UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ICEx – Departamento de Matemática

ALESSANDRO MONTEIRO

Estudo de Funções Através de uma Abordagem Geométrica Utilizando o Software Geogebra

BELO HORIZONTE
2011

ALESSANDRO MONTEIRO

Estudo de Funções Através de uma Abordagem Geométrica Utilizando o Software Geogebra

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadordo Prof. Dr. Antônio Zumpano

BELO HORIZONTE
2011

ALESSANDRO MONTEIRO

Estudo de Funções Através de uma Abordagem Geométrica Utilizando o Software Geogebra

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de especialista em Matemática com ênfase em Cálculo pela Universidade Federal de Minas Gerais

Data de apresentação: 17/11/2011

Resultado: ________________________

Banca examinadora:

Antônio Zumpano Pereira Santos	Prof. Dr.	______________________
José Antônio Gonçalves Miranda	Prof. Dr.	______________________
Paulo Antônio Fonseca Machado	Prof. Dr.	______________________

Dedico este trabalho à minha linda esposa Eliziê e aos meus maravilhosos filhos Alef e Tales.

AGRADECIMENTOS

Embora uma monografia seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, há contribuições de natureza diversa que não podem nem devem deixar de ser realçados. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

À Deus, minha rocha e minha luz, que permitiu que pessoas maravilhosas pudessem cruzar em meu caminho.

À minha esposa Elizie, pelo carinho, paciência e grandes contribuições.

Aos meus filhos, pela compreensão e doação do seu pai em noites e finais de semana para dedicação ao estudo.

Aos meus colegas de trabalho, pelo entendimento em relação ao horário de saída para dar conta de chegar a tempo de assistir às aulas.

Ao Prof. Zumpano, orientador, pela acolhida, disponibilidade revelada ao longo deste trabalho e pelas críticas e sugestões relevantes feitas durante a orientação.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um conjunto de atividades exploratórias para o Ensino de "Pré-Cálculo" utilizando o software Geogebra. A pesquisa contemplou um breve estudo sobre o surgimento do Cálculo e seu ensino. Várias pesquisas realizadas sobre o ensino atual do cálculo apontam a dificuldade dos alunos nessa disciplina. Objetivando propor alternativas para a superação dessa dificuldade, foram elaboradas trinta atividades exploratórias abordando conceitos relacionados ao conteúdo de Função que pretendem permitir ao aluno buscar informações, conjecturar, construir seu conhecimento e ser autor da solução.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Funções. Ensino de Cálculo, Geogebra, Ensino Superior.

ABSTRACT

This paper aims to present a group of exploratory activities for Teaching “Pre Calculus” using the Geogebra software. The search shows us a brief study about how to emerged the Calculus and about your the teach current. Nowadays, there are several searches that indicate the difficult of students about calculus. The objective this work is put forward alternatives to the students to get over his difficulties. It was make thirty exercises about concepts to refer topics of Mathematical Function. These exercises propose to the students to seek information, raising possibilities, construct theirs knowledge and be author of his own resolution.

KEYWORDS: Elementary Functions. Teaching Calculus, Geogebra, Higher Education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 1994 ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia e Letras de Belo Horizonte – FAFI-BH e, em 1995, comecei a lecionar para o Ensino Fundamental em uma escola da Rede Estadual de Minas Gerais.

Desde então, me sinto incomodado com a maneira como muitos professores ensinam Matemática aos alunos, ou seja, reduzem o ensino dessa disciplina ao treinamento para a resolução de expressões, equações ou problemas de simples resolução, sem a preocupação com o entendimento dos conceitos pelos alunos.

Buscando trabalhar de maneira diferente dessa, procurava caminhos e ferramentas que pudessem auxiliar os alunos na construção do conhecimento. Desenvolvi projetos e aulas na quadra, no pátio da escola e no laboratório de informática. Criei jogos matemáticos para minhas aulas: "Zero" (jogo semelhante ao "vinte e um", mas com cartas grafadas em vermelho e preto onde os valores expressos em vermelho correspondiam a valores negativos e os números pretos correspondiam a valores positivos. O objetivo desse jogo é aproximar-se ao máximo de zero); "Ludomatemágico" (trilha com números positivos e negativos, onde o aluno iniciava no meio da trilha e andava para trás ou pra frente – negativo ou positivo de acordo com soma da pontuação obtida em dois dados que eram lançados – dado branco postivo e dado vermelho negativo); Batalha Naval no plano cartesiano; Dominós; Jogo da memória (equações e operações).

Em 1997, comecei a lecionar para o Ensino Médio e nesse ano tive a oportunidade de participar de encontros quinzenais de formação, coordenados pelo prof. Airton Carrião do Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais (Coltec-UFMG) em que o objetivo era estudar e elaborar estratégias de ensino de Funções. Paralelamente ao trabalho que fazia nesses encontros de formação, ampliava meus conhecimentos sobre o tema dialogando com minha esposa, que nessa época era aluna do curso de licenciatura em Matemática da UFMG, desenvolvia um trabalho de inciação científica sob a orientação da Profª. Jussara Araújo sobre o mesmo tema, cujo título era "Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Funções". Foi um ano de grande crescimento profissional permitindo que eu tivesse um olhar diferente sobre o ensino de Matemática. Descobri que poderia ir além dos livros didáticos e que estes, nem sempre traziam uma abordagem apropriada aos meus alunos.

A minha experiência docente mostrou-me que os alunos apresentam grandes dificuldades na compreensão do conceito de função, assim como em associar as formas algébricas e geométricas de uma dada função. Percebi que os alunos se pautavam em regras, não buscando compreender os processos envolvidos no conteúdo trabalhado, não apresentando um posicionamento questionador e investigador durante as aulas, atitude que acredito ser necessária para uma boa aprendizagem. A partir de então, sempre que possível, elaborava minhas aulas de modo a auxilar o aluno no desenvolvimento de uma postura mais crítica diante de sua aprendizagem.

Quando em 2003, no III Encontro Mineiro de Educação Matemática em que participei da oficina “As Novas Tecnologias e o ensino de Funções: trabalhando com o software Graphmatica” fiquei vislumbrado com as possibilidades pedagógicas oferecidas por esse software, instalei-o nos micros do laboratório de informática da escola em que trabalhava e comecei a desenvolver com os alunos atividades usando essa ferramenta. Percebi com esse trabalho o quanto o ensino de funções ficou mais atrativo e significativo para o aluno, além de proporcionar um enfoque mais investigativo.

Empolgado com as possibilidades do uso de softwares para o ensino de Matemática, matriculei-me no Curso de Especialização em Informática na Educação da Universidade Federal de Lavras com o objetivo de ampliar meus conhecimentos sobre as potencialidades da Informática para o Ensino de Matemática.

Como já estava investigando as potencialidades dos softwares para o ensino, assumi em 2005, a função de coordenador do laboratório de informática na escola, que tinha como objetivo fomentar o uso do laboratório pelos docentes. Nesse mesmo ano fui convidado pela Secretaria Municipal de Educação de Belo Horizonte para exercer a função de formador de informática dos professores da rede de ensino. Fiquei nessa função até o ano de 2008, quando assumi um cargo comissionado na Secretária Municipal de Educação, voltado para a administração financeira e consequentemente afastei-me da sala de aula. Como esse afastamento é temporário e pretendo retomar meu lugar de educador matemático, procuro estar atualizado em relação à Educação, sobretudo em Matemática.

Preocupado com a minha formação, resolvi ingressar em 2009 na Especialização com Ênfase em Cálculo oferecida pela UFMG, uma vez que essa área me permite retomar os estudos sobre as funções, tema que me desafia enquanto professor.

Como percebo que a incorporação do uso das Tecnologias Informacionais e Comunicacionais (TICs) pode possibilitar uma abordagem criativa e instigante, criando um ambiente em que o aluno seja o agente ativo no processo de construção de seu conhecimento, resolvi produzir o meu trabalho de conclusão de curso integrando essas duas áreas – Ensino de funções e uso de TICs.

Sendo assim, para o desenvolvimento desta monografia optei por utilizar um software livre, com tecnologia Java (multiplataforma Windows e Linux), dinâmico e com grandes possibilidades de investigação. Para tanto, escolhi o Geogebra, pois além de ser um software livre, possui uma interface que possibilita trabalhar de forma conjunta as representações algébrica e geométrica das funções, além de fornecer ferramentas interessantes para uma exploração dinâmica dos conteúdos.

Minha proposta tem como o objetivo elaborar um conjunto de atividades exploratórias voltadas para o ensino do “pré-cálculo”, desenvolvidas em um laboratório de informática utilizando-se o Software Geogebra, com ênfase no estudo de Funções. A intenção é auxiliar o aluno em uma compreensão melhor do conceito de funções e da relação álgebra-geométrica das funções.

Para o desenvolvimento dessa proposta não é necessário que o aluno tenha conhecimento do software Geogebra uma vez que essa aprendizagem se dará de forma gradual de acordo com as necessidades que aparecerem.

Capítulo 1

A CRIAÇÃO E O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÁLCULO

1.1 – O Surgimento do Cálculo

O nascimento do Cálculo relaciona-se à busca por caminhos para se solucionar problemas relativos a movimento. Nesta busca, a álgebra e a geometria foram integradas e passaram a ser utilizadas para se encontrar a solução de problemas como, por exemplo, aqueles relacionados a movimento de objetos que se deslocam com velocidade constante ao longo de trajetos sejam eles circulares ou lineares. "*O cálculo surge pela necessidade de calcular como varia a velocidade do móvel ou no caso do trajecto do móvel ser irregular. Assim, o conceito de derivada aparece ligado a velocidades e acelerações (prof.2000.pt)*".

Na busca por solucionar os problemas relativos aos movimentos, vários matemáticos como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler utilizavam os conceitos do cálculo, mas não haviam desenvolvido ainda uma maneira organizada de representar suas descobertas e soluções. Segundo Moar (2003, apud GIRAFFA e TORRES, 2009, p. 20) "o *desenvolvimento e o aperfeiçoamento das técnicas associadas ao Cálculo aconteceram com Newton e Leibniz, os quais deram origem aos fundamentos mais importantes para o ensino do Cálculo, como a formalização das Derivadas e as Integrais".* Para esse autor, apesar de terem sido Leibniz e Newton os responsáveis pela estruturação do Cálculo Diferencial e Integral, a ideia do Cálculo é bem mais antiga:

> *A ideia central por trás do cálculo de usar o processo de limite para derivar resultados sobre objetos comuns, finitos recua até a época dos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (cerca de 290-212 a.C.), o lendário cientista cuja inventividade militar teria desafiado os invasores romanos de sua cidade durante mais de três anos, teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas."* (GIRAFFA e TORRES, 2009, p. 20)

Para Moar (2003, apud GIRAFFA e TORRES, 2009) a organização atual do Cálculo pode ser dividida em duas partes: uma relacionada às Derivadas ou Cálculo Diferencial e Integral, e outra, relacionada às Integrais, ou simplesmente Cálculo Integral.

> No que se refere às Integrais [...], surge na história relacionada com os problemas de quadraturas [que] eram enfrentados pelos gregos na medição de superfícies para determinar suas áreas. Todas as áreas estudadas eram relacionadas à área do quadrado". (GIRAFFA e TORRES, 2009, p. 20)

Sendo assim, o conceito de derivada, considerado como o cerne do Cálculo Diferencial, está ligado à geometria, na determinação de tangentes a curvas, e às outras ciências em geral como taxa de variação. Essa propriedade permite a resolução de problemas de natureza prática, como por exemplo, no estudo de fenômenos sociais, econômicos, químicos, físicos, etc.

> O nome "Cálculo Integral" foi criado por Johann Bernoulli e seu livro publicado pelo seu irmão mais velho, Jacques Bernoulli, em 1690. Leonardo Euler resumiu as idéias de Bernoulli e veio a criar os fundamentos da Análise. Hoje o Cálculo Integral é muito utilizado em áreas do conhecimento humano e aplicado em soluções de problemas de muitos campos de estudo, como Economia, Engenharia, Medicina, Química, Física e Astronomia (GIRAFFA e TORRES, 2009, p. 21).

Apesar da relevância do Cálculo Diferencial e Integral na resolução de situações relacionadas às mais diversas áreas, este não é um assunto facilmente compreendido pelos estudantes, mesmo aqueles das ciências exatas.

1.2 – A situação atual do Ensino de Cálculo

Diversos estudos sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo têm sido realizados revelando a dificuldade dos alunos com os conceitos abordados nessa disciplina.

Pode-se verificar esse fato, por exemplo, no trabalho de Rezende (s.d.) intitulado "O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica" em que o autor apresenta os altos índices de reprovação nessa disciplina na Universidade Federal Fluminense no período de 1996 a 2000 conforme aponta o gráfico seguinte.

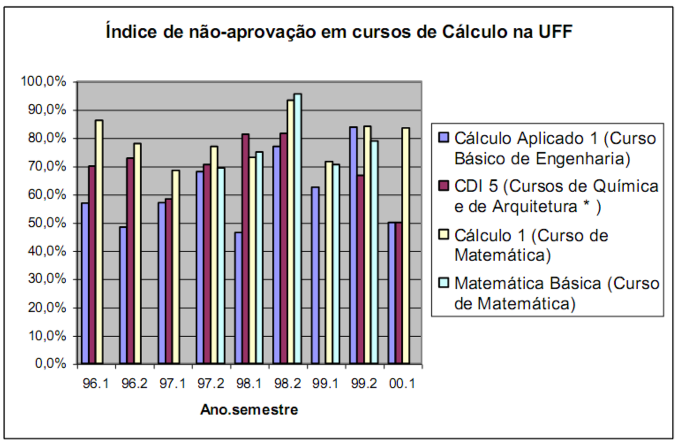

Fig. 1 – Gráfico de índice de não-aprovação em Cálculo na UFF

No trabalho de Almeida et. al. (2007), as autoras reafirmam a dificuldade dos alunos de graduação em compreender os conteúdos abordados em Cálculo e atribui essa dificuldade a problemas metodológicos, inadequação do material didático, dissonância entre o programa e a realidade sócio-econômica dos alunos, dentre outros. As autoras apresentam a Modelagem Matemática como uma possível contribuição para o aprendizado dessa disciplina uma vez que essa estratégia metodológica permite ao aluno interagir com o conhecimento buscando elaborar suas hipóteses e, a partir da experimentação, comprová-la ou refutá-la.

Segundo Cabral e Catapani (2003, apud ALMEIDA et. al., 2007),

> Os indicadores desta problemática estão comprovados pelas taxas de reprovação, repetência e abandono das disciplinas de Cálculo. De forma geral, embora a disciplina exija esforços e dedicação dos alunos, estes expressam muitas dificuldades em compreender os conceitos explorados (Franchi, 1993; Vilarreal, 1999).

Soares de Mello et. al realizaram um estudo sobre o ensino de Cálculo nos cursos de Engenharia com o objetivo de identificar os problemas existentes e apontar algumas possibilidades para a melhoria no desempenho dos alunos nessa disciplina. Para tanto, avaliaram a experiência da Universidade Federal Fluminense que, em 1994 ampliou a carga horária dessa disciplina passando de 60h para 90 h com o objetivo de ampliar o tempo de modo que se pudesse trabalhar conteúdos que não estavam sendo contemplados em função da carga-horária. A experiência não foi bem sucedida e, na prática, o índice de reprovação aumentou, assim como a evasão. Com este resultado catastrófico, elaboraram uma reforma curricular voltando-se à carga horária anterior e transferido parte do conteúdo para o Calculo II. Essa experiência apresentou melhores resultados que a anterior. Nesse mesmo período, experimentou-se trabalhar o conteúdo de cálculo paralelamente à sua aplicação na Física. Essa experiência foi realizada com duas turmas.

> O resultado comparativo, conforme estudo parcial feito em Soares de Mello et al [2], foi muito bom. O rendimento dos alunos, tanto em Cálculo, quanto em Física, nestas turmas, foi superior ao das demais. Essa diferença de rendimento não pode ser explicada pela diferença de professor já que, em alguns casos, o mesmo professor era responsável por uma turma "experimental" e outra "normal". (SOARES DE MELLO et. al 2001, p. 11)

Analisando o percurso histórico do desenvolvimento do cálculo e de seu ensino parece-me evidente que há um consenso sobre a dificuldade do ensino e da aprendizagem dessa disciplina evidenciado nos diversos estudos realizados sobre essa temática. Corroboro a posição de Almeida et. al. (2007) de que um dos fatores que deve ser considerado no ensino de Cálculo refere-se aos procedimentos metodológicos.

Rocha (2010) aponta em sua tese algumas possibilidades para a superação do problema:

> Os pesquisadores acenam com algumas possibilidades de contribuição para um ensino de Cálculo que alcance os objetivos esperados. Podemos destacar, baseados em nossa revisão bibliográfica, a modelagem matemática, o uso da história e a informática como algumas dessa perpectivas de abordagem do Cálculo." (ROCHA, 2010, p.31)

Sendo assim, na perspectiva de apresentar uma possibilidade de contribuição ao Ensino de Cálculo, será apresentado no próximo capítulo o uso do Software Geogebra no Ensino de Cálculo e, em seguida, a potencialidade dessa ferramenta para o ensino desta disciplina.

Capítulo 2

UTILIZANDO O GEOGEBRA NO ENSINO DE CÁLCULO

> A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realize atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos na relação com o conhecimento. (Valente, 1999, p.30)

O software Geogebra (http://www.geogebra.org) pode auxiliar nessa mudança, uma vez que contribui para construção de um ambiente centrado na aprendizagem do aluno, possibilitando-o a uma postura crítica e questionadora. Segundo Valente (1999, p. 84), o uso de software para o ensino de cálculo pode ser um fator de estímulo para o aluno em sala de aula, além de ser um facilitador para sua aprendizagem.

2.1 - Apresentando o software Geogebra

O software Geogebra é uma ferramenta auxiliar no ensino de Cálculo, com destaque para a questão da visualização, para as múltiplas representações (algébricas, gráficas e tabulares) e das possibilidades de experimentação e investigação para a sala de aula. É um programa livre, de código aberto e ainda possui ferramentas de autoria para criar materiais de ensino interativos na web facilitando o acesso a essa ferramenta.

Esse software possui interface simples e menus intuitivos conforme apresentado na figura seguinte, o que facilita a interação aluno-software.

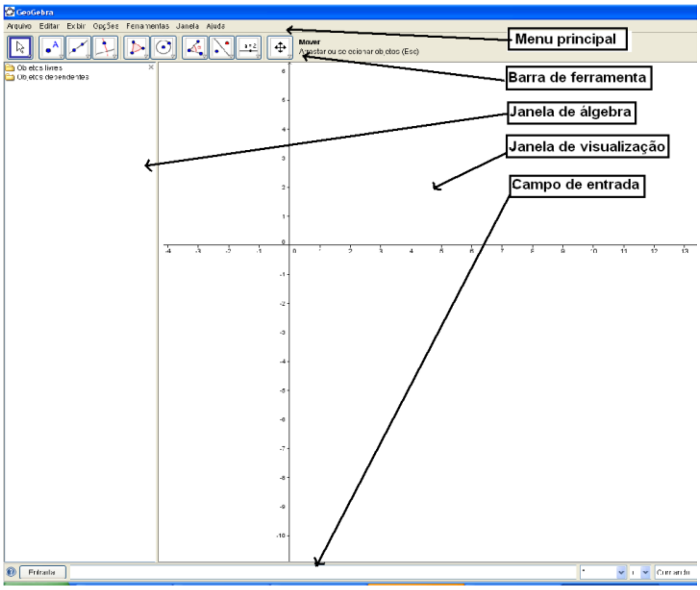

Fig. 2: Gráfico de apresentação do Geogebra 3.0.0.0

Outra vantagem do software é o dinamismo presente, por exemplo, na ferramenta "seletor," em que é possível a criação de parâmetros para um número ou ângulo a ser definida no campo de entrada, informando o intervalo de variação e incremento. Assim, o aluno pode movimentar o seletor e observar as variações na janelas gráfica e algébrica para criar suas conjecturas. Uma sugestão é habilitar o rastro na figura para visualizar o registro das variações ocorridas no gráfico. Além do seletor, outra ferramenta que dá o dinamismo ao software é a seta, com ela pode-se mover os elementos representados na parte gráfica e acompanhar as mudanças na janela de álgebra.

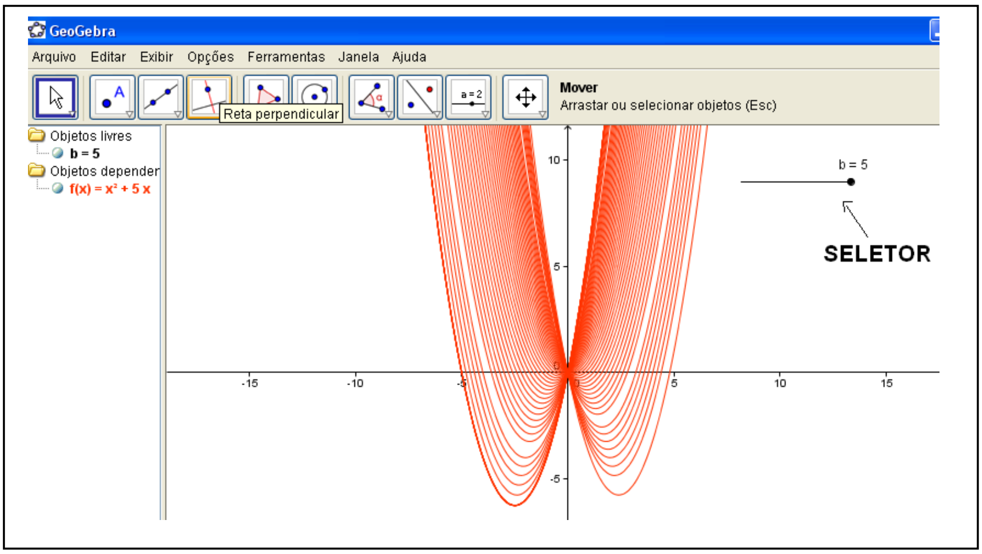

Fig.3: Função $f(x) = x^2 + bx$, com b variando de -5 a 5 com incremento = 0.2

Como o Cálculo trabalha com aproximações, torna-se difícil a visualização em papel ou quadro (forma estática) das modificações ocorridas no gráfico em função de alterações nos coeficientes da função. Com o software Geogebra, torna-se possível essa visualização. Pode-se, por exemplo, mover um ponto sobre a reta na parte gráfica e acompanhar as alterações ocorridas nos valores na parte algébrica. Além disso, o software possui uma ferramenta de "zoom" que permite a visualização com o intervalo tão pequeno (ou grande) quanto desejar.

> É possível trabalhar em sala com diferentes representações usando os recursos tradicionais, mas atividades como as de traçado de gráficos são prejudicadas, uma vez que nessas mídias (quadro/giz e papel/lápis) os objetos construídos são estáticos e em número limitado. Com a utilização de um software que faz as construções e permite modificá-las é possível dar o sentido dinâmico, permitindo a experimentação e a transição entre as representações. (ROCHA, 2010, p. 51)

A velocidade e facilidade de construção gráfica com o software permitem ao aluno utilizar mais o tempo conjecturando que realizando atividades trabalhosas de construção e cria um campo de pesquisa possibilitando ao estudante criar hipóteses que podem ser confirmadas ou refutadas. Além de poupar o tempo do aluno, esse software facilita sua visualização acerca do assunto abordado, independente do estágio em que esse se encontra. Portanto, o uso do software pode ser anterior à sistematização de um conteúdo, trabalhando a ideia para o melhor entendimento deste, posterior para aprimorar, refinar, explorar o seu conhecimento ou, ainda, durante todo o processo que é a maneira a qual acredita-se e procura-se desenvolver nesse trabalho.

3.2. Proposta de Atividades

Existem maneiras diferentes para a realização de atividades utilizando-se softwares. Há aquelas que são do tipo "passo-a-passo" onde os alunos devem executar uma tarefa após a outra para realizar uma atividade. Atividades dessa natureza são cansativas, levam a dispersão de alunos que realizam as tarefas em um tempo menor e não proporcionam um ambiente investigativo e colaborativo. Há também atividades que são do tipo tutorial, informativo, onde o aluno é apenas um expectador. Propostas como estas corroboram com a ideia de

SKOVSMOSE (2007, p. 107) de que "*a longa sequência de exercícios característica do ensino tradicional de matemática pode ser vista como uma longa sequência de ordens que os estudantes devem seguir*".

Nesse trabalho a proposta é implementar atividades desafiadoras, que leve o aluno a buscar a informação, conjecturar, construir seu conhecimento e ser autor da solução.

Sabemos que para o desenvolvimento das atividades é preciso que o aluno tenha conhecimento do software Geogebra, mas não que seja um profundo conhecedor dessa ferramenta. Fica como sugestão, uma apresentação rápida do software e a disponibilização de um tutorial para consulta (sugestão: http://geogebra.mat.br/?page_id=296).

Deve-se levar em conta que o software é um apoio para a aprendizagem do aluno e não o fim. Dessa forma, começar o trabalho explicando todas as funcionalidades não é uma boa estratégia já que haverá aqueles que já conheçam esse software ou similar. Sendo assim, dentre várias funções que o software oferece, destacamos as principais para o desenvolvimento das atividades quanto ao ensino de Cálculo. A saber:

- Plotar, editar e definir intervalo de uma função, incluindo operações e símbolos.
- Construção de pontos livre e interseção.
- Construção de retas a partir de dois pontos, paralelas, perpendiculares, tangente e sua inclinação.
- Reflexão de ponto em relação a uma reta.
- Seletor, inserir texto, mover objetos e formatá-los (propriedades), zoom e gravar.

A utilização de quase todas as ferramentas é bastante fácil devido à proximidade com o sistema Windows (menus, botão direito, formatação, etc), exceto a ferramenta "Seletor". Por isso, recomenda-se a apresentação da mesma (o tutorial sugerido faz essa apresentação). As demais ferramentas que também são pouco intuitivas como, por exemplo, a função SE utilizada para a construção de funções de várias leis, serão apresentadas ao longo das atividades.

Para iniciar o trabalho com o software, familiarizando o aluno com suas ferramentas propomos a realização das seguintes tarefas:

Atividade: Conhecendo o Geogebra

No software Geogebra, nem tudo está traduzido para o português. Isso pode ser observado verificando as opções na seleção do campo de entrada, como por exemplo: "sqrt(x)" - **square root** (raiz quadrada), "sin" – sine (seno), "abs" – absolute (valor absoluto ou módulo). Assim, para plotar uma função $f(x)=|x+1|$, escrevemos f(x) = abs(x+1). Se desejarmos definir essa função num intervalo, por exemplo [-2,5], podemos escolher a opção "função" na lista de comandos e escrever: função[abs(x+1),-2,5]. Não se preocupe em guardar todas essas "sintaxes", ou seja, estrutura de fórmulas, pois ao escolher um operador ou comando, basta clicar em F1 que o software indica a estrutura a ser escrita.

1) Seguindo as orientações anteriores construa o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-2}$.

2) Determine, graficamente, o ponto de interseção entre as curvas $f(x)=(0{,}6)^x$ e $g(x)=\dfrac{\lg(x)}{\lg(0{,}6)}$.

3) Mostre que a reta tangente à curva $f(x)=x^2-3x$, no ponto A (2, -2) tem inclinação igual a 1, ou seja, forma um ângulo de 45° com o eixo das abscissas.

4) Construa um gráfico mostrando a variação de "b" na função f(x) = x² + bx, no intervalo de -5 a 5 e com incremento de 0,2. (Dica: use o seletor).

É provável que durante a realização das atividades anteriores o aluno encontre dificuldades para desenvolvê-las, mas a busca da solução é que fará com que ele transite por todo o software, pesquise e principalmente aprenda a buscar soluções. Espera-se que na 1ª atividade o aluno tenha dificuldade no registro da fração que pode ser escrita na forma (x^2 + sqrt(x))/(x – 2). Sendo assim, estimule os alunos a conversarem sobre seus erros. Por exemplo: por que não dá certo x^2 + sqrt(x)/x – 2 ou outra forma? Na 2ª atividade o aluno terá que construir um ponto de interseção sobre as curvas. Algebricamente é muito difícil obter essa interseção, mas ele poderá usar a barra de ferramentas. Clicando em "interseção de dois objetos" e em seguida, clicando sobre as duas curvas conseguirá realizar a atividade, mas pode ser que o aluno encontre outra maneira para determinar a interseção e, caso isso ocorra, peça que apresente a solução para a turma. O aluno pode, por exemplo, construir um ponto A(x,f(x)) e arrastá-lo sobre a curva até a interseção de g(x). Podem existir vários caminhos para chegar a uma solução, recomenda-se que as atividades sejam realizadas em grupos e as soluções encontradas discutidas com a turma.

Como forma de registro, o aluno pode copiar as figuras das atividades para um editor de texto e enviá-las por email para avalição.

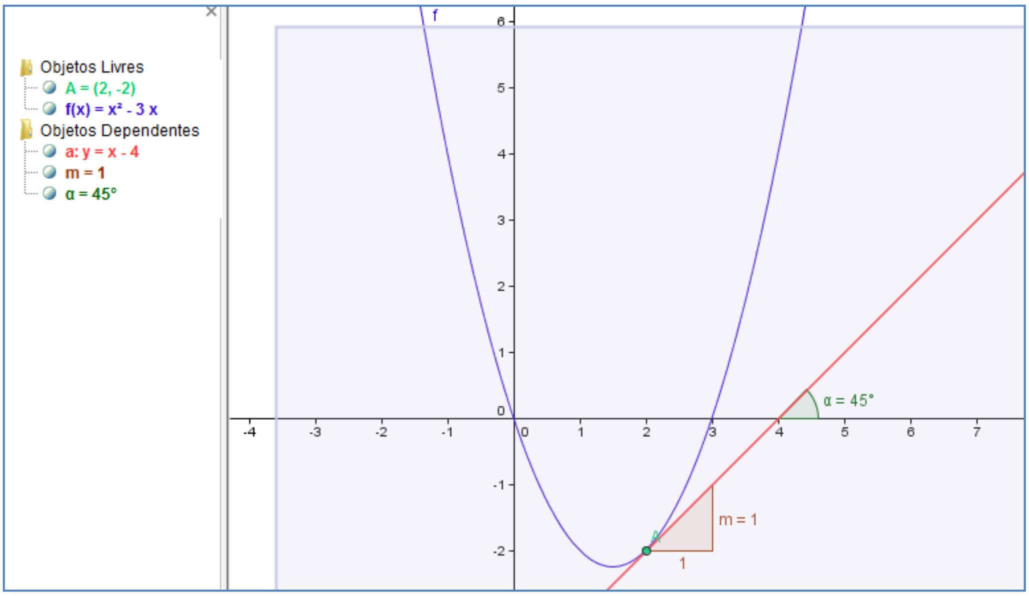

Fig 4: ilustração da atividade Conhecendo o Geogebra (3).

2.3. Atividades Exploratórias de "Pré-Cálculo"

A seguir serão apresentadas trinta atividades abordando o conteúdo de funções: Conceito de função; imagem e domínio de função; função injetora bijetora, par, ímpar e inversa; pontos máximos e mínimos; função de 1º grau; função de 2º grau; função modular; função de várias leis; função exponencial; função logarítmica e função trigonométrica. As questões são apresentadas de maneira a levar o aluno a uma visualização de conceitos e propriedades envolvendo o estudo de funções. Algumas atividades são apresentadas como um exercício de aplicação de conceitos desenvolvidos em atividades anteriores.

Foram ainda apresentadas algumas figuras ilustrativas (essas não são mencionadas nas atividades) para melhor compreensão do aplicador, não são recomendáveis suas inclusões nas atividades propostas ao aluno.

Atividades

1. Construa o gráfico da função f(x) = $0.1x^3 - 0.4x^2 - 0.5x + 5$, um seletor a, os pontos A (a, f(a)), A'(a, 0), C(0, 0), um segmento AA' e outro segmento unindo A' e C (sugestão: altere cor e espessura dos segmentos) conforme ilustrado na figura seguinte.

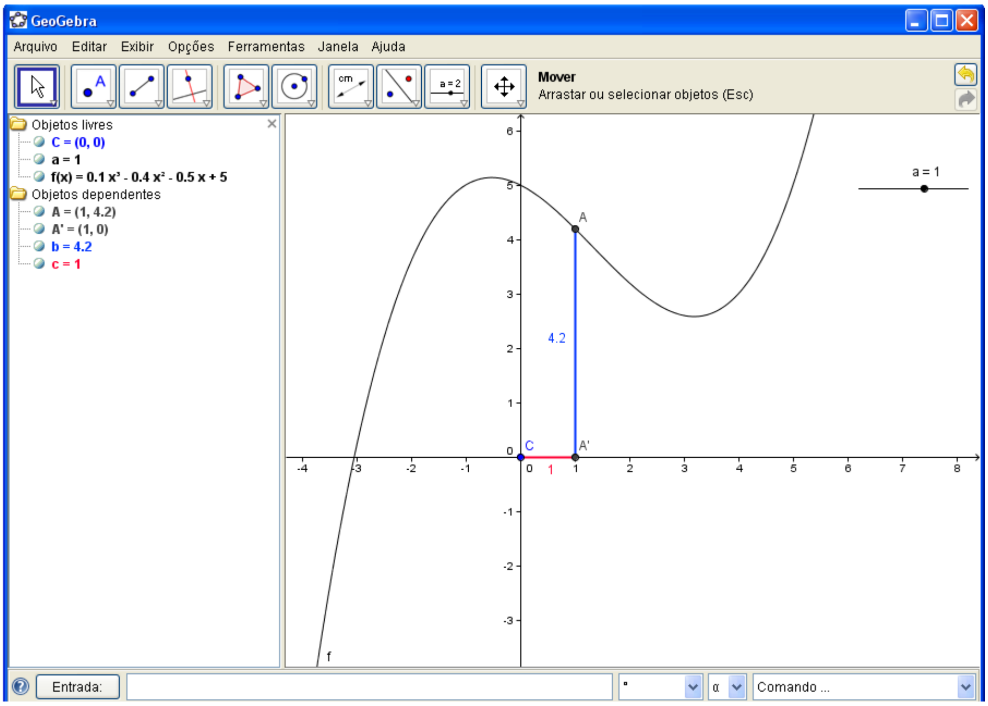

Fig. 5: Questão 1

a) Calcule as medidas desses segmentos.

b) O que representam os pontos A e A' na função f(x)?

c) Mova o ponto do seletor e descreva o comportamento dos segmentos AA' e A'C.

d) Qual é a relação entre a medida do segmento AA' e a imagem da função no ponto A'?

e) Pode-se afirmar que na função f(x) o ponto A' poderia percorrer toda a extensão do eixo x (desconsidere o limite de intervalo do seletor a)? Represente o conjunto de valores que A' pode assumir.

f) Escreva o conjunto de valores possíveis para as medidas do segmento AA' utilizando valores positivos para indicar os segmentos construídos acima do eixo x e negativos para aqueles construídos abaixo do eixo x.

2. Utilizando o gráfico anterior e o comando "tangente" construa a tangente de f(x) no ponto A (Entrada: Tangente [A, f(x)]).

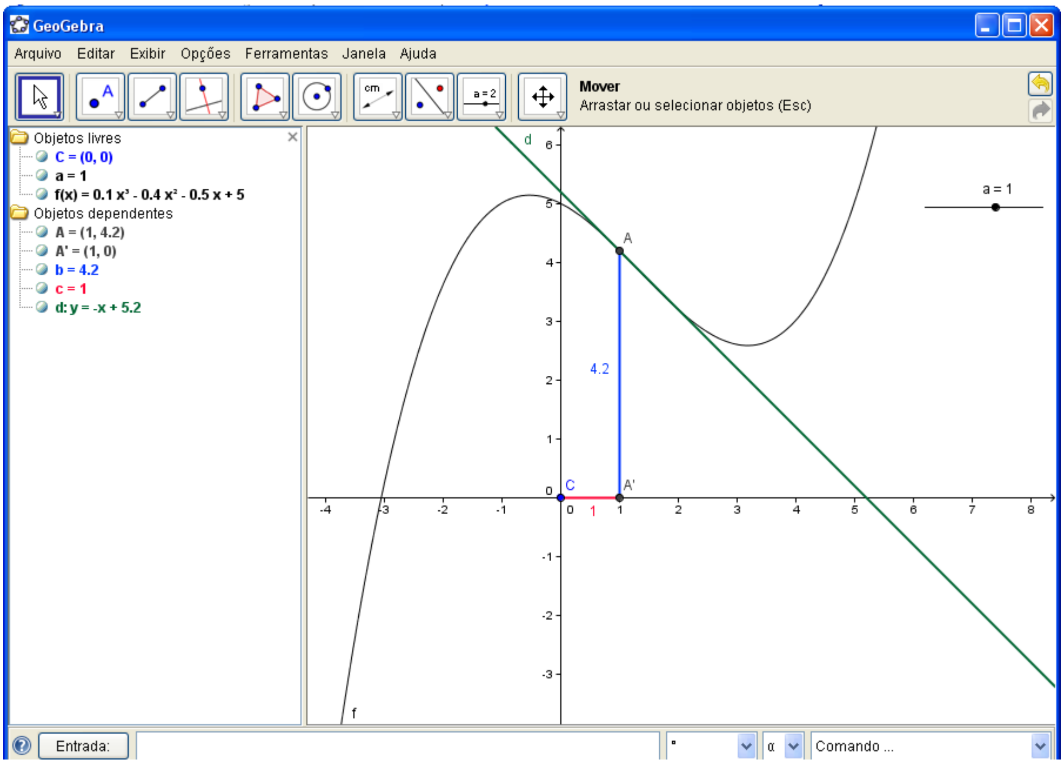

Fig. 6: ilustração da atividade 2

Agora responda as questões seguintes:

a) O que se observa em relação à reta tangente quando se move o seletor a?

b) Observando a equação da reta tangente na janela algébrica determine a relação existente entre o coeficiente angular da reta tangente e sua inclinação na janela gráfica.

c) Há pontos na função f(x) onde a reta tangente é uma função constante, ou seja, tem inclinação zero? Em quantos pontos?

d) Nesse cenário, o que significa dizer que uma função é decrescente no intervalo [a, b]?

e) Destaque no gráfico da função f(x), o intervalo (aproximado) onde f(x) é decrescente. (sugestão: habilite o rastro do ponto A)

3. Construa o gráfico da função $h(x) = x^3$. Sobre essa função, responda:

a) É crescente em que intervalos?

b) É decrescente em que intervalos?

c) Existe algum ponto em que a função possui reta tangente de inclinação zero? Qual?

4. Construa o gráfico da função $g(x) = \sqrt{x+2}$ e encontre o domínio e a imagem de g(x).

5. Utilizando o gráfico anterior construa um seletor a, um ponto A(a,0), uma reta perpendicular ao eixo x e que passe por A (utilize a ferramenta reta perpendicular, clique em A e no eixo x) e um ponto de interseção entre essa reta e a curva g(x). Responda:

a) É possível a interseção da reta vertical com a curva para toda extensão do eixo x?

b) Qual é a relação entre o domínio e a interseção da reta vertical na função g(x)?

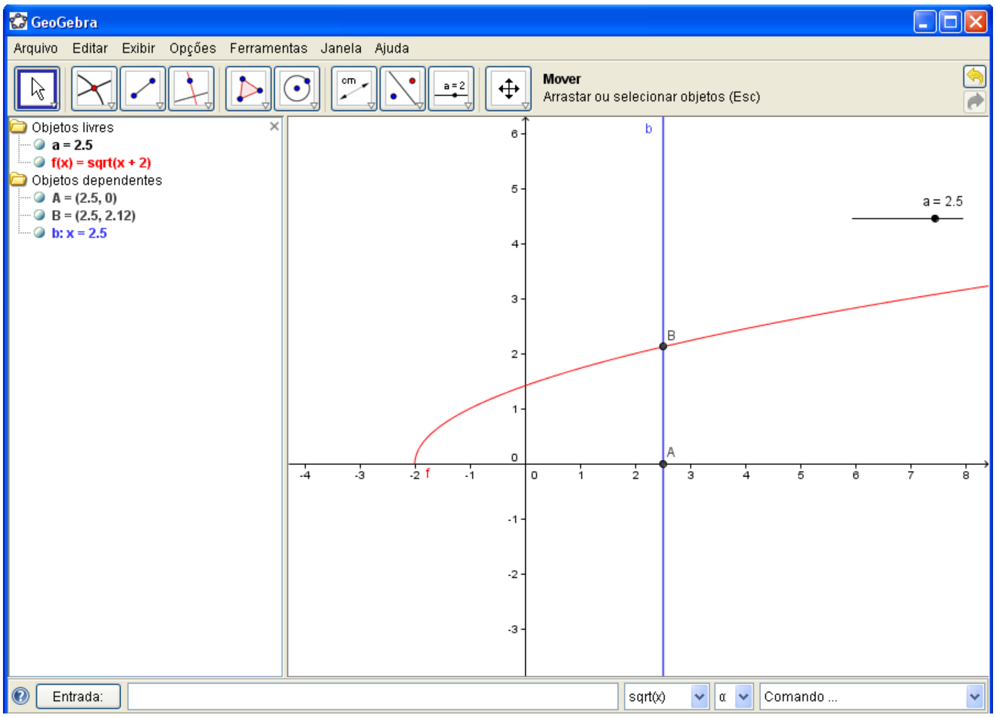

Fig. 7: ilustração da atividade 5

6. Repita os mesmos procedimentos da questão 5 para a equação: $y^2 - x = 0$ e diga se essa curva é uma função em x. Justifique sua resposta.

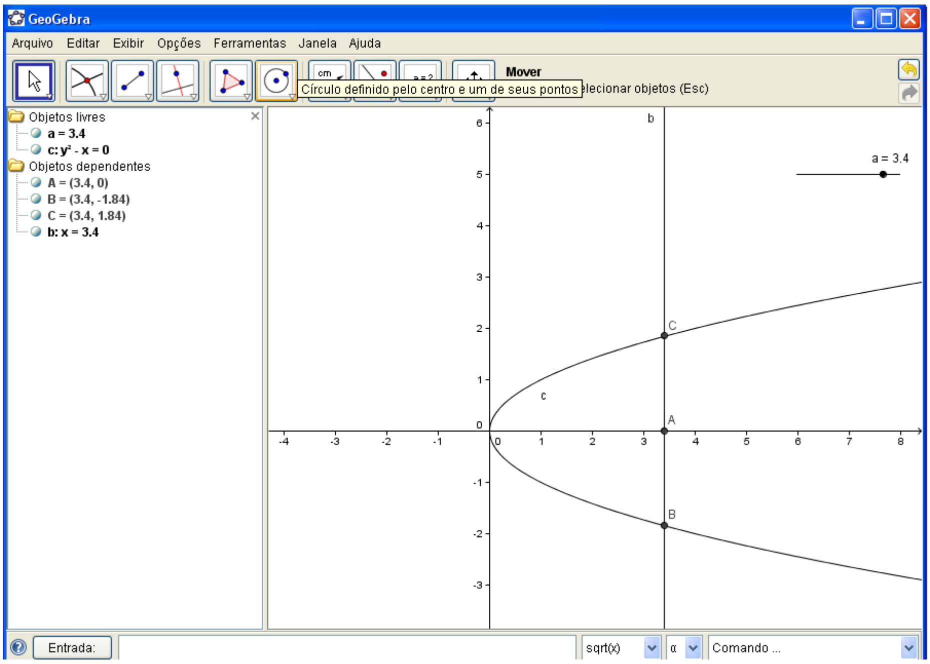

Fig. 8: ilustração da atividade 6

7. Pesquise os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora e crie um roteiro no Geogebra para mostrar quando uma função é injetora, sobrejetora e bijetora.

8. Construa o gráfico da função $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ e responda:

a) Qual é o domínio da função f ?

b) Qual é a imagem da função f ?

c) A função f é injetora? Por quê?

Uma função f é denominada par quando f(x) = f(-x), para todo x do domínio f. Isto, graficamente, dá o efeito de simetria em relação ao eixo y (x=0). Sendo assim, através do Geogebra podemos verificar se uma função é par com o seguinte procedimento: construir o gráfico da função, um seletor a, um ponto A sobre a curva da função, fazer a reflexão do ponto A em relação ao eixo y (utilize a ferramenta “reflexão com relação a uma reta” e clique no ponto A e no eixo y) e para melhor visualização, mude a cor do ponto A’ (criado a partir da reflexão de A). Assim, movendo o ponto A na função e se ponto A’ percorrer exatamente a curva da função, então pode-se dizer que a função é par. Veja ilustração:

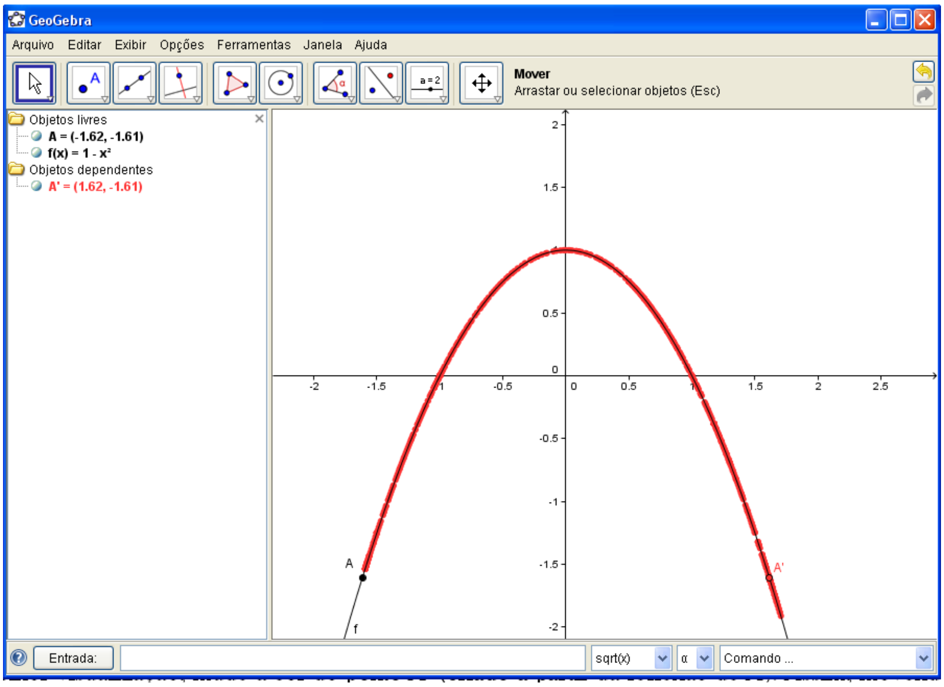

Fig. 9: Função f(x) = 1 – x²

9. Adotando o procedimento descrito anteriormente, verique se é par:

a) $f(x) = 3x^2 - \sqrt{4 - x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2}$

10. Sabendo-se que uma função é impar quando f(x) = - f(-x) crie um roteiro no Geogebra para verificar se uma função é ímpar.

11. Crie um roteiro no Geogebra de modo que dada uma função e um ponto A sobre seu gráfico seja possível a construção da inversa dessa função através do movimento do ponto A (lembre-se que a função inversa é simétrica em relação à reta y=x).

12. Esboce o gráfico da função inversa de $f(x) = 0.1x^3 - 0.4x^2 - 0.5x + 5$, utilizando o roteiro anterior.

13. Construa quatro seletores: “a”. ”b”, “c” e “d”. Construa uma função $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$. Variando os valores de a, b,c e d, encontre um gráfico que tenha, para o intervalo [-2, 2] dois pontos de mínimo bem próximos de y = 0 e um ponto máximo em y = 5.

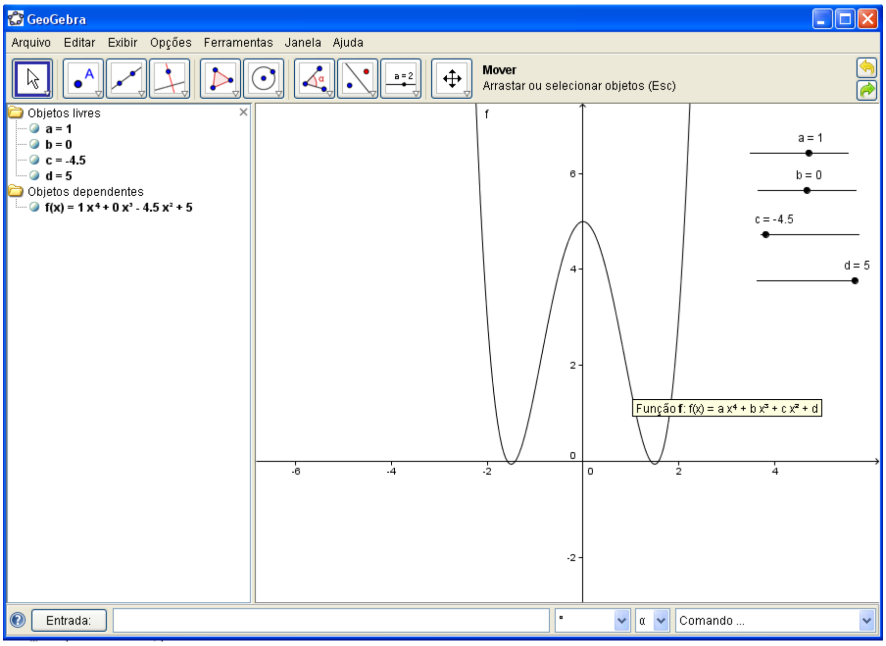

Fig. 10: ilustração da atividade 13

14. Construa os seletores a e b, uma função f(x) = ax + b e responda:

a) O que ocorre com o gráfico quando se varia apenas o valor de a?

b) E quando se varia o valor de b?

15. Construa os seletores a, b e c, uma função f(x) = ax² + bx + c e responda:

a) O que ocorre com o gráfico quando se varia apenas o valor de a?

b) E quando se varia o valor de c?

c) Qual é a relação dos pontos de máximo ou mínimo com o valor de a?

16. Construa um seletor a (variando de -10 a 10) e o gráfico da função $f(x)=|0.5x^2-a|$. O que você observa no gráfico quando é movido o seletor a?

17. Construa o gráfico das funções $f(x)=|x^2-3x+4|$.e $g(x)=|x-1|$.

18. O Geogebra tem o recurso de construção de gráfico sob condições pré-definidas. O comando “Se” é a ferramenta para esse fim. Ele trabalha com a seguinte lógica: Se[condição, se verdadeiro, se falso]. Por exemplo: $f(x)=\begin{cases} x^2, & se\, x \le 0 \\ x-3, & se\, x>0 \end{cases}$, na linha de entrada: f(x) = Se [x > 0, x - 3, x²]. Use o comando “se” para construir o gráfico da função $f(x)=|-x^2+3x-2|$.

19. Construa o gráfico da função $g(x)=\begin{cases} x^2+1, & se\ x<0 \\ x-3, & se\ x\geq 0 \end{cases}$

20. Construa o gráfico da função $h(x)=\begin{cases} 5, & se\ \ x<0 \\ x^2\ , & se\ 0\leq x\leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & se\ x>3 \end{cases}$. Dica: use outro comando "Se" dentro da condição falsa.

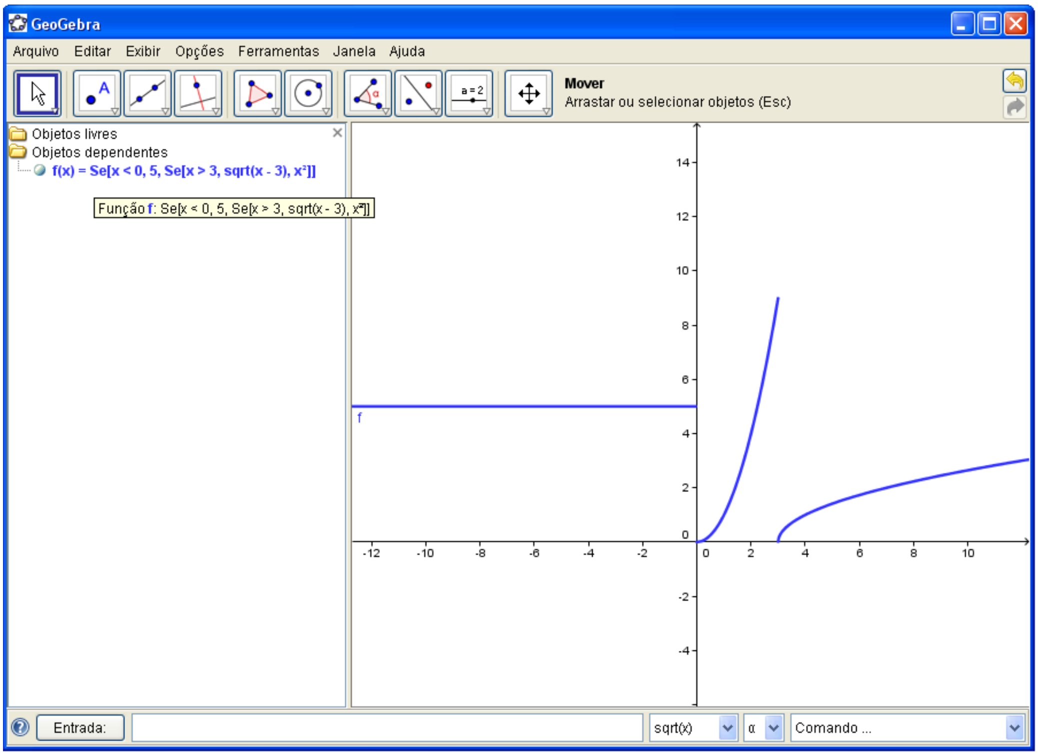

Fig. 11: ilustração da atividade 20

21. Construa os seletores a e b, o gráfico da função g(x) = a^x + b e responda:

a) É possível a construção contínua do gráfico de g(x) para quaisquer valores de a? Se negativo informe os valores para os quais é possível a construção do gráfico contínuo para g(x).

b) Para quais valores de a tem-se g(x) crescente, decrescente e constante?

c) Qual é a relação entre valor de b e a interseção de g(x) com o eixo y?

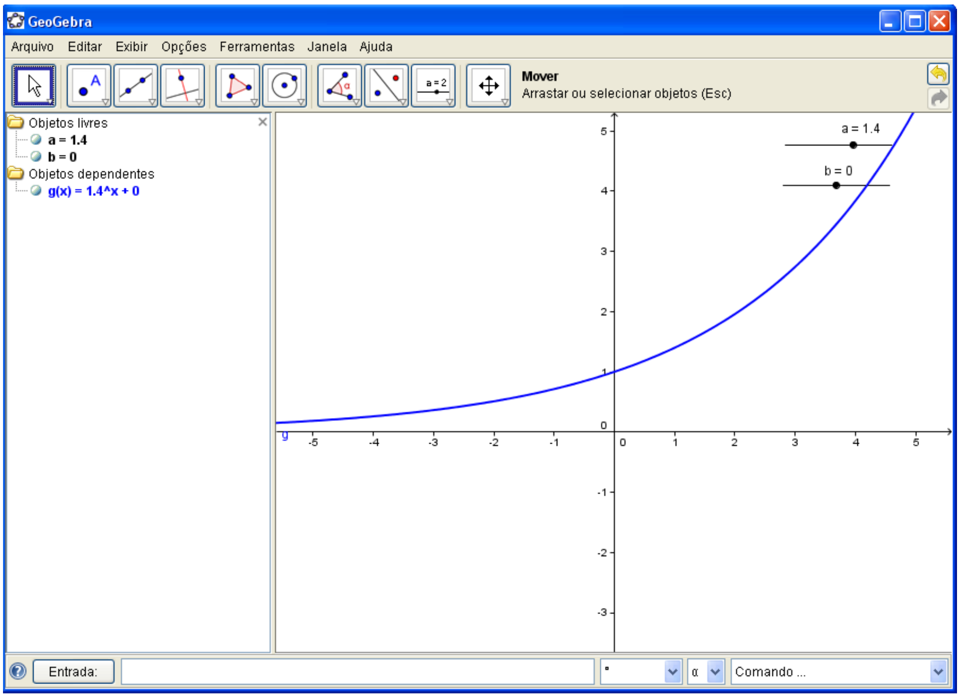

Fig. 12: ilustração da atividade 21

22. Utilize o gráfico anterior, selecione um valor para a $(a \neq 1 \; e \; a > 0)$, marque um ponto A sobre a curva de g(x), uma reta tangente à g(x) no ponto A (entrada: "tangente[A,g(x)]") e responda: qual é a relação entre o valor de b e a inclinação da reta tangente à curva quando se move o ponto A para valores de y muito pequenos?

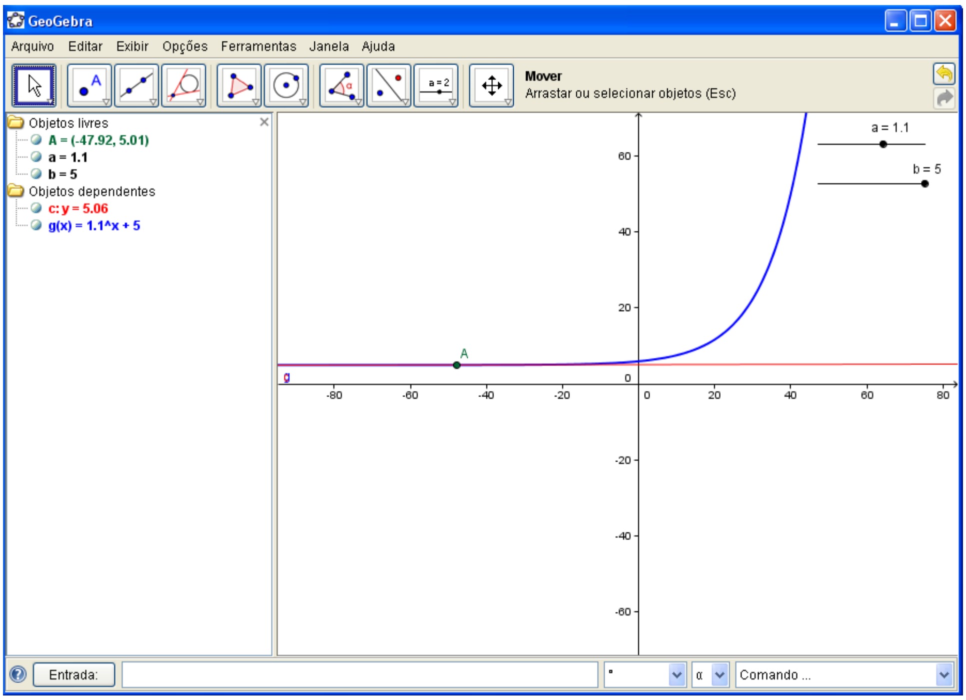

Fig. 13: ilustração da atividade 22

23. Construa o gráfico da função $f(x) = e^x$.

24. Construa o gráfico da função $g(x) = \ln(x)$. Construa o gráfico de sua função inversa, observando o procedimento desenvolvido na questão 11 e compare-o com o gráfico da função $f(x) = e^x$.

25. O software Geogebra tem como entrada apenas o logaritmo natural (ln) e o decimal (lg). Indique uma maneira de representar a função $f(x) = \log_2 x$.

26. Construa um seletor a e o gráfico da função $f(x) = \log_a x$. Mova o seletor e responda:

a) Para quais valores de a é possível a construção contínua do gráfico de f(x)?

b) Para os valores possíveis de a, qual a característica comum a todos os gráficos das funções $f(x) = \log_a x$.

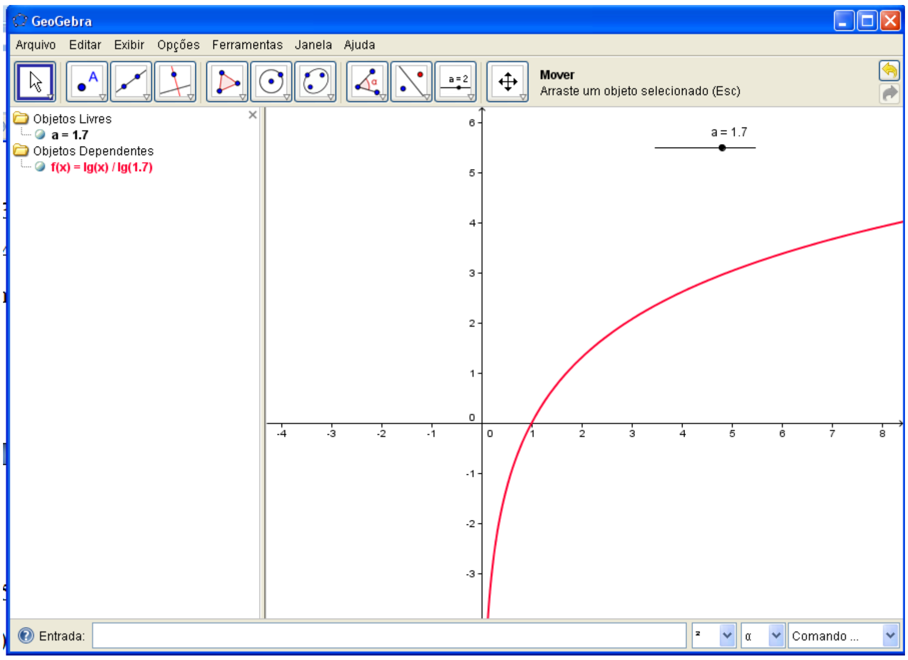

Fig. 14: ilustração da atividade 26

27. Construa um ponto A sobre a curva de f(x) da questão anterior e uma reta tangente a essa curva no ponto A. Para quais valores de a tem-se sempre uma reta tangente crescente, ou seja, temos f(x) crescente? E decrescente?

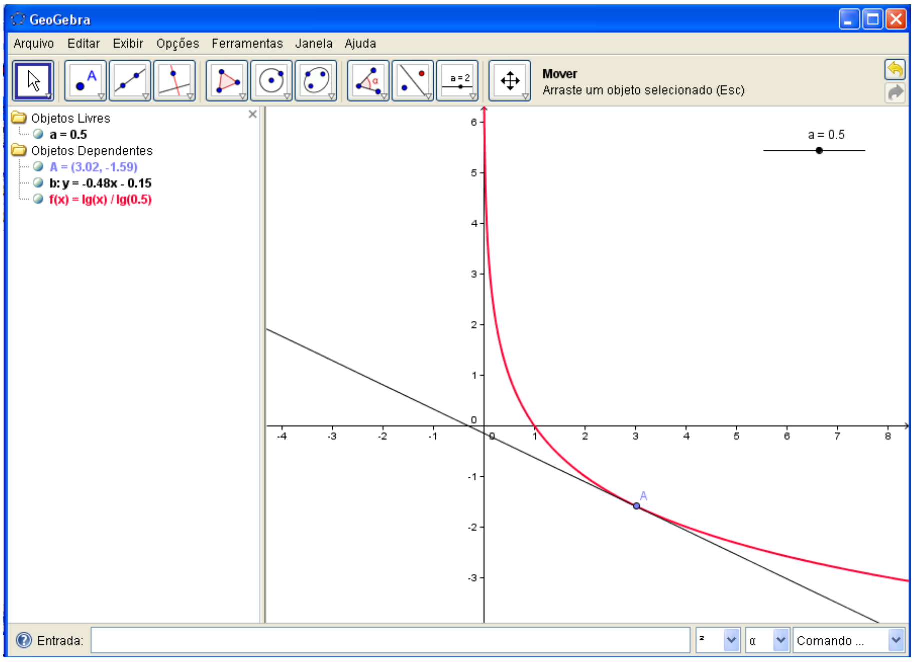

Fig. 15: ilustração da atividade 27

28. Construa o gráfico da função f(x) = cos (x) e responda às questões seguintes.

Para as construções de gráficos de funções trigonométricas é interessante mudar a configuração da “Janela de Visualização” do Geogebra. Clique com o botão direito na parte gráfica e configure a Janela de Visualização no eixo x para a unidade π e distância π/2.

a) Qual é o conjunto imagem de f(x)?

b) Qual é o período de f(x), ou seja, para qual intervalo o formato da curva se repete?

c) No intervalo [0, 2 π], é possível determinar os valores máximos e mínimos de x? Quais são eles?

d) Ainda para o intervalo [0, 2 π], quais são as raízes da função f(x)?

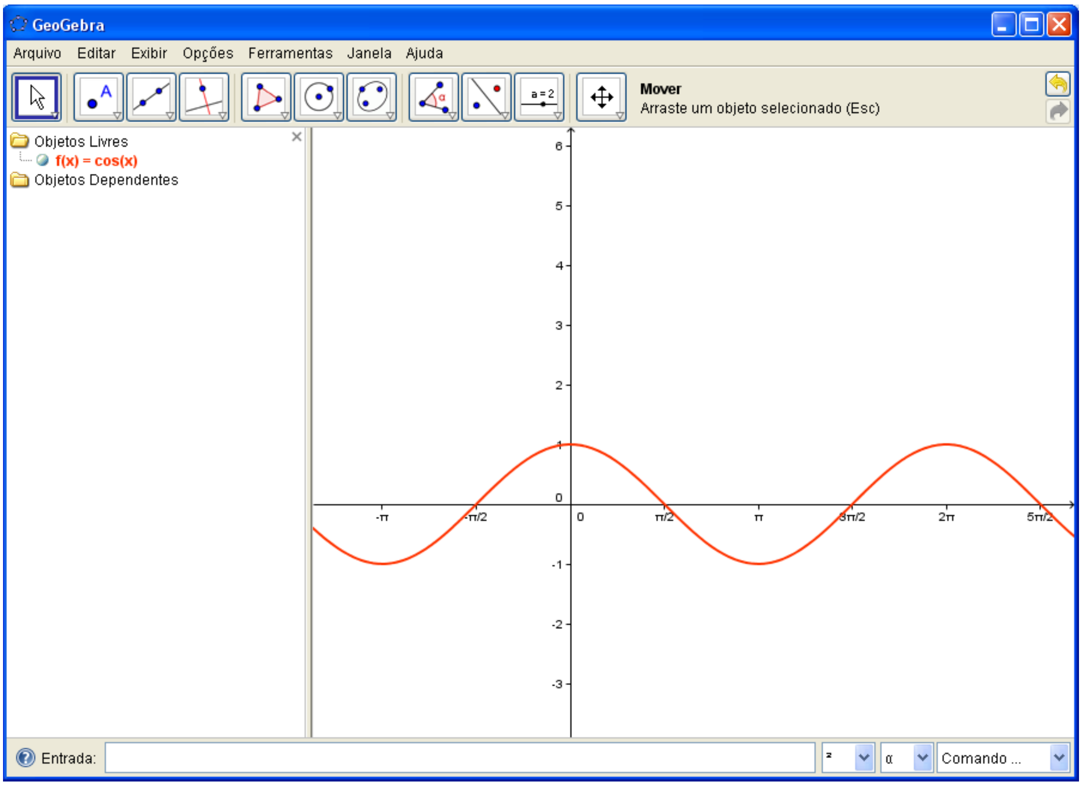

Fig. 16: ilustração da atividade 28

29. Responder as questões anteriores considerando as funções g(x) = sen(x) e h(x)= tg(x).

30. Construa os seletores *a*, *b*, *c* e *d*, o gráfico da função f(x) = *a* sen(*b*x+*c*) + *d* e determine o que acontece com o gráfico quando move-se apenas :

a) o seletor *a*?

b) o seletor *b*?

c) o seletor *c*?

d) o seletor *d*?

30. Qual é a função correspondente ao gráfico da figura a seguir:

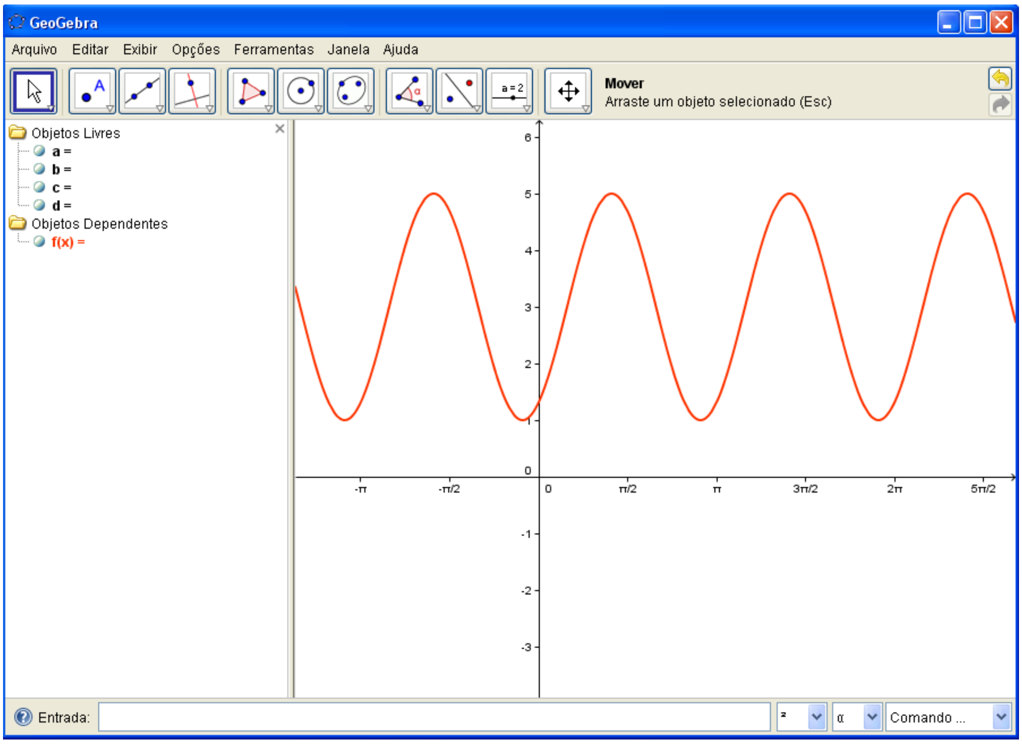

Fig. 17: Questão 30

Após a aplicação das atividades anteriores espera-se que os alunos tenham compreendido melhor os conceitos de funções, suas características, as relações entre seus coeficientes e principalmente a relação entre a forma algébrica e geométrica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a pesquisa bibliográfica feita para a realização desse trabalho verifiquei que assim como eu, outras pessoas acreditam nas potencialidades do uso de software para o ensino de Matemática. Dessa forma faz-se necessário que os professores se disponham a refletir sobre suas práticas para implementar atividades que possam contribuir para um melhor aprendizado de seus alunos.

Considerando que a dificuldade de compreensão do Cálculo não é recente, isso nos faz crer que há algo intrínseco aos temas abordados por esse ramo da Matemática, que exige dos professores dessa disciplina um grande empenho para tornar seu estudo menos árduo e mais significativo para seus alunos.

Apesar de não ter sido possível analisar os resultados desse trabalho em sala de aula uma vez que o mesmo não foi realizado, pautando-se nos trabalhos desenvolvidos nos moldes desse (SOARES DE MELLO et. al 2001 e Almeida et. al. 2007) pode-se verificar que os resultados obtidos são favoráveis à aprendizagem dos alunos.

Sendo assim, espero que esse material possa ser utilizado por alunos que irão ingressar no curso de cálculo para que esses tenham melhores condições de acompanhar o curso, desenvolva a habilidade geométrica das funções, posicione de forma mais questionadora e crítica, estando aberto para conjecturar, criar hipóteses e buscar soluções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. W. ; SOUZA, L. G. S. ; FATORI, L. H. . **Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática.** Revista Ciência e Tecnologia, v. 16, p. 47-59, 2007.

ROCHA, Marcos Dias da **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I: estudo de uma porposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.** Ouro Preto, 2010. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, 2010

REZENDE, Wanderley Moura **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** In: Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1º de novembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM)

SOARES DE MELLO, J.C.C.B., SOARES DE MELLO, M.H.C., FERNANDES, A.J.S. **Mudanças no ensino de Cálculo I: histórico e perspectivas**. *In: Anais do XXIX COBENGE - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, Porto Alegre, RS, 2001

VALENTE, J. A. **Análise dos Diferentes Tipos de Software usados na Educação**. In: Valente, J. A. (org.). O Computador na Sociedade do Conhecimento. Campinas: NIED/ Unicamp, 1999.

TORRES, T., GIRAFFA, L. M. M.**O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE**. REVEMAT- Revista Eletrônica de Educação Matemática. , v. 1, p. 1-8, 2009.

PROF2000. **A História do Cálculo.** Direcção Regional de Educação do Centro. Portugal, s.d. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/4238anibal/tarefa7/ficalu3.htm>. Acesso em: 19 out. 2010

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Trad. Maria Aparecida V. Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. 304 p

GEOGEBRA. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/4238anibal/tarefa7/ficalu3.htm>. Acesso em: 19 out. 2010