a uma lâmpada (transferência de calor forçado), esfriamento por perda de calor natural para o ambiente e a forma com que o calor é transferido para o ambiente. Além da convecção, a transferência de calor para o ambiente ocorre devido a radiação e esta depende da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor, sendo portanto não linear.

Vários modelos NARMAX racionais foram identificados e todos eles reproduziram as características dinâmicas apresentadas pelo forno nos dados de identificação. Observou-se que os algoritmos de seleção de estrutura e estimação de parâmetros se mostraram eficientes, obtendo modelos com poucos dados de identificação, em torno de 80, com apenas 5 termos de processo e de primeira ordem.

Os modelos obtidos reproduziram bem as não linearidades do forno, e se mostraram estáveis em regiões de operação diferentes daquelas visitadas pelos dados de identificação, apesar de em alguns casos haver um erro na estimação do ganho do processo.

Os resultados apresentados neste capítulo sugerem que, pelo menos no caso em estudo, a representação racional é mais robusta para representar a dinâmica do forno do que a representação polinomial. Muitos dos modelos polinomiais obtidos em (Rodrigues, 1996) se mostraram instáveis quando excitados em regiões diferentes daquelas visitadas pelos dados de identificação. Além disso os modelos racionais obtidos se apresentaram muito menos sensíveis às condições iniciais do que os modelos polinomiais obtidos em (Rodrigues, 1996).

A representação racional conseguiu reproduzir com significativa qualidade as duas constantes de tempo de aquecimento do forno observadas na resposta ao degrau, apesar desta informação aparentemente não estar clara nos dados de identificação.

O estudo do forno elétrico foi de grande importância neste trabalho, pois envolveu vários problemas de identificação e possibilitou uma comparação com modelos polinomiais obtidos anteriormente.

## Capítulo 6

### Modelagem do Circuito de Chua

#### 6.1 Introdução

O circuito de Chua é um circuito eletrônico com comportamento não-linear que tem sido objeto de estudo por um grande número de pesquisadores, com vários trabalhos publicados em revistas especializadas (Glover e Mees, 1992; Chua e Hasler, 1993; Hartley e Mossayebi, 1993; Madan, 1993; Aguirre e Billings, 1994b; Aguirre, 1995).

O circuito de Chua foi utilizado neste trabalho para avaliar a capacidade do modelo NARMAX racional de reproduzir sua dinâmica como também pela facilidade de comparação com resultados obtidos com a representação polinomial. O referido circuito apresenta dinâmica caótica, o que representa uma dificuldade adicional para a identificação. Este capítulo descreve a modelagem deste circuito a partir de dados reais.

#### 6.2 Descrição do Sistema

O circuito de Chua apresenta uma topologia bastante simples. É constituído por elementos passivos lineares (dois capacitores, um indutor e um potenciômetro) e um elemento não linear denominado *diodo de Chua* (Chua et al., 1986; Chua, 1992). O *diodo de Chua* tem a característica de um resistor negativo, de dois terminais e comportamento linear por partes. A Figura 6.1 mostra o diagrama esquemático do circuito e a Figura 6.2 apresenta a curva característica do *diodo de Chua*.

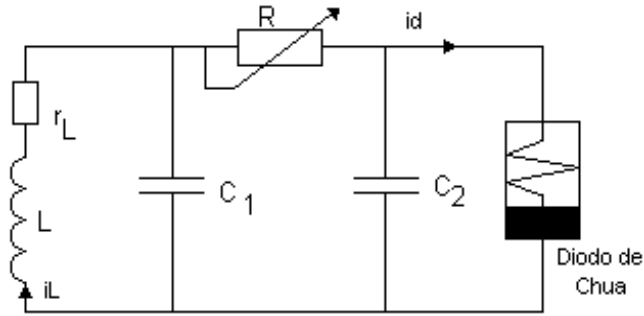


Figura 6.1 - Circuito de Chua

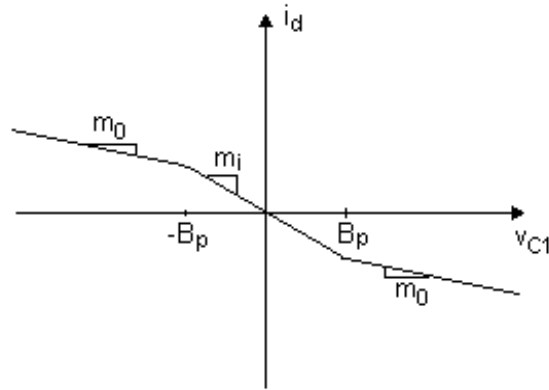


Figura 6.2 Curva característica do Diodo de Chua

As equações dinâmicas de Chua são:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= \frac{v_{c_2} - v_{c_1}}{R} - i_d(v_{c_1}), \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= \frac{v_{c_1} - v_{c_2}}{R} - i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} - r_L i_L, \end{aligned}$$

(6.1)

onde  $v_{c_1}$  e  $v_{c_2}$  são as tensões sobre os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente e  $i_L$  é a corrente no indutor.

A característica corrente-tensão do diodo de Chua é (Chua et al., 1986; Chua, 1992):

$$\begin{aligned}
i_d(v_{c_1}) &= m_0 v_{c_1} + B_p(m_0 - m_1), \text{ se } v_{c_1} < -B_p, \\
i_d(v_{c_1}) &= m_1 v_{c_1}, \text{ se } -B_p \leq v_{c_1} \leq B_p, \\
i_d(v_{c_1}) &= m_0 v_{c_1} + B_p(m_1 - m_0), \text{ se } v_{c_1} > B_p,
\end{aligned}
\tag{6.2}$$

onde as constantes  $m_0$  e  $m_1$  são as inclinações das regiões lineares e  $B_p$  é o valor da tensão onde ocorre a mudança da característica  $i \times v$  do dispositivo. Observa-se que esta curva apresenta uma simetria ímpar em relação ao eixo das correntes. Por esta razão Hartley (1989) propôs a utilização de um polinômio cúbico para aproximar a característica do diodo de Chua.

O circuito de Chua possui três elementos armazenadores de energia - os capacitores e o indutor - e apresenta equação de estados de terceira ordem, cujas variáveis são:  $v_{c_1}$ ,  $v_{c_2}$  e  $i_L$ . O sistema é autônomo, pois não existem funções forçantes atuando sobre ele.

As equações dinâmicas do circuito de Chua possuem três pontos fixos. Os pontos fixos deste sistema são (Torres e Aguirre, 1995a):

- $\overline{p_1} = (v_{c_{11}}, v_{c_{21}}, i_{L_1}),$

$$\tag{6.3}$$

- $\overline{p_2} = (0,0,0),$

$$\tag{6.4}$$

- $\overline{p_3} = (-v_{c_{11}}, -v_{c_{21}}, -i_{L_1}),$  onde

$$\begin{aligned}
v_{c_{11}} &= \frac{-B_p(m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0}(r_L + R), \\
v_{c_{21}} &= \frac{-B_p(m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0}(r_L), \\
i_{L_1} &= \frac{B_p(m_0 - m_1)}{1 + (R + r_L)m_0}.
\end{aligned}
\tag{6.5}$$

Sendo que  $\overline{p_1}$  e  $\overline{p_3}$  são pontos fixos simétricos e  $\overline{p_2}$  é um ponto fixo trivial. A estabilidade destes pontos fixos foi estudada em (Aguirre, e Torres 1997). Os três pontos fixos da dinâmica do circuito de Chua apresentam comportamento local instável, embora o sistema seja globalmente estável (característica de sistemas caóticos).

## 6.3 Modelagem da Dinâmica Não-Linear do Circuito de Chua

As seções seguintes apresentam os passos seguidos para a obtenção de modelos NARMA racional para o circuito de Chua a partir de medições da variável  $v_{cl}$ . Através dos resultados apresentados a seguir verifica-se a capacidade do modelo NARMA racional de reproduzir dinâmicas não lineares complexas.

### 6.3.1 Descrição dos dados

Os dados usados na identificação possuem duas origens diferentes:

- simulação da dinâmica a partir de um modelo polinomial.
- aquisição de dados de operação em um protótipo do circuito (Torres e Aguirre, 1995b).

A primeira massa de dados foi obtida pela simulação do modelo polinomial do circuito de Chua identificado em (Rodrigues, 1996). O modelo polinomial NARMA usado é apresentado a seguir e foi denominado em (Rodrigues, 1996) como Modelo *dsae1*.

- Modelo *dsae1* - Polinomial

Variável identificada:  $v_{cl}$  sobre o atrator de dupla volta

Especificações:  $l = 3$ ,  $n_y = 4$ , 17 termos de processo (selecionado dentro do conjunto de agrupamentos efetivos) e 20 termos lineares de ruído.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & 3,5230y(t-1) - 4,2897y(t-2) - 0,2588y(t-4) + 2,0652y(t-3) - 1,7784y(t-1)^3 + \\
 & + 6,1761y(t-2)y(t-1)^2 + y(t-4)y(t-2)y(t-1) - 2,7381y(t-3)y(t-1)^2 - \\
 & - 5,5369y(t-2)^2y(t-1) + 0,1031y(t-2)^3 + 0,4623y(t-4)^3 - 0,5247y(t-4)y(t-2)^2 - \\
 & - 1,8965y(t-3)^2y(t-1) + 5,4255y(t-3)y(t-2)y(t-1) + 0,7258y(t-4)^2y(t-2) - \\
 & - 1,7684y(t-4)^2y(t-3) + 1,1800y(t-4)y(t-3)^2 + \sum_{i=1}^{20} \theta_i \xi(t-i) + \xi(t). \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

A massa de dados utilizada na obtenção do Modelo *dsae1* foi *dsvc1.dat*, que será descrita à frente, tendo sido também utilizada para obter modelos racionais.

Observa-se na equação (6.6) que o modelo possui 17 termos de processo, com grau de não-linearidade 3 e com atraso máximo igual a 4. Os agrupamentos presentes no modelo são:  $\Omega_y$  e  $\Omega_{y^3}$ .

A massa de dados gerada a partir do modelo *dsae1* foi utilizada a princípio para responder questões envolvidas com a capacidade da representação racional de reproduzir a dinâmica do circuito de Chua. Os modelos racionais obtidos a partir dos dados gerados por *dsae1* não serão apresentados neste, e a discussão sobre o processo de identificação será feita para massa de dados reais.

A segunda massa de dados utilizada na identificação foi a massa de dados *dsvc1.dat*, que foi obtida a partir da operação de um protótipo do circuito de Chua. Esta massa de dados é a mesma usada por Rodrigues para obtenção do modelo *dsae1* apresentado acima.

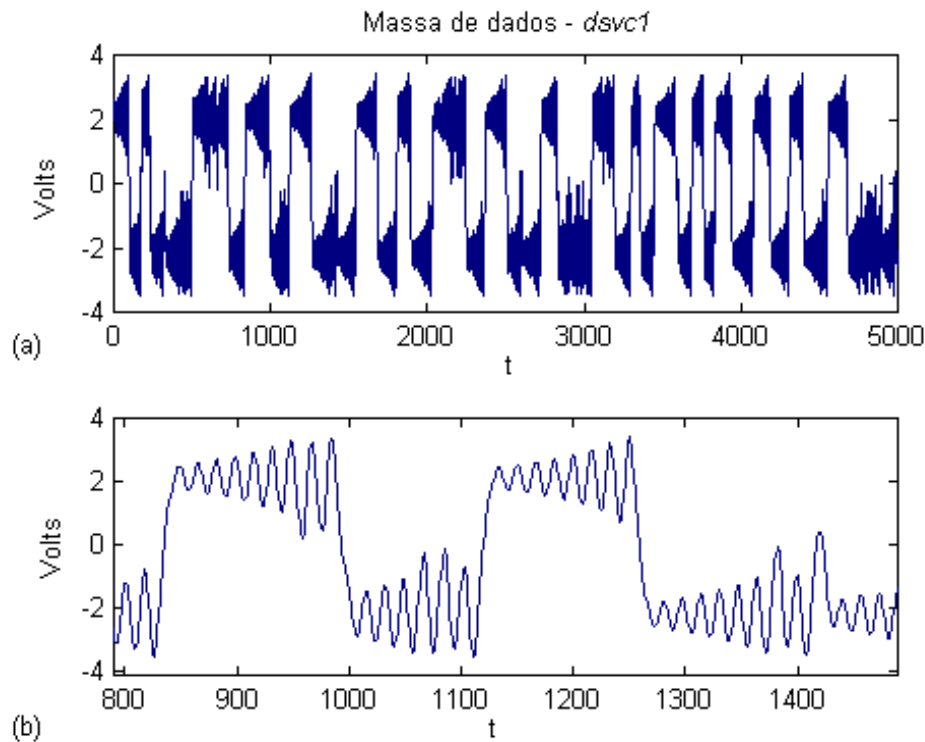


Figura 6.3 Dados experimentais da tensão  $v_{C1}$  sobre o atrator em espiral. (a) Dados *dsvc1* (b) Zoom em *dsvc1* -  $t$  indica o número de amostras.

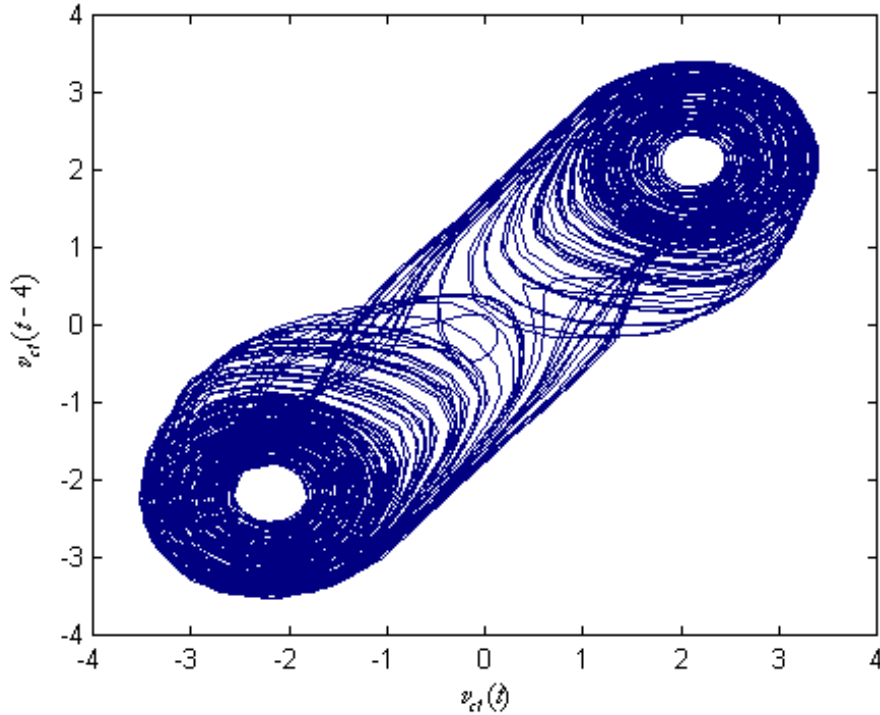


Figura 6.4 - Projção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir de *dsv1*.

A massa de dados *dsv1.dat* possui uma relação sinal/ruído  $SNR = 72,30$  dB calculada utilizando a variância dos resíduos de identificação (Rodrigues, 1996). Detalhes sobre a obtenção de dados *dsv1.dat* podem ser vistos em (Rodrigues, 1996). A Figura 6.3 apresenta os referidos dados e na Figura 6.4 temos a projeção bidimensional do atrator caótico obtido a partir de *dsv1.dat*.

Outra massa de dados obtida a partir da operação do protótipo é massa de dados *vc1.dat*. Esta massa de dados foi obtida em condições diferentes da primeira e possui uma relação sinal ruído de  $SNR = 99,43$  dB (também calculada utilizando a variância dos resíduos de identificação). Estes dados estão apresentados na Figura 6.5 e na Figura 6.6 temos a projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido para *vc1.dat*.

A obtenção dos dados de operação do protótipo, *vc1.dat*, foi realizada a partir de um programa de interface para aquisição de dados (Freitas, 1996), utilizando um placa de aquisição de dados. A resolução utilizada foi de 12 bits, tendo sido coletados 5000 pontos com um tempo de amostragem  $T_s = 3$  ms. Os valores dos componentes eletrônicos usados

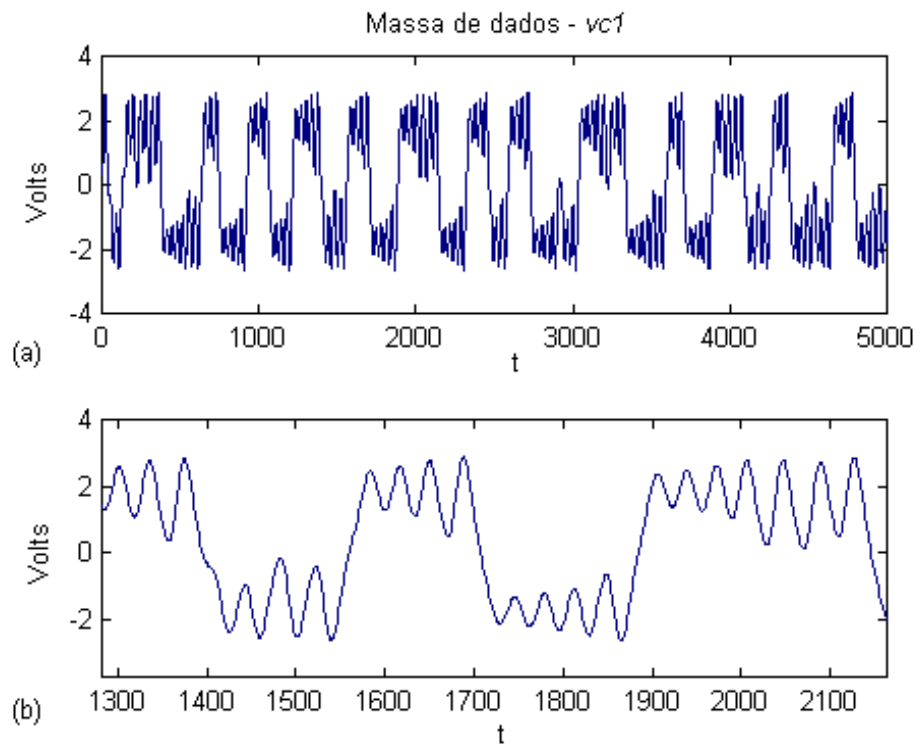


Figura 6.5 Dados experimentais da tensão  $v_{c1}$  sobre o atrator em espiral. (a) Dados  $vc1$  (b) Zoom em  $vc1$  -  $t$  indica o número de amostras.

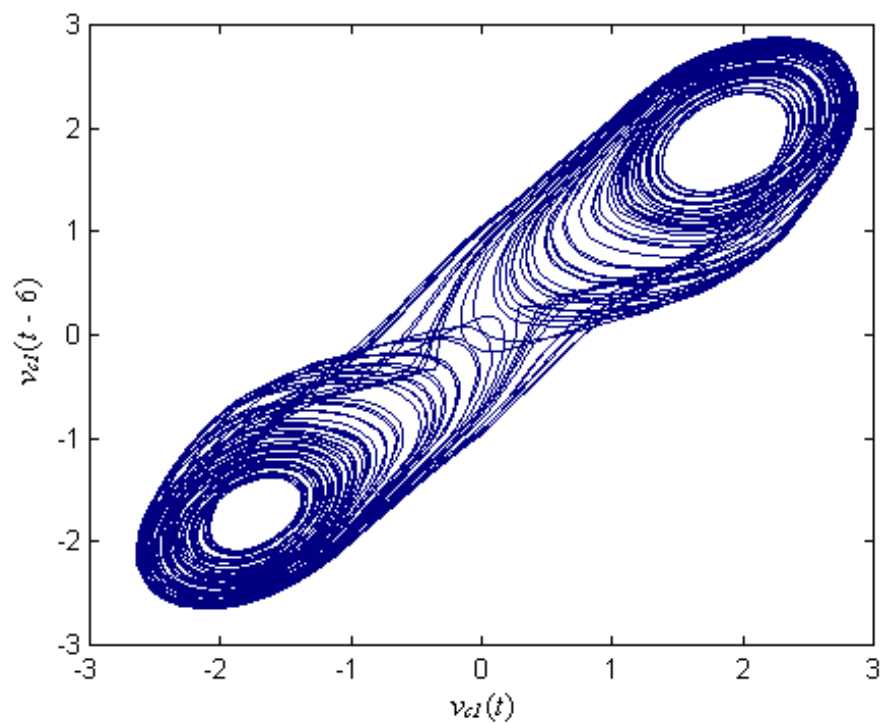


Figura 6.6 - Projção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir de  $vc1$ .

e dos parâmetros do *diodo de Chua* implementado (utilizando componentes discretos) são:

$$\begin{aligned}C_1 &= 11 \mu\text{F}; C_2 = 45 \mu\text{F}; \\L &= 20 \text{ H}; R = 1,6 \text{ k}\Omega \\m_0 &= -0,37 \text{ mS}; m_1 = -0,68 \text{ mS} \\B_p &= 1,10 \text{ V}\end{aligned}$$

A utilização de placa de aquisição possibilitou o aumento da resolução na amostragem sem limitar o número máximo de amostras.

### 6.3.2 Detecção de estrutura e estimação de parâmetros

O objetivo deste capítulo é obter modelos racionais para o circuito de Chua a partir da variável  $v_{c1}$ . Os modelos obtidos são monovariáveis e usam apenas a variável tensão sobre o capacitor 1.

Conforme descrito anteriormente, o circuito de Chua possui três pontos fixos, sendo um trivial e dois não triviais simétricos em relação à origem. Partindo do conceito de pontos fixos, e conhecendo a priori o número de pontos fixos do circuito de Chua se conclui, de acordo com a Tabela 3.1, que os agrupamentos que devem estar presentes na identificação são:

no numerador

$$\Omega_{y^3}^{\alpha}, \Omega_y^{\alpha};$$

e no denominador

$$\Omega_{y^2}^{\beta}, \Omega_0^{\beta}.$$

A utilização dos agrupamentos acima, considerando um grau de não linearidade 3, criam um universo de procura de 40 termos candidatos para o numerador e 16 termos para o denominador, perfazendo um total de 56 termos candidatos.

A escolha dos termos do modelo foi feita através do algoritmo de ERR. Testou-se modelos com número de termos de processo maior que doze, escolhendo aqueles que melhor reproduziam a dinâmica dos dados originais. Na seção 6.3.4 são apresentados os modelos obtidos.

Mesmo quando se utilizou para o universo de procura todos os termos possíveis, independente do agrupamento, o algoritmo ERR selecionou apenas termos dos agrupamentos referidos, o que demonstra a eficiência do algoritmo usado na detecção da estrutura. Este resultado pode ser visto na Figura 6.7 onde temos a evolução dos coeficientes de agrupamentos do numerador e na Figura 6.8, onde se verifica a evolução dos coeficientes de agrupamentos do denominador em função do número de termos de processo. Observa-se, que apenas quando o número de termos de processo era superior a 20, o ERR selecionou termos pertencentes ao agrupamento espúrio,  $\Omega_y^\beta$ , com coeficiente muito baixo em relação aos demais agrupamentos. Termos pertencentes aos demais agrupamentos espúrios  $\Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha$  do numerador e  $\Omega_{y^3}^\beta$  do denominador não foram selecionados.

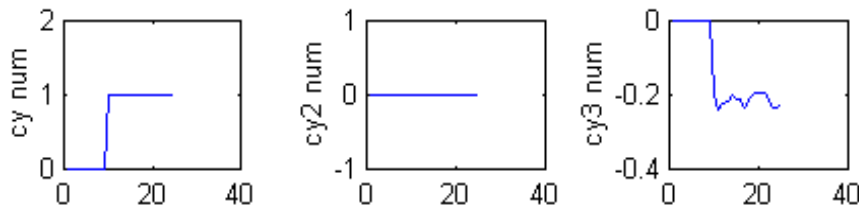


Figura 6.7 Evolução dos coeficiente de agrupamentos do numerador

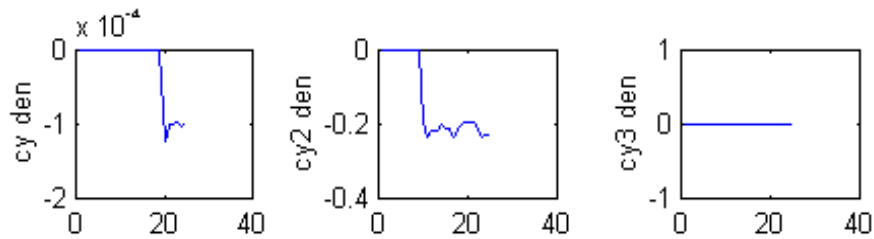


Figura 6.8 Evolução dos coeficiente de agrupamentos do denominador

### 6.3.3 Validação dos modelos obtidos

Os modelos obtidos para representar o comportamento da variável  $v_{cl}$  foram avaliados quanto às suas características dinâmicas e às características estatísticas dos respectivos resíduos. Esta avaliação teve como principal objetivo verificar sua eficiência na reprodução da dinâmica dos dados originais.

Além da validação estatística através de testes de correlação dos resíduos de identificação, os modelos obtidos foram validados verificando suas qualidades dinâmicas. As propriedades escolhidas para medir a qualidade dinâmica dos modelos do circuito de Chua foram (Aguirre e Billings, 1994a):

- geometria do atrator (forma, tamanho, simetria de pontos fixos e autoestrutura);
- expoentes de Lyapunov estimados;
- dimensão de correlação do atrator estimado.

A geometria do atrator foi avaliada visualmente, e os pontos fixos dos modelos foram calculados analiticamente a partir do modelo, utilizando as equações descritas na seção 3.6. (Mendes, 1995b).

A dimensão de Lyapunov e a dimensão de correlação foram obtidas através dos programas MTRCHAOS & MTRLYAP<sup>1</sup>. Estes programas possibilitam avaliar a partir de uma série temporal se um sistema possui comportamento caótico. Esta avaliação pode ser feita a partir do cálculo de invariantes dinâmicos tais como o máximo expoente de Lyapunov e a dimensão de correlação.

O cálculo da dimensão de correlação é implementado através do algoritmo de Grassberger-Procaccia (1983), e o cálculo do expoente de Lyapunov é baseado no padrão de divergência de trajetórias para pontos vizinhos (Wolf e outros, 1985).

Para a massa de dados *vc1.dat* foram obtidos dois modelos: *ratvc1* e *ratvc1r*, sendo que a diferença entre eles é a presença de termos de ruído no segundo. Para a massa de testes *dsv1* obteve-se apenas o modelo *ratdsv1*. A seguir temos os modelos identificados:

#### • Modelo *ratvc1*

Obtido com massa de dados *vc1* com 19 termos de processo. Sem a presença de termos de ruído.

$$y(t) = \frac{1}{den} \times \{ 3,1182 y(t-1) - 3,1171 y(t-2) + 9,5359 \times 10^{-1} y(t-3) + 5,6201 y(t-1)^2 y(t-3) \\ + 2,6011 y(t-2)^2 y(t-3) - 1,8873 \times 10^{-1} y(t-5)^3 + 5,2360 \times 10^{-1} y(t-3)^3 + \\ + 5,3063 \times 10^{-2} y(t-5) + 1,5 y(t-1)^2 y(t-5) - 4,3538 \times 10^{-1} y(t-2)^2 y(t-5) + \\ + 3,8954 \times 10^{-1} y(t-2) y(t-5)^2 - 1,0065 \times 10^{+1} y(t-1) y(t-2) y(t-3) + \\ + 1,3607 \times 10^{-1} y(t-1) y(t-5)^2 \}$$

<sup>1</sup> MTRCHAOS & MTRLYAP são um par de programas para análise de sistemas (possivelmente) caóticos. Tais programas são baseados em (Rosenstein e outros, 1993).

onde:

$$\begin{aligned} den = & 1 - 1,7872 y(t-1)^2 + 7,9271 y(t-1)y(t-2) - 7,6119 y(t-2)^2 + 1,5886 y(t-2)y(t-5) - \\ & - 3,3075 \times 10^{-2} y(t-5)^2 \end{aligned}$$

• **Modelo ratvc1r**

Obtido com massa de dados vc1 com 19 termos de processo. Com a presença de 15 termos de ruído, sendo 10 lineares e 5 quadráticos.

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{den} \times \{ & 3,2855 y(t-1) - 3,6385 y(t-2) + 1,3950 y(t-3) + 4,9522 \times 10^{-1} y(t-1)^2 y(t-3) - \\ & - 1,8171 \times 10^{-1} y(t-2)^2 y(t-3) - 1,7831 \times 10^{-1} y(t-5)^3 + 3,7863 \times 10^{-1} y(t-3)^3 - \\ & - 3,5944 \times 10^{-2} y(t-5) + 1,7736 y(t-1)^2 y(t-5) - 3,2792 \times 10^{-1} y(t-2)^2 y(t-5) + \\ & + 9,7504 \times 10^{-1} y(t-2)y(t-5)^2 - 1,7730 y(t-1)y(t-2)y(t-3) - 1,1263 y(t-1)y(t-5)^2 \} \\ & + \sum_{i=1}^{10} \theta_i \xi(t-i) + \sum_{j=1}^5 \theta_j \xi(t-j) \xi(t-j) + \xi(t) \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned} den = & 1 - 2,4395 \times 10^{-1} y(t-1)^2 + 2,2771 y(t-1)y(t-2) - 3,1926 y(t-2)^2 + 1,8219 y(t-2)y(t-5) - \\ & - 6,2553 \times 10^{-1} y(t-5)^2 \end{aligned}$$

• **Modelo ratdsvcl**

Obtido com 19 termos de processo, termos lineares e quadráticos de ruído, e com número de iterações do modelo de ruído igual a 8.

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{den} \times \{ & 2,5568 y(t-1) - 1,7594 y(t-2) + 0,2696 y(t-5) + 0,6192 y(t-1)^3 - 1,0219 y(t-2)^3 - \\ & - 3,2455 y(t-1)^2 y(t-5) + 0,0735 y(t-3)^3 + 0,3444 y(t-1)y(t-5)^2 \\ & - 0,4401 y(t-2)y(t-5)^2 + 3,4624 y(t-1)y(t-2)y(t-5) + 0,1986 y(t-1)^2 y(t-2) \} + \\ & + \sum_{i=1}^{10} \theta_i \xi(t-i) + \sum_{j=1}^5 \theta_j \xi(t-j) \xi(t-j) + \xi(t) \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned} den = & 1 + 1,5164 y(t-1)y(t-2) + 0,5657 y(t-3)y(t-5) - 1,8527 y(t-2)^2 + 0,1948 y(t-1)^2 + \\ & + 1,7662 y(t-2)y(t-5) - 0,1409 y(t-5)^2 - 2,0470 y(t-1)y(t-5) \end{aligned}$$

### 6.3.3.1 Validação dos modelos a partir de *vc1.dat*

A primeira avaliação feita nos modelos em questão se referem a localização dos pontos fixos. A Tabela 6.1 apresenta os pontos fixos calculados a partir dos dados de operação do protótipo e a partir dos modelos obtidos para a massa de dados *vc1.dat*.

Tabela 6.1 Pontos fixos calculados para modelos obtidos a partir de *vc1*.

|              | Sistema Original   | <i>ratvc1</i> | <i>ratvc1r</i> |
|--------------|--------------------|---------------|----------------|
| Pontos fixos | 0                  | 0             | 0              |
|              | $1,80 \pm 0,04$ V  | 1,93          | 1,89           |
|              | $-1,80 \pm 0,04$ V | -1,93         | -1,89          |

Os cálculos dos pontos fixos mostram que os modelos racionais obtidos aproximam bem os pontos fixos dos dados de operação do protótipo. No caso de *vc1.dat*, Tabela 6.1, observa-se que o modelo obtido com termos de ruído, *ratvc1r*, aproxima melhor os pontos fixos do que o modelo obtido para o modelo sem termos de ruído, *ratvc1*.

As Figuras 6.9 e 6.10 apresentam os resultados da predição de  $k$  passos a frente para os modelos obtidos a partir da massa de dados *vc1.dat*. Através de uma inspeção visual nas referidas figuras observa-se uma diferença significativa nos “períodos” médios dos sinais. Esta diferença também foi verificada quando calculado o período médio de cada sinal. O período médio, mostrado na Tabela 6.2, foi obtido através do maior valor no espectro de potência do sinal, calculado através de MTRCHAOS.

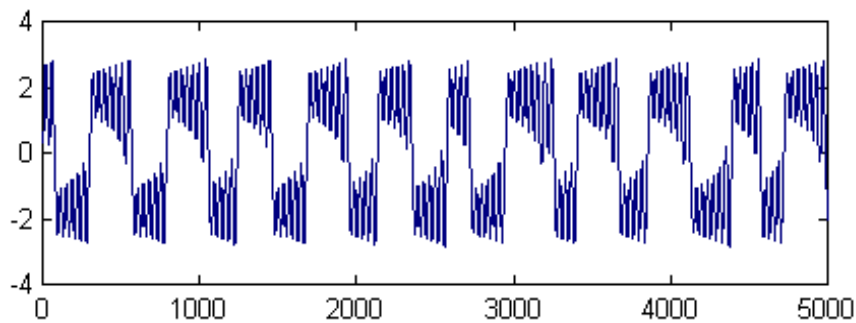


Figura 6.9 Resultado obtido com predição de  $k$  passos a frente do modelo *ratvc1*.

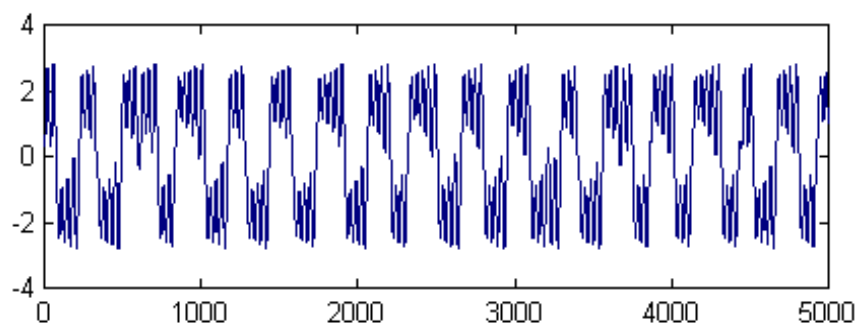


Figura 6.10 Resultado obtido com predição de  $k$  passos a frente do modelo *ratvc1r*.

Tabela 6.2 Períodos médios, calculados a partir dos dados de identificação *vc1.dat*, e a partir da simulação dos modelo *ratvc1r* e *ratvc1*.

|               | <i>vc1.dat</i> | <i>ratvc1r</i> | <i>ratvc1</i> |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| Período médio | 152            | 120            | 134           |

As Figuras 6.11 e 6.12 apresentam a projeção bidimensional do atrator de dupla volta com os modelos obtidos para a massa de dados *vc1.dat*. Nestas figuras observa-se que ambos modelos obtidos reproduzem satisfatoriamente o comportamento dos dados de operação do protótipo observados na Figura 6.6.

A Figura 6.13 apresenta a evolução do cálculo do maior expoente de Lyapunov, obtido através de MTRLYAP, para a massa de dados *vc1.dat* e para os dados obtidos pela simulação de  $k$  passos a frente dos modelo *ratvc1* e *ratvc1r*. Observa-se que a evolução do expoente obtido a partir do modelo *ratvc1r* aproxima-se mais dos dados originais. No cálculo do expoente de Lyapunov, através do valor médio de convergência das curvas apresentadas na Figura 6.13, e apresentado na Tabela 6.3, verifica-se que os valores estimados do expoente de Lyapunov diferem um pouco do valor obtido com dados de operação do protótipo.

Na Figura 6.14 temos a curva que possibilita o cálculo da dimensão de correlação para os dados *vc1.dat* e modelos obtidos a partir deste. A dimensão de correlação deve ser calculada pela inclinação da curva na região linear. A Tabela 6.4 apresenta uma estimativa deste invariante para cada curva da Figura 6.14. Verifica-se que a dimensão de correlação dos modelos racionais se aproximam à dimensão do atrator original. Mais uma vez, parece que o modelo *ratvc1r* é um pouco superior ao modelo *ratvc1*.

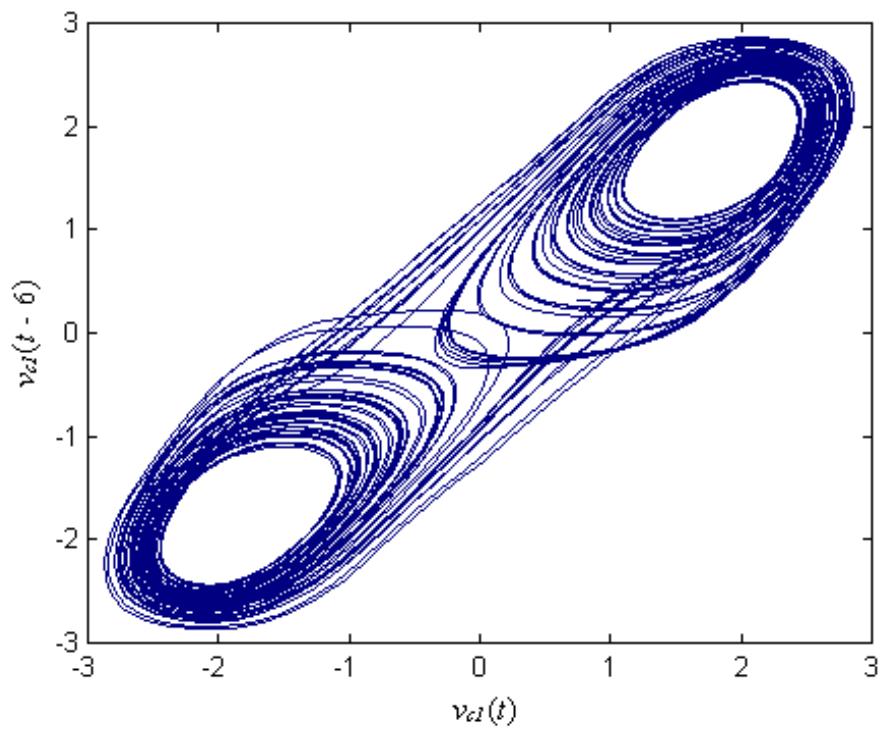


Figura 6.11 - Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do modelo *ratvc1*.

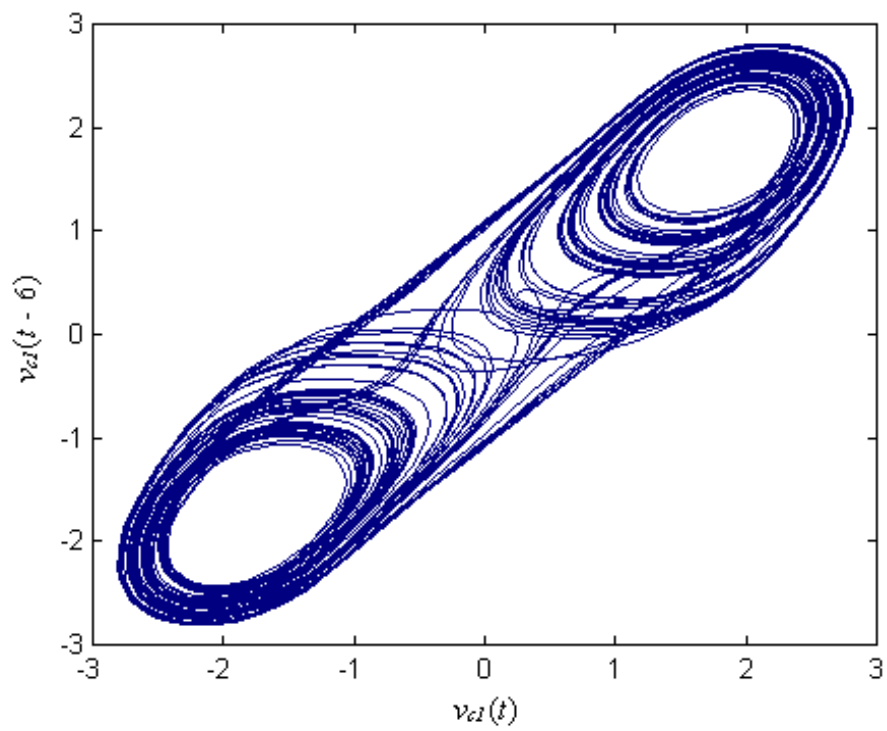


Figura 6.12 - Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do modelo *ratvc1r*.

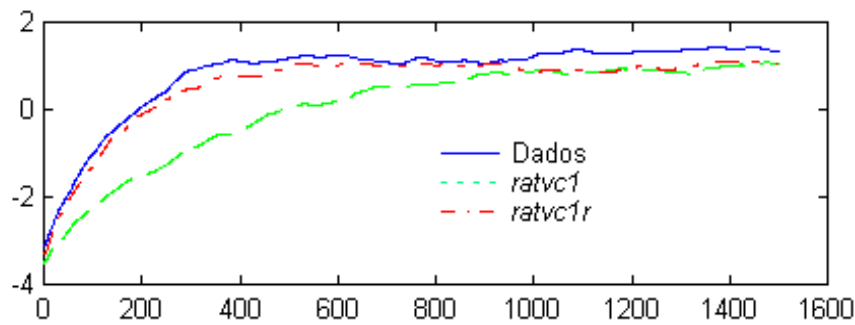
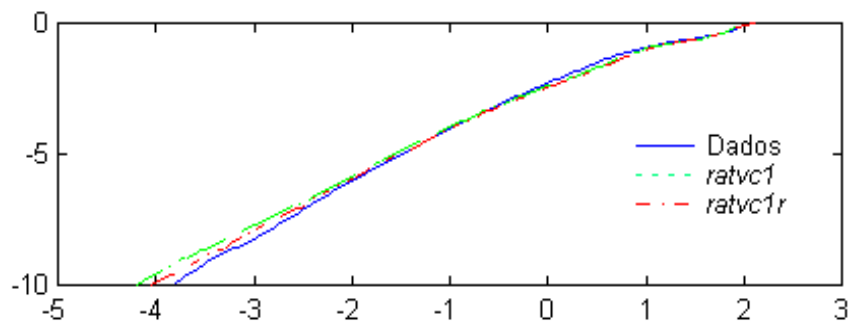
Figura 6.13 Evolução do cálculo do expoente de Lyapunov. Dados *vc1.dat*

Tabela 6.3 Valor estimado para o expoente de Lyapunov

|                      | <i>vc1.dat</i>      | <i>ratvc1</i>       | <i>ratvc1r</i>      |
|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Expoente de Lyapunov | $1,3454 \pm 0,0490$ | $0,9201 \pm 0,0758$ | $0,9750 \pm 0,0846$ |

Figura 6.14 Resultado do cálculo da dimensão de correlação. Dados *vc1.dat*.Tabela 6.4 Dimensão de correlação, dados *vc1.dat* e modelos *ratvc1* e *ratvc1r*.

|                        | Dados<br><i>vc1.dat</i> | Modelo<br><i>ratvc1</i> | Modelo<br><i>ratvc1r</i> |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| Dimensão de correlação | $2,11 \pm 0,09$         | $1,85 \pm 0,04$         | $1,96 \pm 0,04$          |

O outro procedimento usado na validação dos modelos foi a validação estatística através de funções de auto-correlação, utilizando neste caso apenas os resíduos de identificação. As Figuras 6.15 e 6.16 apresentam os resultados obtidos. Verifica-se que curva de auto-correlação para ambos os modelos não permitem afirmar que os resíduos sejam totalmente brancos, o que não significa que os modelos não podem reproduzir a dinâmica do sistema original. Sabe-se que os testes de validação estatística, usando funções de correlação não são

suficientes para a garantia de reprodução de características dinâmicas do sistema (Aguirre e Billings, 1994a; Aguirre e Billings, 1995a).

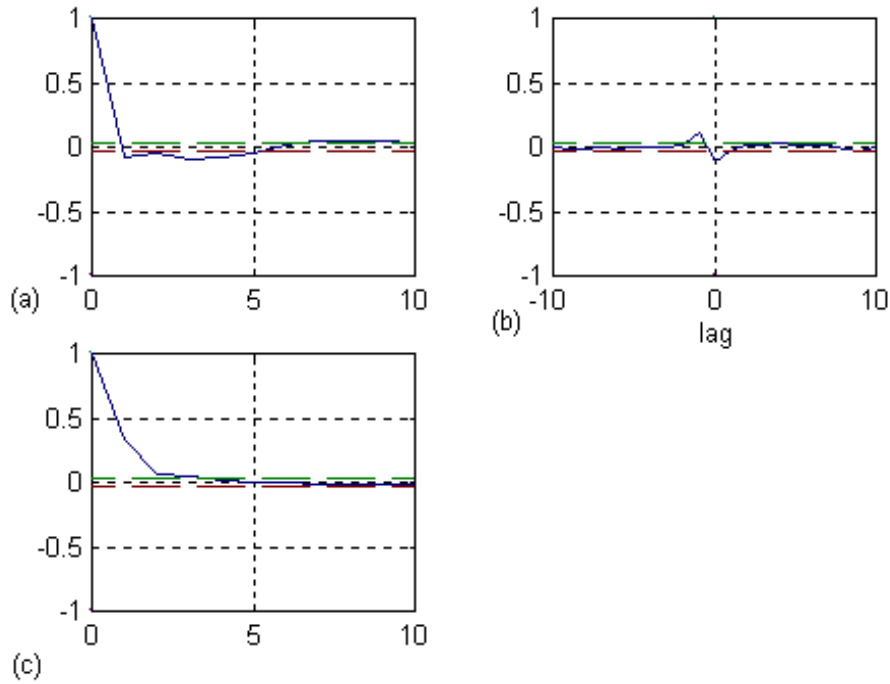


Figura 6.15 Teste de correlação nos resíduos de identificação modelo ratvc1. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $\xi(t) \times [\xi(t) - \text{media}(\xi(t)^2)]$ ; (c)  $[\xi(t)^2 - \text{media}(\xi(t)^2)] \times [\xi(t)^2 - \text{media}(\xi(t)^2)]$

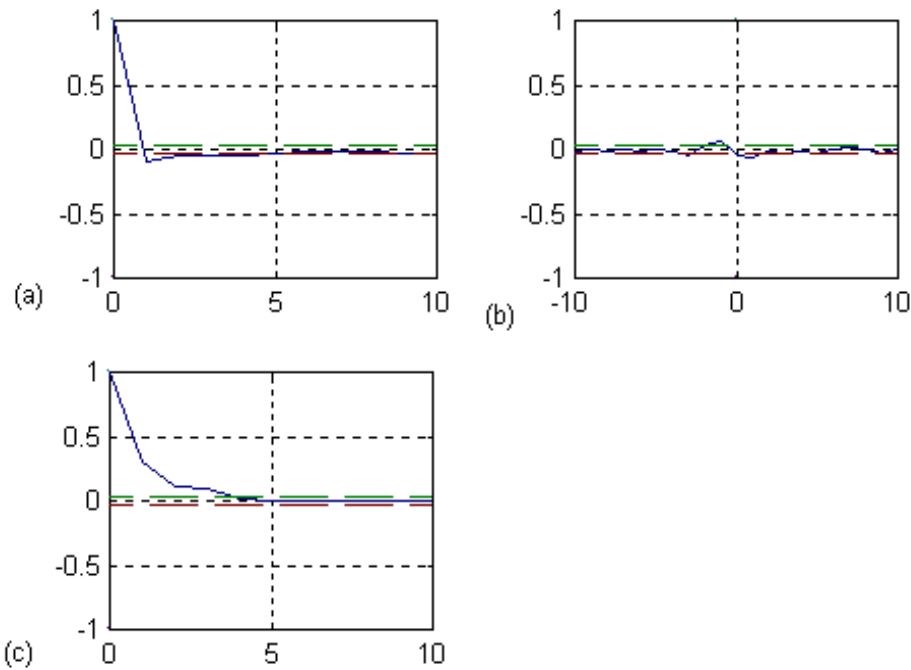


Figura 6.16 Teste de correlação nos resíduos de identificação modelo ratvc1r. (a)  $\xi(t) \times \xi(t)$ ; (b)  $\xi(t) \times [\xi(t) - \text{media}(\xi(t)^2)]$ ; (c)  $[\xi(t)^2 - \text{media}(\xi(t)^2)] \times [\xi(t)^2 - \text{media}(\xi(t)^2)]$

### 6.3.3.2 Validação dos modelos obtidos a partir de *dsvc1.dat*

Nesta seção são apresentados os resultados da validação do modelo *ratdsvc1*, obtido a partir dos dados *dsvc1*. Os testes aplicados foram os mesmos descritos para *vc1*. Apresentaremos aqui apenas as diferenças mais significativas e a comparação com o modelo polinomial obtido em (Rodrigues, 1996).

Na Tabela 6.5 temos os pontos fixos calculados com os dados originais e com os modelos racional e polinomial. Verifica-se que o modelo polinomial conseguiu reproduzir melhor os pontos fixos do sistema original.

Tabela 6.5 Pontos fixos calculados a partir de *dsvc1*.

|              | Sistema Original | <i>dsae1</i> | <i>ratdsvc1</i> |
|--------------|------------------|--------------|-----------------|
| Pontos Fixos | 0                | 0            | 0               |
|              | 2,24             | 2,24         | 2,37            |
|              | -2,24            | -2,24        | -2,37           |

A Figura 6.17 apresenta a projeção bidimensional obtida a partir da predição de 3000 passos a frente do modelo *ratdsvc1*. A Figura 6.18 apresenta o mesmo resultado a partir do modelo polinomial *dase1* obtido em (Rodrigues, 1996). Os resultados apresentados mostram que apesar de reproduzir a forma do atrator de dupla volta do circuito de Chua, o atrator obtido a partir do modelo racional é mais denso que o obtido pelo modelo polinomial, sendo que este último se aproxima mais do comportamento observado nos dados originais.

No cálculo dos invariantes dinâmicos, maior expoente de Lyapunov e dimensão de correlação, resultados apresentados nas figuras 6.19 e 6.20, Tabelas 6.6 e 6.7, observa-se que o modelo racional aproxima com razoável precisão as características dinâmicas observadas nos dados de identificação, porém fica claro que o modelo polinomial é, neste caso melhor que o racional.

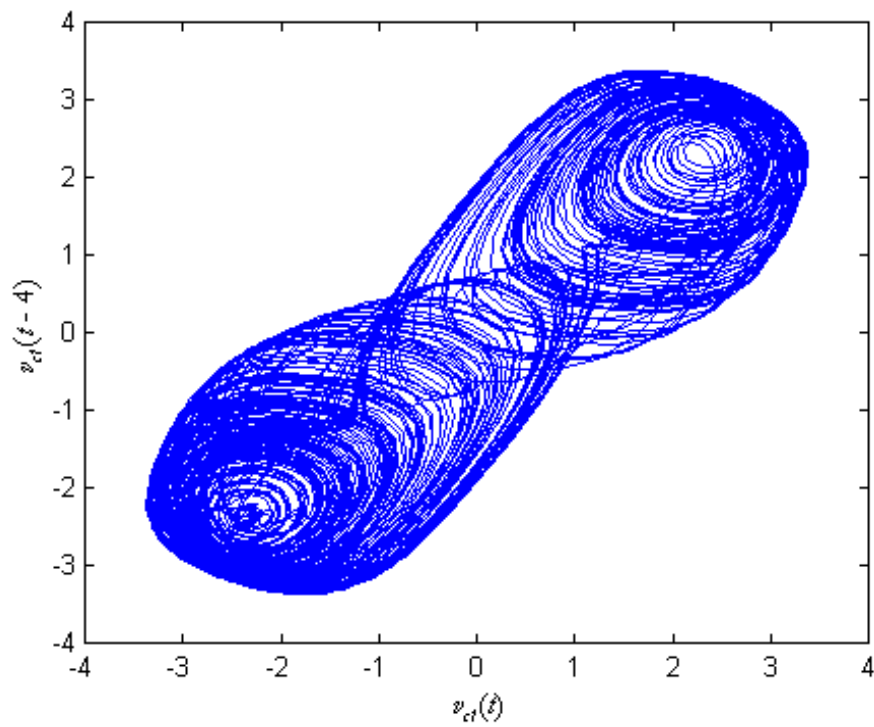


Figura 6.17 - Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do modelo *ratdsvc1*.

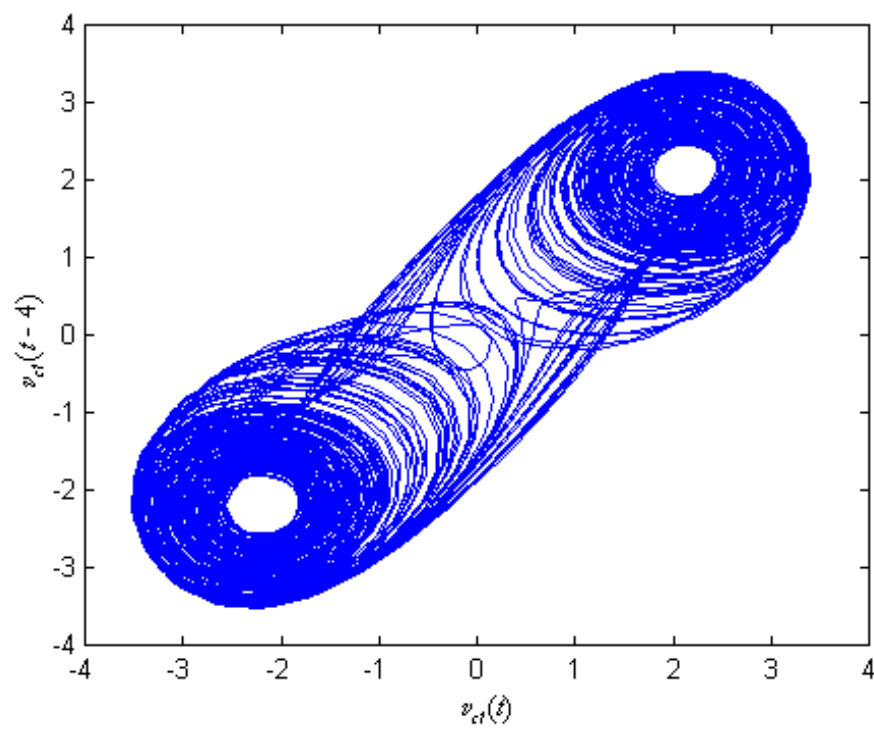


Figura 6.18 - Projeção bidimensional do atrator caótico de dupla volta obtido a partir do modelo *dsae1*.

Em (Goubest e Letellier, 1994) temos que, dependendo da variável observada no sistema de Rössler a estrutura racional pode ser mais indicada do que a polinomial. Utilizando procedimento equivalente ao descrito em (Goubest e Letellier, 1994), verifica-se que no caso do circuito de Chua a estrutura polinomial é mais adequada. Ao escrever as variáveis  $v_{c2}$  e  $i_L$  em função de  $v_{c1}$ , temos funções polinomiais e não racionais.

É possível generalizar que a estrutura racional é indicada em situações onde, nas equações dinâmicas do sistema, ocorrem produtos entre as variáveis de estado, fato que não é observado nas equações dinâmicas do circuito de Chua, como pode ser visto em (6.1). Portanto, o fato do modelo polinomial representar melhor a dinâmica do circuito de Chua é perfeitamente justificado.

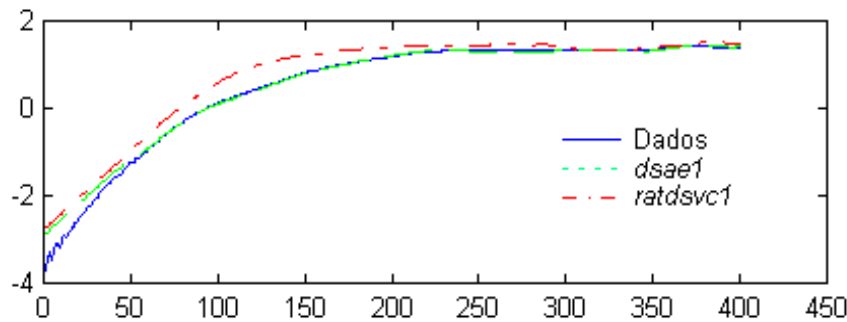


Figura 6.19 Evolução do cálculo do expoente de Lyapunov. Dados dsvc1.dat

Tabela 6.6 Valor estimado para o expoente de Lyapunov

|                      | Dados<br>dsvc1.dat  | Modelo<br>polinomial dsae1 | Modelo racional<br>ratdsvc1 |
|----------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Expoente de Lyapunov | $1,3516 \pm 0,0343$ | $1,3350 \pm 0,0563$        | $1,4218 \pm 0,0596$         |

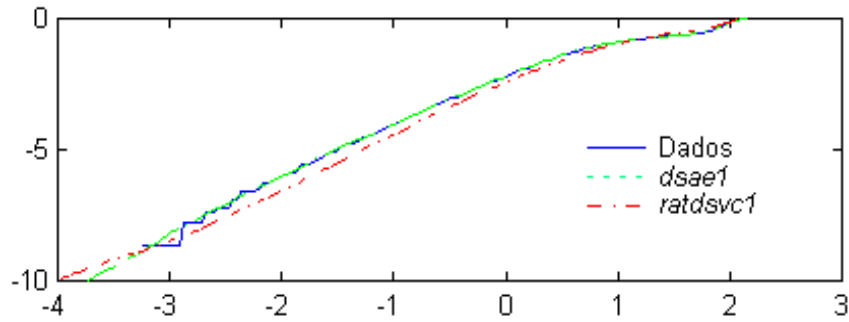


Figura 6.20 Cálculo da dimensão de correlação modelos obtidos a partir de dsvc1.dat

Tabela 6.7 Dimensão de correlação, dados dsvc1.dat e modelos dsae1 e ratdsvc1

|                        | Dados<br><i>vc1.dat</i> | Modelo<br>Polinomial<br><i>dsae1</i> | Modelo<br>Racional<br><i>ratdsvc1</i> |
|------------------------|-------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Dimensão de correlação | $1,96 \pm 0,11$         | $2,04 \pm 0,07$                      | $2,12 \pm 0,04$                       |

A validação estatística do modelo *ratdsvc1* foi feita com os mesmos testes aplicados aos modelos obtidos para a massa de dados *vc1.dat*, descritos na seção anterior, não apresentando nenhuma diferença significativa, por isso estes resultados não são apresentados.

## 6.4 Comentários Finais

Este capítulo apresentou a identificação de atratores caóticos do circuito não-linear de Chua, utilizando a representação NARMAX racional. O regime dinâmico analisado é representado pelo atrator de dupla volta presente na variável  $v_{c1}$  do circuito não-linear de Chua.

A representação racional se mostrou eficiente na reprodução da dinâmica não linear presente na variável  $v_{c1}$  do circuito de Chua. A estrutura do modelo racional foi obtida utilizando o critério ERR, pontos fixos e agrupamentos de termos. O ERR se mostrou bastante eficaz na seleção de estrutura, pois em nenhum momento selecionou termos pertencentes a agrupamentos espúrios, apesar de não ter indicado que a representação polinomial era mais adequada.

Observou-se também que os modelos racionais obtidos possuem qualidade inferior ao modelo polinomial obtido para a mesma variável e massa de dados de identificação. Este resultado aponta para uma melhor adequação da representação polinomial na reprodução do comportamento dinâmico verificado na variável  $v_{c1}$  do circuito não-linear de Chua. Este resultado é justificado pelas características das equações que descrevem o comportamento dinâmico do circuito de Chua.

## Conclusão

Obter modelos matemáticos de sistemas físicos é de vital importância para a ciência e a engenharia e encontra aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. Dentre vários métodos usados para a obtenção de modelos matemáticos destaca-se a identificação de sistemas. A identificação de sistemas permite obter modelos matemáticos a partir de dados medidos no sistema a ser modelado. Este trabalho investigou a aplicação de técnicas para identificação de sistemas dinâmicos não lineares utilizando modelos NARMAX racionais estabelecendo comparações com os modelos NARMAX polinomiais.

A identificação de sistemas pode ser dividida em duas grandes etapas. A primeira consiste na obtenção em si do modelo e a segunda na sua validação. A obtenção do modelo passa pela seleção da estrutura, escolha dos termos candidatos e pela estimação dos parâmetros. A validação consiste em verificar se todas as dinâmicas de interesse observadas no sistema estão representadas no modelo em questão, ou se o modelo é capaz de reproduzir o comportamento do sistema físico original.

Este trabalho procurou analisar a capacidade de modelos racionais NARMAX de descrever comportamento dinâmico de sistemas reais. A representação NARMAX racional foi proposta recentemente com ainda poucas aplicações efetivamente testadas em situações reais, ao contrário da representação NARMAX polinomial que já se encontra bastante difundida tendo sido usada para modelar diversos sistemas reais. Os modelos racionais NARMAX foram propostos devido à capacidade que funções racionais têm de descrever eficientemente um grande número de não linearidades. O fato da representação racional ser não linear nos parâmetros introduz uma dificuldade adicional na estimação dos mesmos que impede a utilização de algoritmos de mínimos quadrados ordinários.

Neste trabalho utilizaram-se modelos racionais NARMAX para representar a dinâmica observada em alguns sistemas reais. Os sistemas modelados foram o forno elétrico do Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) e o circuito eletrônico de Chua. O processo de identificação deu origem a vários modelos que reproduziram o comportamento dos sistemas originais e possibilitaram compará-los com modelos polinomiais obtidos para os mesmos sistemas, utilizando as mesmas massas de testes.

Os modelos racionais se mostraram mais eficientes para prever o comportamento do forno elétrico que os modelos polinomiais. Observou-se que os modelos racionais reproduziram melhor o fato do forno possuir duas constantes de tempo diferentes de aquecimento, além de ajustar constantes de tempo diferentes de aquecimento e de esfriamento. Ressalta-se também o fato dos modelos racionais aproximarem melhor o comportamento do forno em regiões de funcionamento que não foram visitadas pelos dados de identificação. Por último observa-se que os modelos racionais do forno elétrico possuem menos termos de processo que os modelos polinomiais e com menor ordem.

Outra dinâmica real modelada foram os atratores caóticos de dupla volta do circuito de Chua. Os modelos racionais conseguiram aproximar o comportamento caótico observado nos dados originais. Neste caso porém, na validação dinâmica verificou-se que os modelos polinomiais se mostraram mais eficientes que os racionais.

Através do desenvolvimento deste trabalho foi possível identificar dois tipos de sistemas, onde teoricamente, os modelos racionais seriam mais indicados que os polinomiais. Estes sistemas são: (i) caracterizados por dependência das constantes de tempo em função da entrada e/ou saída; (ii) representados por equações dinâmicas em que aparece produtos entre as variáveis de estado. No entanto, na prática, nem sempre é possível conhecer a priori todas as características dos sistemas dinâmicos, o que torna inevitável a detecção de estrutura e o processo de investigação/tentativa para sua modelagem.

Neste trabalho foram analisados aspectos da identificação de sistemas e da representação NARMAX racional. A seguir algumas propostas de continuação deste são apresentadas:

- análise da influência da escolha do regressor para estimação dos parâmetros, na qualidade do modelo racional obtido;
- desenvolvimento de rotinas para identificação e estimação de parâmetros “on-line” para os modelos NARMAX racionais;
- projeto de controladores para sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX racionais;
- estudo da utilização de conhecimento prévio para escolha da estrutura, enfocando situações onde a representação NARMAX racional é ou não mais indicada.

# Apêndice A

## Rotinas em MATLAB Usadas

### Introdução

Este apêndice descreve brevemente rotinas utilizadas na identificação de modelos racionais NARMAX. As rotinas descritas adiante foram desenvolvidas em (Mendes, 1995), exceção feita a **ratelsr.m**, que foi desenvolvida ao longo deste trabalho.

### Rotinas

- **fix\_poir.m**

Calcula os pontos fixos de a partir de um modelo polinomial. Utiliza os conceitos de agrupamentos e coeficiente de agrupamentos de termos, formando o polinômio característico Equação 3.26.

Sintaxe:

$$[f,d,jac,l,v,vv] = \text{fix\_poir}(\text{num},\text{den},\text{xn},\text{xd},f).$$

Parâmetros de entrada:

- num - modelo do numerador;
- den - modelo do denominador;
- xn - coeficientes do numerador;
- xd - coeficientes do denominador;
- f - pontos fixos (opcional);

Retorno:

- f - pontos fixos;
- d - raízes do polinômio ao qual estão os pontos fixos;
- jac - evolução da matriz jacobiana nos pontos fixos;
- l - polinômio característico;
- v - zeros de l;
- vv - auto vetores de l;

- **gentm41.m**

Esta rotina gera um conjunto de termos candidatos para a escolha de estrutura.

Sintaxe:

model = gentm41(degree,lagy,lagu,lage).

Parâmetros de entrada:

- degree - grau de não linearidade do modelo;
- lagy - máximo atraso dos termos de saída;
- lagu - máximo atraso dos termos de entrada (opcional);
- lage - máximo atraso dos termos de ruído (opcional).

Retorno:

model - matriz contendo o conjunto de termos candidatos.

Na matriz de retorno, os termos são representados por uma sequência de quatro algarismos, conforme apresentado na Figura A.1. A matriz modelo terá número de colunas igual ao grau de não linearidade máximo do modelo. Uma linha do tipo [1101 2102 0], representa o termo não linear  $y(t-1)u(t-2)$ . Como existem três colunas, o grau de não linearidade máximo do modelo é igual a 3.

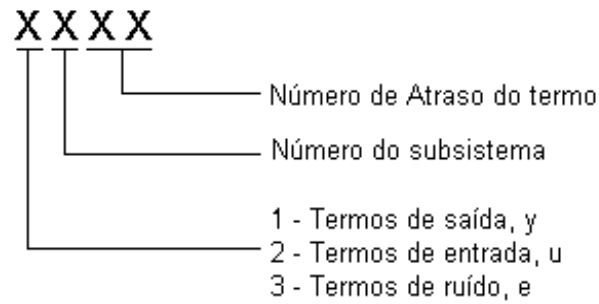


Figura A.1 Simbologia usada em gentm41.m

- **rat2tex.m**

Retorna comandos “latex” que podem ser diretamente convertidos em texto usando arquivos do tipo “latex”.

Sintaxe:

$$[t,s] = \text{rat2tex}(\text{num}, \text{den}, \text{xn}, \text{xd}, \text{prec}).$$

Parâmetros de entrada:

num     - modelo do numerador;  
den     - modelo do denominador;  
xn     - coeficientes do numerador;  
xd     - coeficientes do denominador;  
prec    - precisão.

Retorno:

t     - comando “latex”;  
s     - modelo;

- **ratlsr.m**

Rotina descrita no capítulo 4 que utiliza o algoritmo estimador para modelos racionais modificado - RME modificado com adição de termos de ruído.

Sintaxe:

[xn,xd,num,den,ve,va,xni,xdi,ei] = ratelsr(model1,model2,ruido,u,y,Np,term,N,inc,Prt).

Entradas:

|        |                                                    |
|--------|----------------------------------------------------|
| model1 | - termos candidatos para o numerador;              |
| model2 | - termos candidatos para o denominador;            |
| ruido  | - modelo para os termos de ruído;                  |
| u      | - dados da entrada;                                |
| y      | - saída;                                           |
| Np     | - número de termos de processo;                    |
| term   | - termo do denominador para ser feita a regressão; |
| N      | - Número de interações para os termos de ruído.    |

Retorno:

|     |                                                                              |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|
| xn  | - coeficientes iniciais no numerador, calculados usando mínimos quadrados;   |
| xd  | - coeficientes iniciais do denominador, calculados usando mínimos quadrados; |
| num | - modelo final do numerador;                                                 |
| den | - modelo final do denominador;                                               |
| ve  | - matriz -> [e ydet edet yosa], retorno de <b>ratism4.m</b> ;                |
| va  | - variância dos resíduos;                                                    |
| xni | - matriz com coeficientes do numerador a cada interação;                     |
| xdi | - matriz com coeficientes do denominador a cada interação;                   |
| ei  | - resíduos a cada interação.                                                 |

Esta rotina internamente utiliza **ratism4.m** para detecção de estrutura e estimação dos parâmetros iniciais. Por isso, o retorno desta função é igual a **ratism4.m**, com exceção a xni, xdi e ei.

- **ratism4.m**

Retorna um modelo racional identificado a partir de um par de entrada e saída. A seleção de a estrutura é feita pelo algoritmo ERR. Esta rotina não pode ser usada com termos de ruído.

Sintaxe:

$$[xn,xd,num,den,ve,va] = ratsm4(model1,model2,u,y,N,term,inc,Prt).$$

Parâmetros de entrada:

model1 - Conjunto de termos candidatos para o numerador;  
model2 - Conjunto de termos candidatos para o denominador;  
u - Vetor contendo o sinal de entrada;  
y - Vetor contendo o sinal de saída;  
N - Numero de termos de processo requerido;  
term - Termo (do denominador) com o qual a regressão é feita;  
inc - Inclusão, ou não, de termo constante no modelo final. ('y','n');  
Prt - Impressão dos resultados ('c','n').

Retorno:

xn - Coeficientes do numerador;  
xd - Coeficientes do denominador;  
num - Modelo final para o numerador;  
den - Modelo final para o denominador;  
ve - matriz -> [e ydet edet yosa];  
e - Erro na predição de 1 passo a frente;  
ydet - predição de yr com k passos a frente usando o modelo identificado;  
edet - diferença entre y e yr;  
yosa - diferença de y-e;  
va - Variância dos resíduos.

- **simodr.m**

Simula um modelo MIMO NARMAX a partir de um sinal de entrada e das condições iniciais.

Sintaxe:

$$y = simodr(num,den,xn,xd,u,y0,e).$$

### Parâmetros de entrada

num - modelo do numerador;  
den - modelo do denominador;  
xn - coeficientes do numerador;  
xd - coeficientes do denominador;  
u - dados de entrada;  
y0 - condições iniciais;  
e - ruído.

### Retorno:

y - saída.

O vetor de saída y possui número de termos igual ao vetor de entrada u.

### Exemplo de utilização

Na Figura A.2 é apresentado um exemplo de uma seqüência de comandos que permiti obter modelos racionais, usando as rotinas do MATLAB descritas acima.

É importante ressaltar que a obtenção de modelos exige a escolha de vários parâmetros, como: grau de não linearidade, número de termos de atraso, número de termos de processo, etc, e as rotinas de identificação apenas auxiliam neste processo. A qualidade dos modelos obtidos estará intimamente ligada com a experiência de quem utiliza estas rotinas e na sua capacidade de analisar os resultados.

Exemplo: Sequência de comandos em matlab usados para identificação de modelos racionais.

```

load example.mat           %Carrega os dados de entrada e saída
d=3;                       %Define o grau de não linearidade
lag=2;                     %Define a ordem do modelo
model1=gentm41(d,lag,lag); %Gera conjunto de termos candidatos
                           % para o numerador
model1=gentm41(d,lag,lag); %Conjunto de termos candidatos para o
                           %denominador
ruído=gentm41(1,0,0,5)     %Define termos lineares para o ruído.

np=12;                     %Número de termos de processo
N=4;                       %Número de interações
ter=[0 0 0];               %Define o termo do denominador
                           %para %fazer a regressão.

[xn,xd,num,den,ve,va,xni,xdi,ei]=ratelsr(model1,model2,ruído,u,y,np,ter,N);

[anpr,anno,lag1,any,anu,ane,anewmodel] = get_info(num);
[bnpr,bnno,lag2,bny,bnu,bne,bnewmodel] = get_info(den);
aux=max([lag1 lag2])

ym=simodr(num,den,xni(:,N),xdi(:,N),u,y(1:aux)); %Simula o modelo

k=[1:length(u)]';
figure(1)
plot(k,u,k,y,'-b',k,ym,'.w') %Plota a entrada, a saída e a
                             %predição de k passos a
                             %frente do modelo.

mvt_ts(ei(:Ni),10,4,1);     %Plota a correlação dos
                             %resíduos

f = fix_poir(num,den,xni(:,N),xdi(:,N)) %Calcula os pontos fixos do
                                         %modelo com os parâmetros da
                                         %ultima interação

```

Figura A.2 Sequência de comandos em Matlab usados para identificação de modelos racionais.

## Referências Bibliográficas

- Abreu, S. D. G. (1993). Avaliação de desempenho de controladores auto-ajustáveis. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Aguirre, L.A. (1994) - Some Remarks on Structure Selection For Nonlinear Models - *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 4, No 6 1707-1714.
- Aguirre, L. A. (1995) The use of identified models in the control of cahotic circuit. In IEEE Symposium on Circuits na Systems, Seattle, U.S.A. 1528-1531.
- Aguirre, L.A. e Billings, S.A. (1994a), Validating identification nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):1-9-125.
- Aguirre, L.A. e Billings, S.A. (1994b). Discrete reconstruction of strange attractors of Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(4):853-864.
- Aguirre, L.A. e Billings, S.A. (1995a), Dynamical Effects of Overparametrization in Nonlinear Models - *Physica D* 80:26-40.
- Aguirre, L.A. e Billings, S.A. (1995b). Improved Structure Selection for Nonlinear Model Based on Term Clustering - *International Journal of Control*. Vol 62, no 3, 569-587.
- Aguirre, L.A. e Billings, S.A. (1995c) - Dynamical Effects of Overparametrization in Nonlinear Models - *Physica D* 80:26-40.
- Aguirre, L.A. e Mendes, E.M.A.M. (1996) - Global Nonlinear Polynomila Models: Structure, Term Clusters and Fixed Points - *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 6, No 2, 279-294.
- Aguirre, L.A. e Torres, L.A.B. (1997) "Fixed point stability analysis of Chua's circuit: a case study with a real circuit" - *Journal of Circuits, Systems and Computers*., Vol 7(2):111-115.
- Akaike, H., (1974) A new look at statistical model identification. *IEE Transactions on Automatic Control*. 19,716-723.
- Albano, A.M., Passamante, A. e Farrell, M. E. (1991) Using higher-order correlations to define na embedding window. *Physica D*54, 85-87.

- Billings, S.A. (1980). Identification of Nonlinear Systems - A Survey - *IEE Proceedings, Part D*, 127(6): 272-285.
- Billings, S.A. e Aguirre, L.A. - Effects of the sampling time on the dynamics and identification of nonlinear models - *Internacional Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 5, No 6 (1995) 1541-1556.
- Billings, S.A. e Chen, S. (1989). Identification of Nonlinear Rational Systems Using a Prediction-error Estimation Algorithm - *International Journal of Control*. SCI, Vol 20, no 3, 467-494.
- Billings, S.A. e Tao, Q.H. (1991) Model validation tests for nonlinear signal processing applications, *International Journal of Control* 54, 157-194.
- Billings, S.A. e Voon, W.S.F. (1983) Struture detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. *IEE Proceedings, Part D*, 130(4): 193-199.
- Billings, S.A. e Voon, W.S.F. (1984). Least squares parameter estimation algorithms for non-linear systems. *International Journal of Systems Science*, 15(6):601-615.
- Billings, S.A. e Voon, W.S.F. (1986) Correlation based model validity tests for nonlinear models. *International Journal of Control*, 44(1):235-244.
- Billings, S.A. e Voon, W.S.F. (1986). Correlation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49(3):1013-1032.
- Billings, S.A. e Zhu, Q.M. (1991). Rational Model Identification Using an Extented Least-squares Algorithm - *International Journal of Control*. Vol 54, no 3, 529-546.
- Billings, S.A. e Zhu, Q.M. (1994). Model validation tests for multivariable non-linear models including neural networks. Research Report No. 484, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, U.K.
- Billings, S.A. e Zhu, Q.M. (1994). Nonlinear model validation using correlation tests. *International Journal of Control* . 60(6):1107-1120.
- Billings, S.A., Chen, S. e Korenberg, M.J. (1989) Identification of MIMO systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49, 2157-2189.
- Billings, S.A., Chen, S. e Korenberg, M.J. (1989). Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimador. *International Journal of Control*, 49(6):2157-2189.

- Billings, S.A. e Chen (1989). Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Systems Science*, 15(6):601-615.
- Bohlin, T. (1971). On the problem of ambiguities in maximum likelihood identification. *Automatica*. &. 199-210.
- Box, G.E.P. e Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control* (San Francisco; Hoden-Day).
- Braess, D. (1986). *Nonlinear Approximation Theory* (Berlin: Springer-Verlag).
- Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J.D. e Gibson, J. (1991) State space reconstruction in the presence of noise. *Physica* D51, 52-89.
- Chua, L.O. e Hasler, M. (1993). The genesis of Chua's circuit. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 46(4):250-257.
- Chua, L.O., Komuro, M. e Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part I*, 33(11):1072-1118.
- Doebelin, E.O. (1980). *System modeling and response - Theoretical and experimental approaches*. John Wiley & Sons, Inc.
- Fieldler-Ferrara, N., Prado, C.P.C. (1994). *Caos, uma introdução*. Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Fraser, A.M. (1989) Reconstructing attractors from scalar time series: A comparison of singular system and redundancy criteria. *Physica* D34, 391-404.
- Freitas U.S. (1996) Desenvolvimento de um Programa de Interface para Aquisição de Dados. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/02-96, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Glover, J. e Mees, A. (1992). Reconstructing the dynamics of Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1):201-214.
- Golub, G.H. e Van Loan, C.F. (1989). *Matrix Computations*. 2nd Edition, Johns Hopkins, Lodon.
- Goodwin, G.C., e Payne, R.L. (1977) *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis* (New Uork: Academic Press).

- Gouesbet, G. e Letellier, C. (1993). Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$  approximation on nets. *Physical Review E*. Vol. 49 N.6: 4955-4972.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189-208
- Hartley, T.T. (1989). The Duffing double scroll. In proceedings of American Control Conference, pages 419-423, Pittsburgh, U.S.A..
- Hartley, T.T. e Mossayebi, F. (1993). Control of Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1):173-194.
- Holmes, P.J. (1977). Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*292,419-448.
- Hougen, J.O. (1972). *Measurements and control applications for practicing engineers*. Cahnners Books, Massachussets, U.S.A.
- Jácome, C.R.F. (1996). Uso de Conhecimento Prévio na Identificação de Modelos Polinomiais NARMAX. Dissertação de Mestrado PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, Dezembro, 1996.
- Jácome, C.R.F. e Aguirre, L.A (1996). Uso de Técnicas de Identificação Não-Linear na Modelagem de Válvulas para Controle de Processos. *I Congresso Mineiro de Automação - Set/96*, 37-41.
- Jang, H.K. e Kim, K.J. (1994) - Identification of Loudspeaker Nonlinearities Using the NARMAX Modeling Technique - *J.Audio Eng. Soc.*, Vol 42, No 1/2.
- Jota, F.G. (1995). Comunicação pessoal.
- Kadtke, J.B., Brush, J. e Holzfuss, J. (1993). Global dynamical equations and Lyapunov exponents from noisy chaotic time series, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 3(3), 607-616.
- Klamkin, M. P. (1987). *Mathematical modeling*: Classroom notes in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, U.S.A.
- Korenberg, M. J. (1985), Orthogonal identification of nonlinear difference equation models. *Mid. West Symposium on Circuits and Systems*, Louisville.

- Korenberg, M. J., Billings, S.A., Liu, Y. P. , e McIlloy, P. J. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *International Journal of Control*, 48, 193-210.
- Leontaritis, I.J. e Billings, S.A. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems part I: deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303-328.
- Leontaritis, I.J. e Billings, S.A. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems part II: deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329-344.
- Leontaritis, I.J. e Billings, S.A. (1987). Experimental design and identifiability for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2): 329-344.
- Letellier, C. e Gouesbest G. (1995). Topological Characterization of a System with High-Order Symmetries. *Physical Review E*, Vol. 52, N.5: 4754-4761.
- Ljung, L. (1987). *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall International, New Jersey.
- Ljung, L. (1994). System identification in a MIC perspective. *Modeling, Identification and Control*, Special 15th Anniversary Issue, 15(3): 153-159.
- Ljung, L. (1995). System identification. Technical Report. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Madan, R.A . (1993). Special issue on Chua's circuit: a paradigm for chaos. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3(1).
- Mao, K.Z. e Billings, S.A. (1996). A Regularized Least Squares Algorithm for Nonlinear Rational Model Identification. Dept of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield. *Research Report* No: 609.
- MathWorks, Inc. (1990). PC-MATLAB™ for MS-DOS Personal Computers. Software Users Guide.
- Mendes, E.M.A.M. (1995a). Identification of Nonlinear Discrete Systems with Intelligent Structure Detection. University of Sheffield, PhD Thesis, September 1995.
- Mendes, E.M.A.M. (1995b). Rotinas ratms4 - Rotinas para Identificacao de Modelos Racionais, FUNREI, 1995.

- Norton, J.P., (1986) *An Introduction to Identification* (London: Academic Press).
- Ogata, K (1993) *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall.
- Pena, R.T. e Aguirre L.A. (1994). Modelagem Matemática dos Sistemas Dinâmicos. Apostila. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Peyton-Jones, J.C. e Billings, S.A. (1989). Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models. *International Journal of Control*. 50(5):1925-1940.
- Rodrigues, G.G. (1996). Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Polinomiais - Aplicação a Sistemas Reais. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, junho 1996.
- Rosenstein, M.T., Collins, J.J. and De Luca, C. J. (1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D* 65:117-134.
- Torres, L.A.B. e Aguirre, LA. (1995a). Montagem e sintonia de um oscilador caótico. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/02-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Torres, L.A.B. e Aguirre, LA. (1995b). PEDINAL - Protótipo para o estudo de dinâmica não-linear. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/03-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Vallverdu, M., Korenberg M.J. e Caminal, P. (1992) Model Identification of the Neural Control of the cardiovascular System Using NARMAX Models - *IEEE Conference*.
- Wadsworth, G.P. e Bryan, J.G. (1974). *Application of Probability and Random variables*. New York: Mc Graw-Hill.
- Wilks, S., (1962). *Mathematical Statistics* (New York: Wiley).
- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. e Vastano, J. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16D, 285.
- Zhu, Q.M. e Billings S.A. (1991). Recursive Parameter Estimation for Nonlinear Rational Models. *J. Syst. Eng.* 1:63-76.
- Zhu, Q.M. e Billings S.A. (1993). Parameter estimation for stochastic nonlinear rational models. *International Journal of Control*. Vol 57, no 2, 309-333.