

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-graduação em Matemática**

Margoth Simón Tacuri

**Fluxos  $cw$ -expansivos**

Belo Horizonte

2023

Margoth Simón Tacuri

## **Fluxos $Cw$ -expansivos**

### **Versão final**

Tese apresentada ao Programa de pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Melo de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Alfonso Artigue.

Belo Horizonte

2023

Tacuri, Margoth Simón.

T119f Fluxos Cw-expansivos [recurso eletrônico] / Margoth Simón  
Tacuri – 2023.

1 recurso online (98 f. il, color.): pdf.

Orientador: Bernardo Melo de Carvalho.

Coorientador: Alfonso Artigue.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática.

Referências: f. 96-97

1. Matemática – Teses. 2. Fluxos CW-expansivos – Teses. 3.  
Propriedade de sobreamento – Teses. 4. Homeomorfismos –  
Teses. 5. Sistemas dinâmicos – Teses. I. Carvalho, Bernardo  
Melo de. II . Artigue, Alfonso. III. Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática. IV. Título.

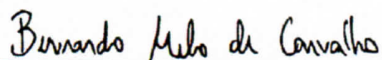
CDU 51(043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*Fluxos cw-hiperbólicos*

**MARGOTH SIMÓN TACURI**

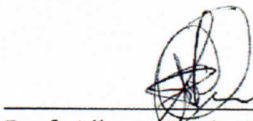
Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:



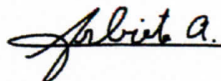
Prof. Bernardo Melo de Carvalho  
UFMG




Prof. Alfonso Artigue  
UDELAR



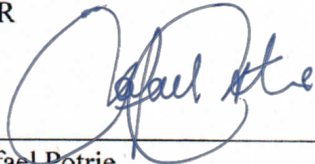
Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera  
UFMG



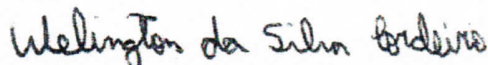
Prof. Alexander Eduardo Arbieta Mendoza  
UFRJ



Prof. José Vieitez  
UDELAR



Prof. Rafael Potrie  
UDELAR



Prof. Wellington Cordeiro  
UNIVESP

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Departamento de Matemática**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

Belo Horizonte, 27 de fevereiro de 2023.

*Dedico este trabalho a todos os professores(as) dedicados  
e comprometidos com o aprendizado de seus alunos.  
Em particular dedico ao professor Samuel Elias.*

Ore, espere e não se preocupe. Nosso misericordioso Senhor ouvirá sua oração.

---

São Agustín

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado força, saúde e permitido que eu concluísse a tese. Também estou muito agradecida por colocar as pessoas mencionadas abaixo.

Aos meus pais e toda minha família, obrigada pelo apoio e amor.

Ao meu orientador, Bernardo Carvalho, pela disponibilidade na orientação e o apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Alfonso Artigue. Sou grata por todas as suas correções e pelo tempo dedicado em todos estes anos, sua participação foi muito importante para a conclusão deste trabalho, o fato de saber que estava indo no caminho certo foi importante para me animar a continuar.

Aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes na minha vida com certeza. Ao Wilson, por todo o tempo que me deu, por sua companhia e por sempre acreditar em mim me dando incentivo, sempre serei grato a você.

Aos professores e funcionários do DMAT-UFMG, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante este período.

Finalmente, e não menos importante, sinto-me grato com Deus por ter me permitido chegar ao país do Brasil. Chegar ao Brasil foi uma grande aventura, mas foi bastante difícil porque estava longe de casa, este país me acolheu da melhor forma. Sou muito abençoada por todas as oportunidades que tive e tenho neste país, o Brasil sempre estará em minhas orações.

# Resumo

TACURI, Margoth Simon, M.Sc., Universidade Federal de Minas Gerais, fevereiro de 2023. **Fluxos Cw-hiperbólicos**. Orientador: Bernardo Melo de Carvalho. Co-orientador: Alfonso Artigue

Apresentaremos, nesta tese, consequências dos fluxos Cw-expansivos e Cw-hiperbólicos. Num primeiro cenário estudamos os conjuntos estáveis e instáveis dos fluxos cw-expansivos. Generalizamos os resultados descritos no [13, Lema 4], [13, Lema 5] e [5, Lema 6.4], provando que os fluxos cw-expansivos definidos em um Peano continuum possuem um continuum em cada conjunto estável e instável.

No segundo cenário, definimos a propriedade de Cw-estrutura de produto local (Cw-Epl) e uma propriedade mais forte chamada de propriedade  $H^*$ . Mostramos que os fluxos expansivos satisfazendo a estrutura de produto local (Epl) satisfazem a propriedade  $H^*$ . Finalmente, provamos que os fluxos Cw-expansivos satisfazendo a propriedade  $H^*$  possuem a propriedade de sombreamento.

**Palavras-chaves:** Fluxos cw-expansivos, propriedade de sombreamento e estrutura de produto local.

# Abstract

TACURI, Margoth Simon, M.Sc., Universidade Federal de Minas Gerais, March, 2023.  
**Cw-hyperbolic flows.** Adviser: Bernardo Melo de Carvalho. Co-adviser: Alfonso Artigue

In this thesis, we will present consequences of Cw-expansive and Cw-hyperbolic flows. In a first scenario we study the stable and unstable sets of Cw-expansive flows. We generalize the results described in [13, Lemma 4], [13, Lemma 5] and [5, Lemma 6.4], proving that cw-expansive flows defined in a Peano continuum have a continuum in each stable and unstable set.

In the second scenario, we define the Cw-local product structure property (Cw-Epl) and a stronger property called the  $H^*$  property. We show that the expansive flows satisfying the local product structure (Epl) satisfy the property  $H^*$ . Finally, we prove that cw-expansive streams satisfying the  $H^*$  property have the shading property.

**Keywords:** cw-expansive flows, shading property and local product structure.

# Lista de Figuras

1	Seção transversal $H_r^*$ . . . . .	19
1.1	$D = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k, A_k = \Phi_{\alpha_k}^{r_k}(D_k)$ . . . . .	35
1.2	$x' = \phi_{t_0} x$ . . . . .	38
2.1	$(\delta, a)$ -pseudo órbita . . . . .	49
2.2	$\varepsilon$ -sombreamento de uma $(\delta, a)$ -pseudo órbita $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^{n-1})$ . . . . .	50
2.3	Os $\mu_i$ são tempos tal que $\phi_{-\mu_i} x_i = x'_i$ e $\phi_{t_{i-1}-\mu_i-\mu_{i-1}} x_{i-1} = x''_{i-1}$ . . . . .	54
2.4	Os pontos $\bar{y}$ e $\bar{x}$ não necessariamente se acompanham com a reparametrização $\alpha$ . . . . .	55
2.5	Sombreamento da $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$ . . . . .	59
2.6	Sombreamento da $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita $(\{x_i\}_1^{n-1}, \{t_i\}_1^{n-1})$ . . . . .	61
3.1	Seção transversal $H_r^*$ . . . . .	76
3.2	Os $\mu_i$ localizados no gráfico representam os tempos que leva para ir de um ponto ao próximo ponto, ou seja, $\phi_{-\mu_i} x_i = x'_i$ e $\phi_{t_{i-1}-\mu_i-\mu_{i-1}} x_{i-1} = x''_{i-1}$ . . . . .	85
3.3	Construção da sequência de pontos $(z_i)_2^{n-1}$ . . . . .	86
3.4	$z_{n-1}$ acompanha à órbita de $x'_{n-1}$ até o tempo $t'_{n-1}$ e à órbita de $x_n$ até o tempo $t_n$ . . . . .	89

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1 EXISTÊNCIA DE CONTINUUMS ESTÁVEIS E INSTÁVEIS PARA FLUXOS CW-EXPANSIVOS</b>	<b>21</b>
1.1 Definições e propriedades básicas . . . . .	21
1.1.1 Fluxos cw-expansivos . . . . .	22
1.1.2 Seções transversais . . . . .	22
1.2 Conjuntos estáveis e instáveis . . . . .	24
1.3 Expansividade e cw-expansividade uniforme . . . . .	28
1.4 Família de conjuntos estáveis e instáveis . . . . .	31
1.5 Existência de continuums estáveis e instáveis em cada ponto . . . . .	33
<b>2 A PROPRIEDADE DE SOMBREAMENTO PARA FLUXOS EXPANSIVOS</b>	<b>42</b>
2.1 A propriedade de estrutura de produto local fraco . . . . .	43
2.2 Seções Transversais $H^*$ . . . . .	45
2.3 Sombreamento para fluxos expansivos . . . . .	48
<b>3 SOMBREAMENTO PARA FLUXOS CW-EXPANSIVOS</b>	<b>63</b>
3.1 Cw-estrutura de produto local . . . . .	63
3.1.1 Conjugação da Cw-epl . . . . .	64
3.1.2 Suspensão de homeomorfismos Cw-hiperbólicos . . . . .	66
3.2 Função métrica . . . . .	70
3.3 A propriedade $H^*$ . . . . .	75
3.3.1 Conjugação cinemática . . . . .	77
3.3.2 Exemplos de fluxos satisfazendo a propriedade $H^*$ . . . . .	80
3.4 Sombreamento de fluxos cw-expansivos com a propriedade $H^*$ . . . . .	82
3.4.1 Sombreamento nas seções transversais . . . . .	83
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>96</b>

# INTRODUÇÃO

O estudo do sistemas dinâmicos é usualmente modelado como discreto ou contínuo, ambas categorias estão fortemente relacionadas e várias definições e resultados podem ser traduzidos. Por exemplo, a expansividade é uma propriedade topológica que proporciona informação da trajetória de condições iniciais distintas tanto no tempo contínuo como o discreto.

Em [9], Lewowicz provou que um homeomorfismo expansivo de uma superfície é conjugado com um mapa de Anosov ou Pseudo Anosov. Este resultado e os métodos usados para prová-lo indicam que vários fatos da dinâmica hiperbólica são validos no caso expansivo. Em [4], Kato introduz uma generalização da expansividade, denominada *cw-expansividade*. Dizemos que  $f : X \rightarrow X$  é *cw-expansive* se existe  $c > 0$  tal que  $\Gamma_c(x)$  é totalmente desconexo para todo  $x \in X$ , onde  $\Gamma_c(x)$  é a bola dinâmica definida por

$$\Gamma_c(x) = W_c^s(x) \cap W_c^u(x).$$

Nesses sistemas podem existir bolas dinâmicas contendo conjuntos de Cantor, como é o caso do Pseudo-Anosov na esfera  $S^2$ .

Indo para o caso contínuo, a noção de expansividade no estudo de fluxos foram estudadas no início dos anos 70, e atualmente os conceitos usuais de expansividade usadas são os de Bowen, na ausência de singularidades, e de Komuro, na presença das mesmas.

Seja  $(X, \phi)$  um fluxo  $\phi$  definido em um espaço métrico compacto  $X$ . Dizemos que  $(X, \phi)$  é *expansivo* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua com  $s(0) = 0$  e  $d(\phi_t x, \phi_{s(t)} y) \leq \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  então  $y \in \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)} x$ . Isso indica que quaisquer 2 órbitas se separarão  $\delta$  em algum momento, não importa como você as reparametrize (uma delas).

Uma questão natural que segue é a de estender tal conceito. Nessa direção, a

teoria de fluxos cw-expansivos surgiu na tese de doutorado de W. Cordeiro [5] e se expandiu no trabalho de A. Artigue [11] para fluxos singulares.

Um primeiro passo para nos introduzir no mundo dos fluxos cw-expansivos, é explorar seus conjuntos estáveis e instáveis. No caso do tempo discreto, H. Kato em [4], demonstrou que para homeomorfismos cw-expansivos existe um continuum (compacto e conexo) para cada conjunto estável e instável local.

No caso do tempo contínuo, M. Paternain mostrou em [13, Lema 4] a não existência de pontos estáveis para fluxos expansivos, e como consequência disto, mostrou no [13, Lema 5] a existência de um continuum para cada conjunto estável e instável. Para fluxos cw-expansivos temos alguns avanços, W. Cordeiro, em um artigo resultante de sua tese de doutorado [5], obteve um continuum estável ou instável desde que exista uma seção transversal com dimensão topológica maior que zero. Assim, o primeiro objetivo da tese é demonstrar que fluxos cw-expansivos possuem continuums em cada conjunto estável e instável.

Por outro lado, é importante realçar que a complexidade das definições no caso do tempo contínuo, torna muito difíceis as traduções das diversas propriedades do caso discreto para o contínuo. Até agora várias técnicas foram desenvolvidas. Por exemplo, em [1] e [5] é usado como ferramenta principal as seções transversais finitas (veja [10]) para o estudo das diversas propriedades de fluxos expansivos. E em [3], é usada a técnica de seções transversais locais, isto é, se  $(X, \phi)$  é um espaço métrico compacto então existe um campo de seções transversais  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  monótono, simétrico. Durante o trabalho da tese, observamos que trabalhar com seções transversais finitas ainda torna complicado o estudo dos fluxos. Portanto, nesta tese usaremos a técnica de seções transversais locais para traduzir algumas definições e resultados de sistemas dinâmicos topológicos discretos para contínuos em espaços métricos compactos.

Por outro lado, outra ferramenta fundamental no estudo de sistemas dinâmicos são as propriedades de *sombreamento* e da *estrutura de produto local* (Epl). No tempo contínuo, dizemos que  $(X, \phi)$  possui a propriedade de Epl, se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in X$  e  $d(x, y) \leq \delta$  então existe um único  $v = v(x, y)$  com  $|v| \leq \varepsilon$  tal que

$$W_\varepsilon^s(\phi_v x) \cap W_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Sistemas satisfazendo as propriedades de expansividade e Epl são usualmente chamadas de *topologicamente hiperbólicas*.

A estrutura de produto local é de maneira geral uma propriedade mais fraca que a propriedade de sombreamento, no entanto para fluxos expansivos, a estrutura de produto local implica a propriedade de sombreamento (ver [1]). Isso se deve ao fato de que a expansividade possui boas propriedades nos conjuntos estáveis e instáveis locais, fato que não ocorre para fluxos que não são expansivos.

No caso do tempo discreto, um problema interessante se torna então classificar os homeomorfismos cw-expansivos satisfazendo a propriedade de sombreamento. Existem alguns trabalhos bastante recentes sobre esse problema contendo avanços consideráveis. Todos os resultados tendem a indicar que em superfícies, tais sistemas são topologicamente hiperbólicos, ou possuem dinâmica bem parecida com o Pseudo Anosov em  $S^2$ . Em particular, uma generalização do conceito de estrutura de produto local do caso hiperbólico foi importante para os resultados de ([6]). Denominamos de tal propriedade *cw estrutura de produto local (Cw-Epl)* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então a componente conexa de  $W_\varepsilon^s(x)$  que contem  $x$  intersecta a componente conexa de  $W_\varepsilon^u(x)$  que contem  $y$ . Nos homeomorfismos cw-expansivos, os conjuntos estáveis e instáveis locais são bem mais complicados, de modo que intersectar  $W_\varepsilon^s(x)$  com  $W_\varepsilon^u(x)$  não diz muito sobre a dinâmica, razão pela qual as componentes conexas dos estáveis e instáveis são usados. Além disso, dizemos que um fluxo é cw-hiperbólico se é cw-expansivo e satisfaz a propriedade de Cw-Epl. De acordo com [6], os homeomorfismos cw-hiperbólicos possuem a propriedade de sombreamento e uma decomposição espectral similar ao caso hiperbólico (ver [6]).

Voltando aos sistemas contínuos, uma primeira maneira de explorar o mundo além da hiperbolicidade topológica, seria considerar fluxos satisfazendo a propriedade de sombreamento e alguma generalização de expansividade, como por exemplo a cw-expansividade. A teoria de sombreamento para fluxos singulares se iniciou com M. Komuro em [14] e se desenvolveu com R. Thomas em [1]. Seguindo essa linha, outra questão imediata é a de estender o conceito de Cw-Epl no contexto contínuo e mostrar que fluxos cw-expansivos satisfazendo a Cw-Epl possuem a propriedade de sombreamento, de tal forma que possamos generalizar os resultados de [1] e [6].

Para resolver esse problema, faz-se necessário adaptações de definições usadas

no caso de homeomorfismos cw-expansivos e fluxos expansivos para o contexto de fluxos cw-expansivos. A seguir, descrevemos nossas contribuições dentro dessa linha de pesquisa e está organizada da seguinte forma:

### Existência de continuums estáveis e instáveis para fluxos cw-expansivos

Usando as seções transversais, definimos os conjuntos  $\varepsilon$ -estáveis seccionalmente geométricos e  $\varepsilon$ -instáveis seccionalmente geométricos. Seja  $H_\varepsilon(x) = H(x) \cap B_\varepsilon(x)$  para todo  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Definição.** Para qualquer  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , sejam  $T_\varepsilon^s(x)$  e  $T_\varepsilon^u(x)$  os conjuntos *seccionalmente geométricos  $\varepsilon$ -estáveis* e  *$\varepsilon$ -instáveis* definidos por:

$$T_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^+ \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$T_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^- \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Mostramos que um fluxo é cw-expansivo se e somente se existe um  $\delta > 0$  tal que  $T_\delta^s \cap T_\delta^u = \{A \subset X : \#A = 1\}$ . Por outro lado, um conceito que ajuda na compreensão do comportamento do sistema dinâmico é a estabilidade dos seus pontos. Um ponto  $x \in X$  é *estável* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $H_\delta(x) \subset T_\varepsilon^s(x)$ . No capítulo 1, mostramos o seguinte Teorema.

**Teorema** Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo cw-expansivo definido em um Peano continuum  $X$  então não existem pontos estáveis para  $\phi_t$  e  $\phi_{-t}$ .

E como consequência do teorema descrito, mostramos que para fluxos cw-expansivos definidos em um Peano contínuo a existência de um continuum em cada conjunto estável e instável seccionalmente geométrico.

**Teorema.** Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo definido em um Peano continuum  $X$  e  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade. Se  $\phi_t$  é cw-expansivo, então existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in X$  existem continuums não degenerados  $C_x$  e  $D_x$  tal que  $C_x$  é  $\varepsilon$ -estável,  $D_x$  é  $\varepsilon$ -instável,  $x \in C_x \cap D_x$  e  $\text{diam}C_x = \text{diam}D_x = \delta$ .

Observe que este resultado generaliza os resultados descritos no [13, Lema 4],

[13, Lema 5] e [5, Lema 6.4].

### A propriedade de sombreamento para fluxos expansivos

A propriedade de sombreamento foi demonstrado em [1] e na sua demonstração R. Thomas usa como ferramenta as seções transversais finitas e a seguinte característica de fluxos topologicamente hiperbólicos:

Se  $(X, \phi)$  é um fluxo topologicamente hiperbólico. Então para qualquer  $\lambda > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se

$$d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \leq \delta \quad \text{para todo } T_1 \leq t \leq T_2,$$

então  $|\alpha(t) - t| \leq \lambda$ .

Como foi dito no início, um dos objetivos principais da tese é demonstrar a propriedade de sombreamento para fluxos cw-hiperbólicos, infelizmente para os cw-expansivos não conseguimos obter informação das reparametrizações de dois condições iniciais, desde que as órbitas delas se acompanhem até um tempo, ou seja, a propriedade descrita acima. Isso, dificultou a demonstração e tivemos que usar outras ferramentas. Logo, nesta tese ( capítulo 2) a propriedade de sombreamento para fluxos topologicamente hiperbólicos é alcançado, no entanto, por técnicas novas, sem usar o resultado descrito no paragrafo anterior e usando seções transversais locais, de tal forma que possamos estender essa prova para o caso cw-expansivo.

Chamamos de caixas de fluxo associado a  $H$  ao campo  $F : X \rightarrow H$ , definido por  $F(x) = \phi_{[-\tau, \tau]} H(x)$ . Definamos o fluxo projeção  $\pi_x : F(x) \rightarrow H(x)$  definido por  $\pi_x(y) = \phi_t(y) \in H(x)$  com  $|t| \leq \tau$ . No capítulo 2, mostramos a existência de um campo de seções transversais  $H^*$  para fluxos topologicamente hiperbólicos.

**Teorema.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo topologicamente hiperbólico definido no espaço métrico  $X$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que a aplicação  $H_r^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definida por

$$H_r^*(x) = \bigcup_{z \in \pi_x(W_r^s(x))} \pi_z(W_r^u(z)),$$

é um campo de seções transversais para todo  $r \in (0, \varepsilon]$ .

O motivo pela qual é definido a seção  $H^*$  é para garantir a estrutura de pro-

duto local transversal, isto é, se dois pontos contidos na seção transversal  $H^*$  estão próximos então os conjuntos estáveis e instáveis seccionalmente geométricas locais se interceptam, observamos que não necessariamente é verdadeira para uma seção transversal arbitraria  $H(x)$  mesmo sendo topologicamente hiperbólica. Seja o conjunto  $\mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})^i = \{\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^i : |\alpha(t) - t| \leq \tau\}$  para  $i = +, -$ . De fato, mostramos o seguinte resultado

**Proposição.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivos satisfazendo a Epl e  $B_r(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in H_\delta^*(x)$  então

$$T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Além disso, a interseção é um único ponto e satisfaz a seguinte condição:

$$\begin{aligned} a \in T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) \quad \Rightarrow \quad & \exists \alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R}) \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)}a \in H_\varepsilon(\phi_t x) \quad \forall t \geq 0 \\ & \text{e } \phi_{\alpha(t)}a \in H_\varepsilon(\phi_t y) \quad \forall t \leq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, logramos demonstrar o Teorema de sombreamento:

**Teorema.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a propriedade de Epl Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \bar{\delta} > 0$  tal que cada  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo orbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z$ .

### Fluxos cw-hiperbólicos e a propriedade $H^*$

Começamos definindo a propriedade de Cw-estrutura de produto local( Cw-Epl) e os fluxos cw-hiperbólicos. Para defini-los, denotemos por  $C_\varepsilon^s(x)$  e  $C_\varepsilon^u(x)$  as componentes conexas de  $W_\varepsilon^s(x)$  e  $W_\varepsilon^u(x)$  respectivamente, tais que contem  $x$ .

**Definição.** Dizemos que  $(X, \phi)$  possui a *cw-estrutura de produto local* se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então existe  $r = r(x, y)$  com  $|r| \leq \varepsilon$  tal que

$$C_\varepsilon^s(\phi_r(x)) \cap C_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Dizemos que  $(X, \phi)$  é um fluxo *cw-hiperbólico* se é *cw-expansivo* e possui a propriedade de *Cw-Epl*. Como exemplos de fluxos *cw-hiperbólicos* temos a suspensão de homeomorfismos *cw-hiperbólicos* e os fluxos de Anosov.

Por outro lado, mostramos que para fluxos *cw-expansivos* existe uma função métrica hiperbólica transversal  $D : \mathcal{L}(X) \rightarrow X$  com

$$\mathcal{L}(X) = \{C \in \mathcal{C}(X) : \exists x \in X \text{ tal que } C \subseteq H(x)\},$$

satisfazendo as propriedades de *hiperbolicidade* e *compatibilidade*: Existe constantes  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\varepsilon > 0$  tal que

- Se  $C \in T_\varepsilon^s$  então  $D(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)})) \leq 4\lambda^t D(C_{(p,q)})$  para todo  $t \geq 1$ ,
- Se  $C \in T_\varepsilon^u(X)$  então  $D(\Phi_\alpha^{-t}(C_{(p,q)})) \leq 4\lambda^t D(C_{(p,q)})$  para todo  $t \geq 1$ .

Traduzindo assim, o resultado da métrica hiperbólica ([6]) do caso discreto para o caso contínuo.

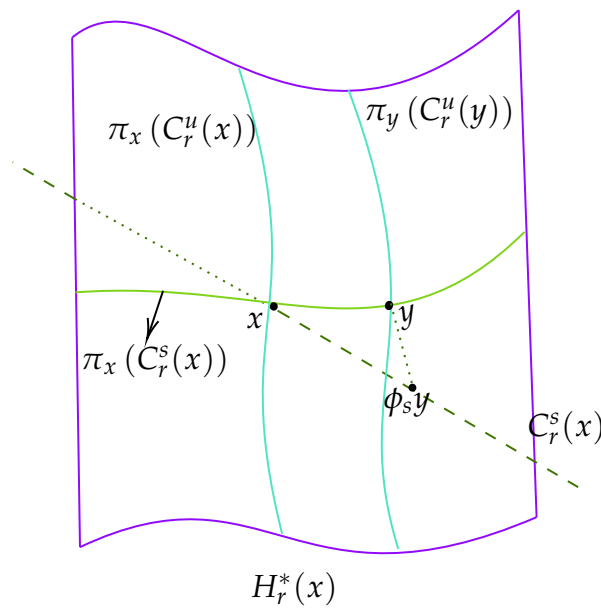
Como foi dito no início, um dos principais objetivos foi demonstrar a propriedade de *sombreamento* para fluxos *cw-hiperbólicos*, nesta tese conseguimos tal propriedade mas para uma condição mais forte que a *Cw-Epl*, que chamaremos de *propriedade  $H^*$* . De acordo com um dos teoremas descritos anteriormente, obtivemos que os fluxos *expansivos* satisfazendo a *Epl* garantem a existência da seção  $H^*$ . Infelizmente, não conseguimos mostrar que fluxos *cw-expansivos* satisfazendo a *Cw-Epl* implique a existência da seção  $H^*$ . De fato, um dos problemas que tivemos foi na demonstração da *injetividade* da seção  $H^*$ , pois não foi possível construir um continuum que contrariasse a *cw-expansividade* (assim como foi feito no caso *expansivo*). É importante realçar que este problema é bastante comum em várias situações de tentar trazer propriedades que satisfaçam fluxos *expansivos* para o caso dos *cw-expansivos*. A seção  $H^*$  é importante pois garante a propriedade de *Cw-Epl transversal* (será descrito na seguinte proposição) propriedade que não conseguimos garantir para fluxos satisfazendo a *Cw-Epl*, logo será possível usar a função métrica hiperbólica dado que a métrica é definido transversalmente. Tudo isso motivou a formalizar a definição da seguinte propriedade.

**Definição.** Dizemos que um fluxo  $(X, \phi)$  possui a **propriedade  $H^*$**  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_r^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definido por

$$H_r^*(x) = \bigcup_{z \in \pi_x(C_r^s(x))} \pi_z(C_r^u(z))$$

é um campo de secções transversais para todo  $r \in (0, \varepsilon)$ .

Figura 1: Seção transversal  $H_r^*$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que a propriedade  $H^*$  é uma propriedade mais forte que a Cw-Epl, isto é, os fluxos satisfazendo a propriedade  $H^*$  implica a cw-Epl. Como exemplos de fluxos satisfazendo a propriedade  $H^*$  temos a suspensão de homeos satisfazendo a Cw-Epl. Assim, mostramos o seguinte resultado que será de muita importância na demonstração da propriedade de sombreamento.

**Proposição.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo satisfazendo a propriedade  $H^*$  e  $B_r(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in H_\delta^*(x)$  então

$$CT_\varepsilon^s(x) \cap CT_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Onde  $CT_\varepsilon^s(x)$  e  $CT_\varepsilon^u(x)$  denotam as componentes conexas de  $T_\varepsilon^s(x)$  e  $T_\varepsilon^u(x)$  res-

pectivamente, tais que contem  $x$ . Finalmente, com ajuda da métrica hiperbólica mostramos um dos principais resultados da tese:

**Teorema.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo satisfazendo a propriedade  $H^*$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \bar{\delta} > 0$  tal que cada  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z$ .

A demonstração do teorema de sombreamento, foi feita em dos passos. Primeiro, foi necessário mostrar uma versão mais fraca da propriedade de sombreamento, mostramos que se  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita então podemos construir uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  transversal. Segundo, mostramos que a pseudo órbita transversal é sombreado por um ponto. Logo, foi estendido a propriedade de sombreamento para a pseudo órbita inicial.

# Capítulo 1

## EXISTÊNCIA DE CONTINUUMS ESTÁVEIS E INSTÁVEIS PARA FLUXOS CW-EXPANSIVOS

### 1.1 Definições e propriedades básicas

Nesta seção tem como objetivo apresentar alguns conceitos, notações e resultados que serão úteis para o desenvolvimento desta tese.

Seja  $(X, \phi)$  um fluxo definido em um espaço métrico  $X$ . Um fluxo em  $X$  é uma função contínua  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ , denotada como  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ , satisfazendo  $\phi_0(x) = x$  e  $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in X$ . Dizemos que  $\phi$  é um fluxo regular se para todo  $x \in X$  existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi_t(x) \neq x$ , ou seja, não tem pontos de equilíbrio. Definamos os seguintes conjuntos:

- $C^0(A, \mathbb{R}) = \{h : A \rightarrow \mathbb{R} : h \text{ é contínua}\}$ . Em particular, denotamos  $C(\mathbb{R}) = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,
- $Rep(\mathbb{R}) = \{g \in C(\mathbb{R}) : g \text{ é estritamente crescente e } g(0) = 0\}$ ,
- $Rep^*(\mathbb{R}) = \{g \in Rep(\mathbb{R}) : g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$ ,
- $Rep(\varepsilon) = \{g \in Rep^*(\mathbb{R}) : \left| \frac{g(s)-g(t)}{s-t} - 1 \right| \leq \varepsilon\}$ ,
- $\mathcal{H}(A) = \{\alpha : A \rightarrow C(\mathbb{R}) : \exists x_\alpha \in A \text{ com } \alpha(x_\alpha) = id_{\mathbb{R}} \text{ e para todo } t \in \mathbb{R}, \alpha(\cdot)(t) \in C^0(A, \mathbb{R})\}$ ,

- para  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{X}_\alpha^t(A) = \{\phi_{\alpha(x)(t)}(x) : x \in A\}$ ,
- $\mathcal{K}(X)$  o conjunto de todos os subconjuntos compactos de  $X$  equipados com a métrica de Hausdorff,
- $\mathcal{C}(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \text{ conexo}\}$ .

### 1.1.1 Fluxos cw-expansivos

A adaptação da cw-expansividade aos fluxos definido na tese de doutorado de W. Cordeiro [5] é mais sutil que a definição de cw-expansividade para homeomorfismos [4], devido à direção do fluxo e à possibilidade de ter um continuum de reparametrizações. De fato, para quaisquer continuum de órbitas de um fluxo, espera-se ser capaz de reparametrizar uma delas de tal maneira que, em algum momento, as órbitas estejam substancialmente separadas. A cw-expansividade diz que isso acontecerá para qualquer continuum de reparametrizações ou, inversamente, que nenhuma reparametrização continua pode fazer com que o continuum de órbitas fiquem próximas para sempre. A seguir, definamos os fluxos cw-expansivos no sentido de W. Cordeiro [5].

**Definição 1.1.** *Um fluxo  $\phi^t$  é cw-expansivo se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  com a propriedade que se  $A \in \mathcal{C}(X)$  e  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  com  $\text{diam}\mathcal{X}_\alpha^t(A) < \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  então  $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(x_\alpha)$ .*

Observe que na definição anterior temos dois parâmetros  $\varepsilon$  e  $\delta$ . A seguinte proposição mostra que a cw-expansividade pode ser definida usando apenas um desses parâmetros. Para sua demonstração, veja [11, Proposição 1].

**Proposição 1.2.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo definido num espaço métrico  $X$ , sem pontos fixos.  $\phi$  é cw-expansivo se e somente se existe  $\eta > 0$  tal que se  $A \in \mathcal{C}(X)$  e  $\text{diam}\mathcal{X}_\alpha^t(A) \leq \eta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e um  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  então  $A$  é um segmento de órbita.*

A constante  $\eta > 0$  da proposição anterior será chamado de *constante de cw-expansividade*.

### 1.1.2 Seções transversais

Enunciaremos, a seguir, algumas noções básicas de seções transversais definidos em [3]. Seja  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  un fluxo regular. Dizemos que  $C \in \mathcal{K}(X)$  é uma *seção*

*transversal* através de  $x \in C$  se existe  $\tau > 0$  e  $\gamma > 0$  tal que

$$B_\gamma(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}(C) \quad \text{e} \quad C \cap \phi_{[-\tau, \tau]}(y) = \{y\} \quad \text{para todo } y \in C$$

Chamamos de *campo de seções transversais* a uma função  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  tal que existe  $\tau' > 0$  e  $r > 0$  tal que

$$H(x) \cap \phi_{[-\tau', \tau']}y = \{y\} \quad \text{e} \quad B_r(x) \subset \phi_{[-\tau', \tau']}H(x)$$

para todo  $x \in X$  e  $y \in H(x)$ .

Se  $H$  é um campo de seções transversais e  $\phi : [-\tau, \tau] \times H(x) \rightarrow X$  é injetivo, para algum  $\tau > 0$  e para todo  $x \in X$ . Então, dizemos que  $H$  é um campo de seções transversais de tempo  $\tau$ . Enunciaremos a seguir o campo de caixa de fluxos, o fluxo projeção e diversas propriedades que serão usadas ao longo da tese, para maior detalhes veja [3, Definição 2.29 e 2.31 ].

**Definição 1.3.** *Seja  $H$  um campo de seções transversais de tempo  $\tau$ , chamamos de **caixa de fluxo** associado a  $H$  ao campo  $F : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ , definido por  $F(x) = \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$ .*

Uma vez definida a caixa de fluxo associado a um campo  $H$ , podemos descrever a função projeção, que projeta pontos da caixa em pontos em  $H$ .

**Definição 1.4.** *Definamos o fluxo projeção  $\pi_x : F(x) \rightarrow H(x)$  definido por  $\pi_x(y) = \phi_t(y) \in H(x)$  com  $|t| \leq \tau$ .*

Dado um campo de conjuntos compactos  $M \subset F$  define  $\pi(M)$  por  $\pi(M)(x) = \pi_x(M(x))$ .

**Proposição 1.5.** *Se  $H$  é um campo de seções transversais com  $F$  o campo de caixas de fluxos associado ao  $H$  e  $N \subset F$  um campo de conjuntos compactos, então:*

- a)  $\pi(N)$  é um campo de conjuntos compactos,
- b) Se  $N(x)$  é conexo então  $(\pi(N))(x)$  é conexo,
- c) Se  $N$  é contínua então  $\pi(N)$  é contínua e
- d) Se  $N$  é um campo de vizinhanças então  $\pi(N)$  é um campo de seções transversais.

*Demonstração.* [3, Proposição 2.32] □

Seja  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  um campo. Denotaremos por  $H^T$  a *transposta* de  $H$  e é definido por

$$H^T(x) = \{y \in X : x \in H(y)\}.$$

Dizemos que o campo  $H$  é uma seção *simétrica* se  $H^T(x) = H(x)$  para todo  $x \in X$ .

Um campo de seções transversais  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é *monótona* se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $t \in (0, \varepsilon)$  temos que  $H(x) \cap H(\phi_t x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 1.6.** *Se  $X$  é um espaço métrico então cada fluxo regular  $\phi_t$  em  $X$  admite um campo de seções transversais simétrica e monótona.*

O seguinte Teorema garante a continuidade do campo de seções transversais desde que o espaço seja Peano continuum.

**Teorema 1.7.** *Se  $(X, \phi)$  é um fluxo regular definido em um Peano continuum  $X$  então existe um campo monótono, simétrico de seções transversais  $H'$  e um campo contínuo de um parâmetro  $H : [0, r] \times X \rightarrow \mathcal{C}(X)$  satisfazendo:*

1.  $H_\varepsilon : X \rightarrow \mathcal{C}(X)$  é um campo de seções transversais localmente simétrico, monótonos e contínuo para todo  $\varepsilon \in (0, r]$ ,
2.  $H_\varepsilon \subset H'$  para todo  $\varepsilon \in [0, r]$ ,
3.  $H_0(x) = \{x\}$  para todo  $x \in X$ ,
4. Se  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \leq r$  então  $H_\varepsilon \subset H_{\varepsilon'}$ .

*Demonstração.* [3, Teorema 2.53] □

## 1.2 Conjuntos estáveis e instáveis

O objetivo desta subseção é introduzir os conceitos dos conjuntos estáveis e instáveis cinemáticos, geométricos e seccionalmente geométricos. Também mostraremos algumas relações entre elas e as suas diversas propriedades a fim de usá-las nas próximas seções.

Durante esta seção e nos próximos capítulos fixaremos um campo de seções transversais  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ , constantes  $\tau$  e  $r > 0$  tal que  $\phi : [-\tau, \tau] \times H(x) \rightarrow X$  é

injetivo e  $B(x, r) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . Observe que a existência do campo de seções transversais é garantido pelo Teorema 1.6.

Denotamos  $Rep(\mathbb{R})^+$  ( $Rep(\mathbb{R})^-$ ) como o conjunto de todas as funções em  $Rep(\mathbb{R})$  definidas em  $[0, \infty)$  (resp.  $(-\infty, 0]$ ). Para qualquer  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , denotemos por  $W_\varepsilon^s(x)$  e  $W_\varepsilon^u(x)$  os conjuntos  $\varepsilon$ -**estáveis cinemáticos** e  $\varepsilon$ -**instáveis cinemáticos** definidos como em [1], isto é,

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

E denotaremos por  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  os conjuntos **estáveis cinemáticos** e **instáveis cinemáticos**, isto é,

$$W^s(x) = \{y \in X : d(\phi_t x, \phi_t y) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in X : d(\phi_t x, \phi_t y) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

A seguir iremos definir uma versão mais fraca do que a definição anterior, na qual chamaremos de conjuntos estáveis e instáveis geométricos

**Definição 1.8.** Para qualquer  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , sejam  $W_\varepsilon^{ss}(x)$  e  $W_\varepsilon^{su}(x)$  os conjuntos  $\varepsilon$ -**estáveis** e  $\varepsilon$ -**instáveis geométricos** definidos por:

$$W_\varepsilon^{ss}(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in Rep(\mathbb{R}^+) \text{ tal que } d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^{su}(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in Rep(\mathbb{R})^- \text{ tal que } d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Agora definamos os conjuntos estáveis e instáveis locais nas seções transversais. Para isso, denotemos por  $H_\varepsilon(x)$  a seção transversal local do ponto  $x$  definida por  $H_\varepsilon(x) = H(x) \cap B_\varepsilon(x)$ .

**Definição 1.9.** Para qualquer  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , sejam  $T_\varepsilon^s(x)$  e  $T_\varepsilon^u(x)$  os conjuntos **seccionalmente geométricos**  $\varepsilon$ -**estáveis** e  $\varepsilon$ -**instáveis** definidos por:

$$T_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in Rep(\mathbb{R})^+ \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)} y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$T_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^- \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Para cada  $x \in X$ , definamos os conjuntos  $S_\varepsilon(x) = \pi_x(W_\varepsilon^{ss}(x))$  e  $U_\varepsilon(x) = \pi_x(W_\varepsilon^{uu}(x))$ , com  $\pi_x$  descrito na Definição 1.4.

**Proposição 1.10.** *Seja  $H$  é um campo de seções transversais de tempo  $\tau > 0$  e  $B_\gamma(x) \subset H_{[-\tau, \tau]}(x)$  para todo  $x \in X$ . Então para todo  $\varepsilon \in (0, \tau]$  e para todo  $r \in (0, \gamma)$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então*

$$H(y) \cap B_r(y) \subset \phi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}H(x)$$

*Demonstração.* [3, Lema 2.19] □

A seguinte proposição afirma que se as órbitas de dois pontos  $x, y \in X$  se acompanham em todo tempo (no sentido cinemático ou geométrico), então  $\pi_x(y)$  e  $x$  se acompanham transversalmente em cada tempo com alguma reparametrização.

**Proposição 1.11.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $r_1 > 0$  tal que  $S_{r_1}(x) \subseteq T_\varepsilon^s(x)$  e  $U_{r_1}(x) \subseteq T_\varepsilon^u(x)$*

*Demonstração.* Para  $\varepsilon \in (0, r)$  pegue  $0 < \lambda \leq |\tau|$  tal que  $d(\phi_\mu x, x) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|\mu| \leq \lambda$  e todo  $x \in X$ . Considere um  $0 < r_1 \leq \varepsilon/2$  correspondente a  $\lambda$  tal que  $B_{r_1}(x) \subset H_{[-\lambda, \lambda]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . Portanto, se  $y \in S_{r_1}(x)$  então existe  $|s| \leq \lambda$  tal que  $\phi_s y \in W_{r_1}^{ss}(x)$ . Mostremos que existe  $\beta \in \text{Rep}(\mathbb{R})^+$  tal que  $\phi_{\beta(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ . De fato, como  $\phi_s y \in W_{r_1}^{ss}(x)$ , existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^+$  tal que  $d(\phi_{\alpha(t)+s}y, \phi_t x) \leq r_1$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto, defina  $\beta(t) = \alpha(t) + \mu_t + s$ , onde

$$\begin{aligned} \mu: [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \mu_t(x), \end{aligned}$$

é definido tal que  $\phi_{\mu_t}(\phi_{\alpha(t)+s}y) \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ . Observe que  $\mu$  está bem definido, de fato, como  $\phi_{\alpha(t)+s}y \in B_{r_1}(\phi_t x)$  então  $|\mu_t| \leq \lambda$  para todo  $t \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned} d(\phi_t x, \phi_{\mu_t+\alpha(t)+s}y) &\leq d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)+s}y) + d(\phi_{\alpha(t)+s}y, \phi_{\mu_t+\alpha(t)+s}y) \\ &\leq r + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que  $\beta \in \text{Rep}(\mathbb{R})^+$ .

*Continuidade.* Bastaria mostrar a continuidade de  $\mu_t$ . De fato, seja  $\varepsilon_0 \in (0, \tau]$ , de acordo

com a Proposição 1.10 existe um  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \delta \quad \rightarrow \quad H(y) \cap B_\varepsilon(y) \subset \phi_{[-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]} H(x).$$

Seja  $\lambda_1 > 0$  tal que

- $d(x, \phi_t x) \leq \delta$  para todo  $|t| \leq \lambda_1$ ,
- $|t_1 - t_2| \leq \lambda_1 \quad \rightarrow \quad |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \leq \varepsilon_0/2$

Portanto, sejam  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$  tal que  $|t_1 - t_2| \leq \lambda$ . Logo,  $d(\phi_{t_1} x, \phi_{t_2} x) \leq \delta$  e

$$H(\phi_{t_1} x) \cap B_\varepsilon(\phi_{t_1} x) \subset \phi_{[-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]} H(\phi_{t_2} x), \quad (1.1)$$

observe que como  $\phi_{\alpha(t_1) + \mu_{t_1} + s} y \in H_\varepsilon(\phi_{t_1} x)$  e  $\phi_{\alpha(t_2) + \mu_{t_2} + s} y \in H_\varepsilon(\phi_{t_2} x)$ , então de 1.1 temos que  $|\alpha(t_2) + \mu_{t_2} - \alpha(t_1) - \mu_{t_1}| \leq \varepsilon_0/2$ . Assim, concluímos que  $|\mu_{t_2} - \mu_{t_1}| \leq \varepsilon_0$ . Mostrando a continuidade de  $\mu_t$ .

*Fixo no ponto 0.* Basta observar que  $\pi_x(\phi_s y) = \phi_{\mu_0 + s} y = y$ , ou seja,  $\mu_0 = -s$ . Logo  $\beta(0) = 0$ .

*Crescente.* Da monotonicidade das seções transversais, é imediato que

$$t_1 \leq t_2 \quad \rightarrow \quad \mu_{t_1} + \alpha(t_1) < \mu_{t_2} + \alpha(t_2),$$

logo  $\beta(t_1) < \beta(t_2)$ . Portanto,  $\phi_{\beta(t)} y \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja,  $y \in T_\varepsilon^s(x)$ .  $\square$

Defina o conjunto  $\mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})^i = \{\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^i : |\alpha(t) - t| \leq \tau\}$  para  $i = +, -$ .

**Definição 1.12.** Para cada  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$ , definamos os seguintes conjuntos:

$$T_\varepsilon^{\text{ss}}(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})^+ \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)} y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$T_\varepsilon^{\text{uu}}(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})^- \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)} y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Ao contrario da Proposição 1.11, a seguinte proposição nos fornece informação sobre as reparametrizações. De fato, se dois pontos  $x, y \in X$  se acompanham cinematicamente então  $\pi_x(y)$  acompanha a orbita de  $x$  transversalmente com uma reparametrização perto da identidade.

**Proposição 1.13.** *Seja  $H$  é um campo de seções transversais de tempo  $\tau > 0$  e  $B_r(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$ . Então para todo  $\varepsilon \in (0, r)$  existe  $r_1 > 0$  tal que*

$$\pi_x(W_{r_1}^s(x)) \subseteq T_\varepsilon^{ss}(x).$$

*Isto é, se  $y \in W_{r_1}^s(x)$  então existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\alpha(t)}(\pi_x y) \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  e  $|\alpha(t) - t| \leq \tau$  para todo  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon \in (0, r)$  e considere  $0 < \lambda \leq |\tau|$  tal que  $d(\phi_\mu x, x) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|\mu| \leq \lambda$  e todo  $x \in X$ . Considere um  $0 < r_1 \leq \varepsilon/2$  satisfazendo:

- $B_{r_1}(x) \subset H_{[-\lambda, \lambda]}H(x)$  para todo  $x \in X$
- A Proposição 1.11 em relação ao  $\varepsilon > 0$ , ou seja,  $\pi_x(W_{r_1}^s(x)) \subset T_\varepsilon^s(x)$

Afirmamos que  $W_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^s(x) \subset T_\varepsilon^{ss}(x)$ . De fato, se  $y \in T_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^s(x)$  então

$$\phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x) \quad \text{e} \quad d(\phi_t y, \phi_t x) \leq \varepsilon < r$$

para todo  $t \geq 0$ , como

$$B_r(x) \subset H_{[-\tau, \tau]}H(x)$$

para todo  $x \in X$ , então  $|\alpha(t) - t| \leq \tau$  para todo  $t \geq 0$ . Logo,  $y \in T_\varepsilon^{ss}(x)$ .

Portanto, mostremos que  $\pi_x(W_{r_1}^s(x)) \subset W_\varepsilon^s(x)$ . Se  $y \in \pi_x(W_{r_1}^s(x))$ , então existe  $|s| \leq \lambda$  tal que  $\phi_s y \in W_{r_1}^s(x)$ , logo

$$d(\phi_t x, \phi_t y) \leq d(\phi_t x, \phi_{t+s} y) + d(\phi_{t+s} y, \phi_t y) \leq \varepsilon,$$

isso significa que  $y \in W_\varepsilon^s$ . Logo,  $\pi_x(W_{r_1}^s(x)) \subset W_\varepsilon^s(x)$ . □

### 1.3 Expansividade e cw-expansividade uniforme

Nesta seção mostraremos que a expansividade e cw-expansividade implica a expansividade e cw-expansividade uniforme nas seções transversais, respectivamente.

Um fluxo  $(X, \phi)$  é *expansivo* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se

$$d(\phi_{\alpha(t)}y, \phi_t x) \leq \delta$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e algum  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  então  $y \in \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}x$ . Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um subconjunto conexo, se existe um  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\alpha(t)}y \in H(\phi_t(x_\alpha))$  para todo  $t \in I$ , então definiremos o *fluxo seccional*

$$\Phi_\alpha^t(x, y) = (\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y),$$

para todo  $t \in I$ . Assim, toda vez que utilizarmos a notação do fluxo seccional  $\Phi_\alpha^t(x, y)$ , estará implícita a hipótese de que  $\phi_{\alpha(t)}(y)$  fica na seção  $H(\phi_t x)$ .

Com a finalidade de demonstrar a expansividade e cw-expansividade uniforme enunciaremos o seguinte teorema que será de grande importância para a demonstração dos próximos teoremas.

**Teorema 1.14.** *Sejam  $h_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções contínuas,  $h_n(0) = 0$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  satisfazendo  $\phi_{h_n(t)}(y_n) \in H(\phi_t(x_n))$  para todo  $n \geq 1$  e para todo  $t \in I$  então  $h_n$  converge uniformemente para um  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\phi_{h(t)}(y) \in H(\phi_t(x))$  para todo  $t \in I$ .*

*Demonstração.* [3, Lema 3.2] □

No teorema anterior podemos observar uma das importâncias de trabalhar com seções transversais e em particular do fluxo seccional. O Teorema descreve que para garantir a convergência uniforme de uma sequência de funções contínuas, é necessário que elas fiquem dentro das seções transversais em relação ao fluxo. Em [12] é provada a convergência uniforme de uma sequência de funções sem a hipótese de elas estarem na mesma seção mas foi condicionado a que a sequência das funções estejam em  $\text{Rep}(\varepsilon)$ .

**Definição 1.15.** *Dizemos que um fluxo  $(X, \phi)$  é **uniformemente expansivo transversalmente**, se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $t_\varepsilon > 0$  tal que para cada  $x \in H(y)$  existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que*

$$d(x, y) \geq \varepsilon \rightarrow \sup_{|t| \leq t_\varepsilon} d(\Phi_\alpha^t(x, y)) > \varepsilon_0.$$

**Lema 1.16.** *Sejam  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo e  $\varepsilon_0$  uma constante de expansividade. Então  $(X, \phi)$  é **uniformemente expansivo transversalmente**.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que existe um  $\varepsilon > 0$ , uma sequência positiva  $t_i \rightarrow \infty$  quando  $i \rightarrow \infty$ , um par de sequência de pontos  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  e  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  com  $d(x_i, y_i) \geq \varepsilon$  e reparametrizações  $\alpha_i \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$\sup_{|t| \leq t_i} d(\phi_t x_i, \phi_{\alpha_i(t)} y_i) \leq \varepsilon_0.$$

Supondo que  $x_i \rightarrow x$  e  $y_i \rightarrow y$  temos que  $x \neq y$ . Portanto, afirmamos que existe  $\beta \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\beta(t)} y \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De fato, para cada  $t \in \mathbb{R}$  existe  $t_i$  tal que  $t \in [-t_i, t_i]$  e uma subsequência  $\{\alpha_i\}_{i \geq k}$  tal que

$$\alpha_i|_{[-t_i, t_i]} \rightarrow \beta|_{[-t_i, t_i]},$$

a convergência anterior segue do Teorema 1.14. Logo,

$$d(\phi_t x, \phi_{\beta(t)} y) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(\phi_t x_i, \phi_{\alpha_i(t)} y_i) \leq \varepsilon_0.$$

Da expansividade temos que  $y = x$ , isso gera uma contradição.  $\square$

**Corolário 1.17.** *Se  $(X, \phi)$  é expansivo. Então para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$  temos que*

$$\Phi_\alpha^t(T_{\varepsilon_0}^s(x)) \subset B_\varepsilon(\phi_t(x)) \text{ se } t \geq t_\varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $y \in T_{\varepsilon_0}^s(x)$  e  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R}^+)$  tal que  $\phi_{\alpha(t)} y \in H_{\varepsilon_0}(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ . Considere  $t \geq t_\varepsilon$  e defina  $\beta(y)(r) = \alpha(r+t) - \alpha(t)$ . Observe que  $\beta \in \text{Rep}([-t, t])$ . Logo,

$$\sup_{|r| \leq t_\varepsilon} d(\phi_{\beta(y)(r)}(\phi_{\alpha(t)} y), \phi_{t+r} x) = \sup_{|r| \leq t_\varepsilon} d(\phi_{\alpha(r+t)} y, \phi_{t+r} x) \leq \varepsilon_0.$$

De acordo com o Lema 1.16 temos que  $\phi_{\alpha(t)} y \in B_\varepsilon(\phi_t x)$   $\square$

O seguinte Lema caracteriza o crescimento uniforme de continuums, ou seja, para cada  $\varepsilon > 0$  existe um tempo  $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$  *uniforme* de tal forma que qualquer continuum com diâmetro maior do que  $\varepsilon$  crescerá em tamanho, no máximo no tempo  $t_\varepsilon$ . Para sua demonstração, basta seguir a mesma ideia do Lema 1.16.

**Lema 1.18.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo e  $\varepsilon_0 > 0$  uma constante de cw-expansividade. Então para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $t_\varepsilon > 0$  tal que se  $x \in X$  e  $C \subset H(x)$  é um continuum tal que*

$\text{diam}C \geq \varepsilon$  então existe  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  tal que

$$\sup_{|r| \leq t_\varepsilon} \text{diam}\Phi_\alpha^r C > \varepsilon_0$$

Denotemos por  $CT_\varepsilon^s(x)$  e  $CT_\varepsilon^u(x)$  as componentes conexas de  $T_\varepsilon^s(x)$  e  $T_\varepsilon^u(x)$  respectivamente, tais que contem  $x$ . Ao contrario do caso expansivo (Corolário 1.17), para o seguinte corolário é necessário pegar ao componente conexa estável, de tal forma que possamos usar o Lema 1.18

**Corolário 1.19.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$ ,*

$$\Phi_\alpha^t(CT_{\varepsilon_0/2}^s(x)) \subset B_\varepsilon(\phi_t(x)) \text{ se } t \geq t_\varepsilon.$$

## 1.4 Família de conjuntos estáveis e instáveis

Nesta seção traduziremos alguns conceitos do caso discreto ao contínuo, definiremos a família de estáveis e instáveis locais cinemáticos, geométricos e seccionalmente geométricos. E também mostraremos uma equivalência da definição de cw-expansivo. Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um subconjunto conexo. Se existe um  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  tal que  $\mathcal{X}_\alpha^t(A) = \{\phi_{\alpha(x)(t)}x : x \in A\} \subset H(\phi_t(x_\alpha))$  para todo  $t \in I$ , então definiremos o fluxo seccional

$$\Phi_\alpha^t(x_\alpha, A) = (\phi_t x_\alpha, \mathcal{X}_\alpha^t(A)).$$

Assim, toda vez que utilizarmos a notação do fluxo seccional, estará implícita a hipótese de que o fluxo  $\Phi_\alpha^t(A)$  fica na seção  $H(\phi_t(x_\alpha))$ . Muitas vezes denotaremos o continuum  $\Phi_\alpha^t(x_\alpha, A)$  simplesmente por  $\Phi_\alpha^t(A)$ , subentendendo que existe um  $x_\alpha \in A$  cuja reparametrização é a identidade. Seguindo as notações de [4] das famílias estáveis e instáveis locais para homeomorfismos, definiremos para o caso de fluxos como segue:

**Definição 1.20.** *Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , sejam  $W_\varepsilon^s$  e  $W_\varepsilon^u$  as famílias  $\varepsilon$ -estáveis cinemáticos e  $\varepsilon$ -instáveis cinemáticos de subconjuntos de  $X$ , definidos por:*

$$W_\varepsilon^s = \{A \in \mathcal{C}(X) : \text{diam}(\phi_t(A)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u = \{A \in \mathcal{C}(X) : \text{diam}(\phi_t(A)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Denotaremos por  $\mathcal{H}(A)^+$  ( $\mathcal{H}(A)^-$ ) como o conjunto de todas as funções em  $\mathcal{H}(A)$  definidas em  $C([0, \infty))$  (resp.  $C((-\infty, 0])$ ).

**Definição 1.21.** Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , sejam  $W_\varepsilon^{ss}$  e  $W_\varepsilon^{uu}$  as **famílias  $\varepsilon$ -estáveis geométricas e  $\varepsilon$ -instáveis geométricas** de subconjuntos de  $X$ , definidos por:

$$W_\varepsilon^{ss} = \{A \in \mathcal{C}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(A)^+ \text{ tal que } \text{diam}(\mathcal{X}_\alpha^t(A)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^{uu} = \{A \in \mathcal{C}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(A)^- \text{ tal que } \text{diam}(\mathcal{X}_\alpha^t(A)) \leq \varepsilon \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Em seguida, definiremos as famílias dos conjuntos estáveis e instáveis locais nas seções transversais.

**Definição 1.22.** Para qualquer  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , sejam  $T_\varepsilon^s$  e  $T_\varepsilon^u$  as **famílias locais seccionalmente geométricas  $\varepsilon$ -estáveis e  $\varepsilon$ -instáveis** de subconjuntos de  $X$  definidas por:

$$T_\varepsilon^s = \{A \in \mathcal{C}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(A)^+ \text{ tal que } \Phi_\alpha^t(A) \subset H_\varepsilon(\phi_t x_\alpha) \forall t \geq 0\}$$

$$T_\varepsilon^u = \{A \in \mathcal{C}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(A)^- \text{ tal que } \Phi_\alpha^t(A) \subset H_\varepsilon(\phi_t x_\alpha) \forall t \leq 0\}$$

**Observação 1.23.** De acordo com a Proposição 1.11 observe que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $r > 0$  tal que  $\pi(W_\varepsilon^{ss}) \subset T_\varepsilon^s$  e  $\pi(W_\varepsilon^{uu}) \subset T_\varepsilon^u$

**Proposição 1.24.** Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo sem pontos fixos. Então  $(X, \phi_t)$  é cw-expansivo se e somente se existe um  $\delta > 0$  tal que  $T_\delta^s \cap T_\delta^u = \{A \in \mathcal{C}(X) : \#A = 1\}$

*Demonstração.* ( $\rightarrow$ ) Seja  $\varepsilon \in (0, \tau)$ , existe  $\delta > 0$  da definição de cw-expansividade. Suponha que exista um continuum não degenerado  $A \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $A \in T_\delta^s \cap T_\delta^u$ . Decorre da definição 1.22 a existência de um continuo de reparametrizações  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  tal que  $\Phi_\alpha^t(A) \subset H_\delta(\phi_t x_\alpha)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , isto é,  $\text{diam}\Phi_\alpha^t(A) \leq \delta$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , logo da definição de cw-expansividade  $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)} x_\alpha$ . Portanto,  $A = \{x_\alpha\}$ .

( $\leftarrow$ ) Para  $\varepsilon \in (0, \tau)$ , tome  $\delta_1 > 0$  satisfazendo a Proposição 1.11 e tal que  $B_{\delta_1}(x) \subset \phi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(H(x))$ . Suponha que  $A \in \mathcal{C}(X)$ ,  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  e  $\text{diam}\mathcal{X}_\alpha^t(A) \leq \delta_1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Então  $A \subseteq W_{\delta_1}^{ss}(x_\alpha) \cap W_{\delta_1}^{uu}(x_\alpha)$ , logo da Proposição 1.11 temos que  $\pi_{x_\alpha}(A) \subseteq T_\varepsilon^s(x_\alpha) \cap T_\varepsilon^u(x_\alpha)$ . Portanto, como  $\pi_{x_\alpha}(A) \in \mathcal{C}(X)$  concluímos que  $\pi_{x_\alpha}(A) = \{x_\alpha\}$ , isto prova que  $A \subset \phi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x_\alpha)$ . Mostrando assim a cw-expansividade.  $\square$

Nos próximos resultados, diremos que  $\eta > 0$  é uma *constante de cw-expansividade* se satisfaz a Proposição 1.2 e

$$W_\eta^{ss} \cap W_\eta^{uu} = \{A \subset X : \#A = 1\}$$

## 1.5 Existência de continuums estáveis e instáveis em cada ponto

Em [4], H. Kato mostrou para o caso discreto que os homeomorfismos cw-expansivos possuem continuums(compacto e conexo) de tamanho uniforme em cada conjunto estável e instável local. No caso do tempo contínuo, M. Paternain mostrou em [13, Lema 4] a não existência de pontos estáveis para fluxos expansivos, e como consequência disto, mostrou no [13, Lema 5] a existência de um continuum para cada conjunto estável e instável. Para fluxos cw-expansivos temos alguns avanços, W. Cordeiro, num artigo resultante de sua tese de doutorado [5], obteve um continuum estável ou instável desde que exista uma seção transversal com dimensão topológica maior que zero.

Nesta seção tem como objetivo mostrar para fluxos cw-expansivos  $(X, \phi)$  definidos em um espaço continuum  $X$ , a existência de continuums contidos nos conjuntos seccionalmente estáveis e instáveis locais. Para provar este resultado também mostramos os seguintes resultados:

- O conjunto dos pontos estáveis é aberto,
- Os pontos estáveis recorrentes são periódicas,
- Os pontos estáveis são recorrentes
- Não existem pontos estáveis para  $\phi_t$  e  $\phi_{-t}$

Assim, generalizamos os resultados descritos no [13, Lema 4], [13, Lema 5] e [5, Lema 6.4].

**Definição 1.25.** Um ponto  $x \in X$  é *estável* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $H_\delta(x) \subset T_\varepsilon^s(x)$ . Dizemos que  $x \in X$  é *assintoticamente estável* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$

tal que se  $y \in H_\delta(x)$  então existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$  e  $d(\phi_{\alpha(t)}y, \phi_t x) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

O ponto  $x \in X$  é chamado de **instável** se é estável para  $\phi_{-1}$ .

O seguinte lema afirma que se um continuum cresce de tamanho em um determinado tempo, então nos próximos tempos ele não pode diminuir muito de tamanho

**Lema 1.26.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $C \subset H(x)$  é um continuum com  $x \in C$ ,  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$ ,  $\text{diam}C \leq \delta$  e  $\text{diam}\Phi_\alpha^s(x, C) \leq \delta$  para algum número real  $s > 0$  então  $\text{diam}\Phi_\alpha^t(x, C) < \varepsilon$  para todo  $t \in [0, s]$*

*Demonstração.* Suponha que exista  $\varepsilon > 0$ , seqüências  $\delta_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , continuums  $C_k \subset H(x_k)$ ,  $\alpha_k \in \mathcal{H}(C_k)$  e uma seqüência de números reais  $0 \leq t_k \leq s_k$  tal que  $\text{diam}C_k \leq \delta_k$ ,  $\text{diam}\Phi_{\alpha_k}^{s_k}(x_k, C_k) \leq \delta_k$  e  $\text{diam}\Phi_{\alpha_k}^{t_k}(x_k, C_k) > \varepsilon$ . De acordo com [7, Teorema 1.26], existe um caminho  $c_k : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$  de  $x_k$  até  $C_k$  tal que se  $r \leq s$  então  $c_k(r) \subset c_k(s)$ . Seja a aplicação

$$F_k : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$$

$$r \mapsto F_k(r) = \sup\{\text{diam}\Phi_{\alpha_k}^t(c_k(r)) : t \in [0, s_k]\}.$$

Tome  $a_k \in [0, 1]$  tal que  $a_k \in F_k^{-1}(\varepsilon)$  (Observe  $F_k^{-1}(\varepsilon) \neq \emptyset$ ). Então, existe um sub-continuum  $D_k = c_k(a_k) \subseteq C_k$  tal que  $\text{diam}\Phi_{\alpha_k}^t(D_k) \leq \varepsilon$  para todo  $|t| \leq s_k$  e  $\text{diam}\phi_{\alpha_k}^{r_k}(D_k) = \varepsilon$  para algum  $r_k \leq s_k$ , veja a figura 1.1. Afiramos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - r_k = \infty. \quad (1.2)$$

De fato, seja  $s > 0$ , pela continuidade de  $\phi$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta_1$  então  $d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|t| \leq s$ . Pegue  $k_0$  suficientemente grande tal que  $\delta_{k_0} < \delta_1$ . Então para todo  $k \geq k_0$  temos que

$$\text{diam}C_k < \delta_1 \text{ e } \text{diam}\Phi_{s_k}(C_k) < \delta_1.$$

Portanto,

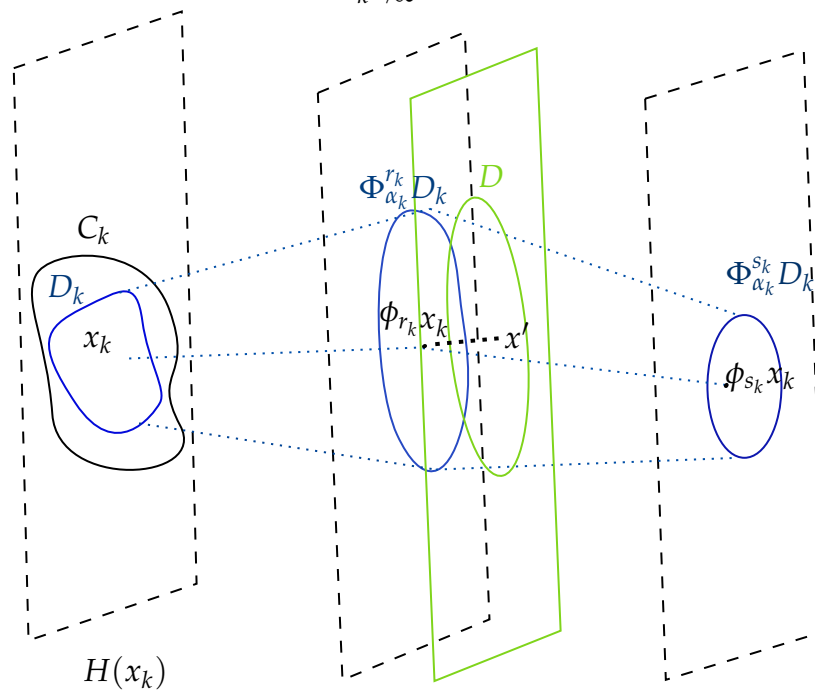
$$\text{diam}\Phi_t(C_k) \leq \varepsilon/2 \text{ e } \text{diam}\Phi_{s_k-t}(C_k) \leq \varepsilon/2,$$

para todo  $t \in [0, s]$ . Logo,  $r_k > s$  e  $s_k - r_k > s$ , uma vez que  $s$  é arbitrário, a afirmação

é comprovada. Continuando com a prova, da compacidade de  $\mathcal{C}(X)$  suponha que  $D$  é o limite continuum de uma subsequência  $\Phi_{\alpha_k}^{r_k}(D_k) = A_k$ . Afiramos que existe  $\beta \in \mathcal{H}(D)$  tal que para cada  $t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\text{diam}D = \varepsilon \quad \text{e} \quad \text{diam}\Phi_{\beta}^t(D) \leq \varepsilon.$$

Figura 1.1:  $D = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ ,  $A_k = \Phi_{\alpha_k}^{r_k}(D_k)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

De fato, seja

$$\beta_k : A_k \rightarrow C^0([-r_k, r_k]),$$

$$z_k \mapsto \beta_k(z_k) : [-r_k, r_k] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \beta_k(z_k)(t) = \alpha_k(y_k)(t + r_k) - \alpha_k(y_k)(r_k),$$

com  $z_k = \phi_{\alpha_k(r_k)} y_k$ . Logo, para cada  $p \in D$  existe  $p_k = \phi_{\alpha(r_k)} y_k \in A_k$  tal que  $p_k \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ , do paragrafo anterior e a definição de  $\beta_k$  temos que  $\phi_{\beta_k(p_k)(t)} p_k \in H_\varepsilon(\phi_{t+r_k} x_k)$  para todo  $k \geq 0$  e  $t \in [-r_k, r_k]$ . Portanto, se  $\phi_{r_k} x_k \rightarrow x \in D$  e  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $r_{k_0}$  tal que  $t \in [-r_{k_0}, r_{k_0}]$  e de acordo com o Teorema 1.14 existe uma subsequência

$\{\beta_k(p_k)\}_{k \geq k_0} \subset C^0([-r_{k_0}, r_{k_0}], \mathbb{R})$  e um  $\beta(p) \in C^0([-r_{k_0}, r_{k_0}])$  tal que

$$\beta_k(p_k)|_{[-r_{k_0}, r_{k_0}]} \rightarrow \beta(p)|_{[-r_{k_0}, r_{k_0}]}.$$

Assim,  $\phi_{\beta(p)(t)} p \in H_\varepsilon(\phi_t x)$ . Portanto, podemos garantir a existência de um continuum de reparametrizações  $\beta \in \mathcal{H}(D)$  tal que

$$\begin{aligned} \text{diam} \Phi_\beta^t(D) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam} \Phi_{\beta_k}^t(\phi_{\alpha_k}^{r_k} D_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam} \Phi_{\alpha_k}^{t+r_k}(D_k) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

A ultima desigualdade segue do seguinte fato: De 1.2 para  $t$ , existe  $k_0$  tal que  $t + r_k < s_k$  para todo  $k \geq k_0$ . Logo, para todo  $k \geq k_0$  temos que  $\text{diam} \phi_{\alpha_k}^{r_k+t}(D_k) \leq \varepsilon$ . Portanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam} \Phi_{\alpha_k}^{t+r_k}(D_k) \leq \varepsilon$ . Assim,  $D$  contradiz a cw-expansividade.  $\square$

**Corolário 1.27.** *Seja  $(X, \phi)$ ,  $\varepsilon, \delta$  como na proposição anterior. Então para qualquer  $t > 0$  existe um numero rela  $k = k(t) > 0$  tal que se  $A \subset X$  é um continuum com  $x \in A$  e  $\text{diam} A \geq t$ , então  $\text{diam} \Phi_\alpha^s(A) \geq \delta$  ou  $\text{diam} \Phi_\alpha^{-s}(A) \geq \delta$  para todo  $s \geq k$  e todo  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$ .*

**Definição 1.28.** *Um continuum  $C$  é estável se  $C \in T_\varepsilon^s$ . Onde  $\varepsilon > 0$  é uma constante de cw-expansividade*

**Proposição 1.29.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo. Se  $C \subset H(x)$  é continuum estável (isto é, existe  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  tal que  $\Phi_\alpha^t(C) \subset H_\varepsilon(\phi_t x_\alpha)$  para todo  $t \geq 0$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{diam} \Phi_\alpha^t C = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $C \subset H(x)$  tal que  $\text{diam} \Phi_\alpha^t(C) \leq \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ , com  $\varepsilon > 0$  é uma constante de cw-expansividade. Suponha, pelo contrario, que existe um  $\delta > 0$  e uma sequência  $t_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $\text{diam} \Phi_\alpha^{t_k}(C) \geq \delta$ . Suponha que  $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_\alpha^{t_k} C$ , onde a convergência é dada pela compacidade de  $\mathcal{C}(X)$ . Então, afirmamos que  $\delta < \text{diam} D \leq \varepsilon$  e existe  $\beta \in \mathcal{H}(D)$  tal que  $\text{diam} \Phi_\beta^t C \leq \varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De fato, para cada  $y \in D$  existe  $y'_k = \phi_{\alpha_k(y)(t)} y'$  com  $y' \in C$  tal que  $y'_k \rightarrow y$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Defina

$$\begin{aligned} \beta_k(y'_k) : [-t_k, t_k] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \beta_k(y')(t) = \alpha(y')(t + t_k) - \alpha(y')(t_k). \end{aligned}$$

É fácil ver que  $\beta_k(y) \in \text{Rep}([-t_{k_0}, t_{k_0}])$  para todo  $y \in C$ . Logo, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $t_{k_0}$  tal que  $t \in [-t_{k_0}, t_{k_0}]$ . Portanto, do Teorema 1.14 existe uma subsequência  $\{\beta_k(y'_k)\}_{k \geq k_0} \subset C^0([-t_{k_0}, t_{k_0}], \mathbb{R})$  e um  $\beta \in C^0([-r_{k_0}, r_{k_0}], \mathbb{R})$  tal que

$$\beta_k(y'_k)|_{[-t_{k_0}, t_{k_0}]} \rightarrow \beta(y)|_{[-t_{k_0}, t_{k_0}]}.$$

Portanto, existe  $\beta \in \mathcal{H}(D)$

$$\begin{aligned} \text{diam}\Phi_\beta^t(D) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}\Phi_{\beta_k}^t(\phi_\alpha^{t_k} D_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}\Phi_\alpha^{t+t_k}(D_k) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

É imediato observar que  $\text{diam}D \geq \delta$ . Logo  $D \in T_\varepsilon^s \cap T_\varepsilon^u$ , isto contradiz a Proposição 1.24.  $\square$

Se o espaço  $X$  é Peano continuum. Então dizer que  $x \in X$  é estável implica que  $\{CT_\varepsilon^s(x)\}_\varepsilon$  é uma base de vizinhanças de  $x$ . Como na seção 1.3, seja  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade.

**Proposição 1.30.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo e  $X$  um espaço Peano continuum. Então, o conjunto dos pontos estáveis é aberto.*

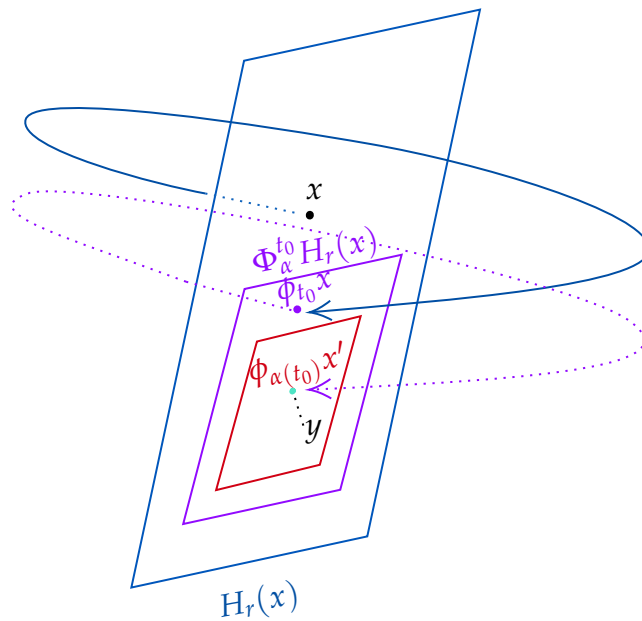
*Demonstração.* Seja  $x \in X$  um ponto estável e um  $\varepsilon > 0$ . Afirmamos que  $\text{int}CT_{\varepsilon/2}^s(x)$  consiste de pontos estáveis. De fato, seja  $y \in \text{int}CT_{\varepsilon/2}^s(x)$  e  $\varepsilon' > 0$ . De acordo com o Corolário 1.19 existe  $t_{\varepsilon'} > 0$  tal que  $\Phi_\alpha^t(CT_{\varepsilon/2}^s(x)) \subset B_{\varepsilon'/2}(\phi_t(x))$  para todo  $t \geq t_{\varepsilon'}$ . Considere  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que  $H_r(y) \subset CT_{\varepsilon/2}^s(x)$  e tal que  $\text{diam}\Phi_\alpha^t(H_r(y)) \leq \varepsilon'$  para todo  $t \in [0, t_{\varepsilon'}]$ . Logo, pelo parágrafo anterior temos que  $\text{diam}\Phi_\alpha^t(H_r(y)) \leq \varepsilon'$  para todo  $t \geq 0$ . É importante realçar que a reparametrização correspondente ao ponto  $y \in X$  não necessariamente é a identidade, assim, para garantir que  $H_r(y) \subset T_{\varepsilon'}^s(y)$  bastará considerar o continuum de reparametrizações  $\beta \in \mathcal{H}(H_r(y))$  definido por  $\beta(\cdot) = \alpha(\cdot) \circ \alpha^{-1}(y)$ . Portanto,  $\text{diam}\Phi_\beta^t(H_r(y)) \leq \varepsilon'$  para todo  $t \geq 0$  e  $H_r(y) \subset T_{\varepsilon'}^s(y)$ .  $\square$

Para a demonstração das seguintes proposicoes usaremos as ideias de Jana Hertz no seu artigo [8].

**Proposição 1.31.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo definido em um espaço Peano continuum  $X$ . Então todo ponto estável recorrente é periódica.*

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  um ponto estável recorrente e  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade, o Teorema 1.7 garante a existência de um  $r \geq 0$  suficientemente pequeno tal que  $H_r(y)$  é continuum para todo  $y \in X$ .

Figura 1.2:  $x' = \phi_{t_0}x$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, da estabilidade de  $x \in X$  podemos supor que  $H_r(x) \subset T_\varepsilon^s(x)$ , logo da Proposição 1.29 existe  $\alpha \in \mathcal{H}_\varepsilon(H_r(x))$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_\alpha^s(H_r(x)) = 0,$$

segue-se da recorrência de  $x$  a existência de um  $t_0 > 0$  suficientemente grande tal que  $\phi_{t_0}x \in H_r(x)$ . Portanto,

$$\Phi_\alpha^{t_0}(H_r(x)) \subset H_r(x)$$

Portanto,  $\bigcap_{n \geq 0} \Phi_\alpha^{nt_0}(x, H_r(x)) = y \in H_r(x)$ , veja a figura 1.2. Além disso, observe que  $y$  é um ponto estável, periódica e pertence ao conjunto  $\omega(x)$ .

Finalmente, mostremos que  $x \in \text{Orb}(y)$ . Como  $y$  é estável e  $y \in \omega(x)$  então

existe um  $t_1 > 0$  e  $r_1 > 0$  tal que  $\phi_{t_1}x \in H_{r_1}(y) \subset T_\varepsilon^s(x)$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_\beta^s(H_{r_1}(y)) = 0$ . Logo, da periodicidade de  $y$  existe um  $s > 0$  tal que  $\phi_s x = y$ . Portanto  $x$  é periódica.  $\square$

**Proposição 1.32.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo. Se  $x \in X$  um ponto estável então  $x$  é recorrente, portanto periódico.*

*Demonstração.* Seja  $x \in X$  um ponto estável e  $2\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade. De acordo com a estabilidade de  $x$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $H_\delta(x) \subset T_\varepsilon^s(x)$ . Segue do Lema 1.26 a existência de  $\rho > 0$  tal que se  $s \in [0, t]$  então

$$\Phi_\alpha^s(\phi_{-t}x, H_\rho(\phi_{-t}x)) \subset H_\delta(\phi_{s-t}x) \quad \forall t > 0, \quad (1.3)$$

logo, da inclusão anterior temos:

1. Cada ponto de  $\alpha(x)$  é estável,
2.  $z \in \alpha(x)$  implica  $x \in \omega(z)$ ,
3.  $z \in \alpha(x)$  implica  $\omega(x) = \omega(z)$ .

(1) Seja  $y \in \alpha(x)$ ,  $\varepsilon_0 \geq 0$  e  $t_{\varepsilon_0}$  do Corolário 1.19. Considere  $r_1 \leq \rho/2$  e  $t_k \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{-t_k} \in H_{r_1}(y)$  para todo  $k \geq k_0$ . Assim,  $H_{r_1}(y) \subset H_\rho(\phi_{-t_0}x)$  para todo  $k \geq k_0$ . Podemos considerar  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\Phi_\alpha^s(H_r(y)) \subset H_{\varepsilon_0/2}(\phi_{s-t_{k_1}}(x)),$$

para todo  $s \in [0, t_{k_1} + t_{\varepsilon_0}]$  e algum  $k_1 \geq k_0$ . Observe que  $\Phi_{t_{k_1}}(H_r(y)) \subset H_{\varepsilon_0/2}(x) \subset CT_\varepsilon^s(x)$ . Logo, pelo Corolário 1.19 temos que

$$\Phi_\alpha^s(H_r(y)) \subset H_{\varepsilon_0/2}(\phi_{s-t_{k_1}}x),$$

para todo  $s \geq 0$ , isso implica que  $H_r(y) \subset T_{\varepsilon_0}^s(y)$ .

(2) seja  $\varepsilon > 0$ , por (1)  $z \in \alpha(x)$  é estável, então podemos supor que existe  $\delta > 0$  e  $t_k \rightarrow -\infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{-t_k}(x) \in H_\delta(z) \subset T_\varepsilon^s(z)$  para todo  $k \geq 1$ . logo existe  $\alpha_k \in \text{Rep}(\mathbb{R}^+)$  tal que

$$d(x, \phi_{\alpha_k^{-1}(t_k)}z) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq 1,$$

portanto  $x \in \omega(z)$ .

(3) Provemos que  $\omega(x) \subset \omega(z)$ . Sejam  $p \in \omega(x)$  e  $\varepsilon > 0$  então existe  $r_k \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{r_k}(x) \in H_{\varepsilon/2}(p)$ . Da estabilidade dos pontos  $x, z \in X$  existe  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2(\delta_1) > 0$  tal que

$$H_{\delta_1}(x) \subset T_{\varepsilon/2}^s(x) \text{ e } H_{\delta_2}(z) \subset T_{\delta_1}^s(z), \quad (1.4)$$

Como  $z \in \alpha(x)$  podemos supor que existe  $t_k \rightarrow -\infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{-t_k}(x) \in H_{\delta_2}(z) \subset W_{\delta_1}^s(z)$  para todo  $k \geq 1$ , logo existe  $\alpha_k \in \text{Rep}(\mathbb{R}^+)$  tal que

$$d(x, \phi_{\alpha_k^{-1}(t_k)} z) \leq \delta_1 \quad \forall k \geq 1,$$

como  $\phi_{\alpha_k^{-1}(t_k)} z = \phi_{s_k}(z) \in H_{\delta_1}(x)$ , então de (1.4) existe  $\beta_k \in \text{Rep}(\mathbb{R}^+)$  tal que

$$d(\phi_{r_k} x, \phi_{\beta_k(r_k)}(\phi_{s_k} z)) \leq \varepsilon/2 \quad \forall k \geq 1,$$

Assim,  $\phi_{\beta_k(r_k)}(\phi_{s_k} z) \in H_\varepsilon(p)$ . Logo,  $p \in \omega(z)$ . Finalmente, de (2) e (3) temos que  $x \in \omega(x)$ , ou seja,  $x \in X$  é recorrente. Da proposição anterior  $x$  é um ponto periódico  $\square$

**Teorema 1.33.** *Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo cw-expansivo definido em um Peano continuum  $X$  então não existem pontos estáveis para  $\phi_t$  e  $\phi_{-t}$ .*

*Demonstração.* Por contradição, suponha que  $x \in X$  é um ponto estável para  $\phi_t$ , de acordo com a Proposição 1.32 temos que  $x$  é periódica, como o conjunto de pontos estáveis é aberto (Proposição 1.30), concluímos que  $X$  é uma órbita periódica, contradizendo o fato de  $X$  ser Peano continuum.  $\square$

**Teorema 1.34.** *Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo cw-expansivo definido em um Peano continuum  $X$  e  $\varepsilon > 0$  uma constante de cw-expansividade. Então existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in X$  existem continuums não degenerados  $C_x$  e  $D_x$  tal que  $C_x$  é  $\varepsilon$ -estável,  $D_x$  é  $\varepsilon$ -instável,  $x \in C_x \cap D_x$  e  $\text{diam}C_x = \text{diam}D_x = \delta$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . De acordo com o Lema 1.26 existe  $\delta > 0$  correspondente ao  $\varepsilon$ . Seja  $x \in X$  e um  $z \in \omega(x)$ , então existe uma sequência  $t_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $x_k = \phi_{t_k}(x) \in H_{\delta/2}(z)$  para cada  $k \geq k_0$ . De acordo com o Teorema 1.33 o ponto  $z$  não é estável para  $\phi_{-1}$ . Portanto, existe  $t_0 > 0$  e um  $\alpha \in \mathcal{H}_\varepsilon(H_{\delta/2}(z))$  tal que

$$\text{diam}\Phi_\alpha^{-t_0}(x_k, H_\delta(x_k)) \geq \text{diam}\Phi_\alpha^{-t_0}(z, H_{\delta/2}(z)) > \varepsilon.$$

Podemos supor que  $t_k > t_0$  para todo  $k \geq 1$ , considere então  $C_k \subset H_\delta(x_k)$  sub-continuums tal que  $x_k \in C_k$ ,  $\text{diam}\Phi_\alpha^{-t}(x_k, C_k) \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [0, t_k]$  e  $\Phi_\alpha^{-s_k}(x_k, C_k) = \varepsilon$  para algum  $s_k \in [0, t_k]$ . Assim, de acordo com o Lema 1.26, teríamos

$$\text{diam}\Phi_\alpha^{-t}(x_k, C_k) \geq \delta \text{ para todo } t \geq s_k.$$

De modo particular, temos

- $\text{diam}\Phi_\alpha^{-t_k}(x_k, C_k) \geq \delta$ ,
- $x \in D_k = \Phi_\alpha^{-t_k}(x_k, C_k)$ ,
- $\text{diam}\Phi_\alpha^t(x, D_k) \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [0, t_k]$ ,

Portanto, o conjunto  $D = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k$  é continuum,  $\text{diam}D \geq \delta$ ,  $x \in D$  e  $D \in T_\varepsilon^s$ . Podemos agir da mesma forma para o caso instável.  $\square$

**Definição 1.35.** *Seja  $(X, \phi_t)$  um fluxo contínuo definido em um espaço métrico compacto  $X$ .  $\phi_t$  é chamado de **positivamente cw-expansivo** se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $A \subset X$  é um continuum e  $\alpha \in \mathcal{H}(A)$  satisfazendo*

$$\text{diam}(\mathcal{X}_\alpha^t(A)) < \delta, \forall t \geq 0,$$

então  $A \subset \Phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(x_\alpha)$ .

**Corolário 1.36.** *Todo Peano continuum  $X$  não admite fluxos positivamente cw-expansivo.*

**Problema 1.** Se  $(X, \phi_t)$  é um fluxo cw-expansivo. Será possível provar a existência de conjuntos estáveis e instáveis cinemáticos ou geométricos para cada ponto?.

## Capítulo 2

# A PROPRIEDADE DE SOMBREAMENTO PARA FLUXOS EXPANSIVOS

A estrutura de produto local é de maneira geral uma propriedade mais fraca que a propriedade de sombreamento, no entanto, no ano 1990, Romeo Thomas provou em [1] que os fluxos expansivos satisfazendo a estrutura de produto local (E.p.l) possuem a propriedade de sombreamento, para sua demonstração é usado como ferramenta principal, as seções transversais finitas:

Existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $\delta > 0$  podemos encontrar uma família finita  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$  de seções transversais locais de tempo  $\epsilon > 0$  e diâmetro no máximo  $\delta$  tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^k X^{[0,\epsilon]}(S_i) = \bigcup_{i=1}^k X^{[-\epsilon,0]}(S_i),$$

para mais detalhes veja [10]. Também é usado a seguinte característica especial dos fluxos topologicamente hiperbólicos( fluxos expansivo satisfazendo a E.p.l): Se a órbita de dois pontos se acompanham então as respectivas reparametrizações estão próximas, ou seja, se  $(X, \phi)$  é um fluxo topologicamente hiperbólico então,

Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  e  $T_1, T_2 \geq 0$  com

$$d(\phi_{\alpha(t)}y, \phi_t x) \leq \delta \quad \text{para todo } t \in [-T_1, T_2], \quad (2.1)$$

então  $|\alpha(t) - t| \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [-T_1, T_2]$ .

Seguindo essa linha, é natural a seguinte questão: Os fluxos cw-expansivos satisfazendo a E.p.l(ou alguma generalização dela) possuem a propriedade 2.1?. Como foi dito na introdução, um dos objetivos da tese é demonstrar a propriedade de sobreamento para fluxos cw-expansivos, isso será demonstrado no próximo capítulo. Um dos problemas que tivemos ao provar a propriedade de sobreamento para o caso cw-expansivo é que não conseguimos obter um resultado semelhante à propriedade 2.1, isto dificultou a demonstração para o caso cw-expansivo. Portanto, gostaríamos de saber se podemos provar a propriedade de sobreamento para fluxos expansivos sem usar a propriedade 2.1 de forma que possamos usar essas técnicas para o caso cw-expansivo

Neste capítulo, a propriedade de sobreamento para fluxos expansivos é alcançado, no entanto, por técnicas novas. Definiremos um novo campo de seções transversais  $H^*$  com certas características, de tal forma que possamos obter alguma informação sobre as reparametrizações, uma vez que as órbitas de dois pontos se acompanham. Tudo isso será feito com o propósito de poder estender tal demonstração da propriedade de sobreamento dos expansivos para o caso dos cw-expansivos. É importante realçar que em nossa demonstração não faremos uso da propriedade 2.1.

Como no início do trabalho da tese, fixaremos  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  um campo de seções transversais, constantes  $\tau$  e  $r > 0$  tal que  $\phi : [-\tau, \tau] \times H(x) \rightarrow X$  é injetivo e  $B(x, r) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$  para todo  $x \in X$ .

## 2.1 A propriedade de estrutura de produto local fraco

Durante esta subseção definiremos a propriedade de estrutura de produto local fraco e forneceremos alguns resultados em relação à expansividade, usando como ferramenta as seções transversais em relação a cada ponto.

Dizemos que o fluxo  $(X, \phi)$  possui a *propriedade de estrutura de produto local(Epl)* se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então existe  $v = v(x, y)$  com  $|v| \leq \varepsilon$  tal que

$$V_\varepsilon^s(\phi_v x) \cap V_\varepsilon^u(x) \neq \emptyset,$$

onde  $V_\varepsilon^s(x) = W_\varepsilon^s(x) \cap W^s(x)$  e  $V_\varepsilon^u(x) = W_\varepsilon^u(x) \cap W^u(x)$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que um fluxo  $(X, \phi)$  possui a **propriedade de estrutura de produto local fraco (Eplf)** se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) \neq \emptyset,$$

para todo  $x, y \in X$ .

É imediato observar que a Eplf é mais fraca que a definição da Epl, para sua demonstração veja [1, Lema 3.1].

A seguinte proposição garante a existência de uma métrica hiperbólica  $\rho$  para fluxos topologicamente hiperbólicos. Para sua demonstração é usado como ferramenta principal o Lema de metrização devido a Frink [2] e o resultado [1, Lema 4.5].

**Proposição 2.2.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a Eplf. Existe constantes  $c \geq 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tal que se  $y \in T_\varepsilon^s(x)$  então

$$\rho(\phi_{\beta(t)}y, \phi_t x) \leq c\lambda^t \rho(x, y),$$

onde  $\rho$  é a métrica nas seções transversais definida em [1, Lema 4.6].

*Demonstração.* [1, Proposição 5.8] □

Observe que a métrica hiperbólica diminuí exponencialmente a distância das órbitas de dois pontos desde que elas estejam no mesmo estável transversal. Como foi dito no início do capítulo, nosso objetivo é demonstrar a propriedade de sombreamento, logo é natural observar que a demonstração teria que ser no começo transversalmente, para assim fazer uso da métrica hiperbólica. Logo, gostaríamos saber se a propriedade de Epl é satisfeita transversalmente, isto é,

$$y \in H_\delta(x) \Rightarrow T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset ?$$

**Proposição 2.3.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a Eplf. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\pi_x(W_\varepsilon^s(x)) \cap \pi_x(W_\varepsilon^u(y)) \neq \emptyset$  desde que  $y \in H_\delta(x)$ .

*Demonstração.* Para  $\varepsilon \in (0, r/2)$  pegue  $0 < \lambda \leq |\tau|$  tal que  $d(\phi_\mu x, x) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|\mu| \leq \lambda$  e todo  $x \in X$ . Considere um  $0 < r_1 \leq \varepsilon/2$  correspondente a  $\lambda$  tal que  $B_{r_1}(x) \subset H_{[-\lambda, \lambda]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . seja  $\delta > 0$  satisfazendo a Definição 2.1

em relação ao  $\varepsilon$ . Portanto, se  $d(x, y) \leq \delta$  então  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset$ . Observe que a expansividade implica que  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \subset \phi_{[-s, s]}z$  para algum  $z \in X$  e um  $s > 0$ . Logo,  $\pi_x(z) \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x)) \cap \pi_x(W_\varepsilon^u(y))$  e é único.  $\square$

Na seguinte observação podemos dar uma possível resposta à questão descrita do paragrafo anterior

**Observação 2.4.** *Será que podemos garantir que  $\pi_x(W_\varepsilon^s(x)) \cap \pi_y(W_\varepsilon^u(y)) \neq \emptyset$  desde que  $y \in H_\delta(x)$ ? Observe que se  $y \in H_\delta(x)$  não sabemos se a seção transversal de  $x$  intersecta a seção transversal de  $y$  em pontos diferentes de  $x$ . Portanto, no último parágrafo da Proposição 2.3, poderíamos obter que  $\pi_x(z) \neq \pi_y(z)$ . Logo,  $\pi_x(W_\varepsilon^s(x)) \cap \pi_y(W_\varepsilon^u(y)) = \emptyset$ . Consequentemente,  $T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) = \emptyset$ . Logo, não conseguimos obter uma resposta afirmativa ou falsa à questão descrita no paragrafo anterior*

Com a finalidade de responder como afirmativo a Observação 2.4, definiremos na seguinte seção um campo de seções transversais com certas propriedades de tal forma que possamos responder a questão anterior como verdadeira.

## 2.2 Seções Transversais $H^*$

Nesta subseção definiremos um campo de conjuntos compactos  $H_\varepsilon^*$  de tal forma que se  $y \in H_\varepsilon^*(x)$  então existe  $z \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  tal que  $y \in \pi_z(W_\varepsilon^u(z))$ . Além disso, mostraremos que se um fluxo é expansivo e satisfaz a propriedade de Eplf então  $H_\varepsilon^*$  é um campo de seções transversais. Finalmente, de acordo com a definição da seção transversal  $H_\varepsilon^*(x)$  mostraremos que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in H_\delta^*(x)$  então  $T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset$ .

**Definição 2.5.** *Um campo de conjuntos compactos é uma função  $h : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  satisfazendo:*

- $x \in h(x)$  para todo  $x \in X$
- Se  $x_n \rightarrow x$  e  $h(x_n) \rightarrow C$  então  $C \subset h(x)$

No seguinte teorema vamos a definir o conjunto  $H_\varepsilon^*(x)$  e mostraremos que a aplicação  $H_\varepsilon^*$  é um campo de conjuntos compactos.

**Teorema 2.6.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo definido no espaço métrico  $X$  e  $\varepsilon > 0$ . Então a aplicação  $H_\varepsilon^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definida por*

$$H_\varepsilon^*(x) = \bigcup_{z \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))} \pi_z(W_\varepsilon^u(z)),$$

*é um campo de conjuntos compactos.*

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 1.5 sabemos que se  $N$  é um campo de conjuntos compactos então  $\pi \circ N$  é um campo de conjuntos compactos. É imediato observar que  $W_\varepsilon^s : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é um campo de conjuntos compactos, ou seja,  $x \in W_\varepsilon^s(x)$  e é semicontínua. Logo,  $\pi(W_\varepsilon^i)$  para  $i = s, u$  é um campo de conjuntos compactos. Agora, mostremos que  $H_\varepsilon^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é um campo de conjuntos compactos. De fato, mostremos que está bem definida. Se  $z \in \overline{H_\varepsilon^*(x)}$  então existe  $z_n \in H_\varepsilon^*(x)$  tal que  $z_n \rightarrow z$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, existe  $y_n \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  tal que  $z_n \in \pi_{y_n}(W_\varepsilon^u(y_n))$ . Suponha que  $y_n \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow \infty$ , da semi continuidade de  $\pi(W_\varepsilon^u)$  temos que  $z \in \pi_y(W_\varepsilon^u(y))$  e  $y \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$ . Portanto,  $z \in H_\varepsilon^*(x)$ . Finalmente, a semi continuidade de  $H_\varepsilon^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  segue imediatamente da semi continuidade de  $\pi(W_\varepsilon^i)$  para  $i = s, u$ .  $\square$

**Teorema 2.7.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a Eplf e  $3\varepsilon > 0$  uma constante de expansividade para  $\tau > 0$ . Então  $H_\varepsilon^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é um campo de secções transversais.*

*Demonstração.* Seja  $\lambda \in (0, \tau)$  tal que  $d(\phi_t x, x) \leq \varepsilon$  para todo  $|t| \leq \lambda$  e todo  $x \in X$ . Afirmamos que  $H_\varepsilon^*(x) \cap \phi_{[-\lambda, \lambda]} y = y$  para todo  $y \in H_\varepsilon^*(x)$ . De fato, suponha que existe  $y \in H_\varepsilon^*(x)$  e  $|s| \leq \lambda$  tal que  $\phi_s y \in H_\varepsilon^*(x)$ . Portanto, existe  $z_1 \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  e  $z_2 \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  tal que  $y \in \pi_{z_1} W_\varepsilon^u(z_1)$  e  $\phi_s y \in \pi_{z_2} (W_\varepsilon^u(z_2))$ . Como  $z_1 \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  e  $z_2 \in \pi_x(W_\varepsilon^s(x))$  então existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$d(\phi_t z_1, \phi_{\alpha(t)} z_2) \leq 2\varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Além disso, como  $y \in \pi_{z_1} W_\varepsilon^u(z_1)$  e  $\phi_s y \in \pi_{z_2} (W_\varepsilon^u(z_2))$  então existe  $\beta_1 \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-)$  e  $\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-)$  tal que

$$d(\phi_{\beta_1(t)} y, \phi_t z_1) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad d(\phi_{\beta_2(t)} z_2, \phi_{t+s} y) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \leq 0,$$

logo,

$$\begin{aligned}
d(\phi_t z_1, \phi_{\beta_2(\beta_1(t))} z_2) &\leq d(\phi_t z_1, \phi_{\beta_1(t)} y) + d(\phi_{\beta_1(t)} y, \phi_{\beta_1(t)+s} y) \\
&\quad + d(\phi_{\beta_1(t)+s} y, \phi_{\beta_2(\beta_1(t))} z_2) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Observe que  $\beta_2 \circ \beta_1 \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-)$ . Portanto, seja

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } t \geq 0, \\ \beta_2 \circ \beta_1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

então  $d(\phi_t z_1, \phi_{\beta(t)} z_2) \leq 3\varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, da expansividade de  $\phi$  existe  $|t| \leq \tau$  tal que  $z_2 = \phi_t z_1$ , contradizendo o fato de  $z_1$  e  $z_2$  pertencerem na seção  $H(x)$ .

Finalmente, mostremos que existe  $r_1 > 0$  tal que  $B_{r_1}(x) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x)$ . Seja  $\delta_1 > 0$  tal que  $B_{\delta_1}(x) \subset \phi_{[-\lambda/2, \lambda/2]} H(x)$  para todo  $x \in X$  e consideremos  $\delta_2 \in (0, \delta_1)$  tal que

$$d(x, y) \leq \delta_2 \Rightarrow d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \delta_1 \quad \forall |t| \leq \lambda$$

Finalmente, considere  $r_1 > 0$  satisfazendo a Epl em relação a  $\delta_2$ , isto é, se  $d(x, y) \leq r_1$  então  $W_{\delta_2}^s(x) \cap W_{\delta_2}^u(y) \neq \emptyset$ . Seja  $y \in B_{r_1}(x)$  então existe  $a \in W_{\delta_2}^s(x) \cap W_{\delta_2}^u(y)$ , logo

$$z = \pi_x(a) = \phi_{s_1} a \in \pi_x(W_{\delta_2}^s(x))$$

com  $|s_1| \leq \lambda/2$ . Além disso, como  $a \in W_{\delta_2}^u(y)$  então  $z \in W_{\delta_1}^u(\phi_{s_1} y)$ , depois  $\phi_{s_1} y \in W_{\delta_1}^u(z)$ . Assim,  $\pi_z(\phi_{s_1} y) = \phi_{s_1+s_2} y \in \pi_z W_{\delta_1}^u(z)$ , onde  $|s_1 + s_2| \leq \lambda$ . Recapitulando, mostramos que existe  $|s = s_1 + s_2| \leq \lambda$  tal que  $\phi_s y \in \pi_z W_{\delta_1}^u(z)$  com  $z \in \pi_x(W_{\delta_1}^s(x))$ , ou seja,  $y \in \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x)$ .  $\square$

Uma vez criada esta nova seção transversal, fixaremos de aqui para frente as constantes  $r_1 > 0$  e  $\lambda > 0$  tal que  $B_{r_1}(x) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x)$  para todo  $x \in X$ . Definamos o conjunto  $\mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})^i = \{\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})^i : |\alpha(t) - t| \leq \tau\}$  para  $i = +, -$ .

**Proposição 2.8.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo satisfazendo a Epl e  $B_r(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]} H(x)$  para todo*

$x \in X$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in H_\delta^*(x)$  então

$$T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Além disso, a interseção é um único ponto e satisfaz a seguinte condição:

$$\begin{aligned} a \in T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y) &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R}) \text{ tal que } \phi_{\alpha(t)}a \in H_\varepsilon(\phi_t x) \quad \forall t \geq 0 \\ &\text{e } \phi_{\alpha(t)}a \in H_\varepsilon(\phi_t y) \quad \forall t \leq 0. \end{aligned}$$

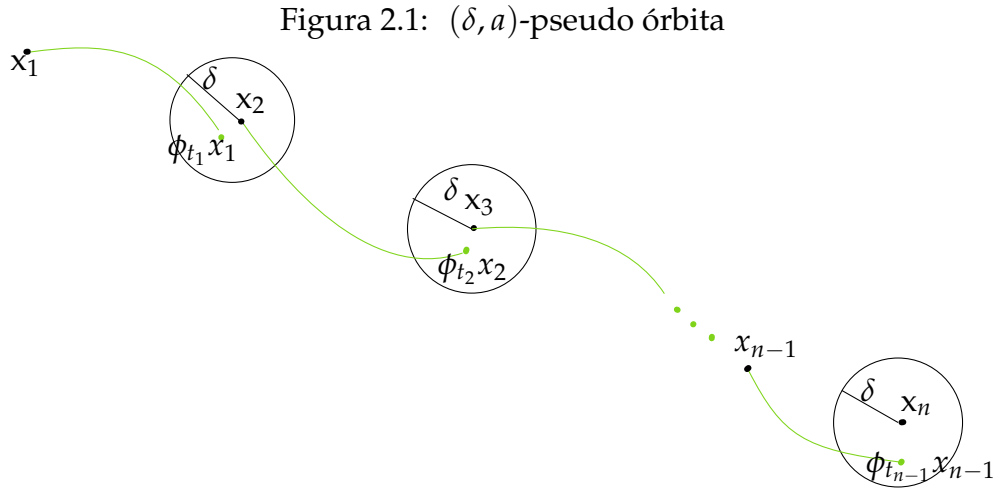
*Demonstração.* Seja  $\varepsilon \in (0, r]$ . De acordo com a Proposição 1.13 existe  $r_2 \geq 0$  tal que  $\pi_x(W_{r_2}^s(x)) \subset T_\varepsilon^s(x)$  e  $\pi_x(W_{r_2}^u(x)) \subset T_\varepsilon^u(x)$  para todo  $x \in X$ . Seja  $\delta \in (0, r_2)$  satisfazendo o Teorema 2.7, isto é,  $H_\delta^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é um campo de seções transversais e tal que  $d(x, y) \leq \delta$  implique  $d(\phi_t x, \phi_t y) \leq r_2$  para todo  $|t| \leq \tau$ . Portanto, se  $y \in H_\delta^*(x)$  então existe  $a \in \pi_x(W_\delta^s(x))$  tal que  $y \in \pi_a(W_\delta^u(a))$ . Afirmamos que  $y \in \pi_a(W_\delta^u(a))$  implica que  $a \in \pi_y(W_{r_2}^u(y))$ . De fato, como  $y \in \pi_a(W_\delta^u(a))$ , existe  $|r| \leq \tau$  tal que  $\phi_r y \in W_\delta^u(a)$ . Se  $r > 0$ ,  $y \in W_\delta^u(\phi_{-r}a)$  implica que  $\phi_{-r}a \in W_\delta^u(y)$ . Assim,  $a = \pi_y(\phi_{-r}a) \in \pi_y(W_\delta^u(y))$ . Se  $r < 0$ ,  $\phi_r y \in W_\delta^u(a)$  implica que  $y \in W_{r_2}^u(\phi_r a)$ , logo  $\phi_r a \in W_{r_2}^u(y)$ . Assim,  $a = \pi_y(\phi_r a) \in \pi_y(W_{r_2}^u(y))$ . Logo, pela afirmação anterior temos que  $a \in \pi_y(W_{r_2}^u(y)) \cap \pi_x(W_{r_2}^s(x))$ . Portanto,  $a \in T_\varepsilon^s(x) \cap T_\varepsilon^u(y)$ . Finalmente, a Proposição 1.13 fornece informações sobre as reparametrizações, isto é, se  $a \in \pi_x(W_{r_2}^s(x))$  então existe  $\alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  ( $|\alpha(t) - t| \leq \tau$ ) tal que  $\phi_{\alpha(t)}z \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ . Da mesma forma temos para o caso instável. Portanto, a segunda parte do Teorema fica demonstrado. □

## 2.3 Sombreamento para fluxos expansivos

Nesta seção mostraremos que os fluxos expansivos satisfazendo a propriedade de estrutura de produto local fraca, possuem a propriedade de sombreamento. Lembremos que no início do trabalho da tese, fixamos  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  um campo de seções transversais, constantes  $\tau$  e  $r > 0$  tal que  $\phi : [-\tau, \tau] \times H(x) \rightarrow X$  é injetivo e  $B(x, r) \subset \phi_{[-\tau, \tau]}H(x)$  para todo  $x \in X$ . Enunciaremos, a seguir, algumas noções elementares que serão indispensáveis para a apresentação posterior da propriedade de

sombreamento dos fluxos topologicamente hiperbólicos.

**Definição 2.9.** *Sejam  $\delta > 0$  e  $T > 0$ . Um par de seqüências finitas  $(\{x_i\}_0^n, \{t_i\}_0^{n-1})$  é chamado de  $(\delta, T)$ -pseudo órbita se  $t_i \geq T$  e  $d(\phi_{t_i}x_i, x_{i+1}) \leq \delta$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ .*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma  $(\delta, T)$ -pseudo-órbita infinita é um par de seqüências duplamente infinito

$$(\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}, \{t_i\}_{-\infty}^{\infty})$$

tal que

$$t_i \geq T \quad e \quad d(\phi_{t_i}x_i, x_{i+1}) \leq \delta \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, para cada seqüência  $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$  de números reais, definamos uma seqüência  $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$  de somas dos tempos de  $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ , definido por:

$$s_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} t_j & \text{se } i > 0, \\ 0 & \text{se } i = 0, \\ -\sum_{j=-i}^{-1} t_j & \text{se } i < 0. \end{cases}$$

Denotemos por  $x_0 \star t \in X$  ao ponto que é  $t$  unidades de tempo de  $x_0$  na pseudo-órbita

$(\{x_i\}, \{t_i\})_{i \in \mathbb{Z}}$ , isto é

$$x_0 \star t = \phi_{t-s_i} x_i \quad \text{quando} \quad s_i \leq t \leq s_{i+1}.$$

Uma  $(\delta, a)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^{n-1})$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z \in X$  se existe um  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$d(\phi_{\alpha(t)} z, x_0 \star t) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [0, s_n].$$

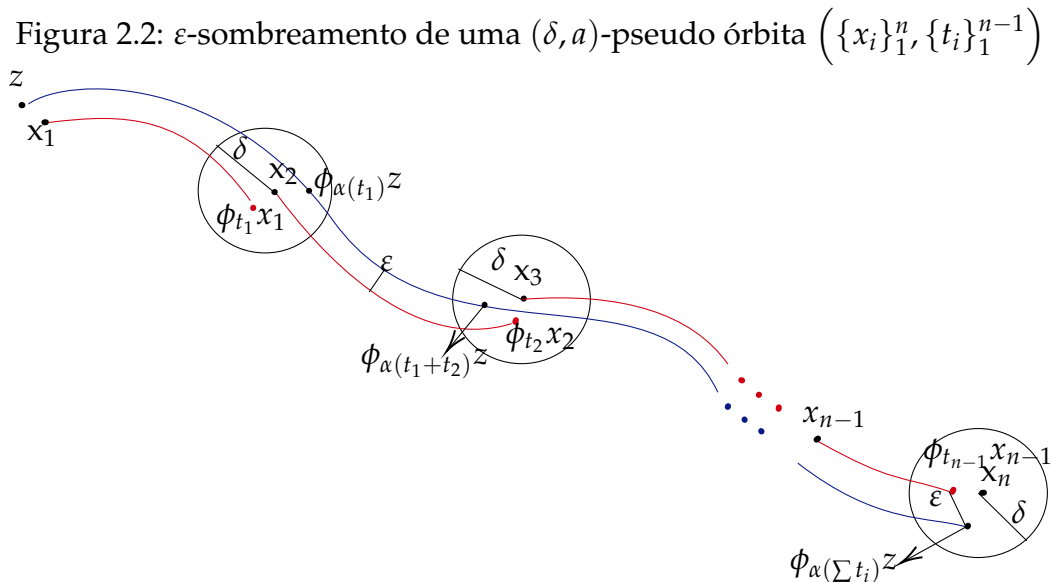
Equivalentemente, enunciamos com mais detalhes a definição anterior:

**Definição 2.10.** *Seja  $\varepsilon > 0$ . Dizemos que uma  $(\delta, a)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^{n-1})$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z \in X$  se existe um  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que*

$$d(\phi_{\alpha(t)} z, \phi_{t-s_i} x_i) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [s_i, s_{i+1}] \quad \text{e} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

e

$$d(\phi_{\alpha(t)} z, \phi_{t+s_{-i}} x_{-i}) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [-s_{-i}, -s_{-i+1}] \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma, uma  $(\delta, a)$ -pseudo órbita infinita  $(\{x_i\}_{-\infty}^{\infty}, \{t_i\}_{-\infty}^{\infty})$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z \in X$  se existe um  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$d(\phi_{\alpha(t)} z, x_0 \star t) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [0, s_n].$$

**Definição 2.11.** Um fluxo  $(X, \phi)$ , com  $X$  sendo um espaço métrico, possui a propriedade de sombreamento se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que cada  $(\delta, 1)$ -pseudo órbita infinita é  $\varepsilon$ -sombreado por uma órbita de  $\phi$ .

No seguinte teorema vamos a demonstrar a propriedade de sombreamento para fluxos topologicamente hiperbólicos.

**Teorema 2.12.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a propriedade de Eplf. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \bar{\delta} > 0$  tal que cada  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z$ .

Para a demonstração do Teorema 2.12, faremos o uso dos Lemas 2.13 e 2.15. Nesta seção fixaremos os seguintes constantes que serão usados nos próximos lemas e na demonstração do Teorema :

- (a) Seja  $\varepsilon \leq r$  então existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \varepsilon_1$  então  $d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|t| \leq \tau$
- (b) Seja  $\lambda \in (0, \tau)$  e  $r_1 > 0$  tal que  $d(\phi_t x, x) \leq \varepsilon/2$  para todo  $|x| \leq \lambda$  e tal que  $B_{r_1}(x) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x)$  para todo  $x \in X$ .
- (c) Seja  $\varepsilon' > 0$  tal que  $d(x, y) \leq \varepsilon_1$  desde que  $\rho(x, y) \leq \varepsilon'$ .
- (d) Para  $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon'/3)$  fixe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \bar{\varepsilon}$  então  $\rho(x, y) \leq \varepsilon_0$ .
- (e) Seja  $\delta_1 > 0$  satisfazendo a Proposição 2.8 com respeito ao  $\bar{\varepsilon}$ .
- (f) Seja  $\delta_3 > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta_3$  então existe  $|\mu| \leq \tau$  tal que  $\phi_\mu y \in H_{\delta_1}^*(x)$
- (g) Seja  $\delta_2 < \delta_1$  tal que se  $\rho(x, y) \leq \delta_2$  então  $d(x, y) \leq \delta_3$ .
- (h) Seja  $\lambda_1 \in (0, 1)$  e  $c > 0$  da Proposição 2.2 e fixe um número suficientemente grande  $M$  tal que  $\gamma = c\lambda_1^{M-5\tau} < \frac{1}{2}$  e  $\gamma\varepsilon_0 < \delta_2/2$ .
- (i) Seja  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então  $\rho(x, y) \leq \delta_2/2$
- (j) Seja  $\bar{\delta} > 0$  tal que  $d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \delta$  para todo  $|t| \leq \lambda$  desde que  $d(x, y) \leq \bar{\delta}$

**Lema 2.13.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a propriedade de Eplf. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \delta > 0$  e  $\bar{\delta}(\delta) > 0$  tal que se  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita, então existe uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  satisfazendo os seguintes itens:

1. Para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , existe  $|\mu_i| \leq \lambda$  tal que  $\phi_{\mu_i} x'_i = x_i$ . E Para todo  $i = 1, 2, \dots, n-2$  temos que  $t'_i = t_i - \mu_{i+1}$  e  $t'_{n-1} = t_{n-1}$ .
2. Existe um  $\bar{\varepsilon} > 0$ , pontos  $\{z_i\}_n^1 \in X$  e  $\{\bar{z}_i\}_n^1 \subset X$  e  $\{h_i\}_n^1 \subset \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  tal que
  - para  $i = n$  existe  $z_i \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(x_i) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1})$  e  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$ .
  - Para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  temos que  $z_i \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1})$ . Onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$  e  $x''_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}$  (Veja a Figura 2.5).
3.  $\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}, x'_i \in H^*(\bar{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

*Demonstração.* Para  $\varepsilon > 0$  consideremos as constantes fixadas no início da seção. Suponha que  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita, logo dos itens (j) e (i) temos que

$$\rho(x_i, \phi_{t_{i-1}} x_{i-1}) \leq \frac{\delta_2}{2} \quad \text{e} \quad t_i \geq M \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De acordo com (g) e (f) existe  $|\mu_{n-1}| \leq \tau$  tal que  $\phi_{t_{n-1}-\mu_{n-1}} x_{n-1} \in H_{\delta_1}^*(x_n)$ , denotemos por  $t'_{n-1} = t_{n-1}$  e  $x'_{n-1} = \phi_{-\mu_{n-1}} x_{n-1}$ . É imediato observar que  $\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1} \in H_{\delta_1}^*(x_n)$ . Logo, de acordo com (e) existe  $z_n \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(x_n) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1})$ . Veja a Figura 2.3. Portanto, existe  $h_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  tal que

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{h_n(s)} z_n, \phi_s x_n) &\leq \varepsilon_0 \quad \text{para todo} \quad s \geq 0, \\ \rho(\phi_{h_n(s)} z_n, \phi_s x'_{n-1}) &\leq \varepsilon_0 \quad \text{para todo} \quad s \leq 0, \end{aligned}$$

onde  $x''_{n-1} = \phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}$ . Além disso, denotando por  $\bar{z}_n = \phi_{h_n(-t'_{n-1})} z_n$  temos que

$$\begin{aligned} \rho(\bar{z}_n, \phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}} x_{n-2}) &\leq \rho(\phi_{h_n(-t'_{n-1})} z_n, \phi_{-t'_{n-1}} x''_{n-1}) + \rho(x'_{n-1}, \phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}} x_{n-2}) \\ &\leq c \lambda_1^{t'_{n-1}} \rho(z_n, x''_{n-1}) + \frac{\delta_2}{2} \\ &\leq c \lambda_1^{M-5\tau} \varepsilon_0 + \frac{\delta_2}{2} \\ &\leq \gamma \varepsilon_0 + \frac{\delta_2}{2} \\ &< \delta_2. \end{aligned}$$

A terceira desigualdade da inequação anterior segue pelo fato que  $t'_{n-1} \geq M - \tau \geq$

$M - 5\tau$  implica que  $\lambda_1^{t'_{n-1}} \leq \lambda_1^{M-5\tau}$ . Logo, de acordo com (g) temos que

$$d((\bar{z}_n, \phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}}x_{n-2})) \leq \delta_3.$$

De novo por (f) existe  $|\mu_{n-2}| \leq \tau$  tal que  $\phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}-\mu_{n-2}}x_{n-2} \in H_{\delta_1}^*(\bar{z}_n)$ . Denotemos por  $t'_{n-2} = t_{n-2} - \mu_{n-1}$  e  $x'_{n-2} = \phi_{-\mu_{n-2}}x_{n-2}$ , observe que  $x''_{n-2} = \phi_{t'_{n-2}}x'_{n-2} \in H_{\delta_1}^*(\bar{z}_n)$ . Logo, existe  $z_{n-1} \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{n-2})$ , observe a Figura 2.3. Então existe  $h_{n-1} \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  tal que

$$\rho(\phi_{h_{n-1}(s)}z_{n-1}, \phi_s\bar{z}_n) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \geq 0,$$

$$\rho(\phi_{h_{n-1}(s)}z_{n-1}, \phi_sx''_{n-2}) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \leq 0.$$

Denotando por  $\bar{z}_{n-1} = \phi_{h_{n-1}(-t'_{n-2})}z_{n-1}$  temos que

$$\begin{aligned} \rho(\bar{z}_{n-1}, \phi_{t_{n-3}-\mu_{n-2}}x_{n-3}) &\leq \rho(\phi_{h_{n-1}(-t'_{n-2})}z_{n-1}, \phi_{-t'_{n-2}}x''_{n-2}) + \rho(x'_{n-2}, \phi_{t_{n-3}-\mu_{n-2}}x_{n-3}) \\ &\leq c\lambda_1^{t'_{n-2}}\rho(z_{n-1}, x''_{n-2}) + \frac{\delta_2}{2} \\ &\leq c\lambda_1^{M-5\tau}\varepsilon_0 + \frac{\delta_2}{2} \\ &\leq \gamma\varepsilon_0 + \frac{\delta_2}{2} \\ &< \delta_2. \end{aligned}$$

Observe que a terceira desigualdade da inequação anterior segue pelo fato que  $t'_{n-2} \geq M - \tau \geq M - 5\tau$  implica que  $\lambda_1^{t'_{n-2}} \leq \lambda_1^{M-5\tau}$ . Logo, seja  $|\mu_{n-3}| \leq \tau$  tal que

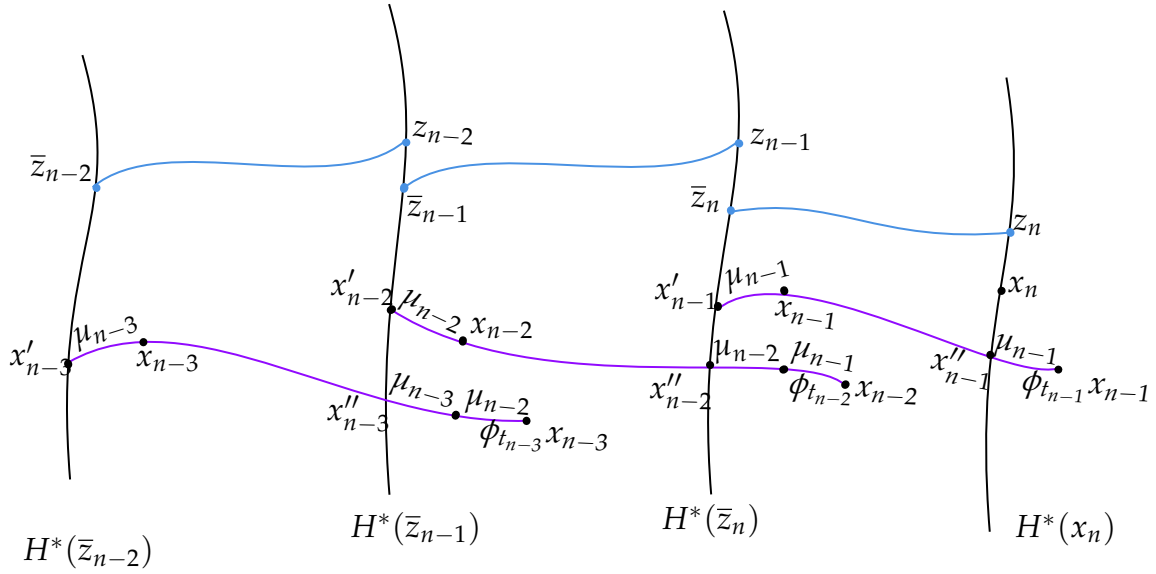
$$\phi_{t_{n-3}-\mu_{n-2}-\mu_{n-3}}x_{n-3} \in H_{\delta_1}^*(\bar{z}_{n-1}).$$

Denotemos por  $t'_{n-3} = t_{n-3} - \mu_{n-2}$  e  $x'_{n-3} = \phi_{-\mu_{n-3}}x_{n-3}$ , observe que

$$x''_{n-3} = \phi_{t'_{n-3}}x'_{n-3} \in H_{\delta_1}^*(\bar{z}_{n-1}).$$

De novo, de acordo com (e) existe  $z_{n-2} \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{n-1}) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{n-3})$ . Observemos que os  $\mu_i$  localizados na figura 2.3 representam os tempos que leva para ir de um ponto ao próximo ponto, ou seja,  $\phi_{-\mu_i}x_i = x'_i$  e  $\phi_{t_{i-1}-\mu_i-\mu_{i-1}}x_{i-1} = x''_{i-1}$ . Por indução, construímos

Figura 2.3: Os  $\mu_i$  são tempos tal que  $\phi_{-\mu_i}x_i = x'_i$  e  $\phi_{t_{i-1}-\mu_i-\mu_{i-1}}x_{i-1} = x''_{i-1}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

uma sequência de pontos  $(z_i)_{n-1}^2$  tal que

$$z_i \in T_\varepsilon^s(\bar{z}_{i+1}) \cap T_\varepsilon^u(x''_{i-1}),$$

onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})}z_i$ ,  $x''_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}}x'_{i-1}$  e  $(h_i)_2 \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$  é uma sequência de reparametrizações tal que

$$\rho(\phi_{h_i(s)}z_i, \phi_s\bar{z}_{i+1}) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \geq 0,$$

$$\rho(\phi_{h_i(s)}z_i, \phi_sx''_{i-1}) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \leq 0.$$

□

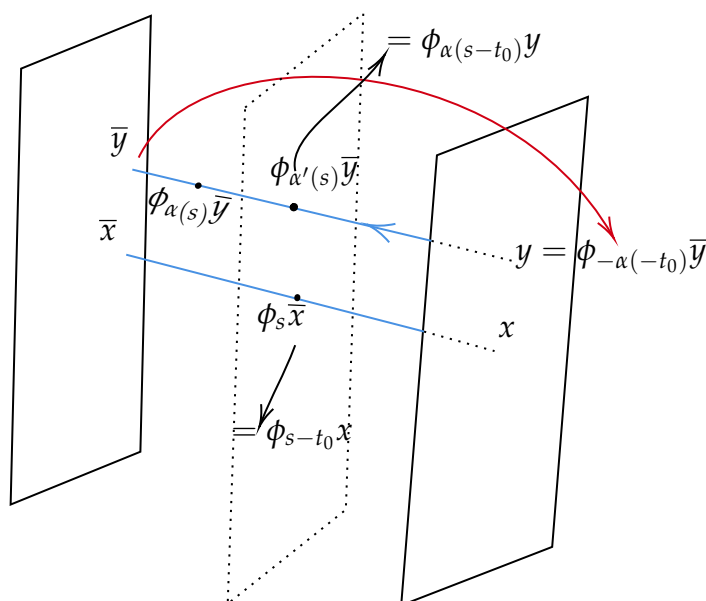
#### Observação 2.14.

Seja  $T \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$ . Se  $\phi_{\alpha(t)}y \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para  $t \in [-t_0, 0]$  então existe uma reparametrização  $\alpha' \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\alpha'(s)}\bar{y} \in H_\varepsilon(\phi_s \bar{x})$  para todo  $s \in [0, t_0]$ , com  $\bar{y} = \phi_{\alpha(-t_0)}y$  e  $\bar{x} = \phi_{-t_0}x$ . De fato, definamos  $\alpha'(s) = \alpha(s - t_0) - \alpha(-t_0)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . É imediato observar que  $\alpha' \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  e que

$$d(\phi_{\alpha'(s-t_0)}y, \phi_{s-t_0}x) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in [0, t_0].$$

Logo,  $d(\phi_{\alpha'(s)}\bar{y}, \phi_s\bar{x}) \leq \varepsilon$  para todo  $s \in [0, t_0]$ . Veja os detalhes na figura 2.4

Figura 2.4: Os pontos  $\bar{y}$  e  $\bar{x}$  não necessariamente se acompanham com a reparametrização  $\alpha$



Fonte: Elaborado pelo autor.

No seguinte Lema é demonstrada uma versão mais fraca que a propriedade de sombreamento. Mostraremos que as pseudo órbitas  $(\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n)$  definidas no lema anterior, são sombreadas pela órbita de um ponto.

**Lema 2.15.** *A sequência  $(\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n)$  definida no Lema 2.12 anterior é sombreada pela órbita de um ponto:*

*Para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $M, \delta > 0$  e  $\bar{\delta}(\delta) > 0$  tal que se  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita então existe uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  satisfazendo os itens do Lema 2.12 tal que é  $\varepsilon_1$ -sombreada pela órbita de um ponto.*

*Demonstração.* Para  $\varepsilon > 0$  consideremos as constantes definidas no início da seção (itens (a) até (j)). Seja  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita, de acordo como o Lema 2.13 existe uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  satisfazendo as seguintes condições:

1.  $\phi_{\mu_i} x'_i = x_i$  e para algum  $|\mu_i| \leq \lambda$  e para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .  $t'_{n-1} = t_{n-1}$  e para todo  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , temos que  $t'_i = t_i - \mu_{i+1}$ .
2. Existe um  $\bar{\varepsilon} > 0$ , pontos  $\{z_i\}_n^1 \in X$  e  $\{\bar{z}_i\}_n^1 \subset X$  e  $\{h_i\}_n^1 \subset \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  tal que
  - para  $i = n$  existe  $z_i \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(x_i) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1})$  e  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$ .

- Para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  temos que  $z_i \in T_{\bar{z}_i}^s \cap T_{x'_{i-1}}^u$ . Onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$  e  $x'_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}$ .

3.  $\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}, x'_i \in H^*(\bar{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

A demonstração será de forma indutiva. Primeiro, definiremos uma reparametrização  $\beta_{n-1} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_{n-1} \in X$   $\varepsilon_1$ -sombreira à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_{n-1}^n, \{t'_i\}_{n-1}^n))$ . Segundo, definiremos uma reparametrização  $\beta_{n-2} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_{n-2} \in X$   $\varepsilon_1$ -sombreira à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_{n-2}^n, \{t'_i\}_{n-2}^n))$ . Continuando indutivamente, definiremos um  $\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_2 \in X$   $\varepsilon_1$ -sombreira à  $(\delta, M)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_2^n, \{t'_i\}_2^n))$ .

De fato, seja  $\beta'_n(s) = h_n(s - t'_{n-1}) - h_n(-t'_{n-1})$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . De acordo com a Observação 2.14 o ponto  $\bar{z}_n$  acompanha a órbita de  $x'_{n-1}$  para todo  $t \in [0, t'_{n-1}]$  com a reparametrização  $\beta'_n$ , ou seja,

$$d(\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n, \phi_s x'_{n-1}) \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{para todo } s \in [0, t'_{n-1}].$$

Logo, de acordo com o item (d) temos que

$$\rho(\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n, \phi_s x'_{n-1}) \leq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } s \in [0, t'_{n-1}].$$

Continuando, definamos a reparametrização

$$\beta_{n-1}(s) = \begin{cases} h_{n-1} \circ \beta'_n(s) & \text{para todo } s \geq 0 \\ h_{n-1}(s) & \text{para todo } s \leq 0 \end{cases}$$

Afirmamos que  $z_{n-1}$ ,  $\varepsilon_1$ -sombreira à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_{n-1}^n, \{t'_i\}_{n-1}^n))$  com a reparametrização  $\beta_{n-1}$ . Isto é

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_s x'_{n-1}) &\leq \varepsilon_1 & \text{para todo } s \in [0, t'_{n-1}] \\ d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-1}} x'_n) &\leq \varepsilon_1 & \text{para todo } s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De fato, como  $h_n \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  ( $|h_n(s) - s| \leq \tau \quad \forall t \geq 0$ ) então

$$\beta'_n(s) \in [s - 2\tau, s + 2\tau] \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Logo, para todo  $s \in [0, t'_{n-1}]$  temos que

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_s x'_{n-1}) &\leq \rho(\phi_{h_{n-1}(\beta'_n(s))} z_{n-1}, \phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n) + \rho(\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n, \phi_s x'_{n-1}) \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon', \end{aligned}$$

e para todo  $s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n]$  temos que

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-1}} x'_n) &\leq \rho(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n) + \rho(\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n, \phi_{s-t'_{n-1}} x'_n) \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon', \end{aligned}$$

veja a Figura 2.5. Portanto, fica demonstrado a última afirmação. Continuando com a construção das reparametrizações, seja  $\beta'_{n-1}(s) = \beta_{n-1}(s - t'_{n-2}) - \beta_{n-1}(-t'_{n-2})$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . De acordo com a Observação 2.14 o  $\bar{z}_{n-1}$  acompanha a órbita de  $x'_{n-2}$  para todo  $t \in [0, t'_{n-2}]$  com a reparametrização  $\beta'_{n-1}$ , ou seja,

$$\rho(\phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}, \phi_s x'_{n-2}) \leq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } s \in [0, t'_{n-2}].$$

Defina

$$\beta_{n-2}(s) = \begin{cases} h_{n-2} \circ \beta'_{n-1}(s) & \text{para todo } s \geq 0 \\ h_{n-2}(s) & \text{para todo } s \leq 0 \end{cases}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_s x'_{n-2}) &\leq \varepsilon \quad \forall s \in [0, t'_{n-2}] \\ d(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{s-t'_{n-2}} x'_{n-1}) &\leq \varepsilon \quad \forall s \in [t'_{n-2}, t'_{n-2} + t'_{n-1}] \\ d(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{s-t'_{n-2}-t'_{n-1}} x'_n) &\leq \varepsilon \quad \forall s \in [t'_{n-2} + t'_{n-1}, t'_{n-2} + t'_{n-1} + t'_n]. \end{aligned}$$

De fato, observemos primeiro que

$$\beta'_{n-1}(s) \in \begin{cases} [s - 2\tau, s + 2\tau] & \text{si } s \in [0, t'_{n-2}], \\ [s - 4\tau, s + 4\tau] & \text{si } s \in [t'_{n-2}, +\infty). \end{cases}$$

Logo, para todo  $t \in [0, t'_{n-2}]$  temos que

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_s x'_{n-2}) &\leq \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}) + \rho(\phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}, \phi_s x'_{n-2}) \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \\ &\leq \varepsilon', \end{aligned}$$

e para todo  $s \in [t'_{n-2}, t'_{n-2} + t'_{n-1}]$

$$\begin{aligned} \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{s-t'_{n-2}} x'_{n-1}) &\leq \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}) \\ &\quad + \rho(\phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-2}} x'_{n-1}) \\ &\leq c\lambda_1^{\beta'_{n-1}(s)} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \\ &\leq c\lambda_1^{t'_{n-2}-4\tau} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \\ &= \gamma\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0, \\ &< 3\varepsilon_0 \end{aligned}$$

e para todo  $s \in [t'_{n-2} + t'_{n-1}, t'_{n-2} + t'_{n-1} + t'_n]$

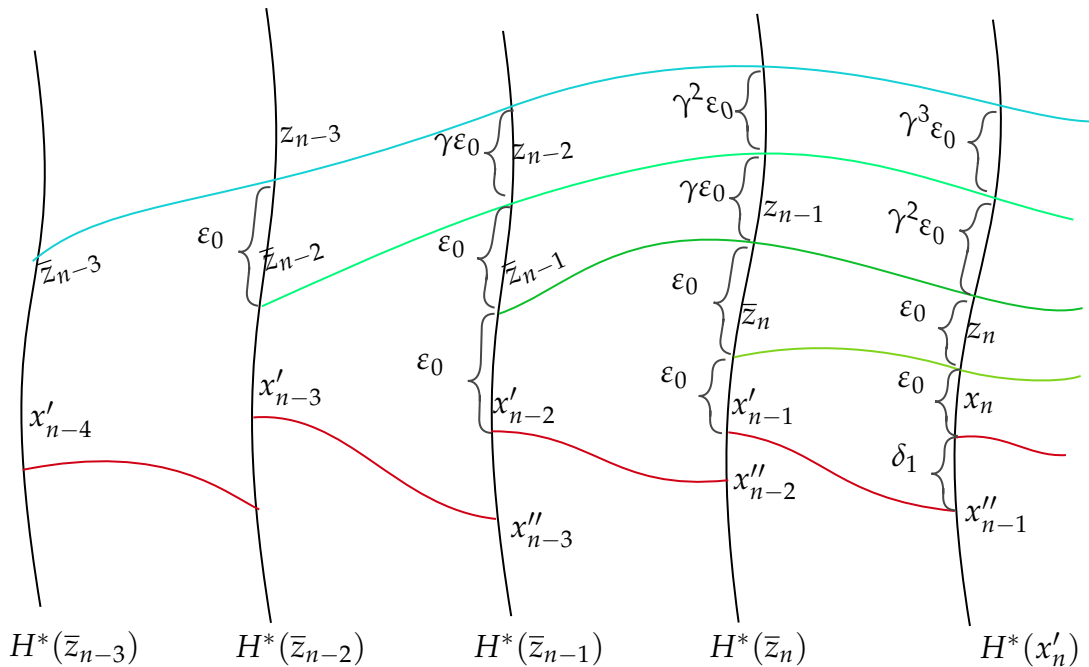
$$\begin{aligned} \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{s-t'_{n-2}-t'_{n-1}} x'_n) &\leq \rho(\phi_{\beta_{n-2}(s)} z_{n-2}, \phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}) \\ &\quad + \rho(\phi_{\beta'_{n-1}(s)} \bar{z}_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-2}-t'_{n-1}} x'_n) \\ &\leq c\lambda_1^{\beta'_{n-1}(s)} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \\ &\leq c^2\lambda_1^{t'_{n-2}+t'_{n-1}-4\tau} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0, \\ &\leq c^2\lambda_1^{2M-10\tau} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0, \\ &= \gamma^2\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

A ultima desigualdade segue pelo fato que  $t'_{n-2} + t'_{n-1} - 4\tau \geq 2M - 6\tau \geq 2M - 10\tau$  implica que  $c^2\lambda_1^{t'_{n-2}+t'_{n-1}-4\tau} \leq (c\lambda_1^{M-5\tau})^2$ . veja a Figura 2.5. Continuando indutivamente temos que  $z_2$  sombreia à  $(\delta, M)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_2^n, \{t'_i\}_2^n)$ , isto é, existe

$\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_2(s)} z_2, \phi_s x'_2) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_2, \\ d(\phi_{\beta_2(s)} z_2, \phi_{s-t'_2} x'_3) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } t'_2 \leq s \leq t'_2 + t'_3, \\ &\vdots \\ d(\phi_{\beta_2(s)} z_2, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } \sum_{i=2}^{n-1} t'_i \leq s \leq \sum_{i=2}^n t'_i. \end{aligned}$$

Figura 2.5: Sombreamento da  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, tome  $z' = \phi_{\beta_2(-t'_1)} z_2$  e defina  $\beta'(s) = \beta_2(s - t'_1) - \beta_2(-t'_1)$ . É imediato observar que  $\beta' \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  e que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta'(s)} z', \phi_s x'_1) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_1, \\ d(\phi_{\beta'(s)} z', \phi_{s-t'_1} x'_2) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } t'_1 \leq s \leq t'_1 + t'_2, \\ &\vdots \\ d(\phi_{\beta'(s)} z', \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon_1 \text{ para todo } s'_{n-1} \leq s \leq s'_n, \end{aligned}$$

onde  $s'_n = \sum_{i=1}^n t'_i$ . Isto significa, que a  $(\delta, M')$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n))$  é  $\varepsilon_1$ -

sombreada pela órbita do ponto  $z' \in X$ .  $\square$

**Teorema 2.16.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo expansivo satisfazendo a propriedade de Eplf. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \bar{\delta} > 0$  tal que cada  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z$ .*

*Demonstração.* Para  $\varepsilon > 0$  consideremos as constantes definidas no início da seção (itens (a) até (j)). Suponha que  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita. De acordo com o Lema 2.15 podemos construir uma  $(\delta, M')$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n)$  satisfazendo:

1.  $\phi_{\mu_i} x'_i = x_i$  e para algum  $|\mu_i| \leq \lambda$  e para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Para todo  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , temos que  $t'_i = t_i - \mu_{i+1}$  e  $t'_{n-1} = t_{n-1}$ .
2. Existe um  $\bar{\varepsilon} > 0$ , pontos  $\{z_i\}_n^1 \in X$  e  $\{\bar{z}_i\}_n^1 \subset X$  e  $\{h_i\}_n^1 \subset \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  tal que
  - para  $i = n$  existe  $z_i \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(x_i) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1})$  e  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$ .
  - Para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  temos que  $z_i \in T_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cap T_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1})$ . Onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$  e  $x''_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}$ .
3.  $\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}, x'_i \in H^*(\bar{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Além disso, pelo Lema 2.15 o ponto  $z' = \phi_{\beta_2(-t_1)} z_2$  sombreia à  $(\delta, M)$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n))$ , isto é, existe  $\beta' \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$d(\phi_{\beta'(t)} z, x_0 \star t) \leq \varepsilon_1 \quad \text{para todo } t \in [0, s_n].$$

Afirmamos que  $z = \phi_{\beta'(u_1)} z'$   $\varepsilon$ -sombreia à  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $((\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n))$ . De fato, seja

$$\beta(t) = \beta'(t + \mu_1) - \beta'(\mu_1),$$

é imediato observar que  $\beta \in \text{Rep}(\mathbb{R})$ . Como já sabemos que  $d(\phi_{\beta'(s)} z, \phi_s x'_1) \leq \varepsilon_1$  para todo  $0 \leq s \leq t'_1$ , então

$$d(\phi_{\beta(s)} z, \phi_s x_1) \leq \varepsilon_1 \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t_1 - \mu_1 - \mu_2 \quad (2.3)$$

Portanto, bastaria mostrar que  $z$  acompanha à órbita de  $x_1$  para os tempos no intervalo  $[t_1 - \mu_1 - \mu_2, t_1]$ . Seja

$$\alpha(t) := \begin{cases} \beta(t) & \text{se } t \in [0, t_1 - 2\mu_1 - \mu_2] \\ \beta\left(\frac{t_1 - 2\mu_1 - \mu_2 + t}{2}\right) & \text{se } t \in [t_1 - 2\mu_1 - \mu_2, t_1 - \mu_2] \\ \beta(t - \mu_1) & \text{se } t \in [t_1 - \mu_2, t_1] \end{cases} \quad (2.4)$$

Afirmamos que

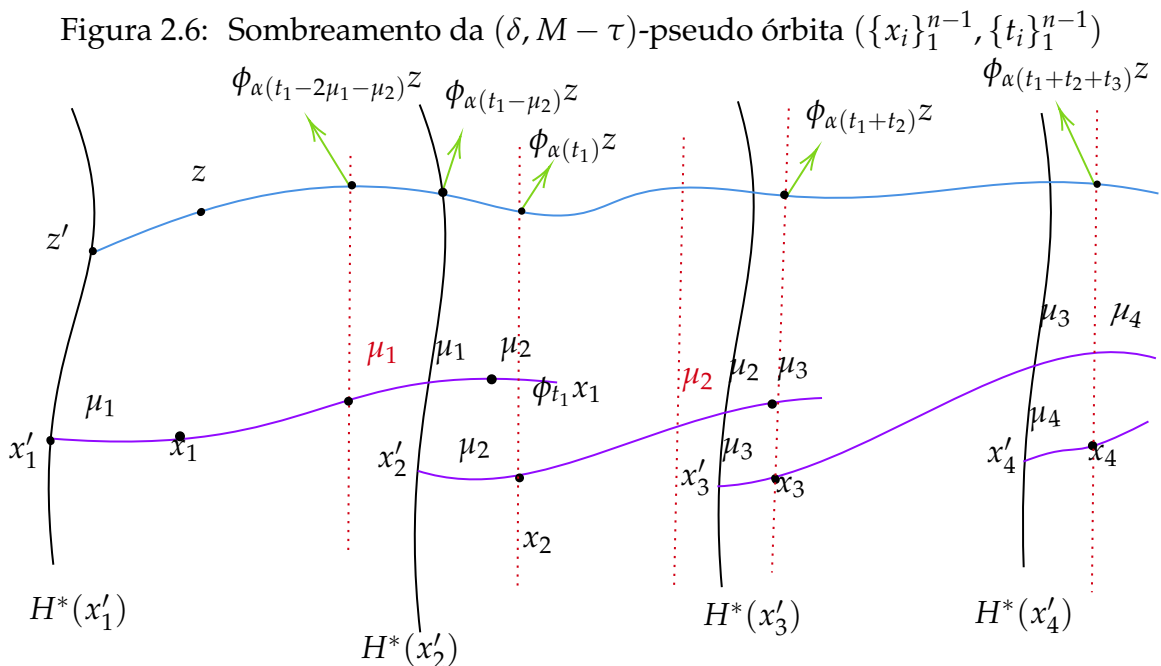
$$d(\phi_{\alpha(s)}z, \phi_s x_1) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t_1$$

De fato, seja  $t = t_1 - 2\mu_1 - \mu_2 + s$  com  $s \in [0, 2\mu_1]$

$$\begin{aligned} d(\phi_{\alpha(t)}z, \phi_t x_1) &\leq d(\phi_{\beta(t+\frac{s}{2})}z, \phi_{t+\frac{s}{2}}x_1) + d(\phi_{t+\frac{s}{2}}x_1, \phi_t x_1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Seja  $t = t_1 - \mu_2 + s$  com  $s \in [0, \mu_2]$

$$\begin{aligned} d(\phi_{\alpha(t)}z, \phi_t x_1) &\leq d(\phi_{\beta(t-\mu_1)}z, \phi_s x'_2) + d(\phi_s x'_2, \phi_t x_1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, fica demonstrado a afirmação anterior. Agindo da mesma forma, podemos mostrar para os tempos  $t_2, t_3, \dots, t_n$ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\alpha(s)}z, \phi_s x_1) &\leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t_1, \\ d(\phi_{\alpha(s)}z, \phi_{s-t_1} x_2) &\leq \varepsilon \text{ para todo } t_1 \leq s \leq t_1 + t_2, \\ &\vdots \\ d(\phi_{\alpha(s)}z, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t_i} x_n) &\leq \varepsilon \text{ para todo } \sum_{i=1}^{n-1} t_i \leq s \leq \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Isto significa, que a  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $((\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreada pela órbita do ponto  $z \in X$ . □

## Capítulo 3

# SOMBREAMENTO PARA FLUXOS CW-EXPANSIVOS

Em [6] é descrito uma generalização da propriedade de estrutura de produto local para homeomorfismos, denominada a propriedade de  $Cw$ -epl. Além disso, foi demonstrado que homeomorfismos  $cw$ -hiperbólicos ( $Cw$ -expansivos +  $Cw$ -epl) possuem a propriedade de sombreamento. Algumas perguntas que surgem naturalmente são: Como definir uma generalização da estrutura de produto local ( $Cw$ -epl) para fluxos? Os fluxos  $Cw$ -expansivos satisfazendo a  $cw$ -epl implique a propriedade de sombreamento? Tais questionamentos motivaram na procura da formalização de tais conceitos que será um dos objetivos desse capítulo. Além disso, definiremos a propriedade  $H^*$  que é uma propriedade mais forte que a  $cw$ -hiperbolicidade. Finalmente, demonstraremos que os fluxos  $cw$ -expansivos satisfazendo a propriedade  $H^*$  possuem a propriedade de sombreamento. Como observação, na demonstração da propriedade de sombreamento para fluxos  $Cw$ -expansivos satisfazendo a propriedade  $H^*$  usaremos as mesmas técnicas usadas para o caso de fluxos topologicamente hiperbólicos que foram descritos no capítulo 2.

### 3.1 $Cw$ -estrutura de produto local

Nesta seção adaptaremos o conceito de  $Cw$ -epl do caso discreto para o caso contínuo. Também definiremos o conceito de  $Cw$ -hiperbólico, como consequência mostraremos que os fluxos  $Cw$ -hiperbólicos são invariantes por conjugação e que a suspen-

são de homeomorfismos Cw-hiperbólicos são fluxos Cw-hiperbólicos. Denotemos por  $C_\varepsilon^s(x)$  e  $C_\varepsilon^u(x)$  as componentes conexas de  $W_\varepsilon^{ss}(x)$  e  $W_\varepsilon^{uu}(x)$  respectivamente, tais que contem  $x$ . Começamos recapitulando algumas definições que dependem unicamente da compacidade do espaço  $X$ .

**Definição 3.1.** Dizemos que  $(X, \phi)$  possui a **Cw-estrutura de produto local (Cw-epl)** se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in X$  e  $d(x, y) \leq \delta$ , então existe  $r = r(x, y)$  com  $|r| \leq \varepsilon$  tal que

$$C_\varepsilon^s(\phi_r(x)) \cap C_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Chamaremos de fluxos *Cw-hiperbólicos* aos fluxos Cw-expansivos que satisfazem a Cw-epl.

### 3.1.1 Conjugação da Cw-epl

Sejam  $M, N$  espaços métricos. Dizemos que os fluxos  $\phi : M \rightarrow M$  e  $\psi : N \rightarrow N$  são *conjugados preservando orientação* se existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow N$  e um mapeio contínuo  $\sigma : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $x \in X$ , temos que

$$(a) \sigma_x(0) = 0 \text{ e } \sigma_x \text{ é estritamente crescente}$$

$$(b) h(\phi_t x) = \psi_{\sigma_x(t)} h(x).$$

No seguinte teorema vamos demonstrar que a propriedade de Cw-epl é invariante por conjugação.

**Teorema 3.2.** Se  $\phi_t : M \rightarrow M$  e  $\psi_t : N \rightarrow N$  são conjugados. Então,  $\phi_t$  possui a propriedade de Cw-epl se, e somente se,  $\psi_t$  possui a propriedade de Cw-epl.

*Demonstração.* Sejam  $d_M$  e  $d_N$  as métricas em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Suponha que  $\phi_t$  possui a propriedade de cw-epl e  $h : M \rightarrow N$  uma conjugação preservando orientação de  $\phi_t$  e  $\psi_t$ . Então existe uma função contínua  $\sigma : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\sigma_x(0) = 0 \quad \text{e} \quad h(\phi_t x) = \psi_{\sigma_x(t)} h(x). \quad (3.1)$$

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\varepsilon' > 0$  tal que

$$d_M(x, y) \leq \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad d_N(h(x), h(y)) \leq \varepsilon, \quad (3.2)$$

Seja  $\delta' > 0$  tal que se  $d_M(x, y) \leq \delta'$  então existe  $|r(x, y)| \leq \varepsilon'$  tal que  $C_{\varepsilon'}^s(\phi_r x) \cap C_{\varepsilon'}^u(y) \neq \emptyset$ . Em particular, podemos considerar que  $C_{\varepsilon'}^s(x) \cap C_{\varepsilon'}^u(y) \neq \emptyset$ . Finalmente, considere  $\delta \in (0, \delta')$  tal que se

$$d_N(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_M(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \delta'.$$

Portanto, se  $d_N(x, y) \leq \delta$  então existe  $z' \in C_{\varepsilon'}^s(h^{-1}(x)) \cap C_{\varepsilon'}^u(h^{-1}(y))$ . Afirmamos que  $h(z') \in C_{\varepsilon}^s(x) \cap C_{\varepsilon}^u(y)$ . De fato, como  $z' \in C_{\varepsilon'}^s(h^{-1}(x))$  então existe  $\alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que

$$d_M(\phi_{\alpha(t)} z', \phi_t h^{-1}(x)) \leq \varepsilon' \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

logo, de acordo com (3.2) temos que

$$d_N\left(h \circ \phi_{\alpha(t)}(z'), h \circ \phi_t \circ h^{-1}(x)\right) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

de 3.1 temos que

$$d_N\left(\psi_{\sigma_{z'}(\alpha(t))}(h(z')), \psi_{\sigma_x(t)} x\right) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Seja  $\beta_{z'}(t) = \sigma_{z'} \circ \alpha \circ \alpha_x^{-1}(t)$ , é imediato observar que  $\beta_{z'} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$ . Portanto, temos que

$$d_N\left(\psi_{\beta(t)}(h(z')), \psi_t x\right) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Assim,  $h(z') \in W_{\varepsilon}^{ss}(x)$  e da continuidade da conjugação  $h$  temos que  $h(z') \in C_{\varepsilon'}^s(x)$ . Para o instável segue de forma semelhante. Mostrando assim, que  $\psi_t$  possui a Cw-epl.  $\square$

Em [6, Teorema 2.3] se mostrou que todo fluxo cw-expansivo é invariante por conjugação. Portanto, de acordo com o Teorema 3.2 podemos afirmar o seguinte:

**Teorema 3.3.** *A Cw-hiperbolicidade é invariante por conjugação.*

### 3.1.2 Suspensão de homeomorfismos Cw-hiperbólicos

Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Chamamos de espaço suspensão de  $f$  sob  $c$  ao conjunto

$$X^{c,f} := \{(x, t) : 0 \leq t \leq c(x), x \in X\} / \sim$$

A seguir definiremos o fluxo suspensão e a métrica definida no espaço suspensão, para mais detalhes veja [10]

**Definição 3.4.** *A suspensão de  $f$  com altura  $c$  é o fluxo definido por*

$$\begin{aligned} \phi_t^{c,f} : X^{c,f} &\rightarrow X^{c,f}, \\ (x, s) &\mapsto \phi_t^{c,f}(x, s) := (f^n(x), s'), \end{aligned}$$

com  $n$  e  $s'$  satisfazendo

$$\sum_{i=0}^{n-1} c(f^i(x)) + s' = t + s, \quad 0 \leq s' \leq c(f^n(x))$$

Definamos agora uma métrica em  $X^{1,f} = X^f$  e suponha que  $\text{diam}X \leq 1$ . Consideremos o subconjunto  $X \times \{t\}$  de  $X \times [0, 1]$  e seja  $d_t$  a métrica definida por

$$d_t((y, t), (z, t)) = (1 - t)d(y, z) + td(f(y), f(z)), \quad y, z \in X.$$

Por outro lado, para cada  $(x, t), (y, s) \in X^f$ , considere todas as sequencias finitas  $(z_i, t_i)_{i=1}^n$  de elementos de  $X^f$  tal que  $(z_1, t_1) = (x, t), (z_n, t_n) = (y, s)$  e para cada  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $(x_i, t_i)$  e  $(x_{i+1}, t_{i+1})$  pertencem ao mesmo conjunto  $X \times \{t\}$  para algum  $t \in [0, 1]$  (nesse caso chamamos  $[(x_i, t_i), (x_{i+1}, t_{i+1})]$  um segmento horizontal) ou pertencem à mesma órbita do fluxo suspensão (nesse caso chamamos  $[(x_i, t_i), (x_{i+1}, t_{i+1})]$  de segmento vertical). O **comprimento de um segmento horizontal** será dado pela distância  $d_t$  entre os pontos  $(x_i, t_i)$  e  $(x_{i+1}, t_{i+1})$ , enquanto o **comprimento de um segmento vertical** será a distância entre seus tempos em  $[0, 1]$ . O comprimento de uma cadeia é definido como a soma do comprimento de seus segmentos horizontais e ver-

ticais. Definamos uma métrica  $d^f$  em  $X^f$  da seguinte forma:

$$d^f((x, t), (y, s)) = \inf\{\text{comprimento de todas as cadeias entre } (x, t) \text{ and } (y, s)\}$$

**Teorema 3.5.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função contínua. O fluxo suspensão  $\phi^{c,f}$  possui a propriedade de Cw-epl se e somente se  $f$  possui a propriedade de Cw-epl.*

*Demonstração.* De acordo com o Teorema 3.2 a demonstração será feita para  $c = 1$ , já que as suspensões de um mesmo homeomorfismo são conjugadas. Suponha que  $f$  possui a Cw-epl e sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\delta \in (0, 1/4)$  constantes que tal que se  $x, y \in X$  e  $d(x, y) \leq \delta$  então  $C_\varepsilon^s(x) \cap C_\varepsilon^u(x)$ . De acordo com [15, Lema 2.4 e Lema 2.5] para  $\delta > 0$  existe  $\delta' \in (0, \varepsilon)$  tal que se  $(x, s), (y, t) \in X^f$  e  $d_f((x, s), (y, t)) \leq \delta'$  então  $|s - t| < \delta'$  ou  $|1 + s - t| < \delta'$  ou  $|1 + t - s| < \delta'$ . Além disso,

- 1) se  $|s - t| < \delta'$  então  $d(x, y) < \delta$ ,
- 2) se  $|1 + s - t| < \delta'$  então  $d(f(x), y) < \delta$ ,
- 3) se  $|1 + t - s| < \delta'$  então  $d(f^{-1}(x), y) < \delta$ .

Seja  $(x, s_1), (y, s_2) \in X^f$ . Mostremos que se  $d_f((x, s_1), (y, s_2)) \leq \delta'$  então existe  $|r| < \varepsilon$  tal que  $C_\varepsilon^s(\phi_r^f(x, s_1)) \cap C_\varepsilon^u(y, s_2) \neq \emptyset$ . De fato, se  $s_1$  e  $s_2$  satisfaz 1), isto é,  $|s_1 - s_2| < \delta'$ , então da Cw-epl de  $f$  existe  $z \in X$  tal que  $z \in C_\varepsilon^s(x) \cap C_\varepsilon^u(y)$ . Portanto, para  $r = s_2 - s_1$  e todo  $t \geq 0$  temos que

$$\begin{aligned} & d_f\left(\phi_t^f(\phi_r^f(x, s_1)), \phi_t^f(z, s_2)\right) \\ &= d_f\left(\phi_{t+r}^f(x, s_1), \phi_t^f(z, s_2)\right) \\ &= d_f\left((f^{[t+s_2]}x, \{t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\}\right) \\ &\leq d_{\{t+s_2\}}\left((f^{[t+s_2]}x, \{t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\}\right) \\ &= (1 - \{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]}(x), f^{[t+s_2]}(z)) + (\{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]+1}(x), f^{[t+s_2]+1}(z)) \\ &\leq (1 - \{t+s_2\})\varepsilon + (\{t+s_2\})\varepsilon \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

onde  $\{t + s_2\}$  denota a parte fraccionaria de  $t + s_2$ . Além disso, para todo  $t \leq 0$  temos

que

$$\begin{aligned}
& df \left( \phi_t^f(y, s_2), \phi_t^f(z, s_2) \right) \\
& \leq d_{\{t+s_2\}} \left( (f^{[t+s_2]}y, \{t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\} \right) \\
& = (1 - \{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]}(y), f^{[t+s_2]}(z)) + (\{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]+1}(y), f^{[t+s_2]+1}(z)) \\
& \leq (1 - \{t+s_2\})\varepsilon + (\{t+s_2\})\varepsilon \\
& = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(z, s_2) \in W_\varepsilon^s(\phi_r^f(x, s_1)) \cap W_\varepsilon^u((y, s_2))$ . Da continuidade do fluxo suspensão temos que  $(z, s_2) \in C_\varepsilon^s(\phi_r^f(x, s_1)) \cap C_\varepsilon^u((y, s_2))$ . Agora se  $s_1$  e  $s_2$  satisfaz 2), isto é,  $|1 + s_2 - s_1| \leq \delta'$ , então da Cw-epl de  $f$  existe  $z \in X$  tal que  $z \in C_\varepsilon^s(f(x)) \cap C_\varepsilon^u(y)$ .

Portanto, para  $r = 1 + s_2 - s_1$  e todo  $t \geq 0$  temos que

$$\begin{aligned}
& df \left( \phi_t^f(\phi_r^f(x, s_1)), \phi_t^f(z, s_2) \right) \\
& = d_f \left( \phi_{t+r}^f(x, s_1), \phi_t^f(z, s_2) \right) \\
& = d_f \left( (f^{[t+s_2+1]}x, \{1+t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\} \right) \\
& \leq d_{\{t+s_2\}} \left( (f^{[t+s_2]+1}(x), \{t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\} \right) \\
& = (1 - \{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]+1}(x), f^{[t+s_2]}(z)) + \{t+s_2\}d(f^{[t+s_2]+2}(x), f^{[t+s_2]+1}(z)) \\
& \leq (1 - \{t+s_2\})\varepsilon + (\{t+s_2\})\varepsilon \\
& = \varepsilon,
\end{aligned}$$

e para todo  $t \leq 0$  temos que

$$\begin{aligned}
& df \left( \phi_t^f(y, s_2), \phi_t^f(z, s_2) \right) \\
& \leq d_{\{t+s_2\}} \left( (f^{[t+s_2]}y, \{t+s_2\}), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\} \right) \\
& = (1 - \{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]}(y), f^{[t+s_2]}(z)) + (\{t+s_2\})d(f^{[t+s_2]+1}(y), f^{[t+s_2]+1}(z)) \\
& \leq (1 - \{t+s_2\})\varepsilon + (\{t+s_2\})\varepsilon \\
& = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(z, s_2) \in W_\varepsilon^s(\phi_r^f(x, s_1)) \cap W_\varepsilon^u((y, s_2))$ . De novo, da continuidade do fluxo suspensão temos que  $(z, s_2) \in C_\varepsilon^s(\phi_r^f(x, s_1)) \cap C_\varepsilon^u((y, s_2))$ . Para o terceiro caso 3) agimos

da mesma forma que no segundo caso.

Reciprocamente, suponha que  $\phi^{c,f}$  possui a propriedade de Cw-epl. Seja  $\varepsilon > 0$ , mostremos que existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in X$  e  $d(x, y) \leq \delta$  então  $C_\varepsilon^s(x) \cap C_\varepsilon^u(y)$ . De fato, sejam  $\delta'' \in (0, \varepsilon)$  tal que para  $i = -1, 0, 1$

$$d(x, y) \leq \delta'' \implies d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon.$$

Seja  $\delta' > 0$  uma constante de Cw-epl do fluxo suspensão para  $\delta''/2$ , isto é, se  $(x, s_1), (y, s_2) \in X^f$  temos que

$$d_f((x, s_1), (y, s_2)) \leq \delta' \implies C_{\delta''/2}^s((x, s_1)) \cap C_{\delta''/2}^u((y, s_2)) \neq \emptyset,$$

e  $\delta \in (0, \delta')$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então  $d(f(x), f(y)) \leq \delta'$ . Portanto, suponha que se  $x, y \in X$  e  $d(x, y) \leq \delta$ . Então, considerando os pontos  $(x, \frac{1}{2}), (y, \frac{1}{2}) \in X^f$  observemos que

$$\begin{aligned} d^f((x, \frac{1}{2}), (y, \frac{1}{2})) &\leq d_{\frac{1}{2}}((x, \frac{1}{2}), (y, \frac{1}{2})) \\ &= (\frac{1}{2})d(x, y) + \frac{1}{2}d(f(x), f(y)) \\ &\leq \delta'. \end{aligned}$$

Logo, existe  $(z, r_1) \in X^f$  tal que  $(z, r_1) \in C_{\delta''/2}^s((x, \frac{1}{2})) \cap C_{\delta''/2}^u((y, \frac{1}{2}))$ . Para  $t \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} &d^f((f^{[t+1/2]}z, \{t+1/2\}), (f^{[t+1/2]}x, \{t+1/2\})) \\ &= d^f(\phi_{t-r_1+\frac{1}{2}}^f(z, r_1), \phi_t^f(x, \frac{1}{2})) \\ &\leq d^f(\phi_{t-r_1+\frac{1}{2}}^f(z, r_1), \phi_t^f(z, r_1)) + d_f(\phi_t^f(z, r_1), (\phi_t^f(x, \frac{1}{2}))) \\ &\leq |r_1 - \frac{1}{2}| + \delta''/2 \\ &\leq \delta''/2 + \delta''/2 = \delta''. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & d_{\{t+1/2\}}((f^{[t+1/2]}z, \{t+1/2\}), (f^{[t+1/2]}x, \{t+1/2\})) \\ &= (1 - \{t+1/2\})d(f^{[t+1/2]}z, f^{[t+1/2]}x) + \{t+1/2\}d(f^{[t+1/2]+1}z, f^{[t+1/2]+1}x) \\ &\leq \delta'', \end{aligned}$$

logo  $d(f^{[t+1/2]}z, f^{[t+1/2]}x) \leq \delta''$  ou  $d(f^{[t+1/2]+1}z, f^{[t+1/2]+1}x) \leq \delta''$ . Portanto, para todo  $t \geq 0$  temos que  $d(f^{[t+1/2]}z, f^{[t+1/2]}x) \leq \varepsilon$ , ou seja,  $z \in W_\varepsilon^s(x)$ . Da mesma forma agimos para  $t \leq 0$ . Logo,  $z \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ . Da continuidade de  $f$ , temos que  $z \in C_\varepsilon^s(x) \cap C_\varepsilon^u(y)$ .  $\square$

Em [5, Teorema 3.2] se mostrou que o fluxo suspensão é Cw-expansivo se, e somente se  $f$  é Cw-expansivo. Portanto, podemos afirmar o seguinte teorema:

**Teorema 3.6.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função contínua. O fluxo suspensão  $\phi^{c,f}$  é Cw-hiperbólico se e somente se  $f$  é Cw-hiperbólico.*

## 3.2 Função métrica

Nesta seção provaremos a existência de uma função métrica, com as propriedades de hiperbolicidade e compatibilidade, com o objetivo de utilizá-la na demonstração da propriedade de sombreamento. A demonstração segue de forma semelhante ao [6, Teorema 2.3]. Definamos

$$\mathcal{L}(X) = \{C \in \mathcal{C}(X) : \exists x \in X \text{ tal que } C \subseteq H(x)\},$$

$$E = \{(p, q, C) : C \in \mathcal{L}(X), p, q \in C\},$$

para  $p, q \in C$ , denote  $C_{(p,q)} = (p, q, C)$ .

**Teorema 3.7.** *Se  $(X, \phi)$  é um fluxo Cw-expansivo, definido em um espaço métrico compacto, então existe uma função  $D : E \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:*

- **Propriedades métricas:**

- $D(C_{(p,q)}) \geq 0$  com igualdade se, somente se  $C$  é degenerado,

- $D(C_{(p,q)}) = D(C_{(q,p)})$ ,
- $D(\{A \cup B\}_{(p,q)}) \leq D(A_{(p,r)}) + D(B_{(r,q)})$

• **Hiperbolicidade:** existem constantes  $\lambda \in (0,1)$  e  $\varepsilon > 0$  tal que

- Se  $C \in T_\varepsilon^s$  então  $D(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)})) \leq 4\lambda^t D(C_{(p,q)})$  para todo  $t \geq 1$  e algum  $\alpha \in \mathcal{H}_\varepsilon(C)$ ,
- Se  $C \in T_\varepsilon^u(X)$  então  $D(\Phi_\alpha^{-t}(C_{(p,q)})) \leq 4\lambda^t D(C_{(p,q)})$  para todo  $t \geq 1$  e algum  $\alpha \in \mathcal{H}_\varepsilon(C)$

• **Compatibilidade:** Para cada  $\varepsilon' > 0$  existe  $\gamma > 0$  tal que

- Se  $\text{diam}(C) < \gamma$  então  $D(C_{(p,q)}) < \varepsilon'$  para todo  $p, q \in C$ ,
- Se para todo  $p, q \in C$  com  $D(C_{(p,q)}) < \gamma$  então  $\text{diam}(C) < \varepsilon'$ .

*Demonstração.* Sejam  $\varepsilon' > 0$ ,  $\delta > 0$  como no Lema 1.26 e  $\varepsilon \in (0, \delta)$  uma constante de Cw-expansividade. Defina

$$N(C) = \inf\{|t| : \text{diam}\Phi_\alpha^t(C) > \varepsilon, t \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in \mathcal{H}(C)\}$$

para cada  $C \in \mathcal{L}(X)$ . De acordo com o Corolário 1.27 para  $\frac{\varepsilon}{2}$  existe  $k > 0$  tal que se  $\text{diam}(C) > \frac{\varepsilon}{2}$  então  $\text{diam}\Phi_\beta^t(C) \geq \delta$  ou  $\text{diam}\Phi_\beta^{-t}(C) \geq \delta$  para todo  $t \geq k$  e  $\beta \in \mathcal{H}(C)$ .

Logo

$$N(C) = \inf\{|t| : \text{diam}\Phi_\beta^t(C) > \varepsilon, t \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathcal{H}_\varepsilon(C)\} \leq k. \quad (3.3)$$

Seja  $\lambda = 2^{-1/k}$  e  $\rho : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  definido por

$$\rho(C) = \begin{cases} \lambda^{N(C)} & \text{se } C \text{ é não degenerado} \\ 0 & \text{se } C = \{p\} \end{cases}$$

Seja  $C \in \mathcal{L}(X)$  e subconjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{L}(X)$  de  $C$  tal que  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$  e  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , afirmamos que

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) \leq 2\rho(C_1) + 4\rho(C_2) + \dots + 4\rho(C_{n-1}) + 2\rho(C_n). \quad (3.4)$$

A prova será feita no final. Por outro lado, defina

$$D(C_{(p,q)}) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \rho(A_{(a_{i-1}, a_i)}^i) : \forall n \geq 0, a_0 = p, a_1, \dots, a_n = q \text{ e } A^1, \dots, A^n \in \mathcal{L}(X) \text{ tal que } C = \cup_{i=0}^n A^i \right\}.$$

Decorre de 3.4 e da definição de  $D$  o próximo resultado:

$$D(C_{(p,q)}) \leq \rho(C_{(p,q)}) \leq 4D(C_{(p,q)}), \quad (3.5)$$

De fato, a primeira desigualdade é imediato, basta tomar como partição o próprio conjunto. A segunda desigualdade segue da equação 3.4 e o fato de o ínfimo ser o maior das cotas inferiores, isto é,

$$\rho(C) \leq \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \rho(A_{(a_{i-1}, a_i)}^i) : \forall n \geq 0, a_0 = p, a_1, \dots, a_n = q \text{ e } A^1, \dots, A^n \in \mathcal{L}(X) \text{ tal que } C = \cup_{i=0}^n A^i \right\} = D(C).$$

para cada  $C_{(p,q)} \in \mathcal{L}(X)$ . Mostremos as seguintes propriedades:

*Propriedades métricas.* De 3.5 segue-se que

$$\begin{aligned} D(C_{(p,q)}) = 0 &\iff \rho(C) = 0 \\ &\iff C = \{p\} \end{aligned}$$

Para mostrar as propriedades

$$D(C_{(p,q)}) = D(C_{(q,p)}) \text{ e } D(\{A \cup B\}_{(p,q)}) \leq D(A_{(p,r)}) + D(B_{(r,q)}),$$

basta olhar a definição de  $D$  e a equação 3.4.

*Hiperbolicidade.* Suponha que  $C_{(p,q)} \in T_\varepsilon^s$ , então existe  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  tal que

$$\text{diam} \Phi_\alpha^t(C_{(p,q)}) \leq \varepsilon$$

para todo  $t \geq 0$ . Logo, de acordo com Proposição 1.24, existe  $s > 0$  tal que

$$\text{diam}\Phi_\alpha^{-s}(C_{(p,q)}) > \varepsilon.$$

Portanto  $N(C) = s$ , ao mesmo tempo observemos que  $N(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)})) = t + s$  para todo  $t \geq 0$ . Decorre então da equação 3.5 a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} D(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)})) &\leq \rho(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)})) \\ &= \lambda^{N(\Phi_\alpha^t(C_{(p,q)}))} \\ &= \lambda^{N(C)+t} \\ &= \rho(C)\lambda^t \\ &\leq 4\lambda^t D(C_{(p,q)}), \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$ . Para os continuums instáveis a prova é semelhante.

*Compatibilidade.* Dado  $\varepsilon'$  e  $n > 0$  tal que  $\lambda^n \leq \varepsilon'$ . Considere  $\gamma > 0$  tal que se  $C \in \mathcal{C}(X)$ ,  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  e  $\text{diam}C < \gamma$  então  $\text{diam}\Phi_\alpha^t(C) < \varepsilon$  para todo  $|t| \leq n$ . Portanto  $N(C) \geq n$  (observe que para tempos menores do que  $n$  o continuo fica menor do que  $\varepsilon$ ), assim

$$D(C) \leq \rho(C) = \lambda^{N(C)} \leq \lambda^n = \varepsilon.$$

O segundo item é mostrado de maneira semelhante. Finalmente, mostremos a equação 3.4. Seja  $C \in \mathcal{L}(X)$  e uma partição  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{L}(X)$  de  $C$  (ou seja,  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$  e  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ). Afirmamos que

De fato, mostremos primeiro para  $n = 2$ . Seja  $C = A \cup B \in \mathcal{L}(X)$ , onde  $A, B \in \mathcal{L}(X)$ . Se  $\text{diam}\Phi_\alpha^t C > \varepsilon$  para algum  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  então  $\text{diam}\Phi_\alpha^t A > \varepsilon/2$  ou  $\text{diam}\Phi_\alpha^t B > \varepsilon/2$ . Portanto,  $N(C) = t$  e de 3.3 temos que  $N(A) \leq k + N(C)$  ou  $N(B) \leq k + N(C)$ . Suponha que  $N(A) \leq k + N(C)$ , como  $\lambda \in (0, 1)$  então

$$\rho(A) = \lambda^{N(A)} \geq \lambda^{k+N(C)} = \lambda^k \lambda^{N(C)} = 1/2\rho(C),$$

ou seja,  $\rho(C) \leq 2\rho(A)$ , da mesma forma se  $N(B) \leq k + N(C)$  podemos mostrar que  $\rho(C) \leq 2\rho(B)$ . Portanto, queda mostrado no caso de  $n = 2$ . Agora suponha que 3.4 é

válido para uma partição  $\{C_i\}_{i=1}^{n-1}$ , isto é,

$$\rho(C) \leq 2\rho(C_1) + 4\rho(C_2) + \dots, 4\rho(C_{n-2}) + 2\rho(C_{n-1}).$$

De acordo com a definição de  $\rho$ , temos que

$$\rho(C_1) \leq \rho(C_1 \cup C_2) \leq \dots \leq \rho(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) \leq \rho(C)$$

. Por outro lado, observe que podemos supor os seguintes casos

1.  $\rho(C) \leq 2\rho(C_1)$
2.  $2\rho(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) < \rho(C)$
3.  $2\rho(C_1) < \rho(C) \leq 2\rho(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})$ .

No primeiro caso, 3.4 é imediato. No segundo caso, como  $C = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_{n-1} \cup C_n$  então  $\rho(C) \leq 2\rho(C_n)$  ou  $\rho(C) \leq 2\rho(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})$ , logo  $\rho(C) \leq 2\rho(C_n)$ . Assim, 3.4 é imediato. No terceiro caso, podemos supor que existe  $1 < r < n$  tal que

$$2\rho(C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}) < \rho(C) \leq 2\rho(C_1 \cup \dots \cup C_r). \quad (3.6)$$

Agindo da mesma forma que no caso  $n = 2$  para  $A = C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}$  e  $B = C_r \cup \dots \cup C_n$  temos que

$$\rho(C) \leq 2\rho(C_r \cup \dots \cup C_n). \quad (3.7)$$

Assim, de 3.6 e 3.7 temos que

$$\begin{aligned} \rho(C) &\leq \rho(C_1 \cup \dots \cup C_r) + \rho(C_r \cup \dots \cup C_n) \\ &\leq 2\rho(C_1) + 4\rho(C_2) + \dots, 4\rho(C_{r-1}) + 2\rho(C_r) + \\ &\quad 2\rho(C_r) + 4\rho(C_{r+1}) + \dots, 4\rho(C_{n-1}) + 2\rho(C_n) \\ &= 2\rho(C_1) + 4\rho(C_2) + \dots, 4\rho(C_{n-1}) + 2\rho(C_n) \end{aligned}$$

□

### 3.3 A propriedade $H^*$

Nesta seção definiremos uma condição suficiente que devem satisfazer os fluxos cw-expansivos para que possam satisfazer a propriedade de sombreamento, tal condição será chamada de propriedade  $H^*$ . Denotemos por  $CT_\varepsilon^s(x)$  e  $CT_\varepsilon^u(x)$  as componentes conexas de  $T_\varepsilon^s(x)$  e  $T_\varepsilon^u(x)$  respectivamente, tais que contem  $x$ .

Vamos a explicar um dos motivos pela qual esta propriedade foi criada ( na Observação 3.9 outras razões serão explicadas). Observamos que a função métrica hiperbólica definida na seção anterior diminuí exponencialmente a distância das órbitas de continuums estáveis e instáveis transversalmente. Portanto, seguindo a ideia do capítulo 2 ( sombreamento de fluxos topologicamente hiperbólicos) é natural observar que a demonstração da propriedade de sombreamento para fluxos cw-hiperbólicos teria que ser no começo transversalmente, de modo que possamos fazer uso da métrica hiperbólica. Portanto, é importante que a Cw-epl seja satisfeita transversalmente, isto é, se o fluxo possui a Cw-epl então

$$y \in H_\delta(x) \Rightarrow CT_\varepsilon^s(x) \cap CT_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset?$$

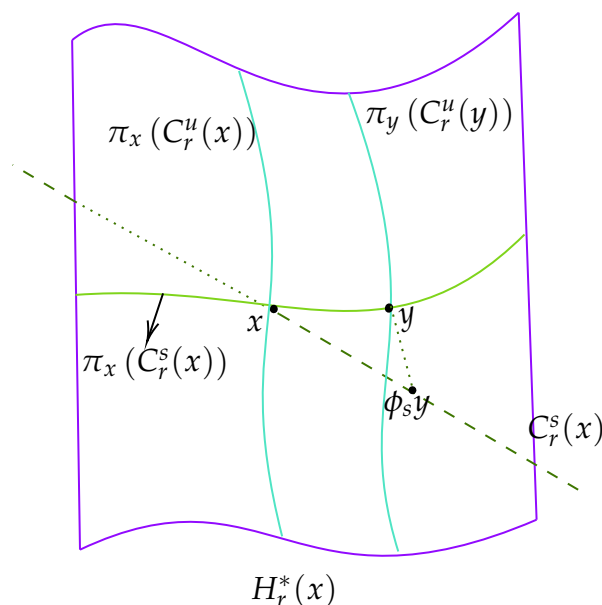
Seguindo o mesmo raciocínio da Observação 2.4, não conseguimos obter uma resposta afirmativa. Assim, a seguinte definição será a condição necessária para garantir a Cw-epl transversal (veja a Proposição 3.11)

**Definição 3.8.** Dizemos que um fluxo  $(X, \phi)$  possui a **propriedade  $H^*$**  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_r^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definido por

$$H_r^*(x) = \bigcup_{z \in \pi_x(C_r^s(x))} \pi_z(C_r^u(z))$$

é um campo de secções transversais para todo  $r \in (0, \varepsilon)$ .

**Observação 3.9.** Outro dos motivos importantes da propriedade  $H^*$  é a seguinte: De acordo com o Teorema 2.7 os fluxos expansivos satisfazendo a E.p.l possuem a propriedade  $H^*$ . Infelizmente, não conseguimos mostrar que fluxos cw-expansivos satisfazendo a Cw-epl implique a propriedade  $H^*$ . De fato, um dos problemas que tivemos foi na injetividade da seção  $H^*$ , isto é,  $H_\varepsilon^*(x) \cap \phi_{[-\lambda, \lambda]}y = y$  para todo  $y \in H_\varepsilon^*(x)$ . Seguindo a ideia do Teorema 2.7, suponha

Figura 3.1: Seção transversal  $H_r^*$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

que existe  $y \in H_\varepsilon^*(x)$  e  $|s| \leq \lambda$  tal que  $\phi_s y \in H_\varepsilon^*(x)$ . Portanto, existe  $z_1 \in \pi_x(C_\varepsilon^s(x))$  e  $z_2 \in \pi_x(C_\varepsilon^s(x))$  tal que  $y \in \pi_{z_1} C_\varepsilon^u(z_1)$  e  $\phi_s y \in \pi_{z_2}(C_\varepsilon^u(z_2))$ . Com todas essas informações não foi possível construir um continuum que contrariasse a *cw*-expansividade (assim como foi feito no caso expansivo). É importante realçar que este problema é bastante comum em várias situações de tentar trazer propriedades que satisfaçam fluxos expansivos para o caso dos *cw*-expansivos.

**Observação 3.10.** Observemos que

$$\text{Propriedade } H^* \Rightarrow \text{Cw-epl.}$$

$$\text{Propriedade } H^* + \text{Cw-expansividade} \Rightarrow \text{Cw-hiperbolicidade}$$

Na seguinte Proposição mostramos que a seção transversal  $H^*$  garante a *Cw*-Epl transversal. Seja  $A \in \mathcal{C}(X)$ , denotemos por  $\mathcal{H}_\tau(A)$  ao conjunto:

$$\mathcal{H}_\tau(A) = \{h \in \mathcal{H}(A) : |h(x)(s) - s| \leq \tau \quad \forall s \geq 0 \quad \text{e} \quad x \in A\}$$

**Proposição 3.11.** *Sejam  $(X, \phi)$  um fluxo satisfazendo a propriedade  $H^*$  e  $B_r(x) \subset \phi_{[-\tau, \tau]} H(x)$  para todo  $x \in X$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in H_\delta^*(x)$ , então*

$$CT_\varepsilon^s(x) \cap CT_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset.$$

Além disso, existe  $\alpha_1 \in \mathcal{H}_\tau (CT_\varepsilon^s(x))$  e  $\alpha_2 \in \mathcal{H}_\tau (CT_\varepsilon^u(y))$  tal que

$$\begin{aligned} \text{diam } \Phi_{\alpha_1}^t (CT_\varepsilon^s(x)) &\leq 2\varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0 \\ \text{diam } \Phi_{\alpha_2}^t (CT_\varepsilon^u(y)) &\leq 2\varepsilon \quad \text{para todo } t \leq 0 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon \in (0, r]$ . De acordo com a Proposição 1.13, existe  $r_2 \geq 0$  tal que  $\pi_x (W_{r_2}^s(x)) \subset T_\varepsilon^s(x)$  e  $\pi_x (W_{r_2}^u(x)) \subset T_\varepsilon^u(x)$ . Seja  $\delta \in (0, r_2)$  com  $H_\delta^* : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$  é um campo de seções transversais e tal que

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(\phi_t x, \phi_t y) \leq r_2 \quad \forall |t| \leq \tau.$$

Portanto, se  $y \in H_\delta^*(x)$  então existe  $a \in \pi_x (C_\delta^s(x))$  tal que  $y \in \pi_a (C_\delta^u(a))$ . Afirma-mos que  $y \in \pi_a (C_\delta^u(a))$  implica que  $a \in \pi_y (C_{r_2}^u(y))$ . De fato, como  $y \in \pi_a (C_\delta^u(a))$ , existe  $|s| \leq \tau$  tal que  $\phi_s y \in C_\delta^u(a)$ . Se  $s > 0$ ,  $y \in C_\delta^u(\phi_{-s} a)$  implica que  $\phi_{-s} a \in C_\delta^u(y)$ . Assim,  $a = \pi_y (\phi_{-s} a) \in \pi_y (C_\delta^u(y))$ . Se  $s < 0$ ,  $\phi_s y \in C_\delta^u(a)$  implica que  $y \in C_{r_2}^u(\phi_s a)$ , logo  $\phi_s a \in C_{r_2}^u(y)$ . Assim,  $a = \pi_y (\phi_s a) \in \pi_y (C_{r_2}^u(y))$ . Logo, de acordo com a afirmação anterior temos que  $a \in \pi_y (C_{r_2}^u(y)) \cap \pi_x (C_{r_2}^u(x))$ . Portanto,  $a \in CT_\varepsilon^s(x) \cap CT_\varepsilon^u(y)$ . Finalmente, a Proposição 1.13 fornece informações sobre as reparametrizações, isto é, se  $a \in \pi_x (W_{r_2}^s(x))$  então existe  $\alpha \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  ( $|\alpha(t) - t| \leq \tau$ ) tal que  $\phi_{\alpha(t)} a \in H_\varepsilon(\phi_t x)$  para todo  $t \geq 0$ . Da mesma forma temos para o caso instável. Portanto, existe  $\alpha_1 \in \mathcal{H}_\tau (CT_\varepsilon^s(x))$  e  $\alpha_2 \in \mathcal{H}_\tau (CT_\varepsilon^u(y))$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \text{diam } (\Phi_{\alpha_1}^t (CT_\varepsilon^s(x))) &\leq \sup_{y_1, y_2 \in CT_\varepsilon^s(x)} d(\phi_{\alpha_1(y_1)(t)} y_1, \phi_{\alpha_1(y_2)(t)} y_2) \\ &\leq \sup_{y_1 \in CT_\varepsilon^s(x)} d(\phi_{\alpha_1(y_1)(t)} y_1, \phi_t x) + \sup_{y_2 \in CT_\varepsilon^s(x)} d(\phi_t x, \phi_{\alpha_1(y_2)(t)} y_2) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Assim, a segunda parte do Teorema fica demonstrado.  $\square$

### 3.3.1 Conjugação cinemática

É importante realçar que em [12], é definido um tipo de conjugação, chamada de conjugação de Lipshitz.

Sejam os fluxos  $\varphi$  em  $X$  e  $\psi$  em  $Y$ . Dizemos que  $\varphi$  e  $\psi$  são *Lipshitz conjugados* se existe um homeomorfismo  $\mu : X \rightarrow Y$  e uma função contínua  $\sigma : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para algum  $M \geq m > 0$  temos que

- a)  $\sigma(x, 0) = 0$  e  $m \leq \frac{\sigma(x, t) - \sigma(x, s)}{t - s} \leq M$  para todo  $x \in X, s, t \in \mathbb{R}$  ( $s \neq t$ )
- b)  $\mu\varphi(x, t) = \psi(\mu x, \sigma(x, t))$ .

Alem disso, em [12, Teorema 3] foi demonstrado que a propriedade SPOTP é invariante por conjugação de Lipshitz. Com base nessa definição, nesta seção, definiremos a conjugação cinemática e mostraremos que a propriedade  $H^*$  é invariante por conjugação cinemática.

**Definição 3.12.** *Sejam os fluxos  $\varphi$  em  $X$  e  $\psi$  em  $Y$ . Dizemos que  $\varphi$  e  $\psi$  são **cinematicamente conjugados** se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , uma constante  $\tau > 0$  e uma função contínua  $\sigma : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

- a)  $\sigma(x, 0) = 0$  e  $|\sigma(x, t) - (x, t)| \leq \tau$  para todo  $x \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$
- b)  $h\varphi(x, t) = \psi(h(x), \sigma(x, t))$ .

**Teorema 3.13.** *Se  $\phi_t : M \rightarrow M$  e  $\psi_t : N \rightarrow N$  são cinematicamente conjugados. Então,  $\phi_t$  possui a propriedade  $H^*$  se, e somente se,  $\psi_t$  possui a propriedade  $H^*$ .*

*Demonstração.* Sejam  $d_M$  e  $d_N$  as métricas em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Suponha que  $\phi_t$  é cw-hiperbólico e  $h : M \rightarrow N$  uma conjugação de  $\phi_t$  e  $\psi_t$ . Então existe uma função contínua  $\sigma : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tau > 0$  tal que

- 1)  $\sigma(x, 0) = 0$  e  $|\sigma(x, t) - (x, t)| \leq \tau$  para todo  $x \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$
- 2)  $h^{-1}\psi(x, t) = \phi(h^{-1}(x), \sigma(x, t))$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_\varepsilon^* : M \rightarrow \mathcal{K}(M)$  é um campo de seções transversais para  $M$ . Consideremos  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{implica} \quad d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad |t| \leq \tau \quad (3.8)$$

Seja  $\varepsilon' > 0$  tal que

$$d_N(x, y) \leq \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad d_M(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \bar{\varepsilon}. \quad (3.9)$$

Afirmamos que

$$H_{\varepsilon'}^*(x') \subseteq \{y' \in N : h^{-1}(y') \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))\} \quad \text{para todo } x' \in N, \quad (3.10)$$

onde

$$H_{\varepsilon'}^*(x') = \bigcup_{z' \in \pi_{x'}(C_{\varepsilon'}(x'))} \pi_{z'}(C_{\varepsilon'}^u(z')).$$

De fato, se  $p \in H_{\varepsilon'}(x')$  então existe  $z' \in \pi_{x'}(C_{\varepsilon'}(x'))$  tal que  $p \in \pi_{z'}(C_{\varepsilon'}^u(z'))$ . Logo, existe  $|r_1| \leq \lambda$  e  $|r_2| \leq \lambda$  tal que  $\psi_{r_1}(z') \in C_{\varepsilon'}^s(x')$  e  $\psi_{r_2}(p) \in C_{\varepsilon'}^u(z)$ . Afirmamos que  $\phi_{r_1}h^{-1}(z') \in C_{\varepsilon}^s(h^{-1}x)$  e  $\phi_{r_2}h^{-1}(p) \in C_{\varepsilon}^u(h^{-1}(z'))$ . De fato, como  $\psi_{r_1}z' \in C_{\varepsilon'}^s(x')$  então

$$d_N(\psi_{t+r_1}z', \phi_t(x')) \leq \varepsilon' \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

logo, de acordo com 3.9 temos que

$$d(h^{-1} \circ \psi_{t+r_1}(z'), h^{-1} \circ \phi_t(x)) \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Então de 2) temos que

$$d(\phi_{\sigma_{z'}(t+r_1)}(h^{-1}(z')), \phi_{\sigma_x(t)}h^{-1}x) \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Portanto, de 1) e 3.8 temos que

$$d(\phi_{(t+r_1)}(h^{-1}(z')), \phi_t(h^{-1}x)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Assim,  $\phi_{r_1}h^{-1}(z') \in W_{\varepsilon}^s(h^{-1}x)$  e de acordo com a continuidade da conjugação  $h$  temos que  $\phi_{r_1}h^{-1}(z') \in C_{\varepsilon}^s(h^{-1}x)$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $h^{-1}(z') \in \pi_{h^{-1}(x)}C_{\varepsilon}^s(h^{-1}x)$  e  $h^{-1}(p) \in \pi_{h^{-1}(z)}C_{\varepsilon}^u(h^{-1}(z'))$ . Assim,  $h^{-1}(p) \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))$ , concluindo a demonstração da afirmação.

Agora mostremos que  $H_{\varepsilon'} : N \rightarrow \mathcal{K}(N)$  é um campo de seções transversais para  $(\psi_t, N)$ . De fato, seja  $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon)$  tal que

$$d_M(x, y) \leq \varepsilon'' \quad \Rightarrow \quad d_N(h(x), h(y)) \leq \varepsilon'. \quad (3.11)$$

Dado que  $H_r$  é um campo de seções para  $M$  para todo  $r \in (0, N)$ , então consideremos

as constantes  $\lambda > 0$  e  $\delta' > 0$  tal que

a)  $H_{\varepsilon''}^*(x) \cap \phi_{[-\lambda, \lambda]}(y) = y$  para todo  $y \in H_{\varepsilon''}^*(x)$  e  $x \in M$ .

b)  $B_{\delta'}(x) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]}H_{\varepsilon''}^*(x)$  para todo  $x \in M$ .

Considere  $\delta \in (0, \delta')$  tal que

$$d_N(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d_M(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \delta'. \quad (3.12)$$

Afirmamos que

1)  $H_{\varepsilon'}^*(x') \cap \psi_{[-\lambda, \lambda]}(y') = y'$  para todo  $y' \in H_{\varepsilon'}^*(x')$  e  $x' \in N$ .

2)  $B_{\delta}(x') \subset \psi_{[-\lambda, \lambda]}H_{\varepsilon'}^*(x')$  para todo  $x' \in N$ .

Mostremos 1). Suponha que existe  $\{y', \psi_r y'\} \subset H_{\varepsilon'}(x')$  para algum  $|r| \leq \lambda$ . De acordo com 3.10,  $h^{-1}(y') \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))$  e  $h^{-1}(\psi_r y') \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))$ . Supondo que  $y' = h(y)$  então  $y \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))$  e  $\phi_r y \in H_{\varepsilon}^*(h^{-1}(x'))$ . Isto contradiz o fato de que  $H_{\varepsilon}$  é um campo de seções transversais.

Mostremos 2). Se  $d_N(x', y') \leq \delta$  então de 3.12 e b), existe  $|r| \leq \lambda$  tal que  $\phi_r h^{-1}(y') \in H_{\varepsilon''}^*(h^{-1}(x'))$ , de acordo com 2) e de 3.11 temos que  $\psi_r y' \in H_{\varepsilon'}^*(x')$  (basta seguir a demonstração da afirmação anterior).

Assim, de 1) e 2) temos que  $H_{\varepsilon'}$  é um campo de seções transversais para  $N$ . Portanto,  $\psi_t$  possui a propriedade  $H^*$ .  $\square$

### 3.3.2 Exemplos de fluxos satisfazendo a propriedade $H^*$

Nesta subseção forneceremos alguns exemplos de fluxos satisfazendo a propriedade  $H^*$ . No seguinte teorema mostraremos que o fluxo suspensão de homeomorfismos cw-hiperbólicos possuem a propriedade  $H^*$ .

**Exemplo 3.14.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. O fluxo suspensão  $\phi^{1,f}$  de um homeomorfismo satisfazendo a Cw-Epl possui a propriedade  $H^*$ .*

Suponha que  $f$  é cw-hiperbólico. Vamos mostrar que:

a) Existe  $\lambda > 0$  tal que  $H^*(x, s) \cap \phi_{[-\lambda, \lambda]}(y, s) = y$  para todo  $(y, s) \in H^*(x, s)$ .

b)  $B_{\delta'}(x, s) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x, s)$  para todo  $(x, s) \in X^f$ .

De fato, observemos que no espaço  $X^f$ , os níveis  $H_\varepsilon(x, s) = X \times \{s\} \cap B_\varepsilon(x)$  são as seções transversais locais para cada  $(x, s) \in X^f$ . Além disso, observe

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^*(x, s) &= \left\{ (y, s) \in X^f : \exists (z, s) \in \pi_{(x, s)}(W_\varepsilon^s(x, s)) \text{ com } (y, s) \in \pi_{(z, s)}(W_\varepsilon^u(z, s)) \right\} \\ &\subseteq H_\varepsilon(x, s) \end{aligned}$$

Portanto, existe  $\lambda > 0$  satisfazendo a). Mostremos b). Seja  $\delta_2 > 0$  tal que  $B_{\delta_1}(x) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H(x)$  para todo  $x \in X$ . Finalmente, considere  $\delta > 0$  que tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então  $C_{\delta_2}^s(x) \cap C_{\delta_2}^u(x) \neq \emptyset$ . De acordo com [15, Lema 2.4 e Lema 2.5], para  $\delta > 0$  existe  $\delta' \in (0, 1/4)$  tal que se  $(x, s), (y, t) \in X^f$  e  $d_f((x, s), (y, t)) \leq \delta'$  então  $|s - t| < \delta'$  ou  $|1 + s - t| < \delta'$  ou  $|1 + t - s| < \delta'$ . Além disso,

- 1) se  $|s - t| < \delta'$  então  $d(x, y) < \delta$ ,
- 2) se  $|1 + s - t| < \delta'$  então  $d(f(x), y) < \delta$ ,
- 3) se  $|1 + t - s| < \delta'$  então  $d(f^{-1}(x), y) < \delta$ .

Seja  $(x, s_1), (y, s_2) \in X^f$  tal que  $d((x, s_1), (y, s_2)) \leq \delta'$ . Suponha que  $s_1$  e  $s_2$  satisfazem

1) (isto é,  $|s_1 - s_2| < \delta'$ ) então da Cw-epi de  $f$  existe  $z \in X$  tal que  $z \in C_{\delta_2}^s(x) \cap C_{\delta_2}^u(y)$ .

Portanto, para todo  $t \geq 0$  temos que

$$\begin{aligned} &df\left(\phi_t^f(x, s_1), \phi_t^f(z, s_1)\right) \\ &\leq d_{\{t+s_1\}}\left(\left(f^{[t+s_1]}x, \{t+s_1\}\right), f^{[t+s_1]}(z), \{t+s_1\}\right) \\ &= (1 - \{t+s_1\}) d\left(f^{[t+s_1]}(x), f^{[t+s_1]}(z)\right) + (\{t+s_1\}) d\left(f^{[t+s_1]+1}(x), f^{[t+s_1]+1}(z)\right) \\ &\leq (1 - \{t+s_1\}) \delta_2 + (\{t+s_1\}) \delta_2 \\ &= \delta_2 \end{aligned}$$

onde  $\{t+s_1\}$  denota a parte fraccionaria de  $t+s_1$ . Assim,  $(z, s_1) \in W_{\delta_2}^s(x, s_1)$  e da continuidade do fluxo suspensão  $(z, s_1) \in C_{\delta_2}^s(x, s_1)$ . Logo,  $(z, s_1) = \pi_x(z, s_1) \in$

$\pi_x \left( C_{\delta_2}^s(x, s_1) \right)$ . Além disso, para todo  $t \leq 0$  temos que

$$\begin{aligned}
& df \left( \phi_t^f(y, s_2), \phi_t^f(z, s_1) \right) \\
& \leq df \left( \phi_t^f(y, s_2), \phi_t^f(z, s_2) \right) + df \left( \phi_t^f(z, s_2), \phi_t^f(z, s_1) \right) \\
& \leq d_{\{t+s_2\}} \left( \left( f^{[t+s_2]}(y), \{t+s_2\} \right), f^{[t+s_2]}(z), \{t+s_2\} \right) \\
& = (1 - \{t+s_1\}) d \left( f^{[t+s_1]}(y), f^{[t+s_1]}(z) \right) + (\{t+s_1\}) d \left( f^{[t+s_1]+1}(y), f^{[t+s_1]+1}(z) \right) \\
& \leq (1 - \{t+s_1\}) \delta_2 + (\{t+s_1\}) \delta_2 \\
& = \delta_2.
\end{aligned}$$

Logo,  $(y, s_2) \in W_{\delta_2}^u(z, s_1)$ . Da continuidade do fluxo suspensão temos que  $(y, s_2) \in C_{\delta_2}^u(z, s_1)$ . Logo,  $\phi_r^f(y, s_2) \in \pi_z \left( C_{\delta_1}^u(z, s_1) \right)$  com  $|r_1| \leq \lambda$ . Portanto, mostramos que  $B_{\delta'}(x, s) \subset \phi_{[-\lambda, \lambda]} H^*(x, s)$  para todo  $(x, s) \in X^f$ .

### 3.4 Sombreamento de fluxos cw-expansivos com a propriedade $H^*$

Nesta seção mostraremos um dos resultados mais importantes da tese. Como foi dito no capítulo 2, a demonstração da propriedade de sombreamento para fluxos cw-expansivos, satisfazendo a propriedade  $H^*$  será feita de maneira semelhante aos fluxos topologicamente hiperbólicos. Lembrando que no início do capítulo fixamos um campo de seções transversais  $H : X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ , constantes  $\tau$  e  $r > 0$  tal que  $\phi : [-\tau, \tau] \times H(x) \rightarrow X$  é injetivo e  $B(x, r) \subset \phi_{[-\tau, \tau]} H(x)$  para todo  $x \in X$ . De fato, nesta seção mostraremos o seguinte teorema:

**Teorema 3.15.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-expansivo satisfazendo a propriedade de  $H^*$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \bar{\delta} > 0$  tal que cada  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto  $z$ .*

Para a demonstração do Teorema 3.15, faremos o uso dos Lemas 3.16 e 3.18.

### 3.4.1 Sombreamento nas seções transversais

Nesta seção mostraremos a propriedade de sombreamento finito para fluxos Cw-expansivos satisfazendo a propriedade  $H^*$  nas seções transversais.

**Lema 3.16.** *Seja  $(X, \phi)$  um fluxo Cw-expansivo satisfazendo a propriedade de  $H^*$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe constantes  $M, \delta > 0$  e  $\bar{\delta}(\delta) > 0$  tal que se  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita, então existe uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  transversal satisfazendo os seguintes itens:*

1. Para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$  existe  $|\mu_i| \leq \lambda$  tal que  $\phi_{\mu_i} x'_i = x_i$ . E para todo  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , temos que  $t'_i = t_i - \mu_{i+1}$  e  $t'_{n-1} = t_{n-1}$ .
2. Existe um  $\bar{\varepsilon} > 0$ , pontos  $\{z_i\}_n^2 \in X$  e  $\{\bar{z}_i\}_n^3 \subset X$  e  $\{h_i\}_n^1 \subset \mathcal{H}(CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cup CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1}))$  tal que
  - para  $i = n$  existe  $z_i \in CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x_i) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1})$  e  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$ .
  - Para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  temos que  $z_i \in CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1})$ . Onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$  e  $x''_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}$ .
3.  $\phi_{t'_{i-1}} x'_{i-1}, x'_i \in H^*(\bar{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

*Demonstração.* Consideremos  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  dadas pela hiperbolicidade de  $D$ . Seja  $\varepsilon' > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$D(C) \leq \varepsilon' \quad \text{implica} \quad \text{diam}(C) \leq \varepsilon. \quad (3.13)$$

Para  $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon'/3)$ , considere  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que

$$\text{diam}(C) \leq 2\bar{\varepsilon} \quad \text{implica} \quad D(C) \leq \varepsilon_0. \quad (3.14)$$

De acordo com a Proposição 3.11 existe  $\delta \in (0, \varepsilon)$  tal que

$$y \in H_\delta^*(x) \quad \text{implica} \quad CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(y) \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

Tome  $\delta_1 > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \delta_1 \quad \text{implica} \quad \phi_\mu y \in H_\delta^*(x) \quad \text{para algum} \quad |\mu| \leq \tau. \quad (3.16)$$

Tome  $\delta' < \frac{\delta_1}{2}$  tal que

$$D(C) \leq \frac{\delta'}{2} \quad \text{implica} \quad \text{diam}(C) \leq \frac{\delta_1}{2}. \quad (3.17)$$

Fixemos um número suficientemente grande  $M$  tal que  $\gamma = c\lambda^{M-5\tau} < \frac{1}{2}$  e  $\gamma\varepsilon_0 < \frac{\delta'}{2}$ .

Seja  $\bar{\delta} > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \bar{\delta} \quad \text{implica} \quad d(\phi_t x, \phi_t y) \leq \frac{\delta_1}{2} \quad \text{para todo} \quad |t| \leq \lambda. \quad (3.18)$$

Suponha que  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  é uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita. Afirmamos que podemos construir uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n)$  satisfazendo os itens descritos no enunciado deste Lema. De fato, seja  $(\{x_i\}_1^n, \{t_i\}_1^n)$  uma  $(\bar{\delta}, M)$ -pseudo órbita, isto é,

$$d(\phi_{t_{i-1}} x_{i-1}, x_i) \leq \bar{\delta} \text{ e } t_i \geq M \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

De acordo com 3.18 e 3.16 existe  $|\mu_{n-1}| \leq \tau$  tal que  $\phi_{t_{n-1}-\mu_{n-1}} x_{n-1} \in H_\delta^*(x_n)$ , denotemos por  $t'_{n-1} = t_{n-1}$  e  $x'_{n-1} = \phi_{-\mu_{n-1}} x_{n-1}$ . É imediato observar que  $\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1} \in H_\delta^*(x_n)$ . Logo, por 3.15 existe  $z_n \in CT_\varepsilon^s(x_n) \cap CT_\varepsilon^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1})$ . Seja

$$h_n \in \mathcal{H}_\tau \left( CT_\varepsilon^s(x_n) \cup CT_\varepsilon^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}) \right)$$

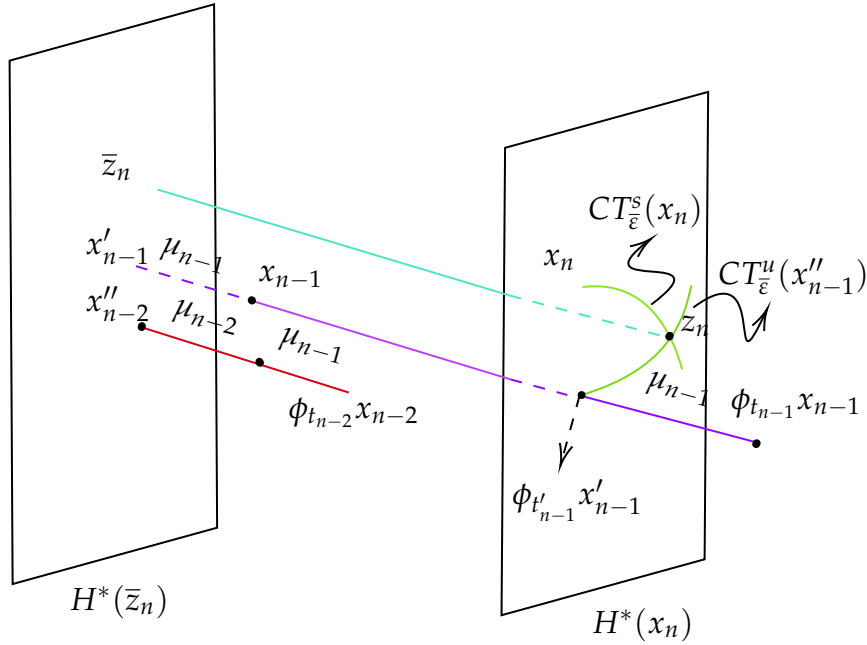
um continuum de reparametrizações tal que

$$\begin{aligned} D\left(\Phi_{h_n}^s CT_\varepsilon^s(x_n)\right) &\leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \geq 0, \\ D\left(\Phi_{h_n}^s CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})\right) &\leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \leq 0, \end{aligned}$$

onde  $x''_{n-1} = \phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}$ . Seja  $\bar{z}_n = \phi_{h_n(z_n)(-t'_{n-1})} z_n$  e observemos que o ponto  $\bar{z}_n \in \Phi_{h_n}^{-t'_{n-1}} CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})$ , veja a Figura 3.2. Além disso, da hiperbolicidade de  $D$  temos que

$$\begin{aligned} D\left(\Phi_{h_n}^{-t'_{n-1}} CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})\right) &\leq 4\lambda^{t'_{n-1}} D(CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})), \\ &\leq 4\lambda^{M-5\tau} \varepsilon_0, \\ &\leq \gamma\varepsilon_0, \\ &\leq \delta'/2. \end{aligned}$$

Figura 3.2: Os  $\mu_i$  localizados no gráfico representam os tempos que leva para ir de um ponto ao próximo ponto, ou seja,  $\phi_{-\mu_i} x_i = x'_i$  e  $\phi_{t_{i-1}-\mu_i-\mu_{i-1}} x_{i-1} = x''_{i-1}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A segunda desigualdade da inequação anterior segue pelo fato que  $t'_{n-1} \geq M - \tau \geq M - 5\tau$  implica que  $\lambda^{t'_{n-1}} \leq \lambda^{M-5\tau}$ . Logo, de acordo com 3.17 temos que

$$\text{diam} \left( \Phi_{h_n}^{-t_{n-1}} CT_{\bar{\epsilon}}^u(x''_{n-1}) \right) \leq \delta_1/2.$$

Portanto,  $d(z_n, x'_{n-1}) \leq \delta_1/2$ . Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} d(\bar{z}_n, \phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}} x_{n-2}) &\leq d(\bar{z}_n, x'_{n-1}) + d(x'_{n-1}, \phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}} x_{n-2}) \\ &\leq \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} \\ &= \delta_1, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue de 3.18. De novo por 3.16 existe  $|\mu_{n-2}| \leq \tau$  tal que  $\phi_{t_{n-2}-\mu_{n-1}-\mu_{n-2}} x_{n-2} \in H_{\delta}^*(\bar{z}_n)$ . Denotemos por  $t'_{n-2} = t_{n-2} - \mu_{n-1}$  e  $x'_{n-2} = \phi_{-\mu_{n-2}} x_{n-2}$ , observe que  $x''_{n-2} = \phi'_{t'_{n-2}} x'_{n-2} \in H_{\delta}^*(\bar{z}_n)$ , veja a Figura 3.4. Logo, de 3.15 existe  $z_{n-1} \in CT_{\bar{\epsilon}}^s(\bar{z}_n) \cap CT_{\bar{\epsilon}}^u(x''_{n-2})$ . Por indução, construímos uma sequência de pontos  $(z_i)_{n-1}^2$  tal que

$$z_i \in CT_{\bar{\epsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cap CT_{\bar{\epsilon}}^u(x''_{i-1}),$$

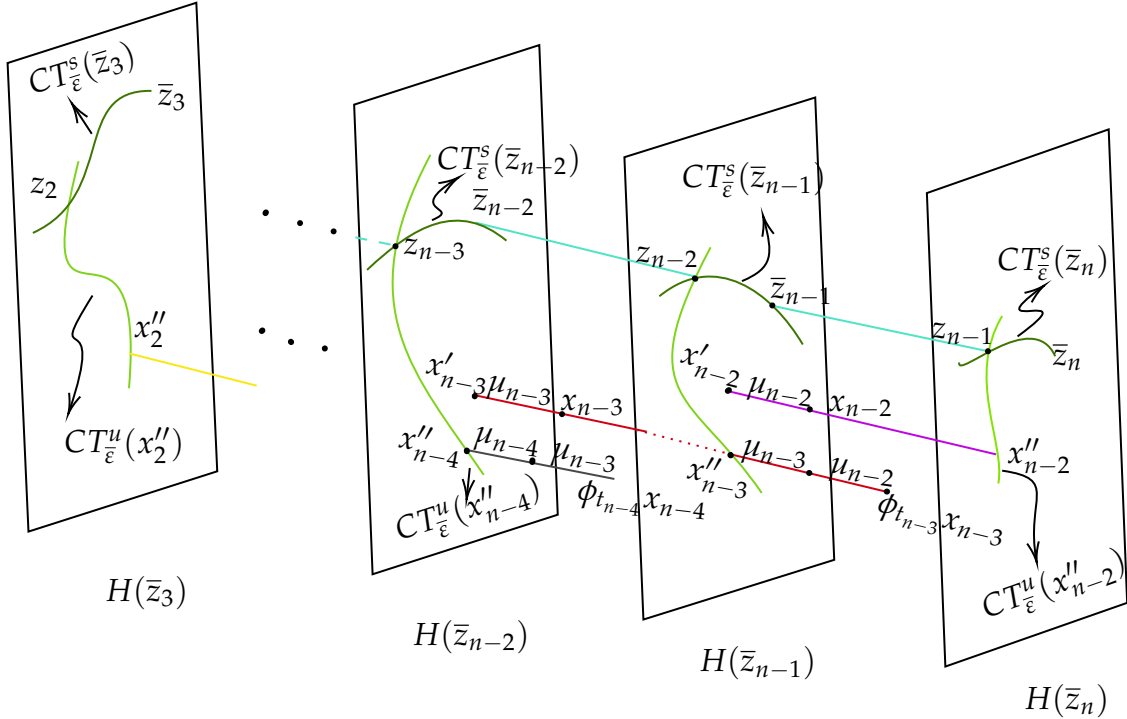
onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})} z_i$  e  $x''_{i-1} = \phi'_{t'_{i-1}} x'_{i-1}$  (veja a Figura 3.3) é uma sequência de conti-

nuums de reparametrizações  $h_i \in \mathcal{H}_\tau (CT_\varepsilon^s(\bar{z}_{i+1}) \cup CT_\varepsilon^u(x''_{i-1}))$  tal que

$$D\left(\Phi_{h_i}^s CT_\varepsilon^s(\bar{z}_{i+1})\right) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \geq 0,$$

$$D\left(\Phi_{h_j}^s CT_\varepsilon^u(x''_{i-1})\right) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \leq 0.$$

Figura 3.3: Construção da sequência de pontos  $(z_i)_2^{n-1}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Afirmamos que existe  $\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $\phi_{\beta_2(-t_1)}z_2$  sombreia à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $((\{x''_n\}_1^n, \{t'_n\}_1^n)$ , isto é,

$$d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_s x_2) \leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t_2,$$

$$d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_{s-t_2}x_3) \leq \varepsilon \text{ para todo } t_2 \leq s \leq t_2 + t_3,$$

$\vdots$

$$d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t_i}x_n) \leq \varepsilon \text{ para todo } \sum_{i=2}^{n-1} t_i \leq s \leq \sum_{i=2}^n t_i.$$

A demonstração da afirmação anterior será descrito depois do teorema.  $\square$

**Observação 3.17.** Sejam  $C \in \mathcal{C}(X)$ ,  $T \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  tal que  $\text{diam } \Phi_\alpha^t(x, C) \leq \varepsilon$  para  $t \in [-t_0, 0]$ . Suponha que  $\bar{C} = \Phi_\alpha^{-t_0}C$  e  $\bar{x} = \phi_{-t_0}x$  então existe uma reparametrização

$\alpha' \in \mathcal{H}(\bar{C})$  tal que  $\text{diam}\Phi_{\alpha'}^s(\bar{x}, \bar{C}) \leq \varepsilon$  para todo  $s \in [0, t_0]$ . De fato, definamos  $\alpha'(\bar{y})(s) = \alpha(y)(s - t_0) - \alpha(y)(-t_0)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e todo  $\bar{y} = \phi_{\alpha(-t_0)}y \in \bar{C}$ . É imediato observar que  $\alpha' \in \mathcal{H}(\bar{C})$  e que

$$\text{diam}\Phi_{\alpha'}^{s-t_0}(x, C) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in [0, t_0],$$

como  $C = \Phi_{-\alpha}^{-t_0}\bar{C}$ . Logo,  $\text{diam}\Phi_{\alpha'}^s(\bar{x}, \bar{C}) \leq \varepsilon$  para todo  $s \in [0, t_0]$ .

**Lema 3.18.** A  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $\left(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1}\right)$  definida no Lema 3.16 é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto.

*Demonstração.* A demonstração será de forma indutiva. Primeiro, definiremos uma reparametrização  $\beta_{n-1} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_{n-1} \in X$   $\varepsilon$ -sombrea à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $\left(\left(\{x'_i\}_{n-1}^n, \{t'_i\}_{n-1}^n\right)\right)$ . Segundo, definiremos uma reparametrização  $\beta_{n-2} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_{n-2} \in X$ ,  $\varepsilon$ -sombrea à  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $\left(\{x'_i\}_{n-2}^n, \{t'_i\}_{n-2}^n\right)$ . Continuando indutivamente, definiremos uma reparametrização  $\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  tal que  $z_2 \in X$ ,  $\varepsilon$ -sombrea à  $(\delta, M)$ -pseudo órbita  $\left(\{x'_1\}_2^n, \{t'_1\}_2^n\right)$ . Finalmente, vamos mostrar que o ponto  $\phi_{\beta_2(-t_2)}z_2$ ,  $\varepsilon$ -sombrea à  $(\delta, M)$ -pseudo órbita  $\left(\{x'_1\}_1^n, \{t'_1\}_1^n\right)$ . Lembrando que a  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $\left(\{x'_1\}_1^{n-1}, \{t'_1\}_1^{n-1}\right)$  definida no Lema 3.16 satisfaz as seguintes condições:

1. Para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  existe  $|\mu_i| \leq \lambda$  tal que  $\phi_{\mu_i}x'_i = x_i$ . E para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , temos que  $t'_i = t_i - \mu_{i+1}$  e  $t'_{n-1} = t_{n-1}$ .
2. Existe um  $\bar{\varepsilon} > 0$ , pontos  $\{z_i\}_n^2 \in X$  e  $\{\bar{z}_i\}_n^3 \subset X$  e  $\{h_i\}_n^1 \subset \mathcal{H}(CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cup CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1}))$  tal que
  - para  $i = n$  existe  $z_i \in CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x_i) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{i-1}}x'_{i-1})$  e  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})}z_i$ .
  - Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  temos que  $z_i \in CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1}) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{i-1})$ . Onde  $\bar{z}_i = \phi_{h_i(-t'_{i-1})}z_i$  e  $x''_{i-1} = \phi_{t'_{i-1}}x'_{i-1}$ .
3.  $\phi_{t'_{i-1}}x'_{i-1}, x'_i \in H^*(\bar{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Vamos a começar a demonstração. Seja  $\beta_n = h_n(z_n)$ , é fácil observar que

$$d\left(\phi_{\beta_n(t)}z_n, \phi_t x_n\right) \leq \text{diam}\left(\Phi_{h_n}^t CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x_n)\right) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [0, t_n],$$

$$d\left(\phi_{\beta_n(t)}z_n, \phi_t x''_{n-1}\right) \leq \text{diam}\left(\Phi_{h_n}^t CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{n-1})\right) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [-t'_{n-1}, 0],$$

seja  $\beta'_n(\bar{y})(s) = \beta_n(y)(s - t'_{n-1}) - \beta_n(y)(-t'_{n-1})$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e todo  $\bar{y} \in \overline{CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})} = \Phi_{h_n}^{-t'_{n-1}} CT_\varepsilon^u(x''_{n-1})$ . De acordo com a Observação 3.17,  $\bar{z}_n$  acompanha a órbita de  $x'_{n-1}$  para todo  $t \in [0, t'_{n-1}]$  com a reparametrização  $\beta'_n(\bar{z}_n)$ , ou seja,

$$d(\phi_{\beta'_n(\bar{z}_n)(s)} \bar{z}_n, \phi_s x_{n-1}) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in [0, t'_{n-1}]$$

Assim, definamos a reparametrização

$$\beta_{n-1}(s) = \begin{cases} h_{n-1}(z_{n-1}) \circ \beta'_n(\bar{z}_n)(s) & \text{para todo } s \geq 0, \\ h_{n-1}(z_{n-1})(s) & \text{para todo } s \leq 0. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_s x'_{n-1}) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in [0, t'_{n-1}], \\ d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-1}} x_n) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De fato, como  $\beta_n \in \mathcal{H}_\tau \left( CT_\varepsilon^s(x_n) \cup CT_\varepsilon^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}) \right)$  então  $\beta_n(z_n) \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  implica que

$$\beta'_n(\bar{z}_n)(s) \in [s - 2\tau, s + 2\tau] \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Portanto, da hiperbolicidade de  $D$  temos que

$$\begin{aligned} D(\Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_\varepsilon^s(\bar{z}_n)) &\leq \varepsilon_0 & \forall s \in [0, t'_{n-1}], \\ D(\Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_\varepsilon^s(\bar{z}_n)) &\leq 4\lambda^{\beta'_n(s)} D(CT_\varepsilon^s(\bar{z}_n)) & \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n] \\ &\leq 4\lambda^{s-2\tau} \varepsilon_0 \\ &\leq 4\lambda^{t'_{n-1}-2\tau} \varepsilon_0 \\ &< \gamma \varepsilon_0, \\ D(\Phi_{h_{n-1}}^s CT_\varepsilon^u(x''_{n-2})) &\leq \varepsilon_0 & \forall s \in [-t'_{n-2}, 0]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por outro lado, sejam os conjuntos

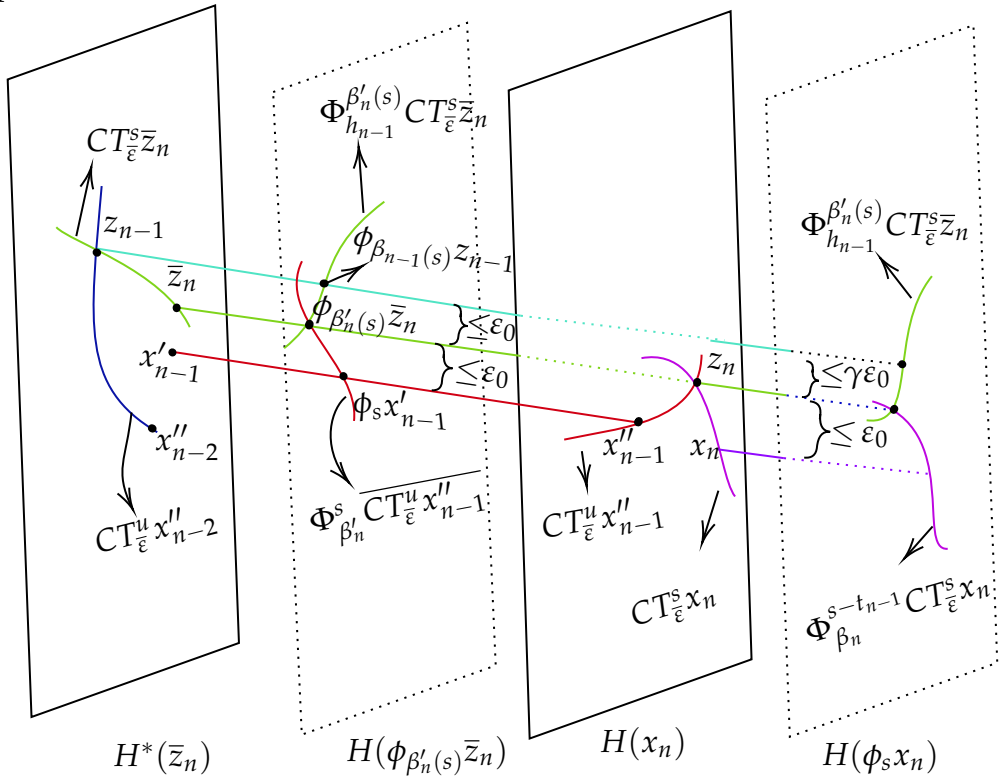
$$\begin{aligned} C_{n-1}^1(s) &= \Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_\varepsilon^s(\bar{z}_n) \cup \Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_\varepsilon^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}) \\ C_{n-1}^2(s) &= \Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_\varepsilon^s(\bar{z}_n) \cup \Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_\varepsilon^s(x_n) \end{aligned}$$

observe que  $C_{n-1}^i(s) \in \mathcal{C}(X)$  para  $i = 1, 2$ . basta observar que

$$\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n \in \Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n) \cap \Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1}) \quad \forall s \in [0, t'_{n-1}],$$

$$\phi_{\beta'_n(s)} \bar{z}_n \in \Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n) \cap \Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x_n) \quad \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n].$$

Figura 3.4:  $z_{n-1}$  acompanha à órbita de  $x'_{n-1}$  até o tempo  $t'_{n-1}$  e à órbita de  $x_n$  até o tempo  $t_n$ .



Elaborado pelo autor.

Fonte:

Veja a figura 3.4. Portanto, das propriedades métricas de  $D$  temos que

$$\begin{aligned} D(C_{n-1}^1(s)) &\leq D(\Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n)) + D(\Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{n-1}} x'_{n-1})) \quad \forall s \in [0, t'_{n-1}] \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \\ &\leq 3\varepsilon_0 < \varepsilon' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(C_{n-1}^2(s)) &\leq D(\Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_n(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n)) + D(\Phi_{\beta_n}^{s-t'_{n-1}} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(x_n)) \quad \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n] \\ &\leq \gamma\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \\ &\leq 3\varepsilon_0 < \varepsilon' \end{aligned}$$

(3.21)

Assim, de 3.13 segue-se que

$$\begin{aligned} \text{diam}(C_{n-1}^1(s)) &\leq \varepsilon & \forall s \in [0, t'_{n-1}], \\ \text{diam}(C_{n-1}^2(s)) &\leq \varepsilon & \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n], \end{aligned} \quad (3.22)$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_s x'_{n-1} &\in C_{n-1}^1(s) \quad \forall s \in [0, t'_{n-1}] \\ \phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-1}} x_n &\in C_{n-1}^2(s) \quad \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n] \end{aligned}$$

Então, de 3.22 temos que

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_s x'_{n-1}) &\leq \varepsilon \quad \forall s \in [0, t'_{n-1}] \\ d(\phi_{\beta_{n-1}(s)} z_{n-1}, \phi_{s-t'_{n-1}} x_n) &\leq \varepsilon \quad \forall s \in [t'_{n-1}, t'_{n-1} + t'_n]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, queda mostrado a afirmação 3.19. Para continuar o processo de indução, seja  $k < n$  e suponha que  $\{\beta_{n-1}, \dots, \beta_k\}$  definidas por

$$\begin{aligned} \beta_i(s) &= \begin{cases} h_i(z_i) \circ \beta'_{i+1}(\bar{z}_n)(s) & \text{para todo } s \geq 0, \\ h_i(z_i)(s) & \text{para todo } s \leq 0, \end{cases} \\ \beta'_{i+1}(s) &= \beta_{i+1}(s - t'_i) - \beta_{i+1}(-t'_i) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para cada  $i = k, k+1, \dots, n-1$ , satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_i(s)} z_i, \phi_s x'_i) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t'_i, \\ d(\phi_{\beta_i(s)} z_i, \phi_{s-t'_i} x'_{i+1}) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo } t'_i \leq s \leq t'_i + t'_{i+1}, \\ &\vdots \\ d(\phi_{\beta_i(s)} z_i, \phi_{s-\sum_{j=i}^{n-1} t'_j} x_n) &\leq \varepsilon \quad \text{para todo } \sum_{j=2}^{n-1} t'_j \leq s \leq \sum_{j=2}^n t'_j. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Observe que para chegar à prova das desigualdades anteriores tivemos que seguir as ideias da etapa anterior. Ou seja, o fato de  $(h_i(z_i)) \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  garante que para cada

$i \in \{k, k+1, \dots, n-1\}$  temos que

$$\beta'_{i+1}(s) \in \begin{cases} [s-2\tau, s+2\tau] & \text{si } s \in [0, t'_i], \\ [s-4\tau, s+4\tau] & \text{si } s \in [t'_i, t'_i + t'_{i+1}], \\ \vdots & \\ [s-2(n-i)\tau, s+2(n-i)\tau] & \text{si } s \in (\sum_{j=0}^{n-i-2} t_{i+j}', \sum_{j=0}^{n-i-1} t'_{i+j}'], \end{cases}$$

Além disso, seguindo como em 3.20 e 3.21, para cada  $i \in \{k, k+1, \dots, n-1\}$  temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} D(C_i^1(s)) &\leq 2\varepsilon_0 \quad \forall s \in [0, t'_i], \\ D(C_i^r(s)) &\leq \varepsilon_0 + \sum_0^{r-1} \gamma^i \varepsilon_0 \quad \forall s \in [\sum_{j=0}^{r-2} t'_{i+j}, \sum_{j=0}^{r-1} t'_{i+j}]. \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned} C_i^1(s) &= \Phi_{h_i}^{\beta'_{i+1}(s)}(\bar{z}_{i+1}, CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1})) \cup \Phi_{\beta_{i+1}}^{s-t'_i}(x_i, CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x'_i)) \\ C_i^r(s) &= \Phi_{h_i}^{\beta'_{i+1}(s)}(\bar{z}_{i+1}, CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_{i+1})) \cup C_{i+1}^{r-1}(s-t'_i) \end{aligned}$$

para cada  $r = r(i) = 2, 3, \dots, n-i+1$ . Finalmente, observe que  $\phi_{\beta_i(s)} z_i, \phi_s x'_i \in C_i^1(s)$  para todo  $s \in [0, t'_i]$ , e para cada  $r = 2, 3, \dots, n-i+1$  temos que  $\phi_{\beta_i(s)} z_i, \phi_{s-\sum_{i=0}^{r-2} t_{i+j}'} x_{k+i} \in C_i^r(s)$ . Portanto, 3.24 é satisfeito. Mostremos que podemos definir um  $\beta_{k-1} \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  satisfazendo as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} d(\phi_{\beta_{k-i}(s)} z_{k-1}, \phi_s x'_{k-1}) &\leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_{k-1}, \\ d(\phi_{\beta_{k-1}(s)} z_{k-1}, \phi_{s-t'_{k-1}} x'_k) &\leq \varepsilon \text{ para todo } t'_{k-1} \leq s \leq t'_{k-1} + t'_k, \\ &\vdots \\ d(\phi_{\beta_{k-1}(s)} z_{k-1}, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon \text{ para todo } \sum_{i=k-1}^{n-1} t'_i \leq s \leq \sum_{i=k-1}^n t'_i. \end{aligned}$$

De fato, seja  $\beta'_k(s) = \beta_k(s-t'_{k-1}) - \beta_k(-t'_{k-1})$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Como  $\beta_k \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  é

fácil ver que  $\beta'_k \in \text{Rep}(\mathbb{R})$ . Além disso, como  $h_k \in \mathcal{I}_\tau(\mathbb{R})$  então

$$\beta'_k(s) \in \begin{cases} [s - 2\tau, s + 2\tau] & \text{si } s \in [0, t'_{k-1}], \\ [s - 4\tau, s + 4\tau] & \text{si } s \in [t'_{k-1}, t'_{k-1} + t'_k], \\ \vdots & \\ [s - 2(n-k+1)\tau, s + 2(n-k+1)\tau] & \text{si } s \in (\sum_{j=0}^{n-k-1} t'_{k-1+j}, \sum_{j=0}^{n-k} t'_{k-1+j}], \end{cases}$$

ou seja,  $\beta'_k(s) \in [s - 2(r+2)\tau, s + 2(r+2)\tau]$  se  $s \in [\sum_{j=0}^{r(k)} t'_{k-1+j}, \sum_{j=0}^{r(k)+1} t'_{k-1+j}]$ , para cada  $r(k) \in \{0, 1, \dots, n-k-1\}$ . Logo, defina

$$\beta_{k-1}(s) = \begin{cases} h_{k-1} \circ \beta'_k(z_n)(s) & \text{para todo } s \geq 0 \\ h_{k-1}(s) & \text{para todo } s \leq 0 \end{cases}$$

Lembre-se que  $z_{k-1} \in CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k) \cap CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{k-2})$  e  $h_{k-1} \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$  satisfaz

$$\begin{aligned} D(\Phi_{h_{k-1}}^s CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k)) &\leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \geq 0, \\ D(\Phi_{h_{k-1}}^s CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{k-2})) &\leq \varepsilon_0 \text{ para todo } s \leq 0, \end{aligned}$$

Portanto,

$$D(\Phi_{h_{k-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k)) \leq \varepsilon_0 \quad \forall s \in [0, t'_{k-1}],$$

Para cada  $r(k) \in \{0, 1, \dots, n-k\}$  temos que

$$\begin{aligned} D(\Phi_{h_{n-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n)) &\leq 4\lambda^{\beta'_k(s)} D(CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_n)) \quad \forall s \in [\sum_{j=0}^{r(k)} t'_{k-1+j}, \sum_{j=0}^{r(k)+1} t'_{k-1+j}] \\ &\leq 4\lambda^{s-2(r+2)\tau} \varepsilon_0 \\ &\leq 4\lambda^{\sum_{j=0}^{r(k)} t'_{k-1+j} - 2r\tau - 4\tau} \varepsilon_0 \\ &\leq 4\lambda^{(r+1)M - 5(r+1)\tau} \varepsilon_0 \\ &< \gamma^{r+1} \varepsilon_0, \end{aligned}$$

$$D(\Phi_{h_{n-1}}^s CT_{\bar{\varepsilon}}^u(x''_{n-2})) \leq \varepsilon_0 \quad \forall s \in [-t'_{k-2}, 0]. \quad (3.25)$$

Por outro lado, sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} C_{k-1}^1(s) &= \Phi_{h_{k-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k) \cup \Phi_{\beta_k}^{s-t'_{k-1}} C_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{k-1}} x'_{k-1}), \\ C_{k-1}^r(s) &= \Phi_{h_{k-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k) \cup C_k^{r-1}(s - t'_i), \end{aligned}$$

para cada  $r = 2, 3, \dots, n - k + 2$ . Da hiperbolicidade de  $D$  temos as seguintes desigualdades:

$$D(C_{k-1}^1(s)) \leq D(\Phi_{h_{k-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k)) + D(\Phi_{\beta_k}^{s-t'_{k-1}} C_{\bar{\varepsilon}}^u(\phi_{t'_{k-1}} x'_{k-1})) \quad \forall s \in [0, t'_{k-1}]$$

$$\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0$$

$$\leq \varepsilon'$$

$$D(C_{k-1}^r(s)) \leq D(\Phi_{h_{k-1}}^{\beta'_k(s)} CT_{\bar{\varepsilon}}^s(\bar{z}_k)) + D(C_k^{r-1}(s - t'_i)) \quad \forall s \in \left[ \sum_{j=0}^{r-2} t'_{k-1+j}, \sum_{j=0}^{r-1} t'_{k-1+j} \right]$$

$$\leq \gamma^{r-1} \varepsilon_0 + \sum_0^{r-2} \gamma^i \varepsilon_0 + \varepsilon_0$$

$$\leq \varepsilon_0 + \sum_0^{r-1} \gamma^i \varepsilon_0$$

$$\leq \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{1 - \gamma} < \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0$$

$$\leq \varepsilon'$$

Assim, de 3.13 segue-se que

$$\text{diam}(C_{k-1}^1(s)) \leq \varepsilon \quad \forall s \in [0, t'_{k-1}]$$

$$\text{diam}(C_{k-1}^r(s)) \leq \varepsilon \quad \forall s \in \left[ \sum_{j=0}^{r-2} t'_{k-1+j}, \sum_{j=0}^{r-1} t'_{k-1+j} \right],$$

Finalmente, observe que  $\phi_{\beta_{k-1}(s)} z_{k-1}, \phi_s x_{k-1} \in C_{k-1}^1(s)$  para todo  $s \in [0, t'_{k-1}]$ , e para cada  $r = 2, 3, \dots, n - k + 2$  temos que  $\phi_{\beta_{k-1}(s)} z_{k-1}, \phi_{s - \sum_{i=0}^{r-2} t'_{k-1+j}} x'_{k+i} \in C_{k-1}^r(s)$ . Por-

tanto,

$$\begin{aligned}
d(\phi_{\beta_{k-i}(s)}z_{k-1}, \phi_s x'_{k-1}) &\leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_{k-1}, \\
d(\phi_{\beta_{k-1}(s)}z_{k-1}, \phi_{s-t'_{k-1}} x'_k) &\leq \varepsilon \text{ para todo } t'_{k-1} \leq s \leq t'_{k-1} + t'_k, \\
&\vdots \\
d(\phi_{\beta_{k-1}(s)}z_{k-1}, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon \text{ para todo } \sum_{i=k-1}^{n-1} t'_i \leq s \leq \sum_{i=k-1}^n t'_i.
\end{aligned}$$

Isso termina a etapa de indução e prova a existência de  $\beta_2 \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  satisfazendo

$$\begin{aligned}
d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_s x'_2) &\leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_2, \\
d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_{s-t'_2} x'_3) &\leq \varepsilon \text{ para todo } t'_2 \leq s \leq t'_2 + t'_3, \\
&\vdots \\
d(\phi_{\beta_2(s)}z_2, \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon \text{ para todo } \sum_{i=2}^{n-1} t'_i \leq s \leq \sum_{i=2}^n t'_i.
\end{aligned}$$

Finalmente, tome  $z' = \phi_{\beta_2(-t'_1)}z_2$  e defina  $\beta'(s) = \beta_2(s - t'_1) - \beta_2(-t'_1)$ . É imediato observar que  $\beta' \in \text{Rep}(\mathbb{R})$  e que

$$\begin{aligned}
d(\phi_{\beta'(s)}z', \phi_s x'_1) &\leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq s \leq t'_1, \\
d(\phi_{\beta'(s)}z', \phi_{s-t'_1} x'_2) &\leq \varepsilon \text{ para todo } t'_1 \leq s \leq t'_1 + t'_2, \\
&\vdots \\
d(\phi_{\beta'(s)}z', \phi_{s-\sum_{i=2}^{n-1} t'_i} x'_n) &\leq \varepsilon \text{ para todo } s'_{n-1} \leq s \leq s'_n,
\end{aligned}$$

onde  $s'_n = \sum_{i=1}^n t'_i$ . Isto significa, que a  $(\delta, M')$ -pseudo órbita  $((\{x'_i\}_1^n, \{t'_i\}_1^n))$  é  $\varepsilon$ -sombreada pela órbita do ponto  $z' \in X$ .  $\square$

**Demonstração do Teorema 2.12.** De acordo com os Lemas 3.16 e 3.18 e geramos uma  $(\delta, M - \tau)$ -pseudo órbita  $(\{x'_i\}_1^{n-1}, \{t'_i\}_1^{n-1})$  que é  $\varepsilon$ -sombreado pela órbita de um ponto. Logo, agindo de igual forma que o Teorema 2.12 fica demonstrado o teorema.

A seguir, enunciaremos alguns problemas interessantes, que podem ser abordados posteriormente.

**Problema 2.** Seja  $(X, \phi)$  um fluxo cw-hiperbólico. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

se  $\alpha \in \mathcal{H}(C)$  e  $T_1, T_2 \geq 0$  com

$$\text{diam}\Phi_{\alpha(t)}C \leq \delta \quad \text{para todo } t \in [-T_1, T_2],$$

então  $|\alpha(x)(t) - t| \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [-T_1, T_2]$  e  $x \in C$ .

**Problema 3.** Os fluxos Cw-hiperbólicos possuem a propriedade de sombreamento?.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. F. Thomas, Canonical Coordinates and the Pseudo Orbit Tracing Property, *Journal of Differential Equations*, **90**(1991), 316 – 343 .
- [2] A. H. Frink, Distance functions and the metrization problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **43**(1937), 1408-1411.
- [3] A. Artigue, Fields of Cross Sections and Expansive Flows. [arxiv.org/pdf/1502.02691.pdf](https://arxiv.org/pdf/1502.02691.pdf)
- [4] H. Kato, Continuum-wise expansive homeomorphisms, *Canad. J. Math.*, **45**(1993), 576-598.
- [5] A. Arbieto, W. Cordeiro, M. J. Pacifico, Continuum-wise expansivity and entropy for flows, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **164**(2017), pp. 1-21.
- [6] A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, J. Vieitez. Continuum-wise hiperbolicity. <https://arxiv.org/abs/2011.08147>
- [7] S. B. Nadler Jr, *Hyperspaces of sets*. Pure and Appl. Math. **49**, Dekker, New York, 1978.
- [8] J. Rodriguez Hertz, There are no stable points for continuum-wise expansive homeomorphisms, *Pre. Mat. Urug.* **65** (2002).
- [9] J. Lewowicz, Persistence in expansive Systems, *Erg. Th. and Dynam. Sys*, **3**(1998), pp. 567-578.
- [10] R. Bowen, P. Walters. Expansive one-parameter flows, *J. Differ. Equations.* **12**(1972), pp.180-193.

- 
- [11] A. Artigue, *Singular CW-expansive flows*. Discrete and continuous dynamical systems , **37**,(2017).
- [12] T. K. Motomasa, One-Parameter Flows with the Pseudo Orbit Tracing Property , **37**(1984).
- [13] M. Paternain, Expansive Flows and the Fundamental Group, Bull. Braz. Math. Soc. **24**(1993), pp.179-199.
- [14] M. Komuro, One Parameter Flows with the pseudo orbit tracing property, Mh. Math. **98**(1984), pp.219-253.
- [15] R.F. Thomas, Stability properties of one-parameter flows, Proc. London Math. Soc, s3-45(1982), pp. 479-505