

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Pós-Graduação em Matemática

Alexandre Dieguez Braga

Correlações no Problema do Divisor de Dirichlet

Belo Horizonte
2026

Alexandre Dieguez Braga

Correlações no Problema do Divisor de Dirichlet

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Vinicius Bahi Ay-mone

Belo Horizonte
2026

Braga, Alexandre Dieguez.

B813c Correlações no Problema do Divisor de Dirichlet [recurso eletrônico] / Alexandre Dieguez Braga – 2026.
45 f. il.

Orientador: Marco Vinicius Bahi Aymone.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.43-45.

1. Matemática – Teses.
 2. Teoria dos números – Teses.
 3. Dirichlet, Problemas de – Teses.
 3. Aproximação Diofantina – Teses.
 4. Autocorrelação (Estatística) – Teses.
- I. Aymone, Marco Vinicius Bahi. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Correlações no Problema do Divisor de Dirichlet

ALEXANDRE DIEGUEZ BRAGA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Marco Vinícius Bahi Aymone
Orientador - UFMG

Pós-doutor Cinthya Bortolotto
IMPA

Prof. Davi dos Santos Lima
UFAL

Belo Horizonte, 23 de fevereiro de 2026.

AGRADECIMENTOS

Sou profundamente grato ao meu orientador, Marco Aymone, por propor este problema de pesquisa, oferecendo orientação inestimável ao longo de seu desenvolvimento e pela leitura meticulosa dos rascunhos anteriores deste manuscrito.

Como este trabalho é derivado do artigo publicado no *Journal of Number Theory* (4), também agradeço ao revisor anônimo por suas sugestões perspicazes, que melhoraram muito o documento final.

Este trabalho foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) no âmbito do Programa de Apoio à Pós-Graduação (PAPG) [Bolsa de Mestrado em Matemática, Processo N^o 328].

*“A matemática é a rainha das ciências
e a teoria dos números é a rainha da matemática.”
(Carl Friedrich Gauss)*

RESUMO

Para um irracional fixo $\theta > 0$ com uma função de medida de irracionalidade prescrita, estudamos a correlação $\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx$, onde Δ é o termo de erro de Dirichlet no problema do divisor. Quando θ tem uma medida de irracionalidade finita, sabe-se que a decorrelação ocorre a uma taxa que pode ser expressa em termos dessa medida. Uma forte decorrelação ocorre para todos os irracionais positivos, exceto possivelmente para os números de Liouville. Mostramos que, para irracionais com uma função de medida de irracionalidade prescrita ψ , a decorrelação pode ser quantificada em termos de ψ^{-1} .

Palavras-chave: problema do divisor de Dirichlet; números de Liouville; aproximação diofantina; autocorrelação; medida de irracionalidade.

ABSTRACT

For a fixed irrational $\theta > 0$ with a prescribed irrationality measure function, we study the correlation $\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx$, where Δ is the Dirichlet error term in the divisor problem. When θ has a finite irrationality measure, it is known that decorrelation occurs at a rate expressible in terms of this measure. Strong decorrelation occurs for all positive irrationals, except possibly Liouville numbers. We show that for irrationals with a prescribed irrationality measure function ψ , decorrelation can be quantified in terms of ψ^{-1} .

Keywords: Dirichlet divisor problem; Liouville numbers; diophantine approximation; autocorrelation; irrationality measure.

LISTA DE SÍMBOLOS

$:=$	Igualdade por definição. Denota que a expressão à esquerda é formalmente definida pela expressão à direita.
\implies	Implicação material. $A \implies B$ indica que a verdade da proposição A garante a verdade da proposição B .
\limsup	Limite superior de uma função real ou de uma sequência numérica.
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
i	Unidade imaginária ($i^2 = -1$).
π	Constante Pi, razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo ($\approx 3,14159$).
$\exp(x)$	Função exponencial de base e (equivalente a e^x).
$\log x$	Logaritmo natural de x (logaritmo na base e).
$\sin(x)$	Função seno. Analiticamente, corresponde à componente ímpar e imaginária da exponencial complexa e^{ix} , governando as oscilações de fase nas séries de Fourier e transformadas de Mellin.
$\cos(x)$	Função cosseno. Analiticamente, corresponde à componente par e real da exponencial complexa e^{ix} , definindo a fase trigonométrica principal na fórmula assintótica de Voronoï.
$O(\cdot)$	Notação assintótica “O grande” de Landau: $f(x) = O(g(x))$ implica que $ f(x) \leq C g(x) $ para alguma constante $C > 0$ e para todo x em um conjunto especificado.
$o(\cdot)$	Notação assintótica “o pequeno”. $f(x) = o(g(x))$ indica que, para x tomado em um conjunto especificado, $\lim f(x) / g(x) = 0$.
\ll	Notação de Vinogradov. Dizemos que $f(x) \ll g(x)$ é equivalente a $f(x) = O(g(x))$.
\ll_{ε}	Notação de Vinogradov com dependência. Indica que a constante implícita na desigualdade depende de ε .

$\Omega(\cdot)$	Notação Omega. $f(x) = \Omega(g(x))$ indica que $f(x)$ não é $o(g(x))$ (ou seja, $\limsup f(x) / g(x) > 0$).
$\Omega_+(\cdot)$	Notação Omega positivo. $f(x) = \Omega_+(g(x))$ indica que existem constantes $C > 0$ e uma sequência $x_k \rightarrow +\infty$ tais que $f(x_k) > Cg(x_k)$.
$\Omega_-(\cdot)$	Notação Omega negativo. $f(x) = \Omega_-(g(x))$ indica que existem constantes $C > 0$ e uma sequência $x_k \rightarrow +\infty$ tais que $f(x_k) < -Cg(x_k)$.
$\Omega_{\pm}(\cdot)$	Notação Omega oscilatória. $f(x) = \Omega_{\pm}(g(x))$ indica que $f(x)$ satisfaz simultaneamente $f(x) = \Omega_+(g(x))$ e $f(x) = \Omega_-(g(x))$, ou seja, excede $Cg(x)$ e é menor que $-Cg(x)$ para infinitos valores de x e algum $C > 0$.
\sim	Relação de equivalência assintótica. $f(x) \sim g(x)$ indica que $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ quando a variável tende a um limite especificado (frequentemente $+\infty$).
\approx	Aproximação numérica ou heurística. Diferencia-se da equivalência assintótica estrita (\sim) por indicar uma proximidade de valores em truncamentos decimais (ex: $\pi \approx 3,14159$) ou a representação do termo estrutural dominante de uma função isolado de seu respectivo termo de erro.
ε	Um número real positivo arbitrário.
δ	Um número real positivo arbitrário e geralmente pequeno (utilizado em deslocamentos de contorno no plano complexo e em limites de aproximação diofantina).
C	Uma constante, cuja magnitude pode ser especificada.
γ	Constante de Euler-Mascheroni ($\approx 0,57721$).
X	Limite superior de integração global e parâmetro de escala assintótica principal do problema.
N	Parâmetro de truncamento discreto, utilizado no corte da série da fórmula de Voronoï (definido na prova principal como $X^{3/4}$).
T	Parâmetro contínuo de corte. Atua tanto como a altura do contorno retangular na aplicação da fórmula de Perron, quanto como limite de restrição diagonal no plano (m,n) .
U	Parâmetro de limiar diofantino superior, introduzido para isolar as contribuições excepcionais de espaçamento na diagonal inferior da integral.
c	Abscissa de convergência absoluta ($c = 1 + \varepsilon$) que define a reta vertical principal na aplicação da transformada inversa de Mellin (Fórmula de Perron).

$\zeta(s)$	Função Zeta de Riemann, definida pela série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ para $\Re(s) > 1$ e estendida por continuação analítica.
$\Gamma(s)$	Função Gama, definida pela integral de Euler $\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ para $\Re(s) > 0$, que estende a função fatorial aos complexos, satisfazendo $\Gamma(n) = (n-1)!$.
\mathcal{C}	Contorno de integração retangular no plano complexo, com vértices em $c \pm iT$ e $-\delta \pm iT$, utilizado na aplicação da fórmula de Perron e do Teorema dos Resíduos para extrair o termo de erro $\Delta(x)$.
$Y_1(z)$	Função de Bessel de segunda espécie de ordem 1, caracterizada por seu decaimento oscilatório em amplitude para grandes argumentos, extraíndo a fase trigonométrica principal na fórmula de Voronoï.
$K_1(z)$	Função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem 1, caracterizada por seu decaimento exponencial rápido para grandes argumentos.
$\Re(s)$	Parte real de um número complexo s .
$\text{Res}_{s=s_0}$	Resíduo de uma função complexa no polo s_0 , associado ao coeficiente $(s - s_0)^{-1}$ em sua expansão de Laurent.
$f * g$	Convolução de Dirichlet entre duas funções aritméticas f e g , definida por $(f * g)(n) = \sum_{d n} f(d)g(n/d)$.
$\tau(n)$	Função divisora (número de divisores inteiros positivos de n).
$d_k(n)$	Função divisora generalizada (número de maneiras de escrever n como produto de k fatores). Note que $\tau(n) = d_2(n)$.
$r_2(n)$	Função soma de dois quadrados (número de maneiras de escrever n como soma de dois quadrados inteiros).
$\mu(n)$	Função de Möbius ($\mu(m)^2 = 1$ indica que m é um inteiro livre de quadrados).
$\Delta(x)$	Termo de erro na fórmula assintótica para as somas parciais da função divisora, cujo comportamento reflete flutuações da ordem de $x^{1/4}$.
$\Delta_k(x)$	Termo de erro no problema do divisor generalizado (associado à função $d_k(n)$).
$P(x)$	Termo de erro no problema do círculo de Gauss.
$\mathcal{I}_{\theta}(X)$	Integral de correlação definida como $\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx$, central para o estudo da decorrelação geométrica de termos de erro.

α	O ínfimo do problema do divisor de Dirichlet (o menor real positivo tal que $\Delta(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$).
φ	Função multiplicativa estritamente positiva que determina a constante exata da correlação assintótica quando θ é racional, sendo avaliada em potências de primos pela expressão $\varphi(p^k) = \frac{k+1}{p^k(1+p^{-3/2})} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}p^{-3/2}\right)$.
$\gcd(a, b)$	Maior divisor comum entre os inteiros a e b .
$\text{lcm}(a, b)$	Mínimo múltiplo comum entre os inteiros a e b .
$\Lambda(x)$	Função auxiliar contínua e limitada definida neste trabalho, composta por combinações de funções trigonométricas e potências inversas.
$F(x)$	Função normalizada associada ao erro do problema do divisor, definida como $x^{-1/4}\Delta(x)$, cuja distribuição limite contínua foi provada por Heath-Brown.
\mathbb{X}_m	Variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.
$F_{\mathbb{X}}$	Série trigonométrica aleatória associada ao modelo probabilístico de $F(x)$, gerada por variáveis independentes sobre inteiros livres de quadrados.
\mathbb{P}	Medida de probabilidade associada à distribuição limite contínua.
V	Parâmetro de limiar estrito utilizado na análise da transformada de Laplace para estimar as cotas de grandes desvios da distribuição.
β_1, β_2	Constantes reais positivas associadas às cotas exponenciais de decaimento para as caudas da distribuição de Montgomery.
θ	Número irracional positivo, a menos que especificado de outra forma.
β	Base de irracionalidade (medida fina da qualidade da aproximação racional para números de Liouville introduzida por Sondow).
τ_β	Número de Liouville com base de irracionalidade finita $\beta \geq 1$, construído via Teorema de Sondow.
$\psi(x)$	Função de medida de irracionalidade, atuando como uma fronteira limitante estrita para o decaimento da distância diofantina.
$\psi^{-1}(y)$	Função inversa da função de medida de irracionalidade.
η	Número real maior ou igual a 1 tal que $\eta + 1$ é uma medida de irracionalidade finita clássica.

$\ x\ $	Distância de x ao inteiro mais próximo, definida como $\min_{n \in \mathbb{Z}} x - n $.
$[x]$	Função piso (maior número inteiro menor ou igual a x).
a_k	O k -ésimo quociente parcial (inteiro positivo para $k \geq 1$) associado à expansão em fração contínua de um número real.
α_k	O k -ésimo quociente completo gerado recursivamente na construção da fração contínua, governando a dinâmica da aproximação.
$[a_0; a_1, \dots]$	Expansão de um número real em fração contínua simples (ou regular) ditada pelos quocientes parciais a_k .
$[a_0; a_1, \dots, a_k]$	O k -ésimo truncamento racional exato de uma expansão em fração contínua.
n_k/m_k	O k -ésimo convergente da expansão em fração contínua de θ , que fornece aproximações racionais ótimas.
F_k	O k -ésimo número da sequência de Fibonacci (com $F_0 = 0, F_1 = 1$), que atua como limitante inferior para o crescimento do denominador dos convergentes.
ϕ	A Razão Áurea ($\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$).

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	O Problema do Divisor de Dirichlet	14
1.2	Natureza Oscilatória, Segundo Momento e a Heurística Probabilística	15
1.3	Contexto das Correlações: Convoluções e Resultados Recentes	16
1.4	Números de Liouville, Números ψ -Aproximáveis e Resultado Principal	18
1.5	Estratégia de Demonstração	20
2	CONTEXTO SOBRE FRAÇÕES CONTÍNUAS	22
2.1	Expansão e Convergentes	22
2.2	Propriedades-Chave dos Convergentes	23
3	PRELIMINARES	24
3.1	A Fórmula Truncada de Voronoï	24
3.2	Lemas Auxiliares e Teorema de Jarník	25
4	DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL	32
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E QUESTÕES EM ABERTO	40
5.1	Questões em Aberto	40
	REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Problema do Divisor de Dirichlet

Um dos problemas em aberto mais antigos da teoria analítica dos números, que remonta a Dirichlet na primeira metade do século XIX, é o *problema do divisor de Dirichlet*. Aplicando o método da hipérbole de Dirichlet, obtém-se a fórmula assintótica para a função somatória da função divisora τ :

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x), \quad (1.1)$$

onde $\gamma \approx 0,57721$ é a constante de Euler-Mascheroni e Δ é o termo de erro. O problema busca o menor $\alpha > 0$ tal que $\Delta(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ seja satisfeito para todo $\varepsilon > 0$. Dirichlet (5) usou seu método da hipérbole para mostrar que $\alpha \leq 1/2$.

Ao longo do século XX, um esforço considerável foi dedicado a melhorar essa cota superior, tanto por meio de estimativas mais precisas para α quanto por meio de cotas aprimoradas para Δ . Voronoï (34, 35) estabeleceu $\Delta(x) = O(x^{1/3} \log x)$ em 1904, resultando em $\alpha \leq 1/3$. Um avanço ocorreu em 1916 quando Hardy (7), baseando-se no trabalho não publicado de Landau, demonstrou $\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/4})$, estabelecendo $1/4$ como a primeira cota inferior para α e levando à conjectura de que $\alpha = 1/4$.

Ainda no século XX, melhorias incrementais na cota superior para α foram feitas por van der Corput (31), Littlewood (23), Walfisz (36), Tsung-tao (30), Hua (10), Kolesnik (18), Vinogradov (32, 33), Iwaniec e Mozzochi (14). O recorde atual (Huxley, 2003 (11)) é $\alpha \leq 131/416$.

Embora a maior parte do trabalho tenha se concentrado em cotas superiores, progressos graduais também foram feitos nas cotas Ω_{-} e Ω_{+} para Δ desde o resultado de Hardy. Córradi e Kátai (2) melhoraram o limite Ω_{-} em 1967, enquanto Hafner (6) melhorou o limite Ω_{+} em 1981. Soundararajan (27) alcançou um refinamento importante em 2003:

$$\Delta(x) = \Omega \left((x \log x)^{1/4} \frac{(\log \log x)^{(3/4)(2^{4/3}-1)}}{(\log \log \log x)^{5/8}} \right).$$

Esse resultado, juntamente com a cota superior de Huxley, constitui um marco fundamental no progresso do problema no século XXI.

1.2 Natureza Oscilatória, Segundo Momento e a Heurística Probabilística

A natureza altamente oscilatória de $\Delta(x)$ sugere que uma análise puramente pontual, buscando determinar o ínfimo α do problema do divisor, captura apenas o caso extremal do comportamento da função, ignorando sua distribuição média. Essa oscilação é corroborada pela frequência de alternância de sinais da função: Heath-Brown e Tsang (9) estabeleceram que o número de mudanças de sinal de $\Delta(x)$ no intervalo $[1, X]$ é da ordem de X , confirmando que as flutuações não são anomalias isoladas, mas a regra dominante do comportamento da função.

Em seu trabalho seminal, Tong (29) refinou estimativas anteriores de Cramér (3) para o segundo momento de $\Delta(x)$ e estabeleceu a fórmula assintótica precisa:

$$\int_1^X \Delta(x)^2 dx = \frac{1}{6\pi^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\tau^2(n)}{n^{3/2}} \right) X^{3/2} + O(X \log^5 X). \quad (1.2)$$

Esse resultado é fundamental, pois ele fixa a ordem de magnitude das flutuações de $\Delta(x)$ em $x^{1/4}$ (já que a integral de seu quadrado cresce como $X^{3/2}$), consistente com a conjectura de que $\alpha = 1/4$.

A compreensão profunda dessa conjectura passa pela análise da fórmula truncada de Voronoï (cuja demonstração formal será apresentada na Seção 3.1). Segundo essa identidade, o comportamento de $\Delta(x)$ é governado pela seguinte soma trigonométrica:

$$\Delta(x) \approx \frac{x^{1/4}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4).$$

Historicamente, tentativas de modelar essas oscilações tratavam as fases trigonométricas como variáveis aleatórias de Rademacher em busca de convergência quase certa. No entanto, a abordagem moderna desse problema se dá através do estudo das *propriedades distribucionais* de $\Delta(x)$. Em um trabalho fundamental, Heath-Brown (8) demonstrou que a função normalizada $F(x) := x^{-1/4}\Delta(x)$ tem uma distribuição limite contínua.

A estrutura dessa distribuição limite é descrita por um modelo probabilístico derivado dos trabalhos de Heath-Brown e detalhado recentemente por Lamzouri (19). A justificação analítica para essa modelagem repousa no Teorema de Besicovitch, que estabelece que o conjunto das raízes quadradas $\{\sqrt{m}\}$, onde m varia sobre os inteiros positivos livres de quadrados, é linearmente independente sobre os racionais. Motivados por esse resultado, escrevemos $n = mr^2$, onde m é livre de quadrados ($\mu(m)^2 = 1$), o que nos permite substituir a parte fracionária dependente da variável contínua x por uma sequência de variáveis aleatórias. Seja $\{\mathbb{X}_m\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, indexadas pelos inteiros livres de quadrados. Define-se a série trigonométrica aleatória:

$$F_{\mathbb{X}} := \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/4}} \sum_{r \geq 1} \frac{\tau(mr^2)}{r^{3/2}} \cos(2\pi r \mathbb{X}_m - \pi/4),$$

que converge quase certamente pelo Teorema das Três Séries de Kolmogorov. O resultado de Heath-Brown garante que a função de densidade de probabilidade de $F_{\mathbb{X}}$ corresponde exatamente à densidade da distribuição limite de $F(x)$.

Enquanto a correspondência estrutural do modelo $F_{\mathbb{X}}$ deve-se a Heath-Brown, a análise refinada de seus valores extremos (grandes desvios) é fruto de um trabalho não publicado de Montgomery, posteriormente consolidado de forma independente por Lau (20). Estudando minuciosamente a transformada de Laplace de $F_{\mathbb{X}}$, Montgomery provou que o decaimento das caudas dessa distribuição limite obedece a cotas estritas. Especificamente, demonstrou-se que existem constantes positivas β_1 e β_2 tais que:

$$\exp\left(-\beta_1 V^4 (\log V)^{-3(2^{4/3}-1)}\right) \leq \mathbb{P}(F_{\mathbb{X}} > V) \leq \exp\left(-\beta_2 V^4 (\log V)^{-3(2^{4/3}-1)}\right),$$

valendo estimativas análogas para a cauda inferior $\mathbb{P}(F_{\mathbb{X}} < -V)$.

Portanto, o desafio central no tratamento moderno do problema do divisor de Dirichlet não reside em forçar limitantes pontuais via independência, mas sim em compreender a discrepância distribucional (o quão rápido a distribuição empírica de $F(x)$ converge para o modelo aleatório $F_{\mathbb{X}}$) e determinar em que medida os grandes desvios de $\Delta(x)$ refletem as cotas probabilísticas de Montgomery, uma vez que as dependências determinísticas profundas da sequência \sqrt{n} governam as perturbações da média.

1.3 Contexto das Correlações: Convoluções e Resultados Recentes

A motivação para o estudo da correlação entre termos de erro transcende o interesse intrínseco na estrutura de $\Delta(x)$. A investigação da integral

$$\mathcal{I}_{\theta}(X) = \int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx, \quad \theta > 0, \tag{1.3}$$

nasceu originalmente da necessidade de estabelecer resultados de oscilação (cotas Ω) para problemas de convolução entre funções aritméticas.

Em trabalhos recentes, como o de Aymone, Maiti, Ramaré e Srivastav (1), investiga-se o comportamento assintótico de somas parciais de convoluções de funções multiplicativas periódicas $f_1 * f_2$. Um passo crucial nessa análise é a identidade que expressa essas somas como uma combinação linear de termos de erro do problema do divisor, escalonados por divisores dos períodos M_1 e M_2 :

$$\sum_{n \leq x} (f_1 * f_2)(n) = \sum_{n|M_1 M_2} c_n \Delta(x/n), \tag{1.4}$$

onde os coeficientes c_n dependem das funções envolvidas. Para estabelecer resultados de oscilação (cotas Ω), calcula-se o segundo momento dessa expressão. Ao expandir o quadrado da soma em (1.4), surgem naturalmente os termos cruzados que determinam a

magnitude da oscilação:

$$\int_1^X \left| \sum_{n \leq x} (f_1 * f_2)(n) \right|^2 dx = \sum_{a,b|M_1 M_2} c_a \bar{c}_b \int_1^X \Delta(x/a) \Delta(x/b) dx. \quad (1.5)$$

Com uma mudança de variável $u = x/a$ e definindo $\theta = a/b$, as integrais do lado direito assumem a forma $\int \Delta(u) \Delta(\theta u) du$. Portanto, a análise da correlação entre $\Delta(x)$ e sua versão deslocada $\Delta(\theta x)$ não é apenas uma curiosidade isolada, mas o núcleo analítico necessário para compreender a variância dessas convoluções aritméticas. Embora no problema original θ seja racional, a investigação da natureza profunda dessa correlação levou os autores a estender o estudo para o caso em que θ é irracional, revelando o fenômeno de descorrelação que é o foco central deste trabalho.

Aymone et al. (1) mostram que o comportamento assintótico de $\mathcal{I}_\theta(X)$ varia conforme θ é racional, irracional com medida de irracionalidade finita ou um número de Liouville. Quando $\theta = a/b$ é racional, a correlação é não nula. De fato, como demonstrado em (1), a constante exata dessa correlação é $C = \frac{\zeta(3/2)^4}{6\pi^2 \zeta(3)}$, que corresponde ao próprio coeficiente principal de Tong (uma vez que $\sum_{n \geq 1} \frac{\tau^2(n)}{n^{3/2}} = \frac{\zeta^4(3/2)}{\zeta(3)}$), e φ é uma função multiplicativa estritamente positiva que, avaliada em potências de primos p^k , é dada por:

$$\varphi(p^k) = \frac{k+1}{p^k(1+p^{-3/2})} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} p^{-3/2} \right).$$

Com isso, temos a seguinte identidade limite:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X^{3/2}} \int_1^X \Delta(x) \Delta\left(\frac{ax}{b}\right) dx = \frac{\zeta(3/2)^4}{6\pi^2 \zeta(3) \sqrt{\text{gcd}(a,b)}} \varphi\left(\frac{\text{lcm}(a,b)}{\text{gcd}(a,b)}\right).$$

Nesse caso, a integral mantém a ordem de magnitude do resultado de Tong. Isso ocorre porque os termos da soma de Voronoï para $\Delta(x)$ e $\Delta(\theta x)$ permanecem comensuráveis, gerando uma contribuição não trivial dos termos diagonais da soma.

Porém, se $\theta > 0$ é irracional e tem medida de irracionalidade finita $\eta + 1$, significando que, para algum $C > 0$ (tipicamente $C = 1$) e para todo $\delta > 0$, $|n - m\theta| \geq Cm^{-(\eta+\delta)}$ vale para todos, exceto um número finito de racionais n/m , Aymone et al. demonstraram que ocorre descorrelação:

$$\int_1^X \Delta(x) \Delta(\theta x) dx \ll_\varepsilon X^{3/2-1/(18\eta)+\varepsilon}.$$

Para números de Liouville (irracionais que não admitem medida de irracionalidade finita e são bem aproximados por racionais), a integral satisfaz $o(X^{3/2})$. Como Khinchin (17) estabeleceu que *quase todos* os irracionais têm medida de irracionalidade 2, a integral em (1.3) descorrelaciona fortemente para quase todo $\theta > 0$, sendo os números de Liouville as exceções notáveis.

Portanto, quando θ é irracional, há sempre descorrelação. Entretanto, a velocidade com que essa descorrelação ocorre depende intrinsecamente da qualidade das aproximações

diofantinas de θ , isto é, de quão bem esse número irracional consegue imitar um racional. Desse modo, o estudo de (1.3) constitui uma extensão natural do trabalho de Tong para o caso $\theta \neq 1$, contribuindo para revelar a estrutura fina de $\Delta(x)$.

É válido mencionar que um estudo análogo de descorrelação foi investigado por Ivić e Zhai (12), embora em um contexto aritmético distinto. Em vez de analisarem a autocorrelação de $\Delta(x)$ sob uma perturbação do argumento (como em $\Delta(\theta x)$), esses autores estudaram a covariância entre termos de erro de diferentes hierarquias. Especificamente, eles estimaram integrais da forma

$$\int_1^X \Delta(x) \Delta_k(x) dx, \quad \text{para } k = 3, 4,$$

onde $\Delta_k(x)$ denota o termo de erro na fórmula assintótica para a função divisor generalizada $d_k(n)$ (gerada por $\zeta^k(s)$). Ivić e Zhai demonstraram que existe um cancelamento significativo entre as oscilações de $\Delta(x)$ e $\Delta_k(x)$, obtendo cotas superiores que são mais fortes do que aquelas decorrentes da aplicação direta da desigualdade de Cauchy-Schwarz aos respectivos segundos momentos. Enquanto o resultado deles estabelece uma independência num sentido probabilístico entre os problemas do divisor de diferentes ordens, o trabalho de Aymone et al. (e, conseqüentemente, este trabalho) foca na independência da função $\Delta(x)$ em relação a si mesma sob uma transformação de um escalar positivo.

1.4 Números de Liouville, Números ψ -Aproximáveis e Resultado Principal

Relembramos que um *número de Liouville* é um número irracional θ que não tem uma medida de irracionalidade finita, o que significa que para todo $\eta > 0$, existem infinitos racionais n/m que satisfazem

$$|n - m\theta| < \frac{1}{m^\eta}.$$

Este trabalho foca em melhorar a estimativa assintótica para (1.3) quando $\theta > 0$ pertence a classes específicas de números de Liouville caracterizadas por uma função crescente prescrita ψ , conforme definido abaixo.

Baseando-se no trabalho fundamental de Jarník (15) e nas extensões de Sondow (26), generalizamos o conceito de medida de irracionalidade para uma *função de medida de irracionalidade*. Jarník demonstrou que irracionais com uma função de medida prescrita ψ podem ser construídos sob condições apropriadas, enquanto Sondow introduziu a *base de irracionalidade* para quantificar a qualidade da aproximação racional para números de Liouville.

Observamos que a literatura não apresenta uma definição padrão única para função de medida de irracionalidade. Algumas fontes exigem que ψ seja uma função bivariada crescente em ambos os argumentos, enquanto Jarník (15) utiliza uma função univariada.

Adotamos esta última abordagem, alinhando-nos com o Teorema de Jarník (veja Teorema 3.2 abaixo) e com o conceito de base de irracionalidade de Sondow.

Para um irracional θ e um inteiro $m \geq 1$, defina $\|m\theta\| := \min_{n \in \mathbb{Z}} |m\theta - n|$ (a distância ao inteiro mais próximo). Dizemos que θ tem *função de medida de irracionalidade* ψ se não for *aproximável de ordem* ψ :

Definição 1.1. Seja $\psi : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ crescente. Um irracional θ é *aproximável de ordem* ψ (ψ -aproximável) se

$$\|m\theta\| < \frac{1}{\psi(m)}$$

para infinitos inteiros $m \geq 1$. Caso contrário, θ não é aproximável de ordem ψ .

O Teorema de Khinchin (17) afirma que se $x/\psi(x)$ decresce e $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{\psi(m)} < +\infty$, então quase todos os irracionais não são aproximáveis de ordem ψ (isto é, eles têm a função de medida de irracionalidade ψ). Nosso foco, contudo, recai sobre uma classe específica de irracionais cuja existência é garantida pela construção do Teorema de Jarník (ver Seção 3 – Preliminares). O resultado principal a seguir estabelece uma cota para a correlação aplicável a esses números.

Teorema 1.1. *Seja $\theta > 0$ irracional e $\psi : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ crescente com $\psi^{-1}(x) = O(x^{1/4})$. Suponha que exista $C > 0$ tal que*

$$\|m\theta\| \geq \frac{C}{\psi(m)}$$

para todos os inteiros $m \geq 1$ suficientemente grandes. Então

$$\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx \ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}}.$$

Como o Teorema de Khinchin (17) afirma que quase todos os irracionais têm medida de irracionalidade 2, fornecemos uma estimativa para o caso genérico, melhorando a decorrelação em (1) para $\eta = 1$:

Teorema 1.2. *Para um irracional $\theta > 0$ com medida de irracionalidade finita $\eta + 1 < 5/2$,*

$$\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx \ll_\varepsilon X^{3/2-1/8+\varepsilon}.$$

Enquanto o Teorema 1.1 aborda ψ geral, a imposição de que $\frac{1}{\psi(x)} = o(x^{-1})$ garante, via Teorema de Jarník, a existência de um irracional $\theta > 0$ aproximável de ordem ψ , mas que não é aproximável de ordem $C\psi$, qualquer que seja a constante $C > 1$.

Definição 1.2. Sondow (26) define a *base de irracionalidade* de um irracional θ como o menor $\beta \in [1, +\infty)$ que satisfaça a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|m\theta\| \geq \frac{1}{(\beta + \varepsilon)^m}$$

para todos os inteiros $m \geq 1$ suficientemente grandes. Pela Proposição 1 (26), $\tau_\beta = \theta$ com base de irracionalidade finita $\beta > 1$ é um número de Liouville, enquanto β inexistente ($\beta = +\infty$) define um *super Liouville*.

Exemplo 1.1. Em nosso contexto, tal τ_β é aproximável de ordem $\psi(x) = \beta^x$, mas não de ordem $(\beta + \varepsilon)^x$ para qualquer $\varepsilon > 0$. O Teorema 4 em (26) constrói números de Liouville explícitos: para um racional $\beta = a/b > 1$ na forma irredutível, seja

$$\tau_\beta = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^a} + \frac{1}{\beta^{a^2}} + \dots,$$

que não é aproximável de ordem β^x . Aplicando o Teorema 1.1 com $\psi(x) = (\beta + 1)^x$ e notando que $\psi^{-1}(x) = \log_{\beta+1} x = \frac{\log x}{\log(\beta+1)}$, obtemos para τ_β :

$$\int_1^X \Delta(x)\Delta(\tau_\beta x) dx \ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{(\log X)^{3/2-\varepsilon}}.$$

Esse limite é satisfeito para todos τ_β com base de irracionalidade finita $\beta \geq 1$, uma vez que τ_β não é aproximável de ordem $(\beta + 1)^x$.

Exemplo 1.2. Defina $\psi(x) = \exp(\exp x)$. Pelo Teorema de Jarník, existe um irracional $\theta > 0$ aproximável de ordem ψ , mas não de ordem 2ψ . Isso qualifica θ como um super Liouville (Exemplo 1.1), já que para qualquer $\beta > 1$,

$$\frac{1}{\psi(x)} = o(\beta^{-x}) \implies \|m\theta\| < \frac{1}{\beta^m}$$

para infinitos inteiros $m \geq 1$. O Teorema 1.1 com $\psi^{-1}(x) = \log \log x$ resulta em:

$$\int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx \ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{(\log \log X)^{3/2-\varepsilon}}.$$

1.5 Estratégia de Demonstração

Para avaliar (1.3), empregamos uma expressão truncada para Δ , cuja demonstração detalhada apresentamos na Seção 3.1 deste trabalho. De fato, para qualquer $N > 0$ e $\varepsilon > 0$,

$$\Delta(x) = \frac{x^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4) + R_N(x), \tag{1.6}$$

com termo residual $R_N(x) = O(x^\varepsilon + x^{1/2+\varepsilon}N^{-1/2})$.

Após expandir a integral, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz combinada com a estimativa de segundo momento de Tong para Δ (29) para limitar a soma dupla resultante, seguindo Aymone et al. (1). Por meio de uma seleção cuidadosa de parâmetros $N = N(X)$ e $T = T(X)$, dividimos a soma sobre os índices m, n usando um corte diagonal em T .

Complementando tal abordagem, a inovação-chave de nossa demonstração reside na exploração das propriedades diofantinas sutis de θ , particularmente por meio do critério de Legendre. Esse resultado fundamental fornece uma condição necessária para que aproximações racionais sejam convergentes de θ .

2 CONTEXTO SOBRE FRAÇÕES CONTÍNUAS

Os resultados fundamentais apresentados neste capítulo sobre frações contínuas podem ser consultados nas referências de Khinchin (16), Tenenbaum (28) e Martinez et al. (24).

2.1 Expansão e Convergentes

Seja θ um número irracional. Sua *expansão em fração contínua simples* (ou *regular*) é:

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

onde $a_0 = \lfloor \theta \rfloor$ e a_k (k -ésimo quociente parcial) é um inteiro positivo para $k \geq 1$. A sequência $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ é gerada recursivamente via:

$$\alpha_0 := \theta, \quad a_k := \lfloor \alpha_k \rfloor, \quad \alpha_{k+1} := \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad (k \geq 0),$$

onde α_k é o k -ésimo quociente completo. Além disso, a sequência dos quocientes parciais determina unicamente o número irracional¹ θ , por um argumento de interseção de intervalos encaixados como na Proposição 3.9. de (24, pp. 115–116).

Convergentes. O k -ésimo *convergente* de θ é o número racional:

$$\frac{n_k}{m_k} := [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

obtido truncando a expansão após k termos. Os numeradores n_k e os denominadores m_k satisfazem as relações de recorrência:

$$\begin{aligned} n_k &= a_k n_{k-1} + n_{k-2}, \\ m_k &= a_k m_{k-1} + m_{k-2} \end{aligned}$$

para $k \geq 2$, com condições iniciais:

$$n_0 = a_0, \quad n_1 = a_0 a_1 + 1, \quad m_0 = 1, \quad m_1 = a_1.$$

¹ Embora o escopo deste trabalho se restrinja a θ irracional, cabe observar que a expansão em fração contínua simples existe para qualquer número real. Especificamente, quando θ é racional, sua expansão, embora não seja única, é finita: $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k - 1, 1]$, e a construção da sequência de quocientes parciais decorre diretamente do algoritmo de divisão de Euclides, conforme apresentado em (24, pp. 109–110).

2.2 Propriedades-Chave dos Convergentes

Os convergentes $(n_k/m_k)_{k=0}^{\infty}$ fornecem aproximações racionais ótimas para θ :

Melhor Aproximação. Para qualquer $k \geq 1$,

$$\frac{1}{m_{k+1}m_k + m_k^2} < \left| \theta - \frac{n_k}{m_k} \right| < \frac{1}{m_{k+1}m_k}.$$

A quantidade $|m_k\theta - n_k|$ minimiza o erro de aproximação para todas as frações com denominador $\leq m_k$:

$$\|m_k\theta\| = |m_k\theta - n_k| = \min_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq m \leq m_k}} |m\theta - n|.$$

De fato, é mínimo mesmo entre os denominadores $< m_{k+1}$:

$$|m_k\theta - n_k| < |m\theta - n| \quad \text{para todo } 1 \leq m < m_{k+1}, \quad m \neq m_k.$$

Alternância de Sinais e Identidade do Determinante. A aproximação alterna em sinal:

$$\frac{n_{2k-2}}{m_{2k-2}} < \theta < \frac{n_{2k-1}}{m_{2k-1}}, \quad \frac{n_k}{m_k} - \frac{n_{k-1}}{m_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{m_k m_{k-1}} \quad (k \geq 1).$$

Da última igualdade:

$$n_k m_{k-1} - n_{k-1} m_k = (-1)^{k-1} \quad (k \geq 1),$$

implicando que $\gcd(m_k, n_k) = 1$.

Crescimento do Denominador. Os denominadores satisfazem $m_k \geq F_{k+1}$ (sequência de *Fibonacci*) para todo $k \geq 0$, o que implica crescimento exponencial (veja Observação 4.1 abaixo).

3 PRELIMINARES

3.1 A Fórmula Truncada de Voronoi

A avaliação da integral de correlação exige uma aproximação controlada para $\Delta(x)$. Utilizamos a fórmula truncada de Voronoi, cuja demonstração clássica baseia-se na fórmula de Perron e na equação funcional da função zeta de Riemann.

Teorema 3.1 (Fórmula Truncada de Voronoi). *Para $x \geq 2$, $N \geq 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, o termo de erro do problema do divisor satisfaz:*

$$\Delta(x) = \frac{x^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4) + O(x^\varepsilon + x^{1/2+\varepsilon}N^{-1/2}).$$

Demonstração. A demonstração detalhada, nos moldes descritos por Ivić (13, pp. 86–88), inicia-se com a aplicação da fórmula de Perron truncada. Para $c = 1 + \varepsilon$ e um parâmetro de corte $T = 2\pi\sqrt{Nx}$ (cujo balanceamento será justificado ao final para otimizar os erros acumulados), temos:

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right).$$

Consideramos o contorno de integração retangular \mathcal{C} com vértices em $c - iT$, $c + iT$, $-\delta + iT$ e $-\delta - iT$, onde $0 < \delta < 1/2$. A função integranda $f(s) = \zeta^2(s) \frac{x^s}{s}$ é meromorfa no interior desse contorno, possuindo um polo duplo em $s = 1$ e um polo simples em $s = 0$. Pelo Teorema dos Resíduos, a integral sobre o contorno fechado é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de $f(s)$.

Para o polo duplo em $s = 1$, utilizamos a expansão de Laurent $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \dots$, o que implica $\zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{s-1} + \dots$. A expansão de Taylor de $\frac{x^s}{s}$ em torno de $s = 1$ é dada por $x + x(\log x - 1)(s - 1) + \dots$. O resíduo é extraído identificando o coeficiente do termo $(s - 1)^{-1}$ no produto dessas expansões:

$$\text{Res}_{s=1} \left(\zeta^2(s) \frac{x^s}{s} \right) = x \log x + (2\gamma - 1)x.$$

Para o polo simples em $s = 0$, usamos o valor analítico clássico $\zeta(0) = -1/2$:

$$\text{Res}_{s=0} \left(\zeta^2(s) \frac{x^s}{s} \right) = \zeta^2(0)x^0 = \frac{1}{4}.$$

Lembrando que o termo de erro é definido como $\Delta(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) - (x \log x + (2\gamma - 1)x)$, o Teorema dos Resíduos nos permite reescrever a equação inicial isolando $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} + \int_{-\delta+iT}^{c+iT} - \int_{c-iT}^{-\delta-iT} \right) \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right).$$

O termo constante $1/4$ é $O(1)$ e será absorvido no erro assintótico final. O comportamento oscilatório de $\Delta(x)$ passa a ser dominado pela integral na reta vertical $\Re(s) = -\delta$, enquanto as integrais nos segmentos horizontais $[-\delta \pm iT, c \pm iT]$ são controladas via princípio de Phragmén-Lindelöf. Utilizando estimativas clássicas de convexidade para a função zeta, que garantem $\zeta(\sigma + iT) \ll T^{(1-\sigma)/2+\varepsilon}$, a contribuição das retas horizontais é englobada pelo termo residual $O(x^{1+\varepsilon}/T)$.

Na reta vertical $\Re(s) = -\delta$, aplicamos a equação funcional da função zeta na sua forma assimétrica $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$. Elevando-a ao quadrado e inserindo a série de Dirichlet $\zeta^2(1-s) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) n^{s-1}$, a integral transforma-se numa série infinita de transformadas inversas de Mellin. É precisamente neste passo de inversão que as funções de Bessel emergem. Pela teoria clássica de transformadas integrais, a avaliação do núcleo envolvendo os fatores gama e trigonométricos revela a identidade exata para $y > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{2^{2s} \pi^{2s-2}}{s} \sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma^2(1-s) y^s ds = -\frac{2}{\pi \sqrt{y}} \left(K_1(4\pi \sqrt{y}) + \frac{\pi}{2} Y_1(4\pi \sqrt{y}) \right).$$

Substituindo $y = nx$, a integração não truncada sobre a reta vertical completa resulta na identidade exata de Voronoï:

$$\Delta(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left(K_1(4\pi \sqrt{nx}) + \frac{\pi}{2} Y_1(4\pi \sqrt{nx}) \right).$$

Para prosseguir em direção à fórmula truncada sob o parâmetro de corte N , limitamos a série e exploramos o comportamento assintótico dessas funções para grandes argumentos. A função modificada decai exponencialmente ($K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$) e torna-se irrelevante para o cômputo do termo principal de erro. Já a função $Y_1(z)$ exibe decaimento oscilatório em amplitude:

$$Y_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2}).$$

Substituindo $z = 4\pi \sqrt{nx}$ e aplicando a identidade trigonométrica $\sin(t - 3\pi/4) = -\cos(t - \pi/4)$, a componente associada a Y_1 extrai exatamente a fase trigonométrica principal da fórmula. Finalmente, truncando a soma na altura $n = N$, lembramos que a escolha inicial $T = 2\pi \sqrt{Nx}$ foi desenhada justamente para garantir a otimização simultânea dos erros acumulados das integrais horizontais e da cauda truncada da série de Bessel. Esse balanceamento confina o termo residual a $R_N(x) = O(x^\varepsilon + x^{1/2+\varepsilon} N^{-1/2})$, completando a prova. \square

3.2 Lemas Auxiliares e Teorema de Jarník

Apresentamos um lema, originalmente devido a Legendre, que estabelece uma condição necessária para que um número racional seja um convergente de um número irracional θ (a demonstração pode ser encontrada como o Teorema 3.18. em (24, p. 121)). Em seguida,

demonstramos lemas adicionais de (1) relativos a estimativas para uma integral e uma função que desempenharão um papel em nossa demonstração. Finalmente, demonstramos o Teorema de Jarník em detalhes.

Lema 3.1. (*Crítério de Legendre, (22)*) *Seja θ irracional e seja n/m racional que satisfaz*

$$|n - m\theta| < \frac{1}{2m},$$

Então n/m é um convergente da expansão em fração contínua de θ .

Adotando a notação usada em (1), demonstramos os seguintes lemas:

Lema 3.2. (*como Lema 4.1 em (1)*) *Seja $a > 0$. Então*

$$\int x^2 \cos(ax) dx = x^2 \frac{\sin(ax)}{a} + 2x \frac{\cos(ax)}{a^2} - 2 \frac{\sin(ax)}{a^3} + C,$$

onde C é uma constante. Além disso, para $X \geq 1$,

$$\int_1^X x^2 \sin(ax) dx \ll \frac{X^2}{a}, \quad \int_1^X x^2 \cos(ax) dx \ll \frac{X^2}{a}.$$

Demonstração do Lema 3.2. Primeiramente, calculamos a integral indefinida $I = \int x^2 \cos(ax) dx$ aplicando integração por partes. Sejam:

$$u = x^2 \implies du = 2x dx,$$

$$dv = \cos(ax) dx \implies v = \frac{1}{a} \sin(ax).$$

Aplicando a fórmula $\int u dv = uv - \int v du$, temos:

$$I = \frac{x^2}{a} \sin(ax) - \frac{2}{a} \int x \sin(ax) dx. \quad (3.1)$$

Para a integral restante $\int x \sin(ax) dx$, aplicamos novamente integração por partes. Sejam:

$$U = x \implies dU = dx,$$

$$dV = \sin(ax) dx \implies V = -\frac{1}{a} \cos(ax).$$

Assim:

$$\int x \sin(ax) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax)\right) dx = -\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax).$$

Substituindo esse resultado em (3.1):

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{a} \sin(ax) - \frac{2}{a} \left(-\frac{x}{a} \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)\right) + C \\ &= \frac{x^2 \sin(ax)}{a} + \frac{2x \cos(ax)}{a^2} - \frac{2 \sin(ax)}{a^3} + C. \end{aligned}$$

Isto estabelece a primeira parte do lema. Para as estimativas assintóticas, consideramos a integral definida no intervalo $[1, X]$. Seja $F(x)$ a primitiva encontrada acima (com $C = 0$). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_1^X x^2 \cos(ax) dx = F(X) - F(1).$$

Analisamos a ordem de magnitude de $F(X)$ para $X \geq 1$ e $a > 0$ fixo. Temos:

$$|F(X)| \leq \left| \frac{X^2 \sin(aX)}{a} \right| + \left| \frac{2X \cos(aX)}{a^2} \right| + \left| \frac{2 \sin(aX)}{a^3} \right|.$$

Usando o fato de que $|\sin(\cdot)| \leq 1$ e $|\cos(\cdot)| \leq 1$:

$$|F(X)| \leq \frac{X^2}{a} + \frac{2X}{a^2} + \frac{2}{a^3}.$$

Para X grande, o termo dominante é X^2/a . Assim, $F(X) \ll X^2/a$. Como $F(1)$ é uma constante (em relação a X), temos:

$$\int_1^X x^2 \cos(ax) dx \ll \frac{X^2}{a}.$$

A demonstração para $\int_1^X x^2 \sin(ax) dx$ segue passos análogos (iniciando com $dv = \sin(ax)dx$), resultando em uma primitiva cuja ordem de magnitude também é dominada pelo termo x^2/a . \square

Lema 3.3. (parte da Proposição 1.1 em (1)) A função $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{se } x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{x} + 2\frac{\cos(x)}{x^2} - 2\frac{\sin(x)}{x^3}, & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$

é contínua e limitada. Além disso, para $X \geq 1$ e $a > 0$ fixo,

$$\Lambda(a\sqrt{X}) = \frac{1}{X^{3/2}} \int_1^{\sqrt{X}} x^2 \cos(ax) dx + \frac{\Lambda(a)}{X^{3/2}}.$$

Demonstração do Lema 3.3. Dividimos a demonstração em três partes: a continuidade, a limitação e a identidade integral.

1. Continuidade em $x = 0$.

Para $x \neq 0$, a função $\Lambda(x)$ é composta por funções elementares contínuas. Precisamos verificar se o limite quando $x \rightarrow 0$ coincide com o valor definido $\Lambda(0) = 1/3$. Escrevemos a expressão para $x \neq 0$ com denominador comum:

$$\Lambda(x) = \frac{x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}.$$

Utilizamos as expansões de Taylor de $\sin(x)$ e $\cos(x)$ em torno de 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6).$$

Substituindo no numerador:

$$\begin{aligned}x^2 \sin(x) &= x^3 - \frac{x^5}{6} + O(x^7), \\2x \cos(x) &= 2x - x^3 + \frac{x^5}{12} + O(x^7), \\-2 \sin(x) &= -2x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{60} + O(x^7).\end{aligned}$$

Somando os termos, os coeficientes de ordem x e x^3 se cancelam ou se combinam:

- Coeficiente de x : $0 + 2 - 2 = 0$.
- Coeficiente de x^3 : $1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Portanto, o numerador comporta-se como $\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Como o limite é igual a $\Lambda(0)$, a função é contínua em $x = 0$ e, conseqüentemente, em todo \mathbb{R} .

2. Limitação.

Como Λ é contínua em \mathbb{R} , ela é limitada em qualquer intervalo fechado e limitado, como $[-1, 1]$. Para $|x| \geq 1$, temos:

$$|\Lambda(x)| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| + \left| \frac{2 \cos x}{x^2} \right| + \left| \frac{2 \sin x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{|x|} + \frac{2}{|x|^2} + \frac{2}{|x|^3}.$$

Como o lado direito tende a 0 quando $|x| \rightarrow +\infty$, a função é limitada no infinito. Logo, Λ é limitada globalmente.

3. Identidade Integral.

Considere a integral indefinida $I = \int u^2 \cos(au) du$. Utilizando o Lema 3.2 (que resulta de integração por partes repetida), temos a primitiva:

$$F(u) := \int u^2 \cos(au) du = \frac{u^2 \sin(au)}{a} + \frac{2u \cos(au)}{a^2} - \frac{2 \sin(au)}{a^3}.$$

Note que, para $y \neq 0$, definimos $\Lambda(y) = \frac{\sin y}{y} + \frac{2 \cos y}{y^2} - \frac{2 \sin y}{y^3}$. Multiplicando por y^3/a^3 , temos:

$$\frac{y^3}{a^3} \Lambda(y) = \frac{1}{a^3} (y^2 \sin y + 2y \cos y - 2 \sin y).$$

Fazendo $y = au$, temos $y^3/a^3 = u^3$. Logo:

$$u^3 \Lambda(au) = \frac{1}{a^3} (a^2 u^2 \sin(au) + 2au \cos(au) - 2 \sin(au)) = F(u).$$

Portanto, $F(u) = u^3 \Lambda(au)$.

Calculando a integral definida de 1 a \sqrt{X} :

$$\int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(au) du = F(\sqrt{X}) - F(1) = (\sqrt{X})^3 \Lambda(a\sqrt{X}) - (1)^3 \Lambda(a \cdot 1).$$

Ou seja:

$$\int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(au) du = X^{3/2} \Lambda(a\sqrt{X}) - \Lambda(a).$$

Dividindo ambos os lados por $X^{3/2}$ e rearranjando os termos:

$$\frac{1}{X^{3/2}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(au) du = \Lambda(a\sqrt{X}) - \frac{\Lambda(a)}{X^{3/2}},$$

o que implica

$$\Lambda(a\sqrt{X}) = \frac{1}{X^{3/2}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(au) du + \frac{\Lambda(a)}{X^{3/2}}.$$

Isso conclui a demonstração. \square

Teorema 3.2. (*Jarník; Satz 6 em (15)*) *Seja $\psi : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ crescente com $\frac{1}{\psi(x)} = o(x^{-1})$. Então existe um irracional $\theta > 0$ que é aproximável de ordem ψ , mas que não é aproximável de ordem $C\psi$, qualquer que seja a constante $C > 1$.*

Demonstração do Teorema 3.2. O objetivo é construir um número irracional θ através de sua expansão em fração contínua simples $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ de tal modo que os convergentes n_k/m_k satisfaçam as condições de aproximação prescritas por ψ .

Recordemos que m_k é determinado recursivamente por $m_k = a_k m_{k-1} + m_{k-2}$. A condição dada sobre ψ é que $\frac{1}{\psi(x)} = o(x^{-1})$, o que implica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty. \quad (3.2)$$

Construção indutiva dos quocientes parciais:

Construímos a sequência de quocientes parciais $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ indutivamente. Seja $a_0 = 0$. Como a função ψ é crescente e satisfaz (3.2), podemos escolher a_1 suficientemente grande tal que $m_1 = a_1 > 1$ e $\frac{\psi(m_1)}{m_1} > 4$.

Suponha que a_0, \dots, a_k já foram determinados (e, portanto, m_0, \dots, m_k estão fixados). Para determinar a_{k+1} , definimos explicitamente:

$$a_{k+1} := \left\lfloor \frac{\psi(m_k)}{m_k} \right\rfloor + 1. \quad (3.3)$$

Com essa escolha, garantimos trivialmente que $a_{k+1} > \frac{\psi(m_k)}{m_k}$. Além disso, como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\psi(m_k)}{m_k} = +\infty$ (devido ao crescimento exponencial dos denominadores), a sequência está bem definida e a_{k+1} é um inteiro positivo. Dessa forma, construímos o irracional $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ de maneira totalmente independente de qualquer constante C .

Parte 1: Verificação de que θ é aproximável de ordem ψ .

Das propriedades padrão das frações contínuas, sabemos que:

$$\|m_k \theta\| = |m_k \theta - n_k| < \frac{1}{m_{k+1}} = \frac{1}{a_{k+1} m_k + m_{k-1}} < \frac{1}{a_{k+1} m_k}.$$

Utilizando o fato de que $a_{k+1} > \frac{\psi(m_k)}{m_k}$, temos $a_{k+1}m_k > \psi(m_k)$. Portanto:

$$\|m_k\theta\| < \frac{1}{\psi(m_k)}.$$

Como isso vale para todo k , existem infinitos inteiros m (precisamente os denominadores m_k dos convergentes) que satisfazem a desigualdade $\|m\theta\| < \frac{1}{\psi(m)}$. Logo, θ é aproximável de ordem ψ .

Parte 2: Verificação de que θ não é aproximável de ordem $C\psi$ para qualquer $C > 1$.

Devemos mostrar que, para qualquer constante $C > 1$ fixada e m suficientemente grande, a desigualdade

$$\|m\theta\| < \frac{1}{C\psi(m)} \quad (3.4)$$

tem apenas um número finito de soluções inteiras. Analisamos dois casos para m :

Caso (i): $m = m_k$ para algum k suficientemente grande.

Das propriedades das frações contínuas, temos:

$$\|m_k\theta\| = |m_k\theta - n_k| > \frac{1}{m_{k+1} + m_k} = \frac{1}{(a_{k+1} + 1)m_k + m_{k-1}}.$$

Como $m_{k-1} < m_k$ e $a_{k+1} \geq 1$, obtemos:

$$\|m_k\theta\| > \frac{1}{(a_{k+1} + 2)m_k}.$$

Pela nossa construção (3.3), $a_{k+1} \leq \frac{\psi(m_k)}{m_k} + 1$, donde:

$$(a_{k+1} + 2)m_k \leq \psi(m_k) + 3m_k.$$

Dado que $\frac{\psi(m_k)}{m_k} \rightarrow +\infty$, para k suficientemente grande (dependendo da escolha de C), teremos $3m_k < (C - 1)\psi(m_k)$. Somando $\psi(m_k)$ em ambos os lados, obtemos:

$$\psi(m_k) + 3m_k < C\psi(m_k).$$

Substituindo essa cota, chegamos a:

$$\|m_k\theta\| > \frac{1}{\psi(m_k) + 3m_k} > \frac{1}{C\psi(m_k)}.$$

Logo, a desigualdade (3.4) falha para $m = m_k$ quando k é grande.

Caso (ii): $m_k < m < m_{k+1}$ para algum k suficientemente grande.

Pela propriedade de melhor aproximação dos convergentes, para qualquer inteiro m estritamente entre m_k e m_{k+1} , vale:

$$\|m\theta\| \geq \|m_k\theta\|.$$

Além disso, como ψ é crescente e $m > m_k$, temos $\psi(m) \geq \psi(m_k)$, donde:

$$\frac{1}{\psi(m)} \leq \frac{1}{\psi(m_k)}.$$

Suponha, por absurdo, que $\|m\theta\| < \frac{1}{C\psi(m)}$. Então:

$$\|m_k\theta\| \leq \|m\theta\| < \frac{1}{C\psi(m)} \leq \frac{1}{C\psi(m_k)}.$$

Mas já demonstramos no Caso (i) que, para k suficientemente grande (dependendo apenas de C), vale $\|m_k\theta\| > \frac{1}{C\psi(m_k)}$. Portanto, obtemos uma contradição.

Conclusão:

Combinando os Casos (i) e (ii), concluímos que existem apenas finitas soluções de (3.4). Ou seja, θ não é aproximável de ordem $C\psi$, qualquer que seja a constante $C > 1$. Isto completa a demonstração. \square

4 DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO PRINCIPAL

Apresentamos agora a demonstração do nosso resultado principal, o Teorema 1.1:

Demonstração do Teorema 1.1. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, cuja dependência será omitida na notação das expressões subsequentes, e $N > 0$, parâmetro a ser selecionado posteriormente. Para $1 \leq x \leq X$, temos, pela fórmula de Voronoï para Δ em (1.6):

$$\Delta(x) = Q_N(x) + R_N(x),$$

onde

$$Q_N(x) = \frac{x^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \leq N} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4),$$

e

$$R_N(x) = O(x^\varepsilon + x^{1/2+\varepsilon}N^{-1/2}).$$

Agora, expandimos a integral em (1.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\theta(X) &= \int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx \\ &= \int_1^X Q_N(x)Q_N(\theta x) dx + \int_1^X \Delta(x)R_N(\theta x) dx \\ &\quad + \int_1^X R_N(x)\Delta(\theta x) dx - \int_1^X R_N(x)R_N(\theta x) dx \\ &= \int_1^X Q_N(x)Q_N(\theta x) dx \\ &\quad + O(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1}). \end{aligned}$$

onde as últimas três integrais da primeira igualdade são estimadas usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e $\int_1^X \Delta(x)^2 dx \ll X^{3/2}$ (veja o resultado de Tong em (29)). Em seguida, realizamos a mudança de variável $u = x^{1/2}$, resultando no seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\theta(X) &= \int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(4\pi\sqrt{nu} - \pi/4) \cos(4\pi\sqrt{m\theta u} - \pi/4) du \\ &\quad + O(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1}). \end{aligned}$$

Aplicamos agora a fórmula de prostaférese $2 \cos(u) \cos(v) = \sin(u + v) + \cos(u - v)$ para expressar a integral como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \sin\left(4\pi\left(\sqrt{m\theta} + \sqrt{n}\right)u\right) du \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos\left(4\pi\left(\sqrt{m\theta} - \sqrt{n}\right)u\right) du \\ & + O\left(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1}\right). \end{aligned}$$

Em seguida, invocamos o Lema 3.2 e usamos $\tau(m) = o(m^\varepsilon) = o(N^\varepsilon)$ (veja Montgomery e Vaughan (25, pp. 55–56)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \sin\left(4\pi\left(\sqrt{m\theta} + \sqrt{n}\right)u\right) du \\ & \ll XN^\varepsilon \sum_{m,n \leq N} \frac{1}{(mn)^{3/4}\left(\sqrt{m\theta} + \sqrt{n}\right)} \\ & \ll XN^\varepsilon \sum_{m,n \leq N} \frac{1}{m^{5/4}n^{3/4}} \\ & \ll XN^\varepsilon. \end{aligned}$$

Então, utilizando os Lemas 3.2 e 3.3, definindo $a_{m,n} := 4\pi\left(\sqrt{m\theta} - \sqrt{n}\right)$, simplificamos a expressão assintótica para $\mathcal{I}_\theta(X)$ como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\theta(X) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \int_1^{\sqrt{X}} u^2 \cos(a_{m,n}u) du \\ & + O\left(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1} + XN^\varepsilon\right) \\ & = \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda\left(a_{m,n}\sqrt{X}\right) \\ & + O\left(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1} + XN^\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Se definirmos:

$$J_\theta(X) := \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda\left(a_{m,n}\sqrt{X}\right),$$

alcançamos uma expressão final para $\mathcal{I}_\theta(X)$ como segue:

$$\mathcal{I}_\theta(X) = J_\theta(X) + \tilde{R}_N(X),$$

onde

$$\tilde{R}_N(X) = O\left(X^{5/4+\varepsilon} + X^{7/4+\varepsilon}N^{-1/2} + X^{2+\varepsilon}N^{-1} + XN^\varepsilon\right).$$

Para estimar $\mathcal{I}_\theta(X)$, definimos os parâmetros $N := X^{3/4}$ e

$$T := \frac{\pi}{\sqrt{\theta}} \sqrt{\frac{X}{\psi^{-1}(X^{1/4})}},$$

então particionamos $J_\theta(X)$ restringindo aos termos onde $m, n \leq N$ satisfazem $|a_{m,n}\sqrt{X}| \leq T$:

$$J_\theta(X) = \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{\substack{m,n \leq N \\ |a_{m,n}\sqrt{X}| \leq T}} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda(a_{m,n}\sqrt{X}) \\ + \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{\substack{m,n \leq N \\ |a_{m,n}\sqrt{X}| > T}} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda(a_{m,n}\sqrt{X}).$$

Para o termo de erro $\tilde{R}_N(X)$, temos a seguinte estimativa:

$$\tilde{R}_N(X) \ll X^{11/8+\varepsilon}. \quad (4.1)$$

Em seguida, consideramos os termos da *diagonal superior*, que são dados por:

$$D^u(X) := \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{\substack{m,n \leq N \\ |a_{m,n}\sqrt{X}| > T}} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda(a_{m,n}\sqrt{X}). \quad (4.2)$$

Usamos o fato de que Λ é limitada e $|\Lambda(u)| \ll |u|^{-1}$ para limitar os termos. Portanto, obtemos o seguinte:

$$D^u(X) \ll \frac{X^{3/2}}{T} \sum_{m,n \leq N} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}}.$$

Isso simplifica para

$$D^u(X) \ll X \cdot \psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2} \left(\sum_{m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \right)^2.$$

Para o próximo passo, definimos a função $A(t)$ como

$$A(t) := \sum_{m \leq t} \tau(m) \quad (t \geq 1).$$

Aplicamos agora a integral de Riemann-Stieltjes juntamente com a identidade de (1.1) para expandir a seguinte igualdade:

$$\sum_{m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} = \int_1^N \frac{1}{t^{3/4}} dA(t).$$

Usando $\Delta(x) \ll x$, podemos limitar assintoticamente a integral acima como segue:

$$N^{1/4} \log N + (2\gamma - 1)N^{1/4} + \frac{\Delta(N)}{N^{3/4}} + \frac{3}{4} \int_1^N \left(\frac{\log t}{t^{3/4}} + \frac{2\gamma - 1}{t^{3/4}} + \frac{\Delta(t)}{t^{7/4}} \right) dt.$$

Isso simplifica para

$$\int_1^N \frac{1}{t^{3/4}} dA(t) \ll N^{1/4} \log N.$$

Portanto, concluímos que

$$D^u(X) \ll X^{11/8} (\log X)^2 \psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2}.$$

A seguir, para os termos da *diagonal inferior*, definimos:

$$D^l(X) := \frac{X^{3/2}}{2\pi^2} \sum_{\substack{m,n \leq N \\ |a_{m,n}\sqrt{X}| \leq T}} \frac{\tau(m)\tau(n)}{(mn)^{3/4}} \Lambda(a_{m,n}\sqrt{X}). \quad (4.3)$$

Visto que $\psi^{-1}(X^{1/4}) \geq 2$ para $X \geq 1$ suficientemente grande (pois a função é crescente e ilimitada), e $|n - m\theta| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\psi^{-1}(X^{1/4})}} + \frac{1}{2}$ sempre que $|a_{m,n}\sqrt{X}| \leq T$, definimos:

$$U := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\psi^{-1}(X^{1/4})}} + \frac{1}{2}.$$

Usando esta definição, estimamos $D^l(X)$ como segue:

$$D^l(X) \ll X^{3/2} \sum_{m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n - m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n}\sqrt{X})|.$$

Particionamos agora a soma de acordo com o valor de U . Especificamente, observamos que $U < 1$ se e somente se $m < \psi^{-1}(X^{1/4})$. Para os termos onde $U < 1$, podemos escrever sua contribuição como:

$$D_{U < 1}^l(X) := X^{3/2} \sum_{m < \psi^{-1}(X^{1/4})} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n - m\theta| \leq U < 1}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n}\sqrt{X})|.$$

Usando $|\Lambda(u)| \ll |u|^{-1}$, isto pode ser estimado como:

$$D_{U < 1}^l(X) \ll XN^\varepsilon \sum_{m < \psi^{-1}(X^{1/4})} \frac{1}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n - m\theta| \leq U < 1}} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{m\theta}}{n^{3/4} |n - m\theta|}.$$

Além disso, empregando as propriedades diofantinas de θ e notando que $U \ll \sqrt{m}$, observamos que:

$$|n - m\theta| \geq \|m\theta\| \geq \frac{C}{\psi(m)},$$

e

$$\frac{m\theta}{2} \leq n \ll m$$

para todos exceto um número finito de m e n ; para os m, n excepcionais, a soma acima é $O(X^{1+\varepsilon})$. Notamos que para termos não excepcionais temos $\psi(m) < X^{1/4}$, pois ψ é crescente, o que dá:

$$D_{U < 1}^l(X) \ll XN^\varepsilon \sum_{m < \psi^{-1}(X^{1/4})} \frac{1}{m} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n - m\theta| \leq U < 1}} \psi(m) + X^{1+\varepsilon},$$

e concluímos que:

$$D_{U < 1}^l(X) \ll X^{5/4+\varepsilon} \log(\psi^{-1}(X^{1/4})).$$

Finalmente, para os termos na diagonal inferior onde $U \geq 1$, dividimos a soma entre os termos pertencentes à seqüência de convergentes de θ e naqueles que não pertencem:

$$D_{U \geq 1}^l(X) := X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n-m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})|.$$

Dividimos isso em duas partes:

$$\begin{aligned} D_{U \geq 1}^l(X) &= X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n-m\theta| < \frac{1}{2m}}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\ &\quad + X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ \frac{1}{2m} \leq |n-m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})|. \end{aligned}$$

Observação 4.1. Seja $\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ a expansão em fração contínua simples de θ , e seja $(n_k/m_k)_{k=0}^\infty$ seus convergentes. A relação de recorrência $m_{k+1} = a_{k+1}m_k + m_{k-1}$ implica por indução que $m_k \geq F_{k+1}$, onde F_{k+1} é o $(k+1)$ -ésimo número de Fibonacci. Aplicando-se a fórmula de Binet, $F_k = \frac{\phi^k - (-\phi)^{-k}}{\sqrt{5}}$ com $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, obtemos a cota inferior exponencial $m_k \geq \phi^{k-1}$ para todo $k \geq 1$.

Para os termos que satisfazem $|n - m\theta| < \frac{1}{2m}$ (correspondentes à primeira parcela da soma), aplicamos o Lema 3.1. Esse lema estabelece que n/m deve ser um convergente de θ , implicando que o denominador m cresce pelo menos exponencialmente. Usando o fato de que Λ é limitada (do Lema 3.3), $\tau(m) = o(m^\varepsilon)$ e a cota inferior exponencial $m_k \geq \phi^{k-1}$ (da Observação 4.1), derivamos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} &X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n-m\theta| < \frac{1}{2m}}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\ &\ll X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m_k \leq N} \frac{1}{m_k^{3/2-\varepsilon}} \ll X^{3/2} \sum_{\phi^{k-1} \geq \psi^{-1}(X^{1/4})} \phi^{-(3/2-\varepsilon)(k-1)} \\ &\ll \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Em seguida, para os termos restantes tais que $\frac{1}{2m} \leq |n - m\theta| \leq U$, correspondentes à última parcela na expressão para $D_{U \geq 1}^l(X)$:

$$S(X) := X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ \frac{1}{2m} \leq |n-m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})|.$$

Esta expressão divide-se em duas partes:

$$\begin{aligned}
 S(X) &= X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ \frac{1}{2m} \leq |n-m\theta| < 1}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\
 &+ X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ 1 \leq |n-m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})|.
 \end{aligned}$$

Para a última parcela em $S(X)$, usamos $U \ll \frac{\sqrt{m}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2}}$ e $|\Lambda(u)| \ll |u|^{-1}$, resultando no seguinte:

$$\begin{aligned}
 &X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ 1 \leq |n-m\theta| \leq U}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\
 &\ll \frac{XN^\varepsilon}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2}} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{1}{\sqrt{m}} \\
 &\ll \frac{X^{1+\varepsilon}}{\psi^{-1}(X^{1/4})}.
 \end{aligned}$$

Agora, para a primeira parcela em $S(X)$, particionamos cuidadosamente a soma sobre m em dois casos: $X^{1/4} \leq m \leq N$ e $\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m < X^{1/4}$:

$$\begin{aligned}
 &X^{3/2} \sum_{X^{1/4} \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ \frac{1}{2m} \leq |n-m\theta| < 1}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\
 &\ll X^{3/2} N^\varepsilon \sum_{X^{1/4} \leq m \leq N} \frac{1}{m^{3/2}} \\
 &\ll X^{11/8+\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Nesta etapa, usamos o fato de que Λ é limitada. Finalmente, para os termos onde $\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m < X^{1/4}$, aplicamos novamente o limite $|\Lambda(u)| \ll |u|^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 &X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m < X^{1/4}} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ \frac{1}{2m} \leq |n-m\theta| < 1}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n} \sqrt{X})| \\
 &\ll XN^\varepsilon \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m < X^{1/4}} 1 \\
 &\ll X^{5/4+\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Coletando as estimativas para $S(X)$, obtemos:

$$S(X) \ll \frac{X^{1+\varepsilon}}{\psi^{-1}(X^{1/4})} + X^{11/8+\varepsilon}.$$

Combinando as estimativas para $D^l(X)$, concluímos:

$$D_{U \geq 1}^l(X) \ll \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}} + X^{11/8+\varepsilon}$$

e

$$D_{U < 1}^l(X) \ll X^{5/4+\varepsilon} \log(\psi^{-1}(X^{1/4})).$$

Assim, a estimativa final para os termos da diagonal inferior em (4.3) é

$$D^l(X) \ll \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}} + X^{11/8+\varepsilon} + X^{5/4+\varepsilon} \log(\psi^{-1}(X^{1/4})).$$

Para completar a demonstração, coletamos as cotas superiores para as expressões (4.1), (4.2) e (4.3), e usamos a hipótese de que $\psi^{-1}(X) = O(X^{1/4})$ para estabelecer o seguinte limite para a integral em (1.3):

$$\begin{aligned} \int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx &\ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}} + X^{11/8+\varepsilon} + X^{11/8}(\log X)^2\psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2} \\ &\ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

A demonstração do Teorema 1.1 está completa. \square

Agora, apresentamos uma demonstração do Teorema 1.2:

Demonstração do Teorema 1.2. Pela definição de medida de irracionalidade finita de (1), existe $C > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ fixo, a desigualdade

$$\|m\theta\| \geq \frac{C}{m^{\eta+\delta}}$$

é satisfeita para todos, exceto um número finito de inteiros $m \geq 1$. Equivalentemente, θ não é aproximável de ordem $\psi(x) = x^{\eta+\delta}/C$.

Seja $\varepsilon > 0$. Seguindo a demonstração do Teorema 1.1, o comportamento assintótico da integral em (1.3) é governado pelas cotas superiores para $D_{U \geq 1}^l(X)$ e $D^u(X)$. O objetivo, portanto, será mostrar que $D_{U \geq 1}^l(X)$ admite uma estimativa mais precisa.

Seja $(n_k/m_k)_{k=0}^\infty$ a sequência de convergentes de θ . Aplicando $|\Lambda(u)| \ll |u|^{-1}$, $\sqrt{m} \ll N^{1/2}$ e $\tau(m) = o(m^\varepsilon)$, limitamos o termo principal de $D_{U \geq 1}^l(X)$:

$$\begin{aligned} &X^{3/2} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m \leq N} \frac{\tau(m)}{m^{3/4}} \sum_{\substack{n \leq N \\ |n-m\theta| < \frac{1}{2m}}} \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} |\Lambda(a_{m,n}\sqrt{X})| \\ &\ll X^{11/8} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m_k \leq N} \frac{1}{m_k^{3/2-\varepsilon} \|m_k\theta\|}. \end{aligned}$$

Da definição de medida de irracionalidade:

$$\|m\theta\| \geq \frac{C}{m^{\eta+\varepsilon}}$$

para inteiros $m \geq 1$ suficientemente grandes, o que implica $\frac{1}{\|m_k \theta\|} \ll m_k^{\eta+\varepsilon}$ (onde a constante C^{-1} foi absorvida pela notação implícita \ll). Combinando isso com o crescimento exponencial $m_k \geq \phi^{k-1}$ (Observação 4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} X^{11/8} \sum_{\psi^{-1}(X^{1/4}) \leq m_k \leq N} \frac{1}{m_k^{3/2-\eta-\varepsilon}} &\ll X^{11/8} \sum_{\phi^{k-1} \geq \psi^{-1}(X^{1/4})} \phi^{-(3/2-\eta-\varepsilon)(k-1)} \\ &\ll X^{11/8}. \end{aligned}$$

Como $\eta < 3/2$, a série geométrica converge. Assim obtemos:

$$D_{U \geq 1}^l(X) \ll X^{11/8+\varepsilon}.$$

Combinando todas as estimativas para (1.3) como no Teorema 1.1, escolhemos $\delta > 0$ tal que satisfaça $\frac{1}{8(\eta+\delta)} < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \int_1^X \Delta(x) \Delta(\theta x) dx &\ll_{\varepsilon} X^{11/8+\varepsilon} + X^{11/8} (\log X)^2 \psi^{-1}(X^{1/4})^{1/2} \\ &\ll_{\varepsilon} X^{3/2-1/8+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Isso completa a demonstração do Teorema 1.2. □

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E QUESTÕES EM ABERTO

Neste trabalho, investigamos a correlação de $\Delta(x)$ consigo mesma a menos de uma perturbação do seu argumento. Partindo do resultado clássico de Tong, que estabelece o segundo momento de $\Delta(x)$ como sendo da ordem de $X^{3/2}$, e motivados pelos trabalhos recentes de Aymone et al. sobre convoluções, analisamos a integral de correlação

$$\mathcal{I}_\theta(X) = \int_1^X \Delta(x)\Delta(\theta x) dx.$$

A literatura prévia já havia estabelecido uma nítida dicotomia: para θ racional positivo, existe uma correlação significativa decorrente da contribuição dos termos diagonais da soma de Voronoï, o que mantém a integral na ordem de magnitude de $X^{3/2}$. Por outro lado, para $\theta > 0$ irracional com medida de irracionalidade finita, ocorre uma descorrelação de natureza polinomial.

Embora tenha havido uma melhoria na estimativa para $\mathcal{I}_\theta(X)$ no caso em que $\theta > 0$ é um irracional genérico (com medida de irracionalidade igual a 2), contemplada no Teorema 1.2, a principal contribuição deste trabalho reside na investigação da classe dos números de Liouville, os irracionais que melhor imitam os racionais. Demonstramos que, para esses números, a descorrelação ainda ocorre, porém a uma taxa controlada pela velocidade de aproximação racional de θ . Ao introduzir a função de medida de irracionalidade ψ , estabelecemos uma cota superior em termos de ψ^{-1} :

$$\mathcal{I}_\theta(X) \ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2-\varepsilon}},$$

o que preenche uma lacuna teórica na análise da correlação, conectando o comportamento dos irracionais genéricos ao daqueles extremamente bem aproximáveis por racionais. Além disso, aplicando a definição de base de irracionalidade de Sondow, nosso resultado estabelece que, para qualquer número de Liouville $\theta = \tau_\beta > 0$ com base de irracionalidade finita $\beta \geq 1$ (Exemplo 1.1), temos:

$$\mathcal{I}_\theta(X) \ll_\varepsilon \frac{X^{3/2}}{(\log X)^{3/2-\varepsilon}}.$$

5.1 Questões em Aberto

Apesar dos avanços obtidos, a interseção entre o problema do divisor e as aproximações diofantinas ainda oferece terreno fértil para investigação. Em particular, é possível destacar três problemas que emergem naturalmente deste estudo:

Problema 1 A cota superior obtida no Teorema 1.1 provém majoritariamente da contribuição supradiagonal da soma de Voronoï. Permanece em aberto se essa cota é a melhor possível ou se existe um cancelamento adicional dos termos não-diagonais que não foi explorado. Em outras palavras, é possível construir um número de Liouville $\theta > 0$ tal que a correlação seja, de fato, $\Omega\left(\frac{X^{3/2}}{\psi^{-1}(X^{1/4})^{3/2}}\right)$, ou a decorrelação é sempre mais forte do que o previsto pela nossa cota?

Problema 2 Sabemos que para θ irracional a integral é $o(X^{3/2})$. No entanto, não sabemos se ela oscila de sinal ou se mantém preponderantemente positiva ou negativa. Seria interessante estabelecer resultados do tipo Ω_{\pm} para $\mathcal{I}_{\theta}(X)$ no caso irracional.

Problema 3 (O Análogo do Círculo). O problema do divisor de Dirichlet ($\Delta(x)$) e o problema do círculo de Gauss ($P(x)$) compartilham estruturas oscilatórias semelhantes via somas de Voronoï e de Hardy. Uma extensão natural deste trabalho seria investigar a correlação

$$\int_1^X P(x)P(\theta x) dx$$

para θ sendo um número de Liouville. Espera-se um comportamento análogo, mas as diferentes propriedades aritméticas da função $r_2(n)$ (soma de quadrados) podem introduzir sutilezas novas na análise diofantina.

REFERÊNCIAS

- 1 AYMONE, M.; MAITI, G.; RAMARÉ, O.; SRIVASTAV, P. Convolution of periodic multiplicative functions and the divisor problem. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 77, n. 6, p. 1–19, 2025. Publicado online: 14 de Novembro de 2024.
- 2 CÓRRADI, K.; KÁTAI, I. A note on a paper of K.S.Gangadharan. **Magyar Tudományos Akadémia. Matematikai és Fizikai Osztály Közleményei**, v. 17, p. 89–97, 1967.
- 3 CRAMÉR, H. Über zwei Sätze von Herrn G. H. Hardy. **Mathematische Zeitschrift**, v. 15, n. 1, p. 201–210, 1922.
- 4 DIEGUEZ, A. On certain correlations into the divisor problem. **Journal of Number Theory**, v. 280, p. 519–536, 2026. Publicado online: 25 de Setembro de 2025.
- 5 DIRICHLET, P. G. L. Über die bestimmung der mittleren werthe in der zahlentheorie. In: KRONECKER, L.; FUCHS, L. (Ed.). **G. Lejeune Dirichlet's Werke**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, (Cambridge Library Collection–Mathematics, v. 2). p. 49–66. Trabalho original publicado em 1849.
- 6 HAFNER, J. L. New Omega theorems for two classical lattice point problems. **Inventiones Mathematicae**, v. 63, p. 181–186, 1981.
- 7 HARDY, G. H. On Dirichlet's divisor problem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 15, p. 1–25, 1916.
- 8 HEATH-BROWN, D. R. The distribution and moments of the error term in the dirichlet divisor problem. **Acta Arithmetica**, v. 60, n. 4, p. 389–415, 1992.
- 9 HEATH-BROWN, D. R.; TSANG, K.-M. Sign changes of $E(t)$, $\Delta(x)$, and $P(x)$. **Journal of Number Theory**, v. 49, n. 1, p. 73–83, 1994.
- 10 HUA, L.-K. The lattice points in a circle. **Quarterly Journal of Mathematics**, v. 13, n. 1, p. 18–29, 1942.
- 11 HUXLEY, M. N. Exponential sums and lattice points. III. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 87, n. 3, p. 591–609, 2003.
- 12 IVIĆ, A.; ZHAI, W. On certain integrals involving the Dirichlet divisor problem. **Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici**, v. 62, n. 2, p. 247–267, 2020.
- 13 IVIĆ, A. **The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications**. Mineola, New York: Dover Publications, 2003. (Dover Books on Mathematics). Reimpressão da obra original de 1985 publicada por John Wiley & Sons.
- 14 IWANIEC, H.; MOZZOCHI, C. J. On the divisor and circle problems. **Journal of Number Theory**, v. 29, n. 1, p. 60–93, 1988.
- 15 JARNÍK, V. Über die simultanen diophantischen approximationen. **Mathematische Zeitschrift**, v. 33, n. 1, p. 505–543, 1931.

- 16 KHINCHIN, A. Y. **Continued Fractions**. 3. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 1997. (Dover Books on Mathematics). Republicação integral da edição de 1964 da University of Chicago Press.
- 17 KHINCHIN, A. Y. Einige sätze über kettenbrüche, mit anwendungen auf die theorie der diophantischen approximationen. **Mathematische Annalen**, v. 92, n. 1–2, p. 115–125, 1924.
- 18 KOLESNIK, G. On the order of $\zeta(1/2 + it)$ and $\delta(R)$. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 98, n. 1, p. 107–122, 1982.
- 19 LAMZOURI, Y. On the distribution of the error terms in the divisor and circle problems. **International Mathematics Research Notices**, v. 2025, n. 3, p. 1–17, 2025.
- 20 LAU, Y.-K. On the tails of the limiting distribution of the error term in the Dirichlet divisor problem. **Acta Arithmetica**, v. 88, n. 3, p. 229–248, 1999.
- 21 LAU, Y.-K.; TSANG, K.-M. Mean square of the remainder term in the Dirichlet divisor problem. **Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux**, v. 7, n. 1, p. 75–92, 1995. Les Dix-huitièmes Journées Arithmétiques (Bordeaux, 1993).
- 22 LEGENDRE, A.-M. **Essai sur la théorie des nombres**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge Library Collection). Reimpressão da edição de 1808.
- 23 LITTLEWOOD, J. E. Researches in the theory of the Riemann ζ -function. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 20, n. 1, p. 22–28, 1922.
- 24 MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. (Projeto Euclides).
- 25 MONTGOMERY, H. L.; VAUGHAN, R. C. **Multiplicative Number Theory I: Classical Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. v. 97. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 97).
- 26 SONDOW, J. Irrationality measures, irrationality bases, and a theorem of Jarník. Palestra nas Journées Arithmétiques XXIII, Graz, Áustria. Preprint disponível em arXiv:math/0306308. 2003.
- 27 SOUNDARARAJAN, K. Omega results for the divisor and circle problems. **International Mathematics Research Notices**, n. 36, p. 1987–1998, 2003.
- 28 TENENBAUM, G. **Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory**. 3. ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2015. v. 163. (Graduate Studies in Mathematics, v. 163).
- 29 TONG, K.-C. On divisor problems. II, III. **Acta Mathematica Sinica**, v. 6, n. 4, p. 139–152, 515–541, 1956.
- 30 TSUNG-TAO, C. The divisor problem for $d_3(n)$. **Science Record (Academia Sinica)**, v. 3, p. 177–182, 1950.
- 31 VAN DER CORPUT, J. G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem. **Mathematische Annalen**, v. 87, n. 1-2, p. 39–65, 1922.

-
- 32 VINOGRADOV, I. M. Nouvelles évaluations des sommes de Weyl. **Matematicheskii Sbornik**, v. 1, n. 43, p. 405–424, 1936. Também conhecido como Recueil Mathématique.
- 33 VINOGRADOV, I. M. **The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers**. Londres: Interscience Publishers, 1954. Traduzido do russo por K. F. Roth e A. Davenport.
- 34 VORONOÏ, G. F. Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 21, p. 207–267, 1904.
- 35 VORONOÏ, G. F. Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries (suite). **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 21, p. 459–533, 1904. Continuação.
- 36 WALFISZ, A. Über das Piltzsche Teilerproblem. **Mathematische Zeitschrift**, v. 26, n. 1, p. 66–88, 1927.