

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas

Tese de Doutorado

“METODOLOGIA PARA ESCALONAMENTO
E SIMULAÇÃO DE MOINHO VERTICAL”

Autor: Douglas Batista Mazzinghy

Orientador: Dr. Roberto Galéry

Coorientador: PhD Claudio Luiz Schneider

Dezembro de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas

Douglas Batista Mazzinghy

“METODOLOGIA PARA ESCALONAMENTO
E SIMULAÇÃO DE MOINHO VERTICAL”

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Metalúrgica, Materiais e de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais
como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em
Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas

Área de concentração: Tecnologia Mineral

Orientador: Dr. Roberto Galéry

Coorientador: PhD Claudio Luiz Schneider

Belo Horizonte
Escola de Engenharia da UFMG

2012

- M477m Mazzinghy, Douglas Batista.
Metodologia para escalonamento e simulação de moinho vertical
[manuscrito] Douglas Batista Mazzinghy. – 2012.
xxii, 162 f., enc.: il.
- Orientador: Roberto Galéry.
Coorientador: Cláudio Luiz Schneider.
- Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.
- Anexos: f.143-162.
- Bibliografia: f.137-142.
1. Engenharia metalúrgica - Teses. 2. Engenharia de minas – Teses.
3. Tecnologia mineral – Teses. I. Galery, Roberto. II. Schneider, Claudio
Luiz. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.
IV. Título.
- CDU: 669(043)

Para Raquel.

"A simplicidade é o último grau de sofisticação."
(Leonardo da Vinci)

AGRADECIMENTOS

Ao orientador, Professor Dr. Roberto Galéry, pelos ensinamentos e amizade. Ao coorientador, Pesquisador PhD Claudio Luiz Schneider, pelas discussões sobre modelagem matemática, conselhos e amizade.

Aos Professores: PhD Antônio Eduardo Clark Peres, pela revisão antecipada do trabalho e conselhos, e Dr. Luiz Claudio Monteiro Montenegro, pelo apoio durante a realização dos testes no laboratório de tratamento de minérios do Departamento de Engenharia de Minas da UFMG.

Aos colegas da Vale S.A. que contribuíram com ideias e/ou sugestões: Oliver Gobbo, Neymayer Lima e Klaydison Silva. Às colegas da pelotização de Tubarão em Vitória, Patrícia Faria e Tatiane Alvarenga, pelas discussões sobre moagem de *Pellet Feed*. Ao Dr. Vladmir Kronemberger Alves, pelas longas discussões sobre cominuição. Aos técnicos: Lucas Reis, Lucas Santiago e Luciano da Mata, do CDM - Centro de Desenvolvimento Mineral da Vale S.A., pelo apoio e atenção na realização dos testes em escala de bancada. À universitária Nicole Heck, pela organização dos dados dos testes. Ao Dr. Joaquim Donda e ao Professor Maurício Bergerman, pelas discussões sobre o moinho *Vertimill*TM.

Ao técnico Airton da Sergio e sua equipe, pela atenção e cuidado na execução dos testes lá realizados. Aos colegas Sandro Silveira e Weberson Claudiano, pela ajuda na interpretação dos dados de potência do moinho vertical.

Aos colegas da Metso: Ricardo Takeda, Rodrigo Maertensen, Daniel Suarez e Jonathan Allen, pelas informações sobre o moinho *Vertimil*TM.

Aos meus familiares e amigos, pela amizade e apoio. À Raquel, pela ajuda, apoio e amor.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	vi
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE NOTAÇÕES	xvi
LISTA DE APÊNDICES.....	xx
RESUMO	xxi
ABSTRACT.....	xxii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	23
CAPÍTULO 2 - OBJETIVO	24
CAPÍTULO 3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	25
3.1 Moinho Vertical	25
3.1.1 Histórico.....	25
3.1.2 Aspectos Gerais	27
3.1.3 Configurações	28
3.1.4 Zona de Moagem e Zona de Classificação	29
3.1.5 Carga Moedora	30
3.1.6 Mecanismos de Fratura	33
3.1.7 Aplicações Bem Sucidadas	34
3.1.8 Ensaio de Laboratório	37
3.1.9 Escalonamento	39
3.2 Modelos de Cominuição	40
3.2.1 Introdução	40
3.2.2 Modelos Empíricos	40
3.2.3 Modelos Fenomenológicos	42
3.2.4 Modelos Fundamentais	57
3.3 Modelos de Classificação.....	61
3.3.1 Introdução	61

3.3.2	Velocidade das partículas	62
3.3.3	Acumulação de Sólidos	63
3.3.4	Recirculação.....	64
3.3.5	Modelo empírico.....	66
3.3.6	Pós-classificação	67
3.4	Previsão da Potência	71
3.4.1	Equações empíricas.....	71
3.4.2	Efeito das variáveis na potência.....	75
3.4.3	Estimativa de potência	76
3.5	Teste com moinho de bolas em escala de laboratório	80
3.5.1	Introdução	80
3.5.2	Teste com frações estreitas de tamanhos de partículas.....	82
3.5.3	Teste com distribuição natural de tamanhos de partículas	82
3.5.4	Teste do fabricante de moinho vertical.....	83
3.5.5	Critério para determinar os intervalos de tempo de moagem	84
3.5.6	Estimativa de potência de moinhos de bolas	84
CAPÍTULO 4 - MATERIAIS E MÉTODOS		85
4.1	Materiais	85
4.1.1	Material de granulometria fina	85
4.1.2	Material de granulometria grossa	85
4.2	Métodos.....	86
4.2.1	Testes em escala piloto	86
4.2.2	Amostragem.....	92
4.2.3	Balanço de massas	93
4.2.4	Caracterização das amostras	94
4.2.5	Determinação dos parâmetros de quebra	96
4.2.6	Misturadores em série.....	98
4.2.7	Determinação dos parâmetros de pós-classificação.....	98

4.2.8	Determinação dos parâmetros de classificação	99
4.2.9	Modelo Proposto.....	100
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO		103
5.1	Balanco de massas dos testes em escala piloto	103
5.2	Caracterização das amostras	109
5.3	Parâmetros de quebra	116
5.4	Parâmetros de pós-classificação	124
5.5	Parâmetros de classificação	125
5.6	Simulação.....	126
5.7	Aplicação do modelo de frações estreitas de tamanho de partículas	129
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES		133
CAPÍTULO 7 - CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS AO CONHECIMENTO		134
CAPÍTULO 8 - RELEVÂNCIA DOS RESULTADOS.....		135
CAPÍTULO 9 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....		136
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		137
APÊNDICES		143

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Moinho vertical ou moinho de torre – <i>Tower Mill</i> (WILLS, 1988)	25
Figura 3.2 – Componentes principais do <i>Vertimill</i> TM (METSO, 2006).....	26
Figura 3.3 – Configurações operacionais de um moinho vertical	28
Figura 3.4 – Zona de moagem em vermelho e zona de classificação interna em azul ...	29
Figura 3.5 – Corpos moedores aderidos ao revestimento magnético	30
Figura 3.6 – Detalhe do maior desgaste dos revestimentos da parte inferior da espiral.	31
Figura 3.7 – Moinho vertical em escala de laboratório utilizado para análise da movimentação da carga moedora (DUFFY, 1994).....	32
Figura 3.8 – Vetores de fluxo da carga do moinho vertical e perfil da velocidade das partículas (DUFFY, 1994)	32
Figura 3.9 – Fluxograma de processo (PENA <i>et al.</i> , 1985).....	34
Figura 3.10 – Circuito de cominuição de Cannington (JANKOVIC <i>et al.</i> , 2006)	35
Figura 3.11 – Energia específica para moagem de três minérios distintos: Moinho Padrão de Bond X Moinho Vertical (SHI <i>et al.</i> , 2009)	38
Figura 3.12 - Representação da distribuição das partículas nas várias faixas granulométricas após eventos de quebra	44
Figura 3.13 - Determinação da taxa de desaparecimento de uma classe de tamanho pelo tempo (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986)	48
Figura 3.14 - Variação da função seleção em função do tamanho das partículas (AUSTIN <i>et al.</i> , 1984)	49
Figura 3.15 - Função quebra normalizada em função do tamanho de partícula (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986)	51
Figura 3.16 - Determinação da taxa de desaparecimento de uma classe de tamanho pelo consumo específico de energia (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986).....	53
Figura 3.17 – Função seleção específica em energia pelo tamanho de partícula (RAJAMANI & HERBST, 1984).....	54
Figura 3.18 – Distribuição de velocidade e direção de movimento das bolas em um moinho vertical (MORRISON <i>et al.</i> , 2009)	58
Figura 3.19 – Espectro de energia para o moinho de bolas (A) e para o moinho vertical (B) (MORRISON <i>et al.</i> , 2009)	59

Figura 3.20 – Evidência da Pós-classificação (SCHNEIDER, 1995).....	70
Figura 3.21 – Pós-classificação no moinho vertical	71
Figura 3.22 – Potência por enchimento de bolas para moinho vertical modelo VTM-1500 (JANKOVIC <i>et al.</i> , 2006).....	76
Figura 3.23 – Curva característica do motor do moinho vertical modelo VTM-1500 ...	78
Figura 3.24 – Definições para testes com moinho de bolas em escala de laboratório (KING, 2002 ^A).....	80
Figura 4.1 – Fluxograma do teste piloto com moinho vertical (VALE).....	87
Figura 4.2 – Vista geral do circuito com moinho vertical piloto (VALE).....	88
Figura 4.3 – Vista da peneira de alta frequência e da bomba de recirculação (VALE)..	89
Figura 4.4 – Detalhes do tanque separador do moinho vertical em escala piloto (VALE)	90
Figura 4.5 – Descarregamento do moinho vertical piloto (VALE ¹).....	90
Figura 4.6 – Moinho de bolas de 254mm x 254mm utilizado nos testes em escala de laboratório.	94
Figura 4.7 – Tela do programa utilizado para determinação dos parâmetros de quebra, <i>BatchMill</i> TM	96
Figura 4.8 – Resultado da interpolação das curvas granulométricas através do <i>BatchMill</i> TM	97
Figura 4.9 – Plotagem da função seleção através do <i>BatchMill</i> TM	97
Figura 4.10 – Plotagem da função quebra através do <i>BatchMill</i> TM	98
Figura 4.11 – Módulo de otimização <i>CurveFit</i> do programa <i>Modsim</i> TM	99
Figura 4.12 – Variação do parâmetro $S1^E$ da função seleção em energia.....	102
Figura 5.1 – Distribuição granulométrica das amostras de <i>Pellet Feed</i>	109
Figura 5.2 – Distribuição granulométrica das amostras de <i>Minério de Ferro</i> e de <i>Minério de Cobre</i>	110
Figura 5.3 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra <i>Pellet Feed 2</i> e interpolação realizada pelo <i>BatchMill</i> TM	117
Figura 5.4 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra <i>Pellet Feed 2</i>	117

Figura 5.5 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra <i>Pellet Feed 3</i> e interpolação realizada pelo <i>BatchMill</i> TM	118
Figura 5.6 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra <i>Pellet Feed 3</i>	118
Figura 5.7 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra <i>Pellet Feed 4</i> e interpolação realizada pelo <i>BatchMill</i> TM	119
Figura 5.8 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra <i>Pellet Feed 4</i>	119
Figura 5.9 – Comparativo da função seleção específica para as amostras de <i>Pellet Feed</i> segundo a metodologia de ensaios com distribuição natural de tamanhos de partículas	120
Figura 5.10 – Comparativo da função quebra para as amostras de <i>Pellet Feed</i> segundo a metodologia de ensaios com distribuição natural de tamanhos de partículas.....	121
Figura 5.11 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra <i>Minério de Ferro</i> e interpolação realizada pelo <i>BatchMill</i> TM	122
Figura 5.12 - Curvas de função seleção e função quebra para a amostra <i>Minério de Ferro</i>	122
Figura 5.13 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra <i>Minério de Cobre</i> e interpolação realizada pelo <i>BatchMill</i> TM	123
Figura 5.14 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra <i>Minério de Cobre</i>	124
Figura 5.15 – Distribuição granulométrica da descarga do moinho vertical, antes e depois da inclusão do efeito de pós-classificação, para a amostra de <i>Minério de Cobre</i>	125
Figura 5.16 – Fluxograma do teste com moinho vertical em escala piloto	126
Figura 5.17 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Pellet Feed 2</i>	126
Figura 5.18 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Pellet Feed 3</i>	127
Figura 5.19 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Pellet Feed 4</i>	127
Figura 5.20 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Minério de Ferro</i> ..	128
Figura 5.21 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Minério de Cobre</i>	128
Figura 5.22 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Pellet Feed 2</i> utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas	131
Figura 5.23 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra <i>Pellet Feed 3</i> utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas	131

Figura 5.24 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 4* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas 132

Figura 5.25 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Minério de Ferro* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas 132

LISTA DE TABELAS

Tabela III.1 – Comparativo entre moinho de bolas e moinho vertical (PENA <i>et al.</i> , 1985).....	34
Tabela III.2 – Amostras do circuito de cominuição de Cannington (JANKOVIC <i>et al.</i> , 2006).....	36
Tabela III.3 – Comparativo entre moinho de bolas e moinho vertical operando com a mesma alimentação e o mesmo tamanho de bolas de reposição (BRISSETTE, 2009)..	36
Tabela III.4 – Dados de moagem de três minérios distintos: Moinho Padrão de Bond x Moinho Vertical (SHI <i>et al.</i> , 2009).....	38
Tabela III.5 – Comparativo entre a intensidade de energia imposta por unidade e por massa de bolas (MORRISON <i>et al.</i> , 2009).....	60
Tabela III.6 – Exemplo de estimativa de potência para o moinho vertical modelo VTM-1500	79
Tabela IV.1 – Distribuição de tamanhos das bolas utilizadas no teste piloto com moinho vertical	91
Tabela IV.2 – Condições dos ensaios em escala de laboratório com moinho de bolas..	94
Tabela V.1 – Principais dados dos testes em escala piloto com moinho vertical.....	103
Tabela V.2 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de <i>Pellet Feed 2</i>	104
Tabela V.3 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de <i>Pellet Feed 3</i>	105
Tabela V.4 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de <i>Pellet Feed 4</i>	106
Tabela V.5 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de <i>Minério de Ferro</i> . 107	
Tabela V.6 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de <i>Minério de Cobre</i> 108	
Tabela V.7 – Densidades das amostras estudadas	109
Tabela V.8 – Condições operacionais do teste com a amostra de <i>Pellet Feed 2</i>	111
Tabela V.9 – Curvas granulométricas da amostra de <i>Pellet Feed 2</i>	111
Tabela V.10 – Condições operacionais do teste com a amostra de <i>Pellet Feed 3</i>	112
Tabela V.11 – Curvas granulométricas da amostra de <i>Pellet Feed 3</i>	112
Tabela V.12 – Condições operacionais do teste com a amostra de <i>Pellet Feed 4</i>	113
Tabela V.13 – Curvas granulométricas da amostra de <i>Pellet Feed 4</i>	113

Tabela V.14 – Condições operacionais do teste com a amostra de <i>Minério de Ferro</i> .	114
Tabela V.15 – Curvas granulométricas da amostra de <i>Minério de Ferro</i>	114
Tabela V.16 – Condições operacionais do teste com a amostra de <i>Minério de Cobre</i> .	115
Tabela V.17 – Curvas granulométricas da amostra de <i>Minério de Cobre</i>	115
Tabela V.18 – Determinação de parâmetros de quebra para o modelo de HERBST & FUERSTENAU (1973).....	116
Tabela V.19 – Parâmetros da classificação interna (pós-classificação)	124
Tabela V.20 – Parâmetros da classificação das peneiras de alta frequência	125
Tabela V.21 – Determinação de parâmetros de quebra para o modelo de GARDNER & AUSTIN (1962)	129
Tabela V.22 – Cálculo do tempo de residência médio das partículas e massa de material contida no moinho	130

LISTA DE NOTAÇÕES

A	área da seção transversal do moinho vertical (m ²)
B_{ij}	função quebra acumulada
b_{ij}	função quebra, ou fração em massa de partículas no intervalo de tamanho i produzidas pela quebra de partículas no intervalo de tamanho j .
C	relação da taxa de recirculação pela taxa de alimentação (Fração)
$c(d_i)$	função classificação corrigida
c_i	constante de classificação para as partículas do intervalo i na descarga do moinho
$\cos\varphi$	fator de potência (fração)
C_v	concentração de sólidos em volume (fração)
C_{vi}	concentração de sólidos em volume do intervalo de tamanho i na alimentação (fração)
d	diâmetro médio das bolas (mm)
d_1	tamanho de normalização (mm)
d_{25}	diâmetro da partícula do qual 25% é passante (mm)
d_{50c}	diâmetro (corrigido) no qual a partícula tem 50% de chance de ir para <i>underflow</i> ou <i>overflow</i>
d_{75}	diâmetro da partícula do qual 75% é passante (mm)
D_e	diâmetro da espiral (m)
d_{gap}	distância entre a espiral e a parede do moinho vertical (m)
d_i	diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (mm)
d_m	tamanho crítico ou tamanho no qual a função seleção é máxima (mm)
D_m	diâmetro interno do moinho (m)
d_{max}	diâmetro máximo das bolas (m)
E	energia específica (kWh/t)
$e(d_i)$	função classificação atual
f	vetor que contém a distribuição granulométrica da descarga do moinho
f^0	vetor que contém a distribuição granulométrica da alimentação do moinho
f_i	fração de material da alimentação no intervalo de tamanho i
F_i	distribuição granulométrica experimental (% retida)

F_i^*	distribuição granulométrica simulada (% retida)
F_{ob}	função objetivo
g	aceleração da gravidade (m/s ²)
H	massa de material contida no moinho - <i>hold up</i> (t)
H_p	coluna de polpa (m)
i	corrente (A)
J	enchimento de bolas (volume de bolas carregado no moinho)
J_{ij}	matriz diagonal
k	fator de escalonamento de moinho vertical (adimensional)
L	altura do leito de bolas (m)
L_{ef}	altura efetiva do leito de bolas (m)
$m_1(t)$	massa de material que sofreu diminuição após o intervalo de tempo t
$m_1(0)$	massa inicial de material no intervalo de tamanho 1
m_b	massa de bolas (t)
M_c	massa da carga moedora (kg)
m_i	fração em massa de partículas contidas no intervalo de tamanho i
$m_i(t)$	fração em massa de partículas contidas no intervalo de tamanho i após o tempo t de moagem
N	parâmetro característico da distribuição do tempo de residência da polpa no moinho, representado pela modelo dos N misturadores em série, sendo que N pode ser aproximado pela razão efetiva do comprimento pelo diâmetro do moinho
N_c	velocidade crítica (rpm)
P_{bola}	potência no eixo pinhão (kW/t de bolas)
P_{ele}	potência elétrica ou absorvida da rede (kW)
p_i	fração de material da descarga no intervalo de tamanho i
$P_{líq}$	potência líquida (kW)
P_{mec}	potência mecânica ou útil (kW)
P_{vaz}	potência em vazio (kW)
q	concentração de sólidos em volume - média (fração)
q_i	concentração de sólidos em volume - intervalo de tamanho i (fração)

Q_i	fator empírico que descreve a função seleção na região de fratura anormal
Q_p	vazão de polpa (m^3/h)
Q_s	vazão de sólidos (t/h)
Re	número de Reynolds (adimensional)
Sl	parâmetro arbitrário do modelo da função seleção dependente das condições de moagem e do minério
Sl^E	parâmetro equivalente a função seleção específica para o tamanho 1mm (t/kWh)
Sl^{E*}	parâmetro equivalente a função seleção específica para o tamanho 1mm em moinho vertical (t/kWh)
SI	nitidez de separação (Fração)
S_i	função seleção, ou taxa de quebra, das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1})
S_i^E	função seleção específica em energia (t/kWh)
S_i^{E*}	função seleção específica em energia para moinho vertical (t/kWh)
T	matriz triangular inferior dos valores de T_{ij}
T_e	número de passos da espiral
u	tensão (V)
U	enchimento de material (volume de material que preenche os vazios da carga moedora)
V_c	fração da velocidade crítica
V_i	velocidade das partículas do intervalo de tamanho i (m/s)
V_m	volume do moinho (m^3)
V_p	velocidade média da polpa (m/s)
V_{ti}	velocidade terminal das partículas do intervalo de tamanho i (m/s)
W	peso da espiral (kg)
w	fator que representa a qualidade ou confiança da distribuição granulométrica
x_f	tamanho no qual uma porcentagem selecionada do material é passante na alimentação (mm)
x_p	tamanho no qual uma porcentagem selecionada do material é passante no produto (mm)

Letras Gregas

α	parâmetro arbitrário do modelo da função seleção dependente das condições de moagem e do minério
β, ϕ, γ	parâmetros da função quebra dependentes das características do material
ΔP_b	perda de carga gerada pelo fluxo de polpa através do leito de bolas (Pa)
ΔP_c	pressão da massa de polpa (Pa)
ε	porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional)
ζ_1, ζ_2	parâmetros característicos do material e das condições de moagem
η	rendimento (fração)
η_p	viscosidade da polpa (Pa.s)
θ	velocidade periférica da espiral (m/s)
A	número positivo que indica quão rapidamente a função seleção diminui com o aumento de tamanho das partículas
λ	parâmetro relacionado a nitidez de separação
μ	parâmetro relacionado ao tamanho crítico
ξ, ψ	constantes empíricas
ρ_a	densidade aparente dos sólidos (t/m ³)
ρ_b	densidade das bolas (t/m ³)
ρ_c	densidade efetiva da carga moedora (t/m ³)
ρ_p	densidade da polpa (t/m ³)
ρ_s	densidade dos sólidos (t/m ³)
σ	eficiência da bomba (Fração)
τ	média do tempo de residência das partículas (min)
τ'	tempo de residência efetivo das partículas na zona de moagem (min)
v	parâmetro relacionado ao curto-circuito de material
ω	velocidade angular da espiral (rpm)

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE I – Curvas granulométricas dos ensaios com frações estreitas de tamanhos de partículas

APÊNDICE II – Dedução do modelo para determinação dos parâmetros de quebra

RESUMO

Atualmente, os profissionais da indústria mineral têm discutido muito sobre a utilização de rotas de cominuição mais eficientes energeticamente. Nesta linha, o moinho vertical aparece como opção para substituição do moinho de bolas. O moinho vertical já possui aplicação consolidada na remoagem de minérios e, recentemente, tem sido aplicado com sucesso em moagens mais grossas. O presente trabalho propõe uma metodologia para escalonamento e simulação de moinho vertical através de testes de bancada utilizando moinhos de bolas convencionais com pequenas quantidades de amostras. O modelo do balanço populacional foi utilizado com sucesso para previsão da distribuição granulométrica do produto. A potência líquida do moinho vertical foi estimada através de um fator de escalonamento aplicado à taxa de quebra específica em energia, determinada nos testes em escala de laboratório. O modelo desenvolvido neste trabalho foi implementado em uma plataforma de simulação (*ModsimTM*) e validado com dados de testes em escala piloto. O modelo possui precisão e acurácia suficientes para a simulação de moinhos verticais.

ABSTRACT

Currently, the mining industry professionals have discussed much about the use of more efficient comminution circuits in terms of energy. On this line, the vertical mill appears as an option for replacement of the ball mill. The vertical mill has already been consolidated in regrinding applications and, more recently, has also been successfully applied to coarser grinding operations. This study proposes a methodology for scale-up and simulation of vertical mills through batch tests using small tubular ball mills with reduced amounts of sample. The population balance model, coupled with a scale-up procedure, has been successfully used to predict the vertical mill's product particle size distribution. The vertical mill net power has been estimated by means of a scaling-up factor applied to the energy specific selection function, determined in the laboratory scale tests. The model developed in this study has been implemented in a plant-wide simulator (*Modsim*TM), and has been validated with data from pilot scale tests. The model is accurate enough for engineering calculations that include the vertical mill as part of the process.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

O moinho vertical tem sido empregado com sucesso na indústria mineral há algumas décadas, principalmente na etapa de remoagem de minérios. Nesta aplicação, este tipo de moinho mostrou-se mais eficiente que o moinho de bolas.

Para a moagem grossa ($100\% < 6\text{mm}$), este equipamento ainda não possui aplicação consolidada e os principais motivos seriam a baixa capacidade dos moinhos verticais atuais, o sucesso do moinho de bolas nesta aplicação e a falta de uma metodologia estabelecida de escalonamento e simulação.

Atualmente, o dimensionamento de um moinho vertical é realizado com base na experiência adquirida em operações similares, em testes de laboratório utilizando moinhos de bolas e em testes contínuos com moinho vertical em escala piloto utilizando grandes volumes de amostras. O método de Bond continua sendo uma referência para o dimensionamento de moinhos de bolas e também de moinhos verticais. Não existe na literatura uma metodologia simples, rápida e efetiva para escalonamento e simulação de moinho vertical.

No presente trabalho, foi desenvolvida uma metodologia para determinação dos parâmetros de quebra através de ensaios com moinhos de bolas em escala de laboratório, com o objetivo de escalonar e simular um moinho vertical em escala industrial.

A metodologia foi desenvolvida com o foco em simplicidade, de forma a atender a necessidade dos engenheiros de processo envolvidos com dimensionamento de plantas de beneficiamento mineral, principalmente na etapa de projeto conceitual.

CAPÍTULO 2 - OBJETIVO

O objetivo do estudo foi desenvolver e validar uma metodologia de escalonamento e simulação para moinho vertical, através de testes com moinho de bolas em escala de laboratório, utilizando-se pequenas quantidades de amostras.

CAPÍTULO 3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Moinho Vertical

3.1.1 Histórico

O moinho vertical foi desenvolvido no Japão, na década de 1950, pela *Kubota Tower Mill Corporation*, para aplicações em moagens finas e ultrafinas, e foi o primeiro moinho vertical aplicado na indústria mineral (STIEF *et al.*, 1987). A Figura 3.1 apresenta um desenho esquemático de um moinho vertical, também chamado de moinho de torre (*Tower Mill*).

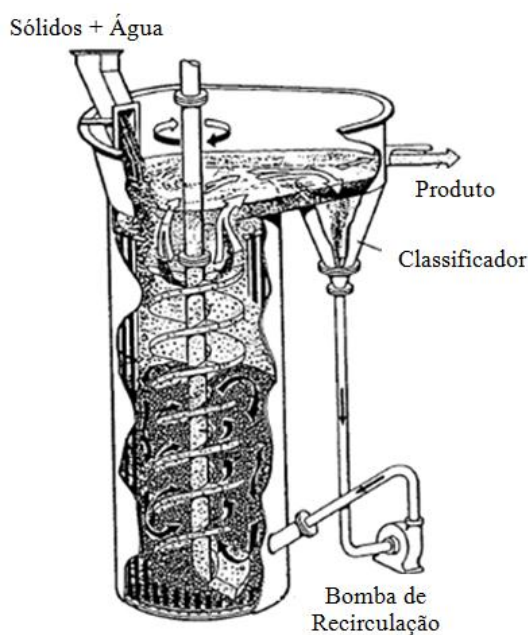


Figura 3.1 – Moinho vertical ou moinho de torre – *Tower Mill* (WILLS, 1988)

O moinho vertical é composto, basicamente, de um cilindro com uma espiral interna que promove a movimentação dos corpos moedores e da polpa. Este movimento é proporcionado através de um motor instalado na parte superior do cilindro e conectado à espiral através de um redutor.

O princípio de funcionamento dos moinhos verticais já era conhecido desde a década de 1930. Este tipo de equipamento era utilizado para condicionamento da superfície das partículas, através de atrição, antes da etapa de flotação (HERBST & SEPÚLVEDA, 1978).

O *Vertimill*TM, fabricado pela *Metso*, tem basicamente o mesmo princípio de funcionamento do *Tower Mill* e foi introduzido na década de 1990 (KALRA, 1999). A Figura 3.2 mostra os componentes principais do *Vertimill*TM.

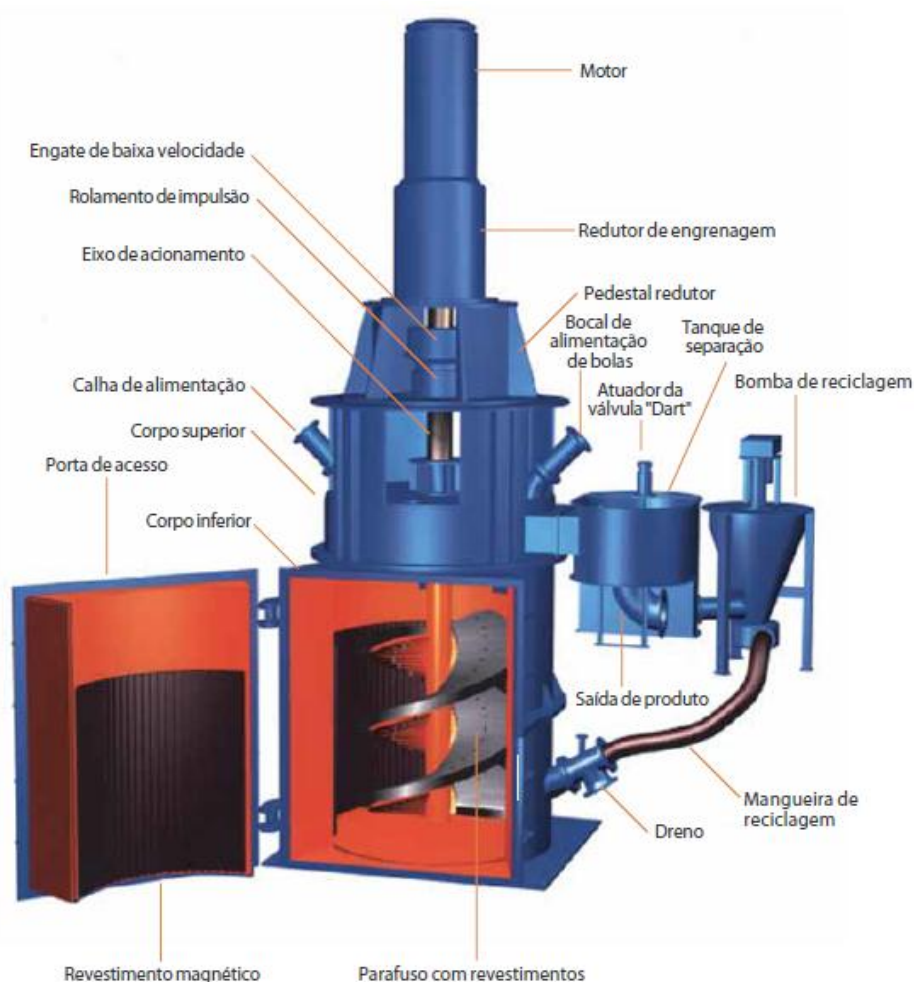


Figura 3.2 – Componentes principais do *Vertimill*TM (METSO, 2006)

A partir de agora, toda referência ao moinho vertical feita neste trabalho estará considerando o moinho *Vertimill*TM, fabricado pela *Metso*. Os moinhos verticais com elementos de mistura de carga moedora diferentes da espiral presente no *Vertimill*TM não serão discutidos neste texto.

O moinho vertical investigado neste trabalho possui aplicação consolidada na indústria mineral, com centenas de equipamentos instalados.

3.1.2 Aspectos Gerais

O moinho vertical apresenta vantagens e desvantagens em relação ao moinho de bolas. A seguir serão apresentados alguns itens de comparação.

Vantagens:

- menor geração de ruído;
- menor espaço de instalação;
- menor quantidade de periféricos;
- instalação simples e rápida;
- bases civis mais simples;
- maior segurança, devido à menor exposição de partes móveis;
- menor consumo de energia por tonelada de minério processado;
- menor consumo de corpos moedores e revestimentos.

Desvantagens:

- baixa capacidade;
- necessidade de retirada de toda a carga moedora para inspeção e/ou manutenção.

O moinho vertical possui variáveis importantes ao seu desempenho, como as citadas a seguir:

- taxa de alimentação de minério;
- distribuição de tamanho das partículas;
- concentração de sólidos na polpa;
- viscosidade da polpa;
- taxa de recirculação do material;
- distribuição de tamanho das bolas;
- altura do leito de bolas.

3.1.3 Configurações

O moinho vertical possui diferentes configurações operacionais possíveis. A Figura 3.3 apresenta algumas delas.

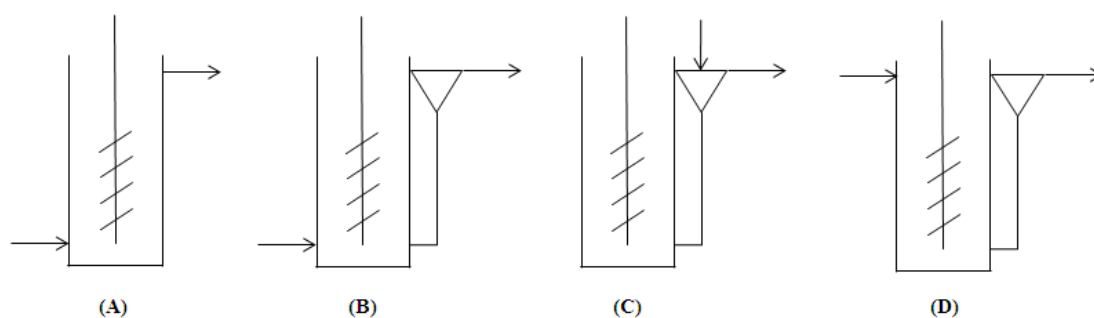


Figura 3.3 – Configurações operacionais de um moinho vertical

Em todas as configurações, a descarga é realizada através de transbordo na parte superior dos moinhos.

Segue descrição de cada configuração:

- (A), alimentação inferior, sem tanque separador e sem bomba de recirculação;
- (B), alimentação inferior, com tanque separador e com bomba de recirculação;
- (C), alimentação inferior através da bomba de recirculação e com tanque separador;
- (D), alimentação superior, com tanque separador e com bomba de recirculação.

3.1.4 Zona de Moagem e Zona de Classificação

O moinho vertical possui duas zonas distintas, uma zona de moagem, na qual o material é cominuído e uma zona de classificação (interna), localizada acima da zona de moagem e na qual o material sofre classificação. A Figura 3.4 apresenta a zona de moagem na cor vermelha e a zona de classificação interna na cor azul.

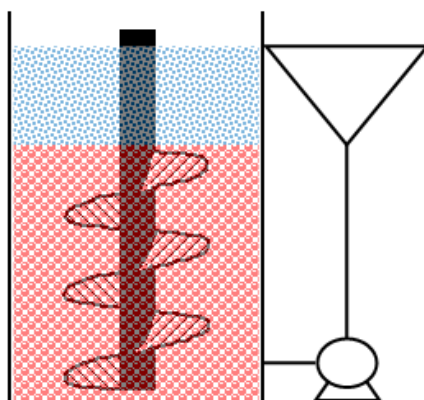


Figura 3.4 – Zona de moagem em vermelho e zona de classificação interna em azul

Considera-se como zona de moagem, o volume ocupado com os corpos moedores, cujo limite superior deve estar abaixo do topo da espiral. A partir deste ponto tem-se uma zona de classificação interna na qual as partículas com intervalo de tamanhos maiores que a especificação desejada retornam até a zona de moagem. As partículas com intervalo de tamanho adequado ou próximo do tamanho desejado saem do moinho por transbordo em direção ao tanque separador.

O tanque separador retorna parte do material ao moinho vertical através de uma bomba de recirculação de polpa, também mostrada na Figura 3.4. O fluxo ascendente de polpa, injetado pela bomba de recirculação pela parte inferior do moinho, evita que o material com a especificação de tamanho desejada seja reduzido mais que o necessário.

Os projetos recentes, como da Samarco e o Projeto Minas-Rio da Anglo American, não tem considerado a bomba de recirculação e o tanque separador. Nestas operações a alimentação do moinho vertical será realizada diretamente pela parte inferior do moinho e a descarga será por transbordo pela parte superior do moinho.

3.1.5 Carga Moedora

Os moinhos verticais consomem na totalidade os corpos moedores visto que estes, normalmente, não são expurgados do moinho, como acontece em um moinho de bolas. Os revestimentos magnéticos, instalados nas paredes internas do moinho, aderem os corpos moedores formando uma camada de proteção. Devido a isso, o desgaste dos revestimentos em um moinho vertical é quase desprezível.

A Figura 3.5 mostra algumas bolas aderidas aos revestimentos magnéticos de um moinho vertical.



Figura 3.5 – Corpos moedores aderidos ao revestimento magnético¹

Já o revestimento da espiral é trocado após centenas ou até milhares de horas operadas. O desgaste da parte inferior da espiral é mais acentuado, normalmente, devido a alimentação nova de polpa e/ou pela recirculação de polpa através da bomba de recirculação.

A Figura 3.6 mostra o maior desgaste da parte inferior dos revestimentos da espiral.

¹ Toshihiko Ohashi, Metso Minerals Brasil, Seminário Nacional de Cominuição, Cetem, Rio de Janeiro, 2006.



Figura 3.6 – Detalhe do maior desgaste dos revestimentos da parte inferior da espiral¹

A movimentação da carga moedora juntamente com o material provoca a redução de tamanho das partículas além de ser responsável pelos efeitos de classificação do material.

DUFFY (1994) conduziu testes em um moinho vertical transparente em escala de laboratório com o objetivo de analisar a movimentação das bolas dentro do moinho.

Através do resultado dos testes, foi possível verificar a existência de um fluxo ascendente no centro da espiral e um fluxo descendente nas laterais do corpo do moinho.

A Figura 3.7 mostra a configuração do experimento. A movimentação dos corpos moedores e da direção dos fluxos internos ficou evidente com o uso de bolas de diferentes cores².

¹ Toshihiko Ohashi, Metso Minerals Brasil, I Seminário Internacional de Tecnologia Metso, Belo Horizonte, 2008.

² Morrell, S. Comunicação pessoal, 2011.

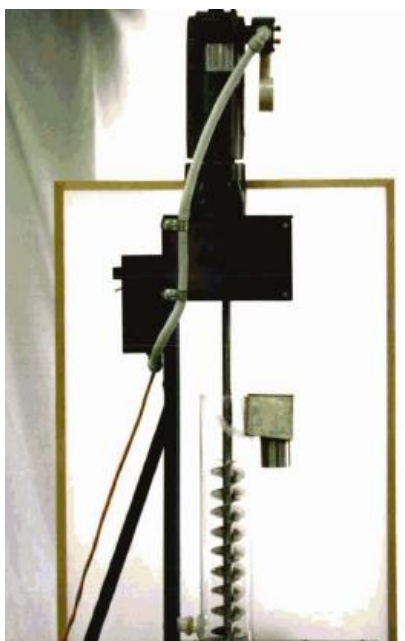


Figura 3.7 – Moinho vertical em escala de laboratório utilizado para análise da movimentação da carga moedora (DUFFY, 1994)

A Figura 3.8 mostra os vetores de fluxo da carga e o perfil de velocidade das partículas.

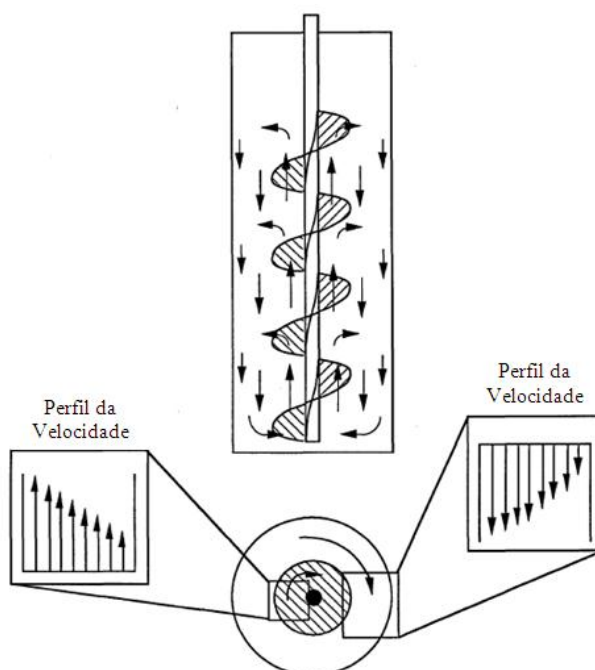


Figura 3.8 – Vetores de fluxo da carga do moinho vertical e perfil da velocidade das partículas (DUFFY, 1994)

JANKOVIC (1999) detalhou o estudo realizado por DUFFY (1994), sendo uma excelente referência sobre o assunto.

Muito já foi investigado sobre a movimentação da carga moedora em moinhos de pequenos diâmetros. A movimentação da carga moedora nos moinhos verticais industriais, provavelmente, é similar aos de um moinho de laboratório.

3.1.6 Mecanismos de Fratura

KELLY & SPOTISWOOD (1982) descrevem os três mecanismos de fratura presentes nos processos de cominuição da seguinte forma:

- abrasão, aplicação de força de forma insuficiente para provocar uma fratura em toda a partícula;
- compressão, aplicação de força de forma lenta onde o esforço é aliviado com o aparecimento de fraturas;
- impacto, aplicação de força de forma rápida e em intensidade muito superior à resistência da partícula.

GALÉRY (2002) cita que a distribuição característica do produto depende não apenas da natureza das forças de coesão interna das partículas, mas também da forma de energia e da intensidade com que elas são aplicadas sobre a partícula.

MAZZINGHY *et al.* (2012) concluíram que os mecanismos de fratura do moinho vertical são semelhantes aos do moinho de bolas, visto que a distribuição granulométrica do produto do moinho vertical foi prevista através de parâmetros de quebra determinados em moinhos de bolas em escala de laboratório. Não houve necessidade de incluir funções ou parâmetros para descrever uma maior quantidade de fratura por abrasão.

3.1.7 Aplicações Bem Sucedidas

PENA *et al.* (1985) compararam a operação de um moinho de bolas e de um moinho vertical em uma planta de tratamento de minério de ouro localizada no Chile.

A Figura 3.9 mostra o fluxograma de processo.

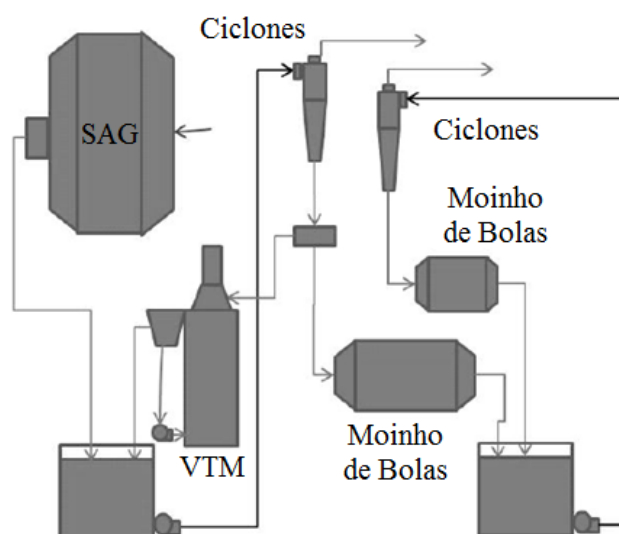


Figura 3.9 – Fluxograma de processo (PENA *et al.*, 1985)

Os dois circuitos tinham como objetivo um produto com 80% passante (P_{80}) em 300 μ m no *overflow* dos ciclones. A Tabela III.1 apresenta os principais dados obtidos.

Tabela III.1 – Comparativo entre moinho de bolas e moinho vertical (PENA *et al.*, 1985)

Tipo de Moinho	Bolas	Vertical
Potência (kW)	76	54
P_{80} (μ m)	307	303
Energia Específica (kWh/t)	3,0	2,1

O moinho vertical apresentou um ganho significativo frente ao moinho de bolas para a aplicação estudada.

VANDERBEEK (1998) apresenta os ganhos do uso de moinhos verticais na mina de Cobre de Chino, no estado do Novo México nos EUA. Os moinhos verticais têm como objetivo reduzir o material da moagem secundária até 80% passante (P_{80}) em 150 μ m. Com o uso dos moinhos verticais foi possível atingir uma economia de energia de cerca de 30% se comparada com o circuito de moinho de bolas.

JANKOVIC *et al.* (2006) apresentam os resultados do circuito Cannington que beneficia um minério de prata, chumbo e zinco. A planta está localizada no norte do estado de Queensland, na Austrália. A Figura 3.10 apresenta o fluxograma do circuito.

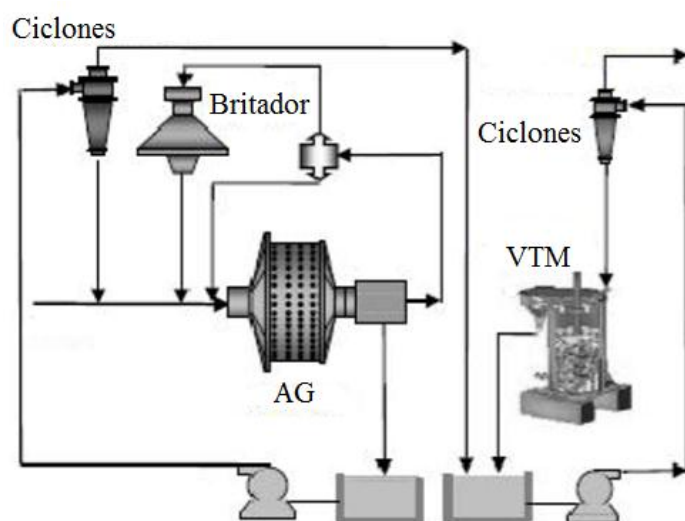


Figura 3.10 – Circuito de cominuição de Cannington (JANKOVIC *et al.*, 2006)

O produto do circuito com moinho autógeno (AG) alimenta o circuito com moinhos verticais.

A Tabela III.2 mostra dados de duas amostragens realizadas no circuito.

**Tabela III.2 – Amostragens do circuito de cominuição de Cannington
(JANKOVIC *et al.*, 2006)**

Amostragem	1	2
Alimentação Nova (t/h)	330	320
Potência Moinho AG (kW)	4527	4544
Potência Moinho Vertical (kW)	614	619
OF Ciclone Primário P_{80} (μm)	150	150
OF Ciclone Secundário P_{80} (μm)	94	109
BWI Operacional (kWh/t)	15,6	17,6
BWI Laboratório (kWh/t)	17,2	18,7

Os autores citam que a estimativa da energia requerida com moinhos de bolas, através do índice de trabalho de Bond (BWI), seria de 1220kW. Este valor é quase o dobro da energia consumida pelos moinhos verticais.

BRISSETTE (2009) apresenta dados de duas linhas de remoagem de minério de cobre e ouro, uma linha com moinho de bolas e outra com moinho vertical. Os dois circuitos operam com bateria de ciclones e com a mesma taxa de alimentação (265 t/h), reposição de bolas de 25mm e com produto 75% < 44 μm . A Tabela III.3 mostra o consumo de energia em cada linha.

Tabela III.3 – Comparativo entre moinho de bolas e moinho vertical operando com a mesma alimentação e o mesmo tamanho de bolas de reposição (BRISSETTE, 2009)

Reposição de Bolas de 25mm	Dias de Operação	Potência (kW)	Overflow Ciclone (% < 44μm)
Moinho de Bolas	28	1045	73,5
Moinho Vertical	29	587	75,2

A potência consumida pelo circuito com moinho vertical é 44% menor que a potência do circuito com moinho de bolas. Segundo o autor, a energia consumida pelo moinho vertical foi reduzida em 33%, mantendo o mesmo P_{80} , apenas com a substituição das bolas de 25mm por *millpebs* de 12mm.

JUNIOR *et al.* (2011) compararam os circuitos de remoagem das plantas 1 e 2 da Kinross em Paracatu, no estado de Minas Gerais. A planta 1 possui dois moinhos de bolas operados em paralelo e em circuito reverso com classificação por hidrociclones. A planta 1 trata o minério oxidado que possui BWI médio de 5,5 kWh/t. A planta 2 possui moinho vertical VTM-1250 operado em circuito direto com classificação por hidrociclones. A planta 2 trata o minério sulfetado que possui BWI médio de 10kWh/t.

A especificação de produto da etapa de remoagem é a mesma nas duas plantas, P_{90} da ordem de 45 μ m. O tamanho da bola de reposição é o mesmo nas duas plantas, bolas de 25mm de diâmetro.

O consumo de bolas do moinho vertical é de 68 g/kWh, cerca de 15% menor que no circuito com moinho de bolas. O energia específica do moinho vertical é de 9,7 kWh/t, cerca de 14% menor que no circuito com moinho de bolas. É importante destacar que esta maior eficiência apresentada pelo moinho vertical foi obtida tratando um minério bem mais competente que o minério tratado no circuito com moinho de bolas. Outro detalhe importante é que a redução no consumo específico de energia, apresentado pelo moinho vertical, foi muito próximo da redução do consumo de bolas, 14% e 15% respectivamente.

3.1.8 Ensaios de Laboratório

SHI *et al.* (2009) conduziram testes em escala de laboratório com diferentes minérios utilizando um moinho padrão para teste de Bond e um moinho vertical. O objetivo era avaliar o desempenho da moagem com uma alimentação 100% < 3,35mm.

A Figura 3.11 compara a energia específica obtida com o moinho de Bond e a obtida em um moinho vertical utilizando três minérios distintos, dois minérios de zinco e chumbo e um minério de ouro.

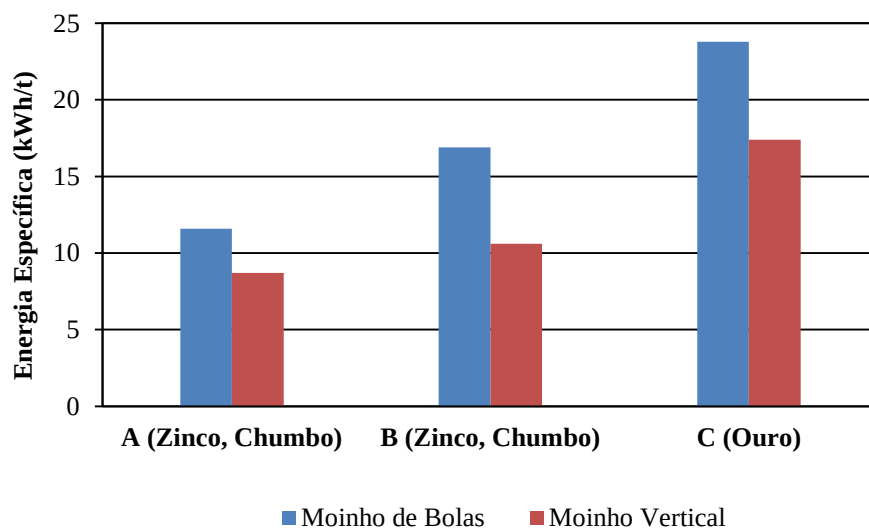


Figura 3.11 – Energia específica para moagem de três minérios distintos: Moinho Padrão de Bond X Moinho Vertical (SHI *et al.*, 2009)

Os autores apresentam os principais dados da moagem dos três minérios, conforme a Tabela III.4.

Tabela III.4 – Dados de moagem de três minérios distintos: Moinho Padrão de Bond x Moinho Vertical (SHI *et al.*, 2009)

Minério	A (Zn, Pb)		B (Zn, Pb)		C (Au)	
	Bolas	Vertical	Bolas	Vertical	Bolas	Vertical
F_{80} (μm)	1968	2287	2000	1999	2017	2065
P_{80} (μm)	84	73	83	78	49	52
Corte Peneira (μm)	125	125	106	106	75	75
Potência (kWh)	0,0053	0,0016	0,0073	0,0020	0,0086	0,0032
Alimentação (g)	454	186	430	186	361	186
Energia Específica (kWh/t)	11,6	8,7	16,9	10,6	23,8	17,4
Ganho Energia (%)		25		37		27

Os testes realizados com o moinho padrão para teste de Bond considerou a distribuição de bolas utilizada para determinação do índice de trabalho de Bond (BWI), cujo tamanho máximo de bola é de 38mm. Já o teste com moinho vertical utilizou uma carga de bolas com tamanho máximo de 11mm. O diâmetro das bolas tem influência no consumo específico de energia. Dessa forma, esta comparação entre moinho de bolas e moinho vertical torna-se mais complexa.

3.1.9 Escalonamento

Atualmente, o dimensionamento dos moinhos verticais é realizado, principalmente, através de três métodos:

- dimensionamento preliminar, consiste em estimar a energia necessária para a moagem através do índice de trabalho de Bond (BWI) aplicando-se um fator de eficiência próximo de 30% menor que a energia calculada para um moinho de bolas;
- teste em escala de laboratório, consiste em testes com moinhos de bolas em intervalos de tempos distintos até que o tamanho de produto desejado seja obtido. Aplica-se um fator de eficiência próximo de 30% menor que a energia medida no teste;
- teste em escala piloto, consiste em realizar testes em moinho vertical com grandes quantidades de amostra. Todas as variáveis operacionais são controladas e registradas durante o teste. O escalonamento do moinho vertical em escala industrial é realizado através do consumo específico (kWh/t) obtido nos testes.

A previsão da distribuição granulométrica do moinho vertical industrial somente é obtida através do teste em escala piloto.

3.2 Modelos de Cominuição

3.2.1 Introdução

Os modelos matemáticos são ferramentas muito utilizadas para descrever o processo de cominuição de partículas minerais.

Um modelo matemático é uma equação ou conjunto de equações que representa um processo real (HERBST *et al.*, 2002). Existem três tipos de modelos que podem ser utilizados para a simulação de uma operação unitária:

- empírico, que é um conjunto de equações algébricas desenvolvidas por regressão, estatística multivariada ou rede neural;
- fenomenológico, que é um conjunto de equações algébricas e diferenciais baseadas em alguns princípios de engenharia, física e química, mas requerem calibração;
- fundamental, que é um conjunto de equações algébricas e diferenciais baseadas em leis fundamentais da física e da química, requerendo um mínimo de calibração.

A seguir será apresentado e discutido cada um dos três tipos de modelos aplicados a cominuição, objeto deste trabalho.

3.2.2 Modelos Empíricos

Muitos modelos empíricos têm sido propostos para representar a moagem em moinhos verticais. Na maioria dos casos, são realizados testes em escala de laboratório com moinhos verticais simplificados. O planejamento fatorial e a regressão linear são ferramentas muito utilizadas. A seguir, são apresentados alguns estudos sobre o assunto.

DUFFY (1994) utilizou a equação de CHARLES (1957) para determinar a distribuição granulométrica do produto de um moinho vertical. A Equação 3.1 é a utilizada por CHARLES na sua forma original.

$$E = \xi (x_p^{-\psi} - x_f^{-\psi}) \quad (3.1)$$

sendo:

E = energia específica (kWh/t);

ξ, ψ = constantes empíricas;

x_p = tamanho no qual uma porcentagem selecionada do material é passante no produto (mm);

x_f = tamanho no qual uma porcentagem selecionada do material é passante na alimentação (mm).

Esta equação pode ser simplificada quando o tamanho da distribuição do produto é bem inferior ao da distribuição da alimentação. A Equação 3.1 torna-se:

$$E = \xi x_p^{-\psi} \quad (3.2)$$

ou

$$x_p = \left(\frac{E}{\xi}\right)^{-\frac{1}{\psi}} \quad (3.3)$$

A Equação 3.3 foi aplicada por DUFFY (1994) para prever as frações passantes do produto em 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30 e 20%. Através de regressão linear, foi possível prever a distribuição do produto com um grau de precisão razoável. Contudo, a metodologia utilizada não se aplica a todos os casos (variações de enchimento, tamanho de bolas, porcentagem de sólidos etc).

CELEP *et al.* (2011) conduziram testes em um moinho vertical em escala de laboratório com um minério sulfetado contendo ouro e prata. Os autores utilizaram metodologia de planejamento fatorial para análise das seguintes variáveis: diâmetro das bolas, tempo de moagem, enchimento de bolas e velocidade da espiral. A variável de resposta considerada foi o tamanho no qual 80% do material é passante (P_{80}). Concluiu-se que a moagem seria mais eficiente considerando bolas menores, maior velocidade da espiral e maior enchimento de bolas.

Outro estudo com a mesma metodologia foi realizado por TORAMAN & KATIRCIOGLU (2011), utilizando uma amostra de calcita. As variáveis estudadas foram: o tempo de moagem, a velocidade da espiral, a densidade da polpa e o enchimento de bolas. A área superficial específica foi considerada como variável de resposta. A principal conclusão do estudo foi o efeito negativo do aumento da densidade da polpa. Supõe-se que em altas concentrações de sólidos a viscosidade eleva-se muito e diminui a eficiência da moagem.

JANKOVIC (1999) comenta que os modelos empíricos têm a limitação de simular condições diferentes daquelas testadas para a formulação do modelo. As constantes obtidas representam “a melhor solução matemática” e frequentemente não possuem significado físico.

3.2.3 Modelos Fenomenológicos

O modelo do balanço populacional é um exemplo de modelo fenomenológico que descreve o processo de moagem através de eventos sucessivos de quebra das partículas.

Histórico

O balanço populacional foi utilizado para modelar populações biológicas no início da década de 1960 (VERKOEIJEN *et al.*, 2002) e foi formulado para propósitos de engenharia química por HULBURT & KATZ (1964).

Atualmente esta ferramenta é utilizada para descrever e controlar uma ampla gama de processos de partículas como pulverização, aglomeração, floculação, cristalização, polimerização e combustão (VERKOEIJEN *et al.*, 2002).

Muitos pesquisadores contribuíram com o desenvolvimento dos modelos de cominuição que são utilizados hoje em dia. AUSTIN *et al.* (1984) descrevem esta evolução, conforme apresentado a seguir.

BROWN (1941) parece ter sido o primeiro a tentar construir um balanço de massa-tamanho diferencial para descrever o processo de moagem, mas a sua formulação era deselegante e pesada para ser aplicada. Seu trabalho foi estendido por BROADBENT & CALLCOTT (1956), os quais usaram álgebra matricial e conceitos de quebra estagiada para descrever o processo, e por EPSTEIN (1947), o qual usou uma formulação de probabilidade contínua.

Independentemente, SEDLATSCHKE & BASS (1953), forneceram, basicamente, a formulação apresentada por AUSTIN *et al.* (1984).

FILIPPOV (1961), GAUDIN & MELOY (1962), e GARDNER & AUSTIN (1962), também, independentemente, estenderam e verificaram os conceitos. GARDNER & AUSTIN (1962) foram os primeiros a demonstrar, convincentemente, a aplicabilidade dos conceitos para dados experimentais.

Balanço Populacional para a Moagem em Batelada

A Equação 3.4 descreve o modelo do balanço populacional para a moagem em batelada.

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -S_i m_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

sendo:

$m_i(t)$ = fração em massa de partículas contidas no intervalo de tamanho i após o tempo t de moagem;

S_i = função seleção, ou taxa de quebra, das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1});

b_{ij} = função quebra, ou fração em massa de partículas no intervalo de tamanho i produzidas pela quebra de partículas no intervalo de tamanho j .

A Figura 3.12 representa a distribuição das partículas nas várias faixas granulométricas após cada evento de quebra.

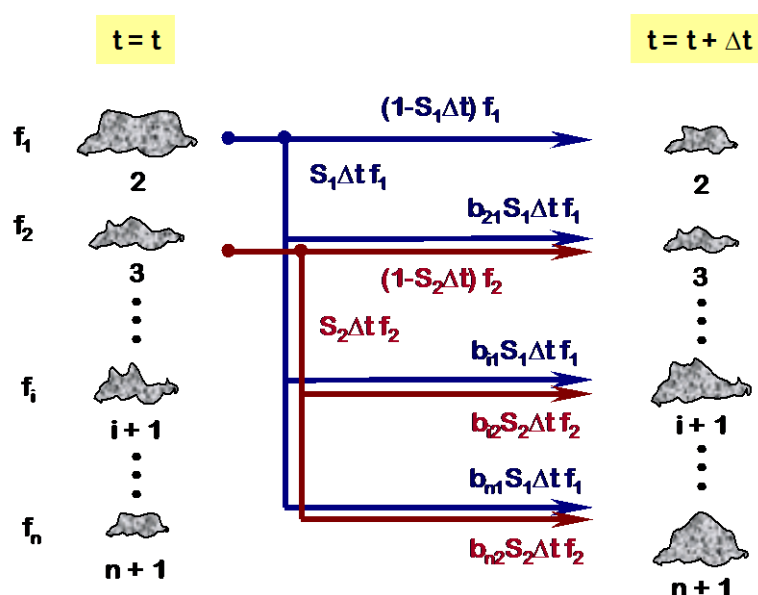


Figura 3.12 - Representação da distribuição das partículas nas várias faixas granulométricas após eventos de quebra¹

Considera-se que em algum dado instante t , a distribuição granulométrica do material muda em um hipotético moinho de batelada e é quantificada pelas frações f_i ($i = 1, n$) retida em n diferentes peneiras representadas no lado esquerdo da figura. Após um intervalo de tempo dt , o resultado da distribuição granulométrica é representado pelo lado direito da figura. Durante este intervalo de tempo, algumas partículas serão fragmentadas e seus fragmentos serão redistribuídos para as peneiras inferiores. Para as partículas retidas na malha ' $i+1$ ' (a fração ' i '), a função seleção S_i (min^{-1}) denota a velocidade de quebra, que é a fração das partículas de um conjunto de tamanhos (d_{i+1}, d_i) na qual são fraturadas, por unidade de tempo. Entretanto, o produto $(S_i \Delta t)$ representa a fração de material retido na malha ' $i+1$ ', no tempo t , que será fraturada pela ação dos corpos moedores, durante o período seguinte de tempo Δt . Consequentemente, a função quebra b_{ij} denota a fração, em peso, de fragmentos que surgem da quebra das partículas retidas na malha ' $j+1$ ' que foram retidas na malha inferior ' $i+1$ '.

Define-se como malha '1' a peneira com abertura maior e de malha ' n ' a peneira de abertura menor. Então na Equação 3.5, B_{ij} representa a fração acumulada de fragmentos da quebra das partículas retidas na malha ' j ' que se tornaram menores que a malha ' i '.

¹ Figura retirada do aplicativo *Moly-Cop Tools*, versão 2.0.

$$B_{ij} = \sum_{k=n}^{i+1} b_{kj} \quad (3.5)$$

De acordo com a Figura 3.12, é possível estabelecer, para cada fração de tamanho 'i', o seguinte balanço populacional de partículas:

$$\begin{aligned} & [\text{partículas na fração 'i' no tempo } (t+\Delta t)] = [\text{partículas na fração 'i' no tempo } t] - \\ & \quad [\text{partículas na fração 'i' quebradas durante o intervalo de tempo } \Delta t] + \\ & \quad [\text{novas partículas adicionadas a fração 'i' como resultado da quebra de partículas} \\ & \quad \quad \text{retidas nas frações grossas } (j = 1, i-1)] \end{aligned}$$

Então, se H representa a massa total de minério no moinho, tem-se:

$$f_i(t+\Delta t)H = f_i(t)H - S_i \Delta t f_i(t)H + b_{i1} S_1 \Delta t f_1(t)H + b_{i2} S_2 \Delta t f_2(t)H + \dots + b_{i,i-1} S_{i-1} \Delta t f_{i-1}(t)H \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.6)$$

Considerando a condição limite, quando Δt aproxima-se de zero, a equação acima se reduz a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem como mostra a Equação 3.7.

$$\frac{d(f_i)}{dt} = -S_i f_i + \sum_{j=i-1}^1 b_{ij} S_j f_j, \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.7)$$

Este é o modelo geral de moagem na sua forma diferencial.

A solução analítica deste complexo sistema de equações diferenciais é conhecida (REID, 1965). Assume-se que os parâmetros S e B não variam com o tempo, então uma solução geral do sistema, denominada de 'modelo linear', pode ser expressa, na sua forma matricial, como:

$$f = \left(T J T^{-1} \right) f^0 \quad (3.8)$$

onde:

$f = \{f_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ = vetor que contém a distribuição granulométrica da descarga do moinho;

$f^0 = \{f_i^0 / i = 1, 2, \dots, n\}$ = vetor que contém a distribuição granulométrica da alimentação do moinho;

$T = \{T_{ij} / i, j = 1, 2, \dots, n\}$ = matriz triangular inferior dos valores de T_{ij} ;

$T_{ij} = 0$ quando $i < j$;

$T_{ij} = 1$ quando $i = j$.

$$T_{ij} = \frac{\sum_{k=j}^{i-1} \left(\frac{b_{ik} S_k T_{kj}}{S_i - S_j} \right)}{\quad}, \quad i > j \quad (3.9)$$

$J = \{J_{ij} / i, j = 1, 2, \dots, n\}$ = matriz diagonal dos valores de J_{ij} definida como:

$$J_{ij} = e^{\begin{pmatrix} -S_i t \\ -S_i t \end{pmatrix}}, \quad \text{quando } i = j \text{ (batelada)} \quad (3.10)$$

$$J_{ij} = \left(1 + \frac{S_i \tau}{N} \right)^{-N}, \quad \text{quando } i = j \text{ (contínuo)} \quad (3.11)$$

$$J_{ij} = 0, \quad \text{para as demais situações} \quad (3.12)$$

sendo:

τ = média do tempo de residência das partículas;

N = parâmetro característico da distribuição do tempo de residência da polpa no moinho, representado pela modelo dos N misturadores em série, sendo que N pode ser aproximado pela razão efetiva do comprimento pelo diâmetro do moinho.

$$E(t) = \left[\frac{N^N \left(\frac{t}{\tau} \right)^{N-1}}{\tau \Gamma(N)} \right] e^{\left(\frac{-Nt}{\tau} \right)} \quad (3.13)$$

Função seleção ou taxa de quebra

A função seleção S_i representa a taxa ou velocidade de quebra de um intervalo de tamanho i . A taxa de desaparecimento do intervalo de tamanho 1 é apresentado pela Equação 3.14.

$$-\frac{dm_1(t)H}{dt} \propto m_1(t)H \quad (3.14)$$

Considerando que a massa de material contida no moinho H é constante, tem-se:

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -S_1 m_1(t) \quad (3.15)$$

S_1 é uma constante de proporcionalidade. Se S_1 não varia com o tempo, tem-se:

$$m_1(t) = m_1(0)e^{(-S_1 t)} \quad (3.16)$$

sendo:

S_i = função seleção, ou taxa de quebra, das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1});

$m_1(t)$ = massa de material que sofreu cominuição após o intervalo de tempo t ;

$m_1(0)$ = massa inicial de material no intervalo de tamanho 1.

ou

$$\log[m_1(t)] = \log[m_1(0)] - \frac{S_1 t}{2,3} \quad (3.17)$$

A Figura 3.13 mostra a determinação da função seleção S_1 (min^{-1}) para o intervalo de tamanho (1700x1180 μm) em função do tempo t (min).

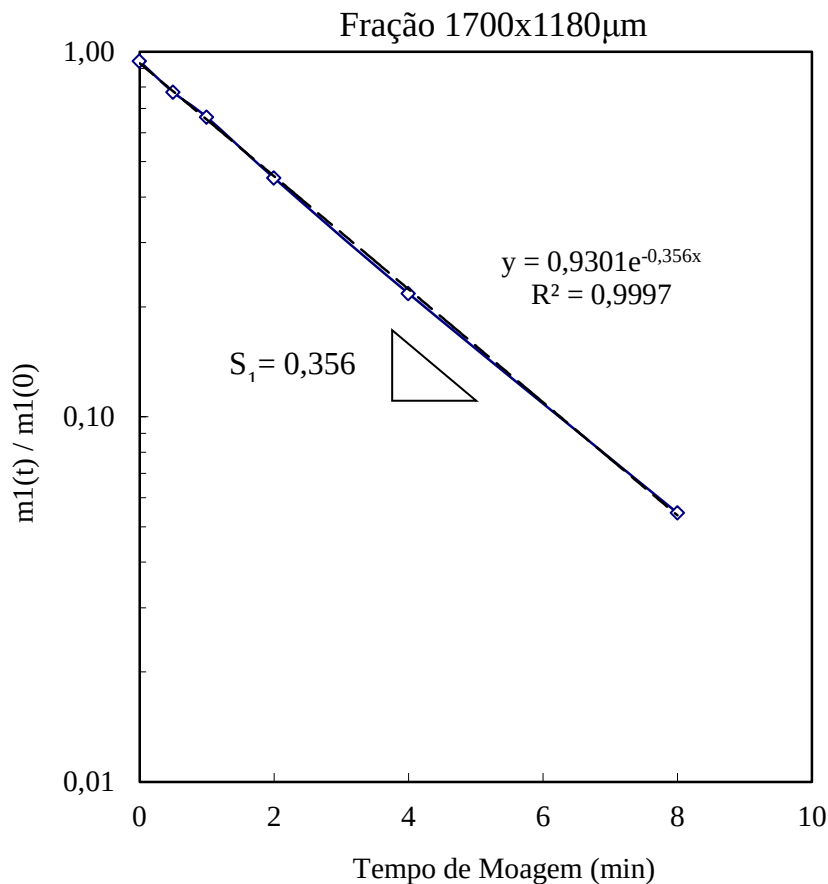


Figura 3.13 - Determinação da taxa de desaparecimento de uma classe de tamanho pelo tempo (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986)

A Equação 3.18 apresenta um modelo para a função seleção (AUSTIN *et al.*, 1984).

$$S_i = S1 \left(\frac{d_i}{d_1} \right)^\alpha, \quad d_i \ll d \quad (3.18)$$

sendo:

S_i = função seleção, ou taxa de quebra, das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1});

$S1, \alpha$ = parâmetro arbitrário do modelo da função seleção dependente das condições de moagem e do minério;

d_i = diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (mm);

d_1 = tamanho de normalização (mm);

d = diâmetro médio das bolas (mm).

Na Figura 3.14 observa-se que a função seleção diminui a partir de um determinado tamanho d_m , chamado de tamanho crítico.

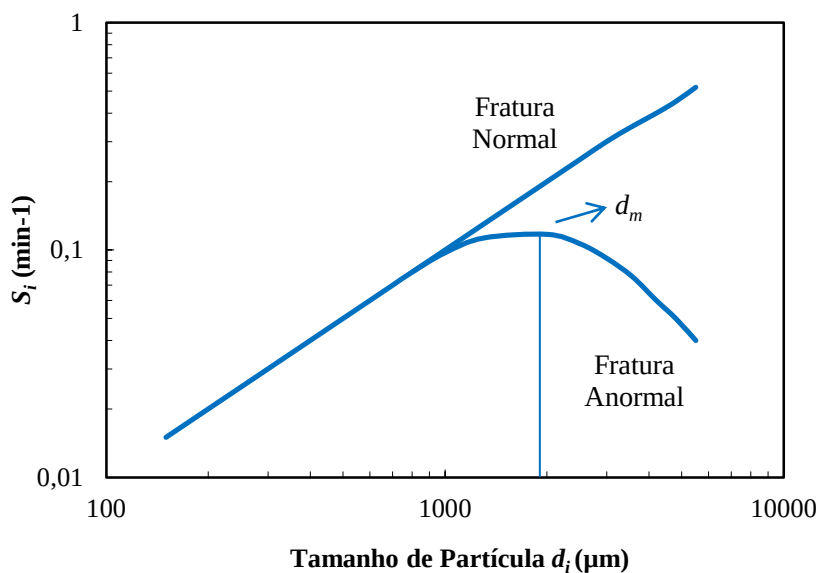


Figura 3.14 - Variação da função seleção em função do tamanho das partículas (AUSTIN *et al.*, 1984)

Os valores da função seleção S_i na região de fratura anormal são descritos através de um fator empírico Q_i , conforme a Equação 3.19.

$$Q_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_i}{\mu}\right)^\Lambda}, \quad \Lambda \geq 0 \quad (3.19)$$

sendo:

Q_i = fator empírico que descreve a função seleção na região de fratura anormal;

μ = parâmetro relacionado ao tamanho crítico;

Λ = número positivo que indica quão rapidamente a função seleção diminui com o aumento de tamanho das partículas.

A expressão da função seleção que inclui a região de quebra anormal pode ser escrita conforme mostrado na Equação 3.20.

$$S_i = S_1 \left(\frac{d_i}{d_1} \right)^\alpha \frac{1}{1 + \left(\frac{d_i}{\mu} \right)^\Lambda} \quad (3.20)$$

A Equação 3.21 é usada para determinar o tamanho crítico d_m ou tamanho no qual a função seleção é máxima.

$$d_m = \mu \left(\frac{\alpha}{\Lambda - \alpha} \right)^{\frac{1}{\Lambda}}, \quad \Lambda > \alpha \quad (3.21)$$

sendo:

d_m = tamanho crítico ou tamanho no qual a função seleção é máxima (mm).

O parâmetro Λ é função, principalmente, do material e o parâmetro μ é função da distribuição de tamanhos dos corpos moedores e do material.

Função Quebra Primária

Os valores da função quebra acumulada B_{ij} podem ser ajustados por uma relação empírica feita da soma de duas funções lineares em escala log-log, conforme a Equação 3.22 (AUSTIN *et al.*, 1984).

$$B_{i,j} = \phi \left(\frac{d_{i-1}}{d_j} \right)^\gamma + (1 - \phi) \left(\frac{d_{i-1}}{d_j} \right)^\beta, \quad 0 < \phi < 1 \quad (3.22)$$

sendo:

B_{ij} = função quebra acumulada;

β, ϕ, γ = parâmetros da função quebra dependentes das características do material.

O primeiro termo da equação representa as partículas que sofreram quebra pelo mecanismo de impacto e o segundo termo representa as partículas que sofreram quebra pelo mecanismo de compressão.

A Figura 3.15 apresenta uma curva de distribuição de quebra de um determinado material.

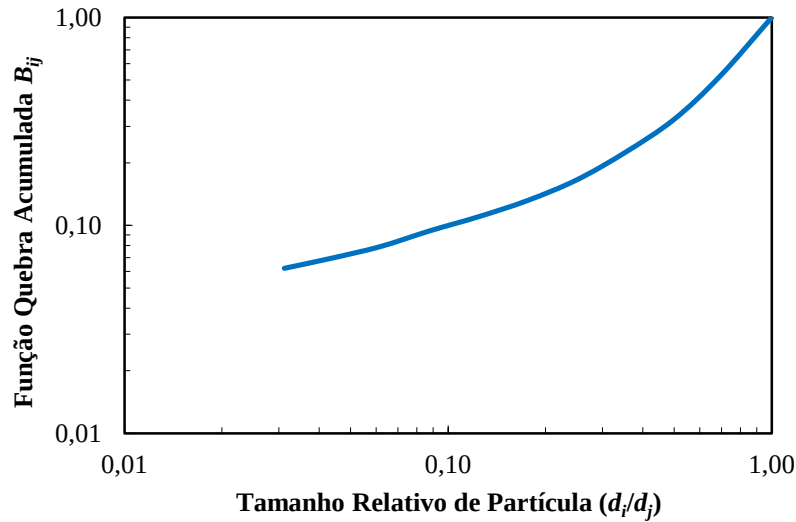


Figura 3.15 - Função quebra normalizada em função do tamanho de partícula (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986)

Pode-se calcular b_{ij} , ou seja, a quantidade de material quebrado da classe j que foi para a classe i , pela Equação 3.23.

$$b_{i,j} = B_{i,j} - B_{i+1,j} \quad (3.23)$$

Os parâmetros de quebra discutidos nesta seção, geralmente, são obtidos por interpolação do modelo do balanço populacional com as distribuições granulométricas medidas nos ensaios de batelada. Utilizando-se de algoritmos de busca realiza-se a minimização da soma dos quadrados de uma função objetivo.

Energia como Parâmetro de Escalonamento

HERBST & FUERSTENAU (1973) substituíram o tempo t (min) da Equação 3.24 pela energia específica E (kWh/t).

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -S_i m_i(t) \quad (3.24)$$

Substituindo t por E , tem-se:

$$\frac{dm_i(E)}{dE} = -S_i^E m_i(E) \quad (3.25)$$

Estes pesquisadores citam que os valores da função seleção discretizada por tamanhos, S_i , apresentam uma relação de proporcionalidade com a potência absorvida pelo moinho, conforme a Equação 3.26.

$$S_i = S_i^E \left(\frac{P_{liq}}{H} \right) \quad (3.26)$$

sendo:

S_i = função seleção ou taxa de quebra das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1});

S_i^E = função seleção específica em energia (t/kWh);

H = massa de material contida no moinho - *hold up* (t);

P_{liq} = potência líquida (kW).

A função seleção específica em energia S_i^E é dependente do tamanho das bolas (LO & HERBST, 1986) e, usualmente, independente das condições geométricas e operacionais do moinho (HERBST & FUERSTENAU, 1980).

A Figura 3.16 mostra a determinação da função seleção específica S_i^E para o intervalo de tamanho (1700x1180 μm) em função do consumo específico de energia E (kWh/t).

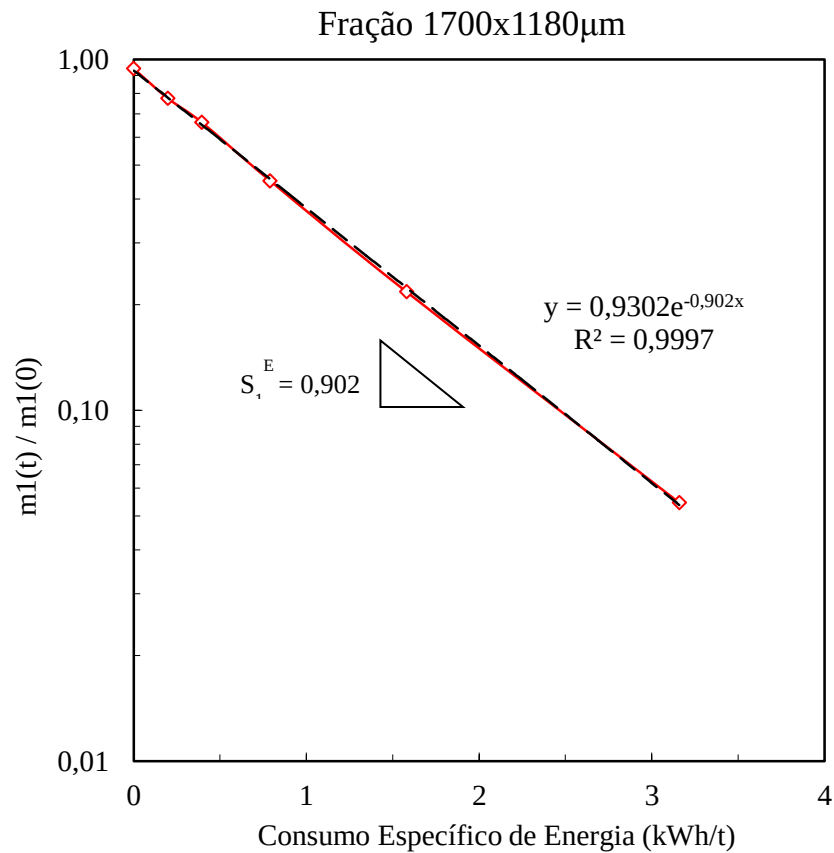


Figura 3.16 - Determinação da taxa de desaparecimento de uma classe de tamanho pelo consumo específico de energia (GUTIÉRREZ & SEPÚLVEDA, 1986)

RAJAMANI & HERBST (1984) desenvolveram um modelo para a função seleção específica em energia S_i^E utilizando três parâmetros, S_1^E , ζ_1 e ζ_2 , conforme Equação 3.27.

$$S_i^E = S_1^E \exp \left\{ \zeta_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + \zeta_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (3.27)$$

sendo:

S_i^E = função seleção específica em energia (t/kWh);

S_1^E = parâmetro equivalente a função seleção específica para o tamanho 1mm (t/kWh);

d_i = diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (mm);

d_1 = tamanho de normalização (mm);

ζ_1, ζ_2 = parâmetros característicos do material e das condições de moagem.

A Figura 3.17 apresenta a função seleção específica em energia S_i^E em relação ao tamanho de partícula d_i , conforme a Equação 3.27.

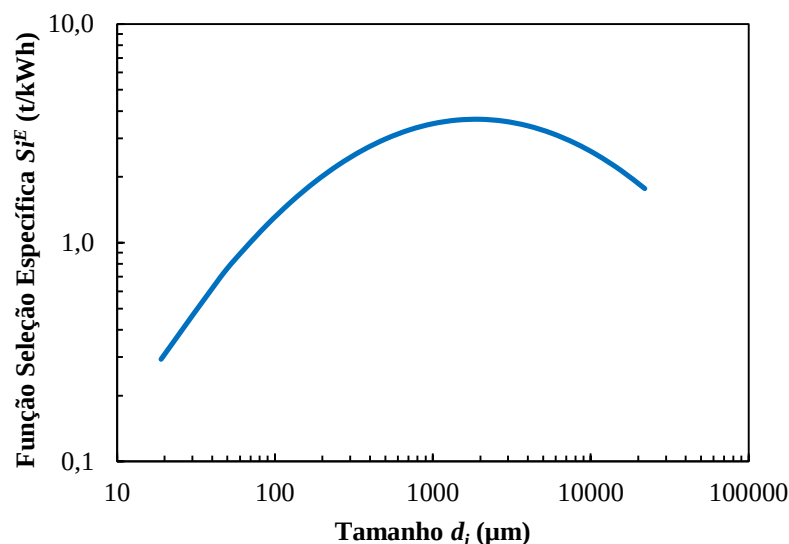


**Figura 3.17 – Função seleção específica em energia pelo tamanho de partícula
(RAJAMANI & HERBST, 1984)**

O tamanho no qual a função seleção é máxima d_m pode ser determinado através da Equação 3.28 (KING, 2002^A).

$$d_m = \exp\left(\frac{-\zeta_1}{2\zeta_2}\right) \quad (3.28)$$

sendo:

d_m = tamanho crítico ou tamanho no qual a função seleção é máxima (mm).

Balanço Populacional para a Moagem Contínua

A Equação 3.29 representa os eventos de desaparecimento das partículas e de surgimento de partículas provenientes da quebra de frações de tamanho maiores, através das funções seleção e quebra (KING, 2002^A).

$$Q_s p_i = Q_s f_i + H \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j - H S_i m_i \quad (3.29)$$

sendo:

Q_s = vazão de sólidos (t/h);

H = massa de material contido no moinho – *hold up* (t);

f_i = fração de material da alimentação no intervalo de tamanho i ;

p_i = fração de material da descarga no intervalo de tamanho i ;

m_i = fração em massa de partículas contidas no intervalo de tamanho i ;

S_i = função seleção, ou taxa de quebra, das partículas no intervalo de tamanho i (min^{-1});

b_{ij} = função quebra, ou fração em massa de partículas no intervalo de tamanho i produzidas pela quebra de partículas no intervalo de tamanho j .

O tempo de residência médio das partículas dentro da zona de moagem pode ser calculado conforme a Equação 3.30.

$$\tau = \frac{H}{Q_s} \quad (3.30)$$

sendo:

τ = média do tempo de residência das partículas (min).

Assim, a Equação 3.29 torna-se:

$$p_i = f_i + \tau \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j - S_i m_i \tau \quad (3.31)$$

Considerando que todo o material na zona de moagem está perfeitamente misturado tem-se que $m_i = p_i$.

$$p_i = f_i + \tau \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j p_j - S_i p_i \tau \quad (3.32)$$

$$p_i = \frac{f_i + \tau \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j p_j}{1 + S_i \tau} \quad \text{para todo } i \quad (3.33)$$

A Equação 3.33 pode ser resolvida começando do tamanho 1 como a seguir.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{f_1}{1 + S_1 \tau} \\
 p_2 &= \frac{f_2 + b_{21} S_1 p_1 \tau}{1 + S_2 \tau} \\
 p_3 &= \frac{f_3 + b_{31} S_1 p_1 \tau + b_{32} S_2 p_2 \tau}{1 + S_3 \tau}
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

A massa de material contida no moinho H pode ser estimada através da Equação 3.35.

$$H = \left(\frac{m_b}{\rho_b} \right) \varepsilon C_v \rho_s \tag{3.35}$$

sendo:

H = massa de material contida no moinho - *hold up* (t);

m_b = massa de bolas (t);

ρ_b = densidade das bolas (t/m³);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional);

C_v = concentração de sólidos em volume (fração);

ρ_s = densidade dos sólidos (t/m³).

Determinação dos parâmetros de quebra

A determinação dos parâmetros de quebra exige do engenheiro de processo conhecimentos teóricos e também experiência para análise de cada um dos parâmetros e o peso (influência) destes no modelo.

Existem diferentes métodos para determinação dos parâmetros de quebra. Neste trabalho, os parâmetros de quebra foram determinados através do programa *BatchMill*TM versão 1.6 (MTI, 2003).

A solução da Equação 3.4, implementada no *BatchMill*TM, é apresenta no Apêndice II conforme a solução proposta por KING (2002^A).

Referências

Nesta linha de pesquisa, alguns pesquisadores da Universidade Federal de Minas Gerais apresentam ampla revisão bibliográfica sobre o assunto.

MONTENEGRO (1997) desenvolveu um aplicativo para determinação dos parâmetros de quebra utilizando diferentes métodos numéricos. GALÉRY (2002) determinou e comparou os parâmetros de quebra de um minério de ferro utilizando diferentes modelos matemáticos.

VON KRUGER (2004) determinou parâmetros de quebra para sílica utilizando corpos moedores côncavos. ALVES (2006) determinou parâmetros de quebra para moagem de *Pellet Feed* com bolas e cylpebs. MAZZINGHY (2009) determinou parâmetros de quebra para um minério de ouro utilizando os modelos de AUSTIN *et al.* (1984) e HERBST & FUERSTENAU (1973).

Uma referência sobre a utilização do balanço populacional aplicado em circuitos de moagem, utilizando também modelos de liberação das partículas minerais, pode ser consultada em SCHNEIDER (1995).

3.2.4 Modelos Fundamentais

O método do elemento discreto (DEM - *Discrete Element Method*) é um exemplo de modelo fundamental. Este método, geralmente, é aplicado para otimização das condições operacionais da moagem tais como: porcentagem da velocidade crítica, grau de enchimento, forma dos revestimentos, previsão da potência, distribuição da carga moedora, efetividade de impactos e uso de energia.

A utilização desta ferramenta na simulação de processos de cominuição tem obtido grande destaque nos últimos anos. O trabalho pioneiro de MISHRA & RAJAMANI (1990) continua sendo uma excelente referência.

MORRISON *et al.* (2009) apresentam um comparativo entre moinho vertical, em escala piloto, e um moinho de bolas, em escala de laboratório, utilizando técnicas de modelagem de elementos discretos. A Figura 3.18 apresenta um exemplo deste tipo de modelagem.

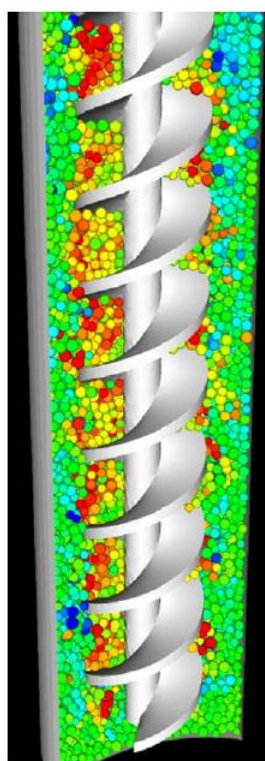


Figura 3.18 – Distribuição de velocidade e direção de movimento das bolas em um moinho vertical (MORRISON *et al.*, 2009)

As cores indicam diferentes velocidades e direções das bolas. As bolas de cor vermelha estão subindo com uma velocidade de 0,2m/s enquanto as bolas de cor azul escuro estão descendo na mesma velocidade.

A Figura 3.19 mostra o espectro de energia para os dois moinhos. Verificou-se que o moinho vertical possui maior frequência de colisões por segundo quando comparado com o moinho de bolas.

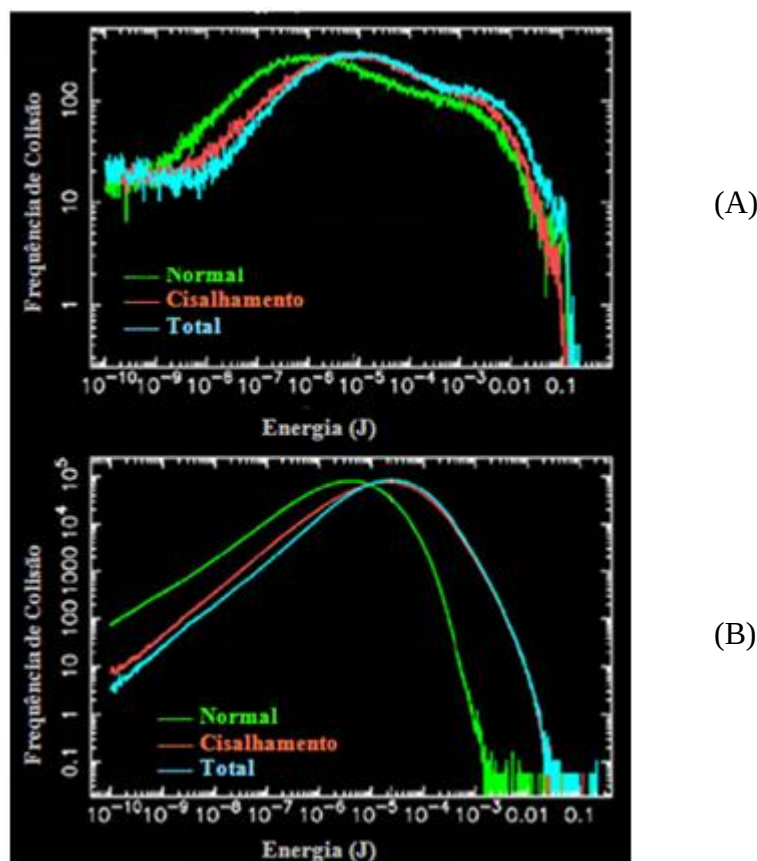


Figura 3.19 – Espectro de energia para o moinho de bolas (A) e para o moinho vertical (B)
(MORRISON *et al.*, 2009)

Com relação aos mecanismos de fratura predominantes em cada um dos moinhos pode-se dizer que não houve grandes diferenças. As curvas apresentadas na cor vermelha representam o mecanismo de cisalhamento e as curvas apresentadas na cor verde representam os demais mecanismos.

Além disso, o moinho vertical possui um espectro de energias em um intervalo reduzido. O moinho de bolas possui um espectro maior de distribuição de energias, o que o torna menos eficiente em termos da utilização da energia.

MAZZINGHY *et al.* (2012) utilizaram o modelo do balanço populacional para moinho de bolas para simulação de um moinho vertical em escala piloto. Fez-se necessário a utilização de um fator de ajuste de um dos parâmetros da função que descreve a velocidade de quebra das partículas, visto que o moinho vertical é mais eficiente que o moinho de bolas com relação à utilização da energia.

Através dos resultados obtidos foi possível inferir que os mecanismos de fratura dos moinhos de bolas e dos moinhos verticais são semelhantes, uma vez que foi possível prever a distribuição granulométrica do produto do moinho vertical sem a inclusão de uma função extra para descrever uma, possível, maior intensidade de colisões através do mecanismo de cisalhamento.

A Tabela III.5 indica que a intensidade de energia transmitida por cada bola é menor no moinho vertical. Contudo, tem-se uma quantidade maior de bolas e uma maior frequência de colisões por segundo.

Tabela III.5 – Comparativo entre a intensidade de energia imposta por unidade e por massa de bolas (MORRISON *et al.*, 2009)

Tipo de Moinho	Bolas	Potência	Intensidade	
	(mm)	(W)	(W/kg Bolas)	(W/Bola)
Bolas	25	125	3,90	0,302
Vertical	15	780	4,62	0,026

Dessa forma, este tipo de equipamento impõe maior intensidade de energia por massa de bolas, o que, provavelmente, o torna mais eficiente que o moinho de bolas.

Impactos de maior energia representam uma ineficiência no processo de quebra, visto que a eficiência máxima de moagem ocorre quando o impacto é igual à energia de fratura da partícula. No moinho vertical a distribuição de energias de impacto favorece impactos de menor energia, enquanto no moinho de bolas os impactos de maior energia são favorecidos. Esta melhor utilização dos impactos de menor energia tornam o moinho vertical mais eficiente.

3.3 Modelos de Classificação

3.3.1 Introdução

O moinho vertical possui uma distribuição de tamanho de partículas em seu interior e as partículas abaixo de uma determinada faixa de tamanho são arrastadas para fora do moinho através do fluxo de polpa ascendente. Este fluxo de polpa é injetado pela parte inferior do moinho através da bomba de recirculação e/ou pelo fluxo de alimentação nova do circuito de moagem.

Deve-se garantir que as partículas já fragmentadas, que estejam próximas do tamanho especificado, sejam retiradas do moinho com o objetivo de se evitar uma sobre moagem com consequente aumento da geração de finos, normalmente, prejudicial às etapas subsequentes do processo, além do desperdício de energia.

Estudos anteriores mostraram que a concentração de sólidos da polpa, que preenche os vazios entre as bolas dentro do moinho vertical, varia na extensão vertical. Na parte inferior do moinho a concentração de sólidos e o tamanho das partículas são maiores se comparada com a da parte superior (JANKOVIC, 1999).

Com o objetivo de simplificar o modelo de classificação e transporte das partículas dentro do moinho vertical considera-se que todo o material dentro do moinho, na zona de moagem, está perfeitamente misturado. Imagine agora que o moinho vertical opere da mesma forma que uma tubulação de polpa no sentido vertical. Segundo KING (2002^B), nesta situação a velocidade da água é maior que a velocidade das partículas. Considera-se que a velocidade de sedimentação das partículas é igual à sua velocidade terminal e está em paralelo e em sentido contrário à direção média do fluxo de polpa ascendente.

A concentração de sólidos em volume na seção vertical do moinho seria diferente daquela da alimentação e da descarga. Provavelmente, ocorreria uma acumulação de sólidos dentro do moinho até que o circuito entre em regime. Se este efeito realmente

ocorrer, poderia haver uma potencialização da redução das partículas, provavelmente, pelo mecanismo de atrição.

3.3.2 Velocidade das partículas

A velocidade média da polpa na zona de classificação do moinho vertical pode ser calculada conforme a Equação 3.36.

$$V_p = \frac{Q_p}{A} \quad (3.36)$$

sendo:

V_p = velocidade média da polpa (m/s);

Q_p = vazão de polpa (m³/h);

A = área da seção transversal do moinho vertical (m²);

D_m = diâmetro interno do moinho (m).

A velocidade média da polpa V_p na zona de moagem é maior que na zona de classificação, uma vez que na zona de moagem o volume útil para transporte da polpa é reduzido devido à ocupação do espaço disponível pela espiral e pelas bolas.

Considera-se que existe uma distribuição de tamanhos das partículas dentro do moinho vertical e que cada partícula tem uma velocidade terminal V_{ti} . A velocidade terminal da fração i , V_{ti} , pode ser calculada conforme a Equação 3.37.

$$V_{ti} = \frac{(\rho_s - \rho_p)gd_i^2}{18\eta_p} \quad (3.37)$$

sendo:

V_{ti} = velocidade terminal das partículas do intervalo de tamanho i (m/s);

ρ_s = densidade dos sólidos (t/m³);

ρ_p = densidade da polpa (t/m³);

g = aceleração da gravidade (m/s²);

d_i = diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (m);

η_p = viscosidade da polpa (Pa.s).

A velocidade terminal V_{ti} pode ser calculada através da equação anterior se o número de Reynolds R_e for menor que 0,01. O número de Reynolds R_e pode ser calculado conforme a Equação 3.38.

$$R_e = \frac{d_i V_{ti} \rho_p}{\eta_p} \quad (3.38)$$

sendo:

R_e = número de Reynolds (adimensional).

A velocidade diferencial das partículas do intervalo de tamanho i pode ser calculada subtraindo da velocidade ascendente ou velocidade média da polpa V_p a velocidade terminal V_{ti} , conforme a Equação 3.39.

$$V_i = V_p - V_{ti} \quad (3.39)$$

sendo:

V_i = velocidade das partículas do intervalo de tamanho i (m/s);

V_p = velocidade média da polpa (m/s);

V_{ti} = velocidade terminal das partículas do intervalo de tamanho i (m/s).

3.3.3 Acumulação de Sólidos

Cada faixa de tamanho i tem sua concentração de sólidos em volume q_i . A concentração de sólidos em volume da fração i , q_i , pode ser calculada conforme a Equação 3.40.

$$q_i = \frac{C_{vi}}{1 + \frac{C_v - q}{q - 1} - \frac{V_{ti}}{V_p}} \quad (3.40)$$

sendo:

q_i = concentração de sólidos em volume - intervalo de tamanho i (fração);

q = concentração de sólidos em volume - média (fração);

C_{vi} = concentração de sólidos em volume do intervalo de tamanho i na alimentação (fração);

C_v = concentração de sólidos em volume (fração);

V_p = velocidade média da polpa (m/s);

V_{ti} = velocidade terminal das partículas do intervalo de tamanho i (m/s).

A concentração de sólidos total, em volume, na zona de classificação q pode ser calculada conforme a Equação 3.41, sendo o somatório de todas as concentrações de sólidos em volume de cada intervalo de tamanho i , q_i .

$$q = \sum_i q_i \quad (3.41)$$

Para este cálculo é utilizada uma rotina de interações com substituição de um valor inicial para q na Equação 3.40, onde são calculados os q_i 's. O novo valor de q é verificado através da Equação 3.41 e novas interações são realizadas até se atingir uma convergência satisfatória.

3.3.4 Recirculação

A bomba de recirculação injeta a polpa pela parte inferior do moinho e este fluxo percorre o leito de bolas. Esta ação gera uma perda de carga que pode ser calculada através da Equação 3.42, KING (2002^B).

$$\Delta P_b = (\rho_s - \rho_p)(1 - \varepsilon)gL \quad (3.42)$$

sendo:

ΔP_b = perda de carga gerada pelo fluxo de polpa através do leito de bolas (Pa);

ρ_s = densidade dos sólidos (t/m³);

ρ_p = densidade da polpa (t/m³);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional);

g = aceleração da gravidade (m/s²);

L = altura do leito de bolas (m).

Os vazios entre as bolas são preenchidos pela polpa e esta massa de polpa exerce uma pressão que a bomba de recirculação deve ser capaz de vencer. A Equação 3.43 mostra como pode ser calculada esta pressão.

$$\Delta P_c = \rho_p g L \quad (3.43)$$

sendo:

ΔP_c = pressão da massa de polpa (Pa);

ρ_p = densidade da polpa (t/m³);

g = aceleração da gravidade (m/s²);

L = altura do leito de bolas (m).

Simplificadamente, a soma da variação de pressão das Equações 3.42 e 3.43 será a perda de carga que a bomba de recirculação deverá vencer.

A potência da bomba de recirculação pode ser calculada conforme a Equação 3.44, KING (2002^B).

$$P_{líq} = \frac{Q_p H_p \rho_p g}{\sigma} \quad (3.44)$$

sendo:

$P_{líq}$ = potência líquida (kW);

Q_p = vazão de polpa (m³/h);

H_p = coluna de polpa (m);

ρ_p = densidade da polpa (t/m³);

g = aceleração da gravidade (m/s²);

σ = eficiência da bomba (Fração).

A coluna de polpa H_p representa a altura do moinho vertical até o ponto de descarga por transbordo.

Sabendo-se quais são as faixas de tamanho i que deverão ser retiradas do moinho, pode-se calcular qual seria a velocidade média da polpa V_p em sentido ascendente. Através

desta velocidade V_p , calcula-se a vazão de polpa Q_p , pela Equação 3.36, e a partir daí calcula-se a potência líquida da bomba de recirculação $P_{líq}$, pela Equação 3.44.

Dessa forma, calcula-se com qual potência líquida $P_{líq}$ a bomba de recirculação deveria ser operada de forma que as partículas com a especificação de tamanho adequada sejam retiradas de dentro do moinho.

Normalmente, adotam-se taxas de recirculação elevadas nos moinhos verticais. Dessa forma, seria possível reduzir a moagem excessiva das partículas, porém este procedimento exige elevada potência na bomba de recirculação. Além disso, vazões elevadas provocam maior desgaste da bomba.

3.3.5 Modelo empírico

Os equipamentos de classificação como peneiras, hidrociclones, classificadores espirais e outros podem ser descritos através de um modelo de classificação empírico considerando a função matemática *Logistic Function* (AUSTIN *et.al.*, 1984).

A Equação 3.45 apresenta a função de classificação atual $e(d_i)$ de um equipamento de classificação.

$$e(d_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_i}{d_{50c}} \right)^{-\lambda}} \quad (3.45)$$

sendo:

$e(d_i)$ = função classificação atual;

d_i = diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (mm);

d_{50c} = diâmetro (corrigido) no qual a partícula tem 50% de chance de ir para *underflow* ou *overflow*;

λ = parâmetro relacionado a nitidez de separação.

O parâmetro relacionado a nitidez de separação λ pode ser estimado através da Equação 3.46.

$$\lambda = \frac{2,1972}{\ln(SI)} \quad (3.46)$$

sendo:

SI = nitidez de separação (Fração).

A nitidez de separação SI pode ser estimada através da Equação 3.47.

$$SI = \frac{d_{25}}{d_{75}} \quad (3.47)$$

sendo:

d_{25} = diâmetro de partícula do qual 25% é passante (mm);

d_{75} = diâmetro de partícula do qual 75% é passante (mm).

A Equação 3.48 apresenta a função classificação corrigida $c(d_i)$ de um equipamento de classificação.

$$c(d_i) = v + (1 - v)e(d_i) \quad (3.48)$$

sendo:

$c(d_i)$ = função classificação corrigida;

v = parâmetro relacionado ao curto-circuito de material.

O curto-circuito de material ocorre quando uma partícula de tamanho i , com a especificação desejada para o *overflow* é direcionada para o *underflow*, por exemplo.

3.3.6 Pós-classificação

Na prática, as partículas de maior diâmetro não tem habilidade de saírem do moinho como as partículas de menor diâmetro, que são retiradas do moinho juntamente com o fluxo de água. Assim, a descarga do moinho funciona como um classificador, que retorna as partículas de maior diâmetro para a zona de moagem.

A seguir será apresentada a solução do efeito de pós-classificação segundo KING (2002^A).

Considera-se que a zona de moagem está perfeitamente misturada. Aplicando a Equação 3.49 para a zona de moagem, tem-se:

$$m_i' = \frac{f_i' + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j' \tau'}{1 + S_i \tau'} \quad (3.49)$$

Nesta equação, o τ' é o tempo de residência efetivo na zona de moagem e pode ser descrito conforme a Equação 3.50.

$$\tau' = \frac{H}{Q_s (1 + C)} = \frac{\tau}{(1 + C)} \quad (3.50)$$

sendo:

τ' = tempo de residência efetivo das partículas na zona de moagem (min);

H = massa de material contido no moinho – *hold up* (t);

C = relação da taxa de recirculação pela taxa de alimentação (Fração);

Q_s = vazão de sólidos (t/h);

τ = média do tempo de residência das partículas (min).

Um balanço de massa-tamanho para o intervalo i no ponto onde o material da pós-classificação retorna para a zona de moagem pode ser escrito conforme a Equação 3.51.

$$(1 + C) f_i' = c_i m_i (1 + C) + f_i \quad (3.51)$$

sendo:

c_i = constante de classificação para as partículas do intervalo i na descarga do moinho.

Substituindo a expressão para f_i' na Equação 3.49 resulta em:

$$m_i(1+C) = \frac{f_i' + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j \tau' (1+C)}{1 + S_i \tau' - c_i} \quad (3.52)$$

Se uma nova variável $m_i^* = m_i(1+C)$ for definida, a Equação 3.52 toma a forma idêntica da Equação 3.49, conforme a Equação 3.53 a seguir.

$$m_i^* = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j^* \tau'}{1 + S_i \tau' - c_i} \quad (3.53)$$

Esta equação pode ser resolvida utilizando-se de um procedimento recursivo como o utilizado na Equação 3.52 começando do maior intervalo de tamanho i .

A distribuição granulométrica do produto do moinho pode ser obtida calculando os valores de m_i^* utilizando as propriedades de classificação, conforme a Equação 3.54.

$$f_i = (1 + c_i)(1 + C)m_i = (1 + c_i)m_i^* \quad (3.54)$$

Esta solução é complexa visto que o tempo de residência modificado não é usualmente conhecido. Este somente pode ser calculado depois de avaliar a distribuição granulométrica da zona de moagem perfeitamente misturada. Uma solução iterativa faz-se necessária e pode ser convenientemente implementada iniciando com um valor assumido para o tempo de residência efetivo τ' para calcular m_i^* através da Equação 3.53. A relação da taxa de recirculação pela taxa de alimentação C pode ser calculada através da Equação 3.55.

$$C = \sum_i c_i (1 + C)m_i = \sum_i c_i m_i^* \quad (3.55)$$

O tempo de residência médio das partículas na zona de moagem τ pode ser obtido através da massa de material contida no moinho H (*hold-up*).

É possível verificar a existência da pós-classificação quando existe diferença entre a distribuição granulométrica do *hold-up* e da descarga do moinho, conforme apresentado na Figura 3.20.

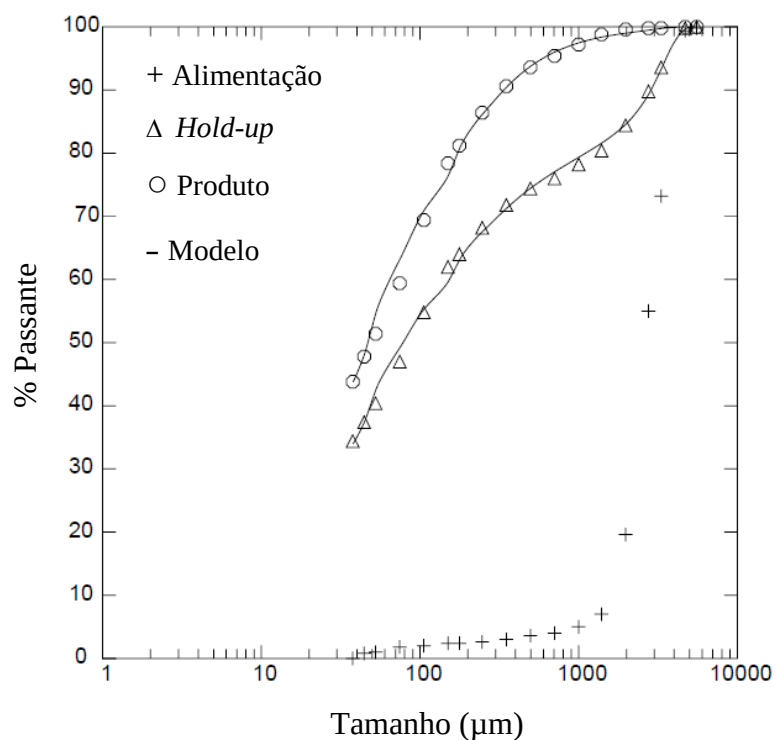


Figura 3.20 – Evidência da Pós-classificação (SCHNEIDER, 1995)

Aplicação do modelo de pós-classificação ao moinho vertical

As partículas de maior diâmetro que deixam a zona de moagem através do fluxo de polpa ascendente, provocado pelo movimento giratório da espiral e pela injeção de polpa pela parte inferior do moinho, atingem a zona de classificação (definida como sendo o espaço entre o topo da espiral até a descarga por transbordo do moinho vertical).

A Figura 3.21 apresenta a pós-classificação no moinho vertical.

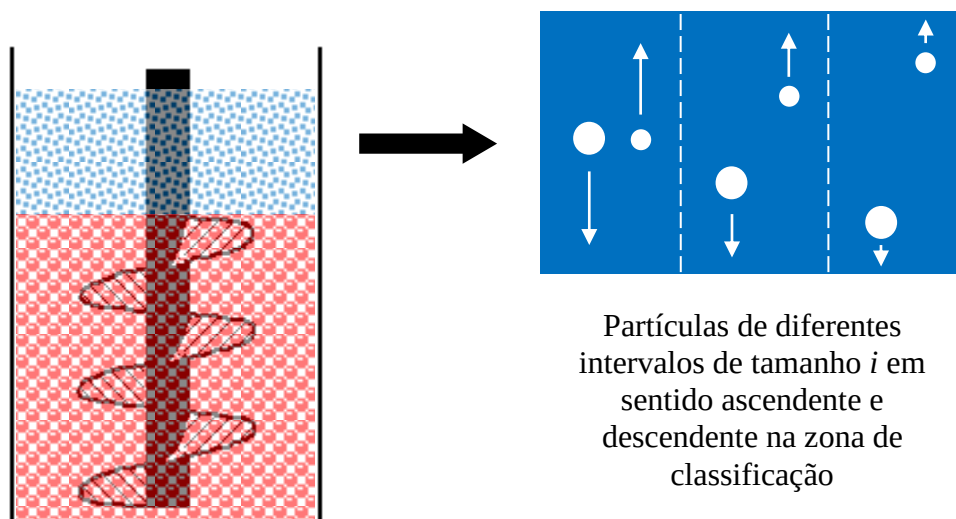


Figura 3.21 – Pós-classificação no moinho vertical

Contudo, essas partículas não têm habilidade para sair da zona de classificação em condições normais de operação. As partículas fora da especificação desejada retornam para a zona de moagem e permanecem neste ciclo até sofrerem redução de tamanho.

3.4 Previsão da Potência

Na literatura técnica existem poucas equações para previsão de potencia de moinhos verticais. Devido ao recente desenvolvimento dos moinhos verticais de maior porte, ainda não existem na literatura modelos para previsão acurada da potência.

A seguir serão apresentados os modelos disponíveis atualmente.

3.4.1 Equações empíricas

DUFFY (1994)

Desenvolveu uma equação empírica para previsão de potência líquida de moagem $P_{líq}$ através de medidas de potência de cinco operações distintas, sendo uma operação em escala piloto e quatro operações em escala industrial. Através da Equação 3.56, calcula-se a potência líquida de moagem $P_{líq}$ consumida por um moinho vertical.

$$P_{líq} = 0,0743 L \omega \rho_c d^{0,111} D_e^{3,057} T_e^{0,572} \quad (3.56)$$

sendo:

$P_{líq}$ = potência líquida de moagem (kW);

L = altura do leito de bolas (m);

ω = velocidade angular da espiral (rpm);

ρ_c = densidade efetiva da carga moedora (t/m³);

d = tamanho médio das bolas (mm);

D_e = diâmetro da espiral (m);

T_e = número de passos da espiral.

A densidade efetiva da carga moedora pode ser calculada conforme a Equação 3.57.

$$\rho_c = \rho_b(1 - \varepsilon) + \varphi_p \quad (3.57)$$

sendo:

ρ_c = densidade efetiva da carga moedora (t/m³);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional);

ρ_b = densidade das bolas (t/m³);

ρ_p = densidade da polpa (t/m³).

Também foi desenvolvida uma equação empírica para previsão da potencia em vazio P_{vaz} do moinho vertical (sem carga moedora, minério e água), conforme mostrado na Equação 3.58.

$$P_{vaz} = 0,000134 \omega W D_e^{0,57} \quad (3.58)$$

sendo:

P_{vaz} = potência em vazio (kW);

ω = velocidade angular da espiral (rpm);

D_e = diâmetro da espiral (m);

W = peso da espiral (kg).

JANKOVIC & MORRELL (1997)

Desenvolveram uma equação empírica para previsão de potência líquida de moagem P_{liq} através de medidas de potência de cinquenta e oito operações distintas em escala de laboratório, piloto e industrial. Através da Equação 3.59 calcula-se a potência líquida de moagem P_{liq} consumida por um moinho vertical.

$$P_{liq} = \frac{2,05 \rho_c D_e^{1,96} \theta^{0,65} L^{0,98} d^{0,17}}{1000} \quad (3.59)$$

sendo:

P_{liq} = potência líquida de moagem (kW);

ρ_c = densidade efetiva da carga moedora (kg/m³);

D_e = diâmetro da espiral (m);

θ = velocidade periférica da espiral (m/s);

L = altura do leito de bolas (m);

d = diâmetro médio das bolas (mm).

A densidade efetiva da carga moedora foi calculada conforme a Equação 3.60 de TÜZÜN (1993).

$$\rho_c = (1 - \varepsilon)(\rho_b - \rho_p) \quad (3.60)$$

A equação de JANKOVIC & MORRELL (1997) foi desenvolvida com um grande número de dados de operações industriais, porém todos de pequena capacidade.

JANKOVIC (1999) desenvolveu um conjunto de seis equações para previsão da potência líquida de moagem P_{liq} consumida em um moinho vertical utilizando conceitos da física. A previsão se mostrou adequada com relação a precisão, contudo, a complexidade de sua aplicação torna esta solução pouco atrativa ou mesmo inviável no ambiente de projeto e/ou operacional. Também foram utilizados dados de moinhos industriais de pequeno porte.

NITTA et al. (2006)

Desenvolveram uma equação para estimativa de potência absorvida da rede P_{ele} consumida por um moinho vertical, conforme Equação 3.61.

$$P_{ele} = 312 L_{ef}^{0,8847} D_e^{2,232} 60 \omega^{1,232} d_{gap} \quad (3.61)$$

sendo:

P_{ele} = potência elétrica ou absorvida da rede (kW);

L_{ef} = altura efetiva do leito de bolas (m);

D_e = diâmetro da espiral (m);

ω = velocidade angular da espiral (rpm);

d_{gap} = distância entre a espiral e a parede do moinho vertical (m).

A equação original considera a velocidade angular da espiral ω em rotações por segundo (rps). Esta variável foi multiplicada por 60 para converter segundos em minutos de forma a considerar a unidade em rotações por minuto (rpm).

Os autores afirmam que o erro desta equação está em torno de $\pm 10\%$. Foram considerados moinhos verticais de pequena capacidade para elaboração desta equação.

Atualmente, o interesse da indústria mineral é prever com precisão aceitável a potência de moinhos verticais de grande capacidade.

3.4.2 Efeito das variáveis na potência

A seguir será discutido o efeito de algumas variáveis do moinho vertical com relação a potência consumida.

Densidade da polpa

A densidade da polpa tem influência na potência visto que esta variável altera o atrito entre as bolas e o peso aparente destas. Devido ao empuxo, quanto maior a densidade de polpa menor será o peso aparente das bolas, resultado em uma diminuição da densidade da carga e consequentemente uma diminuição da potência (dentro de um intervalo normal de operação).

Tamanho das bolas

O tamanho das bolas também tem influência na potência, pois o coeficiente de fricção do leito de bolas é alterado com a alteração do diâmetro das bolas. O coeficiente de fricção é maior para bolas maiores porque o número de pontos de contato é menor. Portanto, a redução do diâmetro das bolas proporciona uma redução na potência.

Enchimento de bolas

Pode-se afirmar que o enchimento de bolas é diretamente proporcional à potência em um moinho vertical.

JANKOVIC *et al.* (2006) fizeram medidas de potência variando o enchimento de bolas com um moinho vertical modelo VTM-1500 no circuito Cannington. A Figura 3.22 mostra a variação da potencia (kW) com o enchimento de bolas (t).

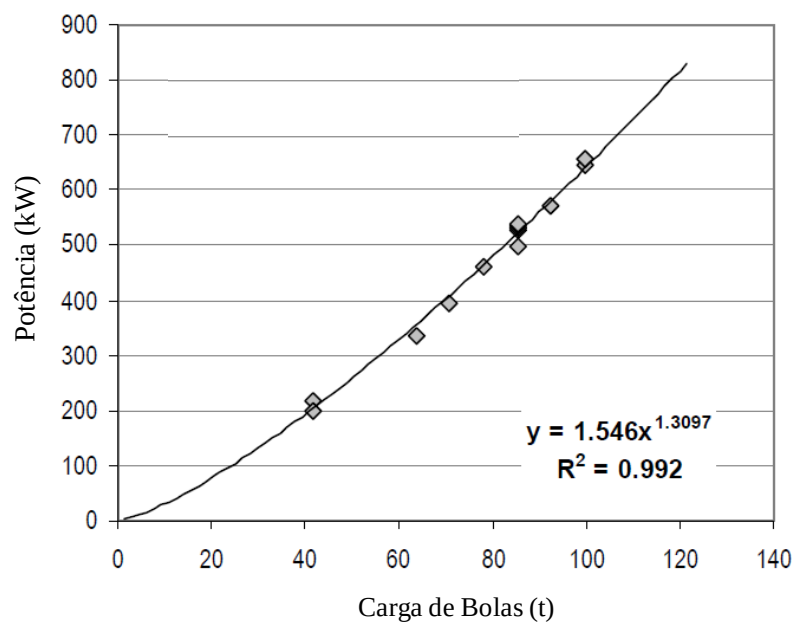


Figura 3.22 – Potência por enchimento de bolas para moinho vertical modelo VTM-1500 (JANKOVIC *et al.*, 2006)

Equação para previsão de potência

Para a elaboração de um modelo consistente para previsão de potência seria necessário criar um banco de dados com moinhos verticais de diferentes tamanhos, operados em diferentes condições e com diferentes minérios.

3.4.3 Estimativa de potência

É possível estimar a potência líquida $P_{líq}$, ou potência efetivamente utilizada somente para a moagem do material, através da medição das grandezas elétricas do motor do moinho.

A Equação 3.62 pode ser utilizada para calcular a potência elétrica ou absorvida da rede P_{ele} conhecendo a tensão u , a corrente i e o fator de potência $\cos\varphi$.

$$P_{ele} = \frac{iu \cos \phi \sqrt{3}}{1000} \quad (3.62)$$

sendo:

P_{ele} = potência elétrica ou absorvida da rede (kW);

i = corrente (A);

u = tensão (V);

$\cos \phi$ = fator de potência (fração).

Para converter a potência elétrica ou absorvida da rede P_{ele} em potência mecânica ou útil P_{mec} , utiliza-se o rendimento η , conforme a Equação 3.63.

$$P_{mec} = P_{ele} \eta \quad (3.63)$$

sendo:

P_{mec} = potência mecânica ou útil (kW);

η = rendimento (fração).

O rendimento η define a eficiência da conversão da energia elétrica em energia mecânica (trabalho). Tanto o rendimento η quanto o fator de potência $\cos \phi$ variam conforme a variação da carga que o motor tem que girar.

A potência líquida $P_{líq}$ de um moinho vertical pode ser estimada considerando a potência mecânica P_{mec} subtraída da potência em vazio P_{vaz} (moinho sem carga moedora, minério e água), conforme a Equação 3.64.

$$P_{líq} = P_{mec} - P_{vaz} \quad (3.64)$$

sendo:

$P_{líq}$ = potência líquida (kW);

P_{mec} = potência mecânica ou útil (kW);

P_{vaz} = potência em vazio (kW).

Exemplo

O moinho vertical modelo *Vertimill*TM VTM-1500 da *Metso* possui um motor de 1500cv ou 1119kW. A *Metso*, normalmente, considera uma folga de projeto de 10% no dimensionamento do motor (ALLEN¹). Portanto, a potência elétrica seria $P_{ele} = 1007\text{kW}$ (90% da potência disponível). Esta potência seria solicitada se o moinho vertical fosse operado com enchimento máximo de carga moedora recomendada pela *Metso* (aproximadamente 130t de bolas).

A potência elétrica P_{ele} de um moinho vertical pode ser calculada através dos dados obtidos na sala de controle e através da curva característica do motor, conforme apresentado na Figura 3.23.

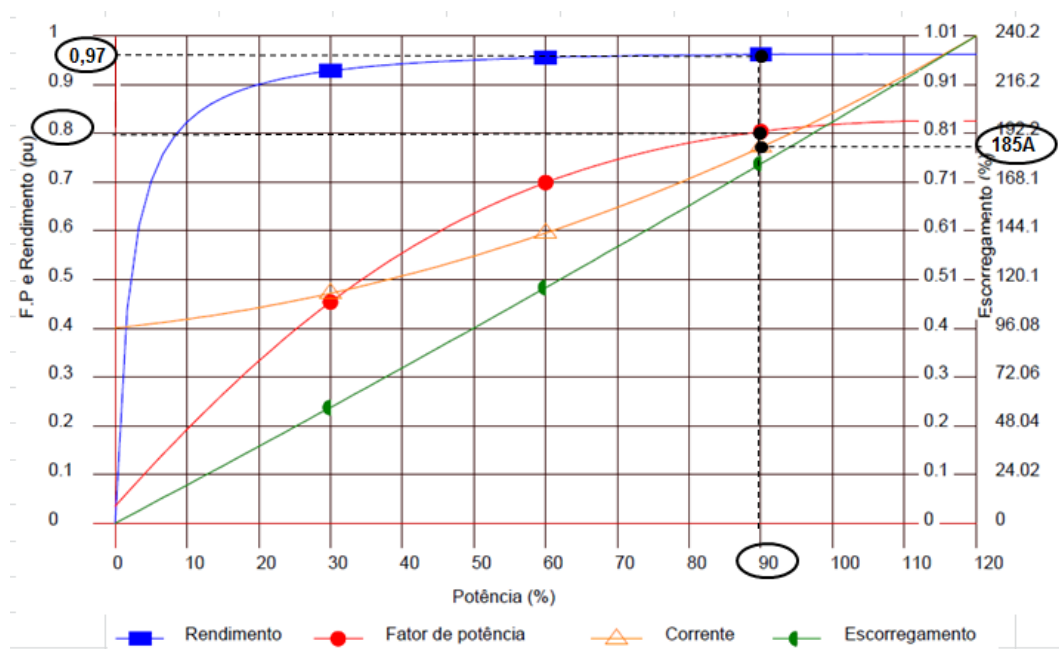


Figura 3.23 – Curva característica do motor do moinho vertical modelo VTM-1500

Considere um moinho vertical VTM-1500 operado com 90% da sua potência, apenas como exemplo.

¹ Allen, J. Reunião realizada durante o teste piloto com *Vertimill*TM, York, EUA, 2012.

Ao traçar uma reta vertical a partir da potência correspondente a 90% até a curva com símbolos em triângulo, na cor laranja, obtém-se uma corrente de 185A. Prolongando-se a mesma reta vertical, obtém-se um fator de potência de 0,80 e um rendimento de 0,97.

A Tabela III.6 apresenta o resultado do cálculo da potência elétrica P_{ele} através da Equação 3.62, o cálculo da potência mecânica P_{mec} através da Equação 3.63, o cálculo da potência em vazio P_{vaz} através da Equação 3.58 e o cálculo da potência em líquida P_{liq} através da Equação 3.64.

Tabela III.6 – Exemplo de estimativa de potência para o moinho vertical modelo VTM-1500

i	u	$\cos\varphi$	η	P_{ele}	P_{mec}	P_{vaz}	P_{liq}
(A)	(V)	-	-	(kW)	(kW)	(kW)	(kW)
185	4000	0,80	0,97	1025	995	174	821

Portanto, o moinho modelo VTM-1500, quando operado com a carga máxima de bolas (aproximadamente 130t), demandaria uma potência líquida de $P_{liq} = 821\text{kW}$.

Os moinhos *Vertimill*TM instalados no Brasil possuem motores da WEG. Este fabricante de motores estimou a potência em vazio do modelo VTM-1500 em $P_{vaz} = 176\text{kW}$ (WEG¹). Um desvio pequeno em relação ao resultado obtido através da Equação 3.58 de $P_{vaz} = 174\text{kW}$ (DUFFY, 1994).

¹ WEG - Suporte técnico, 2012.

3.5 Teste com moinho de bolas em escala de laboratório

3.5.1 Introdução

As principais variáveis de um moinho de bolas de laboratório são apresentadas a seguir:

J = enchimento de bolas (volume de bolas carregado no moinho);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional);

U = enchimento de material (volume de material que preenche os vazios da carga moedora).

A Figura 3.24 apresenta uma vista frontal de um moinho de bolas de laboratório carregado com bolas.

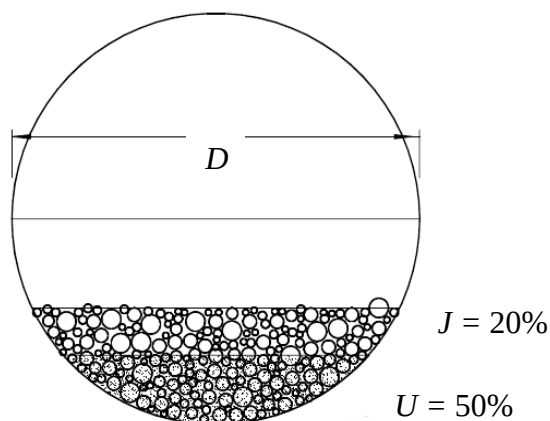


Figura 3.24 – Definições para testes com moinho de bolas em escala de laboratório (KING, 2002^A)

Massa da carga moedora

A massa da carga moedora M_c pode ser calculada conforme a Equação 3.65.

$$M_c = V_m \rho_b J (1 - \varepsilon) \quad (3.65)$$

sendo:

M_c = massa da carga moedora (kg);

V_m = volume do moinho (m³);

ρ_b = densidade das bolas (t/m³);

J = enchimento de bolas (volume de bolas carregado no moinho);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional).

Massa de sólidos

A massa de sólidos M_s pode ser calculada conforme a Equação 3.66.

$$M_s = V_m \rho_a J \varepsilon U \quad (3.66)$$

sendo:

M_s = massa de sólidos (kg);

V_m = volume do moinho (m³);

ρ_a = densidade aparente dos sólidos (t/m³);

J = enchimento de bolas (volume de bolas carregado no moinho);

ε = porosidade - fração de vazios entre as bolas (adimensional);

U = enchimento de material (volume de material que preenche os vazios da carga moedora).

Velocidade Crítica

A velocidade crítica N_c é obtida quando a bola consegue atingir o ponto mais elevado do moinho sem se desprender da parede. Para calcular a velocidade crítica N_c , iguala-se a força centrífuga ao peso da bola no ponto mais elevado do moinho, conforme a Equação 3.67.

$$N_c = \frac{42,306}{\sqrt{D_m - d_{\max}}} \quad (3.67)$$

sendo:

N_c = velocidade crítica (rpm);

D_m = diâmetro interno do moinho (m);

$d_{\max}$ = diâmetro máximo das bolas (m).

3.5.2 Teste com frações estreitas de tamanhos de partículas

O teste com frações estreitas de tamanhos de partículas é uma referência para o dimensionamento de moinhos de bolas industriais (AUSTIN *et.al.*, 1984). O teste é realizado em um moinho de diâmetro e comprimento iguais, oito aletas igualmente espaçadas (*lifters*), bolas de apenas um tamanho com diâmetro igual a 1/10 do diâmetro do moinho D_m , enchimento de bolas $J = 20\%$, enchimento de material $U = 50\%$ e porcentagem da velocidade crítica $V_c = 70\%$.

Normalmente, são testadas no mínimo três faixas estreitas de tamanho na razão $\sqrt{2}$ a seco e uma faixa em duplicada a úmido para determinação da velocidade de quebra para a moagem a úmido (ALVES *et al.*, 2004).

3.5.3 Teste com distribuição natural de tamanhos de partículas

O teste é realizado com a distribuição granulométrica natural da alimentação nova do circuito de moagem industrial. Deve-se manter no ensaio de laboratório a mesma relação entre o tamanho máximo das partículas de minério (*Top Size*) e o tamanho da maior bola do moinho industrial. Neste caso, se for necessário, o material deverá ser reduzido, através de britagem, até que se atinja a mesma relação do circuito industrial. Sugere-se adotar a relação, entre o maior tamanho de bolas e o diâmetro do moinho, próxima de 1/10 (SCHNEIDER¹).

O ensaio é realizado em condições similares à moagem industrial, com o mesmo enchimento de bolas, tipicamente $J = 40\%$, enchimento de material $U = 100\%$, mesma porcentagem da velocidade crítica V_c e mesma distribuição de tamanho de bolas do moinho industrial.

Para conhecer a distribuição de tamanho de bolas do moinho industrial é necessário descarregar a carga de bolas e classificá-la. Este é um procedimento que demanda tempo e de custo considerável. Assim, quando não for possível obter a distribuição de

¹ Schneider, C. L. Comunicação pessoal, 2011.

tamanho de bolas, sugere-se utilizar a curva de *Gaudin-Schumann* (FUERSTENAU, M. C. *et al.*, 2003) de inclinação igual a quatro como carga balanceada de distribuição de bolas (SCHNEIDER¹).

Normalmente, são preparadas duas alíquotas para os testes, sendo uma para o teste a seco e uma para o teste a úmido. Assim, o material é moído a seco em diferentes tempos até atingir o P_{80} desejado apenas um teste é realizado a úmido com um tempo de cerca de 30% menor que o tempo testado para atingir o P_{80} . Dessa forma, é possível a determinação da velocidade de quebra para a moagem a úmido (SCHNEIDER¹).

Adotando este procedimento, o tempo necessário para a realização do teste é reduzido, pois todas as moagens são realizadas a seco e apenas uma moagem é realizada a úmido.

3.5.4 Teste do fabricante de moinho vertical

O ensaio é realizado em um moinho 203,2mm x 254,0mm (8"x10") com interior liso (sem levantadores de carga) e com uma carga de bolas de um único tamanho ($d_{max} = 19\text{mm}$). Adota-se enchimento de bolas $J = 42\%$, enchimento de material $U = 100\%$ e porcentagem da velocidade crítica $V_c = 76\%$.

Considera-se que a energia específica do moinho vertical industrial é 65% da energia específica determinada no ensaio de moagem em escala de laboratório.

Este teste não prevê a distribuição granulométrica do moinho vertical industrial e ainda não produz resultados coerentes com material de distribuição granulométrica grossa, $100\% < 6\text{mm}$ (SUAREZ²).

¹ Schneider, C. L. Comunicação pessoal, 2011.

² Suarez, D. Reunião realizada durante o teste piloto com *Vertimill*TM, York, EUA, 2012.

3.5.5 Critério para determinar os intervalos de tempo de moagem

É comum adotar uma sequência de tempos de moagem, normalmente de 2, 4, 8, 16, 32 minutos, para se obter distribuições granulométricas espaçadas de tal forma que seja possível determinar as funções seleção e quebra para um amplo intervalo de distribuição de tamanho de partículas.

Neste trabalho, estudaram-se amostras bem distintas com relação à resistência a fragmentação e a distribuição granulométrica. Dessa forma, optou-se por calcular os intervalos de tempo de moagem segundo a quebra de primeira ordem (AUSTIN *et.al.*, 1984). Evitou-se assim a perda de tempo com moagens iniciais de avaliação dos minérios estudados e foi possível obter um espaçamento mais constante entre as curvas granulométricas.

3.5.6 Estimativa de potência de moinhos de bolas

ROWLAND (1986) desenvolveu uma equação para estimativa de potência de moinhos de bolas de diâmetro menor que 0,76m.

$$P_{bola} = 6,3 * D_m^{0,3} * sen\left(51 - 22\left(\frac{2,44 - D_m}{2,44}\right)\right) * (3,2 - 3J) * V_c * \left(1 - \frac{0,1}{2^{(9-10V_c)}}\right) \quad (3.68)$$

sendo:

P_{bola} = potência no eixo pinhão (kW/t de bolas);

D_m = diâmetro interno do moinho (m);

J = enchimento de bolas (volume de bolas carregado no moinho);

V_c = fração da velocidade crítica.

CAPÍTULO 4 - MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 Materiais

Foram testadas amostras de minério de ferro e de minério de cobre das unidades da Vale S.A. Os minérios estudados foram classificados segundo a sua granulometria, conforme descrito a seguir.

4.1.1 Material de granulometria fina

Amostras testadas com moinho vertical em escala piloto e com moinho de bolas em escala de laboratório.

- Pellet Feed 2
- Pellet Feed 3
- Pellet Feed 4

As amostras de Pellet Feed testadas são misturas de minérios de ferro provenientes de diferentes minas da Vale S.A.

Estas amostras foram testadas com o objetivo de investigar uma possível aplicação de moinho vertical na moagem anterior a etapa de pelotização. Este tipo de moagem tem como objetivo adequar a distribuição granulométrica do material e gerar superfície específica, necessária ao processo de pelotização.

O produto do circuito de moagem deve possuir $P_{80} = 36\mu\text{m}$.

4.1.2 Material de granulometria grossa

Os materiais de granulometria grossa considerados neste trabalho tiveram a sua distribuição granulométrica adequada, através de britagem, para $100\% < 6,3\text{mm}$. Segundo o fabricante do moinho vertical, este seria o limite de tamanho de partículas

para uma operação eficiente do moinho vertical.

Amostras testadas com moinho vertical em escala piloto e com moinho de bolas em escala de laboratório.

- Minério de Ferro
- Minério de Cobre

As amostras de Minério de Ferro e de Minério de Cobre foram testadas com o objetivo de verificar o desempenho do moinho vertical alimentado com material de distribuição granulométrica grossa.

O produto do circuito de moagem deve possuir P_{80} conforme mostrado a seguir.

- Minério de Ferro: $P_{80} = 100\mu\text{m}$;
- Minério de Cobre: $P_{80} = 210\mu\text{m}$.

4.2 Métodos

4.2.1 Testes em escala piloto

Os testes com moinho vertical em escala piloto foram realizados nos laboratórios da *Metso*, na cidade de York, estado da Pensilvânia, EUA.

Fluxograma

A Figura 4.1 mostra o fluxograma do teste em escala piloto com o moinho vertical.

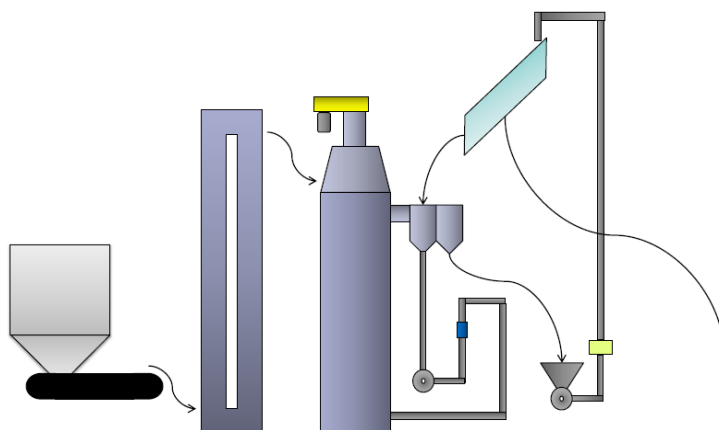


Figura 4.1 – Fluxograma do teste piloto com moinho vertical (VALE¹)

O moinho vertical foi operado com velocidade da espiral de 87rpm. Esta velocidade foi mantida constante em todos os testes realizados.

A alimentação do material no moinho foi realizada por um sistema constituído por um silo, um alimentador de correia e um elevador de canecas.

O minério armazenado no silo foi dosado através do alimentador de correia no elevador de canecas, que abasteceu o moinho pela sua parte superior. Neste ponto foi adicionada água junto com o minério, com o objetivo de atingir a concentração de sólidos desejada.

A vazão de alimentação nova do circuito foi controlada através de um variador de velocidade e uma balança, instalados no alimentador de correia.

A Figura 4.2 mostra detalhes da instalação da *Metso* para testes com moinho vertical em escala piloto.

¹ Vale, relatório interno, 2010.



Figura 4.2 – Vista geral do circuito com moinho vertical piloto (VALE¹)

O circuito foi fechado com peneiras de alta frequência e abertura de tela de acordo com a especificação de produto desejada. O material retido na peneira foi retornado ao moinho por gravidade pela sua abertura superior.

A peneira de alta frequência teve as suas variáveis operacionais ajustadas de forma a simular um hidrociclone, equipamento normalmente utilizado em circuitos de moagem. A peneira de alta frequência utilizada nos testes foi operada com baixa eficiência, visto que este equipamento é, normalmente, mais eficiente que os hidrociclones.

¹ Vale, relatório interno, 2010.

A Figura 4.3 mostra a peneira de alta frequência utilizada como equipamento de classificação do circuito de moagem e a bomba de recirculação do moinho vertical.



Figura 4.3 – Vista da peneira de alta frequência e da bomba de recirculação (VALE¹)

Um pequeno tanque separador, instalado na borda superior do moinho, direcionou parte do material para recirculação no moinho. Este fluxo foi alimentado pela parte inferior do moinho através de uma bomba de polpa do tipo deslocamento positivo. O material que extravasou do tanque separador foi direcionado para uma caixa de polpa. Da caixa de polpa o material foi bombeado para a alimentação da peneira de alta frequência.

¹ Vale, relatório interno, 2010.

A Figura 4.4 mostra detalhes do tanque separador.

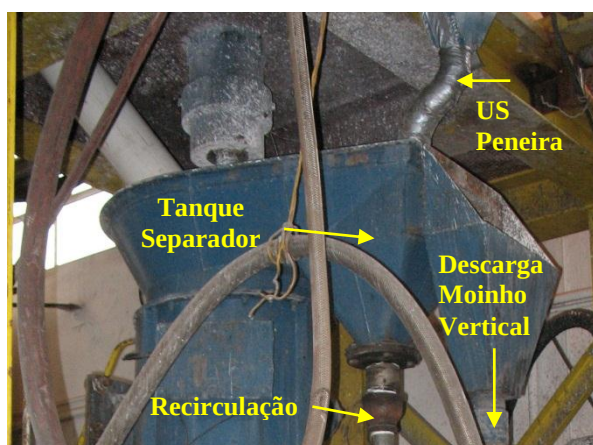


Figura 4.4 – Detalhes do tanque separador do moinho vertical em escala piloto (VALE¹)

A Figura 4.5 mostra a espiral do moinho vertical durante o descarregamento da carga de bolas.

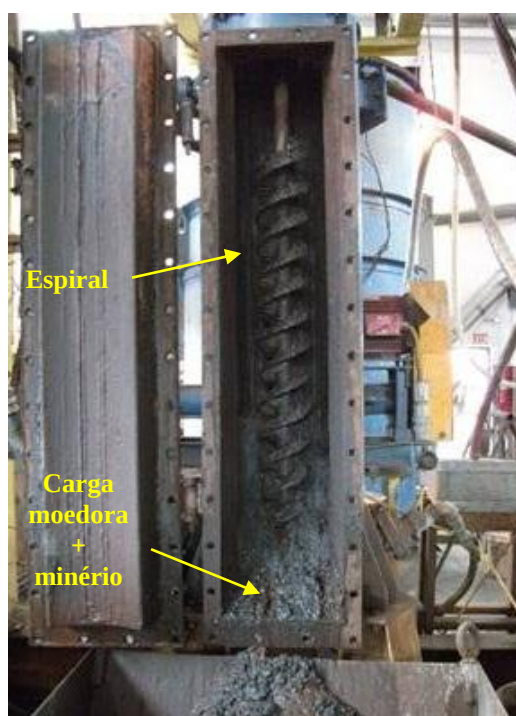


Figura 4.5 – Descarregamento do moinho vertical piloto (VALE¹)

¹ Vale, relatório interno, 2010.

Preparação de amostras

As amostras de Pellet Feed não tiveram qualquer redução preliminar aos testes, apenas homogeneização. Nos primeiros testes realizados as amostras foram alimentadas com umidade natural. Nos testes finais as amostras foram alimentadas no circuito sem umidade.

As amostras de Minério de Ferro e de Minério de Cobre foram britadas em 100% < 6,3mm e homogeneizadas, anteriormente aos testes. Estas amostras foram alimentadas no circuito sem umidade.

Distribuição de corpos moedores

A Tabela IV.1 apresenta a distribuição de tamanhos das bolas utilizadas no teste piloto com moinho vertical.

Tabela IV.1 – Distribuição de tamanhos das bolas utilizadas no teste piloto com moinho vertical

Amostra	<i>Pellet Feed 2</i>	<i>Pellet Feed 3 Pellet Feed 4</i>	<i>Minério de Ferro Minério de Cobre</i>
Bola (mm)	Ret. (%)	Ret. (%)	Ret. (%)
35	-	-	38,4
30	-	-	27,5
25	30,7	-	14,5
19	34,6	40,7	17,7
15	29,7	-	-
12	5	42,5	1,9
9	-	16,8	-
Total	100	100	100

A Metso considerou o tamanho máximo de partícula de cada amostra (*Top Size*) para selecionar a distribuição de bolas dos testes. Por exemplo, a amostra de Pellet Feed 2 tem partículas mais grossas se comparada com as amostras de Pellet Feed 3 e Pellet Feed 4. Assim, para a amostra de Pellet Feed 2 foi considerada uma distribuição de

bolas com tamanho máximo de bola de 25mm. Dessa forma, espera-se que as bolas de 25mm tenham maior eficiência na moagem das partículas grossas da amostra de Pellet Feed 2. Contudo, estas mesmas bolas terão menor eficiência de moagem das partículas finas.

Para as amostras classificadas como grossas, amostra de Minério de Ferro e amostra de Minério de Cobre, a Metso considerou uma distribuição de bolas com tamanho máximo de bola de 35mm.

4.2.2 Amostragem

Foram amostrados os seguintes fluxos:

- alimentação nova;
- descarga do moinho vertical;
- *undersize* da peneira;
- *oversize* da peneira;
- recirculado (em alguns testes).

Através de testes de bancada com moinho de bolas ou através do índice de trabalho de Bond (BWI) é estimada a taxa inicial de alimentação do moinho vertical. Depois que o teste é iniciado, acompanha-se a variação da carga circulante e a variação do P_{80} desejado no *undersize* da peneira de alta frequência.

O cálculo da massa de sólidos do *undersize* da peneira de alta frequência foi realizado através da concentração de sólidos da polpa (amostragem manual do fluxo realizada a cada 15 minutos) e da massa de polpa obtida através da leitura de uma balança instalada abaixo do tanque que recolheu todo o fluxo.

As concentrações de sólidos de polpa dos fluxos foram obtidas através de amostragem manual realizada a cada 15 minutos.

O controle do teste piloto foi realizado através de uma planilha em *Excel*TM onde foram registrados todos os dados obtidos durante o teste. Dessa forma, um balanço de massas preliminar foi gerado a cada 15 minutos de teste. A partir do balanço de massas preliminar foi possível verificar a estabilização da carga circulante do circuito através de um gráfico. Considerou-se que o circuito estava estável apenas quando se obteve a estabilização da carga circulante. Neste momento foram coletadas amostras de todos os pontos de amostragem para análise da distribuição granulométrica e da concentração de sólidos na polpa.

4.2.3 Balanço de massas

O balanço de massas dos testes em escala piloto foi realizado através da distribuição granulométrica, da concentração de sólidos e das vazões de sólidos de cada um dos fluxos amostrados. Utilizou-se o método dos multiplicadores de Lagrange implementado em planilhas de *Excel*TM (VALADÃO & ARAUJO, 2007).

Os resíduos dos dados experimentais referentes ao erro de fechamento do balanço de massas foram resolvidos através da minimização dos quadrados de uma função objetivo, conforme a Equação 4.1.

$$F_{ob} = \sum_{i=1}^n w \left[\frac{(F_i - F_i^*)}{F_i^*} \right]^2 \quad (4.1)$$

sendo:

F_{ob} = função objetivo;

F_i = distribuição granulométrica experimental (% retida);

F_i^* = distribuição granulométrica simulada (% retida);

w = fator que representa a qualidade ou confiança da distribuição granulométrica.

Um valor de $w = 1$ significa maior confiabilidade nas medidas e um valor de $w = 0$ significa que este não será considerado na função objetivo.

4.2.4 Caracterização das amostras

Foram realizados testes de moagem em escala de laboratório com moinhos de bolas convencionais. A Figura 4.6 apresenta um dos moinhos de bolas (254mm x 254mm) utilizados nos testes em escala de laboratório.



Figura 4.6 – Moinho de bolas de 254mm x 254mm utilizado nos testes em escala de laboratório.

As condições dos testes com moinho de bolas em escala de laboratório estão descritas na Tabela IV.2.

Tabela IV.2 – Condições dos ensaios em escala de laboratório com moinho de bolas

Teste Moinho de Bolas Laboratório	
Diametro (mm)	254
Comprimento (mm)	254
Enchimento de bolas J (%)	40
Enchimento de material U (%)	100
Porcentagem da velocidade crítica V_c (%)	70
Levantadores de carga	8

A distribuição de bolas utilizada nos testes em escala de laboratório é a mesma adotada nos testes em escala piloto.

É preferível utilizar moinhos com levantadores de carga visto que alguns materiais (principalmente carvão, bauxita, manganês e minério de ferro com elevada fração de finos), quando moídos, aglomeram nas bolas. Isso ocorre, geralmente, em testes com elevadas concentrações de sólidos (aproximadamente de 75% a 85% de sólidos). Nestes casos, os levantadores de carga também promovem a desagregação do material acumulado nas bolas. Os testes em moinhos sem levantadores de carga devem ser realizados com maior fração da velocidade crítica de forma a compensar a menor agitação das bolas devido a falta de levantadores de carga.

As amostras de granulometria grossa, Minério de Ferro e Minério de Cobre, foram preparadas anteriormente aos testes. As amostras foram britadas em $100\% < 3,6\text{mm}$ e homogeneizadas. Estas amostras foram reduzidas com o objetivo de manter proporção adequada em relação ao tamanho de bolas e aos diâmetros dos moinhos utilizados nos testes.

As amostras foram submetidas a moagem por diferentes intervalos de tempo. Após cada tempo de moagem, todo o material foi retirado do moinho para obtenção da distribuição granulométrica. As perdas de material foram avaliadas e o material foi devolvido ao moinho para a continuação do teste.

A amostra de Minério de Cobre foi testada a seco em diferentes tempos de moagem. Uma segunda alíquota foi testada a úmido para determinação da taxa de quebra para a moagem a úmido. Para este caso, adotou-se um tempo 30% menor que o último tempo do teste a seco, segundo a recomendação de ALVES *et al.* (2004).

Os intervalos de tempo de moagem foram estimados segundo a quebra de primeira ordem (AUSTIN *et al.*, 1984) com o objetivo de se obter distribuições granulométricas espaçadas de tal forma que fosse possível determinar as funções seleção e quebra para um amplo intervalo de distribuição de tamanho de partículas.

4.2.5 Determinação dos parâmetros de quebra

Os parâmetros de quebra foram determinados através dos resultados dos testes em moinho de bolas em escala de laboratório utilizando-se do programa *BatchMill*TM versão 1.6 (MTI, 2003).

O programa interpola as distribuições granulométricas para encontrar os parâmetros de quebra que melhor representam uma ampla faixa granulométrica de alimentação do moinho.

A Figura 4.7 apresenta a tela principal *BatchMill*TM.

The screenshot shows the main window of the BatchMill software. The title bar reads 'Batch Mill H:\PhD\2 - BatchMill\1 - Pellet Feed 2.csv'. The menu bar includes File, Edit, View, Selection, Breakage, Calculate, and About. The main area contains a table with columns: Value, Lower, Upper, Unit, and Optimize?. The table lists several parameters: S1 (0.688398, 0.01, 200, min⁻¹@ 1mm), ζ1 (0.114677, 0.001, 4), ζ2 (0.434686, 0.001, 100), γ (1.50796, 0.01, 2.5), β (2.34823, 0.01, 10), and φ (0.413907, 0.01, 0.99). Below the table, there is an 'Interrupt' button, an 'Obj. value' field showing 'NSR = 0.277486', and dropdown menus for 'Objective function' (set to NSR) and 'Step size' (set to Retain). There is also a 'Batch test set' dropdown (set to '1 - Pellet Feed 2.csv') and a checked 'wet set' checkbox. The 'Messages' field shows 'H:\2\Programas\BatchMill1.6.0'. An 'Energy Specific Sele...' dialog box is open on the right, showing a table with columns 'Value' and 'Unit'. It lists: S1 (0.688398, min⁻¹@ 1mm), Holdup (6510, g), Charge (24, kg), J (40, %), Cs (70, %), D (254, mm), S1E (3.78406, t / kWh), kWb (2.96075, kWh/t), and Power (71.0581, W).

Figura 4.7 – Tela do programa utilizado para determinação dos parâmetros de quebra, *BatchMill*TM

A Figura 4.8 apresenta o resultado da interpolação das curvas granulométricas através do *BatchMill*TM.

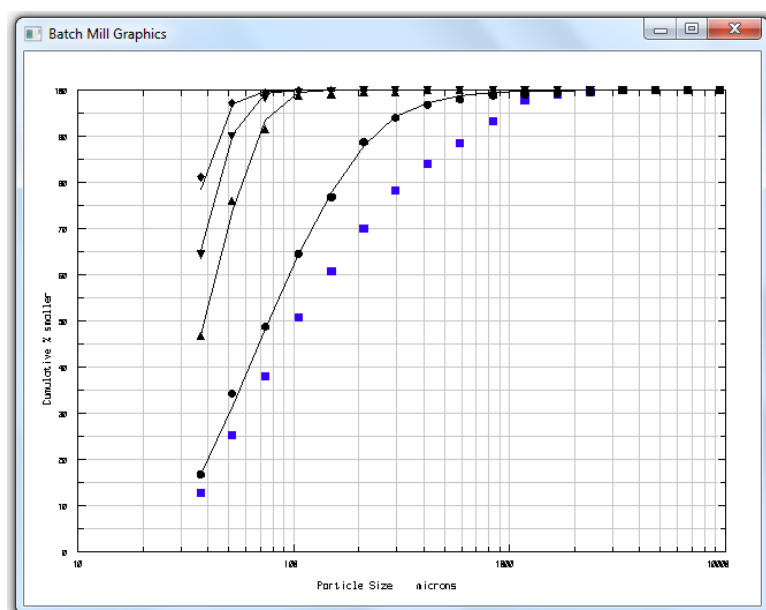


Figura 4.8 – Resultado da interpolação das curvas granulométricas através do *BatchMill*TM

A Figura 4.9 apresenta a função seleção plotada pelo *BatchMill*TM.

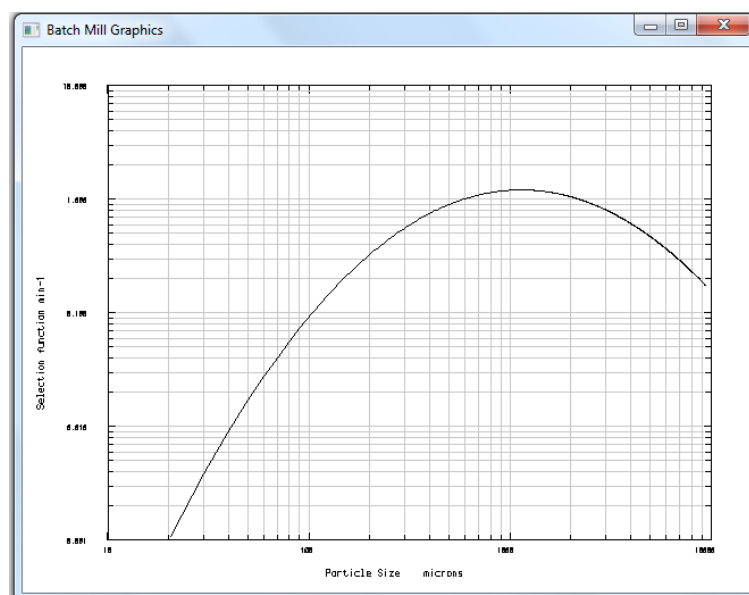


Figura 4.9 – Plotagem da função seleção através do *BatchMill*TM

A Figura 4.10 apresenta a função quebra plotada pelo *BatchMill*TM.

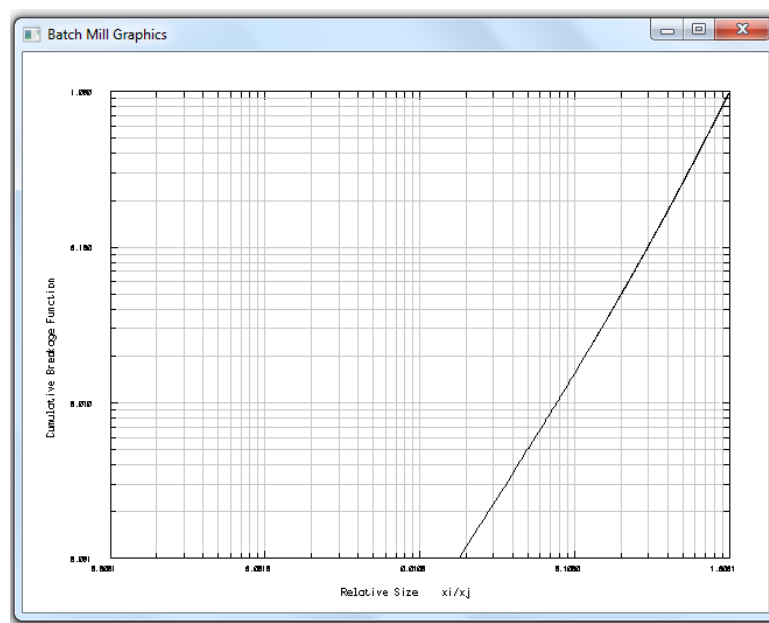


Figura 4.10 – Plotagem da função quebra através do *BatchMill*TM

4.2.6 Misturadores em série

As simulações foram realizadas considerando o moinho como um reator dividido em três misturadores perfeitos e em série com os seguintes tamanhos:

- 0,0137
- 0,2123
- 0,7740

4.2.7 Determinação dos parâmetros de pós-classificação

Os parâmetros referentes à pós-classificação foram obtidos através de um módulo específico de otimização do *Modsim*TM chamado *CurveFit*. Na seção 3.3.6 está detalhada a formulação matemática da pós-classificação.

Foi utilizado o algoritmo de Levenberg-Marquardt para determinação dos parâmetros que representam a pós-classificação.

A Figura 4.11 apresenta a tela do módulo de otimização *CurveFit* do programa *Modsim*TM.

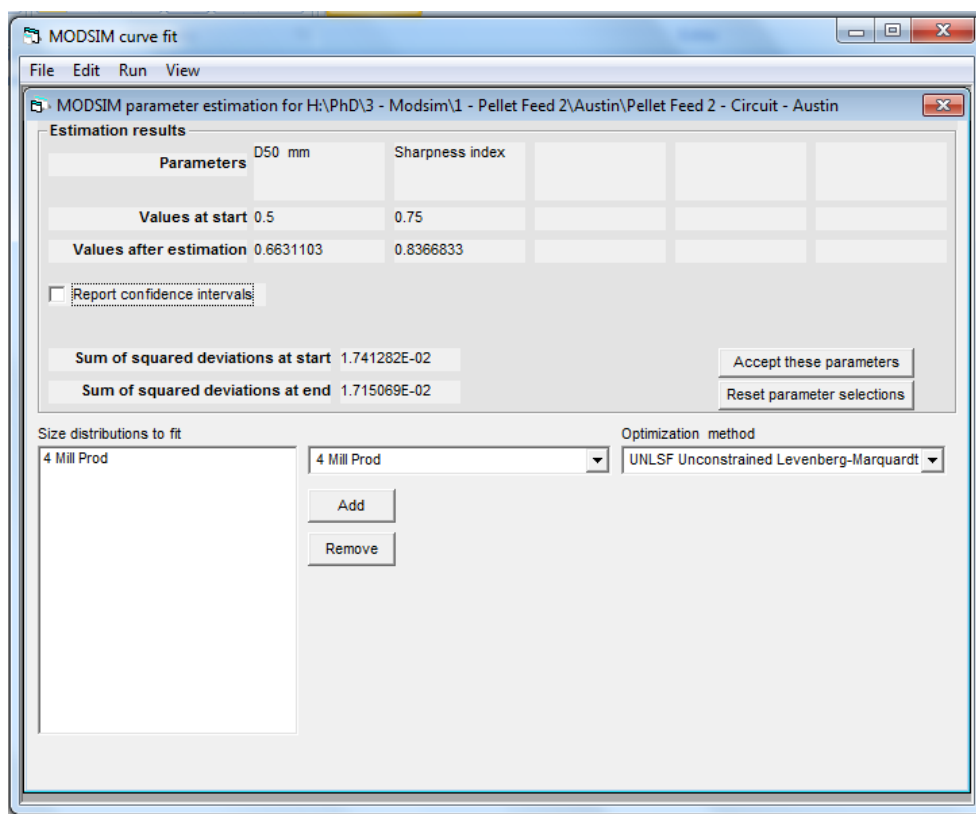


Figura 4.11 – Módulo de otimização *CurveFit* do programa *Modsim*TM

4.2.8 Determinação dos parâmetros de classificação

Os parâmetros referentes à classificação também foram obtidos através do *CurveFit*. As distribuições granulométricas dos fluxos de alimentação, *oversize* e *undersize* das peneiras de alta frequência foram utilizadas para a determinação dos parâmetros do modelo de classificação empírico segundo a função matemática *Logistic Function* (AUSTIN *et al.*, 1984).

A seção 3.3.5 detalhada a formulação matemática do modelo de classificação utilizado neste trabalho.

4.2.9 Modelo Proposto

Inicialmente, os testes em escala piloto com moinho vertical foram simulados utilizando o modelo de moinhos de bolas implementado no simulador de plantas de processos minerais *ModsimTM* versão 3.6.25 da *Mineral Technologies International* (MTI, 2009). Foi utilizado o modelo baseado em energia específica de moagem de HERBST & FUESTERNAU (1973).

A função quebra foi considerada invariante com relação ao equipamento de moagem e propriedade exclusiva do minério. Portanto, a função quebra, determinada em escala de laboratório com moinho de bolas, foi mantida constante para simular os testes em escala piloto com moinho vertical.

A função seleção representa a velocidade de quebra do material e espera-se que esta seja maior nos moinhos verticais a fim de justificar a sua maior eficiência de moagem. Assim, a modificação do modelo de HERBST & FUESTERNAU (1973) focou na alteração da função seleção, ou taxa de quebra, parâmetro que varia conforme o equipamento utilizado para a moagem.

Nesta linha, cada um dos parâmetros que descrevem a função seleção em energia foi alterado, através da inclusão de diferentes funções matemáticas e/ou constantes, até obterem-se parâmetros que representassem a moagem em um moinho vertical. Optou-se por trabalhar dessa maneira visando manter a estrutura de modelos de moagem já existentes e que funcionam perfeitamente para a grande maioria dos circuitos e minérios. Utilizando-se a Equação 4.2 é possível determinar a função seleção específica em energia S_i^E através de testes em escala de laboratório com moinhos de bolas.

$$S_i^L = S_i^E \left(\frac{P^L}{H^L} \right) \quad (4.2)$$

O sobrescrito “L” significa escala de laboratório. Portanto, P^L e H^L seriam a potência líquida medida e a massa de minério adotada nos ensaios, respectivamente.

A função seleção específica em energia S_i^E independe das dimensões do moinho e pode ser modelada através da Equação 4.3. Três parâmetros são necessários para representar a função seleção específica em energia S_i^E , são eles $S1^E$, ζ_1 , ζ_2 (RAJAMANI & HERBST, 1984).

$$S_i^E = S1^E \exp \left\{ \zeta_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + \zeta_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.3)$$

sendo:

S_i^E = função seleção específica em energia (t/kWh);

$S1^E$ = parâmetro equivalente a função seleção específica para o tamanho 1mm (t/kWh);

d_i = diâmetro das partículas do intervalo de tamanho i (mm)

d_1 = tamanho de normalização (mm);

ζ_1, ζ_2 = parâmetros característicos do material e das condições de moagem.

O parâmetro $S1^E$ não altera o formato da curva que descreve a taxa de quebra, apenas a sua posição em relação ao eixo y do gráfico. Assim, o parâmetro $S1^E$ foi multiplicado por um fator k de forma a representar a moagem em um moinho vertical, tornando-se $S1^{E*}$. Assim, a Equação 4.3 torna-se:

$$S_i^E = k S1^E \exp \left\{ \zeta_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + \zeta_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.4)$$

sendo:

k = contante de escalonamento de moinho vertical (adimensional).

ou

$$S_i^{E*} = S1^{E*} \exp \left\{ \zeta_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + \zeta_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.5)$$

sendo:

S_i^{E*} = função seleção específica em energia para moinho vertical (t/kWh);

$S1^{E*}$ = parâmetro equivalente a função seleção específica para o tamanho 1mm em moinho vertical (t/kWh).

A Figura 4.12 apresenta a curva de função seleção deslocada na vertical, considerando um fator k , que representa a maior eficiência de moagem do moinho vertical.

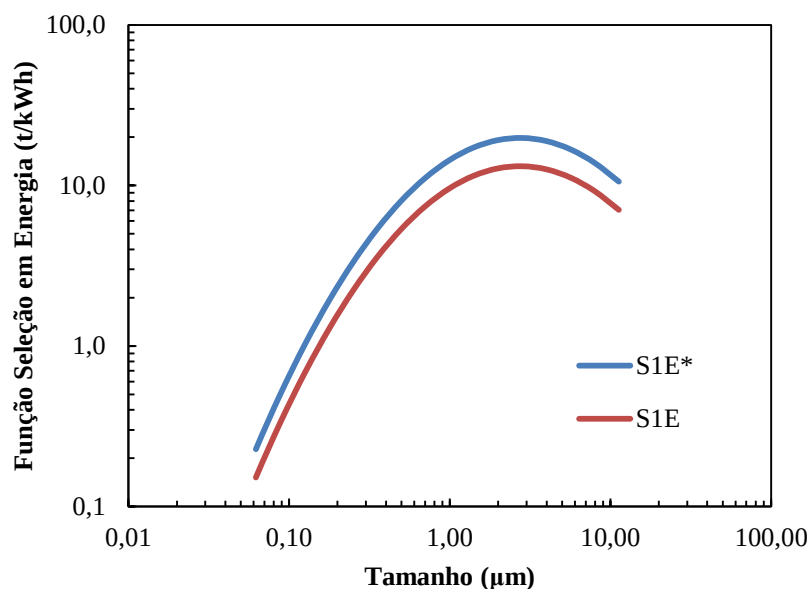


Figura 4.12 – Variação do parâmetro $S1^E$ da função seleção em energia

A função seleção do moinho vertical em escala industrial S_i^I pode ser determinada através da Equação 4.6.

$$S_i^I = S_i^{E*} \left(\frac{P^I}{H^I} \right) \quad (4.6)$$

O sobrescrito “ I ” significa escala industrial. Sabendo-se a potência líquida P^I , a massa de minério contida no moinho H^I e a função seleção específica em energia para moinho vertical S_i^{E*} é possível calcular a função seleção do moinho vertical industrial S_i^I . Através da função seleção do moinho vertical industrial S_i^I , determinada através da Equação 4.6, é possível prever a distribuição granulométrica do produto do moinho vertical industrial através do modelo do balanço populacional. O modelo desenvolvido neste trabalho foi implementado no simulador de plantas de processos minerais *ModsimTM* versão 3.6.25 da *Mineral Technologies International* (MTI, 2009).

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Balanço de massas dos testes em escala piloto

A Tabela V.1 apresenta um resumo dos resultados dos testes em escala piloto. Os valores de F_{80} (Bal) e P_{80} (Bal) foram obtidos através do balanço de massas. A última coluna da direita apresenta o consumo específico obtido nos testes.

Tabela V.1 – Principais dados dos testes em escala piloto com moinho vertical

Amostra	Balanço de Massas		kWh/t
	F_{80} (Bal)	P_{80} (Bal)	
<i>Pellet Feed 2</i>	205,4	34,5	15,7
<i>Pellet Feed 3</i>	88,5	36,3	8,1
<i>Pellet Feed 4</i>	95,6	38,7	8,6
<i>Minério de Ferro</i>	1573,1	102,9	3,5
<i>Minério de Cobre</i>	1129,0	205,0	5,1

O fluxo de material recirculado do tanque separador do moinho vertical apresentou distribuição granulométrica muito semelhante ao fluxo de material transbordado. Assim, considerou-se que o tanque separador serviu apenas como um divisor de polpa e não como um classificador. Portanto, os balanços de massas não incluíram o fluxo de recirculado.

A Tabela V.2 apresenta o balanço de massas para o teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 2*.

Tabela V.2 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 2*

<i>Pellet Feed 2</i>		Alim. Nova	Alim. Moinho	Descarga Moinho	Alim. Peneira	Oversize Peneira	Undersize Peneira
Vazão Sólidos (t/h)		0,14	0,71	0,71	0,71	0,56	0,14
Conc. Sólidos (%)		93,6	76,9	60,9	60,7	73,6	35,7
Vazão Água (m ³ /h)		0,01	0,21	0,45	0,46	0,20	0,25
Vazão Polpa (m ³ /h)		0,04	0,37	0,61	0,61	0,33	0,29
Dens. Polpa (t/m ³)		3,66	2,48	1,90	1,89	2,33	1,38
P_{80} (μm)		205,4	75,2	62,2	62,2	66,8	34,5
i	μm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1	3327	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	2362	99,94	99,99	100,00	100,00	100,00	100,00
3	1651	99,90	99,98	100,00	100,00	100,00	100,00
4	1168	99,10	99,82	100,00	100,00	100,00	100,00
5	833	97,50	99,50	100,00	100,00	100,00	100,00
6	589	94,80	98,96	100,00	100,00	100,00	100,00
7	417	90,90	98,18	100,00	100,00	100,00	100,00
8	295	85,90	97,05	99,86	99,86	99,83	100,00
9	208	80,30	95,66	99,60	99,60	99,50	99,99
10	147	72,40	93,38	98,89	98,89	98,62	99,96
11	104	63,10	89,69	97,05	97,05	96,34	99,89
12	74	48,40	79,56	89,80	89,80	87,35	99,60
13	53	32,50	58,90	71,87	71,87	65,49	97,43
14	44	24,60	45,04	58,64	58,64	50,14	92,67
15	37	18,00	32,36	45,64	45,64	35,95	84,45
16	25	8,50	15,78	26,58	26,58	17,60	62,50

A Tabela V.3 apresenta o balanço de massas para o teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 3*.

Tabela V.3 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 3*

<i>Pellet Feed 3</i>	Alim. Nova	Alim. Moinho	Descarga Moinho	Alim. Peneira	Oversize Peneira	Undersize Peneira
Vazão Sólidos (t/h)	0,18	0,52	0,52	0,52	0,34	0,18
Conc. Sólidos (%)	91,3	79,9	62,5	51,2	75,1	31,6
Vazão Água (m ³ /h)	0,02	0,13	0,31	0,49	0,11	0,38
Vazão Polpa (m ³ /h)	0,05	0,24	0,42	0,60	0,18	0,41
Dens. Polpa (t/m ³)	3,64	2,74	1,99	1,69	2,48	1,34
P_{80} (μm)	88,5	71,2	58,8	58,8	66,7	36,3
i	μm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1	1168	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	833	99,80	99,93	100,00	100,00	100,00
3	589	99,50	99,83	100,00	100,00	100,00
4	417	98,90	99,58	99,96	99,96	100,00
5	295	98,00	99,13	99,80	99,80	99,99
6	208	96,70	98,57	99,68	99,68	99,98
7	147	93,70	97,19	99,32	99,32	99,96
8	104	87,80	94,33	98,44	98,44	99,91
9	74	72,20	83,27	92,56	92,56	99,58
10	53	50,30	58,82	74,87	74,87	97,62
11	44	38,40	42,90	61,07	61,07	91,95
12	37	27,40	29,22	47,64	47,64	81,67
13	25	10,60	11,52	25,81	25,81	52,73

A Tabela V.4 apresenta o balanço de massas para o teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 4*.

Tabela V.4 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de *Pellet Feed 4*

<i>Pellet Feed 4</i>		Alim. Nova	Alim. Moinho	Descarga Moinho	Alim. Peneira	Oversize Peneira	Undersize Peneira
Vazão Sólidos (t/h)		0,18	0,66	0,66	0,66	0,48	0,18
Conc. Sólidos (%)		95,6	71,2	63,1	54,7	65,0	38,5
Vazão Água (m ³ /h)		0,01	0,27	0,39	0,55	0,26	0,29
Vazão Polpa (m ³ /h)		0,05	0,41	0,53	0,69	0,36	0,33
Dens. Polpa (t/m ³)		4,08	2,29	1,99	1,76	2,06	1,44
P_{80} (μm)		95,6	72,0	62,3	62,3	68,1	38,7
i	μm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1	1651	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	1168	99,90	99,97	100,00	100,00	100,00	100,00
3	833	99,50	99,86	100,00	100,00	100,00	100,00
4	589	99,10	99,76	100,00	100,00	100,00	100,00
5	417	98,20	99,51	100,00	100,00	100,00	100,00
6	295	97,30	99,18	99,92	99,92	99,89	100,00
7	208	95,60	98,56	99,76	99,76	99,67	99,99
8	147	91,30	96,98	99,34	99,34	99,10	99,98
9	104	84,00	93,64	97,97	97,97	97,24	99,93
10	74	69,00	82,26	90,60	90,60	87,21	99,64
11	53	48,80	58,29	71,23	71,23	61,83	96,38
12	44	37,90	43,28	57,11	57,11	45,29	88,73
13	37	28,00	30,64	44,00	44,00	31,63	77,10
14	25	13,00	14,82	25,16	25,16	15,49	51,02

A Tabela V.5 apresenta o balanço de massas para o teste piloto com a amostra de Minério de Ferro.

Tabela V.5 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de *Minério de Ferro*

<i>Minério de Ferro</i>		Alim. Nova	Alim. Moinho	Descarga Moinho	Alim. Peneira	Oversize Peneira	Undersize Peneira
Vazão Sólidos (t/h)		0,94	1,19	1,19	1,19	0,25	0,94
Conc. Sólidos (%)		100,0	90,9	66,0	54,1	67,5	51,4
Vazão Água (m ³ /h)		0,00	0,12	0,61	1,01	0,12	0,89
Vazão Polpa (m ³ /h)		0,26	0,45	0,94	1,34	0,19	1,16
Dens. Polpa (t/m ³)		3,61	2,92	1,91	1,64	1,95	1,59
P_{80} (μm)		1573,1	981,1	145,7	145,7	330,7	102,9
i	μm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1	6680	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	4699	96,30	97,07	100,00	100,00	100,00	100,00
3	3327	89,90	91,98	99,99	99,99	99,95	100,00
4	2362	84,80	87,94	99,99	99,99	99,95	100,00
5	1651	80,60	84,60	99,98	99,98	99,89	100,00
6	1168	76,40	81,19	99,89	99,89	99,48	100,00
7	833	73,80	78,90	99,67	99,67	98,41	100,00
8	589	70,80	76,02	99,17	99,17	95,99	100,00
9	417	68,00	72,50	97,87	97,87	89,70	100,00
10	295	64,40	66,72	94,90	94,90	75,61	99,95
11	208	59,90	59,12	89,60	89,60	56,12	98,36
12	147	52,30	49,34	80,30	80,30	38,01	91,36
13	104	43,70	40,44	69,67	69,67	27,98	80,58
14	74	32,70	30,09	55,33	55,33	20,11	64,55
15	53	22,80	21,09	41,80	41,80	14,54	48,94
16	44	18,70	17,38	35,84	35,84	12,33	41,99
17	37	15,50	14,49	31,02	31,02	10,61	36,35
18	25	11,00	10,40	23,84	23,84	8,12	27,95

A Tabela V.6 apresenta o balanço de massas para o teste piloto com a amostra de *Minério de Cobre*.

Tabela V.6 – Balanço de massas do teste piloto com a amostra de *Minério de Cobre*

<i>Minério de Cobre</i>	Alim. Nova	Alim. Moinho	Descarga Moinho	Alim. Peneira	Oversize Peneira	Undersize Peneira
Vazão Sólidos (t/h)	0,67	1,19	1,19	1,19	0,52	0,67
Conc. Sólidos (%)	100,0	85,8	60,0	54,1	72,6	45,2
Vazão Água (m ³ /h)	0,00	0,20	0,79	1,01	0,20	0,81
Vazão Polpa (m ³ /h)	0,19	0,54	1,13	1,35	0,34	1,00
Dens. Polpa (t/m ³)	3,50	2,59	1,75	1,63	2,08	1,48
P_{80} (μm)	1129,0	717,4	370,8	370,8	515,3	205,0
i	μm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1	6680	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	4699	98,90	99,38	100,00	100,00	100,00
3	3327	96,00	97,75	100,00	100,00	100,00
4	2362	92,20	95,58	99,97	99,97	100,00
5	1651	87,50	92,78	99,82	99,82	100,00
6	1168	80,70	88,88	99,75	99,75	100,00
7	833	74,00	84,13	98,77	98,77	99,99
8	589	64,00	74,86	95,11	95,11	99,97
9	417	50,90	58,27	85,59	85,59	99,42
10	295	36,80	38,47	70,13	70,13	93,03
11	208	26,00	25,78	56,57	56,57	80,68
12	147	18,00	17,68	44,67	44,67	65,93
13	104	13,60	13,39	36,21	36,21	54,12
14	74	10,40	10,32	28,99	28,99	43,56
15	53	8,40	8,37	23,88	23,88	35,96
16	44	7,60	7,58	21,74	21,74	32,75
17	37	7,00	6,94	19,77	19,77	29,79
18	25	6,00	5,87	16,46	16,46	24,81

5.2 Caracterização das amostras

5.2.1 Densidades

A Tabela V.7 apresenta as densidades das amostras estudadas.

Tabela V.7 – Densidades das amostras estudadas

Amostra	Densidade Aparente (t/m³)	Densidade Real (t/m³)
<i>Pellet Feed 2</i>	3,20	4,69
<i>Pellet Feed 3</i>	3,18	4,97
<i>Pellet Feed 4</i>	3,16	4,60
<i>Minério de Ferro</i>	2,50	3,61
<i>Minério de Cobre</i>	1,86	3,50

5.2.2 Distribuição granulométrica inicial

A Figura 5.1 apresenta a distribuição granulométrica das amostras de *Pellet Feed*.

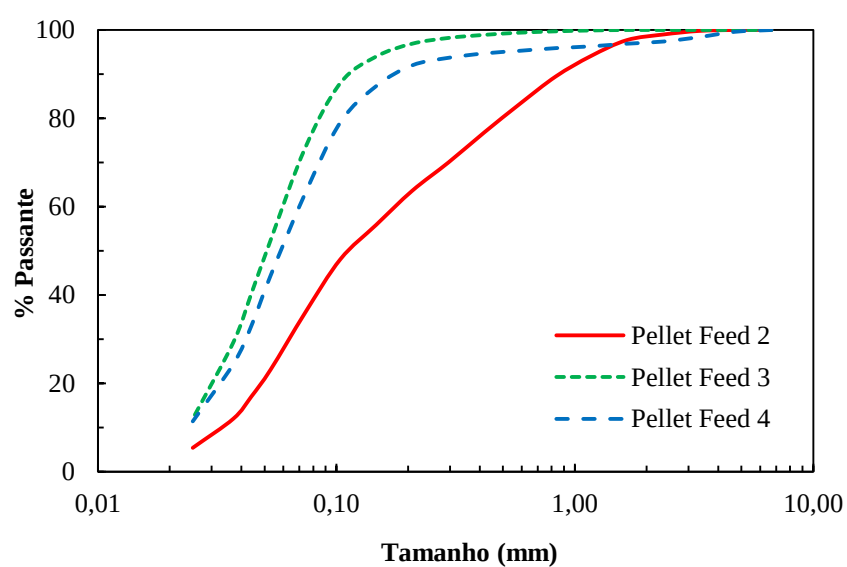


Figura 5.1 – Distribuição granulométrica das amostras de *Pellet Feed*

As três amostras de *Pellet Feed* têm diferentes distribuições granulométricas, sendo que a amostra de *Pellet Feed 2* apresentou um perfil granulométrico bem distinto do *Pellet Feed* padrão, com significativa fração de material grosso ($P_{80} = 500\mu\text{m}$).

A Figura 5.2 apresenta a distribuição granulométrica das amostras de *Minério de Ferro* e de *Minério de Cobre*.

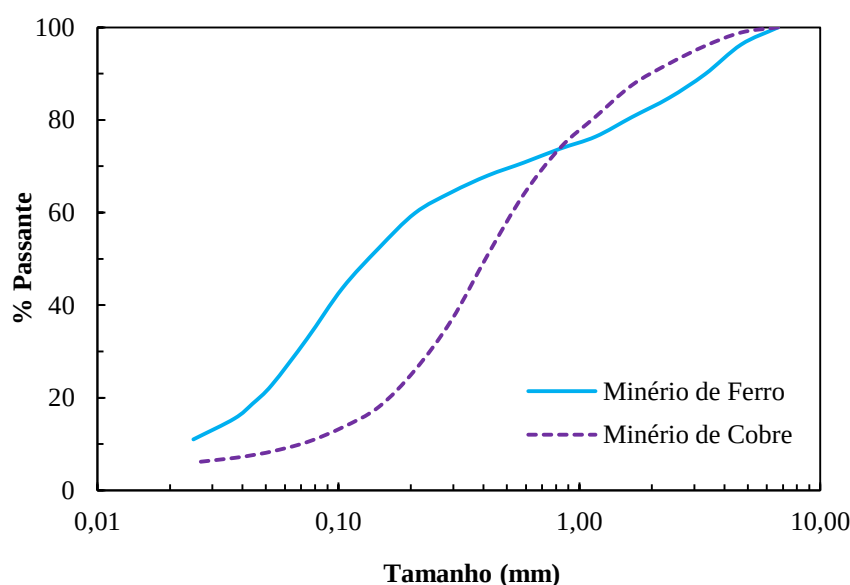


Figura 5.2 – Distribuição granulométrica das amostras de *Minério de Ferro* e de *Minério de Cobre*

A amostra de *Minério de Cobre* apresentou perfil granulométrico típico com equilibrada distribuição de frações grossas e finas. Já a amostra de *Minério de Ferro* apresentou um perfil granulométrico típico de amostra bimodal, com pequena quantidade de material de frações grossas e elevada quantidade de finos.

5.2.3 Ensaios de moagem em batelada

A seguir serão apresentadas as condições operacionais dos testes realizados com moinho de batelada e as curvas granulométricas geradas nos diferentes tempos de moagem.

A Tabela V.8 apresenta as condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 2*.

Tabela V.8 – Condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 2*

Diâmetro Interno	m	0,254	Massa de sólidos	kg	6,59
Comp. Interno	m	0,254	Massa de bolas	kg	23,78
Porosidade	%	40,0	Volume de água	L	3,55
J - Ench. Bolas	%	40,0	Vel. do teste	rpm	61,73
U - Ench. Material	%	100,0	Distribuição de Bolas		
Dens. real sólidos	kg/m ³	4690	n	(mm)	(%) (kg)
Dens. apar. sólidos	kg/m ³	3200	1	25,0	30,7 7,3
Dens. real bolas	kg/m ³	7700	2	19,0	34,6 8,2
Conc. sólidos	%	65,0	3	15,0	29,7 7,1
Vel. crítica adotada	%	70,0	4	12,0	5,0 1,2
Vol. Interno	m ³	0,013	5	-	-
Velocidade crítica	rpm	88,2	Total	100	23,8

A Tabela V.9 apresenta as curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 2*.

Tabela V.9 – Curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 2*

t (min)	0	5	57	113	179
(µm)	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas
3350	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2370	99,72	99,81	100,00	100,00	100,00
1670	99,09	99,54	100,00	100,00	100,00
1180	97,88	99,23	100,00	100,00	100,00
840	93,52	98,85	100,00	100,00	100,00
590	88,74	98,14	100,00	100,00	100,00
420	84,23	96,93	100,00	100,00	100,00
296	78,31	94,14	99,83	100,00	100,00
212	70,03	88,88	99,60	100,00	100,00
150	61,01	77,01	99,35	99,93	100,00
105	50,97	64,71	98,84	99,81	100,00
74	38,23	48,90	91,67	98,34	99,65
52	25,45	34,39	76,21	90,09	97,33
37	13,01	16,88	47,05	64,58	81,33

A Tabela V.10 apresenta as condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 3*.

Tabela V.10 – Condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 3*

Diâmetro Interno	m	0,254	Massa de sólidos	kg	6,55
Comp. Interno	m	0,254	Massa de bolas	kg	23,78
Porosidade	%	40,0	Volume de água	L	4,37
J - Ench. Bolas	%	40,0	Vel. do teste	rpm	60,94
U - Ench. Material	%	100,0	Distribuição de Bolas		
Dens. real sólidos	kg/m ³	4970	n	(mm)	(%) (kg)
Dens. apar. sólidos	kg/m ³	3180	1	19,0	40,7 9,7
Dens. real bolas	kg/m ³	7700	2	12,0	42,5 10,1
Conc. sólidos	%	60,0	3	9,0	16,8 4,0
Vel. crítica adotada	%	70,0	4	-	-
Vol. Interno	m ³	0,013	5	-	-
Velocidade crítica	rpm	87,1	Total	100	23,8

A Tabela V.11 apresenta as curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 3*.

Tabela V.11 – Curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 3*

t (min)	0	5	73	109	132
(µm)	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas
2370	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1670	99,80	99,85	100,00	100,00	100,00
1180	99,35	99,74	100,00	100,00	100,00
840	98,64	99,58	100,00	100,00	100,00
590	97,37	99,34	100,00	100,00	100,00
420	96,33	99,07	100,00	100,00	100,00
296	95,06	98,72	100,00	100,00	100,00
212	92,98	98,04	100,00	100,00	100,00
150	89,55	95,58	99,91	100,00	100,00
105	83,90	90,82	99,81	99,68	99,90
74	70,24	76,24	98,52	99,34	99,76
52	46,96	55,97	91,80	96,38	97,95
37	24,58	26,94	61,90	76,58	81,36

A Tabela V.12 apresenta as condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 4*.

Tabela V.12 – Condições operacionais do teste com a amostra de *Pellet Feed 4*

Diâmetro Interno	m	0,254	Massa de sólidos	kg	6,51
Comp. Interno	m	0,254	Massa de bolas	kg	23,78
Porosidade	%	40,0	Volume de água	L	2,79
J - Ench. Bolas	%	40,0	Vel. do teste	rpm	60,94
U - Ench. Material	%	100,0	Distribuição de Bolas		
Dens. real sólidos	kg/m ³	4600	n	(mm)	(%) (kg)
Dens. apar. sólidos	kg/m ³	3160	1	19,0	40,7 9,7
Dens. real bolas	kg/m ³	7700	2	12,0	42,5 10,1
Conc. sólidos	%	70,0	3	9,0	16,8 4,0
Vel. crítica adotada	%	70,0	4	-	-
Vol. Interno	m ³	0,013	5	-	-
Velocidade crítica	rpm	87,1	Total	100	23,8

A Tabela V.13 apresenta as curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 4*.

Tabela V.13 – Curvas granulométricas da amostra de *Pellet Feed 4*

t (min)	0	5	42	76	109
(µm)	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas
3350	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2370	98,38	98,74	99,50	100,00	100,00
1670	95,65	97,04	99,07	100,00	100,00
1180	93,71	95,98	98,92	100,00	100,00
840	91,76	95,36	98,86	100,00	100,00
590	88,90	94,61	98,82	100,00	100,00
420	87,03	93,96	98,80	100,00	100,00
296	84,92	93,19	98,77	100,00	100,00
212	81,10	91,65	98,70	99,90	100,00
150	75,74	86,57	98,64	99,65	100,00
105	67,42	78,01	98,31	99,13	99,89
74	52,77	61,92	93,88	98,36	99,72
52	38,41	45,38	80,17	93,66	98,25
37	19,94	24,57	53,08	69,94	84,01

A Tabela V.14 apresenta as condições operacionais do teste com a amostra de Minério de Ferro.

Tabela V.14 – Condições operacionais do teste com a amostra de *Minério de Ferro*

Diâmetro Interno	m	0,254	Massa de sólidos	kg	5,15
Comp. Interno	m	0,254	Massa de bolas	kg	23,78
Porosidade	%	40,0	Volume de água	L	2,77
J - Ench. Bolas	%	40,0	Vel. do teste	rpm	63,11
U - Ench. Material	%	100,0	Distribuição de Bolas		
Dens. real sólidos	kg/m ³	3610	n	(mm)	(%) (kg)
Dens. apar. sólidos	kg/m ³	2500	1	34,9	38,4 9,1
Dens. real bolas	kg/m ³	7700	2	29,8	27,5 6,5
Conc. sólidos	%	65,0	3	25,4	14,5 3,4
Vel. crítica adotada	%	70,0	4	19,1	17,7 4,2
Vol. Interno	m ³	0,013	5	12,7	1,9 0,5
Velocidade crítica	rpm	90,2	Total		100 23,8

A Tabela V.15 apresenta as curvas granulométricas da amostra de Minério de Ferro.

Tabela V.15 – Curvas granulométricas da amostra de *Minério de Ferro*

t (min)	0	5	33	53	75
(µm)	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas
3350	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2370	91,83	99,27	100,00	100,00	100,00
1670	82,94	98,39	100,00	100,00	100,00
1180	78,49	97,58	100,00	100,00	100,00
840	74,93	96,83	100,00	100,00	100,00
590	71,18	95,18	100,00	100,00	100,00
420	68,58	92,93	99,86	100,00	100,00
296	64,82	87,98	99,69	100,00	100,00
212	60,07	80,18	99,39	100,00	100,00
150	52,93	69,44	97,26	99,53	100,00
105	43,45	56,64	90,19	97,43	98,20
74	33,62	43,45	74,73	86,58	93,03
52	24,97	30,30	59,31	70,67	79,45
37	16,60	21,55	40,83	52,04	62,58

A Tabela V.16 apresenta as condições operacionais do teste com a amostra de Minério de Cobre.

Tabela V.16 – Condições operacionais do teste com a amostra de *Minério de Cobre*

Diâmetro Interno	m	0,254	Massa de sólidos	kg	3,83
Comp. Interno	m	0,254	Massa de bolas	kg	23,78
Porosidade	%	40,0	Volume de água	L	2,55
J - Ench. Bolas	%	40,0	Vel. do teste	rpm	63,11
U - Ench. Material	%	100,0	Distribuição de Bolas		
Dens. real sólidos	kg/m ³	3500	n	(mm)	(%) (kg)
Dens. apar. sólidos	kg/m ³	1860	1	34,9	38,4 9,1
Dens. real bolas	kg/m ³	7700	2	29,8	27,5 6,5
Conc. sólidos	%	60,0	3	25,4	14,5 3,4
Vel. crítica adotada	%	70,0	4	19,1	17,7 4,2
Vol. Interno	m ³	0,013	5	12,7	1,9 0,5
Velocidade crítica	rpm	90,2	Total		100 23,8

A Tabela V.17 apresenta as curvas granulométricas da amostra de Minério de Cobre.

Tabela V.17 – Curvas granulométricas da amostra de *Minério de Cobre*

t (min)	0	2	23	39	48	34 (úmido)
(µm)	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas	% Pas
3350	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2370	85,47	91,17	99,44	100,00	100,00	100,00
1670	67,52	77,26	98,85	100,00	100,00	100,00
1180	51,31	61,25	97,43	100,00	100,00	100,00
840	40,61	49,76	94,19	99,93	100,00	100,00
590	32,34	40,15	87,41	99,60	100,00	100,00
420	25,90	32,47	76,98	97,91	99,84	100,00
296	21,01	26,45	65,57	90,67	97,89	99,35
212	16,90	21,32	54,12	76,66	88,02	93,93
150	14,07	17,71	46,23	64,04	75,89	86,35
105	11,02	14,12	38,58	54,72	64,27	71,62
74	8,96	11,81	32,33	45,89	54,66	60,02
52	7,60	10,30	27,67	40,83	48,14	51,65
37	5,53	8,06	22,20	32,60	38,87	41,11

5.3 Parâmetros de quebra

A Tabela V.18 apresenta os parâmetros de quebra determinados através dos ensaios em escala de laboratório.

Tabela V.18 – Determinação de parâmetros de quebra para o modelo de HERBST & FUERSTENAU (1973)

Amostra	Função Seleção			Função Quebra			Erro
	$S1^{E*}$ (t/kWh)	ζ_1	ζ_2	γ	β	ϕ	
<i>Pellet Feed 2</i>	5,108	0,115	-0,435	1,508	2,348	0,414	0,277
<i>Pellet Feed 3</i>	12,991	0,626	-0,312	2,500	5,549	0,635	0,230
<i>Pellet Feed 4</i>	5,207	0,009	-0,401	2,307	2,661	0,837	0,459
<i>Minério de Ferro</i>	4,808	1,198	-0,086	0,654	1,729	0,131	0,301
<i>Minério de Cobre</i>	0,941	0,665	-0,011	0,615	3,328	0,463	1,489

O parâmetro $S1^{E*}$ se refere a moagem em moinho vertical. Foi adotado um fator de escalonamento $k = 1,35$ ($S1^{E*} = S1^E \times k$).

O somatório dos erros residuais obtido na determinação dos parâmetros é baixo. Assim, pode-se considerar que a estimativa dos parâmetros é satisfatória.

A Figura 5.3 apresenta a distribuição granulométrica obtida através do teste em escala de laboratório (pontos) e a previsão do modelo (linha) para a amostra de *Pellet Feed 2*.

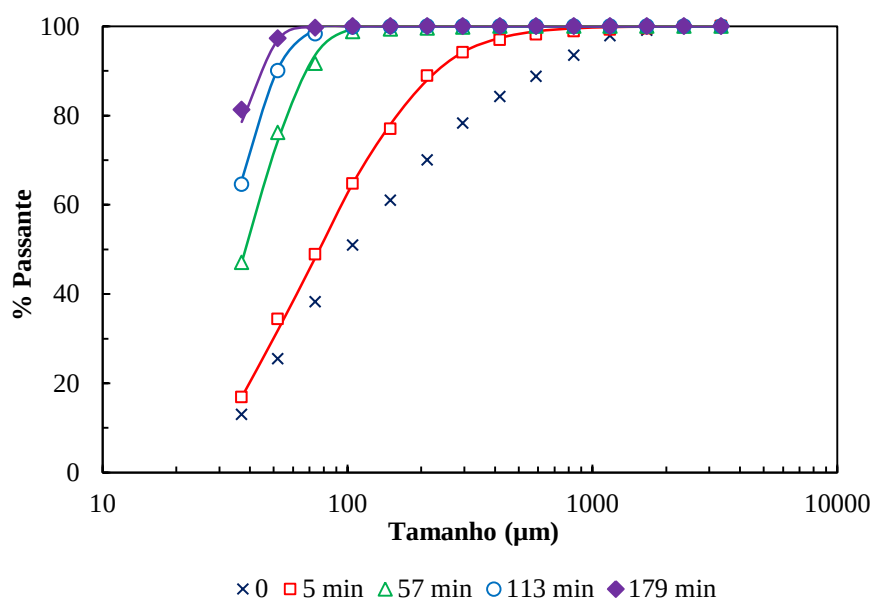


Figura 5.3 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra *Pellet Feed 2* e interpolação realizada pelo *BatchMill*TM

A Figura 5.4 apresenta as curvas de função seleção e função quebra para a amostra de *Pellet Feed 2*.

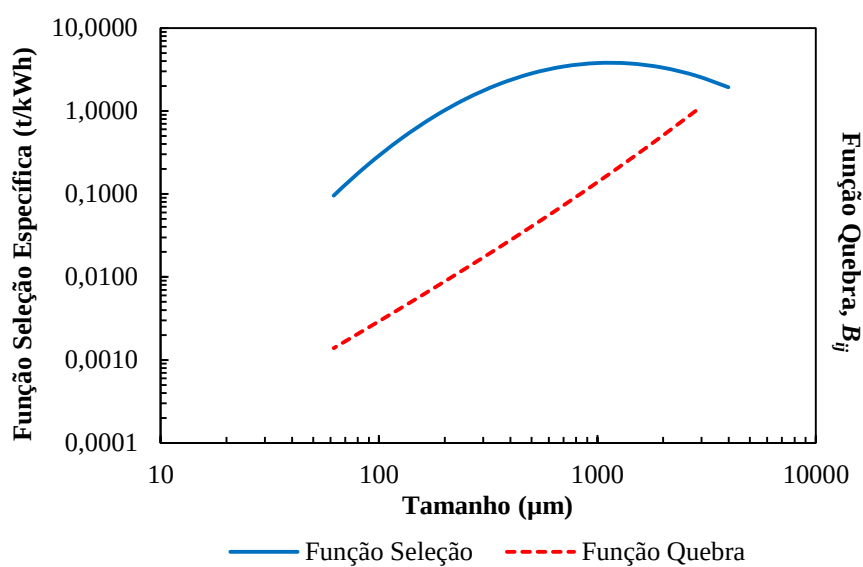


Figura 5.4 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra *Pellet Feed 2*

A Figura 5.5 apresenta a distribuição granulométrica obtida através do teste em escala de laboratório (pontos) e a previsão do modelo (linha) para a amostra de *Pellet Feed 3*.

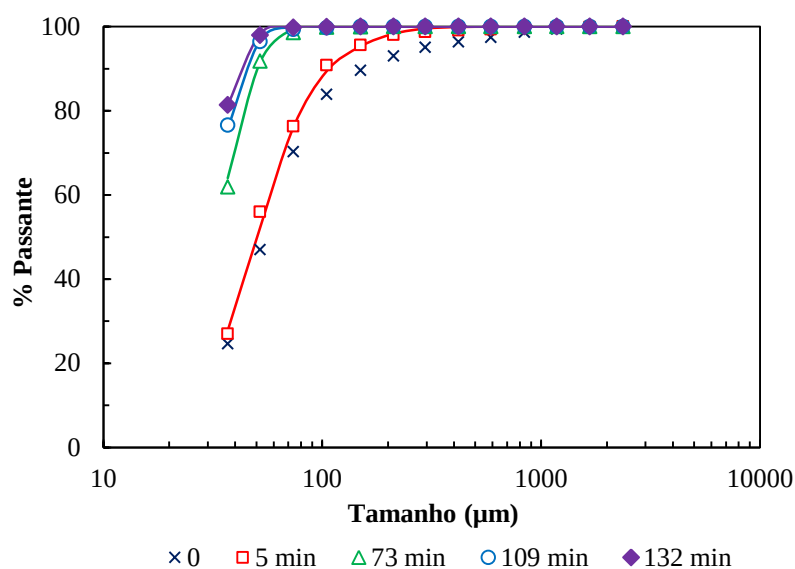


Figura 5.5 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra *Pellet Feed 3* e interpolação realizada pelo *BatchMill*TM

A Figura 5.6 apresenta as curvas de função seleção e função quebra para a amostra de *Pellet Feed 3*.

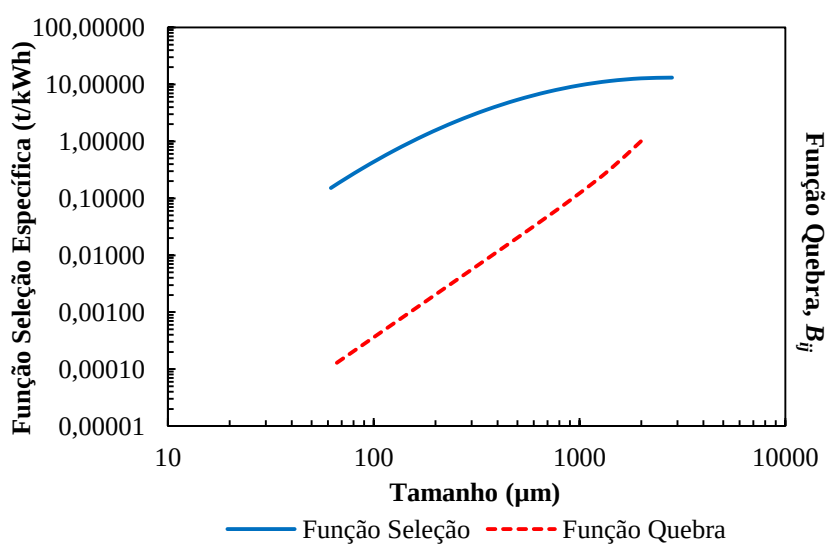


Figura 5.6 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra *Pellet Feed 3*

A Figura 5.7 apresenta a distribuição granulométrica obtida através do teste em escala de laboratório (pontos) e a previsão do modelo (linha) para a amostra de *Pellet Feed 4*.

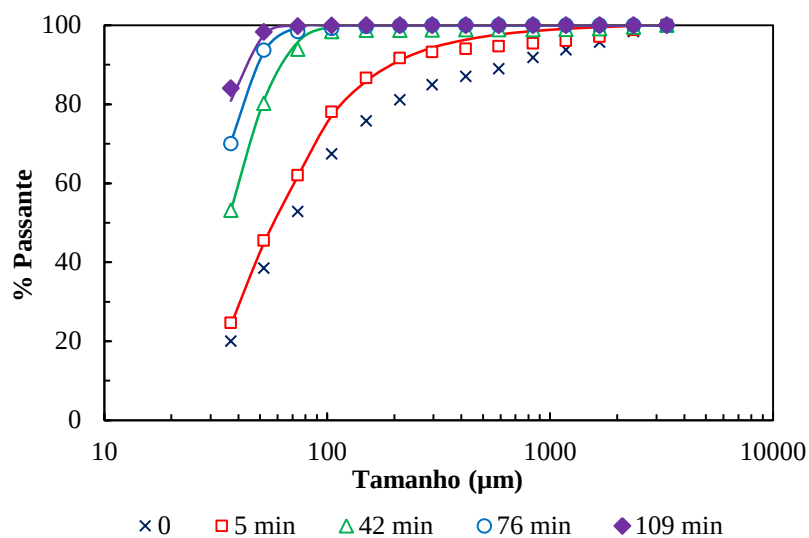


Figura 5.7 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra *Pellet Feed 4* e interpolação realizada pelo *BatchMill*TM

A Figura 5.8 apresenta as curvas de função seleção e função quebra para a amostra de *Pellet Feed 4*.

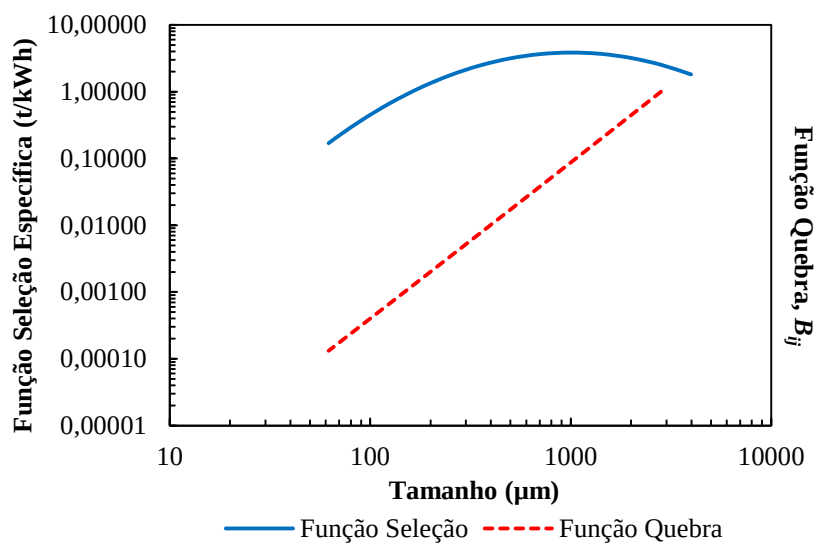


Figura 5.8 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra *Pellet Feed 4*

Através da avaliação crítica das curvas de função seleção e função quebra é possível comparar o comportamento de diferentes minérios com relação à cominuição.

A Figura 5.9 apresenta um comparativo entre a função seleção específica das amostras de Pellet Feed.

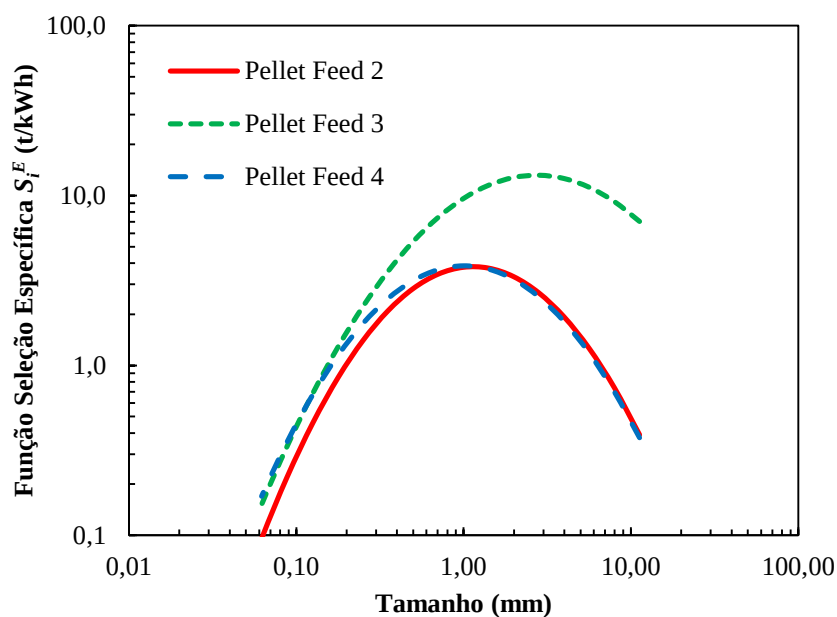


Figura 5.9 – Comparativo da função seleção específica para as amostras de Pellet Feed segundo a metodologia de ensaios com distribuição natural de tamanhos de partículas

As amostras de Pellet Feed 2 e Pellet Feed 4 têm função seleção específica parecidas. A amostra de Pellet Feed 3 já possui maior taxa de quebra se comparada com as demais amostras de Pellet Feed.

A Figura 5.10 apresenta um comparativo entre a função quebra das amostras de Pellet Feed.

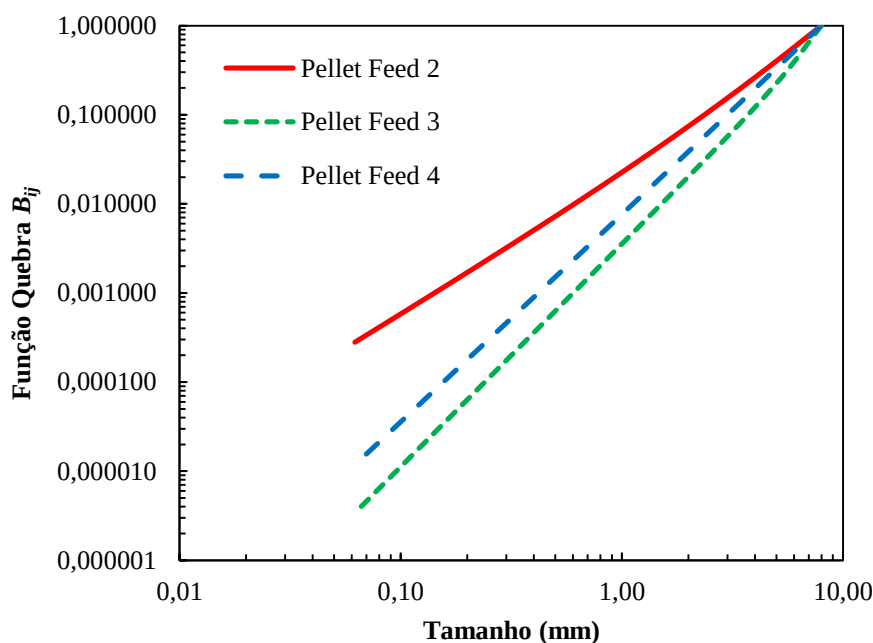


Figura 5.10 – Comparativo da função quebra para as amostras de *Pellet Feed* segundo a metodologia de ensaios com distribuição natural de tamanhos de partículas

A amostra de *Pellet Feed 2* apresentou maior geração de finos se comparada com as demais amostras de *Pellet Feed*.

Considerando que a função quebra das amostras de *Pellet Feed 3* e *Pellet Feed 4* são parecidas e que a função seleção da amostra de *Pellet Feed 3* é maior que da amostra de *Pellet Feed 4*, pode-se concluir que, provavelmente, a amostra de *Pellet Feed 3* possui um consumo energético menor que da amostra de *Pellet Feed 4*.

A Figura 5.11 apresenta a distribuição granulométrica obtida através do teste em escala de laboratório (pontos) e a previsão do modelo (linha) para a amostra de *Minério de Ferro*.

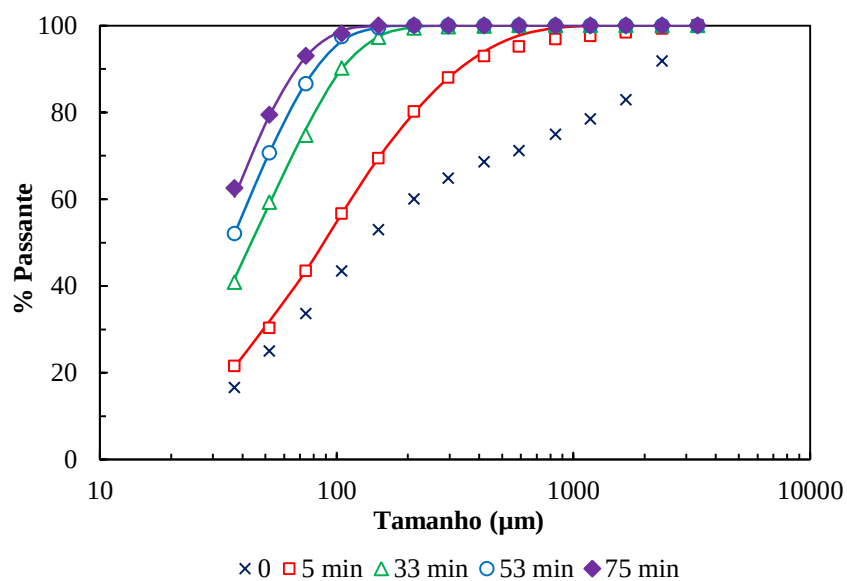


Figura 5.11 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra *Minério de Ferro* e interpolação realizada pelo *BatchMill™*

A Figura 5.12 apresenta as curvas de função seleção e função quebra para a amostra de *Minério de Ferro*.

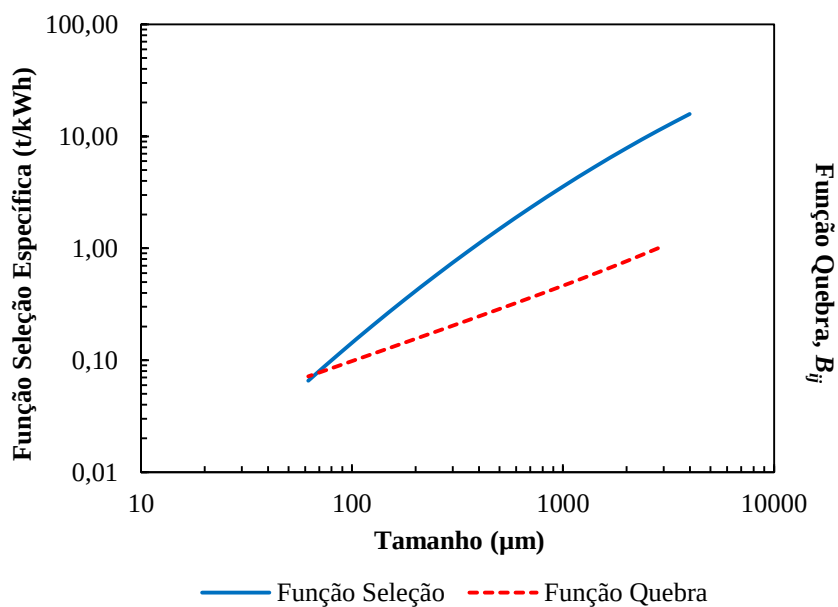


Figura 5.12 - Curvas de função seleção e função quebra para a amostra *Minério de Ferro*

A Figura 5.13 apresenta a distribuição granulométrica obtida através do teste em escala de laboratório (pontos) e a previsão do modelo (linha) para a amostra de Minério de Cobre.

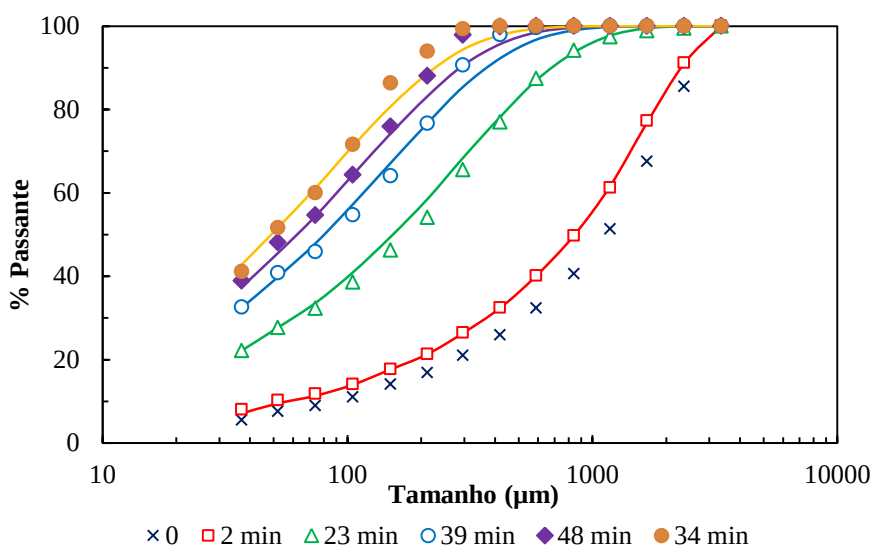


Figura 5.13 – Curvas granulométricas obtidas através de ensaio de moagem com a amostra *Minério de Cobre* e interpolação realizada pelo *BatchMill*TM

Neste teste a amostra foi moída a seco em quatro tempos distintos. Um teste adicional a úmido foi realizado considerando um tempo 30% menor que o último tempo testado a seco.

A Figura 5.14 apresenta as curvas de função seleção e função quebra para a amostra de Minério de Cobre.

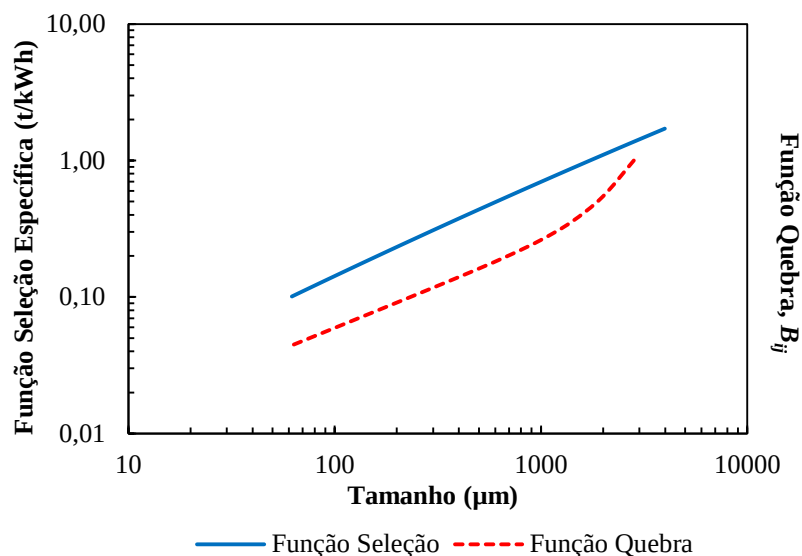


Figura 5.14 – Curvas de função seleção e função quebra para a amostra *Minério de Cobre*

5.4 Parâmetros de pós-classificação

As amostras de *Pellet Feed* e de *Minério de Ferro* não apresentaram o efeito de pós-classificação, provavelmente devido a menor fração de grossos.

A Tabela V.19 apresenta os parâmetros da classificação interna (pós-classificação).

Tabela V.19 – Parâmetros da classificação interna (pós-classificação)

Amostra	<i>Minério de Cobre</i>
d_{50c} (mm)	1,075
Nitidez de separação	0,846

A Figura 5.15 mostra as curvas granulométricas da descarga do moinho vertical, antes e depois da inclusão do efeito de pós-classificação, para a amostra de *Minério de Cobre*.

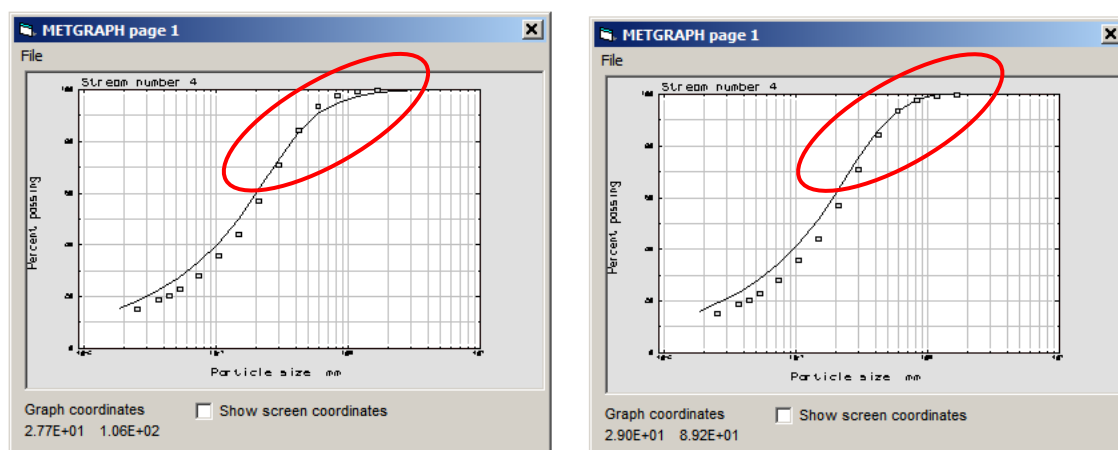


Figura 5.15 – Distribuição granulométrica da descarga do moinho vertical, antes e depois da inclusão do efeito de pós-classificação, para a amostra de *Minério de Cobre*

É possível notar que a fração de grossos da curva granulométrica foi alterada com a inclusão do efeito de pós-classificação. O modelo do balanço populacional prevê partículas grossas na descarga do moinho, quando não considerado o efeito de pós-classificação.

5.5 Parâmetros de classificação

A Tabela V.20 apresenta os parâmetros de classificação das peneiras de alta frequência utilizadas nos testes em escala piloto.

Tabela V.20 – Parâmetros da classificação das peneiras de alta frequência

Amostra	<i>Pellet Feed 2</i>	<i>Pellet Feed 3</i>	<i>Pellet Feed 4</i>	<i>Minério de Ferro</i>	<i>Minério de Cobre</i>
d_{50c} (μm)	22,9	32,18	33,16	207,0	266,0
Nitidez de separação	0,506	0,573	0,560	0,560	0,540
Curto-Circuito US	0,167	0,169	0,402	0,068	0,152

A nitidez de separação é muito parecida para todas as amostras.

5.6 Simulação

A Figura 5.16 apresenta o fluxograma do teste piloto com moinho vertical desenhado no *Modsim*TM.

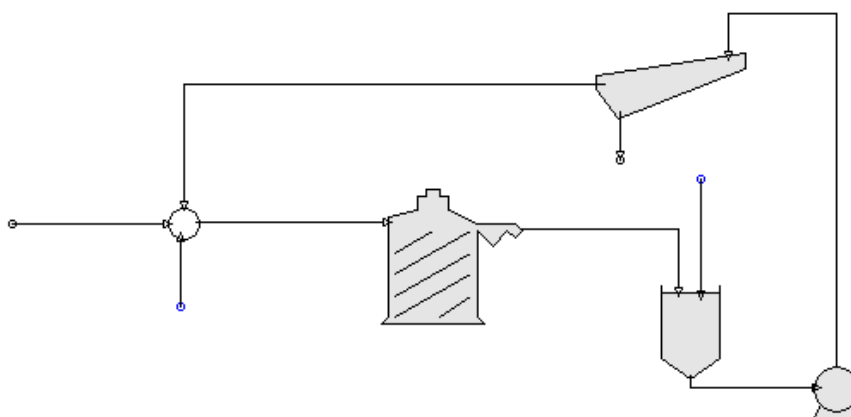


Figura 5.16 – Fluxograma do teste com moinho vertical em escala piloto

As Figuras 5.17 a 5.21 apresentam a distribuição granulométrica obtida através de amostragem do teste em escala piloto (pontos) e a previsão do modelo (linha).

Simulação amostra *Pellet Feed 2*

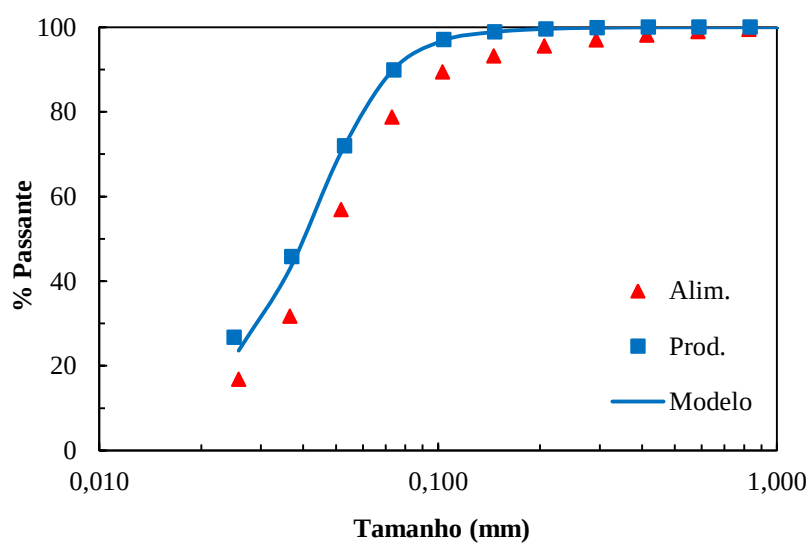


Figura 5.17 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 2*

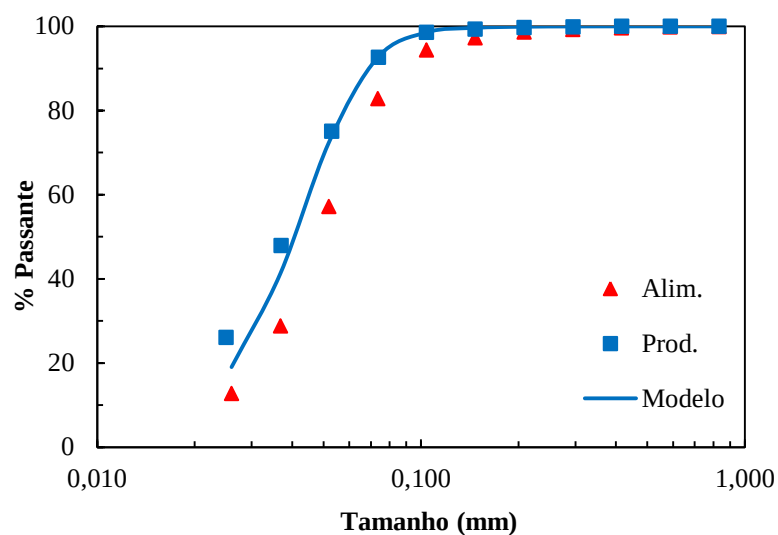
Simulação amostra *Pellet Feed 3*

Figura 5.18 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 3*

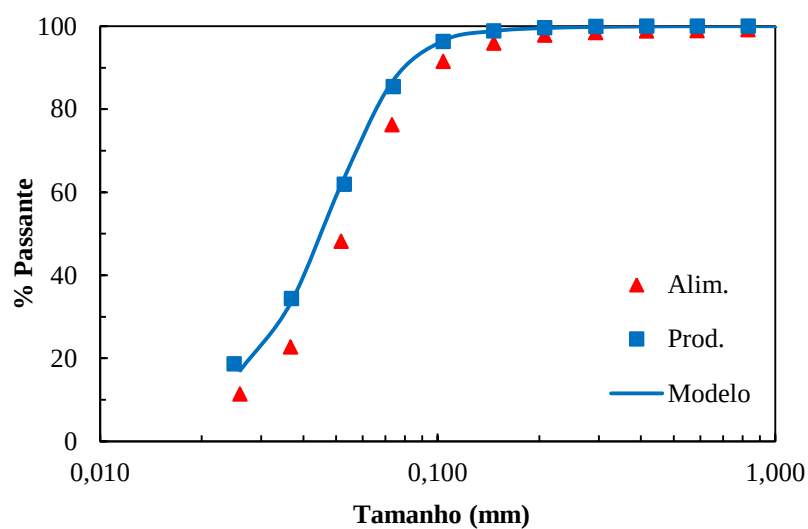
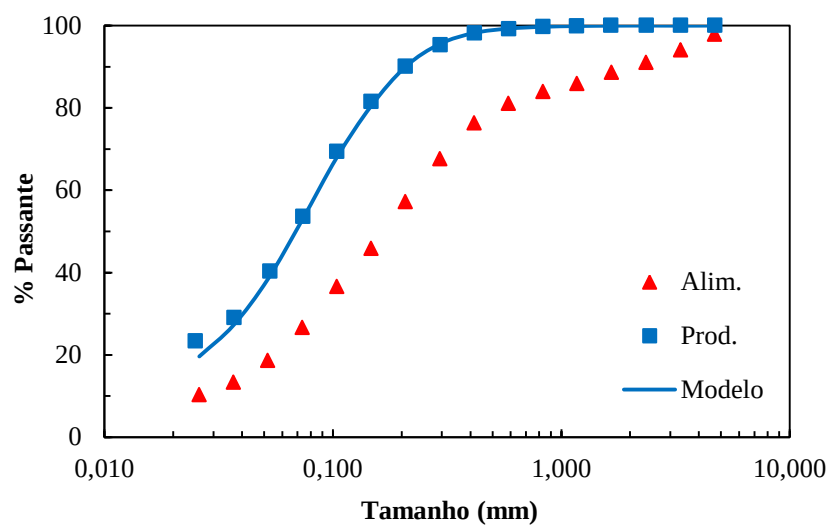
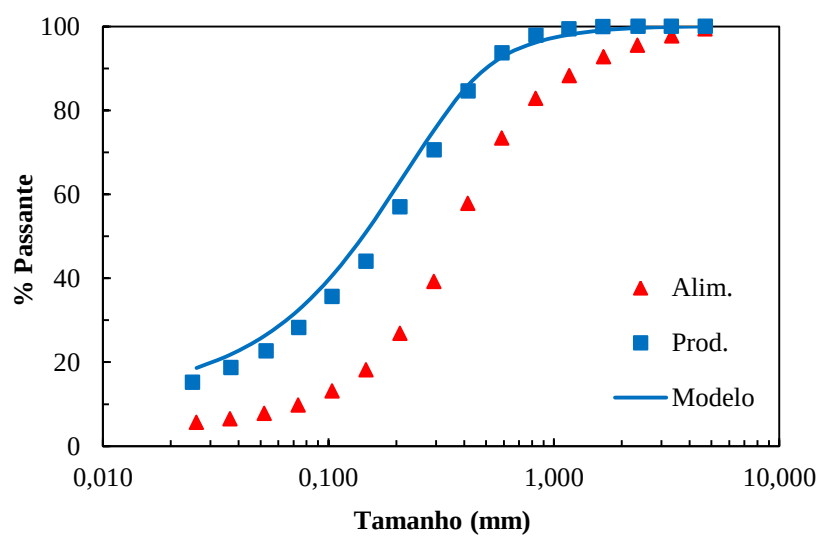
Simulação amostra *Pellet Feed 4*

Figura 5.19 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 4*

Simulação amostra Minério de Ferro**Figura 5.20 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra Minério de Ferro**Simulação amostra Minério de Cobre**Figura 5.21 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra Minério de Cobre**

5.7 Aplicação do modelo de frações estreitas de tamanho de partículas

O modelo de moinho de bolas baseado em tempo de residência de GARDNER & AUSTIN (1962) também foi aplicado ao moinho vertical. Esta metodologia prevê a determinação dos parâmetros de moagem através de testes com frações estreitas de tamanhos de partículas. As amostras de *Pellet Feed* e de *Minério de Ferro* também foram testadas segundo esta metodologia.

O Apêndice I apresenta as curvas granulométricas geradas nos testes com moinho de bolas em escala de laboratório. Os testes foram realizados conforme descrito na seção 3.5.2.

A Tabela V.21 apresenta os parâmetros de quebra determinados através de ensaios em escala de laboratório conforme a metodologia de frações estreitas de tamanho de partículas.

Tabela V.21 – Determinação de parâmetros de quebra para o modelo de GARDNER & AUSTIN (1962)

Amostra	Função Seleção				Função Quebra			Erro
	$S1$ (min^{-1})	α	μ (mm)	A	γ	β	ϕ	
<i>Pellet Feed</i> 2	1,600	1,188	2,600	2,960	0,667	4,439	0,531	15,341
<i>Pellet Feed</i> 3	3,567	1,514	50,000	4,000	0,847	6,662	0,666	9,813
<i>Pellet Feed</i> 4	7,121	1,685	50,000	4,000	0,891	5,488	0,600	9,432
<i>Minério de Ferro</i>	1,545	1,133	1,829	2,107	0,478	2,398	0,467	1,735

O parâmetro $S1$ (min^{-1}) foi multiplicado pelo mesmo fator de escalonamento de moinho vertical $k = 1,35$ adotado no modelo baseado em energia específica.

As simulações foram realizadas considerando o tempo de residência médio τ calculado através da equação 3.30.

A massa de material contida no moinho H (*hold-up*) foi calculada através da equação 3.35 e a vazão de sólidos Q_s foi retirada do balanço de massas dos testes em escala piloto.

A Tabela V.22 apresenta o tempo de residência médio e a massa de material contida no moinho (*hold-up*) para as amostras testadas segundo a metodologia de com frações estreitas de tamanhos de partículas

Tabela V.22 – Cálculo do tempo de residência médio das partículas e massa de material contida no moinho

Amostra	<i>Hold-up</i>	τ
	(kg)	(min)
<i>Pellet Feed 2</i>	85	7,2
<i>Pellet Feed 3</i>	78	9,0
<i>Pellet Feed 4</i>	85	6,8
<i>Minério de Ferro</i>	89	4,5

As Figuras 5.22 a 5.25 apresentam a distribuição granulométrica obtida através de amostragem do teste em escala piloto (pontos) e a previsão do modelo (linha).

O modelo baseado em tempo de residência fez uma previsão acurada da distribuição granulométrica do produto de um moinho vertical com um pequeno desvio na previsão da quantidade de finos.

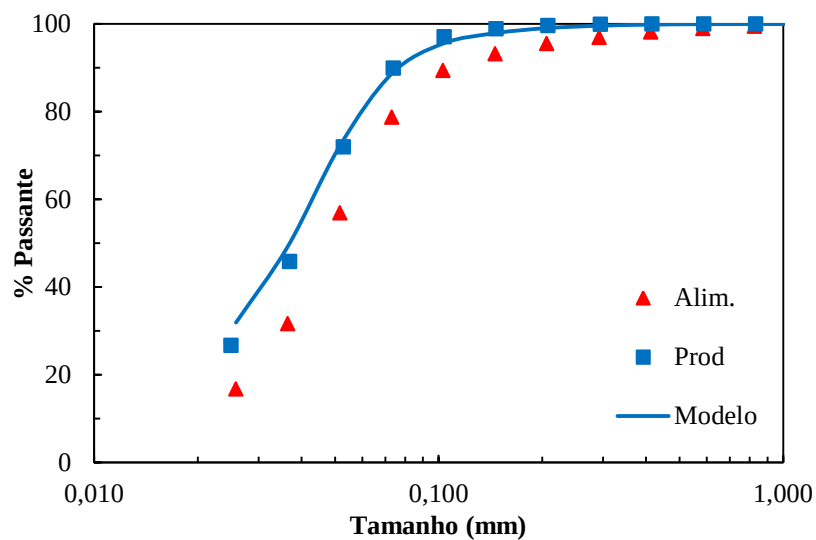
Simulação amostra *Pellet Feed 2*

Figura 5.22 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 2* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas

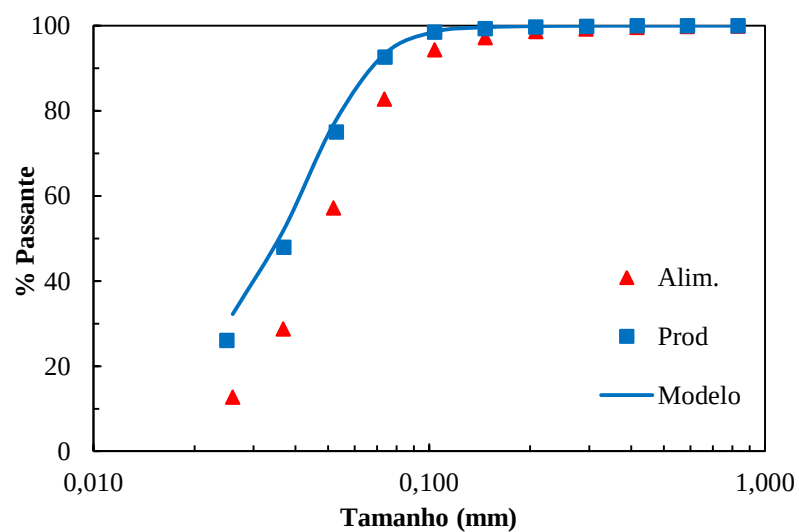
Simulação amostra *Pellet Feed 3*

Figura 5.23 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 3* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas

Simulação amostra *Pellet Feed 4*

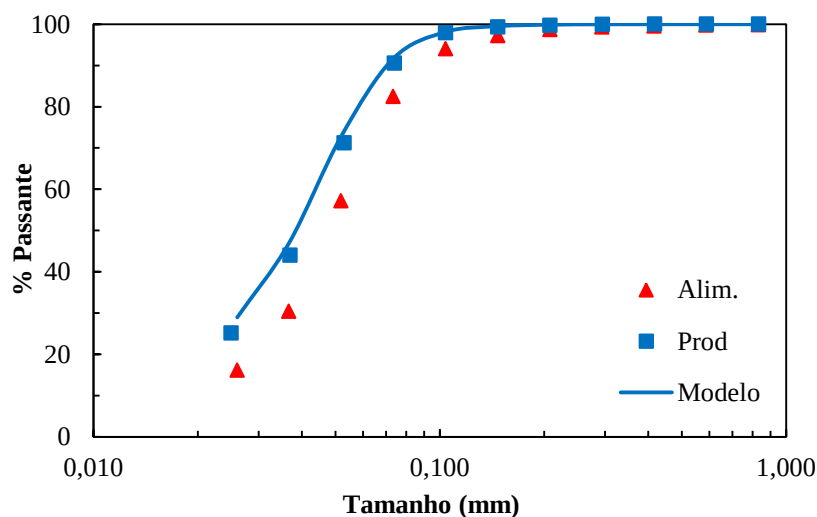


Figura 5.24 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Pellet Feed 4* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas

Simulação amostra Minério de Ferro

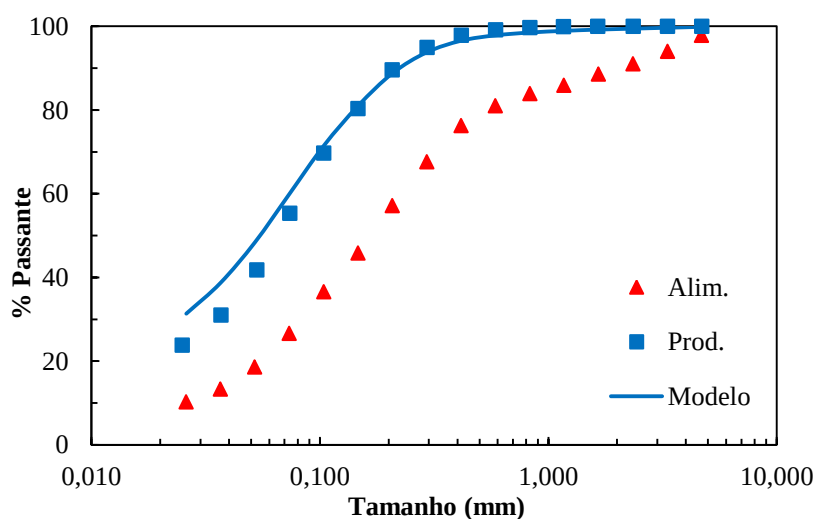


Figura 5.25 – Previsão de distribuição granulométrica da amostra *Minério de Ferro* utilizando o modelo de frações estreitas de tamanho de partículas

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES

A indústria mineral sempre busca formas de dimensionar as operações unitárias através de métodos que possuam simplicidade, rapidez e reprodutibilidade. A metodologia desenvolvida neste trabalho cumpriu estes requisitos.

A metodologia se mostrou adequada para previsão da distribuição granulométrica do produto e da potência específica líquida de um moinho vertical através de testes em escala de laboratório utilizando-se moinhos tubulares convencionais com pequenas quantidades de amostra.

A potência líquida de moagem de um moinho vertical pode ser estimada através de um fator de escalonamento $k = 1,35$, aplicado ao parâmetro $S1^E$ da função seleção específica em energia, nomeado de $S1^{E*}$.

A metodologia de ensaios com frações estreitas de tamanho de partículas, utilizada para simulação de moinho de bolas, se mostrou adequada para simulação de moinho vertical quando aplicado o mesmo fator $k = 1,35$ ao parâmetro $S1$ da função seleção.

Impactos de maior energia representam uma ineficiência no processo de quebra, visto que a eficiência máxima de moagem ocorre quando o impacto é igual à energia de fratura da partícula. No moinho vertical a distribuição de energias de impacto favorece impactos de menor energia, enquanto no moinho de bolas os impactos de maior energia são favorecidos. Esta melhor utilização dos impactos de menor energia tornam o moinho vertical mais eficiente.

Através dos resultados obtidos foi possível inferir que os mecanismos de fratura dos moinhos de bolas e dos moinhos verticais são semelhantes, uma vez que foi possível prever a distribuição granulométrica do produto do moinho vertical sem a inclusão de uma função extra para descrever uma, possível, maior quantidade de fratura pelo mecanismo de atrito, supostamente maior nos moinhos verticais.

CAPÍTULO 7 - CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS AO CONHECIMENTO

Houve definição de metodologia composta por testes simples em escala de laboratório dos quais é possível determinar parâmetros do modelo do balanço populacional para escalonar e simular um moinho vertical em escala industrial. Até então, a previsão da distribuição granulométrica do produto de um moinho vertical em escala industrial somente era realizada com segurança através de testes em escala piloto com grandes quantidades de amostra.

A metodologia desenvolvida neste trabalho será de grande utilidade em estudos de variabilidade de depósitos minerais, onde a quantidade de amostras é, na maioria das vezes, limitada.

CAPÍTULO 8 - RELEVÂNCIA DOS RESULTADOS

O modelo desenvolvido será de grande utilidade no dia a dia dos engenheiros de processo envolvidos em projetos de novas plantas de beneficiamento mineral e também daqueles envolvidos na otimização de plantas existentes.

Através da metodologia desenvolvida neste trabalho será possível prever a distribuição granulométrica do produto e a potência líquida de um moinho vertical em escala industrial a partir de testes executados em moinho de bolas em escala de laboratório.

CAPÍTULO 9 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Validar a metodologia desenvolvida em circuitos industriais de moagem. Para tal, será necessário realizar uma campanha de amostragem de longa duração, com estabilidade do circuito e registro redundante de todas as variáveis de processo de forma a obter dados confiáveis.

Desenvolver e/ou adequar as equações existentes para previsão da potência líquida e em vazio de moinhos verticais, principalmente os moinhos verticais de maior capacidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, V. K. *Otimização de Carga Moedora Utilizando Ferramentas de Modelamento Matemático e Simulação de Moagem*, Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

Alves, V. K., Galéry, R., Peres, A. E. C., Schneider, C. L. *Estudo de Otimização de Carga de Moinho Utilizando Tecnologia de Simulação*, XX Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa, Florianópolis, Vol. 2, pp. 227-234, 2004.

Austin, L. G., Klimpel, R. R., Luckie, P. T. *Process Engineering of Size Reduction*, SME - AIME, 1984.

Brissette, M. *Energy Savings and Technology Comparison by Using Small Grinding Media*, Procemin, Santiago, Chile, 2009.

Broadbent, S. R. & Callcott, T. G. *A Matrix Analysis of Process Involving Particle Assemblies*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. A 249, pp. 99-123, 1956.

Brown, R. L. *Broken Coal-III Generalized Law of Size Reduction*, Journal of the Institute of Fuel, Vol. 14, pp.129-134, London, 1941.

Celep, O., Aslan, N., Alp. I., Tasdemir, G. *Optimization of some parameters of stirred mill for ultra-fine grinding of refractory Au/Ag ores*, Powder Technology, Vol. 208, pp. 121-127, 2011.

Charles, R. J. *Energy-size reduction relationships in comminution*. Trans AIME, Vol. 203, pp. 80-88, 1957.

Duffy, S. M. *Investigation into the Performance Characteristics of Tower Mills*, Master Thesis - University of Queensland, JKMR, Brisbane, Australia, 1994.

Epstein, B. *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 244, pp. 471-477, 1947.

Fuerstenau, M. C. & Han, K. N. *Principles of Mineral Processing*, Chapter 3 - Size Reduction and Liberation, Ed. Society for Mining, Metallurgy and Exploration, 2003.

Filippov, A. F. *Distribution of the Sizes Which Undergo Splitting, Theory of Probability and Its Applications*, Vol. 6, pp. 275-280, English Translation, USSR, 1961.

Galéry, R. *Moagem: Modelagem de Parâmetros de Quebra Através da Análise da Energia de Fragmentação*, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

Gardner, R. P. & Austin, L. G. *A Chemical Engineering Treatment of Batch Grinding Proceedings*, 1st European Symposium Zerkleinern, H. Rumpf and D. Behrens, eds., Veriag Chemie, Weinheim, pp. 217-247, 1962.

Gaudin, A. M. & Meloy, T. P. *Model and Comminution Distribution Equation for Repeated Fracture*, Trans. SME-AIME, Vol. 223, pp. 43-50, 1962.

Gutiérrez, L., Sepúlveda, J. E. *Dimensionamiento y Optimización de Plantas Concentradoras mediante Técnicas de Modelación Matemática*, Publicación CIMM – Centro de Investigación Minera y Metalúrgica, Santiago, Chile, 1986.

Herbst J. A. and Fuerstenau D. W. *Mathematical Simulation of Dry Ball Milling using Specific Power Information*, Trans. AIME, Vol. 254, pp. 343, 1973.

Herbst J. A. and Sepulveda J. L. *Fundamentals of Fine and Ultrafine Grinding in a Stirred Ball Mill*, International Powder and Bulk Solids Handling and Processing: Proceedings held Rosemount Illinois, Vol. 16-18, pp. 452-470, May, 1978.

Herbst, J. A. & Fuerstenau, D. W. *Scale-Up Procedure for Continuous Grinding Mill Design Using Population Balance Models*, International Journal of Mineral Processing, Vol. 7, pp. 1-31, 1980.

Herbst, J. A., Rajamani, R. K., Mular, A. L., Flintoff, B. *Mineral Processing Plant Design, Practice and Control*, Published by Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Chapter - Circuit Simulators: An Overview, pp. 383, 2002.

Hulburt, H. M. & Katz, S. *Some problems in particle technology: A statistical mechanical formulation*. Chemical Engineering Science, Vol. 19, pp. 555-574, 1964.

Jankovic, A. and Morrell, S. *Power Modelling of Stirred Mills*, Proceedings of the Second UBC-MCGILL BI-Annual International Symposium on Fundamentals of Mineral Processing and the Environment, Sudbury, Ontario, Canada, 1997.

Jankovic, A. *Mathematical Modelling of Stirred Mills*, PhD Thesis – University of Queensland, JKMR, Brisbane, Australia, 1999.

Jankovic, A., Valery W., Clarke G. *Design and Implementation of an AVC Grinding Circuit at BHP Billiton Cannington*, SAG 2006 Conference, 2006.

Junior, L. T. S., Gomes, M. P. D., Gomides, R. B., Junior, G. G. O., Phillips, W. *Vantagens e Desvantagens do Uso de Moinho Vertical na Remoagem de Concentrado da Kinross Paracatu*, XXIV ENTMME, Salvador/Bahia, 2011.

Kalra, R. *Overview on alternative methods for fine and ultra-fine grinding*, In: IIR Conference, Crushing & Grinding, Perth, 1999.

Kelly, E. G. & Spottiswood, D. J. *Introduction to Mineral Processing*, J. Wiley & Sons, New York, 1982.

King, R. P. *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002^A.

King, R. P. *Introduction to Practical Fluid Flow*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002^B.

Lo, Y. C., Herbst, J.A. *Consideration of ball size effects in the population balance approach to mill scale-up*. Adv. Miner. Process. Chap. 2, pp. 33- 47, 1986.

Mazzinghy, D. B. *Estudo de Modelagem e Simulação de Circuito de Moagem Baseado na Determinação dos Parâmetros de Quebra e Energia Específica de Fragmentação*, Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.

Mazzinghy, D. B., Alves, V. K., Schneider, C. L., Faria, P., Alvarenga, T., Galéry, R. *Predicting the size distribution in the product and the power requirements of a pilot scale Vertimill*, Proceedings of the 9th International Mineral Processing Conference - Procemin, Santiago, Chile, pp. 412-420, 2012.

Metso. *Moinho Vertical (VERTIMILL™), Moagem de Finos e Ultrafinos em Via Úmida*, Metso Minerals, Nº 2103-01-07-MPR, pp. 07, Sorocaba-Portuguese, 2006.

Mishra, B. K., Rajamani, R. K. *Numerical simulation of charge motion in a ball mill*, Preprints of the 7th Euro Symp. on Comminution, pp. 555-563, 1990.

Montenegro, L. C. M. *Aplicação de Métodos Numéricos na Simulação da Moagem em Moinho de Bolas Utilizando o Modelo do Balanço Populacional*, Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

Morrison, R. D., Cleary, P.W., Sinnott, M. D. *Using DEM to compare the energy efficiency of pilot scale ball and tower mills*, Minerals Engineering, Vol. 22, pp. 665-672, 2009.

MTI - Mineral Technologies International, Inc. *BatchMillTM Standard Batch Test Analyzer*, User Manual, First Edition, 2003.

MTI - Mineral Technologies International, Inc. *ModsimTM - MODular SIMulator for Mineral Processing Plants*, User Manual, 12th Edition, 2009.

Nitta, S., Furuyama, T., Bissombolo, A., Mori, S. *Estimation of the Motor Power of the Tower Mill through Dimensional Analysis*, Proc. XXIII International Mineral Processing Congress, pp.158-161, 2006.

Pena, F., Lawruk, W., Jones, S. *The Versatile Tower Mill a Recent Application*, AIME Intermountain Conference, 1985.

Rajamani, K. & Herbst, J.A. *Simultaneous estimation of selection and breakage functions from batch and continuous grinding data*, Transactions of Institution of Mining and Metallurgy, Vol. 93, pp.74-85, 1984.

Reid, K. J. *A Solution to the Batch Grinding Equation*, Chemical Engineering Science, Vol. 20, pp. 953-963, 1965.

Rowland Jr, C. A. *Ball Mill Scale-Up - Diameter Factors*. Somasundaram, P. *Advances in Mineral Processing*. New York, Society of Mining Engineers, Inc., American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers, pp. 605-617, 1986.

Sedlatschek, K. & Bass, L. *Contribution to the Theory of Milling Processes*, Powder Metallurgy Bulletin, Vol. 6, pp. 148-153, 1953.

Schneider, C. L. *The Measurement and Calculation of Liberation in Continuous Grinding Circuits*, Ph.D Thesis, University of Utah, 1995.

Shi, F., Morrison, R., Cervellin, A., Burns, F., Musa, F. *Comparison of energy efficiency between ball mills and stirred mills in coarse grinding*, Minerals Engineering, Vol. 22, pp. 673-680, 2009.

Stief, D. E., Lawruk, W.A., Wilson, L. J. *Tower mill and its application to fine grinding*, Minerals and Metallurgy Processing Vol. 4, pp. 45-50, 1987.

Toraman, O. Y., Katircioglu, D. *A study on the effect of process parameters in stirred ball mill*, Advanced Powder Technology, Vol. 22, pp. 26-30, 2011.

Tüzün, M. A. *A detailed study on comminution in a vertical stirred ball mill*. PhD Thesis, University of Natal, South Africa, 1993.

Valadão, G. E. S., Araujo, A. C. *Introdução ao Tratamento de Minérios*, Belo Horizonte, Editora UFMG, pp. 17-25, 2007.

Vanderbeek J. *Tertiary Grinding Circuit Installation at Chino Mines Company*, SME Comminution Practices, Chapter 31, 1998.

Verkoeijen, D, Pouwa, G. A., Meesters, G. M. H., Scarlett, B. *Population balances for particulate processes—a volume approach*, Chemical Engineering Science, Vol. 57, pp. 2287-2303, 2002.

Von Kruger, F. L. *Corpos Moedores Côncavos*, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, CPGEM, Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

Wills, B. A. *Mineral Processing Technology*, Pergamon Press, Oxford, 4th ed., pp. 286-287, 1988.

APÊNDICES

APÊNDICE I – Curvas granulométricas dos ensaios com frações estreitas de tamanhos de partículas

Amostra: Pellet Feed 2

Fração 1,180 x 0,840					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1,180	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,840	4,80	88,16	100,00	100,00	100,00
0,590	0,72	68,41	100,00	100,00	100,00
0,420	0,70	57,66	97,93	100,00	100,00
0,296	0,68	47,78	91,54	100,00	100,00
0,212	0,64	41,79	83,60	100,00	100,00
0,150	0,61	35,76	72,34	96,25	99,71
0,105	0,57	31,23	62,85	88,48	97,52
0,074	0,53	25,32	50,74	78,23	92,36
0,052	0,48	20,13	38,59	62,58	80,60
0,037	0,44	13,63	30,84	52,20	68,23

Fração 0,840 x 0,600					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,840	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,590	3,36	69,97	100,00	100,00	100,00
0,420	1,11	55,83	100,00	100,00	100,00
0,296	1,08	41,71	92,30	100,00	100,00
0,212	1,05	35,29	84,85	100,00	100,00
0,150	1,02	28,89	72,44	92,29	100,00
0,105	0,98	23,50	61,78	84,13	96,06
0,074	0,94	19,05	52,30	74,82	89,53
0,052	0,89	14,74	41,21	63,38	78,25
0,037	0,84	11,21	32,33	51,18	67,98

Fração 0,600 x 0,425					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,590	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,420	4,23	66,45	100,00	100,00	100,00
0,296	1,59	44,89	92,12	100,00	100,00
0,212	1,50	34,88	82,04	97,14	100,00
0,150	1,43	27,02	68,68	87,79	100,00
0,105	1,37	22,26	56,41	77,88	94,18
0,074	1,31	17,78	44,70	67,19	85,59
0,052	1,25	12,95	33,55	54,36	75,60
0,037	1,01	10,01	25,33	42,62	61,45

Fração 0,425 x 0,300					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,420	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,296	5,44	57,75	100,00	100,00	100,00
0,212	1,07	35,85	81,72	96,39	100,00
0,150	1,05	27,36	68,21	87,13	100,00
0,105	1,04	21,10	59,07	77,03	94,18
0,074	1,02	17,03	48,68	66,39	85,59
0,052	1,01	13,60	36,90	54,64	76,49
0,037	0,99	8,95	27,53	42,56	61,45

Fração 0,300 x 0,212					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,296	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,212	5,09	52,55	90,86	98,38	100,00
0,150	1,36	28,92	71,06	88,37	100,00
0,105	1,13	22,60	59,33	76,08	92,69
0,074	0,98	17,60	47,31	64,30	81,54
0,052	0,87	14,00	36,76	52,72	69,37
0,037	0,76	10,57	27,22	41,68	56,67

Fração 0,212 x 0,150					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,212	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,150	6,42	40,52	79,87	92,82	100,00
0,105	0,70	22,24	58,57	76,91	93,99
0,074	0,51	15,77	44,23	62,15	82,88
0,052	0,48	12,43	33,13	49,12	70,17
0,037	0,45	9,05	23,45	36,80	55,65

Fração 0,150 x 0,105					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,150	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,105	7,69	38,55	73,22	85,03	95,22
0,074	1,62	15,64	49,40	64,16	82,51
0,052	1,53	10,12	35,97	50,57	69,65
0,037	1,50	6,78	24,06	39,43	58,09

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 85% de sólidos)					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,52	26,73	51,80	70,44	87,72
0,052	0,55	10,47	31,68	50,56	69,96
0,037	0,48	6,53	19,00	34,15	50,19

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 80% de sólidos)					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,52	29,45	61,13	81,30	93,34
0,052	0,55	11,82	39,10	60,67	80,41
0,037	0,48	7,28	24,12	40,25	64,17

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 75% de sólidos)					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,52	31,04	60,93	79,42	91,99
0,052	0,55	12,67	39,93	62,12	78,42
0,037	0,48	7,10	25,02	40,61	57,77

Fração 0,105 x 0,075					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,52	25,47	60,43	75,22	88,79
0,052	0,55	11,24	37,22	54,36	69,94
0,037	0,48	6,36	21,56	33,51	47,85

Fração 0,075 x 0,053					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,074	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,052	6,55	18,09	42,68	57,76	82,85
0,037	0,34	7,23	21,65	34,02	54,69

Fração 0,053 x 0,038					
min	0,0	2,0	9,2	18,4	31,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,052	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,037	5,45	14,61	31,23	47,61	63,81

Amostra: Pellet Feed 3

Fração 0,300 x 0,212					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,296	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,212	2,91	40,27	100,00	97,87	100,00
0,150	0,16	29,70	66,33	90,26	99,42
0,105	0,11	22,56	54,47	79,17	96,21
0,074	0,07	17,09	44,62	67,08	88,08
0,052	0,04	12,02	34,66	55,22	74,07
0,037	0,02	8,67	26,47	41,92	61,63

Fração 0,212 x 0,150					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,212	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,150	6,24	39,70	75,42	93,34	98,72
0,105	0,51	26,89	55,98	80,91	94,35
0,074	0,35	19,42	42,60	66,80	84,33
0,052	0,23	14,76	32,37	54,00	72,76
0,037	0,14	9,16	21,63	38,61	56,68

Fração 0,150 x 0,105					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,150	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,105	5,68	30,76	64,15	85,11	95,71
0,074	0,04	17,20	44,43	64,19	86,36
0,052	0,01	10,57	31,74	50,72	70,24
0,037	0,00	5,36	21,11	36,34	55,36

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 85% de sólidos)					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	3,68	29,42	44,66	75,19	91,34
0,052	0,90	9,37	26,39	54,18	76,10
0,037	0,74	4,50	16,06	36,52	56,33

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 80% de sólidos)					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	3,68	28,19	53,86	82,54	93,72
0,052	0,90	12,59	34,97	64,00	81,62
0,037	0,74	7,21	21,26	44,03	61,11

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 75% de sólidos)					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	3,68	29,66	60,00	80,16	94,08
0,052	0,90	13,37	39,14	61,74	80,71
0,037	0,74	7,79	23,69	41,12	59,61

Fração 0,105 x 0,075					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	3,68	33,09	51,12	72,00	91,05
0,052	0,90	14,83	25,79	51,81	73,01
0,037	0,74	9,52	18,45	33,50	52,03

Fração 0,075 x 0,053					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,074	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,052	10,10	13,91	36,99	57,14	76,66
0,037	0,52	6,53	23,53	33,90	51,05

Fração 0,053 x 0,038					
min	0,0	2,0	8,2	19,0	35,5
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,052	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,037	5,95	20,90	35,09	47,23	63,74

Amostra: *Pellet Feed 4*

Fração 0,425 x 0,300					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,420	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,296	4,94	69,47	98,43	100,00	100,00
0,212	0,36	50,60	92,70	100,00	100,00
0,150	0,31	43,11	82,33	100,00	100,00
0,105	0,27	37,28	73,17	94,07	98,96
0,074	0,25	31,45	63,96	85,20	95,44
0,052	0,23	26,54	53,19	70,69	86,28
0,037	0,22	21,89	40,59	58,61	71,25

Fração 0,300 x 0,212					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,296	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,212	4,21	59,19	94,92	100,00	100,00
0,150	0,33	37,19	78,48	95,92	100,00
0,105	0,29	26,11	65,44	87,61	97,65
0,074	0,25	18,76	54,99	76,27	91,41
0,052	0,23	13,19	43,23	62,14	81,33
0,037	0,21	8,61	30,83	49,28	65,90

Fração 0,212 x 0,150					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,212	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,150	4,87	38,65	84,46	96,46	100,00
0,105	0,21	20,04	61,12	83,99	96,47
0,074	0,05	13,40	46,43	70,12	89,26
0,052	0,04	10,16	35,14	57,70	78,37
0,037	0,02	6,96	24,29	44,01	61,25

Fração 0,150 x 0,105					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,150	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,105	4,38	40,17	75,82	90,52	97,87
0,074	0,68	20,93	50,13	71,95	88,71
0,052	0,65	15,50	31,97	54,22	72,13
0,037	0,64	13,67	22,95	39,75	56,35

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 85% de sólidos)					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,83	57,77	68,16	85,15	96,22
0,052	0,77	13,41	34,88	62,16	81,53
0,037	0,22	8,40	24,21	45,55	64,31

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 80% de sólidos)					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,83	54,78	81,86	94,83	98,07
0,052	0,77	12,54	54,34	72,85	88,92
0,037	0,22	7,29	34,52	54,15	71,90

Fração 0,105 x 0,075 (Teste a úmido com 75% de sólidos)					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,83	62,06	87,23	95,54	98,11
0,052	0,77	23,56	54,19	78,18	87,99
0,037	0,22	17,19	36,76	62,23	72,99

Fração 0,105 x 0,075					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	5,83	32,35	65,55	86,89	95,58
0,052	0,77	10,64	43,73	62,50	75,74
0,037	0,22	5,86	28,00	42,05	56,00

Fração 0,075 x 0,053					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,074	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,052	4,34	22,54	45,16	72,78	88,46
0,037	0,69	6,93	28,01	46,39	58,14

Fração 0,053 x 0,038					
min	0,0	2,0	11,4	25,7	44,9
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,052	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,037	4,05	23,90	41,83	63,52	77,76

Amostra: Minério de Ferro

Fração 6,350 x 4,760					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
6,700	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
4,740	7,14	77,72	86,15	95,13	97,92
3,350	1,38	45,71	71,54	84,66	94,40
2,370	1,38	37,73	65,58	80,95	91,48
1,670	1,38	33,12	61,99	78,29	89,68
1,180	1,38	29,94	58,88	76,18	88,48
0,840	1,38	28,03	56,28	74,44	87,64
0,590	1,38	25,96	53,84	72,55	86,54
0,420	1,38	24,33	51,29	69,83	84,99
0,296	1,38	22,62	47,74	67,02	82,42
0,212	1,38	20,68	43,48	63,43	77,05
0,150	1,38	18,27	39,39	57,22	69,72
0,105	1,38	15,72	34,06	50,23	61,33
0,074	1,38	12,76	28,53	41,80	52,62
0,052	1,38	9,67	23,44	33,61	41,81
0,037	1,38	7,13	16,75	23,75	31,05

Fração 3,350 x 2,360					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
3,350	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2,370	6,30	71,33	95,19	97,82	99,49
1,670	3,13	56,56	89,68	96,25	98,96
1,180	3,08	46,83	83,90	94,28	98,55
0,840	3,08	41,47	78,00	92,12	98,09
0,590	3,08	36,45	71,90	88,62	97,39
0,420	3,08	32,92	65,90	83,72	95,53
0,296	3,08	29,80	59,25	77,79	91,58
0,212	3,08	26,63	52,14	70,82	86,05
0,150	3,08	23,43	45,87	62,89	77,11
0,105	3,08	19,77	39,69	53,71	66,47
0,074	3,08	16,11	32,77	44,01	54,38
0,052	3,08	12,64	24,85	34,67	42,56
0,037	3,08	9,54	17,78	25,88	30,87

Fração 1,180 x 0,840					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
1,180	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,840	10,11	70,63	95,25	99,40	100,00
0,590	5,53	54,42	86,17	98,18	100,00
0,420	4,30	45,24	76,23	94,13	99,20
0,296	4,30	38,00	65,34	86,41	96,15
0,212	4,30	31,57	55,37	76,19	89,15
0,150	4,30	27,20	47,08	65,98	81,20
0,105	4,30	22,85	39,55	55,54	70,97
0,074	4,30	18,74	32,48	45,39	59,98
0,052	4,30	15,37	25,78	35,18	48,28

Fração 0,600 x 0,425					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,590	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,420	14,72	62,82	91,74	98,42	99,72
0,296	9,19	44,08	73,98	90,74	97,29
0,212	8,96	33,85	58,98	76,57	89,11
0,150	7,84	27,75	47,84	64,23	75,40
0,105	7,84	23,14	38,33	52,92	63,09
0,074	7,84	19,30	30,03	41,86	51,07
0,052	7,84	15,92	24,55	34,53	41,00
0,037	7,84	13,27	17,80	25,34	29,07

Fração 0,212 x 0,150 (Teste a úmido com 80% de sólidos)					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,212	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,150	23,07	43,22	60,16	74,03	94,59
0,105	9,19	20,49	39,32	52,98	79,15
0,074	8,15	16,74	30,31	42,28	67,94
0,052	8,15	12,94	22,58	31,86	59,17
0,037	8,15	11,55	20,03	27,41	50,26

Fração 0,212 x 0,150					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,212	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,150	10,65	29,37	51,10	63,68	75,64
0,105	3,72	15,91	29,49	45,12	54,69
0,074	3,65	12,90	22,62	33,65	40,99
0,052	3,65	11,56	19,30	27,14	32,87
0,037	3,65	10,10	15,48	20,33	25,44

Fração 0,150 x 0,105					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,150	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,105	7,24	18,45	38,15	47,76	58,18
0,074	1,81	10,53	20,22	29,80	36,12
0,052	1,81	8,78	14,73	22,08	27,07
0,037	1,81	6,89	10,79	15,59	20,40

Fração 0,105 x 0,075					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,105	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,074	4,80	19,02	25,21	47,67	54,00
0,052	1,56	12,07	16,28	34,65	42,57
0,037	0,33	7,06	10,02	23,82	33,07

Fração 0,075 x 0,053					
min	0,0	1,0	2,8	5,0	7,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,074	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,052	2,80	13,23	35,94	50,37	65,07
0,037	1,33	5,98	10,65	17,66	25,06

Fração 0,053 x 0,038					
min	0,0	1,0	2,8	7,0	9,3
mm	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.	% Pas.
0,052	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0,037	2,94	13,46	17,19	24,36	29,54

APÊNDICE II – Dedução do modelo para determinação dos parâmetros de quebra

A distribuição granulométrica do material dentro do moinho de teste muda continuamente ao longo do tempo. O balanço de massa para cada intervalo de tamanho pode ser escrito conforme a seguir.

Para o maior intervalo de tamanho:

$$H \frac{dm_1}{dt} = -S_1 H m_1$$

Esta expressão geralmente é adequada para assumir que S_1 não varia com o tempo e esta equação pode ser facilmente integrada para obter:

$$m_1 = m_1(0)e^{-S_1 t}$$

Para o próximo intervalo de tamanho pode-se escrever conforme a seguir:

$$H \frac{dm_2}{dt} = -S_2 H m_2 + S_1 H m_1 b_{21}$$

$$\frac{dm_2}{dt} + S_2 m_2 = S_1 b_{21} m_1 = S_1 b_{21} m_1(0)e^{-S_1 t}$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem que tem uma solução da forma:

$$m_2 = A e^{-S_2 t} + B e^{-S_1 t}$$

Onde A e B são constantes que devem ser determinadas a partir da forma da equação diferencial das condições iniciais. A primeira solução proposta é diferenciada.

$$\frac{dm_2}{dt} = A S_2 e^{-S_2 t} - B S_1 e^{-S_1 t}$$

Estas expressões de m_2 e sua derivada são substituídas na equação diferencial original.

$$AS_2 e^{-S_2 t} - BS_1 e^{-S_1 t} + S_2 A e^{-S_2 t} + S_2 B e^{-S_1 t} = S_1 b_{21} m_1(0) e^{-S_1 t}$$

Simplificando torna-se:

$$(-S_1 B + S_2 B) e^{-S_1 t} = S_1 b_{21} m_1(0) e^{-S_1 t}$$

De modo que B é dada por:

$$B = \frac{S_1 b_{21} m_1(0)}{S_2 - S_1}$$

A variável A deve ser avaliada a partir da condição inicial.

$$m_2(0) = A + B$$

ou

$$A = m_2(0) - B$$

e

$$m_2 = m_2(0) e^{-S_2 t} - B(e^{-S_2 t} - e^{-S_1 t})$$

$$m_2 = m_2(0) e^{-S_2 t} - \frac{S_1 b_{21} m_1(0)}{S_2 - S_1} (e^{-S_2 t} - e^{-S_1 t})$$

A solução pode ser mantida desta forma para desenvolver a solução de tamanho a tamanho. Esta solução é tediosa, mas não impossível.

O melhor é desenvolver uma solução que funciona automaticamente para todos os tamanhos utilizando métodos computacionais de solução. Uma solução geral pode assumir duas formas:

$$m_i = \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} e^{-S_j t}$$

$$m_i = \sum_{j=1}^i \beta_{ij} m_j(0)$$

Os coeficientes α_{ij} não são funções do tempo, mas funções das condições iniciais e os coeficientes β_{ij} não são funções das condições iniciais, mas variam de acordo com o tempo.

Os coeficientes α_{ij} pode ser desenvolvida através de alguns relações de recursividade como mostrado a seguir.

A equação diferencial que descreve a variação de cada um dos intervalos de tamanho é

$$\frac{dm_i}{dt} = S_1 m_1 + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j$$

A solução geral é agora substituída nesta equação

$$\sum_{j=1}^i \alpha_{ij} S_j e^{-S_j t} = -S_i \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} e^{-S_j t} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j \sum_{l=1}^j \alpha_{jl} e^{-S_l t}$$

Reorganizando tem-se

$$\sum_{j=1}^i \alpha_{ij} (S_i - S_j) e^{-S_j t} = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^j b_{ij} S_j \alpha_{jl} e^{-S_l t}$$

A ordem do somatório duplo deve agora ser revertida

$$\sum_{l=1}^{i-1} \alpha_{il} (S_i - S_l) e^{-S_l t} = \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=l}^{i-1} b_{ij} S_j \alpha_{jl} e^{-S_l t}$$

A variação dos limites para o somatório duplo foi alterada. A região sobre a qual o somatório duplo opera não deve mudar como a ordem da soma é alterada.

Tem-se:

$$\sum_{l=1}^{i-1} [\alpha_{il} (S_i - S_l) - \sum_{j=l}^{i-l} b_{ij} S_j \alpha_{jl}] e^{-S_l t} = 0$$

O coeficiente de cada exponencial deve ser igual a zero se a soma é igual a zero para todos os valores de t .

$$\alpha_{il} (S_i - S_l) = \sum_{j=l}^{i-l} b_{ij} S_j \alpha_{jl}$$

Que fornece o valor de cada α exceto para α_{ij} .

$$\alpha_{il} = \frac{1}{(S_i - S_l)} \sum_{j=l}^{i-l} b_{ij} S_j \alpha_{jl} \quad \text{para } i > l$$

α_{ij} pode ser obtido a partir da condição inicial

$$m_i(0) = \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} = \alpha_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}$$

$$\alpha_{ii} = m_i(0) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}$$

Todos os coeficientes podem ser resolvidos por recursão a partir de $i = 1$.

$$\alpha_{11} = m_1(0)$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{(S_2 - S_1)} b_{21} S_1 \alpha_{11}$$

E assim por diante.

Essa recursão é mais útil na forma

$$\alpha_{ij} = c_{ij} a_j \quad \text{com } j < i \quad \text{e} \quad c_{ii} = 1$$

$$\alpha_{il} = c_{il} a_l = \frac{1}{(S_i - S_l)} \sum_{j=l}^{i-1} b_{ij} S_j c_{il} a_l$$

$$c_{il} = \frac{1}{(S_i - S_l)} \sum_{j=l}^{i-1} b_{ij} S_j c_{jl}$$

$$\alpha_{ii} = a_i = m_i(0) - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} a_j$$

Os c_{il} são independentes de ambos, o tempo e as condições iniciais, e pode ser calculado uma vez para todos os intervalos de tamanho a partir do conhecimento das velocidades de quebra específicas da função de quebra.