

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 31 3499-4866 - Fax: +55 31 3499-4850

aguirre@cpdee.ufmg.br



---

# Síntese e análise de sinais de Variabilidade da Frequência Cardíaca pela modelagem NARMAX com entrada sintética

---

**Dair José de Oliveira**

Tese submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**Orientadores:** Luis A. Aguirre  
Murilo E. D. Gomes  
Christophe Letellier

Belo Horizonte, 20 de setembro de 2007



*“Verdadeiramente ele tomou sobre si as nossas enfermidades, e as nossas dores levou sobre si; e nós o reputávamos por aflito, ferido de Deus, e oprimido. Mas ele foi ferido por causa das nossas transgressões, e moído por causa das nossas iniquidades; o castigo que nos traz a paz estava sobre ele, e pelas suas pisaduras fomos sarados. Ele foi oprimido e afligido, mas não abriu a sua boca; como um cordeiro foi levado ao matadouro, e como a ovelha muda perante os seus tosquiadores, assim ele não abriu a sua boca. Todavia, ao Senhor agradou moê-lo, fazendo-o enfermar; quando a sua alma se puser por expiação do pecado, verá a sua posteridade, prolongará os seus dias; e o bom prazer do Senhor prosperará na sua mão. Ele verá o fruto do trabalho da sua alma, e ficará satisfeito; com o seu conhecimento o meu servo, o justo, justificará a muitos; porque as iniquidades deles levará sobre si.”*

Isaiás 53,4-5,7,10-11



---

---

# Agradecimentos

---

Agradeço Deus por Sua presença, companhia, Seu amor e misericórdia, Sua providência e graça, que me sustentaram durante todo o tempo, e sempre, pela Graça concedida por meio do Senhor Jesus.

Agradeço à minha família pelo amor, dedicação, apoio e confiança incondicionais que sempre foram a principal motivação e combustível para seguir em frente, principalmente nos momentos mais difíceis.

De maneira especial, agradeço a minha amada irmã, Flaviana, que, apesar de mais nova, desde os tempos do ensino médio tornou-se meu exemplo de estudante, por sua ética, comprometimento e inteligência. Hoje, pelos mesmos motivos aliados à sua competência, ela é uma de minhas referências como profissional. Também agradeço ao meu amado avô, cuja inteligência e organização sempre foram um grande estímulo. De forma especial, também agradeço ao meu tio Ardvander que sempre esteve presente em minha vida, nas diversas circunstâncias, e, assim como minha irmã, é uma das minhas referências de profissional, além de ter sido a minha referência para entrar no mundo da engenharia elétrica.

Agradeço a todos os meus amigos pela amizade, presença, todo apoio e pelas orações; são presentes de Deus.

Agradeço imensamente à minha amiga Linda Achour que foi importantíssima durante minha estadia na França, principalmente no começo, dando-me total apoio em minha adaptação, na solução dos problemas burocráticos, nos problemas práticos do dia a dia, e mesmo na construção de novas amizades.

Agradeço imensamente a Deus pela vida do jovem Hélio D. de Freitas, meu amigo, meu irmão, por tudo que fez por mim desde que cheguei a Belo Horizonte para começar o mestrado até o presente momento. O Helinho tem um coração maior que ele — nesse caso não há problema algum — e só mesmo Deus pode recompensá-lo por tudo.

Tenho muito a agradecer ao Prof. Arnaud Bultel que me recebeu em sua sala no CORIA (COMPLEXE de Recherche Interprofessionnel en Aérothermo-chimie), na Universidade de Rouen, durante toda minha estadia na França. Não poderia deixar de mencionar e agradecer aos amigos Riná, Elie e Toufik que foram muito importantes durante essa jornada em Rouen, e os quais trago no coração.

Agradeço de maneira especial às irmãs Anete e Arlete, secretárias do CP-DEE, por todo carinho e atenção durante todo esse tempo. Também agradeço ao seu Irton, seu Nelson, Eustáquio, seu José Maria, seu Elair, Rogério, seu Marcos, entre outros porteiros do CPH e do CPDEE, pela amizade. Agradeço também à Nadir, ao Paulinho, Vicente, Geraldo, Elizete, Beatriz, D. Djanira, enfim, aos funcionários do CPH nesse período do meu doutorado, por todo apoio e amizade.

Agradeço de maneira especial aos amigos do grupo MACSIN, pela amizade, companheirismo, cooperação, atenção e pelo crescimento que pude ter com cada um de vocês.

Agradeço ao PPGEE da UFMG pela grande oportunidade, e ao CPH pela estrutura, apoio e pelos amigos. Agradeço também, a todos os professores do PPGEE com os quais tive a oportunidade de trabalhar e aprender.

Gostaria de agradecer ao Prof. Carlos Martinez por todo apoio e amizade.

Agradeço à Profa. Sueli Mingoti por ter-me permitido cursar sua disciplina no Departamento de Estatística da UFMG, pois foi uma importante experiência.

Agradeço ao Prof. Antônio L. P. Ribeiro por disponibilizar as séries estudadas neste trabalho, e por permitir o registro de novas séries.

Agradeço ao Prof. Homero Guimarães por permitir o uso do software para o cálculo da entropia aproximada.

Agradeço ao povo brasileiro pelo apoio financeiro imprescindível, por meio do CNPq e da CAPES.

Agradeço ao Prof. Christophe Letellier por toda atenção, disposição em cooperar e ajudar e pela orientação. Agradeço muito ao Prof. Letellier por ter me tratado não apenas como um aluno, mas também como um amigo durante minha estadia na França para o doutorado sanduíche, e, sem dúvidas, por tudo que se seguiu após meu retorno.

Agradeço imensamente aos Profs. Luis A. Aguirre e Murilo E. D. Gomes pela orientação, disponibilidade, atenção, cordialidade, amizade e pelos exemplos que foram muito importantes e me proporcionam crescimento; por

se empenharem em contribuir para minha formação, que vai muito além da técnica. Você são muito importantes para mim e estarão sempre no meu coração.

Perdoem-me todos aqueles os quais esqueci-me de mencionar.



---

---

# Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xxi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Modelos Aplicados ao Sistema Cardiovascular e aos Sinais de Variabilidade da Frequência Cardíaca . . . . .	4
1.2 Motivação . . . . .	6
1.3 Objetivos . . . . .	10
1.4 Principais contribuições desta tese . . . . .	10
1.5 Organização do texto . . . . .	11
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>11</b>
<b>2 Fisiologia da Variabilidade da Frequência Cardíaca</b>	<b>13</b>
2.1 Controle Neural da Frequência Cardíaca . . . . .	16
2.2 O Sinal de Variabilidade da Frequência Cardíaca . . . . .	19
<b>3 Ferramentas aplicadas à síntese e análise do sinal de VFC</b>	<b>23</b>
3.1 Sistemas . . . . .	23
3.2 Análise topológica . . . . .	25
3.2.1 Diagrama de bifurcações . . . . .	25
3.2.2 Dinâmica simbólica . . . . .	27

3.3	Entropia . . . . .	34
3.3.1	Entropia de Shannon . . . . .	34
3.3.2	Entropia Aproximada . . . . .	39
3.4	Leis de Potência . . . . .	41
3.4.1	Análise de flutuações com tendências excluídas . . . . .	42
3.5	Uma representação probabilística para o sinal de variabilidade da frequência cardíaca . . . . .	44
3.6	Representações não-lineares . . . . .	47
3.6.1	Identificação de modelos NARMAX polinomiais . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Materiais e Métodos</b>	<b>51</b>
4.1	Sistemas e sinais estudados . . . . .	51
4.1.1	Os sistemas . . . . .	51
4.1.2	Os Sinais . . . . .	55
4.2	Modelagem dos Sinais de Variabilidade da Frequência Cardíaca	56
4.2.1	Entrada sintética . . . . .	58
4.2.2	Obtenção dos modelos NARMAX polinomiais . . . . .	65
4.2.3	Síntese e validação . . . . .	67
4.3	Descrição do algoritmo do procedimento de modelagem . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>73</b>
5.1	Sistemas dinâmicos . . . . .	73
5.1.1	O mapa logístico . . . . .	73
5.1.2	O sistema de Rössler . . . . .	79
5.1.3	O mapa de Hénon . . . . .	82
5.2	Séries de variabilidade da frequência cardíaca . . . . .	85
5.2.1	Série 1 . . . . .	85
5.2.2	Série 2 . . . . .	97
5.2.3	Resumo do uso dos parâmetros de ajuste dos modelos para séries de VFC . . . . .	110
5.2.4	Análise estatística dos resultados . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Discussão</b>	<b>115</b>
6.1	Aplicação da metodologia nos sistemas dinâmicos . . . . .	116
6.2	Aplicação da metodologia nas séries de variabilidade da frequência cardíaca . . . . .	118
6.3	Algumas observações . . . . .	122

<b>7</b>	<b>Conclusões e propostas de continuidade</b>	<b>125</b>
7.1	Propostas de continuidade . . . . .	126
	<b>Bibliografia</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice A</b>	<b>139</b>
A.1	Fundamentos Teóricos em Dinâmica Não-Linear . . . . .	139
A.1.1	Seção de Poincaré e mapa de primeiro retorno . . . . .	139
A.1.2	Pontos fixos . . . . .	148
A.1.3	Bifurcações . . . . .	150
A.1.4	Atratores Estranhos . . . . .	156
A.1.5	Fundamentos teóricos em Dinâmica Simbólica . . . . .	159



---

---

# Resumo

---

Este trabalho trata do estudo de sinais de variabilidade da frequência cardíaca (VFC). Estes sinais, que correspondem à variação instantânea da frequência cardíaca, vem sendo estudados de forma crescente nas últimas três décadas, seja como o foco do estudo, seja como instrumento auxiliar no estudo do sistema cardiovascular.

Até o final da década de oitenta as ferramentas empregadas no estudo das séries de VFC eram predominantemente alguns índices estatísticos, como o desvio padrão, e o espectro de potências; estas ferramentas ainda continuam sendo largamente empregadas. A partir do fim da década de oitenta, instrumentos de análise de dinâmica não-linear, que eram utilizadas em quantidades pouco expressivas, passaram a ganhar destaque importante na literatura.

Nesse período, o sinal de VFC já foi investigado como sendo puramente aleatório, bem como sendo possuidor de dinâmica determinística. A partir desse histórico, este trabalho tem por objetivo geral investigar o sinal de VFC por meio de modelagem matemática, considerando-o como um sinal que apresenta uma dinâmica determinística imersa em uma importante componente estocástica. De maneira específica, objetiva-se apresentar um procedimento de modelagem que possibilite obter modelos que considerem os aspectos dinâmicos e estocásticos dos sinais de VFC, que, quando iterados, apresentem flutuações sustentadas e semelhantes às do sinal original em algum aspecto e que sejam capazes de assimilar algo da dinâmica subjacente.

A representação matemática escolhida para os modelos foi a NARMAX polinomial. Devido às características dos sinais de VFC fez-se necessário à construção de um sinal artificial para ser usado como entrada exógena nos modelos NARMAX. Antes de aplicar o procedimento de modelagem nas séries de VFC e a fim de validá-lo, o mesmo foi aplicado a três sistemas dinâmicos conhecidos na literatura, o mapa logístico, o sistema de Rössler e o

mapa de Hénon. São apresentados, neste trabalho, os resultados dos estudos de duas séries de VFC de 24 h de duração, de um mesmo indivíduo considerado estar em bom estado de saúde. Para validar os resultados obtidos para as séries de VFC foram utilizados índices clássicos no estudo desses sinais, como o SDNN e também índices não-lineares como entropia aproximada, o DFA (*detrended fluctuation analysis*) e dinâmica simbólica.

Os resultados mostraram-se promissores, pois tanto na etapa de validação do procedimento de modelagem, isto é, quando aplicado aos sistemas dinâmicos, quanto no estudo das séries de VFC os modelos obtidos foram capazes de aproximar dos sistemas originais tanto no aspecto dinâmico quanto no aspecto estocástico. Neste fato reside a contribuição desta tese, ou seja, apresentar um procedimento de modelagem que seja capaz de aproximar os modelos dos sistemas originais tanto no aspecto determinístico quanto no aspecto estocástico.

---

---

# Abstract

---

This work deals with the study of heart rate variability (HRV). These signals corresponds to the instantaneous variation of the cardiac frequency, has been studied increasing in last three decades, either as the focus of the study, either as auxiliary subject in the study of the cardiovascular system.

Until the late eighties the tools used in the study of the HRV series were predominantly some statistical indices, as the standard deviation, and the power spectrum; these tools still being wide employed. From the late eighties, some tools of nonlinear dynamics had started to gain important prominence in literature.

In this period, the HRV signal was yet investigated as being purely random, as well as having deterministic dynamics. From this, this work has as general objective to investigate the signal of HRV by means of mathematical modeling, considering it as a signal that presents an deterministic dynamics embedded in an important random component. In specific, the objectives are to present a modeling procedure that makes possible to get models that consider the dynamic and random aspects of the HRV signals, that, when iterated, present supported fluctuations and that to be similar to the original signals in some aspect and that they are capable to assimilate something of the underlying dynamics.

The chosen mathematical representation for the models was the polynomial NARMAX. Due to the characteristics of the HRV signals was necessary to construct an artificial signal to be used as exogenous variable in NARMAX models. Before applying the modeling procedure on the HRV series and in order to validate it, it was applied on three known dynamical systems in literature, they are the logistic map, the Rössler's system and the Hénon's map. It is presented, in this work, the results of the studies of two HRV series of 24 h duration, of the same volunteer with good health. To validate the

results from the HRV series, classical indices in the study of these signals had been used, like SDNN and also nonlinear indices like approximated entropy, DFA (*detrended fluctuation analysis*) and symbolic dynamics.

The results shows to be promising, because either in the validation stage of the modeling procedure, i.e., when the modeling procedure was applied to the dynamical systems, either in the study of the HRV series, the obtained models had been capable of to assimilate in some way the original system either in dynamical aspect either in the stochastic aspect. This facts shows the contribution of this thesis.

---

---

# Lista de Abreviaturas e Símbolos

---

---

## Abreviaturas

bpm	batimentos por minuto
DFA	<i>Detrended Fluctuation Analysis</i>
DMV	Núcleo dorsal motor do vago
ECG	Eletrocardiograma
ERR	Razão de redução do erro ( <i>Erro Reduction Ratio</i> )
EMQ	Estendido de Mínimos Quadrados
HF	Faixa de frequências altas ( <i>High Frequency Band</i> ) da densidade de potência espectral do sinal de VFC: 0,15 a 1,2Hz para ratos e 0,15 a 0,4Hz para humanos
HRV	<i>Heart Rate Variability</i>
LF	Faixa de frequências baixas ( <i>Low Frequency Band</i> ) da densidade de potência espectral do sinal de VFC: 0,04 a 0,15Hz para ratos e humanos
NA	Núcleo Ambíguo
NARMA	Auto-regressivo de média móvel não-linear ( <i>Nonlinear Autoregressive Moving Average</i> )
NAV	Nódulo atrioventricular
NN	Intervalos RR normais ( <i>Normal-to-Normal RR intervals</i> ): são aqueles gerados pelo nódulo sinoatrial
NSA	Nódulo sinoatrial (marcapasso natural do coração)
NTS	Núcleo do trato solitário
PSD	Densidade de potência espectral ( <i>Power Spectral Density</i> )
QRS	Complexo das ondas Q, R e S do eletrocardiograma; caracteriza a contração do ventrículo cardíaco

RMSE	Raiz quadrada do erro quadrático médio ( <i>Root Mean Square Error</i> )
RR	Intervalo de tempo entre duas ondas R sucessivas do ECG; é um estimador da duração do batimento cardíaco;
$RR_m$	Intervalo RR médio
SNA	Sistema Nervoso Autônomo
SNC	Sistema Nervoso Central
SNPs	Neurônios pré-gaglionares simpáticos
VLF	Faixa de freqüências muito baixas ( <i>Very Low Frequency Band</i> ) da densidade de potência espectral do sinal de VFC: 0,003 a 0,04Hz para ratos e humanos
VFC	Variabilidade da Freqüência Cardíaca
ULF	Faixa de freqüências ultra baixas ( <i>Ultra Low Frequency Band</i> ) da densidade de potência espectral do sinal de VFC: menor que 0,003Hz para ratos e humanos

## Símbolos

$\alpha$	Índice de correlação do método DFA
$\alpha_1$	Índice de correlação do método DFA
$\alpha_2$	Índice de correlação do método DFA
$F^\ell$	Função genérica com grau de não-linearidade $\ell$
$F(n)$	Flutuações em diferentes escalas calculadas pelo método DFA
$y(k - i)$	Regressor de saída
$u(k - j)$	Regressor de entrada
$e(k)$	Incerteza matemática
$n_y$	Máximo valor de um regressor de saída de um modelo
$n_{y\max}$	Máximo valor de $n_y$ na procura heurística de modelos, tal que $n_y = (1, 2, \dots, n_{y\max})$
$n_u$	Atraso do regressor de entrada
$n_e$	Máximo atraso do regressor de ruído
$n_{e\max}$	Máximo valor de $n_e$ na procura heurística de modelos, tal que $n_e = (1, 2, \dots, n_{e\max})$
$k$	Tempo discreto
$\theta$	Vetor de parâmetros
$\xi(k)$	Erro de modelagem
$g_i$	Parâmetros ortogonais
$g$	Vetor de parâmetros ortogonais
$w_i$	Regressor ortogonal
$w$	Matriz de regressores ortogonais
$J$	Função custo genérica
$n_t$	Número de termos de processo
$\phi$	Valor crítico utilizado para determinar o número de graus de liberdade para o critério AIC

$\Psi$	Matriz de regressores
$pNN50$	Proporção ou número de intervalos RR normais em humanos que são maiores que 50ms
$RMSSD$	Raiz quadrada do valor quadrático médio das diferenças sucessivas entre intervalos RR normais
$SDANN$	Desvio padrão das médias dos intervalos RR normais de segmentos de 5min
$SDNN$	Desvio padrão dos intervalos RR normais
$\hat{\phantom{x}}$	Valor estimado
$\nu$	Ruído branco
$\nu(k - i)$	Regressor de ruído em um modelo NARMAX
$\mathbf{I}$	Matriz Identidade
$t$	Tempo contínuo
$T_s$	Tempo de amostragem
$\ln$	Logaritmo na base $e$
$\mathbb{Z}^+$	Espaço dos números inteiros positivos
■	Indica o fim de um exemplo

---

# Lista de Tabelas

---

5.1	Índices do domínio do tempo. . . . .	89
5.2	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	89
5.3	Índices do domínio do tempo. . . . .	91
5.4	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	92
5.5	Índices do domínio do tempo. . . . .	94
5.6	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	95
5.7	Índices do domínio do tempo. . . . .	96
5.8	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	96
5.9	Índices do domínio do tempo. . . . .	99
5.10	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	100
5.11	Índices do domínio do tempo. . . . .	101
5.12	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	101
5.13	Índices do domínio do tempo. . . . .	104
5.14	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	104
5.15	Índices do domínio do tempo. . . . .	105
5.16	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	105
5.17	Índices do domínio do tempo. . . . .	107
5.18	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	108
5.19	Índices do domínio do tempo. . . . .	109
5.20	Índices dinâmicos e de complexidade. . . . .	109
5.21	Resumo dos resultados. . . . .	111
5.22	Resultados referentes ao <i>teste t</i> . . . . .	112
5.23	Resultados referentes ao teste de <i>Mann-Whitney</i> . . . . .	113



---

---

# Lista de Figuras

---

---

1.1	Número de artigos que fazem referência à variabilidade da frequência cardíaca entre os anos de 1987 e 2007 (Fonte: ISI WEB OF SCIENCE, setembro de 2007). . . . .	3
1.2	Janela de uma série de VFC e saída de uma modelo NARMA. . . . .	10
2.1	Sinal de VFC . . . . .	20
3.1	Diagrama de bifurcações do mapa logístico. As setas indicam a ocorrência de algumas bifurcações. . . . .	26
3.2	Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler. Parâmetros de bifurcação: $(a,b,c) = (0,492; 2; 4)$ . . . . .	30
3.3	Solução do comportamento caótico do mapa logístico: (a) com $\mu = 3,9$ , (b) com $\mu = 3,9999$ . O ponto crítico está localizado no ponto de máximo da parábola, isto é, $x_C = 0,5$ para qualquer valor de $\mu$ . . . . .	32
3.4	Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos, com $q = 2$ e $n = 6$ : (a) $\mu = 3,9$ , (b) $\mu = 3,9999$ . . . . .	32
3.5	Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos gerados com $\mu = 3,9999$ , com $q = 3$ e $n = 4$ . . . . .	33
3.6	Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos de ruído branco: (a) com $q = 2$ e $n = 6$ , (b) com $q = 3$ e $n = 4$ . . . . .	34
3.7	Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos do mapa logístico com $\mu = 3,9999$ . Foram usados $q = 2$ , $n = 6$ e os pontos de partição: (a) $x_k = 0,5$ ( $S = 4,14$ ), (b) $x_k = 0,4$ ( $S = 3,84$ ) e (c) $x_k = 0,6$ ( $S = 3,85$ ). . . . .	37
3.8	Mapa de primeiro retorno de uma série de VFC de 10.000 pontos. . . . .	38

3.9	Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 de uma série de VFC. Foram usados $q = 3$ , $n = 4$ e os pontos de partição: (a) $x_{1_k} = 0,93$ e $x_{1_k} = 0,97$ ( $\mathcal{S} = 3,35$ ), (b) $x_{1_k} = 0,96$ e $x_{1_k} = 1,0$ ( $\mathcal{S} = 3,87$ ) e (c) $x_{1_k} = 0,99$ e $x_{1_k} = 1,06$ ( $\mathcal{S} = 3,31$ ). . . . .	38
3.10	Mapa de primeiro retorno de uma série de VFC de 10.000 pontos, com a atribuição dos símbolos. . . . .	39
3.11	Série de batimentos cardíacos usada no exemplo (DFA). . . . .	42
3.12	Série de batimentos cardíacos integrada (DFA). . . . .	43
3.13	$S(f)$ , espectro de potência construído por meio das equações (3.10) e (3.11), que constitui-se de duas distribuições Gaussianas centradas em $f_{LF} = 0,0445$ Hz e $f_{HF} = 0,28$ Hz. . . . .	46
3.14	(a) Série sintética $\tilde{s}_k$ construída por meio do procedimento de McSharry e colegas (2002). (b) Espectro de potência da série $\tilde{s}_k$ . . . . .	47
4.1	Mapas de primeiro retorno: (a) $x_k$ e (b) $y_k$ . . . . .	53
4.2	Mapas de primeiro retorno: (a) $x_k$ e (b) $y_k$ . . . . .	54
4.3	Mapas de primeiro retorno: (a) $x_k$ e (b) $y_k$ . . . . .	55
4.4	Esquema clássico da chamada identificação caixa-preta de sistemas SISO ( <i>single input single output</i> ). De posse dos dados medidos de entrada e saída de determinado sistema, tenta-se encontrar um modelo, ou uma família de modelos, que represente, de forma aproximada, as relações de causa e efeito. . . . .	57
4.5	Ilustração do processo de identificação de um modelo para o caso de sistema autônomo. Nesse caso, o modelo é obtido somente a partir de dados de saída $y(k)$ . . . . .	57
4.6	Identificação de sistemas em que a construção de um sinal de entrada sintética também faz parte do problema da modelagem. . . . .	58
4.7	(a) Série de VFC de 5 min com 306 pontos. (b) Espectro de potência da série de VFC. Destacam-se as bandas de frequência LF e HF, e as respectivas frequências $f_{LF} = 0,0445$ Hz e $f_{HF} = 0,28$ Hz, escolhidas como sendo os maiores picos em cada uma das bandas. . . . .	61
4.8	(a) Entrada sintética $\tilde{u}_k$ (sem fase ajustada) construída por meio do procedimento apresentado na Seção 3.5. (b) Entrada sintética $u_k$ (com fase ajustada) construída a partir das séries $\tilde{u}_k$ e de VFC, por meio do procedimento apresentado nesta seção. . . . .	62

4.9	(a) Espectro de potência da série de VFC (—) sobreposto pelo espectro de potência de $\tilde{u}_k$ (-.-). (b) Espectro de potência de $\tilde{u}_k$ (—) sobreposto pelo espectro de potência de $u_k$ (-.-). . . . .	62
4.10	(a) Função de correlação cruzada entre $\tilde{u}_k$ e a série de VFC. Índice de correlação: 0,16. (b) Função de correlação cruzada entre $u_k$ e a série de VFC. Índice de correlação: 0,40. . . . .	63
4.11	(a) Entrada sintética $u_k$ construída de maneira a satisfazer os requisitos estabelecidos nesta seção. (b) Espectro de potência de $u_k$ (-.-) construído nesta seção, em comparação ao espectro de potência da série de VFC (—). . . . .	65
4.12	Função de correlação cruzada entre $u_k$ e a série de VFC. . . . .	65
5.1	Mapas de primeiro retorno. Os círculos correspondem aos dados originais ( $z_k = y_k$ ) e os pontos à série temporal ( $z_k = \hat{y}_k$ ) obtida pela iteração do modelo 5.2. Se fossem indicadas, as iterações do modelo 5.1 seriam justamente dois pontos nesse gráfico. . . . .	76
5.2	Diagramas de bifurcações de (a) equação logística, e (b) modelo identificado (5.2) para $u_k = 0,6054, \forall k$ . O parâmetro de bifurcações $\mu$ foi tomado como o coeficiente do termo $y_{k-1}$ do modelo, e $\mu = \lambda$ para a logística. . . . .	77
5.3	Mapas de primeiro retorno de (a) modelo 5.2 ( $\mu = 1,9843$ ) incluindo modelo de ruído $\mathcal{E}(\xi)$ com $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1828)$ e $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0193)$ . Para esse caso $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,28$ ; (b) modelo 5.2 mas com o coeficiente de $y_{k-1}$ igual a 2,21, ou seja, $\mu = 2,21$ incluindo modelo de ruído $\mathcal{E}(\xi)$ com $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1263)$ e $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0198)$ . Para esse caso $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,39$ . Círculos pretos são os dados originais e os pontos vermelhos são os dados produzidos pelo modelo. . . . .	78
5.4	Mapa de primeiro retorno da série $y_k$ obtida a partir do sistema de Rössler, conforme a Seção 4.1.1. . . . .	79
5.5	Mapas de primeiro retorno de: (círculos) os dados originais, e (pontos) da série produzida pela iteração do modelo 5.5. . . . .	81
5.6	Diagramas de bifurcações de (a) modelo 4.3 e (b) modelo 5.5. Em ambos os casos o parâmetro do termo $y_{k-1}$ foi usado como o parâmetro de bifurcação $\mu$ . Note-se as diferentes escalas. . . . .	81
5.7	Mapas de primeiro retorno do modelo 5.5 com $u_k \sim \mathcal{N}(-1,7910; 0,6381)$ , $\xi \sim \mathcal{N}(0,0; 0,2169)$ e $\mu = 2,5850$ fornecendo $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,64$ . . . . .	82

5.8	Mapas de primeiro retorno de (a) (sem ruído) mapa de Hénon (círculos) e do modelo 5.8 simulado sem $\mathcal{E}(\xi)$ e com $u_k \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 0,2586, \sigma_y^2 = 0,5712)$ (pontos vermelhos), e (b) mapa de Hénon (5.7) usado para construir o modelo (5.8)-(5.9). . . . .	83
5.9	Diagramas de bifurcações de (a) mapa de Hénon para $b = 0,3$ e (b) modelo 5.8 simulado sem $\mathcal{E}(\xi)$ e com $u_k = \bar{y} = 0,2586, \forall k$ . Em ambos os casos o parâmetro do termo $y_{k-1}^2$ foi usado como o parâmetro de bifurcação $\mu$ . . . . .	84
5.10	Série 1. Registro dos intervalos RR durante 24 h (114.972 amostras), de um voluntário com boa saúde (O registro teve início entre 11 h e meio dia). . . . .	86
5.11	Série S1a, que compreende os primeiros 10.000 intervalos RR da série S1 (Figura 5.10). . . . .	87
5.12	Séries usadas na indentificação de um modelo NARMAX polinomial: (a) entrada sintética (438 amostras) construída conforme Seção 4.2.1. (b) série de intervalos RR de 5 min (438 amostras) escolhida da Série S1a (Figura 5.11). . . . .	87
5.13	Mapas de primeiro retorno. Os círculos correspondem aos dados originais ( $z_k = y_k$ ) e os pontos à série ( $z_k = \hat{y}_k$ ) obtida por meio da iteração do modelo 5.10. . . . .	88
5.14	Histograma das seqüências descritas por: (a) S1a ( $\mathcal{S} = 3,008$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,033$ ). . . . .	89
5.15	Série S1b que compreende os intervalos RR de 31.001 a 41.000 da série S1 (Figura 5.10). . . . .	90
5.16	Séries usadas na identificação de um modelo NARMAX polinomial: (a) entrada sintética (380 amostras) construída conforme Seção 4.2.1. (b) série de intervalos RR de 5 min (380 amostras) escolhida da Série S1a (Figura 5.15). . . . .	90
5.17	Histograma das seqüências descritas por: (a) S1b ( $\mathcal{S} = 3,21$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,11$ ). . . . .	92
5.18	Série de intervalos RR denominada S1c e compreendida entre as amostras 80.679 e 90.678 da Série S1. . . . .	93
5.19	Séries usadas na construção de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 304 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração. . . . .	93
5.20	Histograma das seqüências descritas por: (a) S1c ( $\mathcal{S} = 3,87$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,79$ ), após os ajustes, isto é, modelo 5.16, (c) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,17$ ), antes dos ajustes, isto é, modelo 5.14. . . . .	96

5.21	Série 2. Registro dos intervalos RR durante 24 h (115.893 amostras), de um voluntário com boa saúde (O registro teve início entre 11 h e meio dia).	97
5.22	Série de intervalos RR denominada S2a e compreendida entre as amostras 4.001 e 14.000 da Série S2.	98
5.23	Séries usadas na construção de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 456 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.	98
5.24	Histograma das seqüências descritas por: (a) S2a ( $\mathcal{S} = 3,21$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,11$ ).	101
5.25	Série de intervalos RR, S2b, compreendida entre as amostras 42.701 a 52.700 da Série S2 (Figura 5.21).	102
5.26	Séries usadas na identificação de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 368 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.	103
5.27	Histograma das seqüências descritas por: (a) S2b ( $\mathcal{S} = 3,69$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,68$ ).	105
5.28	Série de intervalos RR, S2c, compreendida entre as amostras 68.001 a 78.000 da Série S2 (Figura 5.21).	106
5.29	Séries usadas na identificação de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 310 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.	107
5.30	Histograma das seqüências descritas por: (a) S2c ( $\mathcal{S} = 3,89$ ), (b) $\hat{y}$ ( $\mathcal{S} = 3,73$ ).	109
5.31	Série de intervalos RR, S2c, compreendida entre as amostras 68.001 a 78.000 da Série S2 (Figura 5.21).	110
6.1	Diagramas de bifurcação de (a) modelo 5.1, e (b) modelo 5.4. Em ambos os casos o parâmetro do termo $y_{k-1}$ foi usado como o parâmetro de bifurcação $\mu$ .	116
6.2	Entropia aproximada (na parte de baixo da figura) e entropia de Shannon (na parte de cima da figura) calculadas para séries originais (–) e para séries $\hat{y}$ (-.-) geradas pelos modelos. As série estão enumeradas de 1 a 6, obedecendo a ordem de apresentação do Capítulo 5.	120
6.3	Variação dos índices $\alpha$ (a) e $\alpha_2$ (b) para as séries S1 (-.-) e S2 (-o-), observando-se a ordem cronológica das três janelas das respectivas séries.	123

6.4	Variação do índice $\alpha_1$ para as séries S1 (-.-) e S2 (-o-), observando-se a ordem cronológica das três janelas das respectivas séries. . . . .	123
6.5	Componentes de ultra baixa frequência das séries S1 (-) e S2 (-.-), que foram filtradas com um filtro passa-baixas com frequência de corte 0,003 Hz. . . . .	124
A.1	Atrator caótico do sistema de Rössler: (a) retrato de fases. (b) seção de Poincaré cujo sentido de passagem escolhido verifica a condição $\dot{y} > 0$ ( $y$ crescente). Parâmetros de bifurcação: $(a,b,c) = (0,43; 2; 4)$ . . . . .	144
A.2	Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler. Parâmetros de bifurcação: $(a,b,c) = (0,43; 2; 4)$ . . . . .	146
A.3	Propriedades topológicas associadas ao ramo crescente do mapa de primeiro retorno. . . . .	147
A.4	Propriedades topológicas associadas ao ramo decrescente do mapa de primeiro retorno. . . . .	148
A.5	Foco estável obtido como solução de um sistema de segunda ordem cujas variáveis, a partir de condições iniciais fornecidas, evoluem em direção ao ponto fixo. . . . .	150
A.6	Indicação da condição de surgimento de uma bifurcação de duplicação de período no círculo de raio unitário no plano complexo. . . . .	154
A.7	Evolução das soluções do mapa logístico em função do parâmetro de bifurcação. Quando $\mu$ está contido no intervalo $1 < \mu < 3$ , o ponto fixo encontra-se na região de estabilidade. Quando $\mu$ se iguala a 3, o avalor associado ao ponto fixo se iguala a -1 e, então, ocorre uma bifurcação de duplicação de período. . . . .	156
A.8	Atrator de Rössler. . . . .	158
A.9	Atrator de Rössler ampliado. (—) Condição inicial 1. (-.-) Condição inicial 2. . . . .	158
A.10	Evolução temporal de um dos estados do atrator de Rössler para duas condições iniciais distintas, mas muito próximas. . . . .	159

# INTRODUÇÃO

---

*“ Mestre, qual é o maior mandamento da Lei? Ele lhe disse: Amarás o Senhor teu Deus, com todo teu coração, com toda tua alma e com toda tua mente. Este é o maior e o primeiro mandamento. Mas o segundo é semelhante a este: Amarás o próximo como a ti mesmo. Destes dois mandamentos dependem toda a Lei e os Profetas.”*

Mateus 22,36-40.

A busca do entendimento acerca do controle exercido sobre o organismo humano vem de longa data. Os conceitos de que o estado corporal é controlado no sentido de permanecer em equilíbrio, conhecido por *homeostase*, e que uma parte importante desse controle, retroalimentado, é feito pelo sistema nervoso autônomo por meio do hipotálamo, foram introduzidos por Cannon (1932). Daí também, vem a idéia do organismo responder adequadamente tanto a necessidades como as de ataque ou fuga, quanto às de descanso e assimilação (Kandel e colegas, 2000).

Dentre as diversas variáveis a serem controladas, no sentido de atender ao organismo em suas necessidades mais variadas, está o débito cardíaco. O *débito cardíaco* é a quantidade de sangue bombeada por minuto, e é o produto da frequência cardíaca pelo volume de sangue bombeado a cada batimento do coração. O desempenho do miocárdio, propriamente dito, não constitui o objeto de estudo deste trabalho.

Portanto, o débito cardíaco pode ser controlado por meio da variação da frequência cardíaca. O principal controle da frequência cardíaca é exercido pelo *sistema nervoso autônomo* (SNA). À variação instantânea da frequência cardíaca atribuiu-se o termo *variabilidade da frequência cardíaca* (VFC).

O controle autonômico sobre a frequência cardíaca vem sendo estudado ao longo de décadas. Esses estudos evidenciam a busca do entendimento de como esse controle é exercido e como os principais componentes do SNA se interagem de forma a produzir os efeitos e resultados esperados (Rosenblueth e Simeone, 1934; Hutter e Trautwein, 1956; Levy e Zieske, 1969; Kleiger e colegas, 1987; DiFrancesco, 1993; Malik e Camm, 1995; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Guimarães, 1996; Berntson et al., 1997; Gomes e colegas, 2000; Huikuri e colegas, 2003; Cerutti e colegas, 2007). Muito já foi descoberto, tanto a respeito do sistema nervoso em si, quanto de sua relação com o sistema cardiovascular. Sabe-se que uma das principais divisões do SNA, a *simpática*, governa reações como ataque e fuga, e que outra, a *parassimpática*, é responsável pelo descanso e assimilação. Sabe-se também, que quando a pressão arterial se eleva em condições normais de repouso, há um desencadeamento de reações que levam a uma diminuição da frequência cardíaca, com o objetivo de se diminuir a pressão arterial para os valores dentro dos padrões normais (Kandel e colegas, 2000; Berne e Levy, 1997).

Nesse sentido, o sinal de VFC, uma série temporal de intervalos sucessivos entre batimentos cardíacos, normalmente caracterizada pela sucessão dos intervalos de tempo entre as ondas R (intervalos RR) do eletrocardiograma (ECG), tem recebido atenção crescente a cada ano nas últimas décadas (Figura 1.1) (Sayers, 1973; Pagani, 1999). Principalmente após ser considerada como importante previsor dos riscos de morte súbita em pacientes que sofreram infarto agudo do miocárdio (Kleiger e colegas, 1987; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Huikuri e colegas, 1998; Mäkikallio e colegas, 2001). Esta série reflete as interrelações entre os diversos sistemas biológicos envolvidos na regulação da função cardiovascular, e a sua análise ainda motiva o desenvolvimento de técnicas não-invasivas para o estudo da fisiologia e doenças do sistema cardiovascular (Cerutti e colegas, 2007; Kantelhardt e colegas, 1991; Sakhuja e colegas, 2007; Sztajzel, 2004; Nikolopoulos e colegas, 2003; Oliveira, 2002; Francis e colegas, 2002; Gomes, 2001; Mäkikallio e colegas, 2001; Lombardi, 2000; Huikuri e colegas, 1999; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996). Para isso, muitas ferramentas de diversas áreas têm sido utilizadas, como métodos estatísticos (Kleiger e colegas, 1987; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American

Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Mäkikallio e colegas, 2001), espectro de potência (Akselrod e colegas, 1981; Montano e colegas, 1994; Goren e colegas, 2006; Belova e colegas, 2007) e índices não-lineares (Kobayashi e Mushua, 1982; Pincus, 1991; Peng e colegas, 1995; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Lombardi e colegas, 1996; Voss e colegas, 1996; Huikuri e colegas, 1998; Signorini e Cerutti, 1999; Signorini e colegas, 1999; Gomes e colegas, 2000; Lombardi, 2000; Souza, 2001; Francis e colegas, 2002; Souza, 2002; Huikuri e colegas, 2003; Laitio e colegas, 2006; Bär e colegas, 2007; Maestri e colegas, 2007; Porta e colegas, 2007), bem como ferramentas da área da modelagem, que tem sido consideradas terem um papel importante no prosseguimento dos estudos de sinais de VFC (Wessel e Kurths, 2007; Cerutti e colegas, 2006). Mas, de fato, esses mecanismos reguladores e o comportamento dinâmico subjacente ainda precisam ser melhor compreendidos (Wessel e Kurths, 2007).

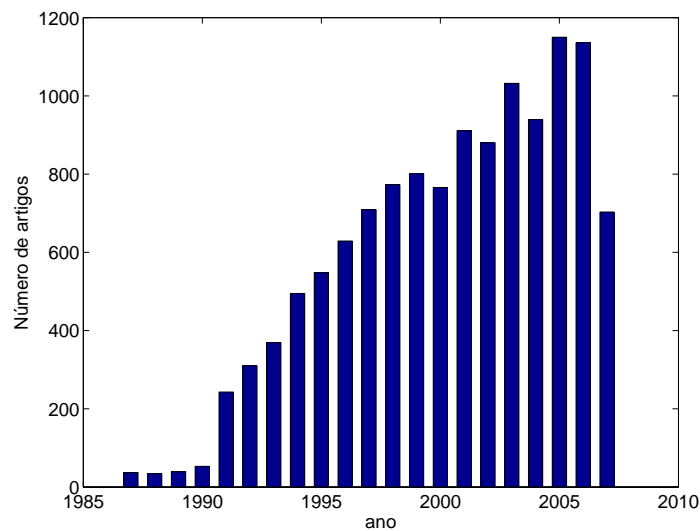


Figura 1.1: Número de artigos que fazem referência à variabilidade da frequência cardíaca entre os anos de 1987 e 2007 (Fonte: ISI WEB OF SCIENCE, setembro de 2007).

## 1.1 Modelos Aplicados ao Sistema Cardiovascular e aos Sinais de Variabilidade da Frequência Cardíaca

Segundo Aguirre (2004), os modelos, mesmo que implicitamente, estão presentes no funcionamento, no aprendizado, enfim, na vida do ser humano. Nesse contexto, o autor fala da construção de modelos mentais. Por exemplo, quando falta energia elétrica durante a noite, estando em sua casa, ou local familiar, o ser humano é capaz de se locomover por esse local com certa facilidade, mesmo no escuro. Isso se deve ao fato de existir um modelo mental já construído daquele local, o mesmo não aconteceria em um ambiente estranho.

Modelos são fundamentais para o conhecimento, para a análise de sistemas e processos reais. Dentre as várias formas de se implementar, de se construir modelos, há situações ou aplicações nas quais é útil dispor de modelos que possam ser representados por relações matemáticas. Um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas características observadas em tal sistema. A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais. A identificação de sistemas é a área que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática (Aguirre, 2004).

Os modelos são utilizados nos diversos campos do conhecimento, por motivos e finalidades diferentes. É, portanto, importante ter clareza quanto a questões, tais como: *i*) qual é a finalidade do modelo? Para que o modelo servirá? *ii*) Quais características do sistema devem ser aproximadamente reproduzidas pelo modelo? É importante também, não perder de vista que o modelo é apenas uma aproximação da realidade e, por melhor que seja, não é a própria realidade.

Com as ciências biológicas não é diferente no que diz respeito ao uso de modelos. Por exemplo, Panerai e colegas (2004) utilizaram redes neurais para modelar a relação dinâmica entre a pressão do sangue arterial e a velocidade do fluxo sanguíneo no cérebro. Restringindo-se este mui vasto campo e atendo-se ao sistema cardiovascular, que por si só é rico em minúcias, complexidade e engenhosidade, tem-se, por exemplo, o trabalho de Bassani et al. (1996), que utiliza um modelo que foi proposto para descrever o fluxo de  $C_a^{2+}$  durante o acoplamento excitação-contração em células cardíacas. E ainda, o

modelo de Van der Pol para descrever os batimentos cardíacos (Van der Pol, 1927).

O periódico *International Journal of Bifurcation and Chaos* (IJBC) dedicou um número inteiro (vol. 13(12), 2003) à modelagem do coração. Trata-se da construção de modelos de tecidos e órgãos, a partir de modelos e do conhecimento a respeito do comportamento das células individuais, por meio de computação gráfica e numérica.

A célula é o elemento básico do tecido virtual. Segundo o Editorial, a ciência não-linear pode fornecer a cooperação interdisciplinar que possibilitará uma transformação do conhecimento dos sistemas biológicos e de processos em modelos realísticos de tecidos e órgãos, e também, ferramentas computacionais e de visualização; os modelos celulares seguem na direção de sistemas de equações diferenciais não-lineares de alta ordem, que descrevem correntes de membrana, mudanças de concentrações iônicas intra e extra-celulares.

Foi destacado como objetivo imediato da construção do tecido cardíaco virtual, fornecer uma estrutura computacional, firmemente baseada na ciência não-linear, que pode ligar a ciência quantitativa básica com dados clínicos.

Dentre os trabalhos que compõem o referido volume do IJBC, há um que usa modelos matemáticos e computacionais na busca do entendimento da regulação de  $\text{Ca}^{2+}$  nas células cardíacas, cujo processo de modelagem se baseia no conhecimento do processo (Zhang e colegas, 2003); outro trabalho usa um modelo das interações das proteínas responsáveis pelo desenvolvimento da tensão cardíaca, que em conjunto com modelos eletro-fisiológicos de músculos cardíacos, visa permitir a reconstrução de fenômenos eletro-mecânicos. Tal modelo é descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas e inclui informações detalhadas como a configuração das proteínas envolvidas. Seu desenvolvimento é baseado no conhecimento do processo, ou seja, caixa-branca (Sachse e colegas, 2003).

Há ainda, trabalhos que apresentam ambientes computacionais para modelagem, computação gráfica baseada em geometria (Garny e colegas, 2003; Chen e colegas, 2003). Biktashev (2003) usa um modelo matemático, baseado em equações diferenciais, para reproduzir o fenômeno da falha na propagação de uma onda de excitação em um nervo ou tecido cardíaco. Em geral, os modelos aí apresentados são construídos por meio de *modelagem caixa-branca*, também conhecida por *modelagem pela natureza ou física do processo*, em que geralmente não se constitui uma tarefa trivial. Pois, nesse caso, faz-se necessário um profundo conhecimento do sistema a ser modelado, além de

conhecer as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos (Garcia, 1997). Tais modelos são constituídos por sistemas de equações diferenciais que, em alguns casos, podem ser sistemas complexos e trazem os inconvenientes das derivações numéricas. O objetivo geral do emprego desses modelos é o entendimento dos mecanismos fisiológicos do coração.

A revista *Chaos*, em março de 2007, dedicou um número com trabalhos interessantes referentes estudo do sistema cardiovascular, com foco na análise, modelagem e aplicações médicas (Wessel e Kurths, 2007).

Há, na literatura, alguns trabalhos que fazem uso de modelos no estudo da VFC. Bennett e colegas (1993) e Christini e colegas (1995) empregam modelos AR e ARMA, entre outros, às séries de VFC. Yang e Liao (1997) usam *transformada wavelet* para construir um modelo de um sinal de VFC, e criar um algoritmo para fazer sua decomposição. No trabalho de Lin e Hughson (2001) são usados conceitos de leis de potência e de *turbulência totalmente desenvolvida* (Kolmogorov, 1941). Também no grupo MACSIN, tem-se feito uso de modelos no estudo de séries de VFC em alguns trabalhos. Os trabalhos de Gomes e colegas (2000), Gomes (2001) e Souza (2001) buscaram, além de modelar séries de VFC, verificar a presença de determinismo em tais séries. Oliveira (2002) buscou encontrar características de uma estrutura mais adequada para os modelos dedicados ao sinal de VFC, além de gerar séries sintéticas, com características similares às das séries reais, por meio desses modelos. (Vallverdú e colegas, 2003) usam modelos de Markov para modelar seqüências simbólicas de séries de VFC com o objetivo de distinguir séries do grupo controle (com boa saúde) e portadores de doença cardíaca. (McNamee e colegas, 2005) usam um sistema de inferência baseado em neuro-fuzzy para modelar e fazer predição de sinais de VFC, em comparação com modelos ARMA. (Wessel e colegas, 2006) utilizaram modelos NAAR (*nonlinear additive autoregressive*) para tentar melhorar a capacidade de diagnóstico baseado em séries curtas de VFC.

## 1.2 Motivação

As doenças do sistema cardiovascular figuram entre as principais causas de morte no mundo (WHO, 2003). Elas têm sido objeto de muitos estudos que buscam o conhecimento do sistema cardiovascular, das doenças associadas, e de suas conseqüências. Tais estudos têm dedicado especial atenção, nas duas últimas décadas, ao sinal de variabilidade da frequência cardíaca (VFC), pois há informações importantes sobre os mecanismos de regulação

da atividade cardíaca presentes neste sinal, como risco de morte súbita em pacientes que sofreram infarto agudo do miocárdio (Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Pagani, 1999).

Métodos lineares do domínio do tempo, de fácil implementação, aplicados à análise do sinal de VFC podem fornecer, entre outras, informações estatísticas como a variância, considerada como importante preditor de morte súbita após infarto agudo do miocárdio. Índices do domínio da frequência podem auxiliar na análise do controle neural do coração. Por meio da análise espectral do sinal de VFC pode-se verificar a existência de duas bandas de frequência entre as principais: baixa frequência (LF), associada à atividade simpática do sistema nervoso autônomo (há quem a associe também com a atividade parassimpática), e a alta frequência (HF), associada à atividade parassimpática. Conseqüentemente, a relação LF/HF reflete o balanço simpato-vagal (Akselrod e colegas, 1981; Montano e colegas, 1994; Lombardi e colegas, 1996; Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996). Mas os métodos do domínio do tempo e espectrais apresentam limitações, especialmente em relação a possíveis não-estacionariedades dos sinais (Mansier e colegas, 1996; Mäkikallio e colegas, 2001).

A constituição da VFC, determinada por interações complexas entre variáveis eletrofisiológicas, humorais, hemodinâmicas, além da regulação do sistema nervoso autônomo, resulta em um fenômeno não-linear. Muitos trabalhos apresentaram estudos empregando índices da dinâmica não-linear na análise do sinal de VFC, como medidas de dimensão, expoentes de Lyapunov, entropia, índice de determinismo, entre outros (Glass e colegas, 1987; Kaplan e colegas, 2007; Bär e colegas, 2007; Chen e colegas, 2007). Há pesquisadores que acreditam que uma abordagem não-linear determinística é mais apropriada para descrever um fenômeno mais complexo, pois um comportamento aparentemente irregular pode ser gerado mesmo por um sistema determinístico simples com estrutura não-linear (May, 1976; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Esses métodos diferem dos índices tradicionais de estimação da VFC, no sentido de que eles não se destinam a avaliar a magnitude da VFC, mas sim características do comportamento dinâmico da frequência cardíaca, que não podem ser verificados por métodos baseados em estatística (Gomes, 2001; Mäkikallio e colegas, 2001; Gomes e colegas, 2000; Huikuri e colegas, 1999; Guimarães, 1996; Lombardi e colegas, 1996).

No entanto, o cálculo desses invariantes dinâmicos requer um elevado número de observações de séries estacionárias, que dependendo do sistema, pode variar de unidades a dezenas de milhares (Aguirre e Billings, 1995; Eckmann e Ruelle, 1992). Séries biológicas com elevado número de amostras e consideradas estacionárias não são encontradas freqüentemente, então, o cálculo desses invariantes para séries não estacionárias pode conduzir a resultados não confiáveis (Huikuri e colegas, 2003).

Como conseqüência, existe uma busca por métodos que permitam uma análise não-linear valendo-se de um número menor de observações que sejam consideradas estacionárias, ou métodos que sejam robustos à não-estacionariedade (Peng e colegas, 1995; Pincus, 1991). Ademais, uma possível maneira de se contornar tais dificuldades seria por meio da geração de um sinal que apresentasse as características dinâmicas do sinal real e que fosse estacionário por construção (Oliveira, 2002; Oliveira e colegas, 2006).

Os trabalhos de Gomes e colegas (2000) e Gomes (2001) apresentaram uma investigação acerca da presença de determinismo nas séries de VFC, e verificaram uma assinatura determinística nessas séries. A partir daí, Oliveira e colegas (2002), Oliveira e colegas (2004) e Oliveira e colegas (2006) apresentaram um método de síntese de sinais de VFC por meio de modelos não-lineares identificados; mas esses mesmos trabalhos indicavam a necessidade de avanços em uma etapa importante desse método, o sinal de entrada artificial. Mas há também na literatura, trabalhos que estudaram o sinal de VFC como sendo puramente estocásticos, ou que representaram esses sinais com modelos probabilísticos (Amaral e colegas, 1999; Armoundas e colegas, 2002; McClintock e Stefanovska, 2002; Barbieri e Brown, 2006) No trabalho de McSharry e colegas (2002) é apresentado um método para geração de intervalos RR artificiais baseado em modelos probabilísticos, combinações entre partes determinística e estocástica, utilizando distribuições uniforme e normal. Utiliza informações da média, variância, das freqüências LF e HF e ainda, inclui tendências para simular as variações circadianas, no sentido de reproduzir um registro de VFC de 24 h realista. No entanto, não foi apresentado algum tipo de validação da série sintética comparada ao sinal real.

Aguirre e Billings (1995) mostram resultados que sugerem uma maneira viável de se estimar invariantes dinâmicos, como os supracitados, contornando-se fatores limitadores como quantidade, qualidade e estacionariedade insuficiente de dados, que é por meio da identificação de sistemas. Os resultados mostram que, em alguns casos, modelos NARMAX (nonlinear autoregressive

moving average with exogenous inputs) podem, em princípio, ser usados para gerar séries de dados tão longas quanto necessárias.

Este trabalho trata da modelagem de séries temporais no sentido de se ter uma descrição matemática da dinâmica subjacente e também como um algoritmo que é capaz de produzir dados com características similares. As técnicas de modelagem global podem ser divididas em duas categorias principais: identificação de modelos autônomos e de modelos não-autônomos.

Modelos autônomos são aqueles que não dependem explicitamente do tempo. Por outro lado, se o modelo é excitado por uma entrada externa, tal sinal é normalmente dependente do tempo, então sua inclusão no modelo torna-lo-á não autônomo.

Infelizmente, não é sempre possível encontrar modelos autônomos não-lineares que mantenham suas flutuações, especialmente quando os dados para os quais o modelo foi construído têm alta estocasticidade. Em tais situações dois resultados são comuns: ou o modelo se torna instável sob iteração (modelo no tempo discreto), ou o modelo converge para uma dinâmica simples como um ciclo limite ou um ponto fixo. A segunda opção é o que acontece ao se tentar modelar uma série de variabilidade da frequência cardíaca com um modelo autônomo, dado que nesse caso, não é possível medir o sinal de entrada do sistema.

Como motivação, considere a Figura 1.2 que mostra uma janela de dados de VFC juntamente com a saída de um típico modelo autônomo obtidos dos dados. Note como o modelo, após a inicialização, gradualmente converge para um valor constante. Em situações como esta, é um tanto complicado avaliar a dinâmica do modelo por meio da série gerada pelo mesmo.

Em muitas situações seria útil ser capaz de produzir uma seqüência mais longa de dados não triviais, por exemplo, para o caso de validar o modelo.

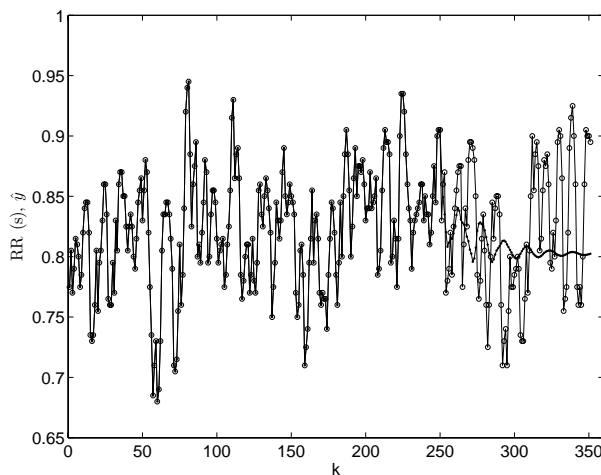


Figura 1.2: Janela de uma série de variabilidade da frequência cardíaca (círculos) e a saída de um típico modelo autônomo (pontos).

### 1.3 Objetivos

O presente trabalho apresenta uma metodologia de modelagem baseada em modelos NARMAX com entrada sintética com o objetivo de contornar as dificuldades apresentadas na Figura 1.2. De fato, objetiva-se obter um modelo que: 1) não venha a convergir para uma solução periódica, quando iterado, 2) que produza flutuações sustentadas que aproximem os dados originais em algum aspecto, e 3) que a parte autônoma seja capaz de assimilar algo da dinâmica subjacente.

A fim de validar o procedimento, antes de aplicá-los aos dados de VFC, três sistemas dinâmicos serão largamente estudados: a equação logística, o mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler e o mapa de Hénon.

### 1.4 Principais contribuições desta tese

A principal contribuição desta tese é apresentação de um procedimento de modelagem matemática baseado em modelos NARMAX. Tal procedimento é destinado, principalmente, a sistemas que possuem uma componente dinâmica imersa em uma importante componente estocástica e cujo sinal de entrada não possa ser medido. Há sistemas com essas características que quando modelados com modelos NARMA — o que seria natural nessas con-

dições — quando iterados, as saídas dos modelos tendem a uma solução periódica ou um ponto fixo após algumas observações.

Os modelos são construídos a partir das informações contidas nos dados, e o procedimento de modelagem pode ser aplicados tanto a sistemas teóricos quanto a sistemas físicos. Os resultados mostram que os modelos apresentam uma boa aproximação tanto no aspecto dinâmico quanto no aspecto estocástico.

Embora tenha sido desenvolvido para aplicação em sinais de VFC, o procedimento se mostrou, por meio de sua validação nos sistemas dinâmicos, ser de aplicação mais ampla. Além disso, ainda que tenha sido utilizada a função polinomial para os modelos NARMAX, outras funções também podem ser utilizadas, como as neurais, por exemplo.

## 1.5 Organização do texto

Este texto está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão sobre a fisiologia da variabilidade da frequência cardíaca. O Capítulo 3 apresenta uma revisão sobre sistemas dinâmicos e sobre algumas ferramentas e métodos usados seja no desenvolvimento do procedimento de modelagem apresentados nesta tese, ou seja na validação do mesmo, como: modelos NARMAX, entropia, dinâmica simbólica e as leis de potência. O Capítulo 4 é dedicado à apresentação detalhada do procedimento de modelagem aqui apresentado, e, também, das séries e sistemas dinâmicos estudados. O Capítulo 5 apresenta os resultados. Primeiro, os resultados da validação do procedimento de modelagem por meio de seu emprego no estudo de três sistemas dinâmicos, e em seguida os resultados obtidos para as séries de VFC. As discussões são apresentadas no Capítulo 6. O Capítulo 7 apresenta as conclusões e propostas de continuidade. O Apêndice A apresenta um complemento do Capítulo 3, no sentido de apresentar uma revisão mais detalhada e com mais exemplos de outros aspectos dos sistemas dinâmicos e da dinâmica simbólica.



# FISIOLOGIA DA VARIABILIDADE DA FREQUÊNCIA CARDÍACA

---

*“Porque a vida da carne está no sangue...”.*

Levítico 17,11.

A constituição e o funcionamento do organismo dos seres vivos são algo de extrema beleza. Sua fisiologia encanta ao manifestar tamanha inteligência e sabedoria pelas quais esses organismos estão harmonicamente concatenados. Causa admiração a sua capacidade inata de ações coordenadas no intento da manutenção de seu bem estar e de sua sobrevivência.

A idéia de que um organismo saudável encontra-se em equilíbrio e pode promover uma ação corretiva no caso da perturbação de seu estado normal remonta a Hipócrates (460 a 377 a.C.). Esse equilíbrio relaciona-se com a capacidade do organismo de manter condições estáveis do seu meio interno, ou seja, condições que podem variar dentro de determinada faixa, mas que é relativamente constante. A temperatura corpórea é um exemplo, que deve permanecer entre 36 e 37°C. Segundo o fisiologista Walter B. Cannon, os processos fisiológicos responsáveis pela manutenção da maior parte das condições estáveis no organismo são complexos e peculiares aos seres vivos — envolvendo o cérebro e os nervos, o coração, o pulmão, os rins, o baço, etc., e trabalham em cooperação. Ele resolveu sugerir uma designação especial para esses estados, *homeostase*<sup>1</sup> (Cannon, 1932). Mas foi Claud Bernard<sup>2</sup> (Bernard, 1999; Cannon, 1932) o primeiro a observar que o *meio interno* é um

---

<sup>1</sup>O termo *homeostase* tem sua origem no grego.

<sup>2</sup>Claude Bernard (12 de julho de 1813 — 10 de fevereiro de 1878) foi um médico e fisiologista francês. Foi considerado pelo Professor I. Bernard Cohen da Universidade de

fator de grande importância para o estabelecimento e manutenção da estabilidade do corpo. Bernard chegou a afirmar que todos os mecanismos vitais, por mais variados que sejam, têm apenas uma finalidade, manter constantes as condições de vida no meio interno.

Nesse sentido, o sistema nervoso tem o papel fundamental de exercer o controle sobre os demais órgãos, e o coração tem também papel fundamental na garantia do fluxo sanguíneo por todo o corpo. Portanto, o coração, ao mesmo tempo que tem seu ritmo controlado de acordo com as circunstâncias, auxilia na manutenção da homeostase, dado que o sangue é o objeto base das ações de controle.

O *sistema nervoso* é que permite um organismo interagir com seu ambiente, seja ele interno ou externo ao corpo. Tal sistema controla e coordena todos sistemas do organismo, além do que, ao receber estímulos provenientes da superfície do corpo, ele é capaz de interpretá-los e desencadear respostas adequadas a estes estímulos, mantendo um equilíbrio entre o meio externo com o meio interno (Berne et al., 1998; Dangelo e Fattini, 1995).

O sistema nervoso é composto de duas partes que são separadas anatômicamente, mas são interconectadas e interativas funcionalmente. Uma delas, o *sistema nervoso central* (SNC), é composta pelo *encéfalo* e pela *medula espinhal*, e é encarregado da recepção de estímulos, do comando e desencadeamento de respostas. A segunda parte, o *sistema nervoso periférico*, compreende os gânglios e os nervos periféricos situados fora do encéfalo e da medula espinhal, e constitui-se das vias que conduzem os estímulos ao SNC, ou que levam até os órgãos efetadores as ordens provenientes da parte central (Kandel e colegas, 2000; Dangelo e Fattini, 1995).

O sistema nervoso periférico é subdividido em duas partes: *somática*, que inclui neurônios sensoriais da raiz dorsal e neurônios de nervos craniais que inervam pele, músculos e juntas, e fornecem informações sensoriais para o sistema nervoso central a respeito dos músculos, membros e do ambiente externo ao corpo; e a parte *autônoma*, que inerva as vísceras, os músculos lisos<sup>3</sup>, o músculo cardíaco e as glândulas exócrinas<sup>4</sup>. Consiste de três partes espacialmente isoladas: *simpática*, *parassimpática* e o *sistema nervoso enté-*

---

Harvard como “um dos maiores homens de ciência de todos os tempos”. Seus principais trabalhos foram publicados entre 1848 e 1860.

<sup>3</sup>Músculo liso é um tipo de músculo não estriado, encontrado dentro da parede de órgãos ocos, como tubo digestivo e as artérias, entre outros.

<sup>4</sup>As glândulas exócrinas são aquelas que excretam seus produtos por meio de dutos ou canais, como as glândulas sudoríparas e as mamárias.

*rico*, que controla as funções do músculo liso do intestino (Kandel e colegas, 2000).

O *sistema nervoso autônomo* (SNA), também referido como *sistema neurovegetativo* (Cannon, 1932; Bear, 2002), é assim chamado pelo fato de suas funções serem normalmente executadas de forma automática, sem controle voluntário, mas são também altamente coordenadas (Bear, 2002; Kandel e colegas, 2000). Cannon sugeriu que as partes simpática e parassimpática desempenham papel primário na regulação do ambiente interno, e que a parte simpática governa reações como ataque e fuga, enquanto a parassimpática é responsável pelo descanso e assimilação.

O organismo, no cotidiano, está sujeito a estímulos seja do ambiente externo ou interno, que fazem com que o mesmo, em função da manutenção da homeostase, responda a tais estímulos. Situações de emergência, ou mesmo aquela corrida repentina para conseguir pegar o ônibus, que causam mudanças repentinas no ambiente, podem exigir respostas rápidas do organismo. Nesse sentido, o hipotálamo ativa o sistema nervoso simpático e isso resulta num aumento no fluxo simpático para o coração e outras vísceras, glândulas sudoríparas, músculo ocular, entre outros. O fato de ver o ônibus próximo do ponto, estando ainda a uma distância do mesmo, reflete uma mudança repentina no ambiente, que exige uma resposta rápida. O hipotálamo ativa o sistema nervoso simpático que aumenta o débito cardíaco, altera a temperatura corporal e glicose no sangue, e a dilatação da pupila que permitem uma resposta rápida ao distúrbio externo, neste caso, correr para conseguir pegar o ônibus. Por outro lado, o sistema parassimpático mantém a frequência cardíaca, respiração e o metabolismo sob condições de repouso. Mas imagine que de repente o sinal vermelho é ativado e você vê o ônibus sendo obrigado a parar justamente em frente ao ponto de parada, tendo assim a certeza de que conseguirá apanhá-lo. Dentro de pouco tempo, as respostas simpáticas diminuem e as funções da divisão parassimpática vão se elevar, promovendo a diminuição da sua frequência cardíaca e pressão sanguínea, retorno ao trabalho das funções digestivas e a cessação do suor (Bear, 2002; Kandel e colegas, 2000). Como pode-se perceber, os representantes das duas divisões que inervam as vísceras são, via de regra, opostos em seus efeitos, mas colaborativos.

Outro fato interessante na distinção entre os ramos simpático e parassimpático tem a ver com a forma de atuação de ambos. O primeiro é constituído de maneira a ter uma atuação difusa, ou seja, ele atua simultaneamente em

diversos órgãos, o que é de suma importância para as ações em situações de emergência. Ao contrário, o parassimpático atua de maneira localizada, de maneira direta em órgãos específicos. Assim, qualquer variedade de atuação é possibilitada. Ademais, muitas vias simpáticas e parassimpáticas operam em conjunto ao *sistema motor somático*<sup>5</sup> para regular comportamentos normais e para manter o ambiente interno estável frente a mudanças nas condições externas (Kandel e colegas, 2000).

A atuação do SNA sobre o sistema cardiovascular determina variações nos intervalos entre batimentos cardíacos que refletem o complexo mecanismo de regulação e sua interação com outros sistemas do organismo para a manutenção da homeostase. As variações impostas à frequência cardíaca dependem sobremaneira do controle exercido pelo sistema nervoso autônomo, mas também do sistema endócrino e outros reflexos. Assim, esta variabilidade da frequência cardíaca é subjacente aos processos de controle da atividade cardíaca, e o seu estudo é importante para revelar as interrelações entre a função cardiovascular e o SNA na saúde e na doença.

## 2.1 Controle Neural da Frequência Cardíaca

A capacidade de dar início a um batimento cardíaco é inerente ao músculo cardíaco. Esta excitação natural do coração, denominada *automatismo cardíaco*, tem origem em células cardíacas especiais que formam o *sistema de condução*, mas outras células automáticas do miocárdio também podem assumir a atividade de marcapasso, se as células do sistema de condução estiverem suprimidas. Entre as estruturas que compõem o sistema de condução, o *nodo sinusal* é denominado marcapasso natural do coração, pois em condições normais, ele determina o ritmo dos batimentos cardíacos (Berne e colegas, 2000).

O sistema nervoso pode alterar o ritmo natural do coração. Ele exerce funções de integração dos mecanismos de controle do sistema cardiovascular, como a redistribuição do fluxo sanguíneo para diferentes áreas do corpo e a regulação da atividade bombadora do coração, fornecendo um controle muito rápido da pressão arterial. Os meios pelos quais o sistema nervoso regula a atividade cardíaca são quase inteiramente através do *sistema nervoso*

---

<sup>5</sup>O sistema motor somático é constituído por músculos esqueléticos e as partes do SNC que os controlam (Bear, 2002).

*autônomo.*

O sistema nervoso autônomo é ativado principalmente por centros localizados na *medula espinhal*, no *tronco encefálico* e no *hipotálamo*. O bulbo do tronco encefálico exerce importante papel no controle cardiovascular e controle respiratório. O controle parassimpático do coração é realizado através dos efeitores vagais. Os corpos celulares dos neurônios pré-ganglionares localizam-se no *bulbo*, em regiões tradicionalmente identificadas como *centro vagal* ou *centro cardioinibidor*. Mais recentemente foi demonstrado que os motoneurônios vagais localizam-se especificamente no *núcleo dorsal motor do vago* e no *núcleo ambíguo*, de localização mais ventral. Os corpos celulares dos *neurônios pré-ganglionares simpáticos* estão localizados essencialmente na *coluna intermédio-lateral* e na substância branca do funículo lateral adjunto, nos segmentos *torácicos* e *lombar alto* da *medula espinhal* (Aires, 1999).

Normalmente, a estimulação simpática leva a um aumento da frequência cardíaca (*efeito cronotrópico positivo*) e da contratilidade do miocárdio (*efeito inotrópico positivo*). Em consequência disto, a resposta contrátil do músculo cardíaco isolado tem sua tensão aumentada mas sua duração reduzida. No coração intacto, a pressão intraventricular se eleva e se reduz mais rapidamente, e o tempo de ejeção diminui. Na presença de uma atividade reflexa normal, as variações da frequência cardíaca podem ser dominadas por uma resposta reflexa a alterações da pressão arterial.

A estimulação parassimpática, por outro lado, diminui a frequência da atividade do nodo sinusal, reduzindo o ritmo do marcapasso cardíaco. Os efeitos cronotópico e inotrópico negativos da atuação parassimpática são freqüentemente contrapostos por uma descarga simpática reflexa, provocada pela redução da pressão arterial. A consequente interação entre os efeitos simpático e parassimpático é complexa devido à modulação das influências simpáticas pelas terminações parassimpáticas no coração (Berne e colegas, 2000).

A atividade dos neurônios pré-ganglionares e pós-ganglionares simpáticos, assim como a dos neurônios parassimpáticos não é aleatória, mas condicionada a diferentes áreas dos *sistema nervoso central* (bulbares e suprabulbares), que elaboram respostas apropriadas do tono simpático e vagal em função de informações aferentes recebidas de diferentes receptores espalhados pelo sistema cardiovascular (Aires, 1999).

O bulbo é considerado como a principal região de integração do reflexo pressorreceptor, sendo extremamente importante para a manutenção da pres-

são arterial, através da ação tônica reflexa que exerce sobre o sistema cardiovascular. Os mecanismos de integração bulbar compreendem grupamentos envolvidos na gênese do tono vagal e grupamentos neuronais responsáveis pela gênese do tono simpático ou vasomotor.

Todas as aferências da periferia, conduzindo as mais diversas informações sobre a circulação e a atividade cardíaca, convergem diretamente para o *núcleo do trato solitário* no bulbo, que é fundamental na integração primária dos reflexos cardiovasculares que regulam a pressão arterial e volemia. É uma estrutura que desempenha papel fundamental na regulação cardiovascular, não só por ser o local de convergência das aferências periféricas e sua primeira estação sináptica, mas também por distribuir as informações aferentes a diferentes núcleos bulbares e suprabulbares. Ele é também o mais importante sítio de convergência de neurônios de 2ª ordem, aos quais se projetam as aferências somáticas e viscerais que ascendem ao sistema nervoso central via medula espinhal (Aires, 1999).

Outros centros cerebrais superiores ajudam a regular a frequência cardíaca e a contratilidade do coração. Taquicardia pode ser produzida no *tálamo* por estimulação dos grupos de núcleos da linha média, ventrais e mediais. Variações da frequência cardíaca também podem ser provocadas por estimulação das regiões posterior e posterolateral do *hipotálamo*. Os centros hipotalâmicos também estão envolvidos nas respostas circulatórias a alterações da temperatura ambiente. As alterações da temperatura, experimentalmente produzidas no hipotálamo anterior, alteram muito a frequência cardíaca e a resistência periférica. Estímulos aplicados aos campos H2 de Forel, no diencéfalo, provocam diversas respostas cardiovasculares, incluindo taquicardia. No *córtex cerebral*, os centros que influenciam a função cardíaca estão localizados principalmente na metade anterior do cérebro, notadamente no lobo frontal, no córtex orbital, nos córtices motor e pré-motor, na parte anterior do lobo temporal, na ínsula e no giro do cíngulo. Os centros corticais e diencefálicos são, indubitavelmente, responsáveis pelo início das reações cardíacas que ocorrem durante a excitação, a ansiedade e outros estados emocionais (Berne e colegas, 2000).

Os barorreceptores arteriais constituem-se em terminações nervosas de nervos aferentes sensíveis à pressão, localizados nos seios carotídeos e no arco aórtico. Alterações da pressão arterial alteram os níveis de distensão da artéria carótida e do arco aórtico, determinando variações da frequência de descarga dos barorreceptores. Quando a pressão arterial está na faixa normal,

alterações moderadas na estimulação do baroreceptor provocam alterações recíprocas nas divisões simpáticas e parassimpáticas do sistema nervoso autônomo, produzindo uma mudança na frequência cardíaca. Por exemplo, o aumento da pressão arterial provoca a estimulação parassimpática e a diminuição concomitante da atividade simpática, produzindo a diminuição da frequência cardíaca e a redução da força de contração do coração, além da vasodilatação das veias e arteríolas por todo o sistema circulatório periférico. Como consequência da menor resistência periférica e do menor débito cardíaco, a pressão arterial diminui. Inversamente, a pressão baixa tem efeitos opostos (Guyton e Hall, 1998).

Variações instantâneas da frequência cardíaca também ocorrem com a respiração (*arritmia sinusal respiratória*), principalmente nas crianças. Tipicamente, a frequência cardíaca diminui durante a inspiração e aumenta durante a expiração. A amplitude das oscilações é variável, mas ela é usualmente exagerada durante ciclos respiratórios lentos e profundos (Guyton e Hall, 1998).

A atividade hormonal também tem um papel importante na regulação de longo prazo do sistema cardiovascular. Os hormônios da tireóide, por exemplo, exercem efeito potente sobre a função cardíaca. A atividade cardíaca é lenta em pacientes com *hipotireoidismo*. O inverso é verdadeiro em pacientes com *hipertireoidismo*. Em geral, esses pacientes apresentam taquicardia, débito cardíaco elevado, palpitações e arritmias (Berne e colegas, 2000).

Outros reflexos importantes atuando sobre a variabilidade da frequência cardíaca podem ser estudados em (Berne e colegas, 2000), como o *reflexo de Bainbridge*, o *reflexo quimioceptor*, os *reflexos dos receptores ventriculares*, entre outros.

## 2.2 O Sinal de Variabilidade da Frequência Cardíaca

A *variabilidade da frequência cardíaca* (VFC) tem sido o termo convencionalmente aceito para descrever as variações da frequência cardíaca instantânea ou as variações entre os *intervalos RR* sucessivos do eletrocardiograma (ECG) (Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996). O gráfico superior da Figura 2.1 mostra uma série de intervalos RR com duração aproximada de

24 h de um adulto normal. Pode-se notar que a frequência cardíaca é menor (intervalos RR maiores) durante o sono, período aproximadamente compreendido entre os batimentos 30.000 e 55.000. A parte inferior desta Figura mostra uma seção de 5 min que foi extraída da série de 24h.

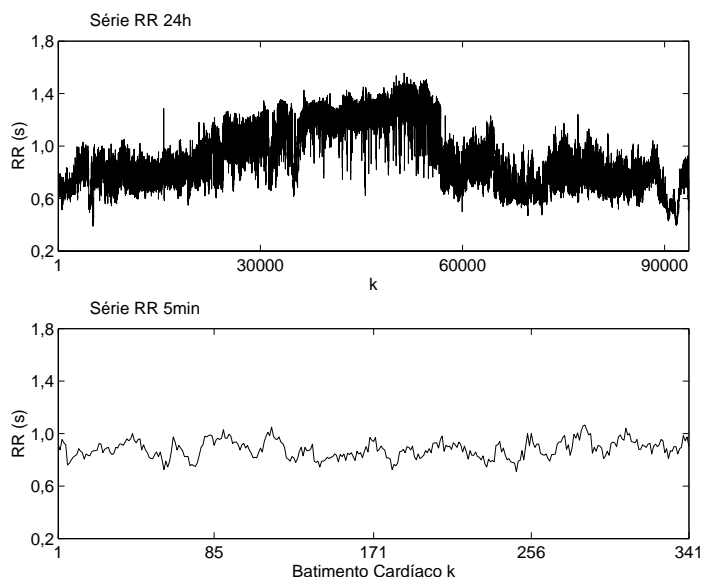


Figura 2.1: (a) Série de intervalos RR de 24 h de um adulto normal. (b) Segmento supostamente estacionário de 5 min. Fonte: Gomes (2001).

A importância clínica da VFC tornou-se aparente no final dos anos 80, quando a VFC foi considerada um forte e independente preditor de mortalidade após infarto agudo do miocárdio na pesquisa realizada pelo Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology (1996). A VFC tem sido objeto de recentes estudos, e tem se mostrado como uma ferramenta não-invasiva capaz de fornecer diagnósticos úteis (Malik e Camm, 1995; Berntson et al., 1997; Laitio e colegas, 2006; Maestri e colegas, 2007; Cerutti e colegas, 2007; Wessel e Kurths, 2007).

Importantes relações entre o *sistema nervoso autônomo* e a mortalidade devida a problemas no sistema cardiovascular, incluindo morte súbita cardíaca, já são muito conhecidas (Franchini, 1998). Além disso, tem sido verificada a importância da VFC como um indicador quantitativo da atividade autonômica na fisiopatologia cardiovascular (Sztajzel, 2004; Sakhuja e colegas, 2007; Stein e colegas, 1994). Aliada à facilidade de obtenção do sinal de

VFC por técnica não-invasiva, verifica-se que valiosas informações sobre os mecanismos de regulação da atividade cardíaca estão imersos na complexa série de intervalos entre batimentos cardíacos (Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996; Malik e Camm, 1995).

As variações na frequência cardíaca podem ser avaliadas por alguns métodos, sendo os do *domínio do tempo* os mais simples de serem utilizados (Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996). Até o momento não há um consenso sobre o melhor índice de avaliação da VFC disponível para uso clínico (Huikuri e colegas, 1999). Os métodos de medição da VFC no domínio do tempo podem ser subdivididos em *métodos estatísticos* e *métodos geométricos*. Os principais índices do domínio do tempo são:

- *SDNN*: desvio padrão de todos os intervalos RR normais (intervalos NN);
- *SDANN*: desvio padrão das médias dos intervalos NN em todos os segmentos de 5 min de um registro de 24 h;
- *RMSSD*: raiz quadrada da média da soma dos quadrados das diferenças entre intervalos NN adjacentes;
- *pNN50*: proporção ou número de intervalos NN que são maiores que 50 ms (para humanos) de um registro de 24 h.

Como exemplo de métodos geométricos, pode-se citar:

- *Índice triangular VFC*: número total de todos os intervalos NN dividido pela altura do histograma de todos intervalos NN);
- *Índice diferencial*: diferença entre as larguras do histograma de diferenças entre intervalos NN adjacentes;
- entre outros.

No domínio da frequência tem-se a análise da *densidade da potência espectral*, que fornece informações básicas de como a potência se distribui em função da frequência. Métodos para o cálculo da densidade da potência espectral podem ser geralmente classificados como *não-paramétricos* e *paramétricos* (Task Force of The European Society of Cardiology and The North

American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996). A análise espectral pode ser realizada pelo emprego de técnicas clássicas baseadas na Transformada de Fourier ou por meio de técnicas mais modernas fundamentadas na modelagem paramétrica de séries temporais que se baseiam no ajuste de um modelo auto-regressivo de média móvel (ARMA) ou suas variações à série temporal sob análise (Kay, 1987).

Métodos analíticos provenientes da dinâmica não-linear tem possibilitado novas abordagens para o estudo e entendimento das características do comportamento da frequência cardíaca, e segundo Huikuri e colegas (1999), estes métodos de medida da VFC se diferem dos tradicionais no sentido de que não são destinados a avaliar a magnitude da variabilidade, ao invés, estimam as propriedades de correlação e complexidade da VFC que não são explicáveis pelas técnicas tradicionais. No entanto, a aplicabilidade dos métodos baseados na dinâmica não-linear ainda precisa ser verificada por meio de mais estudos que permitam estabelecer padrões que possam ser usados na clínica médica (Wessel e Kurths, 2007; Huikuri e colegas, 1999).

Os métodos clássicos do domínio do tempo e alguns métodos não-lineares mais recentes discutidos no próximo capítulo foram usados neste trabalho para o estudo da VFC.

# FERRAMENTAS APLICADAS À SÍNTESE E ANÁLISE DO SINAL DE VARIABILIDADE DA FREQUÊNCIA CARDÍACA

---

*“ Porque a palavra de Deus é viva, eficaz e mais cortante que uma espada de dois gumes. Penetra até a divisão da alma e do espírito, até as juntas e a medula. É capaz de julgar os pensamentos e as intenções do coração.”*

Hebreus 4,12.

Este capítulo apresenta, de forma breve, uma introdução a alguns conceitos relativos aos sistemas dinâmicos e que têm relação com o trabalho desenvolvido nesta tese.

São apresentadas as idéias básicas da análise de estabilidade e de análise topológica, mais especificamente de dinâmica simbólica. São também apresentados os conceitos de entropia e de leis de potência. Por fim, são apresentados conceitos gerais de identificação de sistemas.

## 3.1 Sistemas

Um *sistema* pode ser entendido como sendo um conjunto de componentes (físicos, biológicos, mecânicos e etc.), que interagem de forma definida. São exemplos: o mercado interno de um país, o sistema circulatório do corpo humano, o conjunto suspensão e amortecimento de um automóvel, um circuito eletrônico (Monteiro, 2002).

Diz-se que um sistema é *dinâmico* quando sua saída no instante  $k$  depende de valores passados da saída e da entrada. Ao contrário dos *sistemas estáticos*<sup>1</sup>, os sistemas dinâmicos têm memória.

Os sistemas dinâmicos podem ser lineares, que satisfazem o princípio da superposição<sup>2</sup>, ou não-lineares. O comportamento de sistemas não-lineares depende da amplitude do sinal de entrada, bem como do ponto de operação do sistema, o que não ocorre para os sistemas lineares. Em torno do ponto de operação, alguns sistemas não-lineares podem ser aproximados por modelos lineares.

Os sistemas ditos *autônomos* são aqueles que não dependem explicitamente do tempo. Na prática, chama-se sistema autônomo aquele que não tem entradas, seja porque elas não são conhecidas, seja porque o número de entradas é tão grande que se torna demasiado complexo levá-las em conta (Ex.: sistema cardiovascular). Nesses casos, os dados são apenas seqüências de saída dos sistemas. Os sistemas não autônomos são aqueles que dependem explicitamente do tempo, ou na prática, aqueles que têm entradas e saídas bem definidas (Aguirre, 2004).

Um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações que descrevem a evolução temporal do estado do sistema, a partir do conhecimento de sua história anterior (Ott e colegas, 1994). Um tal conjunto pode ser um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ , denota  $n$  estados componentes, considerado como um vetor no espaço de fases  $n$ -dimensional.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_1(x), \mathbf{F}_2(x), \dots, \mathbf{F}_n(x)]^T$  é um vetor  $n$ -dimensional das funções de  $\mathbf{x}$ .  $\dot{\mathbf{x}}$  representa a derivada em relação ao tempo  $d\mathbf{x}/dt$ . Então a Equação 3.1 é um sistema dinâmico, pois uma vez dado qualquer estado inicial pode-se, em princípio, resolver a equação 3.1 para determinar a trajetória<sup>3</sup> para todo o tempo subsequente.

---

<sup>1</sup>*Sistemas estáticos.* Diz-se do sistema cuja saída no instante  $k$  só depende das entradas no instante  $k$ . São representados por equações algébricas. Todo sistema real é, em princípio, dinâmico. Em certos casos, a dinâmica é tão rápida que é adequado modelar um sistema dinâmico como sendo estático.

<sup>2</sup>*Princípio da superposição.* Determinados sistemas ao serem excitados por uma entrada  $u_1(t)$  produzem uma saída  $y_1(t)$  e ao serem perturbado por uma entrada  $u_2(t)$  produzem uma saída  $y_2(t)$ . Pelo princípio da superposição, tais sistemas ao serem excitados por uma entrada  $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$  produzem uma saída  $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ , sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes.

<sup>3</sup>*Trajetoária.* Evolução temporal, ou soluções do sistema, no espaço de estados. Para o

É também importante considerar os sistemas dinâmicos nos quais o tempo é uma variável discreta. Seja  $k$  uma variável temporal de valores inteiros (discretos). Então, um outro exemplo de sistema dinâmico é um *mapa*  $n$ -dimensional

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k), \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{x}$  é novamente um vetor de estados e  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  é um vetor de funções de  $\mathbf{x}$ ,  $n$ -dimensional.

A Equação 3.2 é um sistema dinâmico, no qual dada uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$ , a equação fornece  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ , fornece  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_1)$ , e assim sucessivamente, gerando uma órbita  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$

## 3.2 Análise topológica

Esta seção apresenta diferentes conceitos e ferramentas da teoria de análise topológica, que permitem uma caracterização fina do comportamento de sistemas dinâmicos, muito empregados na análise de sistemas com comportamento caótico. De maneira mais específica, são apresentados o diagrama de bifurcações e os conceitos básicos referentes a dinâmica simbólica. Conseqüentemente, tais ferramentas serão utilizadas na validação dos modelos obtidos, conforme será visto no próximo capítulo.

### 3.2.1 Diagrama de bifurcações

Nas equações matemáticas que representam os sistemas do mundo real, existem sempre os parâmetros chamados *parâmetro de bifurcação*. Sua denominação vem do fato de que o comportamento dos sistemas não-lineares é sensível a variações, mesmo que pequenas, nos valores desses parâmetros. Assim, o comportamento dinâmico do sistema pode mudar consideravelmente sob uma pequena variação de um parâmetro de bifurcação; quando isso ocorre, surge uma *bifurcação* (Monteiro, 2002; Jackson, 1995; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Por exemplo, se se considera um sistema que depende de um parâmetro de bifurcação  $\mu$ , é muito provável que o número e o tipo de seus pontos fixos igualmente dependam do parâmetro  $\mu$ . Dado que o retrato de

---

caso de sistemas discretos será usado o termo *órbita* no lugar de trajetória.

fases é globalmente estruturado em torno dos pontos fixos (Poincaré, 1881), o comportamento solução do sistema depende igualmente do parâmetro  $\mu$ .

Uma representação global dos vários regimes que são encontrados quando o parâmetro de bifurcação é variado pode ser obtida por meio de um *diagrama de bifurcações*, uma ferramenta muito útil e freqüentemente utilizada no estudo de sistemas dinâmicos não-lineares. Um diagrama de bifurcações mostra algumas propriedades características de soluções assintóticas de um sistema dinâmico em função do parâmetro de bifurcações. Isso permite uma visualização de onde e como mudanças qualitativas, as bifurcações, nas soluções assintóticas, ocorrem (Gilmore e Lefranc, 2004). A Figura 3.1 mostra o diagrama de bifurcações do *mapa logístico* (May, 1976):  $x_k = \mu(1-x_{k-1})x_{k-1}$ ; as setas destacam a ocorrência de algumas bifurcações. Por meio do diagrama de bifurcações pode-se verificar para quais valores do parâmetro  $\mu$  ocorrem as mudanças qualitativas no comportamento do sistema, isto é, pode-se observar uma solução simples para  $\mu < 3$ ; para  $\mu = 3$  ocorre uma bifurcação de duplicação de período, e à medida que o valor de  $\mu$  aumenta ocorrem outras duplicações de período até que o sistema atinge o comportamento caótico. A partir daí, tem-se a alternância entre comportamento caótico e janelas periódicas, com destaque para a janela de período 3 para  $\mu \approx 3,84$ .

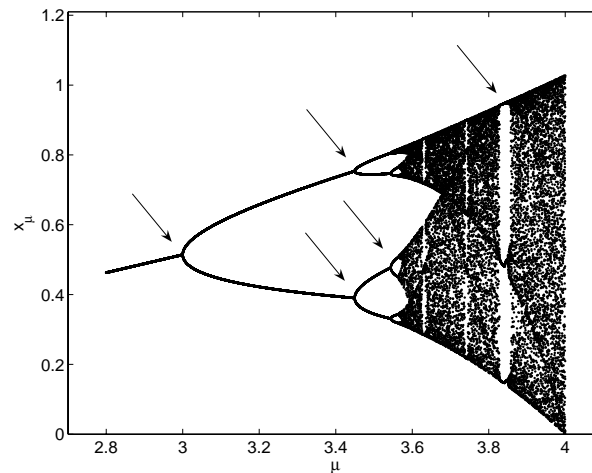


Figura 3.1: Diagrama de bifurcações do mapa logístico. As setas indicam a ocorrência de algumas bifurcações.

A Seção A.1.3 mostra os tipos mais comuns de bifurcações e como elas ocorrem.

### 3.2.2 Dinâmica simbólica

Segundo Hao Bai-Lin (1989), a teoria da dinâmica simbólica fornece a mais rigorosa maneira de se definir o movimento caótico nos sistemas dinâmicos. Trata-se de uma abordagem algébrica introduzida por Morse e Hedlund (Morse e Hedlund, 1938).

Na prática, a dinâmica simbólica corresponde à descrição de um processo de evolução, isto é, ela descreve o essencial da evolução dos sistemas dinâmicos por meio de suas seqüências simbólicas. Uma descrição completa da evolução de uma aplicação exigiria a realização da aplicação para todas as condições iniciais possíveis. Não obstante, é possível realizar uma descrição da evolução discretizada de forma a não se considerar os valores tomados sobre o conjunto de dados analisados, mas se ocupar de reter somente as características essenciais do comportamento dinâmico, como a periodicidade, por exemplo.

Esta seção apresenta conceitos básicos de dinâmica simbólica, como a partição do espaço de fases e a codificação de órbitas periódicas, a fim de proporcionar a compreensão de sua aplicação neste trabalho. A *codificação* é apresentada antes da *partição*, ou seja, em uma ordem invertida, com o objetivo de facilitar a compreensão. Maiores detalhes e mais exemplos a respeito da teoria da dinâmica simbólica e das seqüências simbólicas podem ser encontrados na Seção A.1.5.

O leitor interessado em aprofundar-se no assunto deve recorrer às referências citadas ao longo do texto. Mas de forma mais direta, um texto dedicado à dinâmica simbólica é Bai-Lin (1989); uma abordagem matemática do assunto pode ser encontrada em Morse e Hedlund (1938); a dinâmica simbólica dentro de análise topológica pode ser vista em Gilmore e Lefranc (2004), Letellier (2006b), Letellier e colegas (2000), Gilmore (1998); a partição do espaço de fases e análise estatística das seqüências simbólicas são tratadas de forma mais direta em: Godelle e Letellier (2000), Letellier e colegas (1995), Letellier (2006c); algumas aplicações das teorias de dinâmica simbólica podem ser encontradas em: Letellier e colegas (1995); Letellier (2006b); Voss e colegas (2007); Bär e colegas (2007).

#### Codificação

Uma dinâmica simbólica aplicada à descrição da evolução de uma trajetória em um atrator pode ser construída a partir da seção de Poincaré (Seção

A.1.1) desse atrator e de uma de suas coordenadas, utilizada para se obter um mapa de primeiro retorno (Letellier e colegas, 1995). Os pontos fixos do mapa de primeiro retorno definem a partição do atrator em vários ramos, cujo número pode depender do valor do parâmetro de bifurcação.

A cada ramo deve corresponder um símbolo: toda trajetória é então caracterizada por uma seqüência de símbolos que descreve a sucessão dos ramos visitados. Etiquetando-se cada intervalo monotônico do mapa de primeiro retorno com um símbolo, toda trajetória em um atrator pode ser caracterizada de maneira única por uma seqüência infinita de símbolos (Letellier e colegas, 1995). Dessa forma, séries temporais diferentes podem apresentar uma mesma seqüência de símbolos. De fato, o que pode parecer um inconveniente é na verdade uma vantagem, pois isso permite a elaboração de uma classificação de diferentes seqüências numéricas e, portanto, dos comportamentos dinâmicos (Bai-Lin, 1989).

Os ramos crescentes são associados à preservação da ordem das interseções com a seção de Poincaré. Inversamente, os ramos decrescentes correspondem a uma inversão de suas interseções (Seção A.1.1). Assim, por convenção, os números pares são associados aos ramos crescentes e os números ímpares são associados aos ramos decrescentes.

Com a partição da seção de Poincaré e a atribuição dos ramos respectivos, cada interseção de uma órbita com a seção de Poincaré corresponde a uma seqüência bi-infinita, composta, por exemplo, de 0 e de 1. Isso se escreve no caso de uma aplicação unimodal (Seção A.1.1):

$$S = \dots s_{-m} \dots s_{-1} s_0 \bullet s_1 s_2 \dots s_n \dots,$$

em que  $s_n$  é o  $n$ -ésimo ponto futuro,  $s_m$  é o código do  $m$ -ésimo ponto do passado e o ponto presente é indicado por  $s_0 \bullet$ . O ponto  $\bullet$  divide a seqüência bi-infinita em duas seqüências infinitas, ou seja, a seqüência passada  $\dots s_{-m} \dots s_{-1} s_0 \bullet$  e a seqüência futura  $\bullet s_1 s_2 \dots s_n \dots$  (Bai-Lin, 1989; Letellier e colegas, 1995; Wu, 1996).

As seqüências associadas às órbitas de período  $p$  repetem indefinidamente a mesma série. Nesse caso,  $p$  símbolos são usados na codificação da órbita periódica. Na seção de Poincaré, uma órbita de período  $p$  tem  $p$  pontos periódicos.

A fim de se codificar de maneira unívoca os pontos periódicos, as regras seguintes podem ser adotadas:

1. cada ponto periódico é codificado por uma seqüência de  $p$  símbolos, cujo primeiro é o símbolo do ramo sobre o qual o ponto está localizado. Em seguida, vêm os símbolos associados aos pontos periódicos visitados segundo as iterações sucessivas;
2. essas seqüências são ordenadas segundo uma regra específica chamada de *Ordem Unimodal* (Seção A.1.5);
3. entre essas seqüências, a mais forte, segundo as regras de ordenação, é escolhida para codificar a ordem que liga os  $p$  pontos periódicos na seção de Poincaré.

Quando cada seqüência simbólica possível é associada a uma órbita de um atrator, a dinâmica simbólica é dita *completa*. Mas, segundo o parâmetro de bifurcação, todas as órbitas periódicas não são necessariamente contidas no atrator. As órbitas podem ser criadas ou destruídas pelas bifurcações, por exemplo, por bifurcações de duplicação de período e bifurcações sela-nó (Seção A.1.3). O Exemplo 3.2.2-a mostra o procedimento de codificação de uma órbita periódica, como descrito nesta seção.

**Exemplo 3.2.2-a** (Letellier e colegas, 1995)

O mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler (Figura 3.2), com os parâmetros  $(a,b,c) = (0,492; 2; 4)$ , é obtido a partir da coordenada  $y$  (sentido crescente) da seção de Poincaré. A aplicação contém três ramos, dois crescentes e um outro decrescente. Como será visto, a atribuição de símbolos algébricos apresenta vantagens. Assim, em seguida, aplicando-se o critério de atribuição de números pares aos ramos crescentes e de números ímpares aos ramos decrescentes com o zero atribuído crescente interior, ou seja, ao primeiro ramo crescente da esquerda para a direita do espaço de fases, o conjunto de símbolos utilizados é  $\{0, 1, 2\}$ . A partição geradora desse mapa de primeiro retorno é tal que os dois pontos com derivada nula são:

$$\begin{cases} yC_1 = 1,6 \\ yC_2 = 3,1 \end{cases} \quad (3.3)$$

A partir daí é, então, possível transformar a evolução do sistema de Rössler

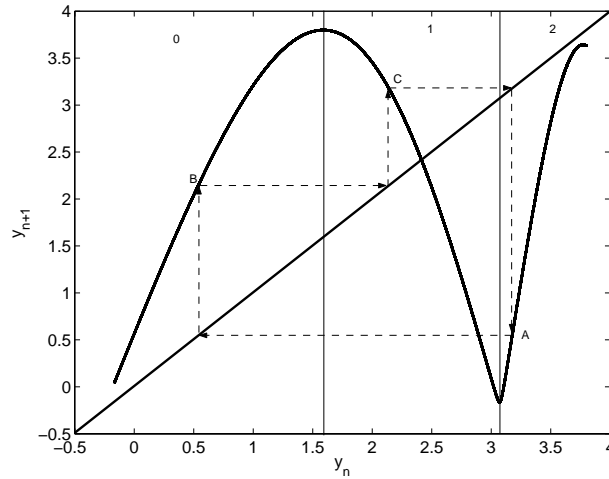


Figura 3.2: Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler. Parâmetros de bifurcação:  $(a,b,c) = (0,492; 2; 4)$ .

em uma sucessão de símbolos, segundo os códigos

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{se } y_n < yC_1, \\ 1 & \text{se } yC_1 < y_n < yC_2, \\ 2 & \text{se } yC_2 < y_n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Sejam, agora, três pontos periódicos A, B, e C, cujas coordenadas são respectivamente  $y_A = 3,2$ ,  $y_B = 0,5$  e  $y_C = 2,15$  (Figura 3.2). Segundo o sistema de codificação (3.4) os pontos A, B e C são respectivamente codificados por 2, 0 e 1. Em seguida, um seguimento (tracejado) é traçado horizontalmente de A até a bissetriz, e um seguimento vertical da bissetriz ao mapa de primeiro retorno (Figura 3.2). Assim, o ponto B, situado sobre o ramo 0, é encontrado. Então, o símbolo 0 sucede o 2 na construção da seqüência que etiqueta o ponto periódico A. Partindo do ponto B, uma construção similar leva ao ponto C. Como C está situado no ramo 1, o símbolo 1 é adicionado à seqüência. Repetindo-se o procedimento, retorna-se ao ponto A, o que indica que a órbita foi descrita. Portanto, a seqüência que etiqueta o ponto periódico A é 201.

Se o processo for repetido partindo-se respectivamente dos pontos B e C, as seqüências 012 e 120 serão respectivamente encontradas. As três seqüências 201, 012, 120 correspondem às permutações circulares (Seção A.1.5) da

seqüência 201, que pode ser utilizada pela órbita de período 3 em questão. Os três pontos periódicos A, B e C pertencem a uma órbita de período 3.

■

## Partição

Na seção anterior foi apresentado o procedimento de codificação de órbitas periódicas. Mas para que esse procedimento possa ser realizado é preciso, antes, que o espaço de fases seja apropriadamente particionado. Dessa forma, esta seção trata de como realizar a partição e da importância de se fazê-la corretamente.

Uma análise estatística pode ser realizada por meio da investigação das diferentes probabilidades de ocorrência para seqüências de um dado comprimento  $n$ . Essa investigação deve produzir um histograma com tais probabilidades. A fim de construir o histograma, as seqüências simbólicas devem ser ordenadas como segue: as  $q^n$  possíveis seqüências, compostas de  $n$  símbolos dentre os  $q$  possíveis símbolos, são indexados de acordo com a ordem natural dos inteiros expressa na base  $q$ . No caso de  $q = 2$ , e assim,  $\Sigma_q = \{0,1\}$ , por exemplo, a seqüência 000 100 é associada com o índice  $i = 4$ , que é o inteiro correspondente ao número binário 000100. Isso pode ser verificado por meio do próximo exemplo.

### Exemplo 3.2.2-b

A Figura 3.3 mostra os mapas de primeiro retorno do mapa logístico, com  $\mu = 3,9$  e  $\mu = 3,9999$ , a partir dos quais foram gerados 10.000 pontos. Pode-se verificar que para  $\mu = 3,9999$  a dinâmica do mapa está completamente desenvolvida, o que não ocorre quando  $\mu = 3,9$ . O ponto crítico,  $x_C = 0,5$ , divide a parábola em dois ramos monotônicos, um crescente e outro decrescente. Nesse caso,  $x_C$  define naturalmente a partição topológica, portanto,  $q = 2$  e  $\Sigma_q = \{0,1\}$ . Então, a trajetória pode ser descrita por meio de uma seqüência  $\{\sigma_k\}$  de símbolos definidos como

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \text{se } x_k < x_C \\ 1, & \text{se } x_k > x_C \end{cases} . \quad (3.5)$$

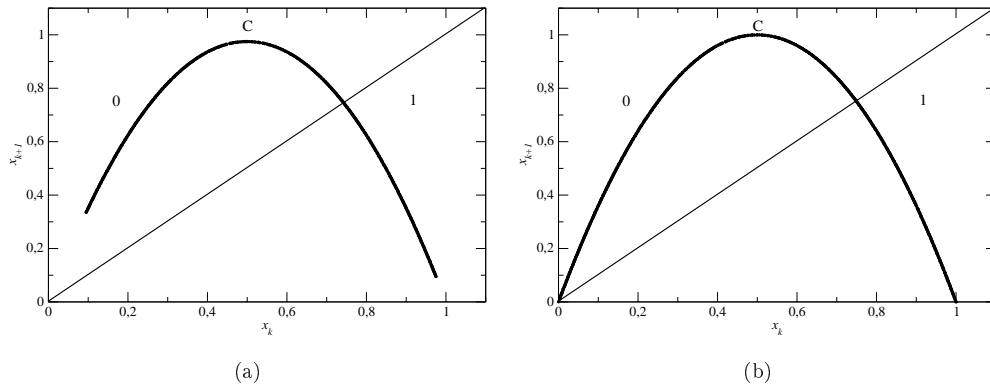


Figura 3.3: Solução do comportamento caótico do mapa logístico: (a) com  $\mu = 3,9$ , (b) com  $\mu = 3,9999$ . O ponto crítico está localizado no ponto de máximo da parábola, isto é,  $x_C = 0,5$  para qualquer valor de  $\mu$ .

Vários níveis de investigação podem ser usados de acordo com o comprimento  $n$  das seqüências de símbolos consideradas. No  $n$ -ésimo nível,  $q^n$  probabilidades são usadas; quanto maior nível, melhor a descrição da dinâmica. Mas, para assegurar uma estatística bem definida, a escolha de  $n$  é limitada pelo comprimento de  $N$ , em que  $N$  é o comprimento da série gerada pelas iterações de um mapa ou o número de interseções de um fluxo com uma seção de Poincaré,  $\{P_k\}_k^N$ . Dessa forma,  $n$  pode ser determinado de acordo com a aproximação:  $1/q^n \approx 1\%$ ; neste exemplo,  $N = 10.000$ , então, a escolha de  $n$  pode ser, por exemplo,  $q = 2, n = 6 \Rightarrow q^n = 64$ , ou  $q = 3, n = 4 \Rightarrow q^n = 81$ , entre outras.

Ao se investigar os histogramas construídos para os dois valores de  $\mu$ , 3,9 e 3,9999 (Figuras 3.4a e 3.4b) observa-se que surgem seqüências diferentes quando o valor de  $\mu$  é aumentado, como esperado de uma descrição rigorosa da evolução do espectro periódico; que, ademais, está em acordo com os mapas de primeiro retorno correspondentes (Figura 3.3).

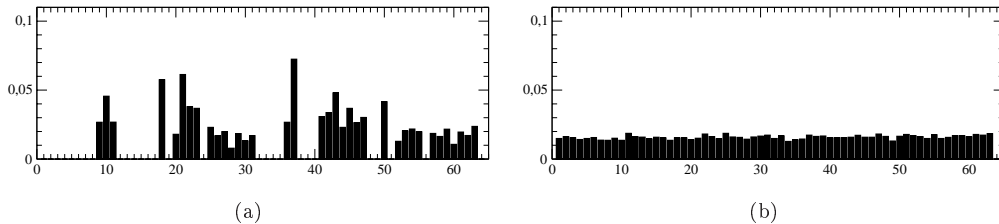


Figura 3.4: Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos, com  $q = 2$  e  $n = 6$ : (a)  $\mu = 3,9$ , (b)  $\mu = 3,9999$ .

A Figura 3.4b mostra que, além de conter todas as seqüências possíveis,

o histograma é plano, isto é, as seqüências são equiprováveis. Uma dinâmica simbólica completa em  $\Sigma_q$  é associada com um histograma plano quando a estatística da seqüência simbólica é realizada com o número de símbolos induzidos pela partição topológica. Entretanto, um histograma plano pode ser também associado com ruído branco (Figura 3.6a), para o qual todas as seqüências de qualquer comprimento são, também, equiprováveis. Sendo assim, é importante ter um critério para distinguir um comportamento determinístico caracterizado por uma dinâmica simbólica completa de um ruído branco, principalmente no caso de dados experimentais dos quais as equações são desconhecidas.

A saída está na investigação da dinâmica por meio da variação do número de símbolos  $q$  com o qual a trajetória é codificada. O histograma somente é plano quando a partição adotada corresponde à partição topológica. Portanto, o comportamento determinístico caracterizado por uma dinâmica simbólica completa pode ser distinguido de um ruído branco, pois no caso do ruído branco o histograma permanece plano para qualquer escolha de  $q$  e  $n$ . De fato, isso pode ser verificado. A Figura 3.4b mostra um histograma plano quando foram escolhidos  $n = 6$  e  $q = 2$ , sabidamente a partição topológica, e com  $\mu = 3,9999$ , para o qual a dinâmica simbólica é completa. Agora, se mantido o valor de  $\mu$  e alterados os valores de  $q$  e  $n$  para, por exemplo,  $q = 3$  e  $n = 4$ , o histograma não permanece plano (Figura 3.5), o que indica que a partição não é a correta. Fazendo o mesmo para o caso do ruído, ou seja, mudando a partição para  $q = 3$  e  $n = 4$ , verifica-se que o histograma continua plano (Figura 3.6b) como esperado, insensível à partição.

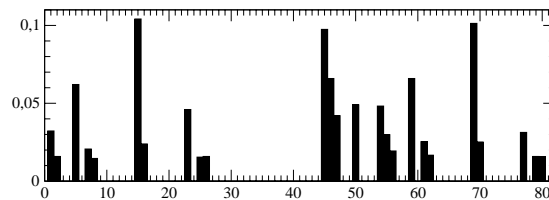


Figura 3.5: Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos gerados com  $\mu = 3,9999$ , com  $q = 3$  e  $n = 4$ .

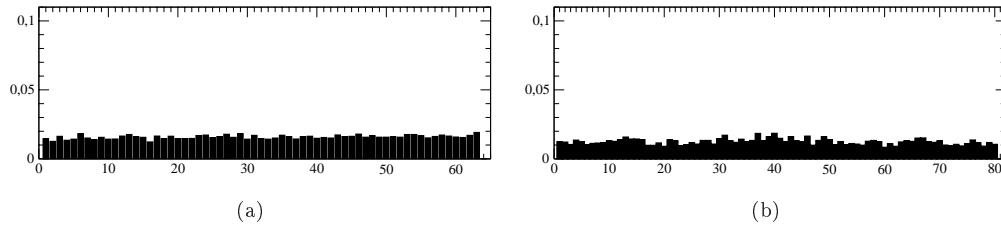


Figura 3.6: Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos de ruído branco: (a) com  $q = 2$  e  $n = 6$ , (b) com  $q = 3$  e  $n = 4$ .

Outro ponto de grande importância é que, como será visto na Seção 3.3.1, a entropia de Shannon pode ser calculada a partir das seqüências simbólicas obtidas por meio da dinâmica simbólica. O valor da entropia de Shannon atingirá o máximo valor, isto é, o valor correto para a série analisada quando a partição for realizada corretamente. Assim sendo, a entropia de Shannon pode ser usada para determinar a partição correta nos casos de sistemas reais que não apresentam uma partição bem definida como o mapa logístico. ■

### 3.3 Entropia

O conceito de *entropia* foi inicialmente utilizado na termodinâmica em meados do século XIX. No século passado, foi aplicado na mecânica estatística e, em 1948, utilizado pelo matemático Claud E. Shannon na Teoria da Informação (Shannon, 1948; Papoulis, 1991).

Esta seção apresenta duas formas de se calcular entropia, a *entropia de Shannon* e a *entropia aproximada*.

#### 3.3.1 Entropia de Shannon

As formas de se calcular a entropia de Shannon apresentadas a seguir são feitas conforme apresentados por Letellier (2006d). São apresentadas duas formas, uma baseada em diagramas de recorrências e a outra em dinâmica simbólica.

O *diagrama de recorrências*  $R_{i,j}$  é uma matriz quadrada que é construída como segue. Todo ponto da trajetória no espaço de fases  $\{x_i\}_{i=1}^N$  é verificado ser ou não próximo de um outro ponto  $x_j$  da trajetória, ou seja, se a distância entre os dois pontos é menor que um limite especificado  $\epsilon$ . Nesse caso, o ponto

é dito ser recorrente e é representado por um ponto preto no diagrama. Ao contrário, o ponto é dito ser não recorrente e é representado por um ponto branco no diagrama de recorrências. Isso pode ser descrito como uma matriz  $N \times N$

$$R_{ij} = \gamma(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \quad (3.6)$$

na qual  $\gamma(\mathbf{x}_i)$  é a função Heaviside.<sup>4</sup>

Uma sugestão para se determinar o valor de  $\epsilon$  é fazer  $\epsilon = \sqrt{d_E} \times 0,1Amp$ , em que  $d_E$  é *dimensão de imersão* e  $Amp$  é amplitude do sinal. Para detalhes a respeito de  $d_E$  e de seu cálculo veja Kennel e colegas (1992); Cao (1997); Fraser e Swinney (1986).

A entropia de Shannon é definida como

$$\mathcal{S} = - \sum_{n=1}^H P_n \log(P_n), \quad (3.7)$$

em que  $H$  é o seguimento recorrente máximo, e  $P_n$  é a frequência relativa de ocorrência de seguimentos diagonais de pontos *não recorrentes*. Os pontos não recorrentes são a assinatura da complexidade nos dados.

Uma outra maneira de se estimar a entropia de Shannon é baseada em dinâmica simbólica (Kurths e colegas, 1995; Voss e colegas, 1996). A entropia é obtida por meio da dinâmica simbólica, substituindo-se  $P_n$  em (3.7) pela frequência relativa da  $n$ -ésima seqüência simbólica constituída de  $k$  símbolos.

Segundo Letellier (2006d) há vantagens em se calcular a entropia de Shannon com base no diagrama de recorrências quando há dificuldades em se determinar uma partição do espaço de fases ou quando o sinal investigado estiver contaminado por ruído.

Os exemplos a seguir ajudam a compreender como a entropia de Shannon pode ser útil na determinação da partição do espaço de fases.

### Exemplo 3.3.1-a

Na Seção 3.2.2 pôde-se verificar a importância de se fazer a partição correta do espaço de fases em função da escolha correta do número de símbolos e do comprimento das seqüências simbólicas. Os exemplos apresentados naquela seção utilizaram sistemas dinâmicos cujos mapas de primeiro retorno iduziram a partição correta do espaço de fases, no que se refere ao ponto de partição. Por exemplo, no caso do mapa logístico, o mapa de primeiro

---

<sup>4</sup> $\gamma(d) = 0$  se  $d < \epsilon$  ou  $\gamma(d) = 1$  se  $d > \epsilon$ .

retorno indica  $x_k = 0,5$  (Figura 3.3) como o ponto exato da partição, pois é exatamente nesse ponto que termina o ramo crescente da parábola e começa o ramo decrescente. Neste exemplo também será utilizado o mapa logístico com  $\mu = 3,9999$  para ilustrar como a entropia de Shannon pode auxiliar na determinação dos pontos de partição do espaço de fases. Como já referido, o mapa logístico com  $\mu = 3,9999$  apresenta dinâmica simbólica completa e, conseqüentemente, se a partição for feita corretamente o histograma das seqüências simbólicas será plano. Neste exemplo, em todos os caso são utilizados  $q = 2$  e  $n = 6$ , portanto, o único ítem a ser variado é o ponto de partição. Começando com a partição correta para este caso, ou seja,  $x_k = 0,5$ , verifica-se na Figura 3.7a, como esperado, um histograma plano e com entropia de Shannon  $\mathcal{S} = 4,14$ . Mas se, por outro lado, for utilizado um ponto de partição menor, por exemplo  $x_k = 0,4$  (Figura 3.7b), ou maior, por exemplo  $x_k = 0,6$  (Figura 3.7c), o histograma já não será plano, e os respectivos valores de entropia,  $\mathcal{S} = 3,84$  e  $\mathcal{S} = 3,85$  serão menores que quando usado o ponto de partição correto. Portanto, pode-se verificar que a partição correta é aquela na qual se atinge o maior valor de entropia. Este fato é muito útil na determinação da partição no caso de sistemas reais; isso poderá ser verificado no próximo exemplo.

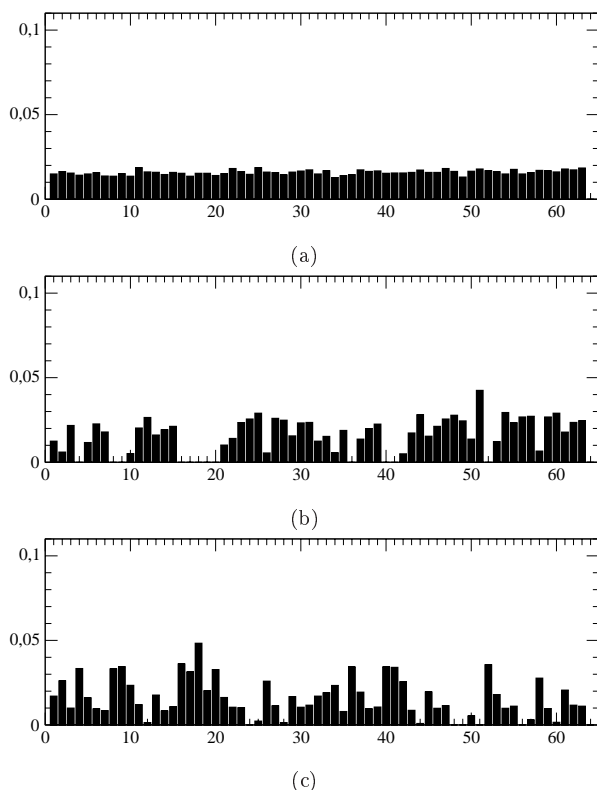


Figura 3.7: Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 pontos do mapa logístico com  $\mu = 3,9999$ . Foram usados  $q = 2$ ,  $n = 6$  e os pontos de partição: (a)  $x_k = 0,5$  ( $\mathcal{S} = 4,14$ ), (b)  $x_k = 0,4$  ( $\mathcal{S} = 3,84$ ) e (c)  $x_k = 0,6$  ( $\mathcal{S} = 3,85$ ).

■

### Exemplo 3.3.1-b

Neste exemplo são utilizados dados de uma série de VFC, cujo mapa de primeiro retorno é apresentado na Figura 3.8. Decidiu-se utilizar três símbolos: 0 para os intervalos RR curtos, ou seja, batimentos rápidos; 1 para intervalos RR médios; e 2 para intervalos RR longos, isto é, os batimentos lentos. Portanto,  $q = 3$ , então  $n = 4$  e como são atribuídos três símbolos, são dois os pontos de partição. Como no exemplo anterior, serão determinados, por meio da entropia de Shannon, os pontos de partição. A Figura 3.9 mostra os histogramas para três combinações de pontos de partição com os respectivos valores de entropia. De todas as combinações de pontos de partição possíveis para essa série de VFC, não há outra que apresente um valor de entropia maior que  $x_{1_k} = 0,96$  e  $x_{2_k} = 1,0$  ( $\mathcal{S} = 3,87$ ). Dessa forma, a Figura 3.9b mostra o histograma gerado a partir da partição correta.

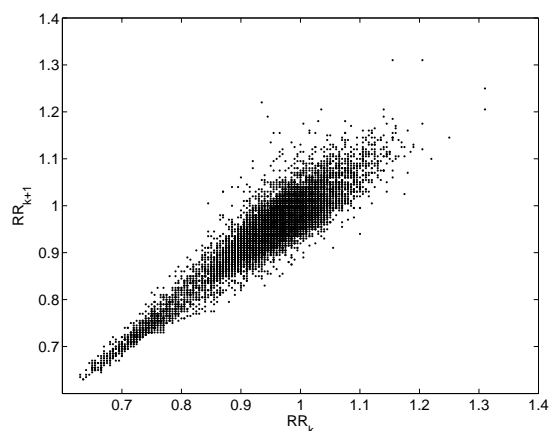
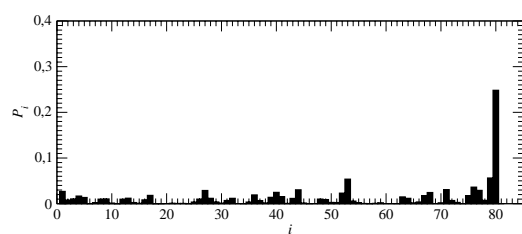
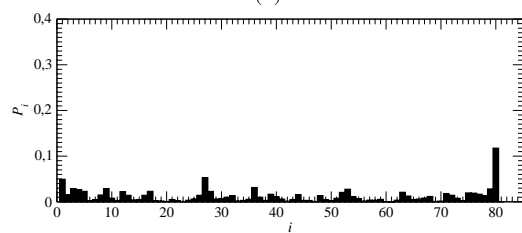


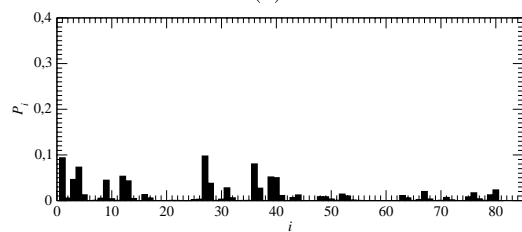
Figura 3.8: Mapa de primeiro retorno de uma série de VFC de 10.000 pontos.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.9: Histograma de seqüências simbólicas. Os cálculos foram feitos a partir de 10.000 de uma série de VFC. Foram usados  $q = 3$ ,  $n = 4$  e os pontos de partição: (a)  $x1_k = 0,93$  e  $x1_k = 0,97$  ( $S = 3,35$ ), (b)  $x1_k = 0,96$  e  $x1_k = 1,0$  ( $S = 3,87$ ) e (c)  $x1_k = 0,99$  e  $x1_k = 1,06$  ( $S = 3,31$ ).

Com a partição do espaço de fases e a atribuição dos símbolos, o mapa de primeiro retorno da série de VFC é mostrado na Figura 3.10.

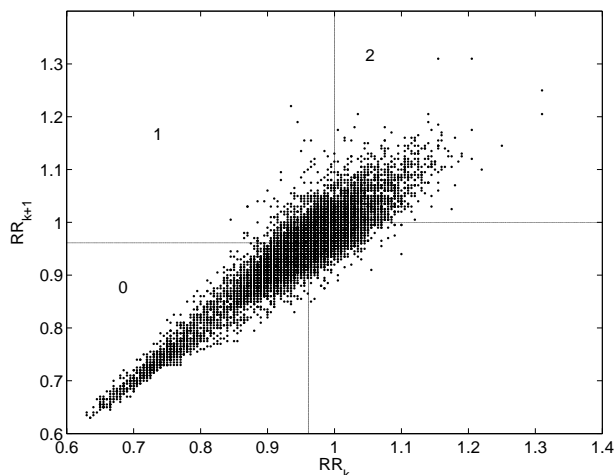


Figura 3.10: Mapa de primeiro retorno de uma série de VFC de 10.000 pontos, com a atribuição dos símbolos.



### 3.3.2 Entropia Aproximada

Pincus (1991) apresentou um método para a análise de séries tipicamente curtas, em torno de 100 amostras pelo menos, chamado *entropia aproximada*, que não pretende ser um valor aproximado da entropia de Kolmogorov-Sinai. Elaborado de forma similar à entropia de Kolmogorov-Sinai, a entropia aproximada tem um foco diferente: fornecer uma fórmula amplamente aplicável, válida estatisticamente, para que se possa distinguir conjuntos de dados por meio da medida de regularidade, ou seja, quantifica-se mudança de complexidade (Pincus, 1991; Pincus e Goldberger, 1994).

A idéia é que sistemas mais complexos apresentam valores de entropia aproximada mais elevados. Em contrapartida, sistemas mais regulares apresentam valores menores de entropia aproximada.

Para um aprofundamento no assunto e maiores detalhes a respeito desta técnica, sugere-se consultar os trabalhos de Pincus (1991), Pincus e Goldberger (1994) e Pincus (1995) e suas referências.

O desenvolvimento que será apresentado pode ser encontrado em Pincus (1995) e em Moody (2001).

Considere uma seqüência  $S_N$ , com  $N$  amostras  $x(1), x(2), \dots, x(N)$ . Deve-se escolher os valores dos parâmetros  $m$  e  $r$  para que se possa calcular a entropia aproximada  $ApEn(m, r, S_N)$  da referida seqüência. O parâmetro  $m$  especifica o comprimento de um padrão, e  $r$  é o critério de similaridade, ou tolerância da comparação. Denota-se uma subseqüência  $p_m(i)$  de  $m$  amostras, começando pela amostra  $i$ .

Dois padrões  $p_m(i)$  e  $p_m(j)$  são *similares* se a diferença entre qualquer par de correspondentes medidas nos padrões é menor que  $r$ , isto é, se

$$|x(i+k) - x(j+k)| < r \text{ para } 0 \leq k < m.$$

Seja  $P_m$  o conjunto de todos os padrões de comprimento  $m$

$$P_m = [p_m(1), p_m(2), \dots, p_m(N - m + 1)]$$

em  $S_N$ . Seja

$$C_{im}(r) = \frac{n_{im}(r)}{N - m + 1}$$

em que  $C_{im}(r)$  é a fração de padrões de comprimento  $m$  que se assemelham ao padrão de mesmo comprimento começado em  $i$ .  $n_{im}(r)$  é o número de padrões em  $P_m$  que são similares a  $p_m(i)$ .  $C_{im}(r)$  pode ser calculado para cada padrão em  $P_m$ , então, define-se  $C_m(r)$  como a média desses valores  $C_{im}(r)$ .  $C_m(r)$  mede, dentro de uma tolerância  $r$ , a regularidade ou freqüência de padrões similares a um dado padrão de uma janela de comprimento  $m$  em  $S_N$ . A entropia aproximada de  $S_N$  é definida como

$$ApEn(m, r, S_N) = \ln\left[\frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)}\right]$$

A entropia aproximada mede a probabilidade de que padrões de comprimento  $m$ , similares, assim o permaneçam no próximo incremento de comparação,  $m + 1$ .

### 3.4 Leis de Potência

Leis de potência são expressões do tipo  $y \propto x^a$ , em que  $a$  é uma constante,  $x$  e  $y$  são medidas de interesse e  $\propto$  indica proporcionalidade (Faloutsos e colegas, 1999). Podem ser encontrados na literatura alguns estimadores para a constante  $a$ , como o índice  $H$  ou o expoente  $\alpha$ .

Há, na literatura, um considerável número de trabalhos que advogam em favor da idéia de que o sinal de VFC possui *geometria fractal*, caracterizada pela presença de muitos componentes rítmicos que interagem entre si em diferentes escalas. E ainda, que apresentam padrões que possuem características de auto-similaridade, que podem ser modificados no caso de séries de pacientes portadores de alguma doença cardiovascular (Signorini e Cerutti, 1999).

Uma série temporal  $x(t)$  que satisfaz a relação

$$x(ht) =_d h^H x(t), \quad (3.8)$$

é dita ser *auto-similar*.  $A =_d$  indica que ambos os termos da equação têm a mesma função de distribuição.  $H$  é uma constante ( $0 < H < 1$ ),  $h$  é um fator de escala temporal.

A constante  $H$  caracteriza o nível de auto-similaridade, fornecendo informações a respeito da taxa de recorrência de padrões similares no tempo em diferentes escalas.  $H \cong 1$  implica forte correlação positiva, ou seja, um crescimento de  $x(t)$  é, provavelmente, seguido por outro crescimento.  $H \cong 0$  indica uma forte correlação negativa, portanto, um acréscimo de  $x(t)$  seria seguido de um decréscimo, ao contrário, um decréscimo seria seguido de um acréscimo. Para  $H \cong 0,5$ , o sinal auto-similar  $x(t)$  é completamente não correlacionado (Signorini e Cerutti, 1999; Signorini e colegas, 1999).

O parâmetro de auto-similaridade é também conhecido como *expoente de Hurst*, *parâmetro de memória longa*, *parâmetro de correlação de longa duração*, ou ainda, *índice H*.

Cerutti e colegas (2007) apresentam de forma clara e direta conceitos relativos a parâmetros de escala e de processos de memória longa, além de apresentarem um estudo comparativo entre oito métodos diferentes de se obter parâmetros de escala. Dentre esses métodos, destaca-se o *detrended fluctuation analysis* (DFA) pela consistência de suas estimativas do expoente  $\alpha$  e por fornecer resultado para um amplo espectro de processos.

### 3.4.1 Análise de flutuações com tendências excluídas

Sob condições normais, flutuações na frequência cardíaca mostram um tipo de *correlação de longa duração* tipicamente exibida por sistemas dinâmicos longe do equilíbrio. Em contraste, certas doenças apresentam alterações nesta propriedade de correlação. Esta característica tem potencial utilidade na detecção de patologias. A técnica DFA (*detrended fluctuation analysis*), ou seja, *análise de flutuações com tendências excluídas*, quantifica essa propriedade de correlação em séries temporais fisiológicas não-estacionárias, e foi apresentado por Peng et al. em 1995.

Em relação a métodos convencionais de análise de sinais, essa técnica apresenta como vantagem o fato de permitir detecção de correlação de longa duração em séries temporais aparentemente não-estacionárias, e ainda evitar a detecção de aparente correlação de longa duração que são artefatos da não-estacionariedade.

A seguir, será apresentado de forma breve o algoritmo de DFA Peng e colegas (1995), em que é utilizada, para exemplo, uma série temporal de batimentos cardíacos, como a apresentada na Figura 3.11.

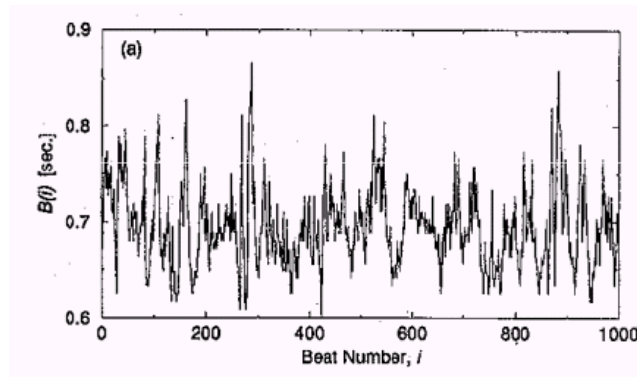


Figura 3.11: Série de batimentos cardíacos usada no exemplo. No eixo x tem-se o número de batimentos e no eixo y, o intervalo entre os batimentos. Fonte: Peng e colegas (1995).

1. A série é integrada por

$$y(k) = \sum_{i=1}^k [B(i) - B_{\text{med}}],$$

em que  $B(i)$  é o  $i$ -ésimo intervalo entre batimentos e  $B_{\text{med}}$  é a média dos intervalos entre batimentos.

2. A série temporal integrada é dividida em janelas de igual comprimento  $n$ .
3. Em cada janela de comprimento  $n$ , uma linha reta é ajustada aos dados, por meio de regressão linear, representando a tendência em cada janela, como mostra a Figura 3.12.

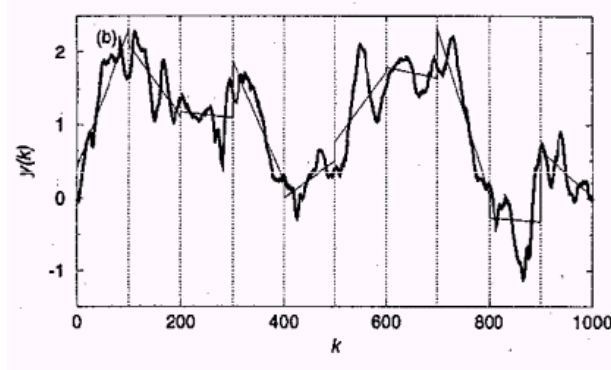


Figura 3.12: Série de batimentos cardíacos integrada. Fonte: Peng e colegas (1995).

A coordenada  $y$  dos segmentos de linha reta é denotada por  $y_n(k)$ .

4. A tendência da série temporal integrada  $y(k)$  é retirada pela subtração da tendência local  $y_n(k)$  em cada janela.
5. O RMS das flutuações da série integrada e sem tendências é calculada por

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (3.9)$$

Este cálculo é repetido ao longo de uma faixa de variação no valor de  $n$ , ou seja, no tamanho das janelas, para fornecer uma relação entre  $F(n)$ , a flutuação média, como função do comprimento da janela  $n$ .

Uma relação linear em um gráfico duplo log indica a presença de uma lei de variação. As flutuações podem ser caracterizadas por um expoente de escala  $\alpha$ , a inclinação da linha que relaciona  $\log F(n)$  com  $\log n$ . Assim, tem-se:

- $0 < \alpha < 0,5$ : indica um tipo diferente de correlação, alternância entre valores grandes e pequenos;
- $\alpha = 0,5$ : indica dados completamente descorrelacionados, como um ruído branco;
- $0,5 < \alpha \leq 1$ : indica persistente correlação de longa duração;
- $\alpha = 1$ : corresponde ao ruído  $1/f$ ;
- $\alpha = 1,5$ : indica comportamento típico de ruído Browniano.

Portanto, pode-se esperar que indivíduos saudáveis apresentem  $\alpha$  em torno de 1, pois é a situação na qual se tem correlação de longa duração, e que indivíduos patológicos apresentem um  $\alpha$  tendendo a 1,5, pois é a situação na qual não se terá uma correlação de longa duração (Peng e colegas, 1995). Lombardi (2000) relata que valores baixos de  $\alpha_1$  são um bom indicador de causas de mortalidade. Para que seja verificada a correlação de curta duração, tem-se  $n$  variando de 4 a 16, obtendo-se assim o valor de  $\alpha_1$ . Mas, para verificar a correlação de longa duração,  $n$  deve ser variado pelo menos de 16 a 64, e assim obtém-se  $\alpha_2$ . Segundo Peng e colegas (1995) foram encontrados os seguintes valores (média  $\pm$  desvio padrão) para os índices  $\alpha_1 = 1,201 \pm 0,178$  e  $\alpha_2 = 0,998 \pm 0,124$ , para pacientes normais.

Segundo Francis e colegas (2002) os índices  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são simplesmente versões ponderadas das relações espectrais  $LF/(HF+LF)$  e  $VLF/(LF+VLF)$ , respectivamente, multiplicadas por dois (dado uma faixa de 0 a 2). No espectro de potência de um sinal de VFC tem-se que: VLF é frequência muito baixa, LF é frequência baixa e HF é frequência alta.

### 3.5 Uma representação probabilística para o sinal de variabilidade da frequência cardíaca

Esta seção apresenta uma parte do procedimento desenvolvido por McSharry e colegas (2002) para construir séries sintéticas para os sinais de

variabilidade da frequência cardíaca. O modelo de McSharry e colegas (2002) é construído a partir de modelos probabilísticos, mas permite a inserção da informação de frequências de interesse. Esse procedimento é composto de uma parte principal, a partir da qual a série sintética é construída, e de algumas partes complementares, responsáveis por simular certos comportamentos como, por exemplo, o ciclo circadiano. Somente a parte principal é aqui apresentada, pois as demais fogem do interesse desta tese.

Em primeiro lugar, as frequências de interesse devem ser escolhidas para, em seguida, dar-se início à construção da série sintética  $\tilde{s}_k$ . Essas frequências devem pertencer às faixas de baixas frequências (LF) e altas frequências (HF), definidas no espectro de potência de séries de VFC de 5 min e que estão relacionadas com a ação do sistema nervoso autônomo no sistema cardíaco (Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, 1996).

Parte-se da construção do que seria um espectro de potência bimodal

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f), \quad (3.10)$$

que consiste da soma de duas distribuições Gaussianas,  $S_1(f)$  e  $S_2(f)$ , definidas por:

$$S_i(f) = \frac{\varrho_i^2}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[ -\frac{(f - f_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (3.11)$$

com média  $f_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Informações das bandas de frequências LF e HF da série de intervalos RR são incorporadas em  $S(f)$ . As frequências  $f_1$  e  $f_2$  são, respectivamente,  $f_{LF}$  e  $f_{HF}$ . As potências nas bandas LF e HF são dadas por  $\varrho_1^2$  e  $\varrho_2^2$ .

Tome-se, por exemplo, os seguintes valores para os referidos parâmetros:  $f$  variando de 0 a 0,5, com intervalos de 0,001;  $\sigma_1 = 0,01$  e  $\sigma_2 = 0,01$ ;  $\varrho_1^2 = 0,82$  e  $\varrho_2^2 = 0,68$ ;  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz. Substituindo-se esses valores nas equações (3.10) e (3.11), obtém-se o espectro bimodal apresentado na Figura 3.13. Esses valores foram escolhidos de forma empírica, a partir de valores usados por McSharry e colegas (2002).

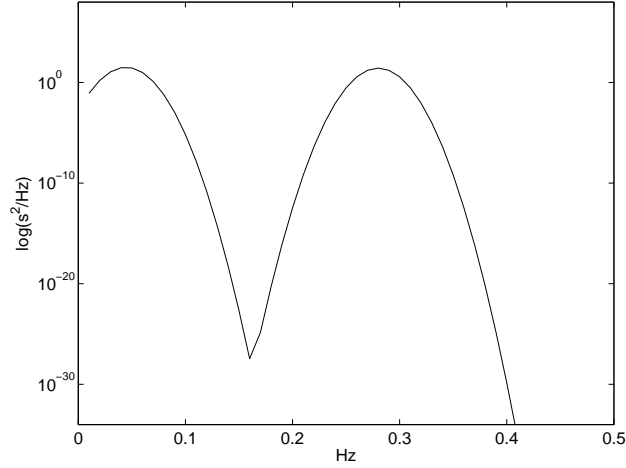


Figura 3.13:  $S(f)$ , espectro de potência construído por meio das equações (3.10) e (3.11), que constitui-se de duas distribuições Gaussianas centradas em  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz.

Ao tomar-se a Transformada Inversa de Fourier da seqüência de números complexos, cujas amplitudes são  $\sqrt{S(f)}$  e fases uniformemente distribuídas entre 0 e  $2\pi$  radianos, uma série com espectro semelhante a  $S(f)$  é obtida.

$$|\tilde{S}(e^{j\Omega})| = \sqrt{\text{Re}[\tilde{S}(e^{j\Omega})]^2 + \text{Im}[\tilde{S}(e^{j\Omega})]^2} = \sqrt{S(f)},$$

$$\angle \tilde{S}(e^{j\Omega}) = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[\tilde{S}(e^{j\Omega})]}{\text{Re}[\tilde{S}(e^{j\Omega})]} \right) = f(x|0,2\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } x \in [0,2\pi] \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

em seguida, tem-se

$$\tilde{s}_k = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{S}(e^{j\Omega})] \quad (3.12)$$

O resultado desse processo é mostrado na Figura 3.14, na qual podem ser vistas a série  $\tilde{s}_k$  e seu espectro de potência, que, como esperado, é semelhante ao mostrado na Figura 3.13.

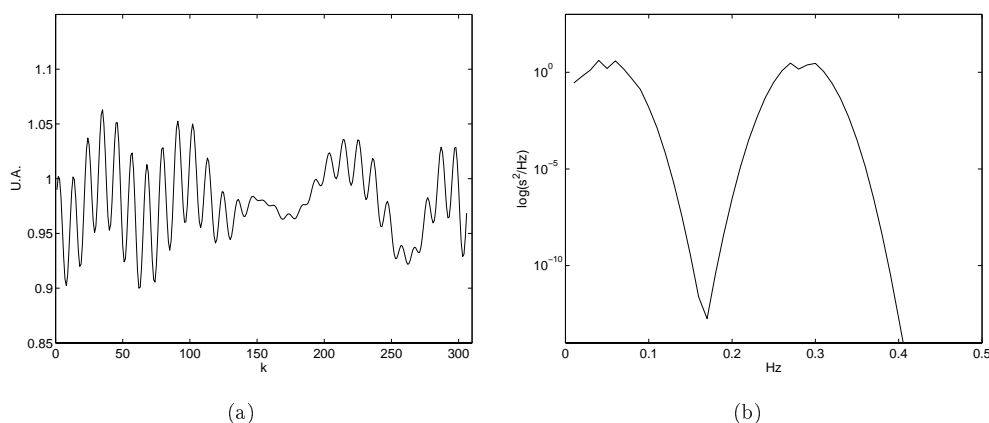


Figura 3.14: (a) Série sintética  $\tilde{s}_k$  construída por meio do procedimento de McSharry e colegas (2002). (b) Espectro de potência da série  $\tilde{s}_k$ .

## 3.6 Representações não-lineares

As principais etapas de um problema de identificação são: *testes dinâmicos e coletas dos dados; escolha da representação matemática a ser usada; determinação da estrutura do modelo; estimação de parâmetros; validação do modelo* (Aguirre, 2004).

Dentre as várias representações não-lineares que podem ser utilizadas em identificação de sistemas, a representação utilizada neste trabalho é a NARMAX (do inglês *nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables*). Um modelo NARMAX é normalmente representado da seguinte forma (Leontaritis e Billings, 1985):

$$\begin{aligned}
 y(k) = & F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u), \dots \\
 & \dots, e(k-1), \dots, e(k-n_e)] + e(k),
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

sendo que  $n_y$ ,  $n_u$  e  $\tau_d$  são os maiores atrasos em  $y$ ,  $u$  e atraso puro de tempo, respectivamente;  $e(k)$  é o ruído e  $n_e$  é o maior atraso no modelo de ruído.  $F$  é uma função não-linear. Neste trabalho foi utilizada a representação polinomial para  $F$ .

### 3.6.1 Identificação de modelos NARMAX polinomiais

Considere o modelo NARMA (Auto-regressivo não-linear com média móvel, do inglês: *Nonlinear Autoregressive Moving Average*) (Leontaritis e Bil-

lings, 1985)

$$y(k) = F^l[y(k-1), \dots, y(k-n_y), e(k-1), \dots, e(k-n_e)] + e(k), \quad (3.14)$$

no qual  $n_y$  e  $n_e$  são os máximos atrasos considerados para os termos de processo e de ruído, respectivamente,  $y(k)$  é uma série temporal,  $e(k)$  descreve as incertezas, possível ruído ou dinâmica não modelada, e  $F^l[\cdot]$  é alguma função não-linear de  $y(k)$  e  $e(k)$  com grau de não-linearidade  $l \in \mathbb{Z}^+$ . Nesta seção o mapa  $F^l[\cdot]$  é um polinômio de grau  $l$ . Para estimar os parâmetros deste mapa, a equação (3.14) deve ser expressa na forma de uma regressão linear em  $\hat{\theta}$  como

$$y(k) = \psi^T(k-1)\hat{\theta} + \xi(k), \quad (3.15)$$

sendo que  $\xi(k)$  é o resíduo no instante  $k$  e

$$\psi^T(k-1) = [\psi_y^T(k-1) \quad \psi_{y,\xi}^T(k-1) \quad \psi_\xi^T(k-1)],$$

$$\hat{\theta} = [\hat{\theta}_y^T \quad \hat{\theta}_{y,\xi}^T \quad \hat{\theta}_\xi^T]^T,$$

e  $\psi(k-1)$  é um vetor que contém combinações lineares e não-lineares dos termos de  $y(k-i)$  e  $\xi(k-j)$  até o instante  $k-1$ , inclusive. Deve ser notado que os regressores do modelo são combinações lineares e não-lineares de grau até  $l$  das variáveis  $[y(k-1), \dots, y(k-n_y)]$ . Portanto, a ordem do modelo dinâmico é  $n_y$ . A indicação  $(k-1)$  em (3.15) é para lembrar que a última informação para o modelo corresponde ao instante  $(k-1)$ , enfatizando assim, o caráter preditivo do modelo. As variáveis independentes do modelo (3.15), chamadas regressores, foram agrupadas em três conjuntos, a saber: a parte determinística do modelo  $\psi_y(k-1)$ , que inclui combinações lineares e não-lineares dos termos de saída,  $\psi_{y,\xi}(k-1)$  que inclui termos não-lineares cruzados de saída e resíduos, e  $\psi_\xi(k-1)$  com combinações lineares e não-lineares dos termos dos resíduos  $\xi(k-j)$ . É importante compreender que ao fazer previsões, somente a parte determinística do modelo será usada, isto é,  $\hat{y}(k) = \psi_y(k-1)\hat{\theta}_y$ . A parte estocástica do modelo é usada somente durante

a estimação de parâmetros como meio de reduzir a polarização induzida por ruído nas observações. Este é um procedimento padrão em identificação de sistemas (Ljung, 1987).

Um modelo dinâmico do tipo (3.15) tomado sobre uma massa de dados gera restrições que podem ser representadas por uma equação matricial

$$\mathbf{y} = \Psi\hat{\theta} + \xi,$$

na qual  $\Psi \in \mathbb{R}^{(N-n_y) \times (n_p+n_\xi)}$ , para o caso de  $N$  observações, é conhecida como a matriz de regressores. O vetor de resíduos  $\xi$  é definido como a diferença entre o vetor de dados medidos  $\mathbf{y}$ , e a predição um passo à frente  $\Psi\hat{\theta}$ . O vetor de parâmetros  $\theta$  pode ser estimado utilizando-se a técnica dos mínimos quadrados ortogonais (Chen e colegas, 1989; Aguirre, 2004). O estimador de mínimos quadrados definido por

$$\hat{\theta} = (\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T\mathbf{y}$$

é utilizado, e minimiza a função custo

$$J = 1/N \sum_{k=1}^N \xi^2(k) = 1/N \xi^T\xi = 1/N \|\xi\|^2,$$

sendo que  $\|\cdot\|$  indica a norma Euclidiana.

A estimação de parâmetros se faz para um modelo linear nos parâmetros, conforme expresso por (3.15) e representada pela equação

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_p+n_\xi} \hat{g}_i w_i(k) + \xi(k), \quad (3.16)$$

na qual  $n_\theta = n_p + n_\xi$  é o número de termos do modelo (do processo mais o ruído),  $\{\hat{g}_i\}_{i=1}^{n_p+n_\xi}$  são parâmetros constantes, e os regressores  $\{w_i(k)\}_{i=1}^{n_p+n_\xi}$  são construídos de forma que sejam ortogonais sobre dados (Billings e colegas, 1989; Chen e colegas, 1989).

Será apresentado a seguir um critério que foi usado na determinação dos regressores de um modelo, denominado *taxa de redução de erro*. Multiplicando-se (3.16) por ela mesma e tomando-se o valor médio, tem-se

$$\langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 \langle w_i, w_i \rangle + \langle \xi, \xi \rangle, \quad (3.17)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica o produto interno.

A interpretação de (3.17) é a de que o valor quadrático de  $y(k)$  pode ser composto, usando uma base ortogonal, como o somatório dos valores quadráticos de cada regressor ortogonal respectivamente multiplicados pelos seus parâmetros. A parcela não explicada pelos regressores é igual à soma do valor quadrático dos resíduos,  $\xi(k)$ .

A equação (3.17) permite quantificar a importância de cada regressor individualmente. Considerando o caso em que não há nenhum regressor,  $n_\theta = 0$ , fica claro que o erro cometido é o próprio sinal observado, uma vez que o modelo não explica nada das observações. Se o  $i$ -ésimo regressor for acrescentado ao modelo, a parcela de  $\langle y, y \rangle$  que passa a explicar é  $\hat{g}_i^2 \langle w_i, w_i \rangle$ . Portanto, a *taxa de redução de erro* devido à inclusão de  $i$ -ésimo regressor expressa como uma fração da soma dos valores quadráticos dos dados é (Billings e colegas, 1989; Chen e colegas, 1989),

$$[ERR]_i = \frac{\hat{g}_i^2 \langle w_i, w_i \rangle}{\langle y, y \rangle}, \quad (3.18)$$

sendo que a sigla ERR vem do inglês *error reduction ratio*. Um critério que pode ser usado para ajudar a escolher os regressores de um modelo é incluir os regressores com maior ERR dentre um conjunto de regressores candidatos normalmente grande. Esse método é descrito e ilustrado em detalhes em Aguirre (2004).

Como está-se tratando de modelos NARMA, deve-se usar o estimador EMQ (Estendido de Mínimos Quadrados) e, nesse caso, a matriz  $\Psi$  contém os regressores de ruído que precisam ser atualizados iterativamente (Aguirre, 2004).

# MATERIAIS E MÉTODOS

---

*“Referi-vos essas coisas para que tenhais paz em mim. No mundo tereis aflições. Mas coragem! Pois eu venci o mundo.” “Vinde a mim todos vós, fatigados e sobrecarregados, e eu vos aliviarei. Tomai sobre os ombros o meu jugo e aprendei de mim, que sou manso e humilde de coração, e achareis descanso para vossas almas. Pois meu jugo é suave e meu peso é leve.”*

João 16,33; Mateus 11, 28-30.

Este capítulo tem a finalidade de apresentar os sistemas dinâmicos, que serão que serão usados para validar o procedimento proposto, e as séries de VFC que serão estudados. Além disso, pretende-se apresentar em detalhes o procedimento de modelagem proposto nesta tese. Tal procedimento é composto de algumas etapas, as quais serão apresentadas na mesma seqüência de seu emprego. Na última seção será apresentado o algoritmo, passo a passo, para a aplicação do procedimento. O algoritmo tem o objetivo de auxiliar na compreensão do procedimento como um todo, além de evidenciar os pontos de intervenção do usuário.

## 4.1 Sistemas e sinais estudados

### 4.1.1 Os sistemas

Nesta seção serão apresentados três sistemas dinâmicos conhecidos: o *mapa logístico*, o *sistema de Rössler* e o *mapa de Hénon*. Esses sistemas

são usados para validar o procedimento de modelagem apresentado neste capítulo, antes que o mesmo seja utilizado no estudo das séries de VFC. Tais sistemas foram escolhidos pelo fato de serem largamente estudados na literatura e, portanto, já conhecidos. Isso permitiu avaliar com segurança a aplicabilidade e o desempenho do procedimento, para, em seguida, poder aplicá-lo às séries de variabilidade da frequência cardíaca, que são objeto de estudo desta tese.

Serão também apresentadas as adaptações feitas nesses sistemas, a fim de que adquirissem algumas características dos sistemas alvo do procedimento apresentado, ou seja, sistemas que apresentam uma dinâmica imersa em uma importante estocasticidade e para os quais o sinal de entrada não é medido. Nesse sentido, foi adicionado ruído de distribuição Gaussiana aos três sistemas de modo a ter sinais com características semelhantes às do sinal apresentado na Figura 1.2. Essa quantidade de ruído foi determinada empiricamente, isto é, foi adicionada uma quantidade mínima de ruído capaz de fazer com que as saídas dos modelos de cada um dos três sistemas dinâmicos em questão, ao serem modelados com um modelo NARMA, convergissem para um ponto fixo após algumas iterações, como no caso apresentado na Figura 1.2. Importa ressaltar duas coisas: *i*) a quantidade de ruído adicionada a cada sistema não foi a mesma, devido às características dinâmicas de cada sistema; *ii*) tomou-se o cuidado de adicionar a quantidade mínima necessária para atingir o objetivo descrito neste parágrafo, mas que ao mesmo tempo compromettesse o menos possível a dinâmica dos sistemas. Dessa forma, acredita-se que as adaptações implementadas nos três sistemas dinâmicos atingiram os objetivos.

### O mapa logístico (May, 1976)

O mapa logístico  $x_k = \lambda(1 - x_{k-1})x_{k-1}$  foi simulado com  $\lambda = 3,89$  e condição inicial  $x_0 = 0,14$  produzindo  $N = 1.100$  pontos. Esses dados têm média e variância iguais a  $\bar{x} = 0,6050$  e  $\sigma_x^2 = 0,0834$ , respectivamente. A esses dados foi adicionado ruído Gaussiano com média zero e variância  $\sigma_e^2 = 0,01$ , isto é,  $e_k \sim \mathcal{N}(0; 0,01)$ . Os dados resultantes  $y_k = x_k + e_k$  têm uma variância 15% maior que a da série sem ruído, obtida pela simulação do mapa logístico, que é  $\bar{y} = 0,6054$  e  $\sigma_y^2 = 0,0956$ .

Ao se aplicar o procedimento a esse sistema, a série  $y_k$  será considerada como sinal a ser modelado. A Figura 4.1 mostra os mapas de primeiro retorno

de  $x_k$  e  $y_k$ .

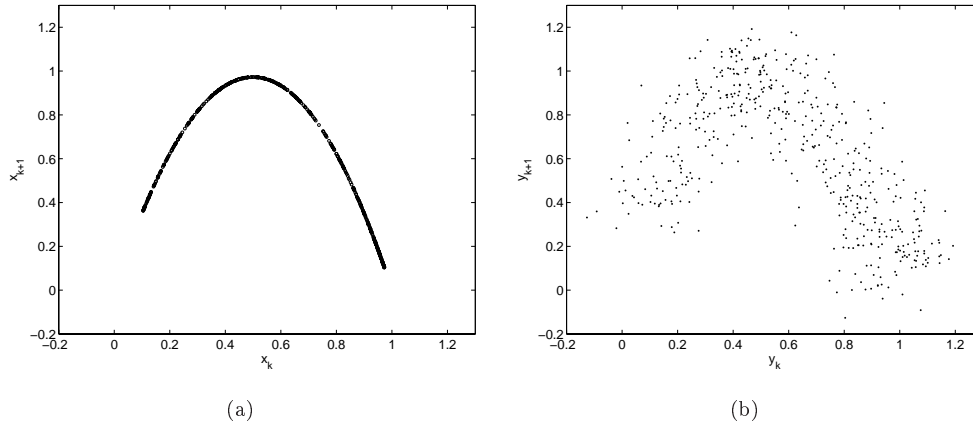


Figura 4.1: Mapas de primeiro retorno: (a)  $x_k$  e (b)  $y_k$ .

## O sistema de Rössler

O sistema de Rössler é dado por (Rössler, 1976)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (4.1)$$

e, neste exemplo,  $a = 4,3$ ;  $b = 2$  e  $c = 4$  para os quais (4.1) converge para uma dinâmica caótica. Seja definida a seguinte seção de Poincaré

$$P = \{(x_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y_n = y_c, \dot{y}_n > 0\}, \quad (4.2)$$

em que  $y_c$  é a coordenada  $y$  do ponto fixo interno (Exemplo A.1.1-B). Se (4.1) foi integrado e se forem tomadas as sucessivas interseções de tais soluções com a seção  $P$ , o resultado será um conjunto de pontos. Foi decidido analisar esse conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^2$ , pelo registro de sua projeção numa das coordenadas. O resultado é uma série temporal,  $x_k$ , para a qual o mapa de primeiro retorno é também uma parábola. A diferença entre esse caso e o do exemplo precedente é que, diferentemente do mapa logístico, no presente exemplo a equação que descreve o mapa de primeiro retorno é, *a priori*, desconhecido e não há uma forma analítica conhecida de escrever tais equações. Entretanto, é possível começar a partir da série temporal,  $x_k$ , e construir um modelo discreto diretamente desses dados e obter o modelo

$$x_k = -0,3005 - 0,1172x_{k-1}^3 + 2,9956x_{k-1} + 0,486x_{k-1}^2. \quad (4.3)$$

No que se segue, o modelo 4.3 será usado somente como uma referência. Portanto, assume-se que é característico da dinâmica de Rössler.

O restante desse exemplo seguirá proximamente o procedimento aplicado aos demais sistemas (seção 4.3). O ruído  $e_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,1240)$  foi adicionado a  $x_k$  para obter os dados a serem modelados. Portanto,  $y_k = x_k + e_k$ .<sup>1</sup> Note-se que  $\sigma_x^2 = 1,5036$  e  $\sigma_y^2 = 1,6269$ , conseqüentemente a adição de ruído resultou em um aumento de 8,2% na variância do sinal.

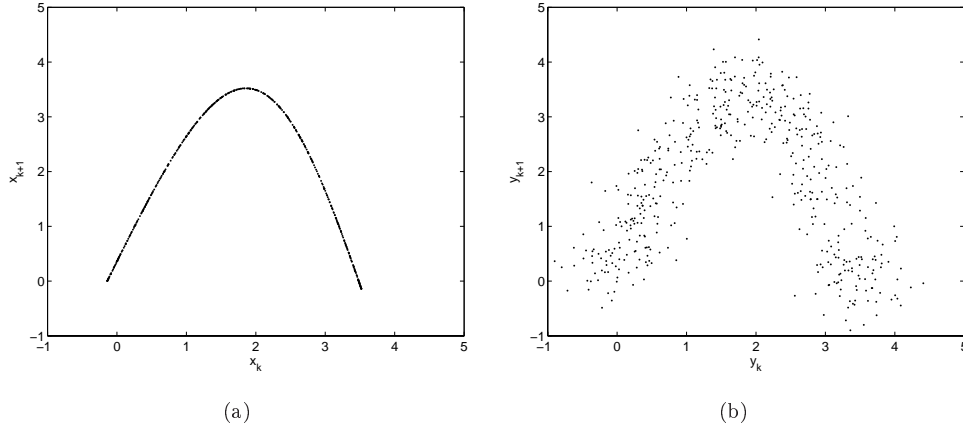


Figura 4.2: Mapas de primeiro retorno: (a)  $x_k$  e (b)  $y_k$ .

### O mapa de Hénon (Hénon, 1976)

O mapa de Hénon foi simulado com ambos os ruídos, aditivo e multiplicativo:

$$\begin{cases} x_k = 1 - 1,4 x_{k-1}^2 + w_{k-1} + m_k \\ w_k = 0,3 x_{k-1}, \end{cases} \quad (4.4)$$

em que  $m_k \sim \mathcal{N}(0,0; 1,22 \times 10^{-4})$ . A série temporal usada para identificação foi  $y_k = x_k + e_k$ , em que  $e_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0494)$ .

---

<sup>1</sup>Em um problema prático, a série  $y_k$  é o ponto de partida.

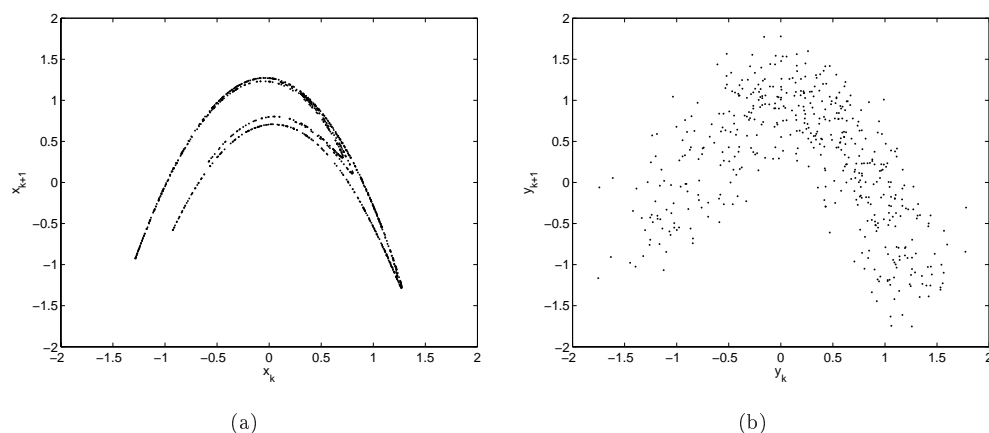


Figura 4.3: Mapas de primeiro retorno: (a)  $x_k$  e (b)  $y_k$ .

### 4.1.2 Os Sinais

As séries de VFC analisadas neste trabalho foram obtidas mediante registro dos intervalos RR do eletrocardiograma (ECG) de voluntários adultos durante realização de exame Holter como projeto do Prof. Antônio Luiz Pinho Ribeiro, intitulado: “Disfunção autonômica na doença de Chagas — mecanismos e implicações prognósticas” (Ribeiro, 1996). No protocolo experimental foram consideradas as recomendações da Organização Mundial de Saúde e da Declaração de Helsinque de 1975, assim como a Resolução 196/96 sobre Pesquisa envolvendo Seres Humanos do Ministério da Saúde, no sentido de se salvaguardarem os direitos e o bem estar das pessoas estudadas. Os exames propostos foram realizados apenas após a obtenção do consentimento por escrito dos indivíduos que aceitaram participar do estudo. Os procedimentos em questão foram aprovados pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Hospital das Clínicas da UFMG em 14 de maio de 1997.

Foram utilizados dois registros de 24 h de um voluntário do grupo controle, isto é, de um indivíduo de 27 anos e considerado em estado normal de saúde. Desses registros de 24 h foram selecionadas séries de 5 min, para serem usadas na etapa de modelagem. A seleção foi feita por meio da aplicação de um teste de estacionariedade (Gomes e colegas, 2000; Guimarães, 1996).

## 4.2 Modelagem dos Sinais de Variabilidade da Freqüência Cardíaca

O objetivo desta seção é descrever as etapas que compõem o algoritmo empregado na construção e seleção de modelos NARMAX utilizados neste trabalho. Embora esse algoritmo tenha sido desenvolvido com vista a ser empregado no estudo de séries de VFC, como será visto, por meio de seu emprego em alguns sistemas dinâmicos (Seção 4.1.1), ele pode ter um caráter mais geral.

Para encontrar as famílias de modelos, serão utilizadas técnicas de identificação de sistemas, diferentemente dos trabalhos apresentados no número especial do IJBC (Seção 1), os quais utilizaram modelagem caixa branca. A motivação básica é: *“Suponha haver disponibilidade dos dados de entrada,  $u(k)$ , e de saída,  $y(k)$ , de um sistema real qualquer. A identificação de sistemas se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em parte e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados. Tenta-se, portanto, responder à seguinte pergunta: que modelo, ao ser excitado por  $u(k)$ , produz em sua saída o sinal  $y(k)$ ?”*<sup>2</sup> Tal pergunta é, claramente, muito geral e, na prática, há que se restringir a busca a algumas famílias específicas de modelos” (Aguirre, 2004). No que se refere ao objeto deste trabalho, tais restrições serão melhor esclarecidas na seção 4.2.2.

Na Figura 4.5 é ilustrado o caso em que o sistema considerado é autônomo. Em tais casos não se conhece a *causa*, mas somente o sinal de saída, isto é, o efeito. Tal fato pode ter diferentes motivações, entre elas, a impossibilidade de se medir o sinal de causa, ou seja, a excitação do sistema. Isso é o que ocorre no caso dos batimentos cardíacos, em que normalmente só se registram o eletrocardiograma do qual é extraída a série de intervalos RR.

Oliveira e colegas (2002) e Oliveira (2002) apresentam o processo de modelagem de sinais de VCF como sistemas autônomos, por meio de modelos NARMA polinomiais. Nesses termos, os modelos não podem ser utilizados para fins de síntese ou de previsões mais longas, pois, na ausência de uma excitação persistente, a saída do modelo tende a estabilizar-se em um ponto fixo (veja Figura 1.2).

---

<sup>2</sup> Isso é ilustrado na Figura 4.4

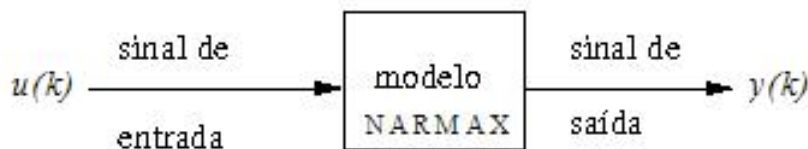


Figura 4.4: Esquema clássico da chamada identificação caixa-preta de sistemas SISO (*single input single output*). De posse dos dados medidos de entrada e saída de determinado sistema, tenta-se encontrar um modelo, ou uma família de modelos, que represente, de forma aproximada, as relações de causa e efeito.

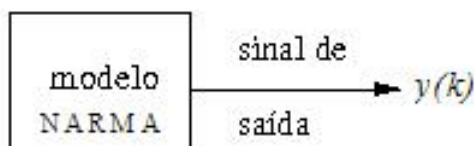


Figura 4.5: Ilustração do processo de identificação de um modelo para o caso de sistema autônomo. Nesse caso, o modelo é obtido somente a partir de dados de saída  $y(k)$ .

Assim sendo, as características dos sistemas que são objeto, ou estão no foco deste trabalho, não se adequam a nenhum dos dois esquemas precedentes. Portanto, para evitar os inconvenientes dos esquemas anteriores, seria necessário incluir uma entrada nesse processo. Dessa forma, o esquema de identificação apropriado à natureza particular desses sistemas é mostrado, de forma resumida, na Figura 4.6. Nesse esquema, consta um sinal de entrada que se faz necessário para manter a excitação do modelo. Dado que a excitação verdadeira não pode ser medida, é mister a construção de uma *entrada sintética* para sub-rogar a primeira. Dessa forma, a construção da entrada sintética passa a fazer parte do algoritmo de identificação dos modelos NARMAX.

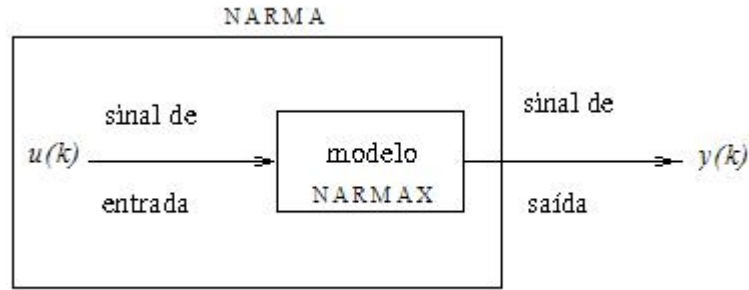


Figura 4.6: Identificação de sistemas em que a construção de um sinal de entrada sintética também faz parte do problema da modelagem.

### 4.2.1 Entrada sintética

Se um modelo converge para uma solução trivial, como um ponto fixo, ao invés de manter flutuações, uma maneira de manter o modelo ativo é incluir no mesmo algum tipo de sinal de entrada. Por ora, assume-se que uma entrada aleatória  $\tilde{u}_k$  é usada. Por um lado, o uso desse tipo de sinal é interessante pelo fato de ter todas as frequências e, em princípio, ele deveria ter potência espectral finita na mesma faixa de frequências como a saída.<sup>3</sup> Nesse caso, o modelo deve ser visto como um filtro com dois objetivos principais: 1) atenuar frequências indesejadas, e 2) estabelecer correlações lineares e não-lineares dentro dos dados. Por outro lado, o simples uso de uma entrada aleatória não funciona pelo fato dessa entrada não ser correlacionada à saída e, conseqüentemente, é incapaz de explicar quaisquer características dinâmicas nos dados.

O que é proposto nesta seção é a alteração da entrada  $\tilde{u}_k$  de tal maneira a não modificar suas propriedades espectrais originais, mas forçar alguma correlação entre a entrada sintética e a saída  $y_k$ . A fim de realizar tal intento, a Transformada de Fourier de ambos os sinais é calculada, resultando assim em duas funções complexas  $\tilde{U}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}[\tilde{u}_k]$  e  $Y(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}[y_k]$ , respectivamente. Claramente, as entidades transformadas são funções da frequência, tais que

$$\begin{aligned} \tilde{U}(e^{j\Omega}) &= \text{Re}[\tilde{U}(e^{j\Omega})] + j \text{Im}[\tilde{U}(e^{j\Omega})] \\ &= |\tilde{U}(e^{j\Omega})| \exp\left(j \angle \tilde{U}(e^{j\Omega})\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

<sup>3</sup>Outro tipo de entrada pode ser definido de forma a se obter alguma vantagem.

em que  $\angle$  indica o ângulo (fase) do argumento e

$$\begin{aligned} |\tilde{U}(e^{j\Omega})| &= \sqrt{\operatorname{Re}[\tilde{U}(e^{j\Omega})]^2 + \operatorname{Im}[\tilde{U}(e^{j\Omega})]^2}, \\ \angle \tilde{U}(e^{j\Omega}) &= \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im}[\tilde{U}(e^{j\Omega})]}{\operatorname{Re}[\tilde{U}(e^{j\Omega})]} \right), \\ j &= \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Expressões equivalentes podem ser escritas para  $Y(e^{j\Omega})$ .

Uma terceira função complexa é artificialmente construída tomando-se o módulo de  $\tilde{U}(e^{j\Omega})$  e a fase de  $Y(e^{j\Omega})$ . Portanto,

$$U(e^{j\Omega}) = |\tilde{U}(e^{j\Omega})| \exp(j \angle Y(e^{j\Omega})). \quad (4.6)$$

Finalmente, a entrada sintética é obtida simplesmente tomando-se a Transformada Inversa de Fourier da terceira função complexa, assim  $u_k = \mathcal{F}^{-1}[U(e^{j\Omega})]$ . Uma conseqüência desse procedimento é que: *i*) o espectro de potência de  $u_k$  é o mesmo que o de  $\tilde{u}_k$ ; e *ii*)  $u_k$  é correlacionado em certo grau com  $y_k$ , diferentemente de  $\tilde{u}_k$ .

Se forem usados  $u_k$  e  $y_k$  para construir o modelo, uma vez que agora há correlação entre tais sinais, termos de entrada serão selecionados para o modelo e os respectivos parâmetros não serão estatisticamente insignificantes. O resultado final será um modelo não-autônomo que pode ser estimulado por um sinal do tipo  $u_k$  e que, como será mostrado mais à frente, retém algumas características da dinâmica subjacente.

Finalmente, deve-se notar que  $u_k$  pode ser escolhido de maneira a ter algumas características dos dados  $y_k$ . Por exemplo,  $u_k$  poderia ter potência espectral significativa em freqüências dominantes de  $y_k$ . Isso garantiria *per se* que as iterações do modelo teriam naturalmente alguma potência que permaneceria em faixas de freqüências específicas. Conseqüentemente, o modelo não-linear poderia aprender, durante o treinamento, como transferir potências espectrais em  $u_k$  para faixas de freqüências dominantes e não-dominantes. Tal característica é conhecida estar presente em modelos não-lineares (Peyton-Jones, 1990).

Nesse sentido, o sinal de entrada  $u_k$  utilizado no procedimento de modelagem apresentado nesta tese, aplicado aos sinais de VFC, é construído a partir do sinal sintético obtido por meio do procedimento de McSharry e colegas (2002), apresentado na Seção 3.5. A motivação para usá-lo aqui é a possibilidade de construí-lo de forma que tenha potência espectral importante

em frequências que sabidamente têm relação com a ação do sistema nervoso autônomo no controle do ritmo cardíaco. Refere-se aqui às frequências que estejam em destaque nas regiões de baixas (LF, 0,04 a 0,15 Hz) e altas (HF, 0,15 a 0,4 Hz) frequências no espectro de potência da série de VFC usada na identificação do modelo.

Conforme a Seção 3.5, primeiramente deve-se escolher os dois valores de frequências. Para isso, deve-se obter o espectro de potência da série de VFC que será usada na identificação do modelo NARMAX. Essas séries têm, invariavelmente, duração de 5 min e contêm, de um modo geral, entre 300 e 500 pontos. Assim sendo, esse espectro foi construído por meio de um único periodograma, obtido de 256 amostras da série e utilizando uma janela de Hanning. Como o sinal não foi interpolado e reamostrado, assume-se a frequência de amostragem sendo igual ao inverso do intervalo RR médio do registro de 5 min. A Figura 4.7b apresenta o espectro de potência de uma série de VFC, 5 min, com 306 pontos (Figura 4.7a). Nesse espectro são destacadas as bandas de frequências LF e HF, e as respectivas frequências  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz. Tais frequências foram escolhidas por apresentarem os maiores picos em cada uma das mencionadas bandas de frequência. Esse critério de escolha das frequências foi estabelecido de maneira subjetiva.

A Figura 4.7b mostra picos proeminentes nas regiões nomeadas do espectro. Mas nem sempre isso acontece, pois há também os casos nos quais ocorre uma concentração da potência espectral nas regiões de muito baixas (0,003 a 0,04 Hz) e de baixas frequências. Não obstante, o critério de escolha é sempre o mesmo, ou seja, mesmo não havendo um pico muito proeminente na região de HF, a frequência escolhida é aquela que se destaca, ainda que minimamente, em relação às demais na respectiva região.

Após a escolha das frequências, dá-se início à construção do sinal de entrada sintético  $\tilde{u}_k$ , conforme a Seção 3.5. Dessa forma, utilizando os seguintes valores para os parâmetros de (4.7) e (4.8):  $f$  variando de 0 a 0,5, com intervalos de 0,001;  $\sigma_1 = 0,01$  e  $\sigma_2 = 0,01$ ;  $\varrho_1^2 = 0,82$  e  $\varrho_2^2 = 0,68$ ;  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz., obtém-se o espectro de potência bimodal.

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f), \quad (4.7)$$

que consiste da soma de duas distribuições Gaussianas,  $S_1(f)$  e  $S_2(f)$ , definidas por:

$$S_i(f) = \frac{\varrho_i^2}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[ -\frac{(f - f_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (4.8)$$

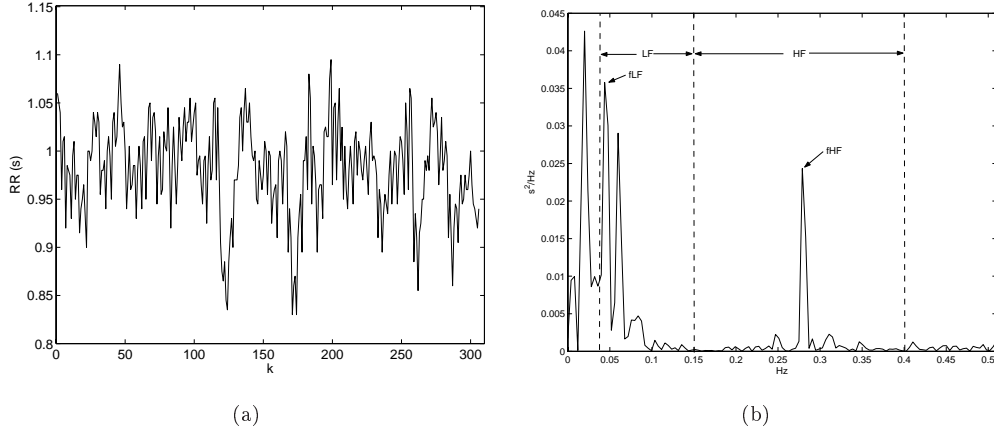


Figura 4.7: (a) Série de VFC de 5 min com 306 pontos. (b) Espectro de potência da série de VFC. Destacam-se as bandas de freqüência LF e HF, e as respectivas freqüências  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz, escolhidas como sendo os maiores picos em cada uma das bandas.

Ao tomar-se a Transformada Inversa de Fourier da seqüência de números complexos, cujas amplitudes são  $\sqrt{S(f)}$  e fases uniformemente distribuídas entre 0 e  $2\pi$  radianos, uma série com espectro semelhante a  $S(f)$  é obtida. Como na Equação 4.5:

$$\begin{aligned} |\tilde{U}(e^{j\Omega})| &= \sqrt{S(f)}, \\ \angle \tilde{U}(e^{j\Omega}) &= f(x|0,2\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } x \in [0,2\pi] \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

em seguida, tem-se

$$\tilde{u}_k = \mathcal{F}^{-1}[U(e^{j\Omega})] \quad (4.9)$$

e, por fim, a média dos intervalos RR é somada à série, e  $\tilde{u}_k$ , assim obtida, é mostrada na Figura 4.8a.

$$\tilde{u}_k \leftarrow \tilde{u}_k + RR_m. \quad (4.10)$$

Nesse ponto, tem-se uma série  $\tilde{u}_k$  que contém informações espectrais obtidas da série de VFC estudada (Figura 4.9a). Mas assim como no início desta seção, não há, ainda, correlação com a série original. A fim de estabelecer a existência de correlação entre  $\tilde{u}_k$  e a série de VFC, o procedimento de ajuste

de fases apresentado nesta seção. A série  $u_k$ , que resulta dessa operação, é mostrada na Figura 4.8b. A Figura 4.9b mostra a semelhança do espectro de potência de  $u_k$  em relação ao de  $\tilde{u}_k$ .

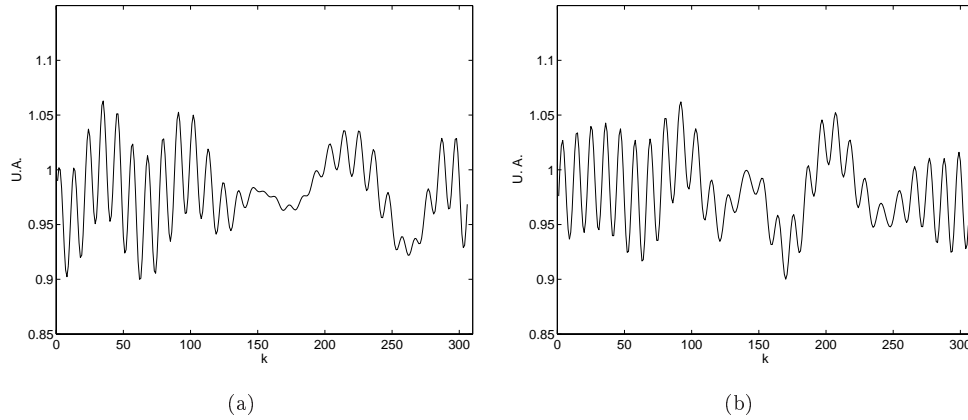


Figura 4.8: (a) Entrada sintética  $\tilde{u}_k$  (sem fase ajustada) construída por meio do procedimento apresentado na Seção 3.5. (b) Entrada sintética  $u_k$  (com fase ajustada) construída a partir das séries  $\tilde{u}_k$  e de VFC, por meio do procedimento apresentado nesta seção.

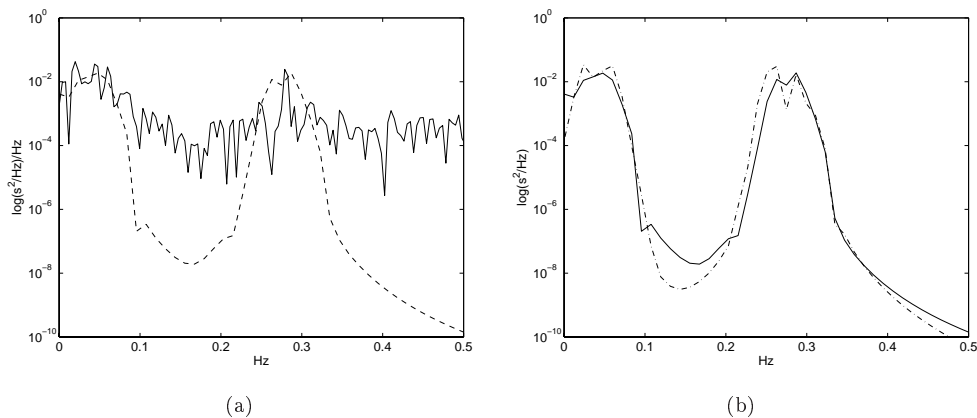


Figura 4.9: (a) Espectro de potência da série de VFC (—) sobreposto pelo espectro de potência de  $\tilde{u}_k$  (-.-). (b) Espectro de potência de  $\tilde{u}_k$  (—) sobreposto pelo espectro de potência de  $u_k$  (-.-).

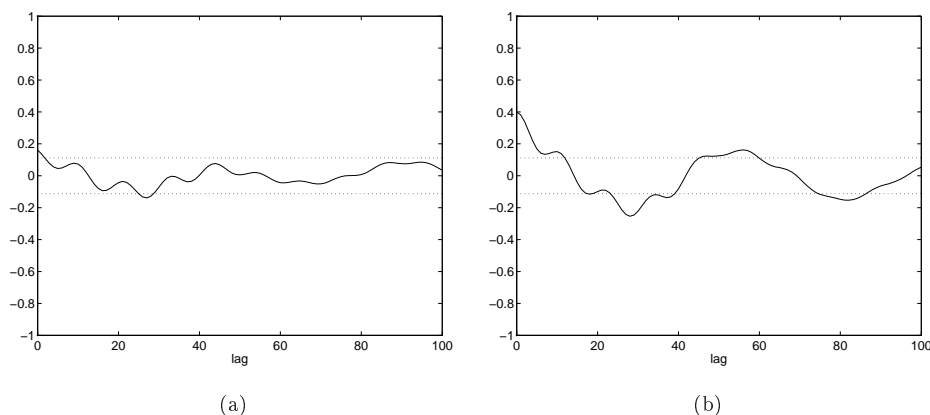


Figura 4.10: (a) Função de correlação cruzada entre  $\tilde{u}_k$  e a série de VFC. Índice de correlação: 0,16. (b) Função de correlação cruzada entre  $u_k$  e a série de VFC. Índice de correlação: 0,40.

Por meio dos procedimentos adotados, foi possível: construir entradas artificiais cujos espectros de potência são tais como planejados, isto é, apresentam potência espectral concentrada nas frequências escolhidas; e também, foi estabelecida correlação entre uma das séries artificiais e a série original, como esperado.

Fica patente o aumento de correlação entre a entrada artificial, agora  $u_k$ , e a série (medida) de VFC (ver Figura 4.10); o coeficiente de correlação entre essas duas séries é igual a 0,40.

A partir dessas observações, verificou-se a necessidade de um novo ajuste nos parâmetros usados para gerar  $S(f)$ , a fim de se obter uma entrada sintética  $u_k$  que atenda aos seguintes requisitos:

- apresentar espectro de potência circunscrito à mesma região na qual se concentra o espectro de potência do sinal de VFC (já garantido);
- apresentar média e variância próximas àquelas apresentadas pelo sinal de VFC;
- apresentar um coeficiente de correlação entre  $u_k$  e a série de VFC de no mínimo 0,60.

Esses requisitos foram determinados de maneira subjetiva. A busca pelos valores de parâmetros que possibilitem atendê-los será apresentada a seguir.

## Escolha dos Parâmetros

Para atender aos requisitos esperados ao se construir uma entrada sintética  $u_k$  (Seção 4.2.1), a única via é a busca por uma combinação dos valores dos parâmetros das equações (4.7) e (4.8). Tal busca se dá por tentativa e erro. Nesta seção, será apresentada uma maneira de tornar essa tarefa mais direcionada.

Dentre os parâmetros, o comprimento da série a ser construída e as frequências  $f_{LF}$  e  $f_{HF}$  são previamente fixados. Portanto, é possível variar apenas  $\sigma_i$  e  $\varrho_i^2$ ,  $i = 1, 2$ . Assim sendo,

- o aumento dos valores de  $\sigma_i$  implica:
  1. o alargamento das bases de  $S_i(f)$  (Figura 3.13, em relação ao eixo horizontal);
  2. o surgimento de potência espectral em frequências diferentes de  $f_{LF}$  e  $f_{HF}$  (como consequência do item 1);
  3. o aspecto de  $u_k$  deixar de ser senoidal e passar a se aproximar do aspecto apresentado pela série original;
  4. a diminuição da potência espectral nas frequências  $f_{LF}$  e  $f_{HF}$ , e também da variância de  $u_k$ .
- o aumento dos valores de  $\varrho_i^2$  implica o aumento da potência espectral e da variância de  $u_k$ .

A partir dos parâmetros usados na Seção 4.2.1, ou seja,  $f_{LF} = 0,0445$  Hz e  $f_{HF} = 0,28$  Hz;  $\sigma_1 = 0,01$  e  $\sigma_2 = 0,01$ ;  $\varrho_1^2 = 0,82$  e  $\varrho_2^2 = 0,68$ ; observando-se as colocações feitas acima e mantendo os valores de  $f_{LF}$  e  $f_{HF}$ , os novos valores de parâmetros encontrados que permitiram  $u_k$  corresponder aos requisitos estabelecidos foram:  $\sigma_1 = 0,065$  e  $\sigma_2 = 0,25$ ;  $\varrho_1^2 = 1,22$  e  $\varrho_2^2 = 1,41$ . A Figura 4.11a apresenta a entrada sintética  $u_k$  — que tem média e variância idênticas às da série de VFC — obtida a partir dos novos valores dos parâmetros. A Figura 4.11b mostra o espectro de potência de  $u_k$  em comparação ao da série de VFC. Pode ser verificado, por meio dessa figura, que os espectros das duas séries apresentam contorno e ordem de grandeza semelhantes, além da correspondência nas regiões das frequências escolhidas.

Na Figura 4.12 é mostrada a função de correlação cruzada entre  $u_k$  e a série de VFC. Pode-se, portanto, verificar a existência de correlação entre as

duas séries, cujo coeficiente de correlação é igual a 0,68. Assim, os requisitos foram todos satisfeitos e, portanto,  $u_k$  está pronta para ser usada como entrada sintética no algoritmo de identificação de sistemas a fim de encontrar um modelo NARMAX para a série de VFC.

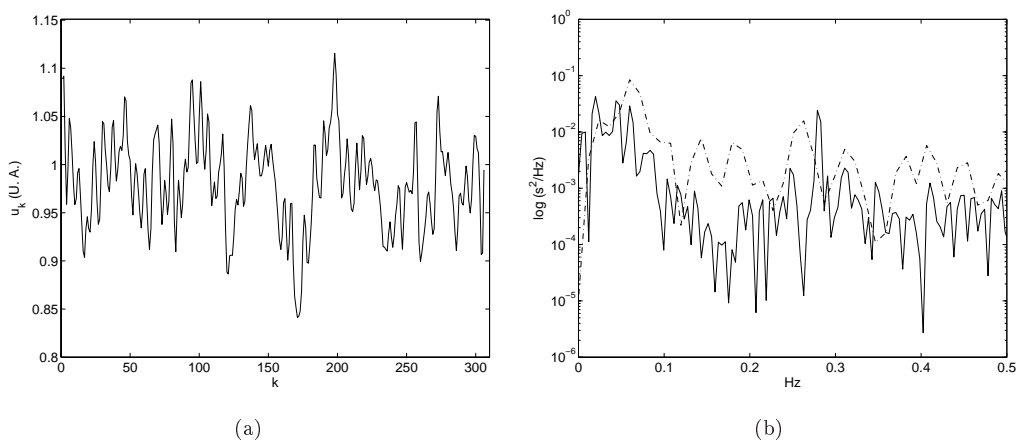


Figura 4.11: (a) Entrada sintética  $u_k$  construída de maneira a satisfazer os requisitos estabelecidos nesta seção. (b) Espectro de potência de  $u_k$  (-.-) construído nesta seção, em comparação ao espectro de potência da série de VFC (—).

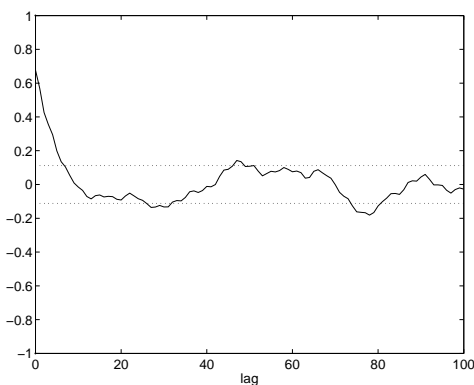


Figura 4.12: Função de correlação cruzada entre  $u_k$  e a série de VFC.

## 4.2.2 Obtenção dos modelos NARMAX polinomiais

O processo utilizado na identificação dos modelos baseia-se no desenvolvimento descrito na Seção 3.6. A representação escolhida para os modelos dos sistemas dinâmicos e para as séries de VFC foi a NARMAX polinomial. Então, para dar início ao processo de identificação são necessários os dados

de entrada (Seção 4.2.1), os dados de saída (Seção 4.1), e as restrições impostas na busca das famílias de modelos. Essas restrições têm implicações na determinação da estrutura dos modelos, isto é, trata-se de delimitar o grau de não-linearidade, ordem, número de termos dos modelos. Então, essas restrições têm a finalidade de determinar uma “região” (famílias) na qual serão verificados todos os modelos possíveis, para que, dentre eles, possa ser encontrado o mais adequado — de acordo com os critérios escolhidos. Oliveira (2002) apresenta, por meio de um estudo exaustivo, os valores que seriam mais indicados para o caso de séries de VFC, para os modelos NARMAX polinomiais, bem como para os modelos NARMAX com função neural (redes neurais).

Para o caso de modelos NARMAX polinomiais, as restrições para a identificação dos modelos foram: graus de não-linearidade 1 e 2;  $15 \leq n_y \leq 25$ ;  $8 \leq n_u \leq 13$ ;  $1 \leq n_e \leq 10$ ; e o número máximo de termos dos modelos,  $n_t$ , foi fixado em 25. O que resulta em um total de 1.320 modelos identificados por série estudada. Desse total será escolhido um modelo, de acordo com os critérios de avaliação.

De posse dos dados e as restrições determinadas, a ordenação hierárquica dos termos candidatos foi realizada por meio de um mecanismo automático, a taxa de redução de erro (ERR). Na estimação dos parâmetros foi utilizado o estimador Estendido de Mínimos Quadrados (EMQ). Ambos, ERR e EMQ, são apresentados em detalhes em Aguirre (2004).

Somente os termos de entrada e saída do modelo foram utilizado para fazer as predições, isto é,

$$\hat{y}(k) = \boldsymbol{\psi}^T(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.11)$$

a parte de média móvel é utilizada somente na etapa de estimação de parâmetros.<sup>4</sup>

Os modelos foram simulados por meio de simulação livre (Aguirre, 2004). O índice utilizado na quantificação das predições foi o

$$\text{RMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}}, \quad (4.12)$$

---

<sup>4</sup>Como será visto na Seção 4.2.3, em muitos casos, nas chamadas *ações de ajuste fino*, a parte de média móvel (MA) será usada na simulação dos modelos. Mas isso não ocorre na fase de seleção dos mesmos.

sendo que  $\hat{y}(k)$  é a simulação livre do sinal e  $\bar{y}$  é o valor médio do sinal medido  $y(k)$ , sendo que a média é calculada na janela de identificação (Aguirre, 2004).

Nesse ponto, ocorre a primeira etapa de classificação e seleção dos modelos identificados. Para o caso de séries de VFC, por exemplo, foram usados, aproximadamente, 80% da série para etapa de modelagem e o restante para a validação do modelo. Com o objetivo de considerar a capacidade de generalização dos modelos, decidiu-se estabelecer três conjuntos de condições iniciais ao longo da janela de dados destinados à validação (no começo, no meio e fim da janela); foram então constituídas três janelas de validação. O índice RMSE foi calculado para previsões curtas (6 observações), por meio de simulação livre, nas três janelas. Dos 1.320 modelos obtidos, somente são classificados para uma próxima etapa de validação, aqueles que apresentarem índice RMSE  $\leq 0,6$  concomitantemente nas três janelas de validação. Em seguida, calcula-se a média dos valores de RMSE para as três janelas de cada modelo; o modelo que apresentar a menor média é classificado para as próximas etapas de validação (Seção 4.2.3). Se ao final esse modelo não for considerado válido — segundo os critérios estabelecidos neste trabalho — um outro é escolhido dentre aqueles que foram classificados na primeira etapa, ou seja, dentre aqueles que apresentaram RMSE  $\leq 0,6$  nas três janelas.

### 4.2.3 Síntese e validação

Após a seleção de um modelo, a síntese é realizada de maneira simples. Uma entrada sintética do tipo  $\tilde{u}_k$  deve ser construída de modo que tenha o comprimento, ou número de pontos, desejado para a série sintética produzida pelo modelo NARMAX. Em seguida, basta excitar o modelo com essa  $\tilde{u}_k$  e a síntese será realizada como a saída do modelo. Desse modo, usando-se  $\tilde{u}_k$  (sem ajuste de fase) ao invés de  $u_k$  (com ajuste de fase), pode-se gerar séries sintéticas de qualquer comprimento por meio dos modelos.

Realizada a síntese, segue-se a etapa de validação do modelo por meio da série sintética. Para isso, serão usados alguns indicadores e, também, alguns procedimentos que serão chamados de *ajuste fino*.

Os índices utilizados foram:

- Índices estatísticos:

1. SDNN e RMSSD: calculados para séries de VFC e séries geradas pelos modelos de 10.000 amostras.

- Índices de complexidade:
  1. Entropia aproximada: calculada para séries de VFC e séries geradas pelos modelos. Das séries de 10.000 amostras foram tomadas as primeiras 9.000 e divididas em 6 séries de 1.500. Os cálculos foram efetuados para essas séries de 1.500 amostras e o resultados apresentado é uma média das seis séries.
  2. Entropia de Shannon: calculada para séries de 5.000 amostras o caso dos sistemas dinâmicos, e os cálculos foram feitos com base no diagrama de recorrências. No caso das séries de VFC, os cálculos foram feitos para séries de 10.000 amostras, e os cálculos, tanto para séries originais quanto para as séries geradas pelos modelos foram feitos com base na dinâmica simbólica.
- Índices de dinâmica:
  1. DFA: calculados para séries de VFC e para as séries geradas pelos modelos, para séries de 10.000 amostras.
  2. Diagrama de bifurcações: obtidos para validação de modelos encontrados para os sistemas dinâmicos.
  3. Dinâmica simbólica: foram obtidos os histogramas de probabilidades de ocorrência das seqüências simbólicas, no caso de séries de VFC e das séries geradas pelos modelos.

### Parâmetros de ajuste

É importante ter em conta que, neste procedimento, há pelo menos três “parâmetros de ajuste” que podem ser mudados de forma a alterar determinadas características dos modelos. São eles: a variância da entrada sintética,  $\sigma_u^2$ , a variância dos resíduos,  $\sigma_\xi^2$  e o parâmetro de bifurcação,  $\mu$ .

Em muitos casos, por exemplo, a entropia de Shannon das séries temporais geradas por meio dos modelos,  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$ , é menor que a entropia correspondente das séries originais,  $\mathcal{S}_y$ . Para aumentar  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$ , o modelo é, inicialmente, simulado sem os termos de ruído e, geralmente, começa-se por aumentar  $\sigma_u^2$ . Aumentar  $\sigma_u^2$  além de certo limite, torna muitos modelos instáveis. Assim, não se deve aumentar  $\sigma_u^2$  além do limite da estabilidade.

Se após o ajuste ainda for verificado que  $\mathcal{S}_{\hat{y}} < \mathcal{S}_y$ , deve-se prosseguir com a inclusão dos termos de ruído no modelo e gradualmente aumentar  $\sigma_\xi^2$ . Isso,

geralmente, possibilitará atingir o valor desejado para a entropia de Shannon. Entretanto, aumentar  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$  por meio do aumento de  $\sigma_{\xi}^2$  geralmente resulta em um mapa de primeiro retorno menos estruturado. Nesse caso, deve-se recorrer ao último parâmetro de ajuste,  $\mu$ . A variação desse parâmetro de bifurcação permite remodelar o mapa de primeiro retorno. O aumento ou diminuição de  $\mu$  pode exigir um novo ajuste de  $\sigma_{\xi}^2$ . Isso ficará mais claro no capítulo de resultados, principalmente nos resultados referentes aos sistemas dinâmicos.

Como poderá ser verificado, esses parâmetros são instrumentos dos quais pode-se lançar mão para efetuar mudanças de natureza estocástica ou dinâmica, ou mesmo ambas, de um modelo.

### Análise estatística

Após a obtenção de todos os resultados dos índices usados na validação (Seção 4.2.3) dos modelos encontrados para as seis séries de VFC, foram aplicados dois testes estatísticos para fazer uma comparação das médias dos resultados de cada índice das seis séries medidas de VFC com as médias dos respectivos índices das seis séries sintéticas, geradas pelos modelos. Os testes estatísticos são um teste paramétrico, o teste  $t$ , e um teste não paramétrico, o teste de Mann-Whitney.<sup>5</sup> O objetivo da aplicação desses testes é avaliar estatisticamente a proximidade dos resultados obtidos para séries sintéticas com os resultados das séries originais, e, conseqüentemente, verificar a proximidade dos modelos com os sistema original.

## 4.3 Descrição do algoritmo do procedimento de modelagem

Após descrever, em detalhes, todas as etapas do procedimento de modelagem, apresenta-se, em seguida, uma síntese do algoritmo com todas a etapas que compõem o procedimento apresentado neste capítulo:

- *Passo 1* : determinar, da série a ser modelada, as partes destinadas ao processo de identificação do modelo, bem como à primeira etapa de validação.

---

<sup>5</sup>O procedimento de realização dois testes pode ser vistos em Triola (2005)

- *Passo 2*: construir a entrada sintética para ser usada na indentificação e na primeira etapa de validação dos modelos (Seção 4.2.1).
- *Passo 3*: determinar as restrições relacionadas às famílias de modelos  $(l, n_y, n_u, n_e \text{ e } n_t)$ , a fim de gerar a matriz com os termos candidatos do modelo NARMAX.
- *Passo 4*: estabelecer a ordem de importância dos termos candidatos, por meio do critério ERR.
- *Passo 5*: estimar os parâmetros do modelo.
- *Passo 6*: simular o modelo, por meio de simulação livre, para gerar a predição de determinado número de observações — foram adotadas 6 observações no caso de séries de VFC e 10 no caso dos sistemas dinâmicos — isso, para os três diferentes conjuntos de condições iniciais escolhidos na parte da série original destinada à primeira etapa de validação (Passo 1). Essa primeira etapa de validação consiste na quantificação das predições por meio do índice RMSE. Dado que são feitas predições a partir de três condições iniciais, tem-se três valores de RMSE para o modelo; esse modelo é classificado para a próxima etapa se os três valores de RMSE ficarem abaixo de determinado valor, 0,6 para o caso de séries de VFC.<sup>6 7</sup>

Ressalta-se que passos de 4 a 6 foram repetidos para todas as combinações possíveis, a partir das restrições determinadas no Passo 2; o que resultou em 1.320 modelos por série, no caso de modelos polinomiais para séries de VFC, por exemplo.

- *Passo 7*: calcular a média dos três valores RMSE obtidos para todos os modelos classificados no Passo 6. O modelo que apresentar menor média é classificado para o próximo passo.
- *Passo 8*: construir  $\tilde{u}_k$  com número de pontos desejado para realizar a síntese do sinal original por meio do modelo selecionado no Passo 7. A construção de  $\tilde{u}_k$  nessa etapa segue os mesmos procedimentos apresentados na Seção 4.2.1. Nessa etapa, não é estabelecida a correlação de fase entre entrada sintética e série original.

---

<sup>6</sup>Valor escolhido com base nos resultados obtidos por Oliveira (2002).

<sup>7</sup>No caso dos sistemas dinâmicos não foi adotado um limite e todos os modelos identificados passaram para a próxima etapa.

- *Passo 9* : como o número de termos dos modelos foi estabelecido a ser, no máximo, igual a 25, os modelos podem ser selecionados com um número elevado de termos. Portanto, a fim de obter um modelo mais parcimonioso e adequado, esta etapa pode ser subdividida da seguinte forma:

1. tomar os primeiros 5 termos do modelo selecionado no Passo 7, no caso de séries de VFC — no caso dos sistemas dinâmicos, essa etapa foi iniciado com os três primeiros termos — reestimar os parâmetros para o modelo com essa nova quantidade de termos;
2. excitar o modelo do item anterior com a série  $\tilde{u}_k$ , do Passo 8, e assim obter a série sintética;
3. comparar a série sintética do item anterior com com os dados originais, com o mesmo número de pontos. Além disso, comparar também a variância e o mapa de primeiro retorno das duas séries. Se as comparações estiverem próximas, segue para o próximo item, senão, retornar ao item 1 (Passo 9) e aumentar um termo e repetir o procedimento;
4. calcular e comparar, para as séries sintética e original, os índices:
  - séries de VFC: índices estatísticos, índices de complexidade e índices dinâmicos, à excessão do diagrama de bifurcações;
  - sistemas dinâmicos: média, variância, diagrama de bifurcações e entropia de Shannon.

Se o resultado das comparações estiver aproximado, principalmente no caso dos índices dinâmicos, seguir para o próximo item; senão, registrar os resultados obtidos para esse modelo e guardá-los para um possível uso futuro, e, em seguida, retornar o item 1 e recomeçar o procedimento do Passo 9 aumentando mais um termo no modelo;

5. lançar mão dos parâmetros de ajuste para tentar aproximar ao máximo o modelo do sistema original. Se após o ajuste dos parâmetros os resultados forem considerados satisfatórios, então pode-se dar o procedimento como concluído e o modelo por encontrado; caso contrário, retornar ao item 1 do Passo 9, e acrescentar mais um termo ao modelo e repetir os itens seguintes.

O conjunto de instruções do Passo 9 deve ser repetido até que: *i*) um modelo considerado satisfatório<sup>8</sup> seja encontrado; ou *ii*) o número máximo de termos do modelo originalmente encontrado (Passo 7) seja atingido, 25 por exemplo.

Na primeira condição, o problema estará resolvido. No caso da segunda condição há dois caminhos: o primeiro, é verificar dentre todos os resultados obtidos no Passo 9, qual é o que mais se aproxima dos resultados originais e decidir se aquele modelo é aceito ou não. No caso de uma negativa, o segundo caminho deve ser tomado, isto é, esse modelo deve ser descartado e deve-se retornar ao Passo 7. Então, outro modelo deve ser escolhido para, em seguida, retornar ao Passo 9; e assim sucessivamente, até que um modelo seja considerado satisfatório ou que se possa concluir que, com o procedimento apresentado neste trabalho, não é possível encontrar um modelo para a série original em questão.

---

<sup>8</sup>O termo *satisfatório* é aqui empregado no sentido de um modelo que atenda às expectativas, ou especificações de projeto.

# RESULTADOS

---

*“Deus amou tanto o mundo que entregou o Filho Unigênito para que todo aquele que crer nele, não pereça mas tenha a vida eterna. É que Deus enviou o Filho ao mundo, não para julgar e sim para salvar o mundo. Quem crê nele, não é julgado, e quem não crê, já está julgado, porque não creu no nome do Filho Unigênito de Deus.”*

João 3,16-18

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com o emprego da metodologia apresentada no Capítulo 4 deste trabalho. O capítulo está dividido em seções, como segue: a Seção 5.1 apresenta os resultados da aplicação da metodologia em sistemas dinâmicos não-lineares; a Seção 5.2 trata da aplicação da metodologia nas séries de variabilidade da frequência cardíaca.

## 5.1 Sistemas dinâmicos

Os resultados apresentados nesta seção foram submetidos para publicação (Oliveira e colegas, 2007).

### 5.1.1 O mapa logístico

#### Construção do modelo

O mapa logístico  $x_k = \lambda(1 - x_{k-1})x_{k-1}$  foi simulado com  $\lambda = 3,89$  e condição inicial  $x_0 = 0,14$  produzindo  $N = 1100$  iterações. Esses dados

têm média e variância iguais a  $\bar{x} = 0,6050$  e  $\sigma_x^2 = 0,0834$ , respectivamente. A esses dados, foi adicionado ruído Gaussiano com média zero e variância  $\sigma_e^2 = 0,01$ . Os dados resultantes  $y_k$  têm uma variância 15% maior que a da série sem ruído obtida pela simulação da equação logística, que é  $\bar{y} = 0,6054$  e  $\sigma_y^2 = 0,0956$ . Um conjunto amplo de termos regressores candidatos foi gerado tomando  $n_y = 18$ ,  $\ell = 2$  e  $n_e = 10$ .

Os primeiros 1000 pontos do conjunto de dados foram usados para construir o modelo. Como mencionado na Seção 3.6, o critério ERR foi usado para definir uma ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das variáveis regressoras até o segundo grau. De fato, os termos do modelo são apresentados na mesma ordem que foram escolhidos pelo critério ERR. Então, modelos de 3 a 17 termos de processo (sempre com 5 termos de ruído) foram obtidos e simulados. Em *todos os casos*, sob iteração, os modelos se estabeleceram tanto em uma solução periódica de período 1 ou em uma solução periódica de período 2. A parte determinística do modelo com três termos é<sup>1</sup>

$$y_k = 0,3397 - 2,4215y_{k-1}^2 + 2,2079y_{k-1} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.1)$$

em que  $\mathcal{E}(\xi)$  é modelo de ruído com cinco termos. A parte determinística do modelo 5.1 permanece em um movimento de período 2. Em certo sentido, este cenário é semelhante àquele da Figura 1.2, porque, embora a dinâmica subjacente seja caótica (esse é o caso para  $\lambda = 3,89$ ), devido ao ruído, o modelo resultante se estabelece em um atrator mais simples, que é uma saída comum em tais situações (Chon e colegas, 1997).

Agora, deseja-se seguir o procedimento descrito na Seção 4.2.1 de maneira a ter um modelo que não irá permanecer num movimento periódico, mas ao invés, irá mostrar algum movimento “complexo” e uma tal solução será algo relacionado aos dados originais.

Inicialmente foi gerada uma realização da variável aleatória  $\tilde{u}_k$  de distribuição Gaussiana com média e variância próximas àquelas dos dados, a saber  $\bar{u} = 0,6054$  e  $\sigma_u^2 = 0,0950$ . Na seqüência, o conjunto de dados com ruído  $y_k$  e o sinal aleatório  $\tilde{u}_k$  foram usados, como indicado na seção 4.2.1, para produzir a entrada sintética  $u_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,0950)$ . Finalmente,  $u_k$  e  $y_k$  foram submetidos ao algoritmo de identificação que produziu o seguinte modelo *não-autônomo*

---

<sup>1</sup>Para o uso do modelo de ruído na redução de polarização e não para modelagem determinística, o leitor interessado é referido aos artigos citados na Seção 3.6.

$$y_k = 0,3979 - 2,5318y_{k-1}^2 + 1,9843y_{k-1} + 0,2960u_{k-1}y_{k-1} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.2)$$

para o qual  $n_u = 5$  foi usado para produzir o novo conjunto de termos candidatos, e o modelo de ruído em (5.2) é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi) = & 0,3132 y_{k-5}\xi_{k-8} + 0,9760 \xi_{k-6} - 0,4608 y_{k-2}\xi_{k-6} \\ & - 0,1793 y_{k-3}\xi_{k-9} - 0,1491 y_{k-2}\xi_{k-7} + \xi(k), \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que  $\xi(k)$  é um ruído de distribuição Gaussiana com média zero e  $\sigma_\xi^2 = 0,0652$ .

O procedimento para construir o modelo 5.1 a partir dos dados  $y_k$  e para construir o modelo 5.2 a partir das séries temporais  $y_k$  e  $u_k$  foi o mesmo, com apenas uma observação que permanece válida para todos os exemplos dessa seção: no caso de modelos não-autônomos, os termos regressores foram incluídos no modelo na ordem determinada pelo critério ERR (assim como para o caso autônomo) até o primeiro termo de entrada (um regressor com  $u_{k-j}$ ) ser incluído no modelo. Nesse ponto, a construção do modelo cessa.

Ao contrário do modelo 5.1, o modelo 5.2 *não* se estabelece numa solução periódica, devido principalmente ao uso do sinal sintético  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,0950)$ . Isso pode ser visto na Figura 5.1.

Um ponto importante a ser observado, é que a combinação de fase, descrita na Seção 4.2.1, *é somente requerida para a etapa de construção do modelo*. Para a etapa de simulação a combinação de fase *não* é requerida. Portanto, a fim de simular o modelo 5.2, a variável exógena pode ser tomada como  $u_k = \tilde{u}_k$  em que  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ . Note, também, que a média e a variância de  $\tilde{u}_k$  podem realmente ser usadas como parâmetros de ajuste para mover a dinâmica do modelo 5.2 no espaço de parâmetros (há mais a esse respeito mais à diante).

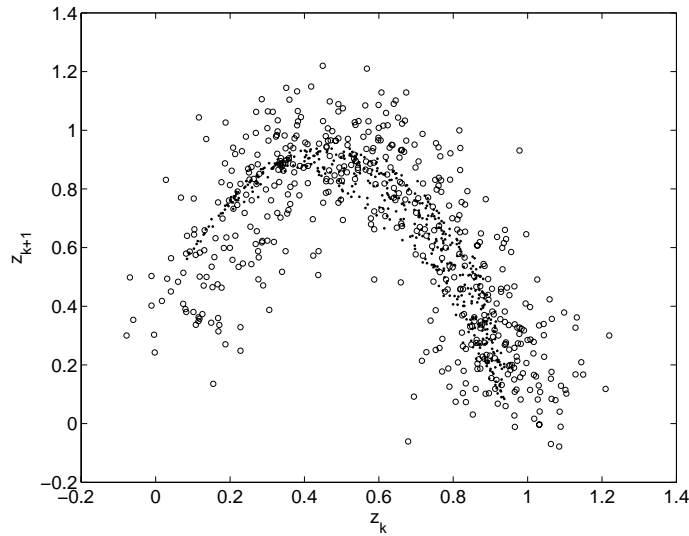


Figura 5.1: Mapas de primeiro retorno. Os círculos correspondem aos dados originais ( $z_k = y_k$ ) e os pontos à série temporal ( $z_k = \hat{y}_k$ ) obtida pela iteração do modelo 5.2. Se fossem indicadas, as iterações do modelo 5.1 seriam justamente dois pontos nesse gráfico.

Enfatiza-se que se  $\tilde{u}_k$  fosse usada, porque não é correlacionada a  $y_k$ , o critério ERR *não* selecionaria nenhum regressor de entrada durante a seleção de estrutura. Naturalmente, é crucial avaliar o quão próxima está a série de iterações do modelo  $\hat{y}_k$  dos dados originais  $y_k$  e o quão próxima é a dinâmica do modelo 5.2 da dinâmica subjacente a  $y_k$ . Da Figura 5.1 pode-se ver que o mapa de primeiro retorno da série  $\hat{y}_k$  assemelha-se, até certo ponto, à parábola característica da equação logística. No que se segue, as duas questões acima serão respondidas de uma maneira mais detalhada, a começar pela última.

### Dinâmica do modelo identificado

Uma forma *estatística* padrão para checar dinâmicas não modeladas é por meio de funções de correlação não-linear (Billings e Voon, 1986; Zhang e colegas, 2003). Nesse exemplo, e nos próximos, a fim de comparar as propriedades dinâmicas dos modelos obtidos, com a dinâmica subjacente aos dados originais  $y_k$ , serão usados diagramas de bifurcação. De fato, isso é possível no presente conjunto de exemplos somente porque os modelos originais são conhecidos. Na prática, não será tipicamente esse o caso (veja Aguirre e colegas (2006) para ter em detalhes os prós e contras de se usar diagramas

de bifurcações na validação de modelos). Entretanto, é importante avaliar o quanto o uso da entrada sintética com combinação de fase, como sugerido na Seção 4.2.1, altera a dinâmica original. Portanto, o diagrama de bifurcações da equação logística e do modelo 5.2 são mostrados na Figura 5.2.

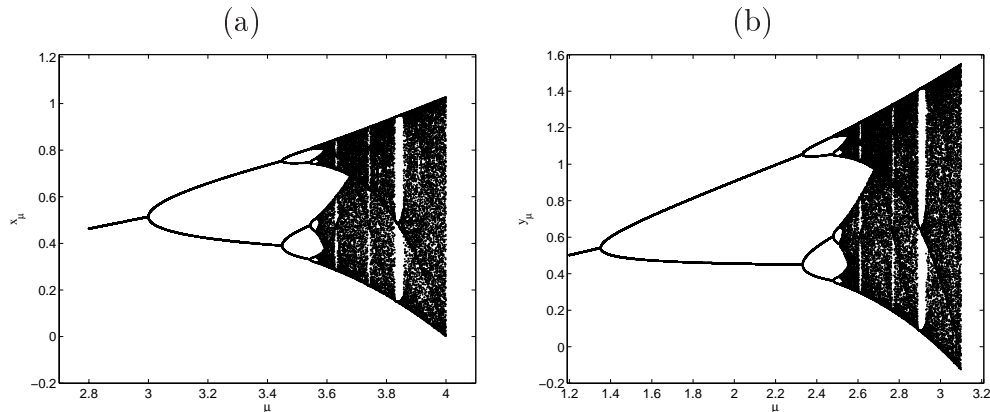


Figura 5.2: Diagramas de bifurcações de (a) equação logística, e (b) modelo identificado (5.2) para  $u_k = 0,6054, \forall k$ . O parâmetro de bifurcações  $\mu$  foi tomado como o coeficiente do termo  $y_{k-1}$  do modelo, e  $\mu = \lambda$  para a logística.

### Entropia do modelo e série original

A fim de avaliar a “estocasticidade” global das soluções do modelo quando comparada à dos dados originais, nesta seção um algoritmo para o cálculo da entropia de Shannon a partir de diagramas de recorrência será usado (Letellier, 2006d). Por um lado, o diagrama de bifurcações foi usado para avaliar o quão bem a parte determinística do modelo identificado se aproximou da dinâmica subjacente. Por outro lado, uma das principais suposições desse trabalho é que o procedimento se destina a situações nas quais os dados são tipo ruído ou, em outras palavras, são altamente estocásticos com possivelmente alguma dinâmica. Portanto a estocasticidade dos dados deve ser, de algum modo, quantificada. Isso será feito usando a entropia de Shannon.

Um ponto-chave neste procedimento é compreender que há, na prática, pelo menos três “parâmetros de ajuste” que podem ser modificados a fim de aumentar (ou diminuir) a entropia de Shannon dos dados do modelo, a saber: a variância da entrada sintética,  $\sigma_u^2$ , a variância dos resíduos,  $\sigma_\xi^2$  e o parâmetro de bifurcações,  $\mu$ .

Na maioria dos casos a entropia de Shannon das série dos modelos,  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$  é menor que a correspondente entropia dos dados originais,  $\mathcal{S}_y$ . Para aumen-

tar  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$ , simula-se inicialmente o modelo sem os termos de ruído e usualmente começa-se por aumentar  $\sigma_{\tilde{u}}^2$ . Aumentando  $\sigma_{\tilde{u}}^2$  além de um certo limite, tornam muitos modelos instáveis. Assim,  $\sigma_{\tilde{u}}^2$  não é elevada além do limite da estabilidade. Se  $\mathcal{S}_{\hat{y}} < \mathcal{S}_y$ , prossegue-se pela inclusão dos termos de ruído e aumento gradual de  $\sigma_{\xi}^2$ . Isso geralmente possibilita atingir o valor desejado da entropia de Shannon. Entretanto, aumentar  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$  por meio do aumento  $\sigma_{\xi}^2$  geralmente resulta em mapa de primeiro retorno que é menos estruturado. Nesse caso, recorre-se ao último parâmetro de ajuste,  $\mu$ . Variar esse parâmetro de bifurcação permite remodelar o mapa de primeiro retorno. O aumento ou diminuição de  $\mu$  pode requerer um reajuste de  $\sigma_{\tilde{u}}^2$ . Isso será ilustrado a seguir.

Para a solução de período 2 do modelo 5.1 a entropia de Shannon é nula. Para o modelo 5.2 sem o modelo de ruído  $\mathcal{E}(\xi)$ , e com  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,0950)$  (veja Figura 5.1) a entropia de Shannon é  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 1,54$ . A entropia dos dados originais é  $\mathcal{S}_y = 2,39$ . Para aumentar a entropia do modelo iniciou-se aumentando  $\sigma_{\tilde{u}}^2$ . Portanto usando-se  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1870)$  no modelo 5.2 sem o modelo de ruído resultou em  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 1,79$ . Aumentar  $\sigma_{\tilde{u}}^2$  ainda mais, tornaria o modelo instável. Assim, a entrada sintética  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1870)$  foi mantida e o modelo de ruído  $\mathcal{E}(\xi)$  com  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0198)$  foi usado no modelo 5.2. A série resultante tem  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,28$  (Figura 5.3a).

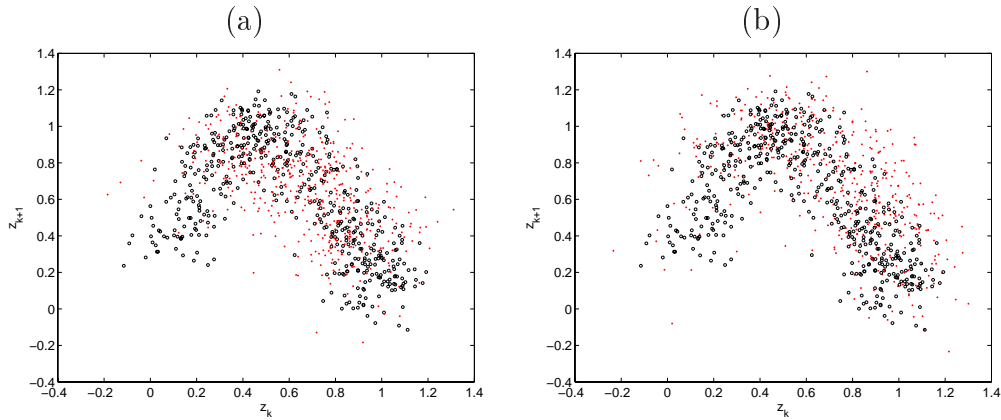


Figura 5.3: Mapas de primeiro retorno de (a) modelo 5.2 ( $\mu = 1,9843$ ) incluindo modelo de ruído  $\mathcal{E}(\xi)$  com  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1828)$  e  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0193)$ . Para esse caso  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,28$ ; (b) modelo 5.2 mas com o coeficiente de  $y_{k-1}$  igual a 2,21, ou seja,  $\mu = 2,21$  incluindo modelo de ruído  $\mathcal{E}(\xi)$  com  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054; 0,1263)$  e  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0198)$ . Para esse caso  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,39$ . Círculos pretos são os dados originais e os pontos vermelhos são os dados produzidos pelo modelo.

Está claro, a partir da Figura 5.3a, que o mapa de primeiro retorno do modelo tem agora uma dispersão aproximadamente correta, mas que precisa ser remodelada. Em particular, note que a região  $(0,0;0,3)$ , parte do ramo crescente, é raramente visitada. Isso é obtido por meio da variação do parâmetro de bifurcação  $e$  pelo reajuste da variância de  $\tilde{u}_k$ . Por isso, tomando-se  $\mu = 2,21$  ao invés de  $\mu = 1,9843$  no modelo, e tomando-se  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(0,6054;0,1263)$  produz-se o mapa mostrado na Figura 5.3b que tem a entropia de Shannon desejada  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,39$ .

### 5.1.2 O sistema de Rössler

A Seção 4.1.1 apresentou o sistema de Rössler e abordou a necessidade do uso de uma seção de Poincaré e adição de ruído para obter uma série  $y_k$  com as características desejadas ao estudo deste trabalho. Aquela seção também apresentou o modelo 4.3 como uma referência de modelo para a série obtida por meio da seção de Poincaré para o sistema de Rössler. A série  $y_k$  obtida a partir desses processamentos é mostrada na Figura 5.4

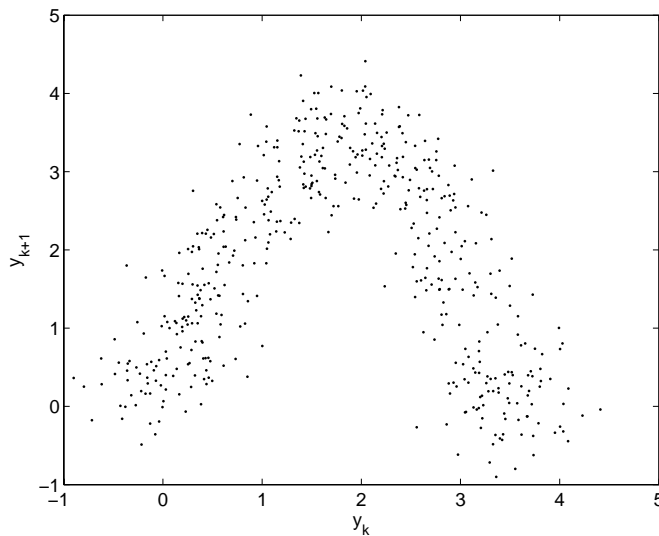


Figura 5.4: Mapa de primeiro retorno da série  $y_k$  obtida a partir do sistema de Rössler, conforme a Seção 4.1.1.

A identificação dos modelos é iniciada a partir de  $y_k$ . Os seguintes parâmetros foram usados na modelagem  $\ell = 3$ ,  $n_y = 4$  and  $n_e = 3$ . Um modelo de ruído (a parte de média móvel do modelo) de 5 termos foi usado para

reduzir polarização. Como antes, os termos para compor o modelo foram selecionados automaticamente pelo critério ERR. Variando o número de termos de 3 a 12, todos esses 10 modelos estabeleceram-se, sob iteração, em uma solução de período 2. Para o caso de ilustração e comparação, o modelo com 5 termos é

$$y_k = -0,8607 - 0,0752y_{k-1}^3 + 2,2834y_{k-1} + 0,4358y_{k-1}^2 + 0,0407y_{k-2}y_{k-1} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.4)$$

que é estatisticamente válido como indicado por testes de validação não-lineares (Billings e Tao, 1991), mas infelizmente se estabelece em uma solução periódica.  $\mathcal{E}(\xi)$  foi determinado da mesma forma que para o caso do mapa logístico.

Na seqüência, uma entrada sintética foi produzida tomando-se  $\tilde{u}_k \sim \mathcal{N}(\bar{y}, \sigma_y^2)$  e então foi feita a combinação de fase desse sinal com  $y_k$  a fim de obter a entrada sintética  $u_k$ , como descrito na Seção 4.2.1. Dado que agora existe uma variável adicional, a entrada, o conjunto de termos regressores candidatos deve ser ampliado para incluir todas as possíveis combinações dessas novas variáveis consigo mesmas e com os regressors precedentes até o atraso  $n_u$ . Neste exemplo,  $n_u = 3$  foi usado, entretanto, como ficará claro, qualquer outro valor teria fornecido o mesmo resultado. Assim procedendo, o seguinte modelo foi obtido

$$y_k = -0,7824 - 0,1028y_{k-1}^3 + 2,1988y_{k-1} + 0,3106y_{k-1}^2 - 0,0129u_{k-1}^2y_{k-1} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi) = & -0,1030 \xi_{k-2}\xi_{k-3} - 0,0733 \xi_{k-4}^2 + 0,0383 y_{k-2}\xi_{k-1}\xi_{k-2} \\ & + 0,0138 y_{k-2}u_{k-2}\xi_{k-4} + \xi(k), \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que  $\xi(k)$  é um processo com distribuição Gaussiana, com média zero e  $\sigma_\xi^2 = 0,8597$ . Os termos regressores cessaram de ser incluídos no modelo imediatamente após a inclusão do primeiro termo de entrada. Esta decisão foi subjetiva. Outro critério, menos subjetivo poderia ter sido adotado.

A fim de simular o modelo 5.5, tudo que é requerido é uma condição inicial  $y_0$  e uma entrada artificial que pode ser produzida simplesmente como  $u_k \sim \mathcal{N}(\bar{y}, \sigma_y^2)$ . Note-se que para simulação não é requerida a combinação de fase. O mapa de primeiro retorno dos dados  $y_k$  e de uma série obtida pela simulação do modelo 5.5 são comparados na Figura 5.5. Como pode ser visto, a seqüência de iterações do modelo 5.5 não se estabelece em uma solução de período 2 e além disso mostram um mapa de primeiro retorno com a forma global de uma parábola. A caracterização do modelo 5.5 e sua solução serão detalhadas em seguida.

### Dinâmica do modelo identificado

Os diagramas de bifurcação do modelo 4.3 e do modelo 5.5 são mostrados na Figura 5.6 como uma forma de se comparar a dinâmica do modelo obtido com a ajuda da entrada sintética com a dinâmica original. De maneira a avaliar o regime de estado estacionário do modelo 5.5, a entrada foi tomada igual ao seu valor médio, isso é,  $u_k = \bar{u} = \bar{y} = -1,7910, \forall k$ .

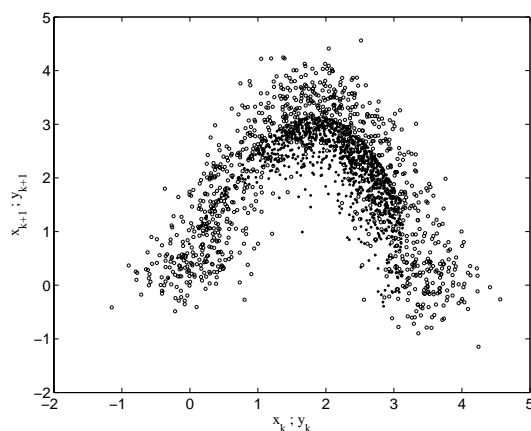


Figura 5.5: Mapas de primeiro retorno de: (círculos) os dados originais, e (pontos) da série produzida pela iteração do modelo 5.5.

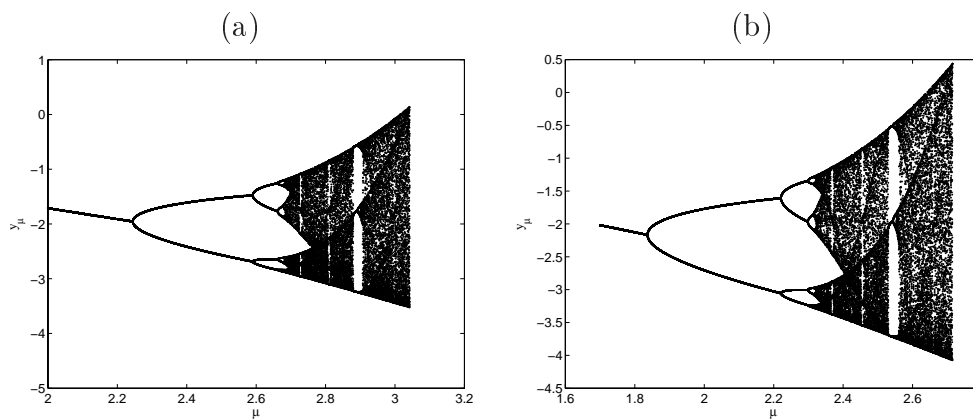


Figura 5.6: Diagramas de bifurcações de (a) modelo 4.3 e (b) modelo 5.5. Em ambos os casos o parâmetro do termo  $y_{k-1}$  foi usado como o parâmetro de bifurcação  $\mu$ . Note-se as diferentes escalas.

### Entropia do modelo e da série temporal original

As entropias dos sinais dos quais os mapas de primeiro retorno são mostrados na Figura 5.5 são  $\mathcal{S}_y = 2,63$  e  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 1,52$ . Aumentar  $\sigma_u^2$ , neste exemplo, não somente aumentou  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$  mas também deformou o mapa de primeiro retorno. Assim, decidiu-se diminuir  $\sigma_u^2$  e compensar isso com os outros parâmetros. Conseqüentemente,  $\sigma_u^2 = 0,6381$  foi usado e compensado por se tomar  $\sigma_\xi^2 = 0,2169$ . A fim de ter um bom balanço entre estocasticidade e forma, o parâmetro de bifurcação foi também modificado de  $\mu = 2,1988$  para  $\mu = 2,5850$ . Não é difícil justificar essa mudança (*a posteriori*), observando-se o diagrama de bifurcações na Figura 5.6b. Conseqüentemente, para  $u_k \sim \mathcal{N}(-1,7910, 0,6381)$ ,  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 0; 0, 2169)$ , e  $\mu = 2,5850$  no modelo 5.5 com o modelo de ruído (5.6), foi obtido  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,64$  com o mapa na forma desejada, como pode ser visto na Figura 5.7. Nesse caso, o preço de se mudar  $\mu$  é que o mapa ficou ligeiramente deslocado ao longo da linha bissetriz.

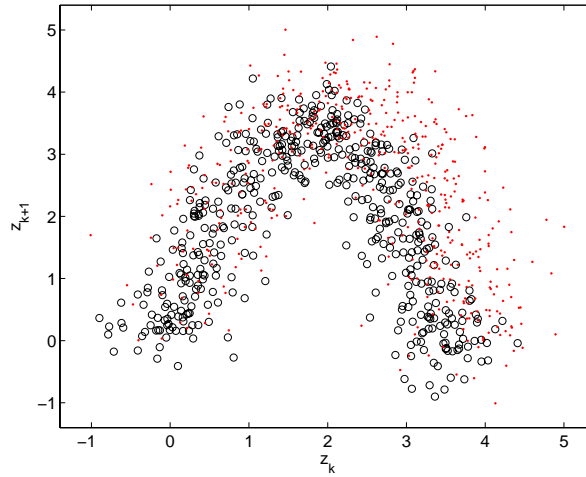


Figura 5.7: Mapas de primeiro retorno do modelo 5.5 com  $u_k \sim \mathcal{N}(-1,7910; 0,6381)$ ,  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 0; 0, 2169)$  e  $\mu = 2,5850$  fornecendo  $\mathcal{S}_{\hat{y}} = 2,64$ .

#### 5.1.3 O mapa de Hénon

O mapa de Hénon foi simulado com ambos os ruídos aditivo e multiplicativo:

$$\begin{cases} x_k = 1 - 1,4x_{k-1}^2 + w_{k-1} + m_k \\ w_k = 0,3x_{k-1}, \end{cases} \quad (5.7)$$

em que  $m_k \sim \mathcal{N}(0,0; 1,22 \times 10^{-4})$  e a série temporal usada para identificação foi  $y_k = x_k + e_k$ , na qual  $e_k \sim \mathcal{N}(0,0; 0,0494)$ . Um modelo autônomo foi identificado a partir de  $N = 1400$  pontos. Tal modelo se estabelece em uma solução periódica de período 4. Seguindo o procedimento sugerido neste trabalho com  $\ell = 3$ ,  $n_y = 2$ ,  $n_u = 1$ ,  $n_e = 4$  o seguinte modelo não-autônomo foi identificado

$$y_k = -0,0137y_{k-2}^2 - 0,8742y_{k-1}^2 + 0,8298 + 0,3907y_{k-2} - 0,1483y_{k-2}^3 + 0,3424y_{k-2}^2y_{k-1} - 0,4690y_{k-1} + 0,0782u_{k-1} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.8)$$

no qual

$$\mathcal{E}(\xi) = 0,2833 \xi_{k-2}\xi_{k-3} - 0,3703 \xi_{k-1} + 0,3983 y_{k-1}u_{k-1}\xi_{k-2} + 0,2401 y_{k-1}\xi_{k-1}^2 - 0,2219 y_{k-1}^2\xi_{k-1} + \xi(k), \quad (5.9)$$

sendo que  $\xi(k)$  é um processo de distribuição Gaussiana com média zero e  $\sigma_\xi^2 = 0,3960$ .

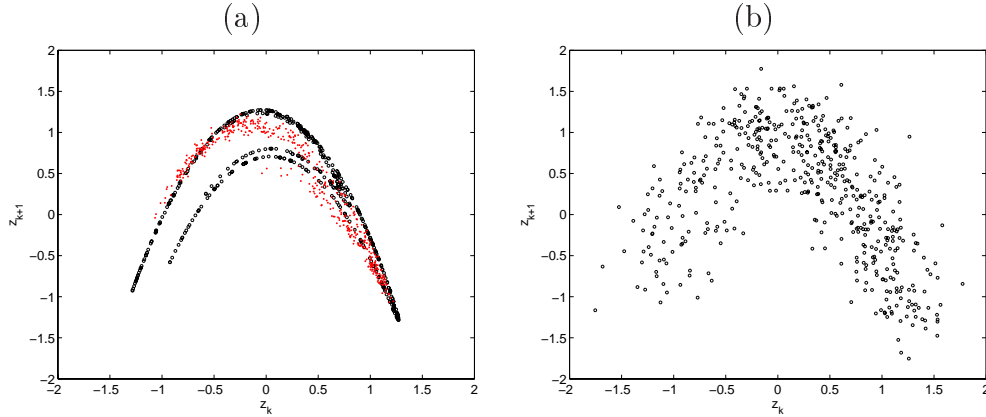


Figura 5.8: Mapas de primeiro retorno de (a) (sem ruído) mapa de Hénon (círculos) e do modelo 5.8 simulado sem  $\mathcal{E}(\xi)$  e com  $u_k \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 0,2586, \sigma_y^2 = 0,5712)$  (pontos vermelhos), e (b) mapa de Hénon (5.7) usado para construir o modelo (5.8)-(5.9).

### Caracterização do modelo e ajuste dos dados

Assim como para os outros exemplos, foram aqui também usados diagramas de bifurcações e entropia de Shannon para avaliar a qualidade do modelo 5.8 e para determinar quaisquer ajustes que seriam necessários para o ajuste fino da série temporal final.

A Figura 5.9 mostra o diagrama de bifurcações de ambos o mapa original de Hénon para  $b = 0,3$  e do modelo identificado. A característica dominante em ambos os diagramas é a cascata de duplicação de período. Uma diferença interessante é que o diagrama do mapa original de Hénon mostra uma janela de período 6 enquanto o diagrama correspondente do modelo identificado mostra uma janela de período 5. O ponto importante a enfatizar aqui é que para  $b = 0,1$  o *mapa original de Hénon* também apresenta uma janela de período 5 ao invés da janela de período 6 para  $b = 0,3$ . Conseqüentemente, novamente observa-se que o modelo identificado é, de fato, um modelo da dinâmica subjacente deslocado no espaço de parâmetros.

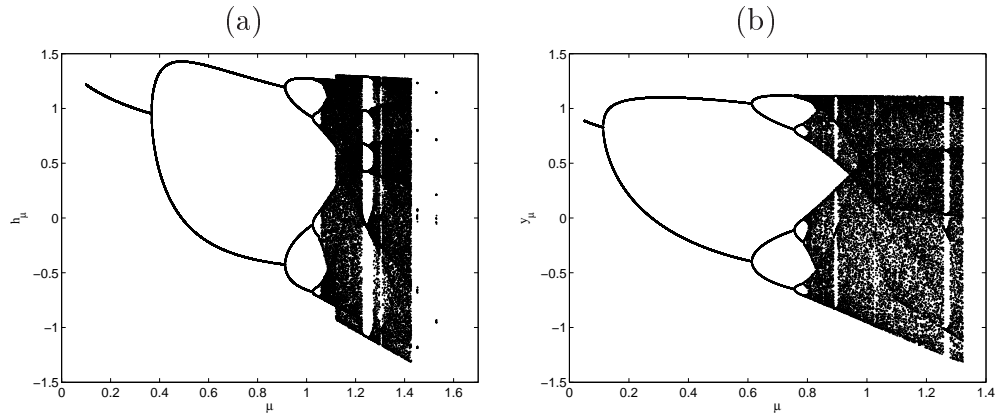


Figura 5.9: Diagramas de bifurcações de (a) mapa de Hénon para  $b = 0,3$  e (b) modelo 5.8 simulado sem  $\mathcal{E}(\xi)$  e com  $u_k = \bar{y} = 0,2586, \forall k$ . Em ambos os casos o parâmetro do termo  $y_{k-1}^2$  foi usado como o parâmetro de bifurcação  $\mu$ .

A entropia de Shannon para os dados originais  $y_k$  mostrados na Figura 5.8b foi  $\mathcal{S}_{\bar{y}} = 2,32$ . A série temporal produzida pela simulação do modelo 5.8 com  $u_k \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 0,2586, \sigma_y^2 = 0,5712)$  (veja os pontos vermelhos na Figura 5.8a) tem  $\mathcal{S} = 1,48$ . Aumentando-se a variância da entrada de 0,5712 para 1,5452 tem-se  $\mathcal{S}_{\bar{y}} = 1,70$ . Mantendo-se  $\sigma_u^2 = 1,5452$  e simulando o modelo 5.8 com o modelo de ruído  $\mathcal{E}(\xi)$  com  $\sigma_\xi = 0,0885$  a entropia resultante foi  $\mathcal{S}_{\bar{y}} = 2,32$ .

## 5.2 Séries de variabilidade da frequência cardíaca

Nesta seção são apresentados os resultados referentes à aplicação do método apresentado no Capítulo 4 para séries de variabilidade da frequência cardíaca. A partir de dois registros de intervalos RR de 24h horas de duração, foram selecionados, em cada registro, três janelas de 10.000 amostras para estudo.

Importa ter em conta que em todos os casos, nesta seção, os resultados do índice entropia aproximada, ApEn, sempre foram os últimos a serem calculados e sempre após todos os ajustes terem sido feitos; e ainda, que os cálculos de entropia de Shannon,  $\mathcal{S}$ , são efetuados com base em dinâmica simbólica.

### 5.2.1 Série 1

A Figura 5.10 apresenta a série denominada *Série 1*. A Série 1 é um registro de 24h, com 114.972 amostras, da qual foram selecionadas três janelas de dados, de 10.000 amostras cada, às quais foi aplicado o método de análise apresentado neste trabalho. Na primeira janela, *S1a*, estão as primeiras amostras, que foram registradas no fim da manhã. As amostras da segunda janela, *S1b*, foram registradas no fim da tarde e as amostras da terceira janela, *S1c*, foram registradas no fim da madrugada.

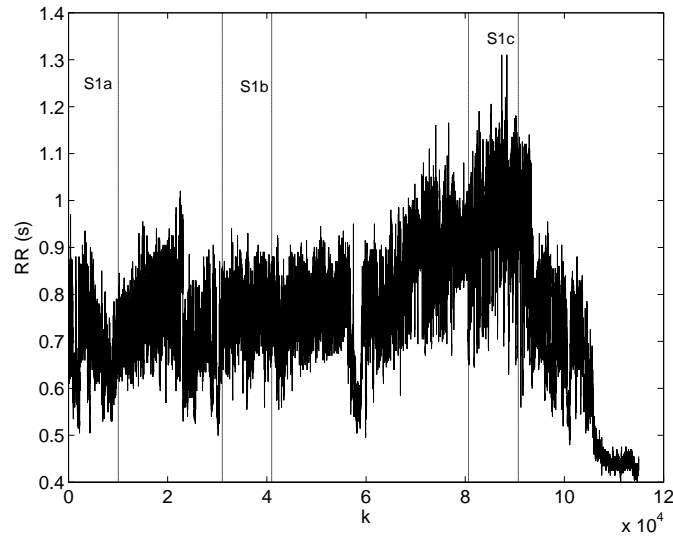


Figura 5.10: Série 1. Registro dos intervalos RR durante 24 h (114.972 amostras), de um voluntário com boa saúde (O registro teve início entre 11 h e meio dia).

### Série S1a

A Figura 5.11 apresenta a série *S1a*. Encontra-se em destaque entre as retas verticais, nessa mesma figura, o conjunto de dados com 5 min de duração (438 amostras) selecionado para ser usado na identificação de um modelo NARMAX. A série de 5 min é mostrada na Figura 5.12b. A Figura 5.12a mostra a entrada sintética construída por meio do procedimento apresentado na Seção 4.2.1 a partir da série de 5 min.

Um conjunto de termos regressores candidatos foram gerados tomando  $n_y = 24$ ,  $n_u = 12$  e  $n_e = 5$ . As primeiras 350 amostras das séries apresentadas na Figura 5.12 foram usadas para construir o modelo. Como em todos os casos, o critério ERR foi usado para definir a ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das variáveis regressoras até o segundo grau. Foram obtidos e simulados modelos de 5 a 25 termos. Assim como no caso dos sistemas dinâmicos (Seção 5.1), a combinação de fase descrita na Seção 4.2.1 é somente requerida na etapa de construção do modelo. Na etapa de simulação a combinação de fase não é requerida. Os modelos com mais de 20 termos mostraram comportamento instável.

Os índices usados na validação dos modelos (Tabelas 5.1 e 5.2) foram calculados para todas as séries simuladas e também para a série S1a. A série gerada pelo modelo 5.10 foi a que mostrou maior aproximação com S1a, de

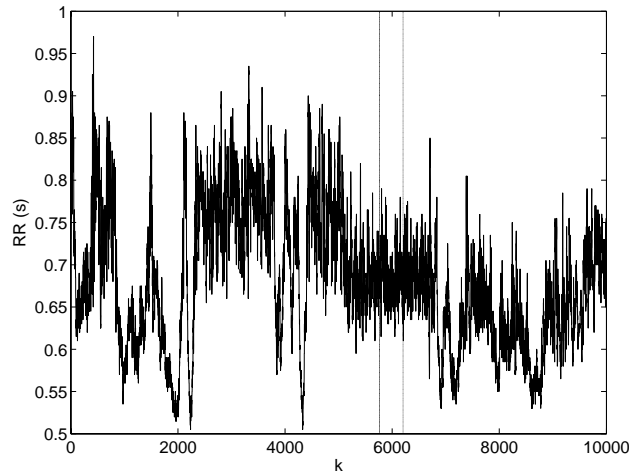


Figura 5.11: Série S1a, que compreende os primeiros 10.000 intervalos RR da série S1 (Figura 5.10).

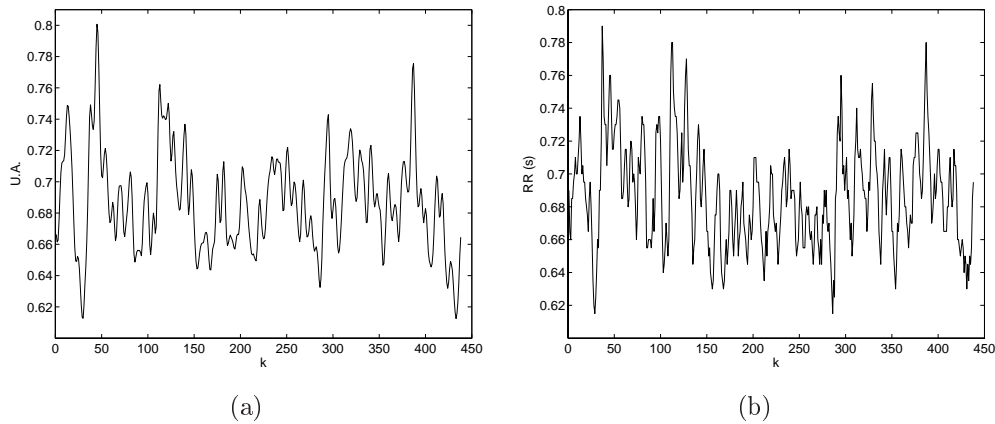


Figura 5.12: Séries usadas na indentificação de um modelo NARMAX polinomial: (a) entrada sintética (438 amostras) construída conforme Seção 4.2.1. (b) série de intervalos RR de 5 min (438 amostras) escolhida da Série S1a (Figura 5.11).

acordo com os índices. Assim, esse foi o critério adotado para determinação do número de termos dos modelos no caso das séries de VFC, diferentemente do caso dos sistemas dinâmicos, em que foi utilizado o surgimento do primeiro termo de entrada como critério para a determinação do número de termos do modelo.

S1a tem variância  $\sigma_y^2 = 0,0062$  e a variância da entrada sintética usada na simulação do modelo é  $\sigma_u^2 = 0,0063$ . A Figura 5.13 mostra que os mapas de primeiro retorno de S1a e da série gerada pelo modelo 5.10 exibem uma

forma aproximada.

$$\begin{aligned}
 y_k = & 0,9697y_{k-1} + 0,2193y_{k-2}^2 + 3,8666y_{k-14}u_{k-1} - 7,5635y_{k-14}u_{k-2} \\
 & + 5,6070y_{k-14}u_{k-3} - 1,8111y_{k-14}u_{k-4} - 0,3537y_{k-3}y_{k-1} \\
 & + 0,1935y_{k-12}u_{k-4} - 0,1149y_{k-1}u_{k-12} + \mathcal{E}(\xi),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\xi) = & -0,4141 y_{k-23}\xi_{k-5} + 0,3742 u_{k-1}\xi_{k-5} + 2,4855 y_{k-2}\xi_{k-3} \\
 & -1,8135 y_{k-3}\xi_{k-3} - 0,6502 u_{k-7}\xi_{k-3} - 3 + \xi(k),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

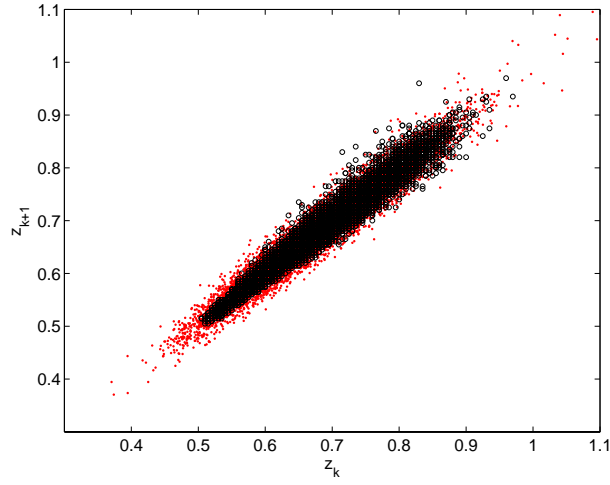


Figura 5.13: Mapas de primeiro retorno. Os círculos correspondem aos dados originais ( $z_k = y_k$ ) e os pontos à série ( $z_k = \hat{y}_k$ ) obtida por meio da iteração do modelo 5.10.

Os índices estatísticos de  $\hat{y}$  apresentam valores ligeiramente superiores aos de S1a (Tabela 5.1), o que indica que  $\sigma_u^2$  poderia ser ligeiramente menor. Os índices de complexidade,  $\mathcal{S}$  e ApEn (Tabela 5.2), indicam que S1a e  $\hat{y}$  têm uma “estocasticidade” semelhante, com valores muito aproximados.

No que se refere à dinâmica do modelo identificado, os índices DFA de  $\hat{y}$  ficaram aproximadamente 10% diferentes em relação aos de S1a, sendo que índice de correlação curta,  $\alpha_1$ , de  $\hat{y}$  ficou maior que o de S1a e, ao contrário, os índices de correlação longa,  $\alpha$  e  $\alpha_2$ , ficaram menores em relação aos de S1a. Os histogramas apresentados na Figura 5.14 mostram que  $\hat{y}$  exibe um padrão semelhante ao de S1a. De fato, há diferença nas probabilidades de muitas seqüências, mas há semelhança em relação às seqüências em destaque em ambos os histogramas.

Tabela 5.1: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S1a	0,078	0,016
$\hat{y}$	0,080	0,021

Tabela 5.2: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S1a	1,152	1,545	1,135	3,008	0,6795
$\hat{y}$	1,039	1,723	1,037	3,033	0,6795

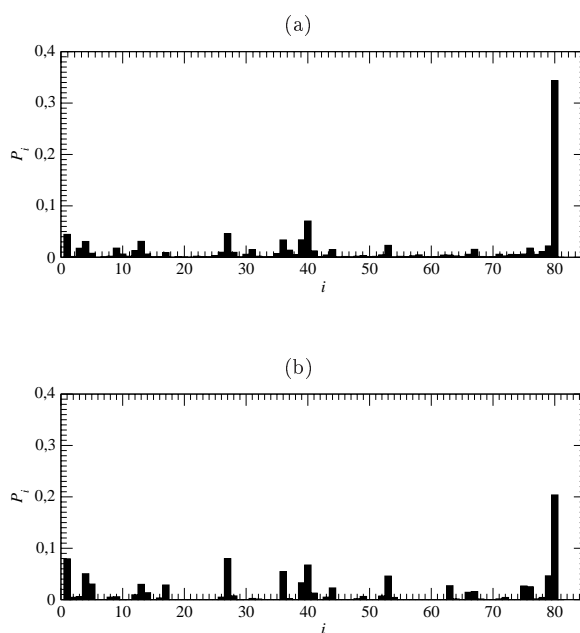


Figura 5.14: Histograma das seqüências descritas por: (a) S1a ( $\mathcal{S} = 3,008$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,033$ ).

### Série S1b

A Figura 5.15 apresenta a série *S1b*. As retas verticais paralelas determinam a região da série em que foi selecionada a janela de dados de 5 min (com 380 amostras), usada na identificação do modelo. A Figura 5.16b mostra essa

janela de 5 min e a Figura 5.16a mostra a entrada sintética  $u_k$  construída a partir da referida janela de 5 min.

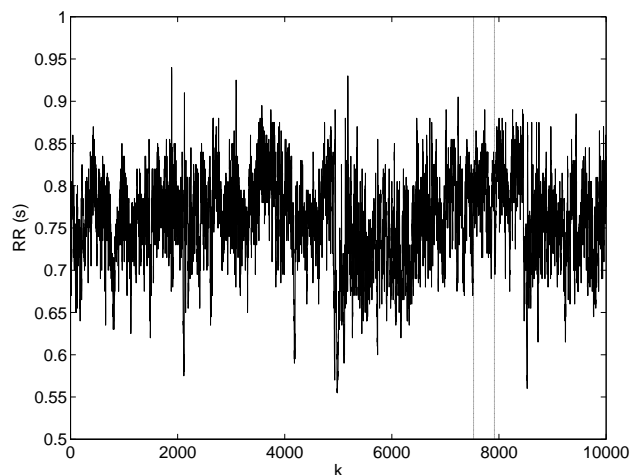


Figura 5.15: Série S1b que compreende os intervalos RR de 31.001 a 41.000 da série S1 (Figura 5.10).

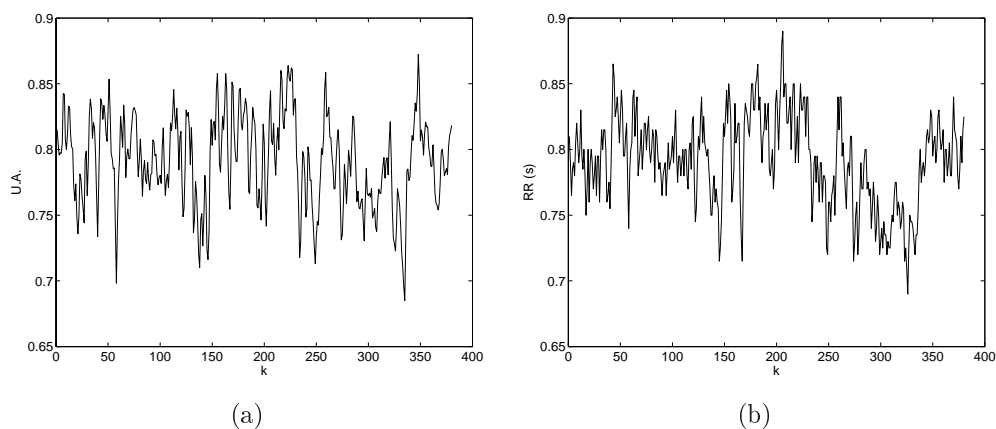


Figura 5.16: Séries usadas na identificação de um modelo NARMAX polinomial: (a) entrada sintética (380 amostras) construída conforme Seção 4.2.1. (b) série de intervalos RR de 5 min (380 amostras) escolhida da Série S1a (Figura 5.15).

Um conjunto de termos regressores candidatos foi gerados tomando  $n_y = 24$ ,  $n_u = 10$  e  $n_e = 8$ . As primeiras 304 amostras das séries apresentadas na Figura 5.16 foram usadas para construir o modelo. O critério ERR foi usado para definir a ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das

variáveis regressoras até o segundo grau. Foram obtidos e simulados modelos de 5 a 25 termos.

Os índices usados na validação dos modelos (Tabelas 5.3 e 5.4) foram calculados para todas as séries simuladas e também para a Série S1b. Segundo os índices, o modelo 5.12, com 12 termos, foi o que apresentou resultados mais próximos aos de S1b.

A Série S1b tem variância  $\sigma_y^2 = 0,0026$ , a entrada sintética  $\tilde{u}_k$  usada na simulação do modelo 5.12 tem variância  $\sigma_{\tilde{u}}^2 = 0,0118$  e a série  $\hat{y}$  obtida pela simulação do modelo tem variância  $\sigma_{\hat{y}}^2 = 0,0027$ . Ao se observar esses valores de variância e os resultados apresentados na Tabela 5.3, pode-se verificar que os resultados de  $\hat{y}$  estão muito próximos aos de S1b. Então, considerando-se especificamente  $\sigma_{\tilde{u}}^2$ , 443% maior que  $\sigma_y^2$ , pode-se verificar que neste caso  $\sigma_{\tilde{u}}^2$  foi usado como um parâmetro de ajuste.

$$\begin{aligned}
 y_k = & 0,5358y_{k-1} + 0,1315y_{k-20} + 0,3509y_{k-7} - 1,7895y_{k-15}u_{k-2} \\
 & -0,2957y_{k-3}u_{k-1} + 1,1176y_{k-5}u_{k-5} - 0,0933y_{k-11}u_{k-7} \\
 & +1,3704u_{k-1}u_{k-3} - 0,9944u_{k-4}u_{k-6} + 0,5991y_{k-4}u_{k-6} \\
 & +0,3985y_{k-2}u_{k-2} - 0,3367u_{k-1}u_{k-4} + \mathcal{E}(\xi),
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\xi) = & -0,1055 \xi_{k-4}^2 + 0,0188 y_{k-24}\xi_{k-4} + 0,1306 \xi_{k-4}\xi_{k-5} \\
 & +0,1014 u_{k-10}\xi_{k-5} + 0,0855 \xi^2 k - 5 + \xi(k),
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Tabela 5.3: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S1b	0,051	0,021
$\hat{y}$	0,051	0,019

Quanto à validação da dinâmica, da Tabela 5.4 pode ser visto que o índice  $\alpha$  de S1b e de  $\hat{y}$  são idênticos;  $\alpha_2$  de  $\hat{y}$  ficou ligeiramente superior. Isso indica que a correlação longa foi bem assimilada pelo modelo 5.12. Quando comparados os respectivos  $\alpha_1$ , verifica-se que o  $\alpha_1$  de  $\hat{y}$  é 8,64% maior. A Figura 5.17 mostra os histogramas das seqüências descritas por S1b  $\hat{y}$ , que apresentam padrões de comportamento semelhantes. Ligeiras diferenças podem ser percebidas em relação às probabilidades das seqüências 1000 e 1111

de índices  $i = 27$  e  $i = 40$ , respectivamente. No primeiro caso, a probabilidade da seqüência de  $\hat{y}$  é ligeiramente superior a da correspondente de S1b e no segundo caso ocorre justamente o inverso.

No atinente à complexidade, os resultados (Tabela 5.4) mostram que S1b é mais estocástica que  $\hat{y}$ . Enquanto que para a entropia de Shannon a diferença ficou pequena, 3%, a entropia aproximada de S1b é 45,37% maior que a de  $\hat{y}$ . Como dito anteriormente, a entropia aproximada foi o último índice a ser calculado no estudo de cada série, ou seja, com todos os ajustes já efetuados — no caso de S1b o único parâmetro de ajuste utilizado foi  $\sigma_u^2$ . Esses resultados indicam que um segundo parâmetro de ajuste, a adição de resíduos, poderia ter sido usado para aproximar o índice de complexidade.

Tabela 5.4: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S1b	0,956	1,412	0,921	3,21	1,1045
$\hat{y}$	0,956	1,534	0,951	3,11	0,7598

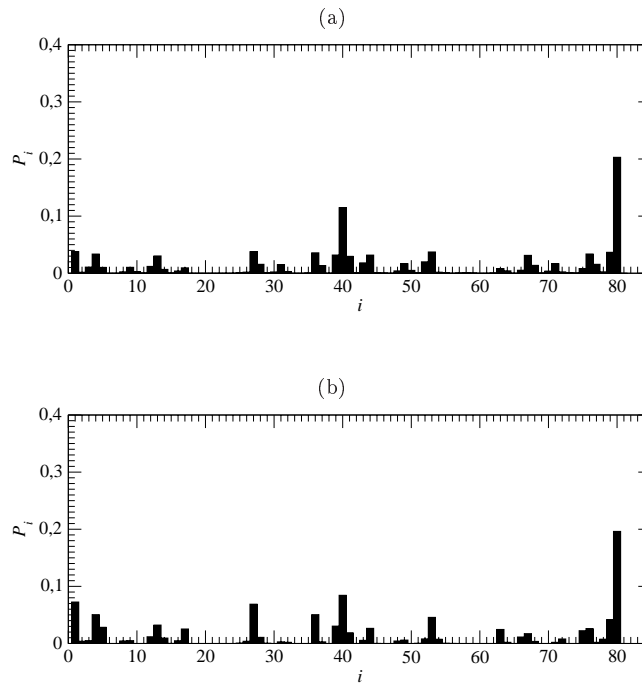


Figura 5.17: Histograma das seqüências descritas por: (a) S1b ( $\mathcal{S} = 3,21$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,11$ ).

### Série S1c

O último conjunto de dados analisados da Série S1, a Série S1c é apresentada na Figura 5.18, na qual é destacada, entre as retas verticais, a janela de dados com duração de 5 min (Figura 5.19b) usada para encontrar um modelo NARMAX. A partir dessa janela de 5 min (304 amostras) foi construída uma entrada sintética que é mostrada na Figura 5.19a.

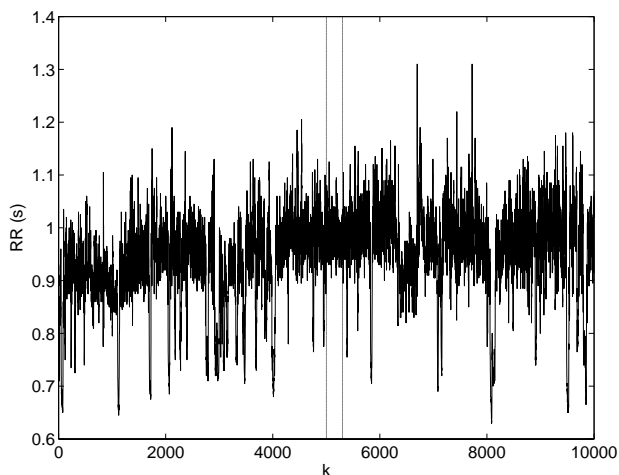


Figura 5.18: Série de intervalos RR denominada S1c e compreendida entre as amostras 80.679 e 90.678 da Série S1.

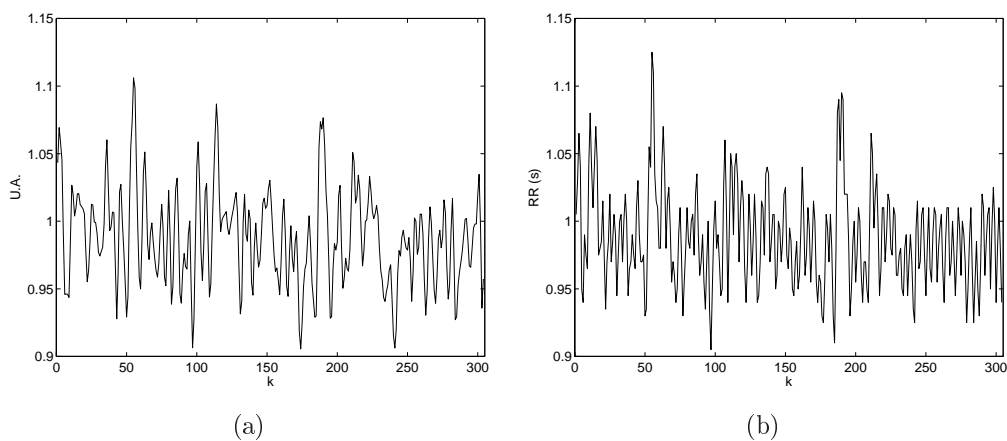


Figura 5.19: Séries usadas na construção de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 304 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.

Para gerar o conjunto de termos regressores candidatos tomou-se  $n_y = 24$ ,

$n_u = 9$  e  $n_e = 6$ . A fim de construir o modelo, foram usadas as primeiras 250 amostras das séries apresentadas na Figura 5.19 na parte de identificação dos modelos e o restante foi usada na primeira etapa de validação. O critério ERR foi usado para definir a ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das variáveis regressoras até o segundo grau. Foram obtidos e simulados modelos de 5 a 25 termos.

O modelo 5.14 foi o que apresentou os melhores resultados, segundo índices usados neste trabalho. A Série S1c tem variância  $\sigma_y^2 = 0,0077$ , a entrada sintética  $\tilde{u}_k$  usada na simulação do modelo 5.14 tem variância  $\sigma_{\tilde{u}}^2 = 0,0581$  e a série  $\hat{y}$  obtida por meio da simulação do modelo tem variância  $\sigma_{\hat{y}}^2 = 0,0079$ . A Tabela 5.5 mostra que em relação aos índices do domínio do tempo as séries  $\hat{y}$  e S1c estão relativamente aproximadas. Essa aproximação se deve ao emprego de um dos parâmetros de ajuste,  $\sigma_{\tilde{u}}^2$ .

A Tabela 5.6 mostra que o modelo assimilou a característica de correlação longa da Série S1c, dada a proximidade dos entre os valores de  $\alpha$  e de  $\alpha_2$  da série  $\hat{y}$  e a Série S1c. Por outro lado, a mesma tabela mostra  $\alpha_1$  de  $\hat{y}$  27,71% maior que o de S1b e ainda, que  $\mathcal{S}$  de S1c 20,94% maior que a de  $\hat{y}$ . Dado isso, resolveu-se lançar mão dos outros dois parâmetros de ajuste para diminuir essas diferenças.

$$y_k = 1,3967y_{k-1} + 0,1075y_{k-8}y_{k-24} - 0,7261y_{k-1}y_{k-2} + 0,5024y_{k-3}u_{k-1} - 0,1740y_{k-15}u_{k-2} - 0,1143y_{k-5}u_{k-2} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.14)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\mathcal{E}(\xi) = 3,6143 y_{k-24}\xi_{k-3} - 3,4192 y_{k-20}\xi_{k-3} + 4,1732 \xi_{k-2}^2 - 5,9312 \xi_{k-2}\xi_{k-4} - 5,3452 \xi k - 5\xi k - 1 + \xi(k), \quad (5.15)$$

Tabela 5.5: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S1c	0,088	0,034
$\hat{y}$	0,089	0,029

Tabela 5.6: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$
S1c	0,978	1,303	0,933	3,87
$\hat{y}$	0,942	1,664	0,920	3,20

Os parâmetros dos três primeiros termos do modelo 5.14 sofreram ligeiras alterações e foram adicionados resíduos com  $\sigma_\xi^2 = 7,26 \times 10^{-4}$ , aproximadamente 1% da variância de S1c. Além disso, devido a essas alterações, foi necessário diminuir a variância da entrada sintética, tornando-se  $\sigma_u^2 = 0,0476$ . Então o novo modelo (5.16) foi simulado e novos cálculos foram efetuados.

A Tabela 5.7 mostra que o SDNN da nova  $\hat{y}$  e o de S1c são idênticos, mas o RMSSD de  $\hat{y}$  ficou muito elevado em relação ao de S1c. Na Tabela 5.8 pode ser verificado que permaneceu a proximidade entre  $\alpha$  e  $\alpha_2$  das séries S1c e  $\hat{y}$ . A diferença entre os valores do índice  $\alpha_1$  das duas referidas séries foi significativamente reduzida, tornando-se, de fato, próximos. Para completar a validação do comportamento dinâmico do modelo 5.16, a Figura 5.20 mostra um padrão deveras semelhante entre os histogramas das seqüências das séries S1c (Figura 5.20a) e  $\hat{y}$  (Figura 5.20b). Nesta seção também é mostrado o histograma das seqüências da série  $\hat{y}$  gerada pelo modelo 5.14 (Figura 5.20c), para que se possa verificar o ganho alcançado com os parâmetros de ajuste.

Outro avanço importante do modelo 5.16 em relação ao modelo 5.14, foi a aproximação significativa nos valores de  $\mathcal{S}_{S1c}$  e  $\mathcal{S}_{\hat{y}}$ , a diferença foi reduzida de 20,94% para 2,11%. Por outro lado, o valor da entropia aproximada de  $\hat{y}$  é consideravelmente maior que o de S1a (Tabela 5.8).

$$y_k = 1,3840y_{k-1} + 0,1160y_{k-8}y_{k-24} - 0,6950y_{k-1}y_{k-2} + 0,5024y_{k-3}u_{k-1} - 0,1740y_{k-15}u_{k-2} - 0,1143y_{k-5}u_{k-2} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.16)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\mathcal{E}(\xi) = 3,6143 y_{k-24}\xi_{k-3} - 3,4192 y_{k-20}\xi_{k-3} + 4,1732 \xi_{k-2}^2 - 5,9312 \xi_{k-2}\xi_{k-4} - 5,3452 \xi k - 5\xi k - 1 + \xi(k), \quad (5.17)$$

Tabela 5.7: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S1c	0,088	0,034
$\hat{y}$	0,088	0,048

Tabela 5.8: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S1c	0,978	1,303	0,933	3,87	1,037
$\hat{y}$	0,932	1,381	0,923	3,79	1,290

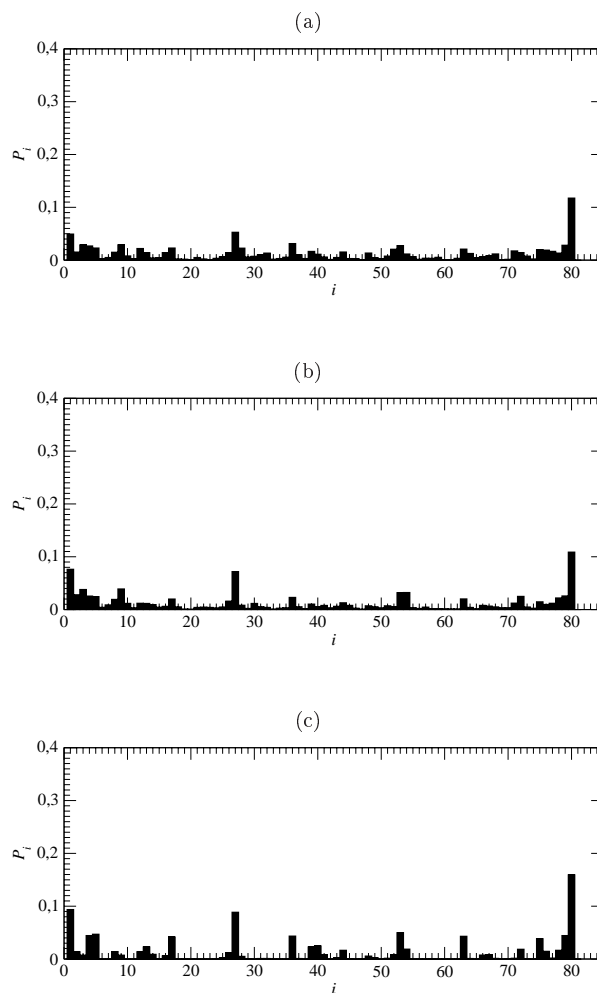


Figura 5.20: Histograma das seqüências descritas por: (a) S1c ( $\mathcal{S} = 3,87$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,79$ ), após os ajustes, isto é, modelo 5.16, (c)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,17$ ), antes dos ajustes, isto é, modelo 5.14.

Após verificar e analisar os resultados apresentados é importante considerar que o procedimento de modelagem possibilita obter modelos que mostram ser capazes de assimilar os aspectos dinâmicos e estocásticos dos sistemas originais e que o parâmetros de ajuste, que também fazem parte do procedimento de modelagem, são responsáveis pelo “ajuste fino” dessa aproximação. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 5.20. A parte (c) dessa figura (modelo 5.14) mostra certa semelhança com o histograma da série original, parte (a), e a parte (b) evidencia a ação dos parâmetros de ajuste, no sentido de melhorar a aproximação tanto no atinente ao histograma das seqüências quanto ao valor da entropia de Shannon.

### 5.2.2 Série 2

A Figura 5.21 apresenta um registro de 24 h de intervalos RR, com 115.893 amostras. Desse série, que é denominada *Série 2*, foram selecionadas três janelas de dados de períodos diferentes do dia, de 10.000 amostras cada, às quais foi aplicado o método de análise apresentado neste trabalho, da mesma forma que para a Série 1.

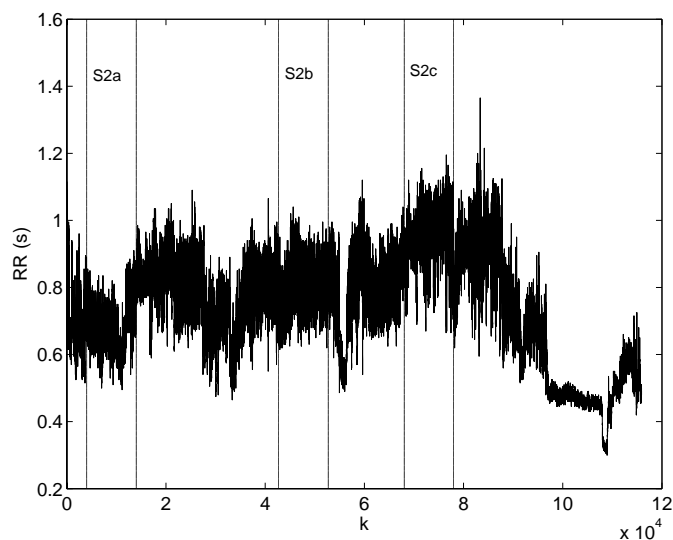


Figura 5.21: Série 2. Registro dos intervalos RR durante 24 h (115.893 amostras), de um voluntário com boa saúde (O registro teve início entre 11 h e meio dia).

### Série S2a

A Figura 5.22 mostra a Série S2a, que corresponde às amostras de 4.001 a 14.000 da Série S2. Na referida figura, as retas verticais delimitam uma janela de dados com 456 amostras, equivalentes a 5 min de duração (Figura 5.23b). A partir da janela de 5 min foi construída a uma entrada sintética  $u_k$  (Figura 5.23a) e ambas serão usadas na obtenção de um modelo NARMAX polinomial.

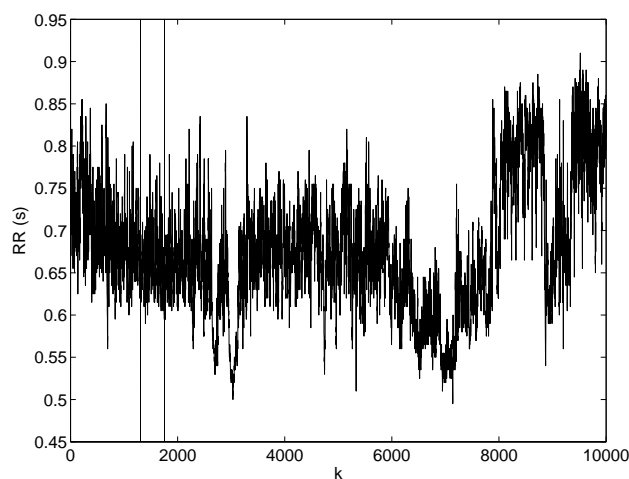


Figura 5.22: Série de intervalos RR denominada S2a e compreendida entre as amostras 4.001 e 14.000 da Série S2.

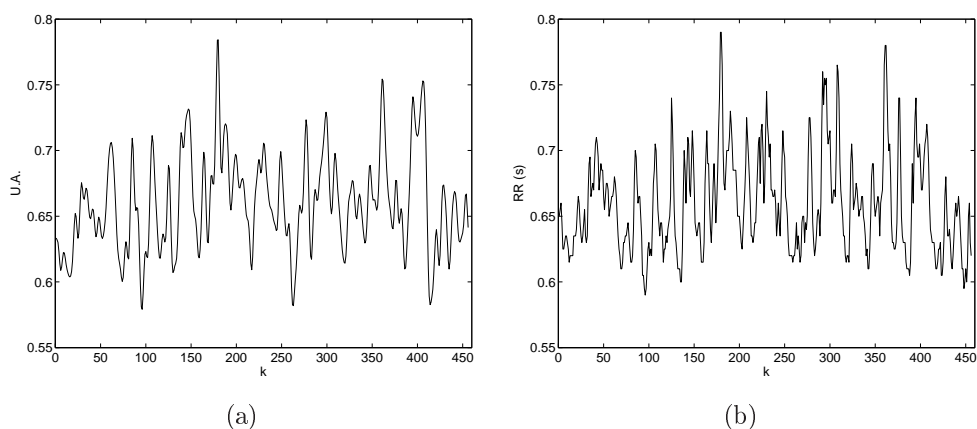


Figura 5.23: Séries usadas na construção de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 456 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.

Um conjunto de termos regressores candidatos foi gerado tomando  $n_y = 25$ ,  $n_u = 13$  e  $n_e = 4$ . As primeiras 365 amostras das séries apresentadas na Figura 5.23 foram usadas para construir o modelo e o restante das séries foi usado na primeira etapa de validação. O critério ERR foi usado para definir a ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das variáveis regressoras até o segundo grau. Foram obtidos e simulados modelos de 5 a 25 termos. Os índices apresentados nas Tabelas 5.9 e 5.10 foram calculados para todas as séries resultantes da simulação dos modelos e também para S2a. O modelo que cujos índices mostrou maior aproximação aos resultados de S2a, foi o modelo 5.18 que tem cinco termos.

A Série S2a tem variância  $\sigma_y^2 = 0,0056$ , a entrada sintética  $\tilde{u}_k$  usada na simulação dos modelos tem variância  $\sigma_u^2 = 0,0080$  e a série  $\hat{y}_k$  gerada pela simulação do modelo 5.18 tem variância  $\sigma_{\hat{y}}^2 = 0,0057$ . A Tabela 5.9 mostra que os resultados dos índices do domínio do tempo de  $\hat{y}$  são idênticos aos de S2a.

Comparando-se os índices do DFA de  $\hat{y}_k$  e de S2a, na Tabela 5.10, para a validação da dinâmica, verifica-se que os índices  $\alpha$  e  $\alpha_1$  de  $\hat{y}$  apresentam uma diferença de 10,94% em relação aos correspondentes de S2a, o primeiro para menos e o segundo para mais. O índice  $\alpha_2$  de  $\hat{y}$  é 16,54% menor que o de S2a. A mesma tabela mostra, por meio da entropia de Shannon, que as duas séries têm complexidade semelhante.

$$y_k = 1,0154y_{k-1} + 0,8282y_{k-2}^2 + 1,1543u_{k-1}^2 - 3,5481y_{k-2}u_{k-2} + 1,5437y_{k-2}u_{k-3} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.18)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\mathcal{E}(\xi) = -0,4430 u_{k-10}\xi_{k-3} + 0,3055 y_{k-13}\xi_{k-4} + 0,3271 y_{k-25}\xi_{k-1} - 0,2998 y_{k-3}\xi_{k-1} + 0,1199 y_{k-6}\xi_{k-4} + \xi(k), \quad (5.19)$$

Tabela 5.9: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2a	0,075	0,020
$\hat{y}$	0,075	0,020

Tabela 5.10: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$
S2a	1,085	1,444	1,078	3,21
smod	0,978	1,602	0,925	3,11

Com o intuito de tornar os índices do DFA das séries  $\hat{y}$  e S2a mais próximos, decidiu-se fazer uso dos parâmetros de ajuste. Nesse sentido, após uma série de tentativas, os parâmetros do modelo 5.18 foram modificados dando origem ao modelo 5.20. Essas modificações exigiram que a variância da entrada sintética  $\tilde{u}_k$  fosse reduzida para  $\sigma_{\tilde{u}}^2 = 0,0063$  e em contrapartida foi necessário adicionar resíduos com variância  $\sigma_{\xi}^2 = 6,6 \times 10^{-5}$ , ou seja, 84,85 vezes menor que a variância de S2a. O novo modelo foi então simulado e os índices novamente calculados.

O uso dos parâmetros de ajuste acarretaram, de início, uma diferença nos índices do domínio do tempo antes inexistente. Por outro lado, a diferença em relação a  $\alpha$  caiu de quase 11 para 2,46% e a de  $\alpha_2$  caiu pela metade, ou seja, para 8,34%. Com relação a  $\alpha_1$  a diferença aumentou aproximadamente 1%. Ainda na validação da dinâmica, a Figura 5.24 mostra que os histogramas das seqüências das duas séries, S2a e  $\hat{y}$ , são muito semelhantes e, conseqüentemente, revelam um comportamento igualmente semelhante para duas séries.

A Tabela 5.12 mostra que as mudanças efetuadas não alteraram o valor de entropia de Shannon anteriormente obtido para  $\hat{y}$ . Na mesma tabela tem-se os valores de entropia aproximada para as duas séries. Nesse caso, há uma diferença importante indicando uma maior complexidade por parte da série original.

$$y_k = 0,972y_{k-1} + 0,83y_{k-2}^2 + 1,1272u_{k-1}^2 - 3,4651y_{k-2}u_{k-2} + 1,5581y_{k-2}u_{k-3} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.20)$$

no qual o modelo de ruído é:

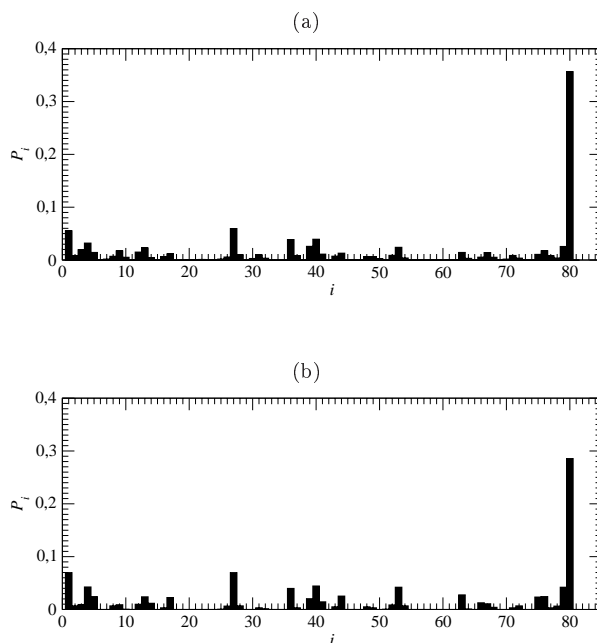
$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi) = & -0,4430 u_{k-10}\xi_{k-3} + 0,3055 y_{k-13}\xi_{k-4} + 0,3271 y_{k-25}\xi_{k-1} \\ & -0,2998 y_{k-3}\xi_{k-1} + 0,1199 y_{k-6}\xi_k - 4 + \xi(k), \end{aligned} \quad (5.21)$$

Tabela 5.11: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2a	0,075	0,020
$\hat{y}$	0,079	0,015

Tabela 5.12: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S2a	1,085	1,444	1,078	3,21	0,9077
$\hat{y}$	1,059	1,619	0,995	3,11	0,5710

Figura 5.24: Histograma das seqüências descritas por: (a) S2a ( $\mathcal{S} = 3,21$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,11$ ).

### Série S2b

A Série S2b, mostrada na Figura 5.25, foi selecionada da Série S2 no trecho que abrange as amostras de 42.701 a 52700. De S2b foi selecionado um conjunto de dados com 368 amostras, que correspondem a 5 min de duração.

A partir dessa série de 5 min (Figura 5.26b) foi construída uma entrada sintética (Figura 5.26a) e os dois conjuntos de dados foram usados como saída e entrada, respectivamente, na construção de modelos NARMAX polinomiais.

Para gerar um conjunto de termos candidatos foram tomados  $n_y = 25$ ,  $n_u = 11$  e  $n_e = 4$ . As primeiras 295 amostras do conjunto entrada e saída foram usadas na etapa de identificação dos modelos e o restante na primeira etapa da validação dos mesmos. O critério ERR foi usado para definir a ordem de prioridade de cada combinação linear e não-linear das variáveis regressoras até o segundo grau. Foram obtidos e simulados modelos de 5 a 25 termos. Os índices apresentados nas Tabelas 5.13 e 5.14 foram calculados para todas as séries oriundas da simulação dos modelos e também para S2b. O modelo do qual os valores dos índices tiveram maior aproximação aos resultados de S2b foi o modelo 5.22, que tem cinco termos.

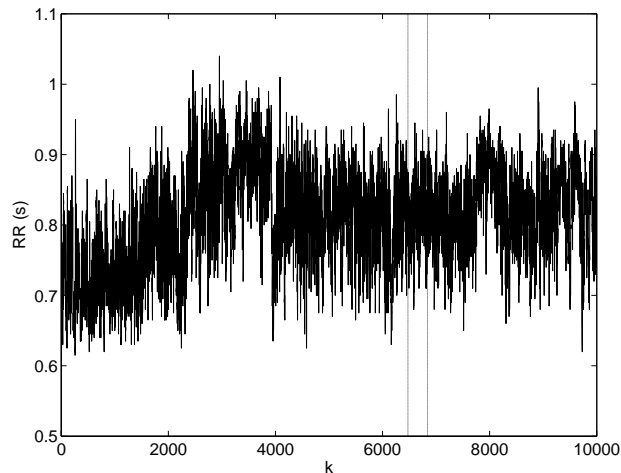


Figura 5.25: Série de intervalos RR, S2b, compreendida entre as amostras 42.701 a 52.700 da Série S2 (Figura 5.21).

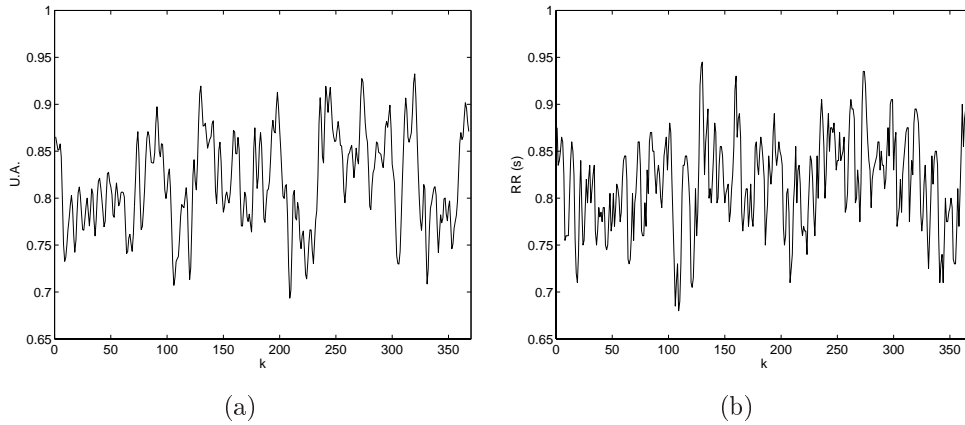


Figura 5.26: Séries usadas na identificação de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 368 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.

$$y_k = 1,0203y_{k-1} - 0,1916y_{k-1}y_{k-2} + 1,1376y_{k-11}u_{k-1} - 1,7590y_{k-11}u_{k-2} + 0,7890y_{k-11}u_{k-3} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.22)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\mathcal{E}(\xi) = 1,8984 u_{k-6}\xi_{k-3} - 4,8474 y_{k-15}\xi_{k-2} + 2,0642 y_{k-20}\xi_{k-3} + 2,0973 y_{k-14}\xi_{k-3} + 0,1103 y_{k-8}\xi_{k-1} + \xi(k), \quad (5.23)$$

Começando pelos índices estatísticos, tem-se que S2b tem variância  $\sigma_y^2 = 0,0051$ . Fazendo-se a variância da série sintética  $\tilde{u}_k$ , usada na simulação do modelo 5.22,  $\sigma_{\tilde{u}}^2 = 0,0259$  tem-se, conseqüentemente,  $\hat{y}_k$  com variância  $\sigma_{\hat{y}}^2 = 0,0055$ . Na Tabela 5.13 pode-se ver que o SDNN de  $\hat{y}_k$  é relativamente próximo ao de S2b, enquanto que o RMSSD da primeira é muito menor que o da série original.

Com relação à validação da dinâmica do modelo, pode-se verificar pela Tabela 5.14 que há uma variação na aproximação dos valores do índices DFA de  $\hat{y}_k$  em relação aos correspondentes de S2b, ou seja, enquanto que a diferença em relação a  $\alpha$  é de 1,8%, em relação a  $\alpha_1$  é de 22,63% e para  $\alpha_2$  está em uma posição intermediária. Na validação de complexidade, na mesma tabela, a entropia de Shannon de S2b é aproximadamente 16% maior. Então, o próximo passo é buscar uma maior aproximação entre o modelo e S2b por meio dos parâmetros de ajuste.

Tabela 5.13: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2b	0,071	0,032
$\hat{y}$	0,074	0,020

Tabela 5.14: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$
S2b	0,903	1,374	0,889	3,69
$\hat{y}$	0,887	1,685	0,807	3,15

Os dois primeiros parâmetros do modelo 5.22 foram ligeiramente modificados, dando origem ao modelo 5.24. Essas alterações exigiram, em compensação, uma redução na variância de  $\tilde{u}_k$  anteriormente aplicada para  $\sigma_{\tilde{u}}^2 = 0,0224$ . Aliado a isso, uma última ação foi adição de resíduos com variância  $\sigma_{\xi}^2 = 3,54 \times 10^{-4}$ , o que corresponde a 0,7% da variância de S2b.

$$y_k = 1,0083y_{k-1} - 0,1750y_{k-1}y_{k-2} + 1,1376y_{k-11}u_{k-1} - 1,7590y_{k-11}u_{k-2} + 0,7890y_{k-11}u_{k-3} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.24)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\xi) = & 1,8984 u_{k-6}\xi_{k-3} - 4,8474 y_{k-15}\xi_{k-2} + 2,0642 y_{k-20}\xi_{k-3} \\ & + 2,0973 y_{k-14}\xi_{k-3} + 0,1103 y_{k-8}\xi_k - 1 + \xi(k), \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como resultados desses ajustes tem-se, na Tabela 5.16, que não houve alteração significativa para SDNN, mas que o índice RMSSD da nova série  $\hat{y}_k$ , originada da simulação do modelo 5.24, é igual ao da Série S2b.

Com relação aos índices dinâmicos, pode-se verificar na Tabela 5.16 que não houve alteração no valor de  $\alpha$ , em relação a diferença entre os valores de  $\alpha_2$  da duas séries, foi diminuída de  $\approx 10\%$  para  $\approx 8\%$ , mas em relação a  $\alpha_1$  essa diferença diminuiu de  $\approx 22\%$  para 4,6%. A Figura 5.16 mostra que os histogramas das seqüências das duas séries apresentam um padrão de comportamento muito semelhante, à exceção das seqüências em torno de  $i = 40$ .

No atinente à complexidade, a série  $\hat{y}_k$  do modelo 5.24 tem entropia de Shannon quase idêntica à da Série S2b, comprovando a ação profícua nos

parâmetros de ajuste. Os resultados do cálculo da entropia aproximada para as duas série confirma a proximidade entre as mesmas em relação à complexidade.

Tabela 5.15: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2b	0,071	0,032
$\hat{y}$	0,075	0,032

Tabela 5.16: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S2b	0,903	1,374	0,889	3,69	1,305
$\hat{y}$	0,887	1,437	0,818	3,68	1,215

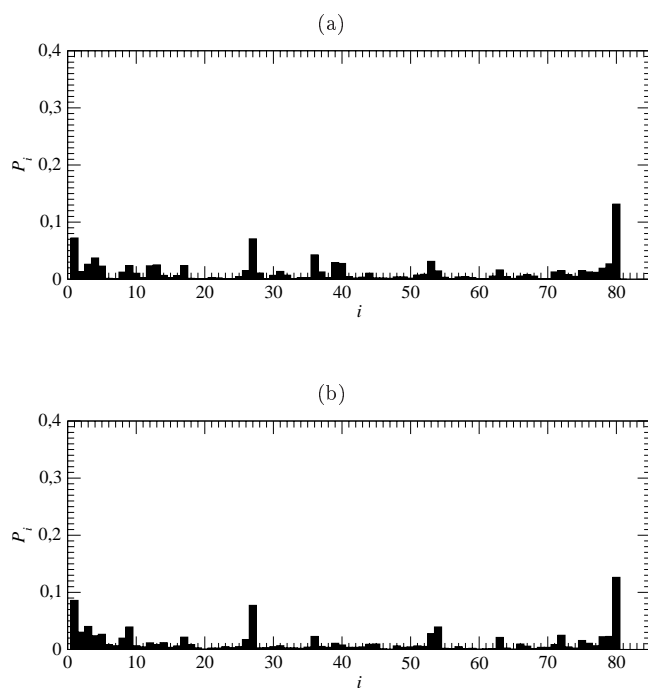


Figura 5.27: Histograma das seqüências descritas por: (a) S2b ( $\mathcal{S} = 3,69$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,68$ ).

### Série S2c

A Figura 5.28 apresenta a Série S2c, que é formada pelas amostras de número 68.001 a 78.000 da Série S2. Em destaque, entre as retas verticais, encontra-se um conjunto de dados com 310 amostras e 5 min de duração. Esse conjunto de dados, que pode ser visto na Figura 5.29b, forneceu informações para a construção da entrada sintética (Figura 5.29a), por meio do método apresentado na Seção 4.2.1. A entrada sintética forma com a série de 5 min o conjunto entrada e saída, respectivamente, usado na construção de modelos NARMAX polinomiais.

Um conjunto de termos regressores candidatos foi gerado tomando  $n_y = 24$ ,  $n_u = 8$  e  $n_e = 4$ . Para a etapa de identificação dos modelos foram usadas a 239 primeiras amostras do conjunto entrada saída, sendo que o restante das séries foi usado na primeira etapa de validação dos modelos identificados. Assim como nos outros exemplos o critério ERR foi utilizado para determinar a ordem de prioridade dos termos candidatos até o segundo grau. Após a primeira etapa de validação, foi escolhido um modelo que foi simulado variando-se o número de termos de 5 a 25. Para excitar o modelo nessa etapa de simulação foi construída uma entrada sintética  $\tilde{u}_k$ , sem combinação de fase, com 10.000 amostras.

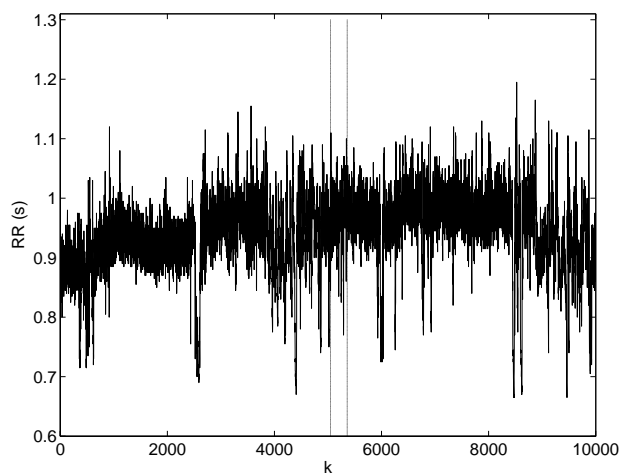


Figura 5.28: Série de intervalos RR, S2c, compreendida entre as amostras 68.001 a 78.000 da Série S2 (Figura 5.21).

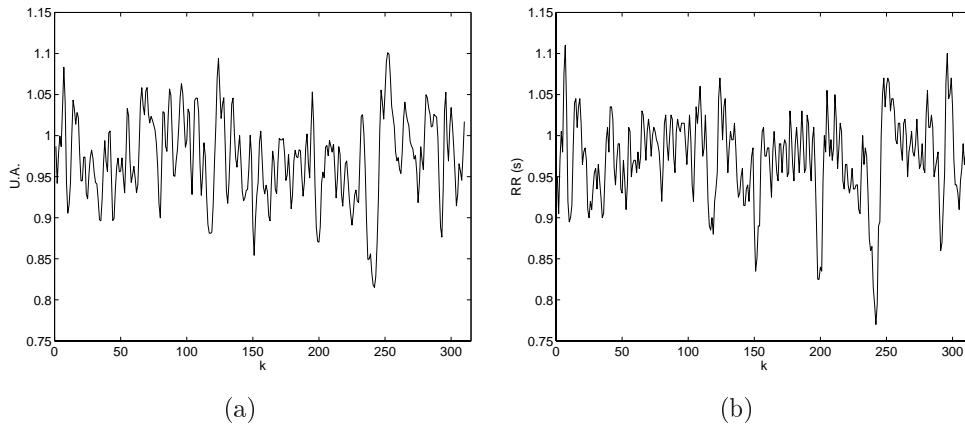


Figura 5.29: Séries usadas na identificação de modelos NARMAX polinomiais, ambas com 310 amostras: (a) entrada sintética, (b) série de intervalos RR com 5 min de duração.

Para cada série obtida por meio da simulação do modelo, e também para a série S2c, foram calculados os índices apresentados nas Tabelas 5.17 e 5.18, e os resultados desses cálculos foram usados para determinar o número de termos do modelo, de acordo com a aproximação aos resultados encontrados para S2c. Sendo assim, o modelo 5.26, com sete termos, foi escolhido e os resultados encontrados tanto para S2c quanto para a série  $\hat{y}_k$  gerada pelo modelo 5.26, são mostrados nas Tabelas 5.17 e 5.18. Ao se observar as duas tabelas, verifica-se que somente nos casos dos índices  $\alpha$  e  $\alpha_2$  houve boa aproximação entre  $\hat{y}$  e S2c. Então, decidiu-se recorrer aos parâmetros de ajuste.

$$y_k = 1,2034y_{k-1} - 0,3702y_{k-1}y_{k-2} + 0,4906y_{k-3}u_{k-1} - 0,6028y_{k-5}u_{k-2} + 0,2084y_{k-5}u_{k-5} + 0,1528y_{k-8}u_{k-1} - 0,09y_{k-1}y_{k-11} + \mathcal{E}(\xi), \quad (5.26)$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\mathcal{E}(\xi) = 0,2044 u_{k-7}\xi_{k-4} + 0,4075 \xi_{k-1}\xi_{k-2} + 0,3249 u_{k-8}\xi_{k-4} - 0,9493 y_{k-12}\xi_{k-4} + 0,9223 y_{k-4}\xi_{k-4} + \xi(k), \quad (5.27)$$

Tabela 5.17: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2c	0,067	0,033
$\hat{y}$	0,081	0,019

Tabela 5.18: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$
S2c	0,941	1,172	0,913	3,89
$\hat{y}$	0,937	1,709	0,856	2,93

Os parâmetros dos dois primeiros termos do modelo 5.26 foram ligeiramente alterados dando origem ao modelo 5.28. Resíduos com variância  $\sigma_\xi^2 = 6,23 \times 10^{-4}$ , isto é, 13,8% da variância de S2c. Devido a essas ações, a variância de  $\tilde{u}_k$ , que havia sido elevada a 0,0273, foi reduzida a 0,0179. O modelo 5.28 foi simulado e os índices novamente calculados para a nova  $\hat{y}_k$  e comparados aos resultados de S2c.

$$\begin{aligned}
y_k = & 1,1734y_{k-1} - 0,3402y_{k-1}y_{k-2} + 0,4906y_{k-3}u_{k-1} - 0,6028y_{k-5}u_{k-2} \\
& + 0,2084y_{k-5}u_{k-5} + 0,1528y_{k-8}u_{k-1} - 0,09y_{k-1}y_{k-11} + \mathcal{E}(\xi),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

no qual o modelo de ruído é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\xi) = & 0,2044 u_{k-7}\xi_{k-4} + 0,4075 \xi_{k-1}\xi_{k-2} + 0,3249 u_{k-8}\xi_{k-4} \\
& - 0,9493 y_{k-12}\xi_{k-4} + 0,9223 y_{k-4}\xi_{k-4} + \xi(k),
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Comparando-se as Tabelas 5.17 e 5.19 pode-se verificar que as alterações tiveram um resultado positivo, dado que a diferença em relação a SDNN foi reduzida pela metade, enquanto que em relação ao RMSSD a diferença foi reduzida de aproximadamente 4 vezes.

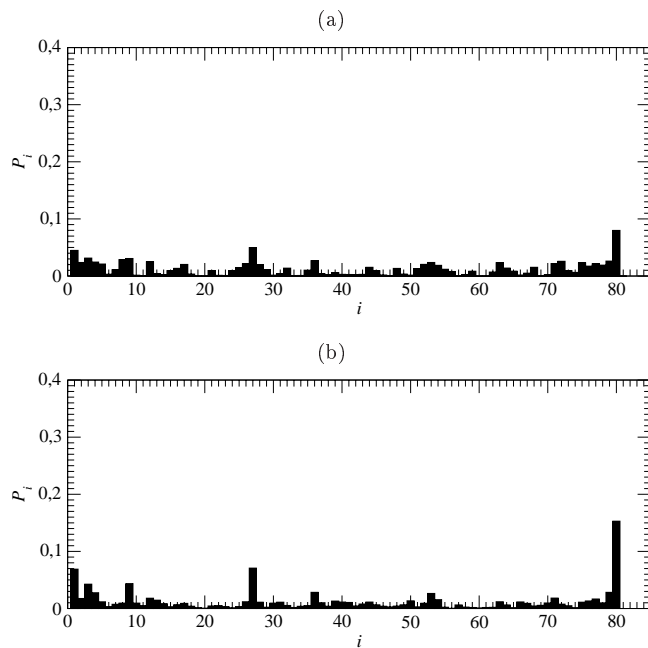
Com relação à validação da dinâmica do modelo pode-se verificar, ao se comparar os índices DFA da Tabelas 5.18 e 5.20, que, apesar de uma ligeira redução no valor de  $\alpha$  para  $\hat{y}_k$ , os resultados dos cálculos de  $\alpha$  e  $\alpha_2$  continuam próximos e que em relação a  $\alpha_1$  a diferença entre as duas séries foi reduzida de 45,82% para 8,79%. Ainda em relação à validação dinâmica, a Figura 5.30a mostra que o histograma de probabilidades das seqüências realizados por S2a, apesar de não ser plano, apresenta apenas duas seqüências com probabilidades ligeiramente superiores às demais, as de índice  $i = 27$  e  $i = 81$ . O histograma das seqüências de  $\hat{y}_k$  apresenta um padrão semelhante ao de S2c, mas as probabilidades das seqüências de índices  $i = 27$  e  $i = 81$  estão mais acentuadas neste caso que no histograma de S2c.

Tabela 5.19: Índices do domínio do tempo.

Série	SDNN	RMSSD
S2c	0,067	0,033
$\hat{y}$	0,074	0,038

Tabela 5.20: Índices dinâmicos e de complexidade.

Série	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\mathcal{S}$	ApEn
S2c	0,941	1,172	0,913	3,89	1,2582
$\hat{y}$	0,912	1,275	0,851	3,73	1,3373

Figura 5.30: Histograma das seqüências descritas por: (a) S2c ( $\mathcal{S} = 3,89$ ), (b)  $\hat{y}$  ( $\mathcal{S} = 3,73$ ).

A Figura 5.31 mostra o mapa de primeiro retorno da Série S2c, juntamente com sua partição e atribuição de símbolos. O símbolo 0 está associado batimentos rápidos, o símbolo 1 associado com batimentos de duração média e o símbolo 2 está associado a batimentos lentos, ou seja, ciclos cardíacos de maior duração.

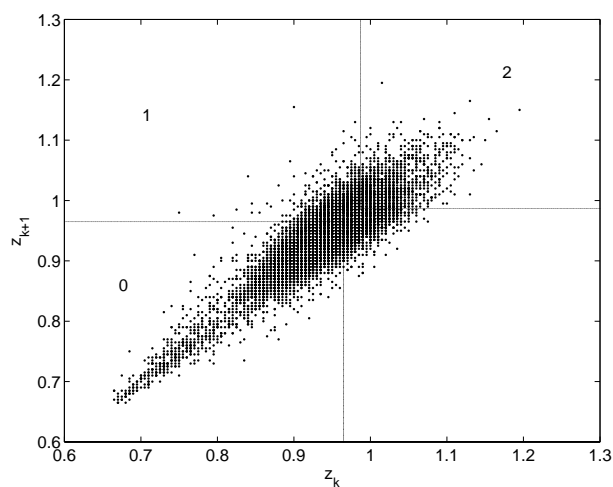


Figura 5.31: Série de intervalos RR, S2c, compreendida entre as amostras 68.001 a 78.000 da Série S2 (Figura 5.21).

### 5.2.3 Resumo do uso dos parâmetros de ajuste dos modelos para séries de VFC

O objetivo desta seção é reunir em um único lugar (Tabela 5.21), o uso dos parâmetros de ajuste feito em todas as seis séries estudadas.

Pode-se verificar que o ajuste de  $\sigma_u^2$  é comum a todas os modelos. De fato, este é o parâmetro de ajuste mais usado e mais fácil de ser adaptado às necessidades de cada modelo. Quanto ao ajuste do parâmetro  $\mu$ , isto é, modificações diretas nos parâmetros dos modelos, para o caso duas séries, S1a e S1b, ele não foram necessário. O caso da série S2a, no qual todas os parâmetros do modelo foram modificados, é certamente atípico. Em todos os outros casos, os ajustes nos dois ou três primeiros parâmetros dos modelos foram muito úteis para a aproximação do modelo ao sistema original. Ainda não se tem informações suficientes para se afirmar a respeito de tendências nas modificações, ou ainda, qual a relação entre as modificações nos parâmetros e fenômenos fisiológicos, no caso de séries de VFC. A adição de resíduos só não foi necessária nas séries S1a e S1b. Embora a quantidade adicionada de resíduos tenha sido muito pequena em relação à variância das séries de VFC, esse parâmetro de ajuste foi muito útil para aproximação dos modelos quanto à componente estocástica e também em alguns aspectos dinâmicos.

Tabela 5.21: Resumo dos resultados.

Ações / Séries	S1a	S1b	S1c	S2a	S2b	S2c
Obtenção dos modelos	Passos de 1 ao 7 do algoritmo	Idem a S1a	Idem a S1a	Idem a S1a	Idem a S1a	Idem a S1a
Ajuste $\sigma_u^2$	de 0,063 para 0,063	de 0,0026 para 0,0118	de 0,0077 para 0,0476	de 0,0080 para 0,0063	de 0,0259 para 0,0224	de 0,0273 para 0,0179
Ajuste dos parâmetros	-	-	de: 1,3967 para: 1,3840	de: 1,0154 para:0,9720	de: 1,0203 para: 1,0083	de: 1,2034 para: 1,1734
Primeiro parâmetro	-	-	de: 0,1075 para: 0,1160	de: 0,8282 para:0,8300	de: -0,1916 para: -0,1750	de: -0,3702 para: -0,3402
Segundo parâmetro	-	-	de: 0,7261 para: 0,6950	de: 1,1543 para:1,1272	-	-
Terceiro parâmetro	-	-	-	de: -3,5481 para:-3,4651	-	-
Quarto parâmetro	-	-	-	de: 1,5437 para:1,5581	-	-
Quinto parâmetro	-	-	-	de: 1,5437 para:1,5581	-	-
Adição de $\sigma_\xi^2$	0,0	0,0	$7,26 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^{-5}$	$3,54 \times 10^{-4}$	$6,23 \times 10^{-4}$

### 5.2.4 Análise estatística dos resultados

As Tabelas 5.22 e 5.23 mostram os resultados dos testes estatísticos *teste t* e teste de *Mann-Whitney*, respectivamente. Os dados utilizados na realização dos testes foram obtidos por meio do cálculo da média dos resultados de cada um dos índices que constam nas tabelas. As médias foram calculadas para as seis séries medidas de VFC e também para as seis séries sintéticas geradas pelos modelos identificados.

O *teste t* é um teste paramétrico sobre a média de duas amostras. O teste foi realizado com intervalo de confiança de 95%. As hipóteses nula e alternativa são, respectivamente,

$H_0: y = \hat{y}$ , isto é, não é possível distinguir as séries sintéticas das séries originais.

$H_1: y \neq \hat{y}$ , ou seja, as séries sintéticas são diferentes das séries medidas de VFC.

Tabela 5.22: Resultados referentes ao *teste t*.

Índice	Significância
SDNN	0,70
RMSSD	0,66
$\alpha$	0,45
$\alpha_1$	0,19
$\alpha_2$	0,39
$\mathcal{S}$	0,75
ApEn	0,68

O teste de *Mann-Whitney* é um teste não paramétrico e tem o objetivo de testar a hipótese de que as duas amostras tenham a mesma distribuição. Assim como para o *teste t*, a hipótese nula é de que as séries sintéticas e originais são iguais, e a hipótese alternativa é de que as séries sintéticas são diferentes das séries originais, como segue

$$H_0: y = \hat{y}$$

$$H_1: y \neq \hat{y}$$

Tabela 5.23: Resultados referentes ao teste de *Mann-Whitney*.

Índice	Significância
SDNN	0,5196
RMSSD	0,9362
$\alpha$	0,4225
$\alpha_1$	0,2980
$\alpha_2$	0,6889
$\mathcal{S}$	0,5738
ApEn	0,8728

Para ambos os testes, como pode ser observado nas respectivas tabelas, a significância dos testes para cada um dos índices foi bastante superior a 0,05. Portanto, em ambos os testes, a hipótese nula não pode ser rejeitada.



## DISCUSSÃO

---

*“...Com efeito, Deus não olha para o que olha o homem: este olha para as aparências mas o Senhor olha para o coração.” “Rogo ao Deus de Nosso Senhor Jesus Cristo, o Pai da glória, que vos dê um espírito de sabedoria, que dele vos revele o conhecimento, e ilumine os olhos do vosso coração.”*

1 Samuel 16,7; Efésios 1,17-18

Uma das contribuições deste trabalho é a apresentação de uma metodologia de modelagem baseada em modelos NARMAX polinomiais e no uso de uma entrada sintética que também faz parte do modelo. Além disso, dois pontos importantes nessa metodologia são a combinação de fase do sinal original com a entrada sintética na etapa de identificação dos modelos, e também, a possibilidade de uso de três parâmetros de ajuste que permitem, por parte dos modelos, de características estatísticas, estocásticas e dinâmicas dos dados originais. Tais possibilidades podem contribuir para a compreensão do comportamento dinâmico e do controle do sistema cardiovascular.

A evolução dessa metodologia pode ser verificada ao serem comparados os resultados e o procedimento aqui apresentados com aqueles apresentados em Oliveira e colegas (2007, 2004); Oliveira (2002)

## 6.1 Aplicação da metodologia nos sistemas dinâmicos

Um ponto interessante de se verificar, no que concerne o exemplo que utiliza o mapa logístico, é que se o modelo autônomo (5.1) for tomado e se simplesmente variar-se o parâmetro do termo  $y_{k-1}$  de maneira a produzir um diagrama de bifurcação, o resultado é o diagrama mostrado na Figura 6.1a, que se compara muito bem ao diagrama de bifurcação original mostrado na Figura 5.2a.

Ao se observar o diagrama de bifurcação na Figura 6.1 verifica-se que, como esperado, a adição de ruído efetuou realmente um deslocamento no espaço de parâmetros, que poderia ser compensado com uma mudança no parâmetro de bifurcação, porque a estrutura dinâmica da dinâmica subjacente foi corretamente identificada. Isso poderia ser usado como argumento para não ter que recorrer ao uso de entradas sintéticas, que é um argumento válido de fato.

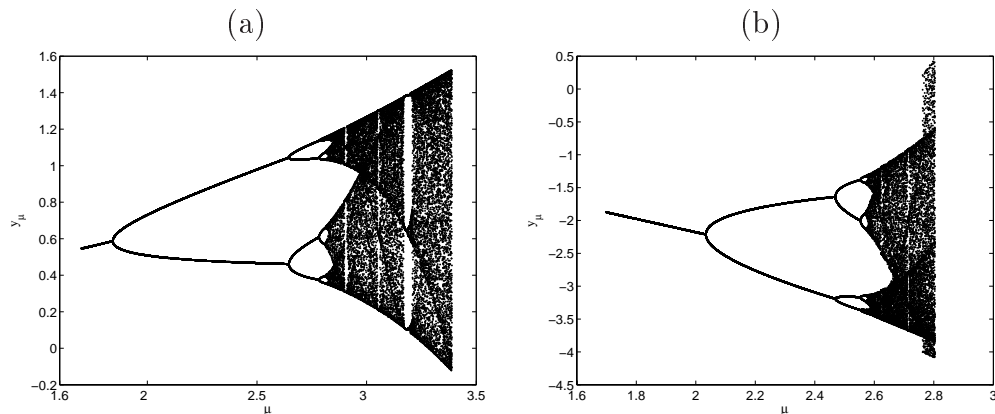


Figura 6.1: Diagramas de bifurcação de (a) modelo 5.1, e (b) modelo 5.4. Em ambos os casos o parâmetro do termo  $y_{k-1}$  foi usado como o parâmetro de bifurcação  $\mu$ .

Na prática, entretanto, não é óbvio qual parâmetro deveria ser usado de maneira a restabelecer o regime dinâmico original subjacente aos dados (veja Aguirre e colegas (2002) para alguma direcionamento e exemplos usando dados reais). Mesmo se fosse conhecido como determinar que parâmetro variar a fim induzir a dinâmica correta, isso só é possível em casos robustos, o que não é necessariamente sempre o caso. Por exemplo, no caso do sistema

de Rössler, para o qual o cenário não é muito complicado, o procedimento de variar um parâmetro resultou no diagrama de bifurcação mostrado na Figura 6.1b, que apresenta algumas diferenças importantes quando comparadas ao diagrama de bifurcações original (Figura 5.6a). Para o exemplo com o sistema de Rössler, o procedimento proposto neste trabalho realmente possibilitou melhorar o diagrama de bifurcação da Figura 6.1b para Figura 5.6b.

Ademais, em muitas importantes aplicações, tais como a análise de sinais de variabilidade da frequência cardíaca, embora o modelo identificado seja estável sob iteração, mudanças importantes nos parâmetros podem tornar o modelo instável ao invés de um deslocamento no espaço de parâmetros. Conseqüentemente, o ajuste *a posteriori* do modelo, por meio da mudança de um (ou mais) de seus parâmetros a fim de obter, como saída do modelo, uma série com flutuações sustentadas ao invés de estacionar em um ponto fixo, não seria possível. Por outro lado, ligeiras modificações *a posteriori* em um (ou mais) dos parâmetros do modelo para ajustar a dinâmica do modelo, de acordo com a metodologia apresentada neste trabalho, são viáveis.

Uma outra observação interessante que deve ser considerada é esta. Se a parte de média móvel do modelo NARMA fosse considerada, então ter-se-ia um modelo forçado sem o uso da entrada sintética. De fato, no caso de modelos NARMA o resíduo pode ser considerado uma variável forçante, que é aleatória, com média zero e distribuição Gaussiana (veja as referências citadas na Seção 3.6 para detalhes nesse ponto).

Isto é verdadeiro e deve ser usado na prática. Isso garantiria, por exemplo, que a saída do modelo não permanecesse em uma solução trivial durante iteração. Entretanto, o procedimento esboçado na Seção 4.2.1 mostrou-se mais útil em algumas situações devido ao seguinte. No caso de usar a parte de média móvel como sinal externo (nesse caso tende-se a pensar em termos de um modelo determinístico excitado por ruído), o resíduo é sempre, por definição, uma variável aleatória com média zero e distribuição Gaussiana.<sup>1</sup> Por outro lado, no caso da entrada sintética, é possível produzir  $\tilde{u}_k$  com certas características (espectro de potência) desejadas. Fazendo assim, tem-se a garantia que a parte determinística do modelo será excitada em frequências específicas que espera-se encontrar na saída do modelo. Em muitas aplicações, tais como processamento de sinais biomédicos, nas quais freqüentemente existem

---

<sup>1</sup>Quando o modelo inclui a parte de média móvel, esta parte comporta-se como um filtro, de maneira que o sinal que excita a parte determinística do modelo não é branca. Infelizmente, o filtro mencionado não é especificado pelo usuário.

freqüências dominantes nos dados,  $\tilde{u}_k$  pode ser construído de maneira a ter tais freqüências. Esse grau de liberdade adicional prova, portanto, ser muito bem vindo.

De fato, o uso da entrada sintética é análogo ao uso de variáveis fictícias, como por exemplo os resíduos do modelo no caso de modelos NARMA (Ljung, 1999). Entretanto, como dito anteriormente, escolher a entrada sintética como proposta na Seção 4.2.1 tem algumas vantagens sobre os resíduos mais comumente usados que, assumidamente, são uma série não correlacionada, com média zero e distribuição Gaussiana. Conseqüentemente, embora a qualidade dos resultados disponíveis para seqüências de resíduos não possa ser diretamente afirmada no caso dos modelos não-lineares que usam entradas sintéticas da forma proposta na Seção 4.2.1, o princípio por trás de seu uso efetivo é basicamente o mesmo.

## 6.2 Aplicação da metodologia nas séries de variabilidade da freqüência cardíaca

A metodologia de modelagem apresentada neste trabalho foi aplicada a duas séries de VFC, de 24 h, de um mesmo voluntário do grupo controle. O voluntário em questão, seguiu uma rotina semelhante nos dois dias em que os registros foram efetuados. Os registros foram realizados com um intervalo de 16 dias entre os mesmos. Dessas duas séries foram selecionadas seis janelas de dados, sendo três janelas de cada série de 24 h, com 10.000 amostras cada janela. As janelas foram escolhidas em horários correspondentes, a saber, no início do registro, o que corresponde ao fim da manhã e começo de tarde; no meio ou no fim da tarde e no período de sono.

Para todas as seis janelas estudadas, a simulação dos modelos obtidos apresentaram flutuações sustentadas, isto é, não permaneceram em uma solução trivial.

No que se refere à avaliação da assimilação da dinâmica subjacente aos dados por parte dos modelos obtidos, esta foi feita verificando-se três aspectos, análise no domínio do tempo, análise da dinâmica e análise da estocasticidade.

Na análise do domínio do tempo foram empregados dois dos principais índices usados na literatura, o SDNN e o RMSSD. Em praticamente todos os casos, as séries geradas pelos modelos apresentaram resultados muito pró-

ximos aos resultados das séries originais. Nesse aspecto, a atuação em um dos denominados parâmetros de ajuste, a variância da entrada sintética,  $\sigma_u^2$ , é um instrumento muito útil para deixar a saída do modelo semelhante aos dados originais.

Das seis janelas de dados estudados, para duas, S1a e S1b não foram necessários nenhum outro tipo de ajustes, isto é, a não ser em relação a  $\sigma_u^2$ .

Na verificação da estocasticidade foram usados dois índices, a entropia aproximada e a entropia de Shannon. Ambas já foram empregadas na literatura, na análise de sinais de VFC, mas a entropia aproximada é a mais largamente utilizada. Como mencionado anteriormente, a entropia aproximada foi o último índice calculado, após todos os ajustes no modelo já terem sido efetuados. Por outro lado, como a entropia de Shannon está envolvida no aspecto da estocasticidade e também no aspecto dinâmico, dado que ela tem papel muito importante na partição do mapa de primeiro retorno, para realizar a etapa de codificação da dinâmica simbólica, ela foi considerada em todo o processo de utilização dos parâmetros de ajuste dos modelos.

Quando observados os resultados finais em relação à entropia de Shannon, ou seja, comparando-se os resultados obtidos para os modelos, obtidos após todos os ajustes efetuados, em relação aos dados originais, em todos os casos foi alcançada uma aproximação muito boa, dado que no pior dos casos, em relação a Série S2c, a entropia de Shannon da série  $\hat{y}_k$  gerada pelo modelo obtido é aproximadamente 5% menor que a entropia da série original. Ademais, é importante não deixar em segundo plano, o fato de que na metade dos casos não houve necessidade de usar outros parâmetros de ajuste além de  $\sigma_u^2$ , já usado para aproximação de desvio padrão, para aproximar a estocasticidade do modelo à dos dados originais.

Nos casos em que houve necessidade de lançar mão dos parâmetros de ajuste para aproximação da estocasticidade do modelo em relação aos dados originais, o parâmetro mais importante nesse sentido foi a adição da variância dos resíduos  $\sigma_\xi^2$ . Dado que os modelos inicialmente apresentaram um valor de entropia não muito distante dos dados originais, à exceção do caso da Série S2c, a quantidade de resíduos adicionados foi sempre muito baixa. Sendo assim, mesmo no caso da Série S2c, a quantidade de resíduos adicionada não foi suficiente para comprometer a estrutura do mapa de primeiro retorno.

Os cálculos de entropia aproximada foram feitos para séries de 1500 amostras, seguindo sugestão de Pincus (1995). Como as séries para as quais foram apresentados os resultados nos Capítulo 5 têm 10.000 amostras, decidiu-se

tomar as primeiras 9.000 amostras de cada série e dividi-las em seis grupos de de 1.500 amostras. Assim, para cada série estuda foram calculadas ApEn dos seis trechos e, em seguida, foi feito o cálculo da média, e o valor médio foi apresentado como resultado.

Observando-se a comparação dos resultados, verifica-se que na metade dos casos os resultados estão bastante aproximados (séries 1, 5 e 6 na Figura 6.2). A Figura 6.2 sintetiza os resultados dos cálculos das duas entropias, ApEn e de Shannon, seguindo a ordem de apresentação do Capítulo 5. Um fato interessante a ser observado na Figura 6.2 é que os resultados de ApEn para as série geradas pelos modelos seguem a mesma tendência dos resultados dos cálculos da entropia de Shannon, o que mostra uma coerência nos resultados.

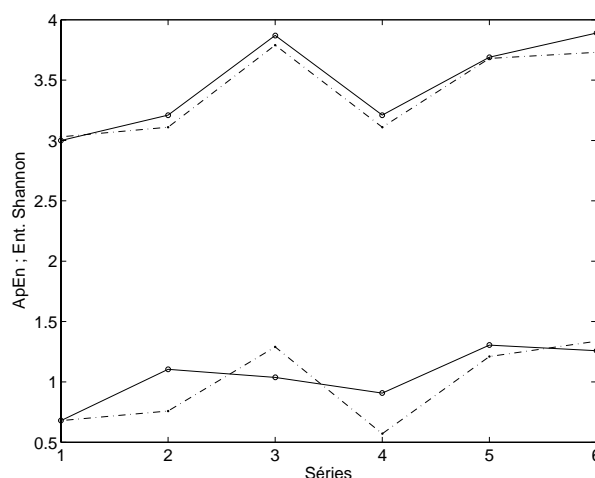


Figura 6.2: Entropia aproximada (na parte de baixo da figura) e entropia de Shannon (na parte de cima da figura) calculadas para séries originais (—) e para séries  $\hat{y}$  (-.-) geradas pelos modelos. As série estão enumeradas de 1 a 6, obedecendo a ordem de apresentação do Capítulo 5.

No que atine a validação da dinâmica subjacente, foram empregados os índices DFA, dinâmica simbólica e verificação do mapa de primeiro retorno. Embora a comparação do mapa de primeiro retorno não tenha sido apresentada para todos os exemplos, ela foi considerada em todos os casos.

No caso dos índices DFA,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pode-se verificar que dos três  $\alpha$  os valores de  $\alpha$  obtidos para as séries dos modelos ficaram muito próximos aos apresentados pelas respectivas séries originais, mesmo antes dos uso dos parâmetros de ajuste, a não ser no caso da Série S2c. Na seqüência, no

que se refere a proximidade de resultados, vem  $\alpha_2$ , para o qual os modelos apresentaram bons resultados, só não ficaram tão próximos quanto no caso de  $\alpha$ , mesmo após uso dos parâmetros de ajuste.

No que se refere a  $\alpha_1$ , dentre os três, foi o índice para o qual os modelos apresentaram resultados mais distantes em relação aos dados originais. Sistemáticamente, a não ser para a Série S1b, as séries  $\hat{y}$  apresentaram um valor de  $\alpha_1$  entre 1,6 e 1,73. Mas em todos os casos, após o uso dos parâmetros de ajuste, os resultados de  $\alpha_1$  dos modelos foram bastante aproximados aos das séries originais, em que o exemplo mais representativo é o caso da Série S2c.

O parâmetro de ajuste mais importante na aproximação ou na manutenção dos índices  $\alpha$  e  $\alpha_2$  foi o ajuste dos parâmetros dos termos do modelo. Nesse sentido, ligeiras alterações foram efetuadas geralmente nos parâmetros dos dois primeiros termos do modelo. A palavra manutenção faz referência aos casos em que os resultados de  $\alpha$  e  $\alpha_2$  dos modelos já estavam próximos dos resultados dos dados originais, mas que em função dos ajustes feitos para melhorar a aproximação de  $\alpha_1$ , tiveram seus valores alterados. Nesses casos os ajustes foram no sentido de recuperar a aproximação anteriormente existente.

Para melhorar a aproximação de  $\alpha_1$  foi a adição de resíduos, usada para melhorar a aproximação da entropia de Shannon. Diferentemente de  $\alpha$  e  $\alpha_2$ , as alterações nos parâmetros do modelo surtiram efeito inexpressivo. A sensibilidade dos resultados dos cálculos de  $\alpha_1$  em relação às atuações nos parâmetros de ajuste um fato interessante, mas que necessita maiores investigações.

Na continuação da avaliação da assimilação da dinâmica por parte dos modelos, outra ferramenta empregada foi a dinâmica simbólica. O mapa de primeiro retorno das séries foi dividido em três partes e a cada uma delas foi atribuído um símbolo. O primeiro desses símbolos foi atribuído aos intervalos RR mais curtos, ou seja, batimentos rápidos. O segundo símbolo é característico dos intervalos em torno do intervalo médio, ou seja, batimentos de duração normal e o terceiro símbolo foi atribuídos aos intervalos RR mais longos, isto é, aos batimentos mais lentos. Portanto, os histogramas com as probabilidades de realização de seqüências simbólicas representam as probabilidades de ocorrerem seqüências de batimentos rápidos, normais ou lentos, ou seja, descrevem a evolução do comportamento dinâmico das séries analisadas e, conseqüentemente, dos sistemas que as deram origem, assim como o faz o diagrama de bifurcações no caso dos sistemas dinâmicos.

Como visto no Capítulo 3, a partição escolhida é aquela para a qual se obtém o maior valor de entropia de Shannon. Dessa forma, os histogramas foram obtidos e revelaram, para todas as seis séries, uma proximidade importante por parte das séries  $\hat{y}$ , geradas pelos modelos, em relação às séries de dados de VFC. Evidentemente há ligeiras diferenças entre as probabilidades de algumas seqüências, mas, de fato, a semelhança entre os histogramas de dados originais e sintéticos é patente. Isso indica que essas características dinâmicas foram assimiladas pelos modelos.

A semelhança dos histogramas das seqüências das séries geradas pelos modelos em relação aos dos correspondentes dados originais se deve grandemente ao processo de modelagem em si. Mas assim como para os índices DFA, os parâmetros de ajuste foram importantes para o resultado final. A não ser nos casos das séries S1a e S1b, nos quais o único parâmetro de ajuste usado foi variância da entrada sintética, em todos os demais, os resultados dos histogramas foram observados juntamente com a busca de aproximação dos resultados dos índices DFA. Dessa forma, os parâmetros de ajuste mais importantes nesse caso fora a adição de resíduos e as ligeiras alterações nos parâmetros dos primeiros termos dos modelos.

### 6.3 Algumas observações

Esta seção apresenta algumas observações acerca dos resultados obtidos para as séries de VFC. Essas observações surgem pelos fatos de os dois registros de 24 h serem do mesmo voluntário do grupo controle, de que esse voluntário seguiu uma rotina semelhante durante a realização dos registros e de que as três janelas estudadas, de cada série de 24 h, foram selecionadas em horários correspondentes.

Dessa forma, a Figura 6.3 ajuda a visualizar como varia os índices  $\alpha$  e  $\alpha_2$  em função dos registros, S1 e S2, e em função do período do dia. Por meio da figura pode-se verificar que a variação dos dois índices é muito semelhante, em relação às duas séries e aos diferentes períodos do dia, o que é coerente em se tratando de dois índices de correlação longa. Mas é interessante o fato de que as duas séries, S1 e S2, apresentaram comportamento quase que idêntico em relação aos dois índices, ou seja, o valor dos índices é mais elevado no fim da manhã, mais baixo no fim da tarde e ligeiramente mais elevado durante a noite. A Figura 6.4 apresenta a mesma análise em relação a  $\alpha_1$ , que como pode-se observar apresenta um comportamento diferente dos dois anteriores,

em que as principais diferenças são que  $\alpha_1$  apresentam valores mais elevados e que na janela de dados referente ao período de sono, continua a tendência de queda.

Outro ponto interessante a se observar, é que parece haver uma correlação inversa entre  $\alpha_1$  e a entropia de Shannon, pois enquanto o primeiro diminui ao longo do dia, a segunda aumenta. Além disso, no caso das séries geradas pelos modelos, a adição de resíduos teve, por um lado, a função de aumentar a entropia de Shannon e, por outro lado, contribuiu para diminuir o valor de  $\alpha_1$ .

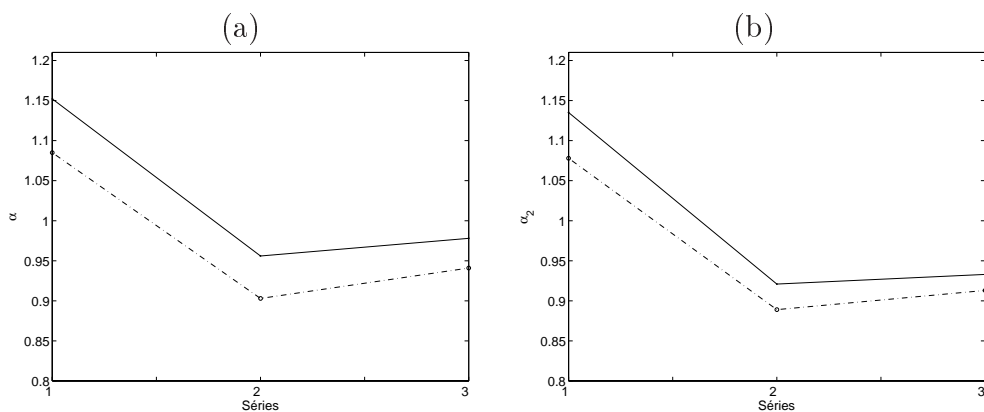


Figura 6.3: Variação dos índices  $\alpha$  (a) e  $\alpha_2$  (b) para as séries S1 (-.-) e S2 (-o-), observando-se a ordem cronológica das três janelas das respectivas séries.

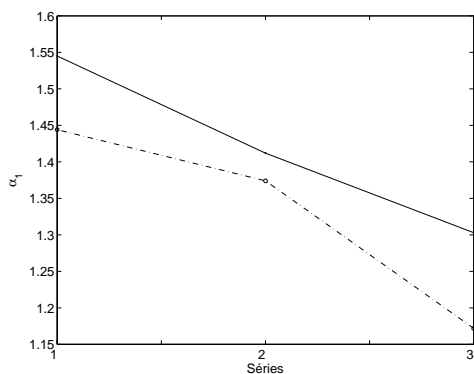


Figura 6.4: Variação do índice  $\alpha_1$  para as séries S1 (-.-) e S2 (-o-), observando-se a ordem cronológica das três janelas das respectivas séries.

Pode-se verificar em ambos os casos, S1 e S2, que os histogramas reve-

lam que durante o período de vigília há algumas seqüências que apresentam destacada probabilidade de ocorrência em relação às demais. Mas também, pode-se verificar que esse destaque diminui à medida que a noite se aproxima, e principalmente durante o período de sono. Durante o sono a diferença de probabilidade entre as seqüências é muito pequena, e as seqüências tendem à equiprobabilidade, ao mesmo tempo que apresentam o maior valor de entropia de Shannon, mostrando coerência nos resultados.

Por fim, a Figura 6.5 mostra as componentes de ultra baixa freqüência das séries S1 e S2, que foram filtradas com um filtro passa-baixas com freqüência de corte 0,003 Hz. Dado que essas componentes estão fortemente relacionadas com as atividades diárias do voluntário, pode-se verificar que ao se observar uma rotina similar — o que não quer dizer idêntica ou sincronizada — o sistema respondeu de forma muito aproximada. Tudo isso contribui para a argumentação a respeito da existência de determinismo nos sinais de VFC.

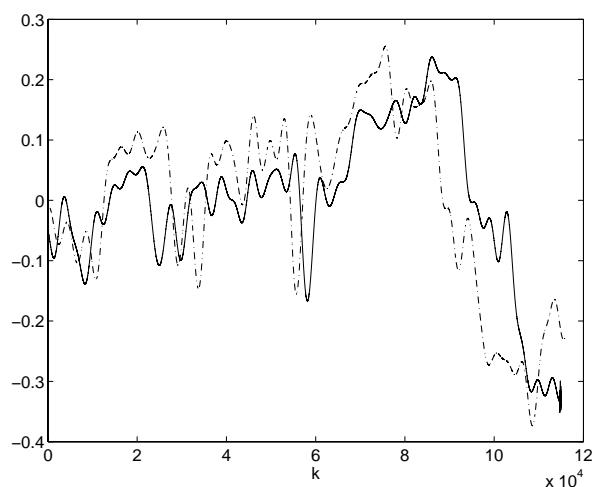


Figura 6.5: Componentes de ultra baixa freqüência das séries S1 (—) e S2 (-.-), que foram filtradas com um filtro passa-baixas com freqüência de corte 0,003 Hz.

# CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

---

*“Àquele que está sentado no trono e ao Cordeiro, a  
bênção, a honra a glória e o império pelos séculos dos  
séculos.”*

Apocalipse 5,13

Um procedimento de modelagem foi apresentado, no qual uma entrada sintética é destinada a ser usada na identificação de modelos para séries temporais. O método é aplicado em situações nas quais, embora os dados apresentem flutuações não triviais, os modelos convergem para uma solução periódica de baixa periodicidade, ou mesmo um ponto fixo.

A entrada sintética pode ser construída de forma a ter potência espectral em faixas de interesse. Isso ajuda a obter um modelo que sob iteração irá produzir uma saída com características espectrais próximas daquelas encontradas nos dados de treinamento.

O uso do procedimento de modelagem foi avaliado em séries temporais produzidas pelo mapa logístico, pelo mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler e o mapa de Hénon. Foi mostrado que os modelos finais mostraram a capacidade de não convergir para uma solução trivial, enquanto preservaram, não apenas algumas características importantes da dinâmica subjacente e dos dados de treinamento, mas também se aproximaram dos sistemas originais no aspecto estocástico. A avaliação foi feita usando diagramas de bifurcação e entropia de Shannon.

A metodologia foi aplicada com o mesmo sucesso aos dados de variabilidade da frequência cardíaca, e foi possível alcançar importante evolução em

relação aos resultados anteriormente obtidos. No caso das séries de VFC a avaliação foi feita usando índices do domínio do tempo, entropia de Shannon e entropia aproximada, índices DFA e dinâmica simbólica.

Portanto, acredita-se, a partir dos resultados obtidos, que o procedimento de modelagem apresentado nesta tese possa ser utilizado no estudo de sistemas que apresentem uma componente dinâmica em meio a uma componente estocástica, de natureza diversa, não sendo restrito a séries de variabilidade da frequência cardíaca.

## 7.1 Propostas de continuidade

A seguir, são apresentadas algumas propostas de continuidade do trabalho.

Acredita-se que uma investigação a respeito da utilização do procedimento de modelagem apresentado nesta tese para encontrar modelos que pudessem ser utilizados em marcapassos cardíacos, seria válida e importante. Dessa forma, talvez pudessem ser construídos marcapassos dinâmicos, com possibilidade de adaptação às diversas necessidades dos pacientes que fazem uso desses dispositivos, propiciando uma melhor qualidade de vida para esses pacientes.

Uma outra investigação interessante seria verificar a capacidade das técnicas de dinâmica simbólica de indicar o grau de lesão nas vias simpática e parassimpática do sistema nervoso autônomo, em pacientes portadores da doença de Chagas.

Aqui foram usadas dois registros de 24 h de um mesmo voluntário. Seria interessante aumentar esse número em futuras avaliações, bem como avaliar o procedimento em diversos voluntários do grupo controle.

Seria também importante, investigar a capacidade de classificação dos modelos obtidos por meio do procedimento de modelagem entre pacientes portadores de alguma doença cardiovascular com voluntários do grupo controle.

Além disso, poderia se verificar a possibilidade de uso das séries geradas pelos modelos como dados subrogados.

---

---

# Bibliografia

---

- Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J., e Tsimring, L. S. (1993), The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65(4):1331–1372.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1995), Retrieving Dynamical Invariants from Chaotic Data Using NARMAX Models. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 56:185–187.
- Aguirre, L. A. (2004), *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 2ª ed. Belo Horizonte: Editora da UFMG.
- Aguirre, L. A., Maquet, J., e Letellier, C. (2002), Induced one-parameter bifurcations in identified nonlinear dynamical models. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 12(1):135:145.
- Aguirre, L. A., Furtado, E. C., e Tôrres, L. A. B. (2006), Evaluation of dynamical models: Dissipative synchronization and other techniques. *Physical Review E*, 74(019612).
- Aires, M. M. (1999), *Fisiologia*. Editora Guanabara Koogan.
- Akselrod, S., Gordon, D., Ubel, F. A., Shannon, D. C., Barger, A. C. e Cohen, R. J. (1981), Power spectrum analysis of heart rate fluctuations: a quantitative probe of beat-to-beat cardiovascular control. *Science*, 213:220–222.
- Amaral, L. A. N., Goldberger, A. L., Ivanov, P. C., e Stanley, H. E. (1999), Modeling heart rate variability by stochastic feedback. *Computer Physics Communications*, 121-122:126–128.
- Armoundas, A. A., Ju, K., Iyengar, N., Kanters, J. K., Saul, P. J., Cohen, R. J., e Chon, K. H. (2002), A stochastic nonlinear autoregressive algorithm reflects nonlinear dynamics heart-rate fluctuations. *Annals of Biomedical Engineering*, 30:192–201.
- Bai-Lin, H. (1989), *Elementary symbolic dynamics - and chaos in dissipative systems*. World Scientific, Singapore.
- Bär, K-J., Boettger, M. K., Koschke, M., Schulz, S., Chokka, P., Yeragani, K. V., e Voss, A. (2007), Nonlinear complexity measures of heart rate variability in acute schisophrenia. *Clinical Neurophysiology*, 118:2009–2015.

- Barbieri, R., e Brown, E. N. (2006), Analysis of heartbeats dynamics by point process adaptive filtering. *IEEE Trans Biomed Eng*, 53(1): 4–12.
- Baselli, G., Cerutti, S., Porta, A., e Signorini, M. G. (2001), Short and long term analysis of RR variability series. *Medical Engineering & Physics*, 24:21–32.
- Bassani, J. W. M., Bassani, R. A., e Bers, D. M. (1996), A method to estimate mitochondrial  $\text{Ca}^{2+}$  uptake in intact cardiac myocytes. *Brazilian Journal of Medical and Biological Research*, 29(12):1699–1707.
- Bear, M. F., Connors, B. W., e Paradiso, M. A. (2002), *Neurociências - Desvendando o sistema nervoso*. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed.
- Belova, N. Y., Mihaylov, S. V., e Piryova, B. G. (2007), Wavelet transform: a better approach for the evaluation of instantaneous changes in heart rate variability. *Autonomic Neuroscience: Basic & Clinical*, 131:107–122.
- Bennett, F. M., Christini, D. J., Ahmed, H. M., Lutchen, K. R., Hausdorff, J. M., e Oriol, N. (1995), Time series modeling of heart rate dynamics. *Computers in Cardiology 1993. Proceedings*, 276–276.
- Bernard, C. (1999), *Experimental Medicine*. New Brunswick: Transaction Publishers.
- Berne, R. M. e Levy, M. N. (1997), *Cardiovascular physiology*. 7ª ed. St. Louis: Mosby.
- Berne, R. M., Levy, M. N., Koeppen, B. M. e Stanton, B. A. (1998), *Physiology*. 4ª ed. St. Louis: Mosby.
- Berne, R. M., Levy, M. N., Koeppen, B. M., e Stanton, B. A. (2000), *Fisiologia*. Guanabara Koogan, 4a. edição.
- Berntson, G. G., Bigger, JR., J. T., Eckberg, D. L., Grossman, P., Kaufmann, P. G., Malik, M., Nagaraja, H. N., Porges, S. W., Saul, J. P., Stone, P. H. e Van Der Molen, M. W. (1997), Heart rate variability - Origins, methods and interpretive caveats. *Psychophysiology*, 34:623–648.
- Biktashev, V. N. (2003), A simplified model of propagation and dissipation of excitation fronts. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 13(12):3605–3620.
- Billings, S. A., Chen, S., e Korenberg, M. J. (1989), Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *Int J Control*, 49:2157–2159.
- Billings, S. A., e Tao, Q. H. (1991), Model validation tests for nonlinear signal processing applications. *Int J Control*, 54:157–194.
- Billings, S. A., e Voon, W. S. F. (1986), Correlation based model validity tests for nonlinear models. *Int J Control*, 44(1):235–244.
- Bunde, A., e Havlin, S. (1994), *Fractals in science*. Berlin: Springer-Verlag.

- Cannon, W. B. (1932), *The wisdom of the body*. New York: Norton.
- Cao, L. (1997), Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D* 110(1-2): 43–50.
- Cerutti, S., Goldberger, A. L., e Yamamoto, Y. (2006), Recent advances in heart rate variability signal processing and interpretation. *IEEE Trans Biomed Eng*, 53(1): 1–3.
- Cerutti, S., Esposti, F., Ferrario, M., Sassi, R., e Signorini, M. G. (2007), Long-term invariant parameters obtained from 24-h Holter recordings: A comparison between different analysis techniques. *Chaos*, 17, 015108.
- Chen, J.-L., Tseng, Y.-J., Chiu, H.-W., Hsiao, T.-C., e Chu, W.-C. (2007), Nonlinear analysis of heart rate dynamics in hyperthyroidism. *Physiological measurement*, 28:427–437.
- Chen, M., Tucker, J. V., Clayton, R. H., e Holden, A. V. (2003), Constructive volume geometry applied to visualisation of cardiac anatomy and electrophysiology. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 13(12):3591–3604.
- Chen, S., Billings, S., e Luo, W. (1989), Orthogonal least-squares methods and their applications to non-linear system identification. *Int J Control*, 50:1873–1896.
- Chon, K. H., Kanters, J. K., Cohen, R. J., e Holstein-Rathlou, N. H. (1999), Detection of chaotic determinism in time series from randomly forced maps. *Physica D*, 99:471–486.
- Christini, D. J., Bennett, F. M., Lutchen, K. R., Ahmed, H. M., Hausdorff, J. M., e Oriol, N. (1995), Application of linear and nonlinear time series modeling to heart rate dynamics analysis. *IEEE Trans Biomed Eng*, 42:411–415.
- Dangelo, J. G. e Fattini, C. M. (1995), *Anatomia Humana Básica*. Belo Horizonte: Atheneu.
- DiFrancesco, D. (1993), Pacemaker mechanisms in cardiac tissue. *Annual Reviews Physiol.*, 55:455–472.
- Eckmann, J. P. e Ruelle, D. (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3):616–667.
- Eckmann, J. P. e Ruelle, D. (1992), Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents dynamical systems. XVIII *Physica D*, 56:185–187.
- Faloutsos, M., Faloutsos, P., e Faloutsos, C. (1999), On power-law relationship of the internet topology. in *Proc. ACM SIGCOMM*, Cambridge, MA, pp. 251–262.
- Farmer, J. D., Ott, E., e Yorke, J. A. (1983), The dimension of strange attractors. *Physica D*, 7:153-180.
- Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C. (1994), *Caos - Uma Introdução*. Edgard Blücher.

- Franchini, K. G. (1998), Função e disfunção autonômica na doença cardiovascular. *Revista da Sociedade de Cardiologia do Estado de São Paulo* 8(2):77–89. <http://www.socesp.org.br/frameset.asp?destino=http://200.220.14.51/revistasocesp/index1.asp>
- Francis, D. P., Willson, K., Georgiadou, P., Wensel, R., Davies, L. C., Coats, A. e Piepoli, M. (2002), Physiological basis of fractal complexity properties of heart rate variability in man. *Journal of Physiology* 542.2:619–629.
- Fraser, A. M. e Swinney, H. L. (1986), Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A* 33(2): 1134–1140.
- Garcia, C. (1997), *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. São Paulo: EDUSP.
- Garny, A., Kohl, P., e Noble D. (2003), Cellular open resource(COR): a public CellML based environment for modeling biological function. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 13(12):3579–3590.
- Gilmore, R. (1998), Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1455–1529.
- Gilmore, R., e Lefranc, M. (2004), *The topology of chaos - Alice in stretch and squeezeland*. Weinheim: Wiley-VCH.
- Glass, L., Goldberger, A. L., Courtemanche, M. e Shrier, A. (1987), Nonlinear dynamics, chaos and complex cardiac arrhythmias. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 413:9–26.
- Godelle, J., e Letellier, C. (2000), Symbolic sequence statistical analysis for free liquid jets. *Physical Review E*, 62(6), 7973-7981.
- Goldberger, A. L., Amaral, L. A. N., Glass, L., Hausdorff, J. M., Ivanov, P. Ch, Mark, R. G., Mietus, J. E., Moody, G. B., Peng, C-K., Stanley, H. E., PhysioBank, PhysioToolkit, e Physionet (2000), Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals. *Circulation*, 101(23):e215–e220. [Circulation Electronic Pages; <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>]
- Gomes, M. E. D., Souza, A. V. P., Guimarães, H. N. e Aguirre, L. A. (2000), Investigation of Determinism in Heart Rate Variability. *Chaos*, 10:398–410.
- Gomes, M. E. D. (2001), *Técnicas de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares na Análise da Modulação Autonômica da Variabilidade da Frequência Cardíaca*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

- Goren, Y., Davrath, L. R., Pinhas, I., Toledo, E., e Akselrod, S. (2006), Individual time-dependent spectral boundaries for improved accuracy in time-frequency analysis of heart rate variability. *IEEE Trans Biomed Eng*, 53(1):35–42.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983), Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50:346–349.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983), Measuring the strangeness os strange attractors. *Physica D*, 9:189–208.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1984), Dimensions and entropies os strange attractors from a fluctuating dynamics approach. *Physica D*, 13:34–54.
- Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S., e Yorke, J. A. (1984), Strange attractors that are not chatic. *Physica D*, 13:261-268.
- Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983), *Nonlinear oscilations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York.
- Guimarães, H. (1996), *Análise da Variabilidade da Freqüência Cardíaca – Métodos e Implicações Fisiológicas*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Biológicas, Universidade Federal de Minas Geracs, Belo Horizonte, MG.
- Guyton, A. C. e Hall, J. E. (1998), *Fisiologia Humana e Mecanismos das Doenças*. Guanabara Koogan, 6a. edicção.
- Hénon., M. (1976), A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:69–77.
- Huikuri, H. V., Mäkikallio, T. H., Airaksinen, K. E. J., Seppänen, T., Puukka, P., Râihâ, I. J., e Sourander, L. B. (1998), Power-law relationship of heart rate variability as predictor of mortality in the elderly *Circulation*, 97:2031–2036.
- Huikuri, H. V., Mäkikallio, T., Airaksinen, K. E. J., Mitrani, R., Castellanos, A., e Myerburg, R. J. (1999), Measurement of heart rate variability: A clinical tool or a research toy? *J Am Coll Cardiol*, 37:1878–1883.
- Huikuri, H. V., Mäkikallio, T., e Perkiömäki, J. (2003), Measurement of heart rate variability by methods based on nonlinear dynamics. *Journal of Electrocardiology*, 36:95–99.
- Hutter, O. F., e Trautwein, W. (1956), Vagal and sympathtic effects on the pacemaker fibers in the sinus venosus of the heart. *The Journal of General Physiology.*, 39(5):715–733.
- Jackson, E. A. (1995), *Perspectives of nonlinear dynamics*. vol.1. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kandel, E. R., Schwarts, J. H. e Jessell, T. M. (2000), *Principles of Neural Science*. 4<sup>th</sup> ed. New York: McGraw-Hill.

- Kaplan, D. T., Furman, M. I., e Pincus, S. M. (1991), Techniques for analyzing complexity in heart rate and beat-to-beat blood pressure signals. *IEEE*, 0276-6574:243–246.
- Kantelhardt, J. W., Bauer, A., Schumann, A. Y., Barthel, P., Schneider, R., Malik, M., e Schmidt, G. (2007), Phase-rectified signal averaging for the detection of quasi-periodicities and the prediction of cardiovascular risk. *Chaos*, 17:015112.
- Kay, S. M. (1987), *Modern Spectral Estimation: theory and application*. Prentice Hall.
- Kennel, M. B., Brown, R, e Abarbanel, H. D. I (1992), Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A* 45(6):3403–3411.
- Kleiger, R. E., Miller, J. P., Bigger, J. T., e Moss, A. J. (1987), Decreased heart rate variability and its association with increased mortality after myocardial infarction. *Am J Cardiol* 59:256–262.
- Kobayashi, M., e Mushua, T. (1982),  $1/f$  Fluctuation of heartbeat period. *IEEE Trans Biomed Eng* 29(6):456–457.
- Kolmogorov, A. N. (1941), The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 434:9–13.
- Kurths, J., Voss, A, Saperin, P., Witt, A., Kleiner, H. J., e Wessel, N. (1995), Quantitative analysis of heart rate variability. *Chaos* 5(1):88–94.
- Laitio, T. T., Huikuri, H., Koskenvuo, J., Jalonen, J., Mäkikallio, T. H., Helenius, H., Kentala, E. S. H., Hartiala, J., e Scheinin, H. (1995), Long-term alterations of heart rate dynamics after coronary artery bypass graft surgery. *Anesth Analg*, 102: 1026-1031.
- Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985), Input-output parametric models for non-linear systems - part II: stochastic non-linear systems. *Int J Control*, 41:329–344.
- Letellier, C., Dutertre, P. e Maheu, B. (1995), Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : Toward a systematic topological characterization. *Chaos*, 5(1): 271-282.
- Letellier, C., Meunier-Guttin-Cluzel, S. e Gouesbet, G. (2000), Topological invariants in period-doubling cascades. *J Phys. A: Math. Gen.*, 33, 1809-1825.
- Letellier, C. (2005a), Systèmes dynamiques nonlinéaires. *Université de Rouen*, Notes de cours de l'école doctorale SPMII version du 19 octobre.
- Letellier, C. (2006a), Systèmes dynamiques nonlinéaires. *Université de Rouen*, Notes de cours de l'école doctorale SPM2I version du 28 février.
- Letellier, C. (2006b), *Le chaos dans la nature*. Paris: Vuibert.

- Letellier, C. (2006c), Symbolic sequence analysis using approximated partition. *Chaos, Solitons & Fractals*, doi:10.1016/j.chaos.2006.06.025.
- Letellier, C. (2006d), The Shannon entropy: recurrence plots versus symbolic dynamics. *Physical Review Letters*, 96:254102.
- Levy, M. N. e Zieske, H. (1969), Autonomic control of cardiac pacemaker activity and atrioventricular transmission. *Journal of Applied Physiology*, 27(4):465–470.
- Lin, D. C., e Hughson, R. L. (2001), Modeling heart rate variability in healthy humans: a turbulence analogy. *Physical Review Letters*, 86(8):1650–1653.
- Ljung, L. (1987), *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Ljung, L. (1999), *System Identification: Theory for the User*. Second Edition. New Jersey: Prentice Hall.
- Lombardi, F., Sandrone, G., Mortara, A., Torzillo, D., Rovere, M. T., Signorini, M. G., Cerutti, S. e Malliani, A. (1996), Linear and nonlinear Dynamics of Heart Rate Variability After Acute Myocardial Infarction With Normal and Reduced Left Ventricular Ejection Fraction. *Am J Cardiol* 77:1283–1288.
- Lombardi, F. (2000), Chaos theory, heart rate variability, and arrhythmic mortality. *Circulation*, 101:8–10.
- Maestri, R., Pinna, G. D., Porta, A., Balocchi, R., Sassi, R., Signorini, M. G., Dudziak, M., e Raczak, G. (2007), Assessing nonlinear properties of heart rate variability from short-term recordings: are these measurements reliable? *Physiological Measurement*, 28:1067–1077.
- Mäkikallio, T. H., Huikuri, H. V., Hintze, U., Videbaek, J., Mitrani, R. D., Castellanos, A., Myerburg, R. J. e Moller, M. (2001), Fractal Analysis and Time- and Frequency-Domain Measures of Heart Rate Variability as Predictors of Mortality in Patients With Heart Failure. *Am J Cardiol*, 87:178–182.
- Malik, M. e Camm, A. (1995), *Heart Rate Variability*. Futura, Armonk, NY.
- Mandelbrot, B. (1977), *Fractals — Form, chance and dimension*. San Francisco: Freeman.
- Mansier, P., Clairambault, J., Charlotte, N., Médigue, C., Vermeiren, C., LePape, G., Carré, F., Gounaropoulou, A. and Swynghedauw, B. (1996), Non-linear dynamics and chaotic indices in heart rate variability of normal subjects e heart-transplanted patients. *Cardiovascular Research* 31:371–379.
- May, R. M. (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467.

- McClintock, P. V. E., e Stefanovska, A. (2002), Noise and determinism in cardiovascular dynamics. *Physica A*, 314:69–76.
- McNamee, R. L., Sun, M., e Scلابassi, R. J. (2005), A neuro-fuzzy inference system for modeling and prediction of heart rate variability in the neuro-intensive care unit. *Computers in Biology and Medicine*, 36:675–891.
- McSharry, P. E., Clifford, G., Tarassenko, L., e Smith, L. A. (2002), Method for Generating an Artificial RR Tachogram of a Typical Healthy Human over 24-Hours. *IEEE Computers in Cardiology*, 29:225–228.
- Montano, N., Ruscone, T. G, Porta, A., Lombardi, F., Pagani, M. e Malliani, A. (1996), Power Spectrum Analysis of Heart Rate Variability to Assess the Changes in Sympathovagal Balance During Graded Orthostatic Tilt. *Circulation* 90(4):1826–1831.
- Monteiro, L. A. (2002), *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora da UFMG.
- Moody, G. B. (2001), Approximate entropy (ApEn). <http://www.physionet.org/physiotools/ApEn/>.
- Morse, M. e Hedlund, G. A. (1938), Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60 (4), 815-866.
- Nikolopoulos, A., Alexandridi, A., Nikolakeas, S., e Manis, G. (2003), Experimental analysis of heart rate variability of long-recording electrocardiograms in normal subjects and patients with coronary artery disease and normal left ventricular function. *Journal of Biomedical Informatics*, 36:202–217.
- Oliveira, D. J. (2002), Síntese e Análise de Sinais de Variabilidade da Frequência Cardíaca baseada em Modelos Identificados. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG. [www.cpdee.ufmg.br/ MACSIN]
- Oliveira, D. J., Gomes, M. E. D. e Aguirre, L. A. (2002), Análise da Variabilidade da Frequência Cardíaca Baseada no Estudo de Modelos Identificados. XVIII *Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica: anais de trabalhos completos*, São José dos Campos: Univap, 5/5:355–359.
- Oliveira, D. J., Gomes, M. E. D. e Aguirre, L. A. (2004), Investigação da influência do sinal de entrada na síntese do sinal de variabilidade da frequência cardíaca. XVIII *III CLAEB e XIX CBEB*, João Pessoa, IFMBE Proceedings, 5(1):1519–1522.
- Oliveira, D. J., Gomes, M. E. D., Guimarães, H. N. e Aguirre, L. A. (2006), Síntese de sinais de variabilidade da frequência cardíaca baseada em modelos identificados. XVIII *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica* 22(1):51–62.

- Oliveira, D. J., Letellier, C., Gomes, M. E. D., e Aguirre, L. A. (2007), The use of synthetic input sequences in time series modeling. XVIII *Physical Review E* (submetido).
- Ott, E., Sauer, T. e Yorke, J. A. (1994), *Coping with Chaos*. New York: Wiley Interscience.
- Pagani, M. (1999), Physiological background of heart rate variability: do we understand it better? *Cardiac Electrophysiology Review*, 3:274–278.
- Panerai, R. B., Chacon, M., Pereira, R., e Evans, D. H. (2004), Neural network modeling of dynamic cerebral autorregulation: assesment and comparison with established methods. *Medical Engineering & Physics*, 26:43–52.
- Papoulis, A. (1991), *Probability, random variables, and stochastic processes*. MacGraw-Hill, 3rd edition.
- Parker, T. S., e Chua, L. O. (1989), *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Peng, C. K., Havlin, S., Stanley, H. E., e Goldberg, A. L. (1995), Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos*, 5:82–87.
- Peyton-Jones, J. C., e Billings, S. A. (1990), Interpretation of nonlinear frequency response functions. *Int. J. Control*, 52(2):319–346.
- Pincus, S. M. (1991), Approximate entropy as a measure of system complexity. *Proc Natl Acad Sci USA*, 88:2297–2301.
- Pincus, S. M e Goldberger, A. L. (1994), Physiological time-series analysis: what does regularity quantify? *Am J Physiol Heart Circ Physiol*, 35:H1643–H1656.
- Pincus, S. M. (1995), Approximate entropy (ApEn) as a complexity measure. *Chaos*, 5:110–117.
- Poincaré, H. (1881), Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques*, **3** (7), 375-422.
- Porta, A., Faes, L., Masé, M., D’Addio, G., Pinna, G. D., Maestri, R., Montano, N., Furlan, R., Guzzetti, S., Nollo, G., e Malliani, A. (2007), An integrated approach based on uniform quantization for the evaluation of complexity of short-term heart period variability: application to 24 h Holter recordings in healthy and heart failure humans. *Chaos*, 17, 0151117.
- Ribeiro, A. L. P. (1996), *Disfunção autonômica e arritmia ventricular em chagásicos sem cardiopatia aparente*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Medicina Tropical, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

- Rosenblueth, A., e Simeone, F. A. (1934), The interrelations of vagal and accelerator effects on the cardiac rate. *Am. J. Physiol.*, 110:42–65.
- Rössler, O. (1976), An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397–398.
- Ruelle, D e Takens, F. (1971), On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20:167.
- Sachse, F. B., Glänzel, K. G., e Seemann G. (2003), Modeling of protein interactions involved in cardiac tension development. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 13(12):3561–3578.
- Sakhuja, A., Goyal, A., Jaryal, A. K., Wig, N., Vajpayee, M., Kumar, A., e Deepak, K. K. (2007), Heart rate variability and autonomic function tests in HIV positive individuals in India. *Clinical Autonomic Research*, 17(3):193–196.
- Sayers, B. McA. (1973), Analysis of heart rate variability. *Economics*, 16:17–32.
- Selkurt, E. E. (1986), *Fisiologia*. Guanabara Koogan, 5a. edição.
- Shannon, C. E. (1948), A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–656.
- Signorini, M. G. e Cerutti, S. (1999), The role of self-similar and fractal heart rate variability properties in the diagnosis of cardiovascular diseases. [*Engineering in Medicine and Biology, 1999. 21st Annual Conf. and the 1999 Annual Fall Meeting of the Biomedical Engineering Soc.*] *BMES/EMBS Conference, 1999. Proceedings of the First Joint*, Volume: 2 , 13-16.
- Signorini, M. G., Bellotti, M. e Cerutti, S. (1999), Methods for extracting self-similarity properties from heart rate variability signal in normal and heart failure patients. *Computers in Cardiology 1999*, 527–530.
- Söderström, T. e Stoica, P. (1989), *System Identification*. Prentice Hall.
- Sjöberg, J. e Ljung, L. (1992), Overtraining, regularization, and searching for minimum in neural networks. *Preprint IFCA Symp on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Grenoble, France, 669–674.
- Souza, A. V. P. (2001), Modelagem e análise não-lineares de sinais respiratórios e cardiovasculares. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Souza, M. R. (2002), Análise não-linear da variabilidade da frequência cardíaca na doença de Chagas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Medicina Tropical, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Stein, P. K., Bosner, M. S., Kleiger, R. E., e Conger, B. M. (1994), Heart rate variability: a measure of cardiac autonomic tone. *American Heart Journal*, 127:1376–1381.

- Sztajzel, J. (2004), Heart rate variability: a noninvasive electrocardiographic method to measure the autonomic nervous system. *Swiss Med Wkly*, 134:514–522.
- Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology (1996), Heart rate variability – standards of measurement, physiological interpretation and clinical use. *Circulation*, 93:1043–1065.
- Thompson, J. M. T., e Stewart, H. B. (1993), *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Wiley.
- Triola, M. F., (2005), *Introdução à estatística*. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC.
- Vallverdú, M, Palacios, M., e Caminal, P. (2003), Modeling the dynamics of the heart rate variability. *IEEE Computers in Cardiology* 30: 461–464.
- Van der Pol, B. (1927), On relaxation oscillations. *Phil. Mag.*, 3:65.
- Voss, A, Kurths, J., Kleiner, H. J., Witt, A., Wessel, N., Saparin, P., Osterziel, K. J., Schurath, R., e Dietz, R. (1995), The application of methods of non-linear dynamics for the improved and predictive recognition of patients threatened by sudden cardiac death. *Cardiovascular Research* 31 (3): 419-433.
- Voss, A, Schroeder, R., Truebner, S., Goerning, M., Figulla, H. R., e Schirdewan, A. (2007), Comparison of nonlinear methods symbolic dynamics, detrended fluctuation, and Poincaré plot analysis in risk stratification in patients with dilated cardiomyopathy. *Chaos* 17: 015120.
- Wessel, N., Malberg, H., Bauernschmitt, R., Schirdewan, A., e Kurths J. (2006), Nonlinear assistive autoregressive model-based analysis of short-term heart rate variability. *Med Biol Eng Comput*, 44:321–330.
- Wessel, N., e Kurths J. (2007), Introduction: cardiovascular physics. *Chaos*, 17, 015101.
- World Health Organization (2003), The World Health Report 2003. <http://www.who.int/whr/2003/en/Annex2-en.pdf>.
- Wu, Z-B (1996), Symbolic dynamics analysis of chaotic time series with a driven frequency. *Physic Review E*, **53** (2), 1446-1452.
- Yang, F. e Liao, W. (1997), Modeling and decomposition of HRV signals with wavelet transforms. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 17–22.
- Zhang, H., Noble, D., Connell, M., Orchard, C. H., Lancaster, M., Jones, S. A., Boyett, M. R., Holden, A. V., Jafri, M. S., Sobie, E. A., Lederer, W. J., Demir, S. S., Michailova, A., Delprincipe, F., Egger, M., Niggli, E., Smith, G. L., Loughrey, C. M., Macquaide, N., Dempster, J., e Trafford, A. W. (2003), Dynamics of cardiac intracellular Ca<sup>2+</sup> handling — from experiments to virtual cells. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 13(12):3535–3560.
- Zhang, L. F., Zhu, Q. M., e Longden, A. (2007), A set of novel correlation tests for nonlinear system variables. *Int J Systems Sci*, 38(1):47–60.



# APÊNDICE A

---

## A.1 Fundamentos Teóricos em Dinâmica Não-Linear

### A.1.1 Seção de Poincaré e mapa de primeiro retorno

Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{A.1}$$

no qual  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de  $n$  variáveis dinâmicas dependentes do tempo  $t$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função lisa (continuamente diferenciável) definida no subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diz-se que o *campo vetorial*  $f$  produz o *fluxo*  $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  em que  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$  é uma função lisa e definida para todo  $\mathbf{x}$  em  $U$  e  $t$  em todo o intervalo  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , e  $\phi$  satisfaz (A.1) no sentido de

$$\frac{d}{dt}(\phi(\mathbf{x}, t))|_{t=\tau} = f(\phi(\mathbf{x}, \tau)) \tag{A.2}$$

para todo  $\mathbf{x} \in U$  e  $\tau \in I$ .

Geralmente, dada uma condição inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U$ , a solução  $\phi(\mathbf{x}_0, t)$  é tal que  $\phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ . Nesse caso  $\phi(\mathbf{x}_0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  define uma curva solução, uma trajetória, ou uma órbita da equação diferencial (A.2) saída de  $\mathbf{x}_0$  (Guckenheimer e Holmes, 1983).

Seja o sistema dinâmico linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{A.3}$$

onde a matriz  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com coeficientes constantes. Como solução do sistema (A.3) tem-se uma função  $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ , que depende do tempo

$t$  e da condição inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Trata-se portanto, da solução de um problema de valores iniciais que, para um sistema linear, é garantida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Mas essa existência global no tempo não é igualmente assegurada para os sistemas não-lineares. No caso linear (A.3), a solução é dada por

$$\mathbf{x} = e^{At} \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.4})$$

Uma tal matriz pode ser vista como uma aplicação de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ : sendo dado qualquer ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 e^{At}$  é o ponto no qual a solução de  $\mathbf{x}_0$  se encontra no tempo  $t$ . Assim, o operador  $e^{At}$  contém a informação global sobre o conjunto das soluções do sistema (A.3), uma vez que a solução (A.4) é assegurada para todo ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Assim,  $e^{At}$  define um fluxo no  $\mathbb{R}^n$  e esse fluxo é produzido pelo campo vetorial  $A(\mathbf{x})$  definido no  $\mathbb{R}^n$ :  $e^{At}$ .

O caso não-linear

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.5})$$

é definido pelo menos na vizinhança  $t \in (-c, c)$  de  $t = 0$ . Assim, o fluxo local  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$  se define de uma maneira análoga ao caso linear, embora não seja possível ter uma fórmula geral do tipo  $e^{At}$ .

Um ponto de partida para o estudo de sistemas não-lineares  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  consiste na determinação e na análise dos pontos fixos (seção A.1.2) (Guckenheimer e Holmes, 1983). Esses pontos fixos são definidos simplesmente no caso de um fluxo. No caso do sistema dinâmico (A.1), eles são obtidos resolvendo o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} = f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.6})$$

Acontece agora que o sistema dinâmico não se apresenta mais como um sistema contínuo — um sistema de equações diferenciais.

Nesse caso, chama-se *mapa* um sistema dinâmico que evolue de maneira discreta no tempo e é definido por uma aplicação discreta tal que

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_\mu(\mathbf{x}_k), \quad (\text{A.7})$$

em que  $\mathbf{x}$  é um vetor  $n$ -dimensional,  $F_\mu$  é uma função não-linear ( $\mu$  é o parâmetro de bifurcação; ver Seção 3.2.1) e  $k$  representa os passos temporais discretos e constantes (ou ainda, as passagens sucessivas ou retornos a uma superfície de seção transversa ao fluxo).

Seja o sistema dinâmico (A.5) e o fluxo  $\phi_t$  a ele associado. Esse fluxo pode induzir uma aplicação discreta. Se  $\phi_t$  é *liso* ( $r$  vezes continuamente

diferenciável), então  $F$  é um mapa liso com uma aplicação inversa lisa, ou seja, um *difeomorfismo*. A órbita do mapa será, portanto, uma sequência de pontos  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ .

Um fluxo contínuo induz um mapa discreto pelo intermédio de uma *seção de Poincaré*. Uma seção de Poincaré é constituída pela coleção das interseções da trajetória com um semi-plano transversal ao fluxo de trajetórias (jamais tangente à alguma trajetória). Ela permite passar do estudo de um fluxo em um espaço de fases com  $n$  dimensões à uma aplicação (difeomorfismo) chamada *mapa de Poincaré* ou *mapa de primeiro retorno* em um espaço com  $(n - 1)$  dimensões (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

Seja o sistema dinâmico autônomo  $n$ -dimensional que possui soluções periódicas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{A.8})$$

no qual  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial não-linear. Seja  $\mathbf{x}_0$  uma órbita periódica (de período  $T$ ) associada ao fluxo  $\phi(t)$ , solução do sistema (A.8). Toma-se então uma superfície  $\Sigma$  de dimensão  $(n-1)$  de tal maneira que o fluxo seja transversal a ela. Isso é verificado se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \Sigma$  em que  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  é normal à  $\Sigma$  em  $\mathbf{x}$ .

Seja uma órbita  $\{\phi(\mathbf{x}_0, t)\}_{t_0}^{t_0+T}$  de período  $T$ , ou seja, que

$$\phi = \phi(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0 + T),$$

e  $\mathbf{x}_p$  o ponto de interseção com a seção de Poincaré  $\Sigma$ . Seja  $U \subseteq \Sigma$  uma vizinhança de  $\mathbf{x}_{p*}$ . O *mapa de Poincaré*, ou *mapa de primeiro retorno*  $P : U \rightarrow \Sigma$  é então definido no ponto  $\mathbf{q} \in U$  por

$$P(\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{q}, \tau), \quad (\text{A.9})$$

em que  $\tau$  é o tempo necessário para que a trajetória  $\phi(\mathbf{q}, t)$  parta de  $\mathbf{q}$  e retorne pela primeira vez à  $\Sigma$ . Em geral,  $\tau$  depende de  $\mathbf{q}$ , mas  $\tau$  tende a  $T$  quando  $\mathbf{q}$  tende a  $\mathbf{x}_{p*}$ . A hipersuperfície  $\Sigma$  é chamada *seção de Poincaré* (Guckenheimer e Holmes, 1983; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

Uma trajetória periódica é tal que um ponto periódico<sup>1</sup>  $\mathbf{x}_{p*}$  do mapa  $P$  verifica

$$P(\mathbf{x}_{p*}) = \mathbf{x}_{p*}. \quad (\text{A.10})$$

---

<sup>1</sup>Um tal ponto é seguidamente chamado *ponto fixo* do mapa. Mas, de maneira a evitar uma confusão entre pontos singulares de fluxos e pontos singulares de mapas, esses últimos serão referidos como *pontos periódicos*.

Em particular, a estabilidade de  $\mathbf{x}_{p^*}$  em relação ao mapa P reflete a estabilidade da órbita periódica  $\mathbf{x}_p$  em relação ao fluxo  $\phi(t)$ .

**Exemplo A.1.1-A** (Guckenheimer e Holmes, 1983; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994)

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Praticamente, um semi-plano é definido com a ajuda de uma das coordenadas do ponto singular em torno do qual o atrator se estrutura e de um sentido de passagem que é escolhido (Letellier, 2005a).

Utilizando o semi-plano definido pela coordenada  $x$  e o sentido de passagem tal que  $\dot{x} > 0$ , tem-se

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, \dot{x} > 0\}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , por intermédio da mudança de variáveis  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , o sistema (A.11) torna-se

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Se o sentido de passagem  $\rho > 0$  for escolhido, a seção de Poincaré se escreve

$$\Sigma = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid \rho > 0, \theta = 0\}^2. \quad (\text{A.14})$$

Um ciclo limite estável é observado para  $(\rho, \theta) = (1, t)$ . A solução geral de (A.13) é dada por

$$\begin{cases} \rho = [1 + (\rho_0^{-2} - 1)e^{-2t}]^{-1/2}, \\ \theta = t + \theta_0. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Uma trajetória partindo de um ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{q} \in \Sigma$  necessita de um tempo  $t = \theta = 2\pi$  para completar uma volta e retornar a  $\Sigma$  com o raio

$$\begin{cases} P(\mathbf{q}) = \phi(\rho_0 = q, t = 2\pi), \\ = [1 + (q^{-2} - 1)e^{-4\pi}]^{-1/2} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

---

<sup>2</sup> $\mathbb{R} \times S^1 = \mathbb{R}/Z$  designa um cilindro ((Guckenheimer e Holmes, 1983) p.3).

em que  $P(\mathbf{q})$  é o mapa de Poincaré associado ao sistema (A.13). Pode-se ver que  $\mathbf{q} = 1$ , ponto do ciclo limite, é um ponto periódico de  $P(\mathbf{q})$  pois  $P(1) = 1$ . Uma trajetória iniciando em  $\mathbf{q} = 0,0001$  evolui como

$$P(0,0001) = 0,5347;$$

$$P^2(0,0001) = P(P(0,0001)) = 0,99939,$$

isto é, ela se aproxima do ciclo limite.

A estabilidade de uma órbita periódica  $\{\phi(\mathbf{x}_0, t)\}_t^{t+T}$  se reduz ao comportamento do mapa de Poincaré na vizinhança de um ponto periódico  $\mathbf{x}_{p^*}$ . Ademais, o mapa de Poincaré  $\mathbf{P}$  pode ser linearizado em torno de  $\mathbf{x}_{p^*}$  afim de utilizar a teoria linear da estabilidade. Assim, a estabilidade de  $\{\phi(\mathbf{x}_0, t)\}$  é analisada ao se verificar se o ponto periódico  $\mathbf{x}_{p^*}$  é estável ou instável (Section A.1.2).

### Exemplo A.1.1-B

Seja o sistema de equações diferenciais, podendo apresentar um comportamento caótico tal qual proposto por Otto Rössler (Rössler, 1976)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Este sistema possui uma não-linearidade e três parâmetros de bifurcação. Seus pontos fixos  $P_{*\pm}$  ( $P_{*+}$  localiza-se ao exterior do atrator e  $P_{*-}$  é localizado no interior do atrator) são definidos como

$$P_{*\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Utilizando-se o semi-plano de coordenada

$$y = y_- = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

uma seção de Poincaré pode ser definida pela escolha do sentido de passagem tal que as interseções retidas verifiquem a condição  $\dot{y} > 0$  ( $y$  crescente) (Figura A.1a).

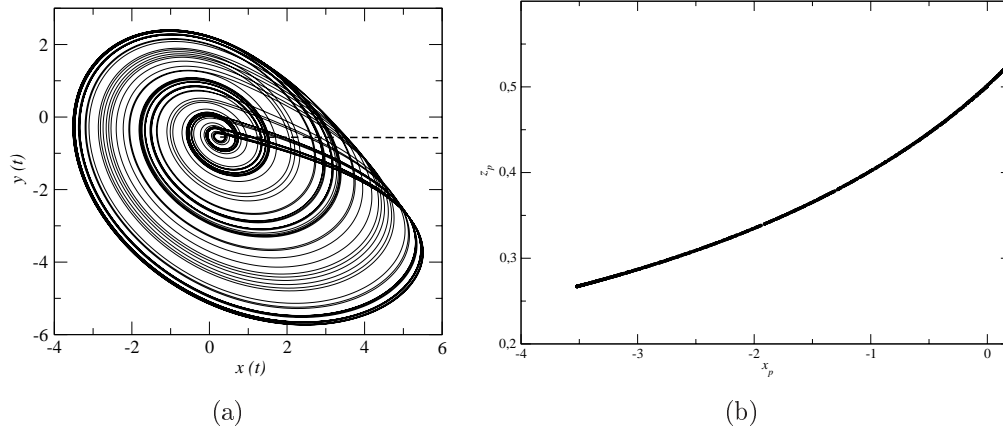


Figura A.1: Atrator caótico do sistema de Rössler: (a) retrato de fases. (b) seção de Poincaré cujo sentido de passagem escolhido verifica a condição  $\dot{y} > 0$  ( $y$  crescente). Parâmetros de bifurcação:  $(a,b,c) = (0,43; 2; 4)$ .

Sejam dois pontos de uma parte e de outra da seção de Poincaré, isto é, o último ponto calculado da trajetória, de coordenadas  $(x_{new}, y_{new}, z_{new})$  e o ponto precedente, de coordenadas  $(x, y, z)$ . Procura-se, então, o ponto na seção de Poincaré de coordenadas  $(x_p, y_p, z_p)$  nas quais  $y_p$  corresponde a  $y_p = y_-$ . O teorema de Thales é escrito então:

$$\frac{x_p - x}{x_{new} - x} = \frac{y_p - y}{y_{new} - y}$$

Somente a quantidade  $x_p$  é desconhecida, o que conduz a

$$x_p = \frac{y_p - y}{y_{new} - y}(x_{new} - x) + x$$

Por extensão, a coordenada  $z_p$  pode ser obtida da mesma maneira. Assim, a interseção da trajetória com o plano de Poincaré tem coordenadas  $x_p, z_p$ , com a coordenada  $y_p$  sendo sempre igual a  $y_-$ . No caso do sistema de Rössler, a seção de Poincaré se apresenta como uma curva unidimensional (Figura A.1b): ela é o resultado da importante taxa de dissipação do sistema. Quando a taxa de dissipação é mais fraca, a seção de Poincaré possui uma estrutura folhada (laminada), verdadeira assinatura de combinações de estiramentos e dobras.

### Algumas Observações (Letellier, 2005a)

- Uma seção de Poincaré de um ciclo limite de período 1 é representada

por um único ponto, e aquela de um ciclo limite de período topológico  $p$  por  $p$  pontos;

- A seção de Poincaré de um comportamento caótico é representada por uma infinidade de pontos diferentes, pois o movimento é aperiódico, ou seja, que ele não se repete jamais igual a ele mesmo;
- Na prática, alguns milhares de pontos (2000 a 5000) são suficientes para obter uma representação correta de uma seção de Poincaré de um sistema caótico;
- Assim, se é retida somente uma única coordenada de uma seção de Poincaré e se a evolução dos pontos visitados é traçada em função de um parâmetro de bifurcação, será possível de se seguir a evolução do comportamento assintótico do sistema (seção 3.2.1).

A seção de Poincaré permite uma primeira visualização da organização da estrutura do atrator e da organização do fluxo na região do plano de fases circunscrito ao atrator. Mas em relação ao comportamento dinâmico, a seção de Poincaré não fornece informações muito claras. Também, é útil construir um mapa de primeiro retorno a partir da seção de Poincaré. Um tal mapa pode conter informações importantes e revelar de maneira mais precisa a estrutura do comportamento dinâmico do sistema estudado.

Afim de se obter um mapa de primeiro retorno, inicia-se pela escolha de uma das coordenadas da seção de Poincaré; por exemplo, pode-se representar a coordenada  $y_{n+1}$  da  $(n + 1)$ -ésima interseção em função da coordenada  $y_n$  da  $n$ -ésima interseção. Uma iteração do tipo

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

é assim obtida. Passar da  $n$ -ésima interseção à  $n + 1$ -ésima seria o mesmo que fazer uma revolução sobre o atrator, isto é, descrever uma volta em torno do ponto fixo central. Para uma órbita de período  $p$ , a condição  $y_n = y_{n+p}$  é verificada e um mapa de  $p$ -ésimo retorno deverá ser utilizado.

#### **Exemplo A.1.1-C** (Letellier, 2005a)

A partir da seção de Poincaré obtida para o sistema de Rössler (Figura A.1b), a coordenada  $y$  foi escolhida. Representando-se a coordenada  $y_{n+1}$  em função da coordenada  $y_n$ , a aplicação de primeiro retorno tem a forma

de uma parábola (Figura A.2): há portanto um ramo crescente e um outro ramo decrescente separados por um máximo chamado *ponto crítico*. Trata-se de uma aplicação unimodal pois um único ponto crítico define a partição geradora do atrator.

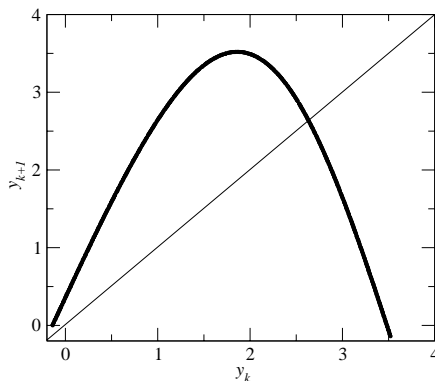


Figura A.2: Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler. Parâmetros de bifurcação:  $(a,b,c) = (0,43; 2; 4)$ .

**Definição 1** (*Aplicação Unimodal*) Seja  $g_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação discreta tal que  $g_\mu$  possua um atrator no intervalo  $I \in \mathbb{R}$ . A aplicação  $g_\mu$  é dita *unimodal* quando ela apresenta um único extremo.

Cada ramo da parábola corresponde a comportamentos dinâmicos diferentes. Tome-se por exemplo o ramo crescente da parábola, delimitada pelos pontos  $A$  e  $B$ . Sob a evolução do fluxo, o intervalo  $[A,B]$  torna-se o intervalo  $[A',B']$  no qual pode ser verificado que a ordem relativa dos pontos é preservada, ou seja, que o ponto  $A'$  está à esquerda do ponto  $B'$ , como  $A$  está à esquerda de  $B$  (Figura A.3). Isso implica que um número par de meias-voltas foram feitas quando da revolução em torno do ponto fixo interno. Pode-se ainda verificar que  $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ , ou seja, que há um processo de *estiramento* em torno dessa revolução.

Observe-se agora a evolução do ramo decrescente pelos pontos  $C$  e  $D$  (Figura A.4). A partir de uma revolução sobre o atrator, eles são respectivamente transformados em  $C'$  e  $D'$ . Nesse caso, a ordem dos pontos foi invertida, pois o intervalo  $[C,D]$  torna-se o intervalo  $[D',C']$ , o que quer dizer que há um número ímpar de meias-voltas sob uma revolução sobre o atrator. Como  $\overline{CD} < \overline{D'C'}$ , há igualmente um estiramento.

No caso do sistema de Rössler, o ramo crescente é portanto associado a

um processo de estiramento que pode se desenvolver em um plano. O ramo decrescente é associado a um processo de estiramento e outro de rotação (uma meia-volta) que faz necessária uma terceira dimensão. O caos resulta então da conjugação de duas propriedades importantes:

1. o *estiramento* que assegura a *sensibilidade às condições iniciais* ;
2. a *dobra* que assegura a mistura das trajetórias entre elas.

A combinação dessas duas propriedades não permite a previsão a longo prazo.

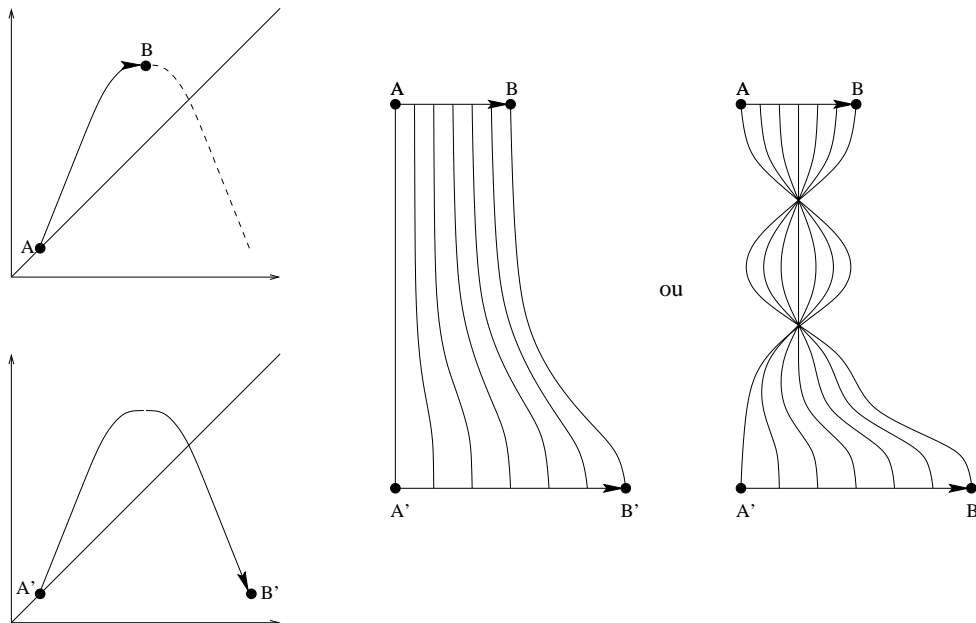


Figura A.3: Propriedades topológicas associadas ao ramo crescente do mapa de primeiro retorno.

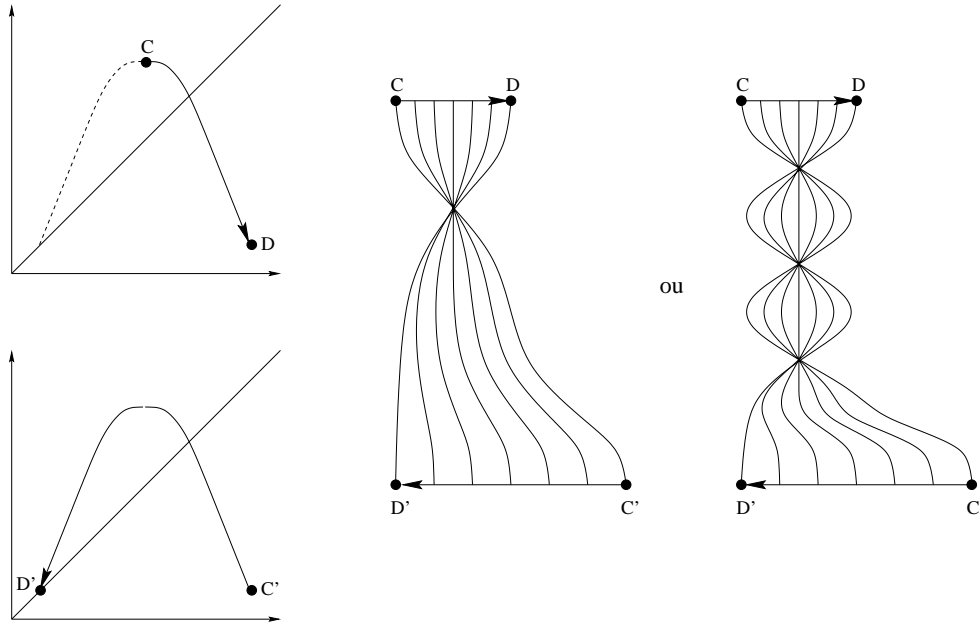


Figura A.4: Propriedades topológicas associadas ao ramo decrescente do mapa de primeiro retorno.

### A.1.2 Pontos fixos

Para estudar os diferentes tipos de pontos fixos, faz-se necessário recorrer a uma análise linear de estabilidade. Tome-se um sistema dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}} = f_{\mu}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.19})$$

possuindo pelo menos um ponto fixo tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = 0 = f_{\mu}(\mathbf{x})$$

e esses pontos são designados por  $\mathbf{x}_*$ . Ao se aplicar uma pequena perturbação  $\zeta$  a esse ponto fixo e observar sua evolução sob a ação do sistema (A.19) com a ajuda da mudança de variável  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_* + \zeta$ :

$$\dot{\mathbf{x}}_* + \dot{\zeta} = f_{\mu}(\mathbf{x}_* + \zeta)$$

em que  $\dot{\mathbf{x}}_* = \vec{0}$  por definição dos pontos fixos. Utilizando um desenvolvimento em série de Taylor da função  $f_{\mu}$  na vizinhança de  $\mathbf{x}_*$ , obtem-se, em segunda ordem:

$$\dot{\zeta} = f_{\mu}(\mathbf{x}_*) + J_{f_{\mu}}(\mathbf{x}_*)\zeta + \mathcal{O}(|\zeta|^2)$$

em que

$$J_{f_\mu}(\mathbf{x}_*) = \left[ \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*}$$

é a matriz Jacobiana estimada em  $\mathbf{x}_*$ . Como  $f_\mu(\mathbf{x}_*) = \vec{0}$ , resta aquilo que Henri Poincaré chamou a *equação às variações*:

$$\dot{\zeta} = J_{f_\mu}(\mathbf{x}_*)\zeta + \mathcal{O}(|\zeta|^2) \quad (\text{A.20})$$

De maneira a decompor a perturbação  $\dot{\zeta}$  em uma base de autovetores independentes, a matriz Jacobiana é diagonalizada; a perturbação expressa na base de autovetores se coloca então sob a forma

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{\vec{\lambda}t}$$

Limitando-se ao caso bidimensional, a matriz Jacobiana se reduz à

$$J_{f_\mu}(\mathbf{x}_*) = \begin{bmatrix} J_{11} = \frac{\partial f_x}{\partial x} & J_{12} = \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ J_{21} = \frac{\partial f_y}{\partial x} & J_{22} = \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ela é diagonalizada com a ajuda do polinômio característico

$$\text{Det}(J_{f_\mu}(\mathbf{x}_*) - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

no qual  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade. Obtendo-se assim:

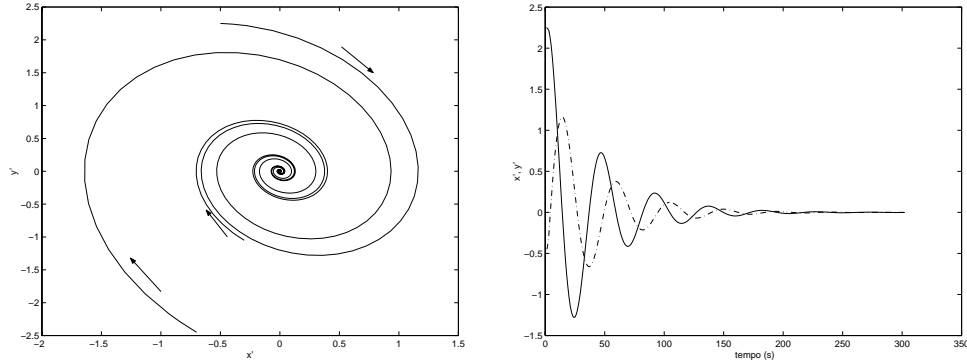
$$\text{Det} \begin{bmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda^2 - \underbrace{(J_{11} + J_{22})}_{\text{Tr}(J_{f_\mu})} \lambda + \underbrace{(J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12})}_{\text{Det}(J_{f_\mu})} = 0$$

em que  $\text{Tr}(J_{f_\mu})$  designa o traço da matriz Jacobiana. Esse polinômio tem duas soluções  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que podem ser:

1. reais e de mesmo sinal; o ponto fixo é um *nó* estável se elas são negativas e instável se elas são positivas.
2. reais e de sinais diferentes; o ponto fixo é um ponto de *sela*.

3. complexos conjugados; o ponto fixo é um *foco* estável (Figura A.5) se a parte real é negativa e instável se ela é positiva.
4. imaginários puros; o ponto fixo é um *centro*.



(a) Foco estável

(b) Evolução temporal das variáveis.

Figura A.5: Foco estável obtido como solução de um sistema de segunda ordem cujas variáveis, a partir de condições iniciais fornecidas, evoluem em direção ao ponto fixo.

Com base na equação às variações (A.20) e nos autovalores da matriz Jacobiana, tais bifurcações podem ser postas em evidência, pelo menos para sistemas simples. Pode-se assim distinguir várias bifurcações.

### A.1.3 Bifurcações

#### - Bifurcação sela-nó

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

no qual  $x$  e  $y$  são duas variáveis dinâmicas do sistema. Os pontos fixos são obtidos escrevendo-se

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = \mu - x^2 \\ \dot{y} = 0 = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x_* = \pm\sqrt{\mu} \\ y_* = 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

tem-se portanto, dois pontos fixos  $P_{1*} = (\sqrt{\mu}, 0)$  et  $P_{2*} = (-\sqrt{\mu}, 0)$ ; esses dois pontos fixos existem somente para  $\mu \geq 0$ . A matriz Jacobiana do sistema

$$J = \begin{bmatrix} -2x_* & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

é diagonal: os autovalores são então diretamente:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2x_* \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

O ponto fixo  $P_{1*}$  tem dois autovalores reais negativos  $(-2\sqrt{\mu}, -1)$ : é o caso de um nó estável para  $\mu \geq 0$ . Por outro lado, o ponto fixo  $P_{2*}$  tem dois valores reais de sinais diferentes  $(2\sqrt{\mu}, -1)$ : trata-se então de um ponto de sela.

Pode-se ver claramente que para  $\mu < 0$ , não há pontos fixos para o sistema; em  $\mu = 0$ , os dois pontos fixos surgem, sendo um estável e o outro instável. O ponto fixo estável será atingido se as condições iniciais são forem tais que  $x_0 > -\sqrt{\mu}$  (para  $y > 0$ ), o que define a bacia de atração do ponto fixo estável  $P_{1*}$ .

### - Bifurcação forquilha

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Os pontos fixos são obtidos escevendo-se

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = 0 = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x_* = 0 \text{ et } x_* = \pm\sqrt{\mu} \\ y_* = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.26})$$

Há portanto três pontos fixos:  $P_{1*} = (0, 0)$  que existe para todo valor de  $\mu$ , enquanto que  $P_{2*} = (\sqrt{\mu}, 0)$  e  $P_{3*} = (-\sqrt{\mu}, 0)$  existem somente para  $\mu \geq 0$ . A matriz Jacobiana do sistema

$$J = \begin{bmatrix} \mu - 3x_*^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

é diagonal: então os autovalores são diretamente:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu - 3x_*^2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Para  $\mu < 0$ , o ponto fixo  $P_{1*}$  tem dois autovalores reais negativos  $(-\mu, -1)$ : ele é portanto um nó estável. Diferentemente, para  $\mu < 0$ ,

há dois autovalores reais de sinais opostos ( $\mu$  et  $-1$ ): é por conseguinte uma sela. O ponto fixo  $P_{2*}$  existe unicamente para  $\mu \geq 0$  e seus dois autovalores são reais negativos ( $-2\mu, -1$ ): trantando-se um nó estável. O ponto fixo  $P_{3*}$  existe exclusivamente para  $\mu \geq 0$  e tem também dois autovalores reais negativos ( $-2\mu, -1$ ): é um nó estável como  $P_{2*}$ . De fato,  $P_{2*}$  e  $P_{3*}$  são simétricos entre si sob a mudança de variáveis  $(x,y) \mapsto (-x,y)$ . Também, a bifurcação forquilha só pode aparecer para um sistema simétrico.

Nesse caso, para  $\mu < 0$ , há somente um ponto fixo estável; após o ponto de bifurcação ( $\mu = 0$ ), a solução estável torna-se intável, e duas novas soluções estáveis aparecem. Sendo assim, a bifurcação é chamada *super-crítica* pois o número de pontos fixos aumentou de um para três.

No caso do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

existem três pontos fixos para  $\mu < 0$ , um deles é um nó estável enquanto os outros dois, simétricos entre si, são nós instáveis. Para  $\mu > 0$ , após o ponto de bifurcação, permanece um único ponto fixo que é um nó instável. Nesse caso, a bifurcação é chamada *sub-crítica*, pois o número de pontos fixos diminuiu de 3 para 1.

### - Bifurcação transcritical

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Os pontos fixos são encontrados escrevendo-se

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = 0 = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x_* = 0 \text{ et } x_* = \mu \\ y_* = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.31})$$

O sistema tem dois pontos fixos  $P_{1*} = (0, 0)$  e  $P_{2*} = (\mu, 0)$ . A matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \mu - 2x_* & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

é diagonal e os autovalores são diretamente

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu - 2x_* \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.33})$$

Quando  $\mu < 0$ , o ponto fixo  $P_{1*}$  tem dois autovalores reais e negativos ( $-\mu$  et  $-1$ ): portanto um nó estável. Para  $\mu > 0$ , esse ponto fixo tem dois autovalores reais de sinais diferentes ( $\mu$  et  $-1$ ): sendo portanto um ponto de sela. Para  $\mu < 0$ , o ponto fixo  $P_{2*}$  tem dois autovalores reais de sinais opostos ( $\mu$  et  $-1$ ), evidenciando ser um ponto de sela. Quando  $\mu > 0$ ,  $P_{2*}$  tem autovalores reais negativos ( $-\mu$  et  $-1$ ), tratando-se assim, de um nó estável.

Neste exemplo, há mudança de estabilidade entre os dois pontos fixos:  $P_{1*}$  passa de um nó estável a um ponto de sela e  $P_{2*}$  de um ponto de sela a um nó estável. Como o número de pontos fixos não é alterado, essa bifurcação é chamada transcítica.

### - Bifurcação de Hopf

Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

no qual  $r\rho$  e  $\theta$  são coordenadas polares.

Os pontos fixos são encontrados ao se escrever

$$\dot{\rho} = 0 = \rho(\mu - \rho^2) \iff \rho_* = 0 \text{ et } \rho_* = \pm\sqrt{\mu} \quad (\text{A.35})$$

A solução  $P_{2*}(\rho_* = \pm\sqrt{\mu})$  não é um ponto fixo no sentido estrito do termo. Dado que há uma velocidade angular constante ( $\dot{\theta} = 1$ ), a solução correspondendo a um raio não nulo, é de fato um ciclo limite.

A variável  $\theta$  não será considerada na análise de estabilidade, pois trata-se da fase angular. Ela corresponde, de fato, à parte imaginária dos autovalores dos pontos fixos. A matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \mu - 3\rho_*^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

é diagonal. Como já mencionado, somente a parte imaginária é considerada na análise linear de estabilidade. O autovalor correspondente é diretamente por:

$$\lambda_1 = \mu - 3\rho_*^2 \quad (\text{A.37})$$

Quando  $\mu < 0$ , somente esse ponto fixo  $P_{1*}$  é real: trata-se de um foco estável. Para  $\mu = 0$ , há uma mudança de estabilidade (ponto de

bifurcação) e o ponto fixo tem dois autovalores puramente imaginários conjugados: é portanto um centro. Quando  $\mu > 0$ ,  $P_{1*}$  torna-se um foco instável e  $P_{2*}$  torna-se um ciclo limite estável. A bifurcação de Hopf corresponde portanto à passagem de um ponto fixo estável a um ciclo limite estável.

### - Bifurcação de duplicação de período

Considere a Figura A.6, na qual destaca-se, no plano complexo, o círculo de raio unitário. Esse círculo delimita, no caso de mapas, a região que caracteriza a estabilidade dos pontos fixos. Se os autovalores associados a um ponto fixo estão contidos dentro do círculo, esse ponto fixo é assintoticamente estável.

A variação do parâmetro de bifurcação pode deslocar um ou mais autovalores para fora do círculo de raio unitário. Quando o círculo é atravessado, o ponto fixo sofre uma bifurcação. Se um autovalor deixa o círculo unitário sobre o eixo que representa a parte real negativa, acontece uma *bifurcação de duplicação de período* (também conhecida como *bifurcação flip*). Assim, no ponto de bifurcação o autovalor vale  $-1$  (Monteiro, 2002; Fiedler-Ferrara e Prado, 1994; Guckenheimer e Holmes, 1983).

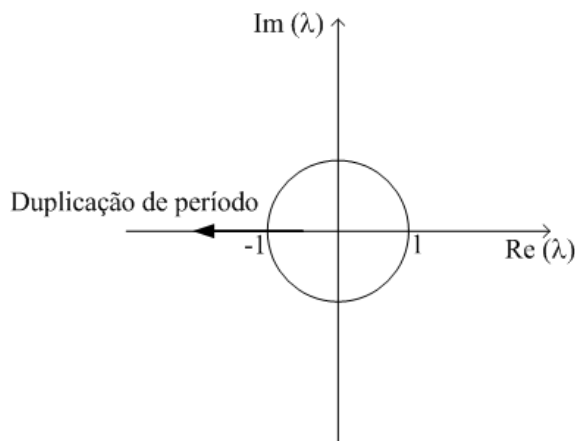


Figura A.6: Indicação da condição de surgimento de uma bifurcação de duplicação de período no círculo de raio unitário no plano complexo.

Tome-se, por exemplo, o mapa logístico:  $x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$ . A fim de

encontrar os pontos fixos desse mapa, tem-se que

$$x_* = \mu x_*(1 - x_*)$$

$$x_* = \mu x_* - \mu x_*^2$$

$$\mu x_*^2 + x_*(1 - \mu) = 0$$

$$x_*(\mu x_* + (1 - \mu)) = 0$$

$$x_* = 0$$

$$\mu x_* + (1 - \mu) = 0$$

$$x_* = 1 - \frac{1}{\mu}$$

Portanto, tem-se dois pontos fixos:  $P_{1*} = 0$  e  $P_{2*} = 1 - \frac{1}{\mu}$ . Tomando-se a derivada do mapa, tem-se o autovalor

$$\lambda = \mu - 2\mu x_*,$$

$$\lambda = \mu(1 - 2x_*).$$

No caso do ponto fixo trivial,  $P_{1*}$ , tem-se que:  $\lambda = \mu$ , portanto, é estável no intervalo  $-1 < \mu < 1$ .

Para  $P_{2*}$ , tem-se:  $\lambda = \mu(1 - 2(1 - \frac{1}{\mu}))$ , e após algumas operações,  $\lambda = 2 - \mu$ . Assim,  $P_{2*}$  é estável no intervalo  $1 < \mu < 3$ . Nesse caso, quando  $\mu = 3$ ,  $\lambda = -1$ , portanto ocorre uma bifurcação de duplicação de período, como pode ser verificado na Figura A.7. A bifurcação de duplicação de período não deve ser confundida com a bifurcação de forquilha (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

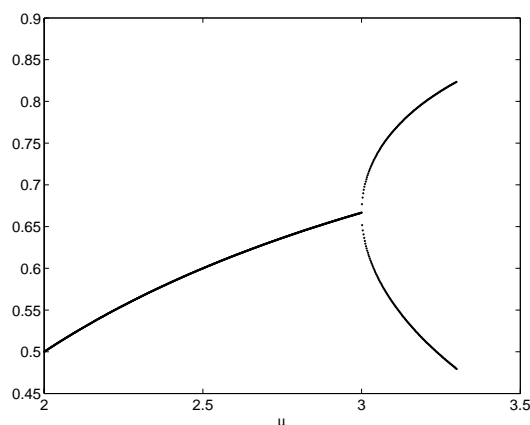


Figura A.7: Evolução das soluções do mapa logístico em função do parâmetro de bifurcação. Quando  $\mu$  está contido no intervalo  $1 < \mu < 3$ , o ponto fixo encontra-se na região de estabilidade. Quando  $\mu$  se iguala a 3, o avalor associado ao ponto fixo se iguala a -1 e, então, ocorre uma bifurcação de duplicação de período.

#### A.1.4 Atratores Estranhos

O objeto geométrico no espaço de estados para o qual trajetórias caóticas são atraídas é chamado *atrator estranho*. Até o presente não há uma única definição que tenha uma aceitação geral (Parker e Chua, 1989).

Atratores que evoluem por um processo de alongamento e dobras são chamados atratores estranhos, terminologia introduzida por Ruelle e Takens (1971) (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994; Grebogi e colegas, 1984).

Segundo a definição de Ruelle e Takens, um atrator é chamado de estranho quando as linhas de fluxo dependem sensivelmente das condições iniciais. Com efeito, num atrator estranho pontos inicialmente arbitrariamente próximos estarão macroscopicamente (exponencialmente) separados depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. Por outro lado, num sistema dinâmico dissipativo as soluções geram elementos de volume que se contraem de maneira que a dinâmica tende a um região limitada do espaço de fases. A única maneira pela qual soluções únicas podem se contrair numa direção e se expandir em outra, permanecendo numa região finita, é por um processo de dobra ou foliação na direção de contração. Isto exige pelo menos um espaço tridimensional (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). A sensível dependência às condições iniciais tem conseqüências práticas. Uma vez que pequenos desvios nas condições iniciais estão sempre presentes, seja devido a imprecisões inerentes ou pela existência de ruído experimental, a posição de uma traje-

tória dentro de um atrator estranho não é previsível a médio e longo prazos. Assim, sistemas que exibem atratores estranhos podem apresentar oscilações irregulares ou caóticas. Deve-se atentar para o fato de que o comportamento caótico observado resulta da própria dinâmica do sistema (determinística), não sendo produzido por perturbações de natureza estocástica (aleatória) (Eckmann e Ruelle, 1985).

Segundo Eckmann e Ruelle (1985), os atratores estranhos podem apresentar características *caóticas* e *fractais*. As características fractais são referentes à dimensão não inteira do atrator, já as caóticas dizem respeito à sensível dependência às condições iniciais. Ao considerar as propriedades caóticas um conceito dinâmico mais importante que as propriedades fractais, um atrator estranho é definido como sendo aquele com *sensível dependência às condições iniciais*. Conseqüentemente, não são considerados caóticos, aqueles atratores que apresentam somente propriedades fractais. Portanto, a noção de *estranheza* se refere à dinâmica do atrator, e não apenas à sua geometria. Já Grebogi e colegas (1984) apresentam uma discussão a respeito de atratores estranhos que não são caóticos, e definem *atrator caótico* como aquele cujas órbitas tem um expoente de Lyapunov positivo.

A Figura A.8 (Rössler, 1976), mostra um atrator estranho, conhecido como o atrator de Rössler. A Figura A.9 mostra esse atrator com duas trajetórias, ou seja, duas condições iniciais muito próximas na qual as setas indicam instantes de tempo diferentes nos quais as trajetórias divergem, mostrando assim, a dependência às condições iniciais.

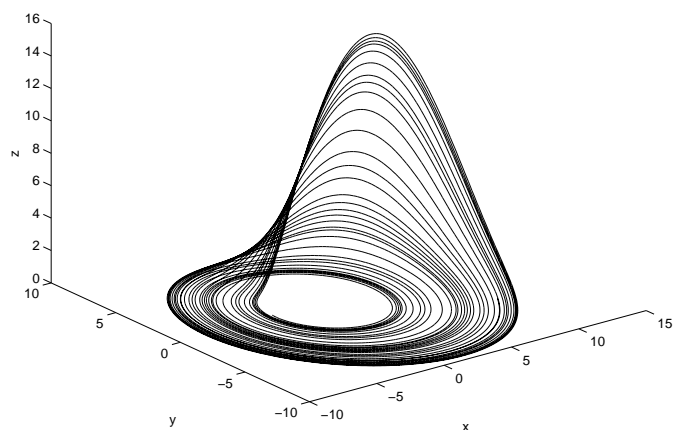


Figura A.8: Atrator de Rössler.

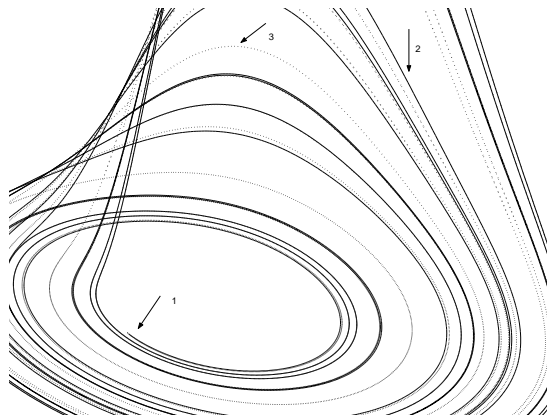


Figura A.9: Atrator de Rössler ampliado. (—) Condição inicial 1. (- -) Condição inicial 2.

A Figura A.10 mostra a evolução temporal de um dos estados do sistema de Rössler para as duas condições iniciais diferentes.

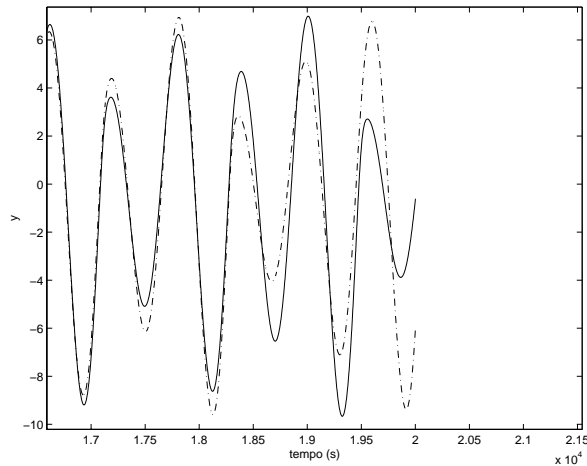


Figura A.10: Evolução temporal de um dos estados do atrator de Rössler para duas condições iniciais distintas, mas muito próximas.

## A.1.5 Fundamentos teóricos em Dinâmica Simbólica

### Ordem unimodal

Ordenar as órbitas periódicas instáveis é uma etapa importante da dinâmica simbólica, pois isso ajuda a compreender como um atrator está estruturado. Torna-se então possível obter informações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema estudado.

Antes de estabelecer a ordem das órbitas periódicas, é necessário começar por estabelecer a ordem dos pontos periódicos. A classificação dos pontos periódicos é feita por meio de comparação das sequências simbólicas que etiquetam os pontos periódicos. Retomando o exemplo (3.2.2-a), dos três pontos A, B e C, é preciso partir do primeiro símbolo de cada sequência e colocá-los em ordem segundo a ordem natural, ou seja,  $0 < 1 < 2$ . Assim, obtém-se  $B < C < A$  em que o símbolo  $<$  significa "é mais fraco que". Pode-se também escrever que A implica C que implica B. Isso quer dizer que a existência de A implica a existência de C, que implica a existência de B.

Nesse exemplo pode ser, também, verificado que há uma concordância entre a ordem estabelecida para os pontos periódicos e suas distâncias ao centro do atrator. O ponto periódico  $p$  mais externo é o mais forte e a órbita de período  $p$  é etiquetada pela sequência que etiqueta o ponto externo, seja, nesse caso, pela sequência (201) que é escrita entre parênteses e é chamada *seqüência orbital* (Letellier e colegas, 1995).

Após o exemplo, vem uma definição mais geral das regras de ordenação dos pontos periódicos. Tendo-se em conta que em uma aplicação unimodal os ramos crescentes correspondem a uma preservação da ordem relativa dos pontos e são etiquetados por um número inteiro par, começando pelo zero para o ramo mais interno; e por outro lado, os ramos decrescentes são aqueles que invertem a ordem relativa dos pontos periódicos, são etiquetados por inteiros ímpares a começar por 1. Portanto, o conceito de paridade de uma seqüência é definido pela soma algébrica de seus símbolos, ou seja, uma seqüência é respectivamente dita ser par ou ímpar se a soma de seus símbolos é par ou ímpar.

No exemplo anterior, o primeiro símbolo de cada seqüência simbólica é diferente dos outros, o que torna a classificação direta. Mas isso não acontece sempre, pois as seqüências podem apresentar alguns símbolos em comum no começo da seqüência. Em geral, as seqüências simbólicas podem ser classificadas segundo a ordem de implicação, uma regra que é válida para todos os pontos periódicos.

**Definição** (*Ordem de implicação*) Seja  $g_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um mapa de primeiro retorno unimodal constituído de um ramo crescente e de um ramo decrescente, respectivamente denotados pelos símbolos "0" e "1". Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas seqüências simbólicas tais que

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_{1,1}\sigma_{1,2}\dots\sigma_{1,k}\sigma_{1,k+1}\dots\sigma_{1,n} \\ &= S^* \sigma_{1,k+1}\dots\sigma_{1,n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sigma_{2,1}\sigma_{2,2}\dots\sigma_{2,k}\sigma_{2,k+1}\dots\sigma_{2,n} \\ &= S^* \sigma_{2,k+1}\dots\sigma_{2,n} \end{aligned}$$

em que  $S^*$  é a parte comum entre essas duas seqüências, isto é,  $\sigma_{1,i} = \sigma_{2,i}$  para  $i \in [1,k]$  e  $\sigma_{1,k+1} \neq \sigma_{2,k+1}$ . Então a ordem de implicação  $\prec_i$  pode ser definida como segue.

$$\begin{aligned} \text{se } S^* \text{ é par} & \quad \text{e } \sigma_{1,k+1} < \sigma_{2,k+1} \text{ então } S_1 \prec_i S_2 \\ \text{se } S^* \text{ é ímpar} & \quad \text{e } \sigma_{1,k+1} < \sigma_{2,k+1} \text{ então } S_2 \prec_i S_1 \end{aligned}$$

em que  $<$  é a ordem natural e  $\prec_i$  define a ordem de implicação. Assim, quando  $S_1 \prec_i S_2$ , diz-se que " $S_1$  é implicado por  $S_2$ ".

No exemplo 3.2.2-a, foi visto que a órbita periódica é etiquetada pela seqüência associada ao ponto A (201). Assim, se o primeiro símbolo dessa

sequência for colocado no fim da mesma — permutação à esquerda — obter-se-á a sequência 012, associada ao ponto B. Ao repetir-se o procedimento, obtem-se 120, a sequência do ponto C. A sequência 201 será reencontrada se as permutações são prosseguidas. Então, seja  $S$  uma sequência de  $p$  símbolos designando uma órbita de período  $p$ . É possível definir  $p$  sequências simbólicas correspondentes às permutações circulares de  $S$  ou, segundo uma terminologia matemática, sob a ação do deslocamento de Bernoulli  $\Xi$  (Letellier, 2006a).

**Definição** (*Deslocamento de Bernoulli*) Seja  $S_1 = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p$  uma sequência de  $p$  símbolos correspondentes a uma órbita de período  $p$ . Seja  $\Xi$  o *deslocamento de Bernoulli*. Então as  $p$  sequências simbólicas  $S_i (i = 1, \dots, p)$  podem ser obtidas segundo

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= \Xi(S_i) \\ &= \Xi(\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_p\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}) \\ &= \sigma_{i+1}\dots\sigma_p\sigma_1\dots\sigma_{i-1}\sigma_i \end{aligned}$$

O conjunto de sequências  $S_1, S_2, \dots, S_p$  corresponde às  $p$  sequências que designam os pontos periódicos da órbita. Assim,  $S_1, S_2, \dots, S_p$  é a ordem segundo a qual a órbita visita os pontos periódicos. Portanto, partindo-se de  $S_1$  a trajetória visita  $S_2, S_3$  até  $S_p$ . Em seguida, a trajetória visita novamente  $S_1$  e assim sucessivamente (Letellier, 2006a).

**Exemplo 3.2.2-b** (Letellier, 2006a)

Seja a sequência (10110) de uma órbita de período 5 contida em um atrator solução do sistema de Rössler para os parâmetros  $(a,b,c) = (0.432, 2, 4)$ . Utilizando o deslocamento de Bernoulli, tem-se cinco permutações circulares

$$10110 \rightarrow 01101 \rightarrow 11010 \rightarrow 10101 \rightarrow 01011$$

Uma trajetória que visita esta órbita de período 5, visitará o ponto periódico codificado por 10110, seguido do ponto 01101, depois os pontos 11010 e 10101, e enfim, do ponto 01011 antes de recomeçar a órbita. Essa seqência de cinco sequências pode ser ordenada segundo a ordem de implicação

$$01101 \prec_i 01011 \prec_i 11010 \prec_i 10101 \prec_i 10110$$

que corresponde à ordem dos pontos periódicos na seção de Poincaré. Eles são, portanto, visitados segundo a ordem seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} 01101 & 01011 & 11010 & 10101 & 10110 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$



### Exemplo 3.2.2-c

Sejam as sequências (101) e (1011) designando respectivamente uma órbita de período 3 e uma órbita de período 4. Utilizando o deslocamento de Bernoulli, tem-se três permutações circulares

$$101 \rightarrow 011 \rightarrow 110$$

para a primeira e quatro permutações circulares

$$1011 \rightarrow 0111 \rightarrow 1110 \rightarrow 1101$$

para a segunda. A sucessão dos pontos periódicos visitados por cada órbita periódica torna-se assim conhecida. Mas pode-se também ordenar essas sequências de três e quatro sequências segundo a ordem de implicação.

Há entre as sete sequências, duas que começam por 0:

$$\begin{aligned} \underline{011} &\rightarrow \underline{011011} \\ \underline{0111} &\rightarrow \underline{0111} \end{aligned}$$

e cuja parte comum é 011. Dado que a órbita é periódica, é possível reescrever a sequência mais curta. Ocorre então o primeiro símbolo diferente. A parte comum é par, portanto a sequência cuja paridade comum é seguida de 1 implica a sequência cuja paridade comum é seguida de um 0.

Em seguida, há as sequências cuja parte comum é 1 e cuja paridade é, consequentemente, ímpar. Assim, as sequências cujo segundo símbolo é 1 são implicadas por aquelas que têm 0 como segundo símbolo. Portanto tem-se em seguida

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{110} \\ \underline{1110} \\ \underline{1101} \end{array} \right\} \implies 1110 \prec_i \left| \begin{array}{l} 110 \\ \\ 1101 \end{array} \right. . \quad (\text{A.38})$$

A parte comum é 11, e então a paridade é par. Isso quer dizer que a sequência cujo terceiro símbolo é 1 implica as outras que restam a ser ordenadas. Agora,

$$\begin{array}{l} \underline{110} \\ \underline{1101} \end{array} \implies \begin{array}{l} \underline{110110} \\ \underline{11011101} \end{array} \implies 110 \prec_i 1101. \quad (\text{A.39})$$

Tem-se assim

$$1110 \prec_i 110 \prec_i 1101$$

Faltam as duas seqüências que começam por 10.

$$\begin{array}{ccc} \underline{101} & \implies & \underline{101101} \\ & & \implies 1011 \prec_i 101. \end{array} \quad (\text{A.40})$$

$$\underline{1011} \implies \underline{10111011}$$

Colocando em ordem os resultados das três etapas, tem-se o conjunto das seqüências ordenadas segundo a ordem de implicação, como segue

$$011 \prec_i 0111 \prec_i 1110 \prec_i 110 \prec_i 1101 \prec_i 1011 \prec_i 101$$

■

Uma órbita periódica é solução do sistema quando todas as seqüências simbólicas associadas a seus pontos periódicos são autorizados<sup>3</sup>, e para isso, é suficiente que a última seqüência seguindo a ordem de implicação seja autorizada. Essa seqüência será utilizada para designar a órbita (Letellier, 2006a).

**Definição** (*Seqüência orbital*) A permutação circular de uma seqüência simbólica  $S$  designando uma órbita periódica que implica todas as outras permutações circulares é chamada *seqüência orbital* e é escrita entre parênteses (Letellier, 2006a).

Seguindo a tarefa de ordenar as órbitas periódicas, as seqüências orbitais podem ser ordenadas exatamente como as seqüências simbólicas afim de se obter a *ordem de forçagem*.

**Definição** (*Ordem de forçagem*) Ordenar as seqüências orbitais segundo a ordem de implicação define a *ordem de forçagem*  $\prec_f$  (Letellier, 2006a).

Quando  $S_1 \prec_f S_2$ , diz-se que  $S_2$  força a existência de  $S_1$ . A ordem de forçagem corresponde à ordem segundo a qual as órbitas periódicas aparecem quando um parâmetro de bifurcação de um sistema com mapa de primeiro retorno unimodal diferenciável é variado. Assim, segundo a ordem de forçagem, as órbitas periódicas aparecem como segue

$$(0) \prec_f (1) \prec_f (10) \prec_f (1011) \prec_f (1011 \ 1010) \prec_f \dots$$

---

<sup>3</sup>Um seqüência  $S$  é dita autorizada se ela corresponde a uma órbita periódica estável da aplicação unimodal (Bai-Lin, 1989).

