

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Física

Patrick Matheus Ramos Lima

**CIRCUITO FOTÔNICO PARA TESTES DE
DESIGUALDADES DE NÃO-CONTEXTUALIDADE
VIA MEDIÇÕES SEQUENCIAIS**

Belo Horizonte
2022

Patrick Matheus Ramos Lima

CIRCUITO FOTÔNICO PARA TESTES DE DESIGUALDADES DE NÃO-CONTEXTUALIDADE VIA MEDIÇÕES SEQUENCIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Sebastião José
Nascimento de Pádua

Belo Horizonte

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L732c Lima, Patrick Matheus Ramos.

Circuito fotônico para teste de desigualdades de não-contextualidade via medições sequenciais / Patrick Matheus Ramos Lima. – 2022.
106 f. : il.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 76-83.

1. Óptica quântica. 2. Física quântica. I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535.14 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “Circuito fotônico para teste de desigualdades de não-contextualidade via medições sequenciais”, de autoria de **PATRICK MATHEUS RAMOS LIMA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 15 de março de 2022.

Belo Horizonte, 15 de março de 2022.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Leonardo Teixeira Neves

Departamento de Física/UFMG

Prof. Pablo Lima Saldanha

Departamento de Física/UFMG



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 17/03/2022, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Servidor(a)**, em 17/03/2022, às 11:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastião Jose Nascimento de Padua, Membro de comissão**, em 30/03/2022, às 15:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1315527** e o código CRC **9DFD57C0**.

Referência: Processo nº 23072.214449/2022-29

SEI nº 1315527

Agradecimentos

Agradeço àqueles que, de diversas formas diferentes, tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Renata e Pablo por sempre me proverem o apoio necessário, e por sempre me incentivarem a buscar o estudo e o conhecimento como caminho. Ao meu irmão Ian por toda confiança, parceria e amizade. Agradeço também a todos aqueles da minha família que acreditaram em mim, em especial à minha avó Beth.

À minha companheira de todos os momentos Fernanda, pela confiança, carinho, amizade e apoio incondicionais. Pela presença em muitos dos momentos em que eu precisei e não soube pedir. Por me ouvir quando eu precisei falar, por falar quando eu precisei ouvir. Por me ajudar a ser mais eu mesmo, e também por me motivar tanto a (tentar) ser uma pessoa cada dia melhor. Pelas críticas que me permitem refletir e tentar melhorar, e pelos elogios que me trazem confiança para seguir em frente. Pela presença nos momentos bons e ruins, e por ter sido a responsável por proporcionar grande parte dos bons momentos.

Ao meu orientador Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua, por me guiar com atenção, maestria e paciência nos caminhos nada triviais e intuitivos da Física. Pelas intermináveis e fundamentais discussões que me trouxeram até aqui, e que vão me acompanhar pelo resto da vida. E claro, pela confiança em mim que o senhor sempre me passou.

Aos meus amigos, que apesar das distâncias se fizeram presentes nos momentos de alegrias, nos momentos difíceis, por ouvirem meus intermináveis desabafos, pelos conselhos e pelas risadas. Por serem sempre bons amigos, não importa a distância e o tempo que passe.

Aos meus colegas de laboratório, pelo conhecimento compartilhado, pelas discussões engrandecedoras para minha formação, pelo apoio na trajetória acadêmica, pelos momentos de concentração e também pelos momentos de descontração,

e por me ensinarem as mais nobres técnicas dessa arte chamada gambiarra (e pelos doces deixados aleatoriamente pelo laboratório). Obrigado Wilder, Mariana, Artur, Vinicius, Gabriela e Pedro!

À todos os professores e colegas que constituíram parte fundamental de minha formação, agradeço em especial aos professores Rodney Biezuner e Pablo Saldanha.

À todos e todas envolvidos desde o programa de Pós-Graduação da Física à toda Universidade Federal de Minas Gerais, por toda luta em construir e fazerem funcionar toda a infraestrutura necessária para a formação de tantas pessoas que por lá passam.

Agradeço ao CNPq, CAPES e INCT de Informação Quântica por todo o investimento financeiro em minha formação, e em toda a ciência brasileira! Que o amanhã da ciência brasileira seja sempre maior que o hoje, e assim seja a nossa guia para um futuro cada vez mais inclusivo, igualitário e pacífico, com cara de povo brasileiro. Agradeço à este mesmo povo, por me permitir fazer parte dessa história.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos os detalhes de propostas experimentais para a verificação de desigualdades de não-contextualidade em qutrits através de medições sequenciais utilizando circuitos fotônicos como plataforma física para implementação dos estados e observáveis. Inicialmente foi realizada uma introdução ao conceito de contextualidade quântica e a relevância das desigualdades de não-contextualidade, explicitamos os detalhes da realização de medições sequenciais e o motivo das mesmas terem sido escolhidas como método experimental bem como os detalhes da escolha de circuitos fotônicos como plataforma física para realização dos experimentos. Por fim, obtivemos o desenhos dos circuitos fotônicos, e seus respectivos parâmetros experimentais, capazes de realizar testes de não-contextualidade através da observação de desigualdades de não-contextualidade dependente e independente de estado em sistemas de três níveis.

Palavras-chave: contextualidade quântica; circuitos fotônicos integrados; testes de não-contextualidade; medições sequenciais

Abstract

In this work, we develop the details of experimental proposals for the verification of non-contextual inequalities in qutrits through sequential measurements using photonic circuits as physical platforms for implementing states and observables. Initially, an introduction to the concept of quantum contextuality and the relevance of non-contextuality inequalities was carried out. We explained the details of performing sequential measurements and the reason they were chosen as an experimental method as well as the details of the choice of photonic circuits as an experimental platform to realize the experiments. Finally, we obtained the photonic circuit designs, and their respective experimental parameters, capable of performing non-contextuality tests through the observation of state-dependent and state-independent non-contextuality inequalities in three-level systems.

Keywords: quantum contextuality; integrated photonic circuits; non-contextuality tests; sequential measurements

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONTEXTUALIDADE QUÂNTICA	16
2.1	Conceitos Fundamentais	16
2.2	Equívocos interpretativos sobre Contextualidade Quântica . .	19
2.3	Desigualdades de Não-Contextualidade	20
3	MEDIÇÕES SEQUENCIAIS	29
3.1	Testes Elementares	29
3.2	Medições Simples	31
3.3	Medições Sequenciais	33
3.4	Compatibilidade	34
4	CIRCUITOS FOTÔNICOS	41
4.1	Introdução & Fabricação	41
4.2	Informação Quântica em Circuitos Fotônicos	43
4.2.1	Estados Quânticos	44
4.2.2	Operações Unitárias	44
4.2.3	Deteção	48
5	DESIGUALDADES DE NÃO-CONTEXTUALIDADE PARA QUTRITS VIA MEDIÇÕES SEQUENCIAIS EM CIRCUITOS FOTÔNICOS	50
5.1	Teste Elementar em Circuito Fotônico	50
5.2	Medições Sequenciais em Circuitos Fotônicos	56
5.3	Compatibilidade em Circuitos Fotônicos	61
5.4	Teste de Não-Contextualidade dependente de estado para Qutrits em Circuito Fotônico	63
5.5	Teste de Não-Contextualidade independente de estado para Qutrits em Circuito Fotônico	66

6	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – CÁLCULO DOS PARÂMETROS	84
	APÊNDICE B – PARÂMETROS DOS OBSERVÁVEIS DE TESTE ELEMENTAR DO CENÁRIO 5- CICLO EM QUTRITS	101
	APÊNDICE C – PARÂMETROS DOS OBSERVÁVEIS DE TESTE ELEMENTAR DO CENÁRIO IN- DEPENDENTE DE ESTADO EM QUTRITS	103

1 Introdução

As bases da contextualidade quântica tem origem em questionamentos fundamentais levantados nas décadas de 1920-1930: *pode a mecânica quântica ser considerada completa? Caso a resposta seja negativa, a teoria quântica pode ser completada através de variáveis ocultas?* [1, 2]. O artigo publicado por Einstein-Podolski-Rosen (EPR) [2, 3] em 1935 é um dos trabalhos mais importantes a questionar a estranheza da mecânica quântica, que sugere uma natureza intrinsecamente probabilística, em contraste a teorias clássicas determinísticas. Alguns nomes importantes da época como Born, Heisenberg, Pauli e Bohr defendiam essa natureza fundamentalmente probabilística; Schroedinger, de Broglie e Einstein defendiam uma visão oposta.

Estas discussões motivaram a busca por modelos de variáveis ocultas que reproduzissem as observações experimentais dos fenômenos quânticos, como a de de Broglie [4] apresentada na importante Conferência de Solvay de 1927, mas fortemente criticada por Pauli, por exemplo [1, 2]. Bohm, em 1952, apresenta [5, 6] o modelo mais conhecido até hoje de variável oculta inspirado na ideia abandonada de de Broglie, sendo essa teoria chamada de Teoria da Onda Piloto de de Broglie-Bohm. Porém, apesar de determinista esse modelo é fortemente não-local¹ em suas variáveis. Essa dificuldade do modelo de de Broglie-Bohm conciliar a existência de variáveis ocultas com o princípio da localidade inspirou Bell a buscar não uma prova de que modelos de variáveis ocultas para a mecânica quântica devem apresentar não-localidade, mas sim algum tipo de condição de impossibilidade. Essa busca resultou no famoso teorema de Bell [7] que implica na impossibilidade de existência de variáveis ocultas locais na descrição dos fenômenos quânticos.

Porém o teorema de Bell não encerra a discussão levantada pela pergunta acima, pois estabelece uma impossibilidade lógica para descrição via variáveis

¹ O princípio da localidade afirma que um objeto pode apenas ser influenciado por fenômenos em seu arredor. Portanto, de acordo com a relatividade especial, um objeto pode ser influenciado em um intervalo de tempo t apenas por fenômenos ocorridos a uma distância ct do objeto, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

ocultas locais para sistemas bipartidos com separações tipo-espaço. Contudo a mecânica quântica exibe sua *incompletude* (no sentido de EPR) também na descrição de resultados de medições em sistemas de uma parte, e correlações não-clássicas entre graus de liberdade internos de um sistema, logo impossíveis de possuírem uma separação tipo-espaço. Esses sistemas e fenômenos que fogem do escopo do teorema de Bell são os alvos da discussão da contextualidade quântica².

Assim como a discussão da não-localidade quântica tem o teorema de Bell como seu ponto de partida, a contextualidade quântica parte do teorema de Kochen-Specker [8], e ambos trabalhos e respectivos teoremas partem dos questionamentos apresentados no primeiro parágrafo. O teorema de Kochen-Specker demonstra a incompatibilidade lógica entre previsões da mecânica quântica e previsões de modelos de variáveis ocultas não-contextuais, e sua versão mais fundamental é produto direto de trabalhos como o teorema de Gleason [9] e os próprios trabalhos de Bell.

Apesar dos trabalhos de Bell e Kochen-Specker datarem da mesma época, o teorema de Bell foi absorvido de forma muito mais rápida pela comunidade científica, principalmente após realizações experimentais que observaram a violação das desigualdades de Bell [10, 11]. Isso porque o teorema de Bell culminou em condições experimentalmente testáveis, as desigualdades de Bell, antes do teorema de Kochen-Specker, que necessitou de mais alguns anos para ser absorvido, discutido e desenvolvido pela comunidade científica a ponto de se tornar mais acessível do ponto de vista de testes experimentais. Esse movimento começou na década de 1990 com os trabalhos de Peres e Mermin [12–14], resultando em uma simplificação das provas do teorema de Kochen-Specker, além de conectar as já conhecidas desigualdades de Bell com o teorema de Kochen-Specker via os trabalhos de Greenberger, Horne, e Zeilinger (GHZ) [15]. Apesar de tudo indicar para uma possível unificação do teorema de Bell com o teorema de Kochen-Specker, algumas características do teorema de Kochen-Specker impediam essa unificação, a maioria delas proveniente do fato de que enquanto o teorema de Bell não faz referência alguma à mecânica quântica, e sim apenas a resultados experimentais e modelos

² A não-contextualidade se expressa como uma independência dos resultados experimentais em relação ao contexto (conjunto de medidas) do qual o mesmo foi obtido.

gerais de variáveis ocultas, o teorema de Kochen-Specker é intimamente conectado com a mecânica quântica.

Dessa forma, era necessária então tanto uma nova formulação da noção de contextualidade que não fizesse referência a nenhuma modelo específico de descrição da natureza, e sim apenas a resultados acessíveis experimentalmente, como novos testes realizáveis para trazer a discussão da contextualidade quântica de Kochen-Specker para o mesmo patamar da não-localidade de Bell. O trabalho de Spekkens [16] já em 2005 introduz a noção de contextualidade de variáveis ocultas sem referência a um modelo específico, e no campo das desigualdades experimentalmente testáveis a grande mudança surge com a descoberta da violação da desigualdade de Klyachko, Can, Binicio e Shumovsky (KCBS) [17, 18] por qutrits (sistemas de três níveis), porém ainda sendo um teste dependente de estado. Posteriormente foram descobertas desigualdades independentes de estado similares a desigualdade de KCBS [19, 20] via considerações apenas sobre a contextualidade de variáveis ocultas, independentemente de um modelo específico.

Trabalhos mais atuais identificaram os cenários das desigualdades de não-contextualidade como politopos³ e resgataram uma conexão com desigualdades introduzidas muito antes da mecânica quântica, conhecidas como desigualdades de Boole, que já haviam sido conectadas com as desigualdades de Bell por Pitowsky e Vorob'ev [21, 22] via teoria de grafos de compatibilidade. Estas ideias aplicadas ao teorema de Kochen-Specker e às desigualdades de não-contextualidade na forma de KCBS e CHSH [23] levaram ao estudo e desenvolvimento, por exemplo, dos cenários n-ciclo para os testes de não-contextualidade [24].

Esta dissertação visa estudar o fenômeno da contextualidade em sistemas quânticos com fótons e propor um circuito fotônico que seja capaz de realizar testes experimentais de desigualdades de não-contextualidade via medições sequenciais. O texto objetiva responder perguntas básicas em relação à este tema. No segundo capítulo, pretende-se responder a pergunta “*O que são desigualdades de não-contextualidade?*”, apresentando primeiramente um exemplo simples do conceito de contextualidade, e em sequência apresentando os tipos de desigualdades mais usuais

³ Na geometria, politopo é um objeto com lados planos chamados de faces. Trata-se da generalização do poliedro para dimensões maiores que 3

e o que a sua violação nos diz a respeito do comportamento de sistemas quânticos. No terceiro capítulo, o foco é responder “*O que são medições sequenciais?*” e como realizá-las em sistemas quânticos e apresentar o problema da compatibilidade bem como uma solução para o mesmo aplicada nas desigualdades de interesse. Já no quarto capítulo apresenta-se uma resposta para “*O que são circuitos fotônicos?*” dando particular atenção para circuitos fotônicos fabricados com a técnica de escrita direta por laser de femtossegundo. Apresentando também os elementos básicos de informação quântica que compõe os circuitos fotônicos.

Finalmente, no quinto capítulo, os temas são reunidos em alguns passos, apresentando como os circuitos fotônicos podem ser empregados para a realização de medições sequenciais, como o problema da compatibilidade e sua solução são implementados para esses circuitos e como todas essas ideias nos permitem propor um teste experimental para verificação de desigualdades de não-contextualidade via medições sequenciais em circuitos fotônicos. Construimos uma proposta para realização de dois testes das desigualdades de não-contextualidade, uma dependente de estado e outra independente de estado, ambas em qutrits.

Noções fundamentais de física quântica e informação quântica foram utilizadas ao longo do texto e podem ser vistas nas referências [25–27].

2 Contextualidade Quântica

2.1 Conceitos Fundamentais

A existência de valores definidos para propriedades intrínsecas de um objeto físico, como por exemplo seu tamanho ou peso, pode ser consistentemente assumida na física clássica. A contextualidade quântica é um fenômeno que exemplifica a incompatibilidade da teoria quântica com esse pensamento clássico. A abordagem padrão para o estudo da contextualidade quântica assim como para outras características fundamentais da natureza se dá sobre a análise da estatística dos resultados experimentais, sem a consideração de uma teoria, um modelo pré-determinado. Dessa forma as distribuições de probabilidade obtidas experimentalmente são a nossa única fonte de dados, e com esses dados e considerações adicionais podemos obter conclusões sobre quais características um modelo deve ter ou deve não ter para ser um candidato a explicação do fenômeno em questão. O estudo da contextualidade quântica se dá exatamente por esse caminho.

Provavelmente o exemplo mais simples para entender essa incompatibilidade do pensamento clássico com a teoria quântica é o quadrado de Peres-Mermin [12–14], que consiste de um arranjo de 9 medições dispostas visualmente na forma de um quadrado:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}, \quad (2.1)$$

onde cada medição é dicotômica (teste elementar), ou seja, possui apenas dois valores possíveis, nesse caso $+1$ e -1 . Assume-se também que um trio de medições em uma mesma linha ou coluna forma um “contexto”: um conjunto de medições cujo valores podem ser obtidos em conjunto sem perturbação, ou seja, sem alterar os resultados umas das outras.

Define-se ABC como o produto do resultado das medições de A , B e

C para um mesmo objeto. Assim, se $A = -1$, $B = +1$, $C = -1$ tem-se que $ABC = (-1)(+1)(-1) = 1$. A mesma definição é feita para todas as tríades que formam um contexto.

Tomando o conjunto de contextos $S = \{ABC, abc, \alpha\beta\gamma, Aa\alpha, Bb\beta, Cc\gamma\}$ é possível concluir que apenas um número par de contextos do conjunto pode possuir valor produto $+1$.

Para obter uma desigualdade satisfeita pelo cenário (ou conjunto de contextos) S utiliza-se o seguinte método: supõe-se que o cenário acima seja um vetor V de 6 componentes, sendo cada uma das componentes um contexto. Define-se um novo vetor U de 6 componentes dicotômicas ($+1$ ou -1), porém, sob a regra de que o número de componentes -1 deve ser ímpar. Assim é possível obter que o valor esperado do produto escalar entre os vetores U e V ($\langle U, V \rangle$) deve satisfazer:

$$\langle U, V \rangle \leq 4. \quad (2.2)$$

Escolhendo explicitamente o vetor U como $(+1, +1, +1, +1, +1, -1)$ obtém-se uma desigualdade possível para o cenário em questão:

$$\langle ABC \rangle + \langle abc \rangle + \langle \alpha\beta\gamma \rangle + \langle Aa\alpha \rangle + \langle Bb\beta \rangle - \langle Cc\gamma \rangle \leq 4. \quad (2.3)$$

Cada escolha diferente de U produzirá uma nova desigualdade que deve ser satisfeita pelo cenário S . Essas desigualdades são chamadas desigualdades de Boole [19, 28, 29].

Em um modelo clássico cada uma das nove medições do quadrado de Peres-Mermin possui um valor previamente definido, independente do contexto no qual a medição é realizada. Esse modelo é portanto *não-contextual*. Já na teoria quântica a importância das desigualdades de Boole é explicitada, uma vez que elas podem ser violadas. Veja um exemplo. Suponha um sistema composto de duas partículas de spin-1/2 e escolha os observáveis como:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_z \otimes I & I \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_z \\ I \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes I & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_y \otimes \sigma_y \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ são os operadores de Pauli. Os observáveis dentro de uma mesma linha ou coluna comutam entre si, portanto formam um contexto. É possível concluir que $ABC = I$ e o mesmo acontece para todos os outros produtos do cenário S exceto para $Cc\gamma = -I$. Sendo assim tem-se que $\langle ABC \rangle = \langle \psi | ABC | \psi \rangle = \langle \psi | I | \psi \rangle = +1$ e o mesmo acontece para os outros valores esperados exceto $\langle Cc\gamma \rangle = -1$. Vemos que o resultado de cada termo é independente do estado do sistema quântico $|\psi\rangle$, por tanto a desigualdade (2.3) é independente de estado. Associando os valores esperados dessas medições para um sistema quântico com estado $|\psi\rangle$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \langle ABC \rangle + \langle abc \rangle + \langle \alpha\beta\gamma \rangle + \langle Aa\alpha \rangle + \langle Bb\beta \rangle - \langle Cc\gamma \rangle = \\ (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) - (-1) = 6, \end{aligned} \quad (2.5)$$

logo um modelo quântico prevê a violação da desigualdade de Boole independente de estado (2.3) [19].

Essa desigualdade foi formulada via duas suposições naturais para modelos clássicos: que existem valores definidos para os resultados dos testes que formam o quadrado de Peres-Mermin (2.1) e que tais valores não mudam a depender do contexto sob o qual são obtidos. Logo, a violação da desigualdade nos implica que: *ou* não existem valores pré-definidos para o resultado de medições quânticas *ou* esses resultados devem depender do contexto sobre o qual as medições são realizadas. Essa dependência do contexto é o que chamamos de *contextualidade quântica*. E portanto as desigualdades de Boole podem ser também chamadas de *desigualdades de não-contextualidade*, pois se satisfeitas permitem a suposição de existência de valores pré-definidos e não-contextuais para as quantidades medições.

Convém enfatizar que o resultado acima se entende como uma previsão da teoria quântica de que a desigualdade de Boole em questão é violada por um sistema composto de duas partículas de spin-1/2. A comprovação dessa previsão

deve ser obtida experimentalmente. A violação experimental da desigualdade, concordando com a teoria quântica, indicaria que o sistema em questão se comporta de acordo com a conclusão estabelecida no parágrafo anterior. Porém, a não violação experimental da desigualdade nos indicaria que a teoria quântica atual é falha em prever a violação de tais desigualdades e que o sistema composto de duas partículas de spin-1/2 pode ser descrito através de valores pré-definidos e não-contextuais para suas propriedades sob medição.

De fato, experimentos demonstraram a violação da desigualdade do quadrado de Peres-Mermin em sistemas de dimensão 4, utilizando fótons únicos como plataforma física [30]. Elias Amselem *et al.* encontraram em 2009 um valor de $5,4550 \pm 0,0006$ para a desigualdade, violando a previsão de um modelo com valores definidos não-contextuais mas também não alcançando a previsão da teoria quântica, porém mais próximo da previsão quântica do que da clássica não-contextual. Em outro experimento [31], G. Kirchmair *et al.* utilizando como plataforma física íons de cálcio $^{40}\text{Ca}^+$ confinados em uma armadilha linear de Pauli, encontraram em 2009 valor de $5,220 \pm 0,001$, resultando na mesma interpretação que o experimento anterior. Estes resultados nos levam à inevitável conclusão de que esses sistemas quânticos em questão devem ser descritos por um modelo que é *ou* dotado de valores definidos **contextuais** para as propriedades medições (abrindo mão da não-contextualidade), *ou não* é dotado de valores definidos para as propriedades medições (abrindo mão do realismo).

2.2 Equívocos interpretativos sobre Contextualidade Quântica

O texto dessa seção foi inspirado na referência [1]

Analisando as relações entre os valores das medições e dos contextos é possível que surja uma dúvida sobre por qual motivo a igualdade abaixo não foi considerada:

$$\langle ABCab\alpha\beta\gamma Aa\alpha Bb\beta Cc\gamma \rangle = +1, \quad (2.6)$$

dado que a mesma deve ser válida sob todas as considerações assumidas. O problema

dessa igualdade é que ela supõe a possibilidade de realizar medições conjuntas de todos os observáveis, enquanto na desigualdade (2.3) as medições conjuntas são realizadas apenas em trios.

Um outro equívoco, associado especificamente à realização do quadrado de Peres-Mermin como um sistema de dois qubits é que as medições da última linha e última coluna em (2.4) podem ser realizadas como medições locais de dois qubits separadamente em vez de uma medição global. Por exemplo, a medição $\sigma_z \otimes \sigma_x$ realizada separadamente em cada qubit, possui as seguintes possibilidades de respostas para o par de observáveis: $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$, $(-1, -1)$, já a medição global é dicotômica e possui como resultados possíveis $(+1, -1)$. Porém, fazendo as medições separadas tem-se, por exemplo, seis observáveis de um qubit ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ para cada partícula de spin-1/2) que separadamente não podem formar um contexto.

Um terceiro equívoco é considerar as medições de cada linha e coluna como uma única medição global. Assim considerando que existem apenas 6 medições fundamentais a serem realizadas. Para a realização do quadrado de Peres-Mermin apenas os nove elementos que o formam são entidades fundamentais a serem medições, logo $\langle Cc\gamma \rangle$ por exemplo implica em um produto de três números a serem obtidos experimentalmente, os quais não possuem nenhuma garantia experimental de resultarem no valor -1 para o produto.

2.3 Desigualdades de Não-Contextualidade

No exemplo apresentado anteriormente na forma do quadrado de Peres-Mermin foi obtida uma desigualdade (2.3) independente de estado, cuja validade independe também da dimensão do estado sobre o qual as medições são realizadas. Além disso foi demonstrado que um sistema quântico de 4 dimensões prevê uma violação de tal desigualdade. Cabe observar que a dimensão das medições escolhidas estão acordo com a dimensão do sistema a ser testado.

Uma descrição mais geral da contextualidade quântica se dá através do entendimento do teorema de Kochen-Specker [8] que de forma resumida indica a existência de um conflito lógico entre modelos não-contextuais e a teoria quântica.

Provas e estudos mais aprofundados sobre esse teorema possibilitaram um melhor entendimento do fenômeno da contextualidade bem como a formulação de novas e variadas desigualdades com as mais diversas características, as principais delas serão apresentadas neste texto.

Uma analogia pode ser feita entre as desigualdades de não-contextualidade e as desigualdades de Bell. Assim como a violação das desigualdades de Bell nos obrigam a escolher entre uma descrição *realista* ou *local*, a violação das desigualdades de não-contextualidade nos obrigam a escolher entre uma descrição *realista* ou *não-contextual*. O termo *realismo* é utilizado no sentido de atribuir variáveis ocultas com realidade objetiva e valores definidos a priori aos resultados de testes experimentais de propriedades do sistema. Dessa forma as desigualdades de Bell estão para o teorema de Bell [7] assim como as desigualdades de não-contextualidade estão para o teorema de Kochen-Specker.

As desigualdades de não-contextualidade são tentativas de trazer a discussão fundamental do teorema de Kochen-Specker para a realidade experimental, assim tornando possível a realização de testes do teorema. As primeiras desigualdades propostas surgiram em 2001 e 2002 com os trabalhos de Christoph Simon *et al.* [32] e J.-Å. Larsson [33] respectivamente, porém exigem medições com precisão infinita. Já em 2008 são publicadas propostas de desigualdades mais robustas, surgem as primeiras desigualdades independente de estado para dimensão 4 [19] experimentalmente testáveis e é publicada a primeira desigualdade dependente de estado para dimensão 3 [17] conhecida como Desigualdade KCBS em referência aos autores.

A desigualdade KCBS se destaca por sua simplicidade: supõe-se 5 observáveis de testes elementares em qutrit $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ onde os observáveis $\{A_i A_{(i+1) \bmod 5}\}$ formam um contexto. Dessa forma a desigualdade (2.7) deve ser satisfeita em qualquer modelo de variável oculta não-contextual:

$$\langle A_1 A_2 \rangle + \langle A_2 A_3 \rangle + \langle A_3 A_4 \rangle + \langle A_4 A_5 \rangle + \langle A_5 A_1 \rangle \geq -3, \quad (2.7)$$

a mecânica quântica porém prevê um resultado de $5 - 4\sqrt{5} \approx -3.94$ para o lado esquerdo da desigualdade acima sobre o estado $|0\rangle$. A desigualdade KCBS pode

também ser chamada como a desigualdade prevista pelo cenário KCBS.

Novamente recorreremos ao teste experimental para saber qual previsão mais se aproxima da realidade: Lapkiewicz et al. realizaram em 2011 um experimento [18] com fótons para verificar a violação da desigualdade prevista pelo cenário KCBS, encontrando um valor experimental de $-3,893 \pm 0,006$ para o lado esquerdo da desigualdade (2.7)

O cenário KCBS foi inspirado no cenário CHSH [23], conhecido por sua aplicação nos testes de não-localidade (ou testes de Bell). Apesar desse cenário ter sido proposto originalmente para outra categoria de teste fundamental, o mesmo possui também aplicação nos testes de não-contextualidade. A diferença entre estas aplicações reside apenas em se as medições são realizadas em partes diferentes de um sistema bipartido (teste de não-localidade) ou se são realizadas em um mesmo sistema (teste de não-contextualidade). O cenário CHSH assim como o cenário KCBS possui grande simplicidade: supõe-se 4 observáveis de qutrit $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ onde os observáveis $\{A_i A_{(i+1) \bmod 4}\}$ formam um contexto. A desigualdade de não-contextualidade associada a esse cenário é dada por:

$$\langle A_1 A_2 \rangle + \langle A_2 A_3 \rangle + \langle A_3 A_4 \rangle - \langle A_4 A_1 \rangle \leq 2, \quad (2.8)$$

e a violação máxima prevista pela mecânica quântica é dada por $2\sqrt{2} \approx 2,83$. Experimentos foram realizados para se observar tal violação: no mesmo trabalho que investigaram a desigualdade do quadrado de Peres-Mermin, G. Kirchmair *et al.* [31] encontraram um valor de $2,23 \pm 0,05$ para o lado esquerdo da desigualdade acima utilizando íons armadilhados.

As desigualdades dos cenários CHSH e KCBS se assemelham bastante, ambas possuindo contextos formados por apenas dois observáveis na forma $\{A_i, A_{(i+1) \bmod n}\}$, onde $n = 4$ para CHSH e $n = 5$ para KCBS. Além disso, reescrevendo a desigualdade KCBS na forma

$$-\langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_3 A_4 \rangle - \langle A_4 A_5 \rangle - \langle A_5 A_1 \rangle \leq 3, \quad (2.9)$$

nota-se outra semelhança: ambas possuem um número ímpar de termos negativos, e o limite da desigualdade é dado por $n - 2$. Tais semelhanças motivam a busca

por uma possível generalização de desigualdades dessa forma, generalização que pode ser encontrada em um problema já caracterizado diversas vezes e conhecido como cenário marginal n -ciclo [17, 23, 28, 29, 34, 35].

As desigualdades encontradas por meio dos cenários n -ciclo são as já citadas desigualdades de Boole e o método para n geral [28] é a generalização do método descrito para encontrar a desigualdade (2.3). Sejam A_i os testes elementares do n -ciclo (para o n -ciclo usaremos $A_i = 2|v_i\rangle\langle v_i| - I$, e $i = 0, 1, \dots, n-1$), portanto $\{A_i A_{(i+1) \bmod n}\}_{i=0}^{n-1}$ devem ser os contextos e $\mathcal{OS} = \{\{A_0 A_1\}, \{A_1 A_2\}, \dots, \{A_{n-1} A_0\}\}$ o cenário marginal para o n -ciclo. Utilizando de um abuso de linguagem chamaremos $S = \{A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_0\}$ como cenário para o n -ciclo, assim como feito anteriormente. Sabendo que os testes A_i podem assumir apenas os valores $+1$ e -1 é possível concluir que apenas um número par de elementos do cenário S possui valor negativo, para qualquer distribuição de valores $+1$ e -1 entre os testes A_i e para qualquer valor de n . Dessa forma definimos um vetor $V(S) = [A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_0]$ de n elementos e um vetor $U = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$ de n elementos, onde $\alpha_j = \pm 1$ e apenas um número ímpar de elementos α_j possui valor -1 . Dessa forma o valor esperado do produto desses vetores deve respeitar a seguinte condição:

$$\langle U, V(S) \rangle = \alpha_0 \langle A_0 A_1 \rangle + \alpha_1 \langle A_1 A_2 \rangle + \dots + \alpha_{n-1} \langle A_{n-1} A_0 \rangle \leq n - 2. \quad (2.10)$$

Cada escolha de valores para α_j seguindo as condições impostas gera uma desigualdade de Boole diferente para o cenário do n -ciclo. Em particular, para $n = 4$ e escolhendo $U = [+1, +1, +1, -1]$ obtemos a desigualdade do cenário CHSH, para $n = 5$ e escolhendo $U = [-1, -1, -1, -1, -1]$ obtemos a desigualdade do cenário KCBS. Para $n = 3$, o n -ciclo não é capaz de evidenciar a contextualidade de acordo com o teorema de Vorob'ev [34]. Dessa forma os cenários de n -ciclo de interesse para testes de não-contextualidade são aqueles onde $n \geq 4$.

Considerando os cenários do n -ciclo, a escolha dos observáveis quânticos para se observar a violação da desigualdade possui um método [28] simples e geral que será resumido a seguir. Com n definido, a escolha do vetor U não resulta em perda de generalidade, dessa forma visualizar a violação de uma desigualdade implica na violação das outras.

Para o n-ciclo de n ímpar (e $n \geq 4$) escolhe-se U possuindo todos os elementos negativos, e a dimensão mínima necessária sobre a qual a mecânica quântica prevê violação é 3 e o estado sobre o qual as medições serão realizadas é $|0\rangle$. Os observáveis [35] são da forma $A_k = 2|v_k\rangle\langle v_k| - I$ e os estados $|v_k\rangle$ são dados por:

$$|v_i\rangle = \cos \theta |0\rangle + \sin \theta \cos \phi_k |1\rangle + \sin \theta \sin \phi_k |2\rangle, \quad (2.11)$$

onde

$$\phi_k = \frac{n-1}{n}\pi k, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.12)$$

A desigualdade de Boole se apresenta como:

$$-\langle A_0 A_1 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle - \dots - \langle A_{n-1} A_0 \rangle \leq n - 2. \quad (2.13)$$

A previsão da mecânica quântica para a desigualdade acima utilizando os estados e observáveis definidos anteriormente é de:

$$n \left(4 \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \leq n - 2, \quad (2.14)$$

onde a igualdade é satisfeita para $n = 3$ e a desigualdade é violada para todo $n > 3$.

Já para o n-ciclo de n par (e $n \geq 4$) um estado de dimensão 4 é o suficiente para que a mecânica quântica preveja uma violação [28, 36]. Escolhe-se U possuindo todos os elementos negativos exceto o último que será positivo. Escolhe-se um espaço bipartido de dois qubits com observáveis [37] definidos como $A_k = X_k \otimes I$ para k par e $A_k = I \otimes X_k$ para k ímpar, onde X_k é dado por:

$$X_k = \cos \frac{k\pi}{n} \sigma_x + \sin \frac{k\pi}{n} \sigma_z, \quad (2.15)$$

e o estado:

$$|\Phi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.16)$$

A desigualdade de Boole se apresenta dessa vez como:

$$-\langle A_0 A_1 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle - \dots + \langle A_{n-1} A_0 \rangle \leq n - 2. \quad (2.17)$$

e a previsão da mecânica quântica para essa desigualdade utilizando os estados e observáveis definidos para n par é:

$$n \cos \frac{\pi}{n} \leq n - 2, \quad (2.18)$$

onde a igualdade é satisfeita agora para $n = 2$ e desigualdade é violada para todo $n > 2$ [38, 39]. Dessa forma garantimos a previsão da violação para todos os n -ciclos de interesse ($n \geq 4$).

Além dos cenários de n -ciclo e suas respectivas desigualdades de Boole é possível também obter outros tipos de desigualdades de não-contextualidade. A desigualdade (2.3), apesar de ser uma desigualdade de Boole, não configura um cenário de n -ciclo pois os contextos não são da forma exigida, assim sendo um outro tipo de desigualdade. Além disso, as desigualdades de Boole para n -ciclo não são a princípio independentes de estado, enquanto a desigualdade de Boole para o quadrado de Peres-Mermin é independente de estado.

As desigualdades independentes de estado estão intimamente ligadas com as provas para o teorema de Kochen-Specker [20]. Um exemplo de desigualdade desse tipo pode ser obtida através da prova de 13 projetores em 3 dimensões apresentada por Yu e Oh [40] onde os observáveis de teste elementar são dados por $A_i = I - 2|v_i\rangle\langle v_i|$ e os estados $|v_i\rangle$ se relacionam aos vetores $v_i = (a_0, a_1, a_2)$ na forma $|v_i\rangle = (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + a_2|2\rangle)/|v_i|$, e os vetores v_i são dados por:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0), & v_{4,5} &= (0, 1, \pm 1), & v_{10} &= (+1, +1, +1), \\ v_2 &= (0, 1, 0), & v_{6,7} &= (\pm 1, 0, 1), & v_{11} &= (-1, +1, +1), \\ v_3 &= (0, 0, 1), & v_{8,9} &= (1, \pm 1, 0), & v_{12} &= (+1, -1, +1), \\ & & & & v_{13} &= (+1, +1, -1), \end{aligned} \quad (2.19)$$

e a desigualdade se apresenta como:

$$\sum_{i=1}^{13} \langle A_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\{\text{arestas}\}} \langle A_i A_j \rangle \leq 8, \quad (2.20)$$

onde a segunda soma é realizada sobre as arestas do grafo de ortogonalidade apresentado por Yu e Oh Fig. 1.

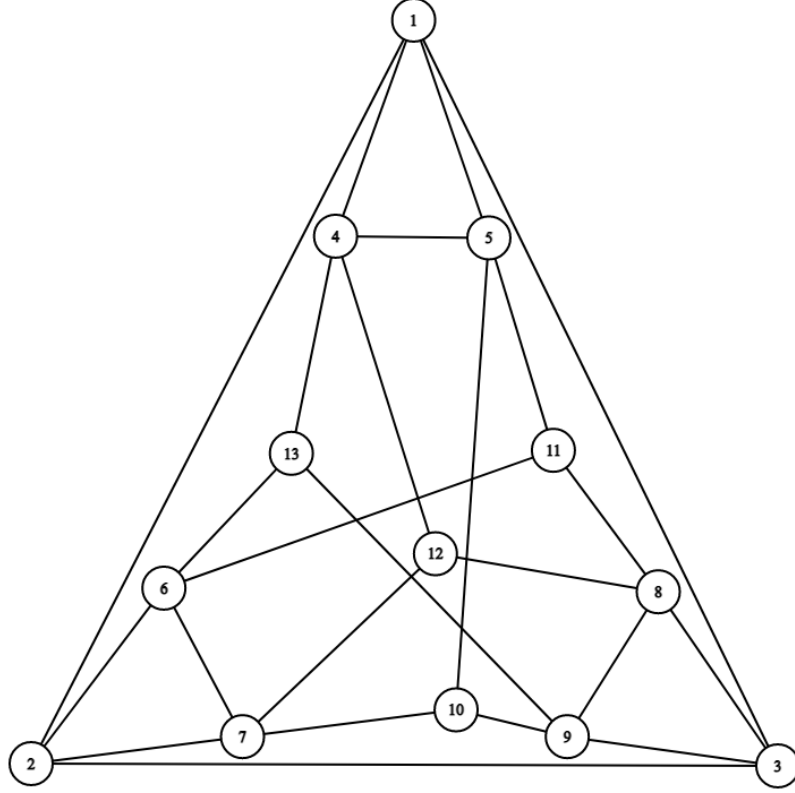


Figura 1 – Grafo de Ortogonalidade para os vetores apresentados por Yu e Oh [40]. Os números i nos vértices se referem ao vetor v_i . Reprodução realizada através da plataforma online *Graph Editor* da *CS Academy* [41].

A desigualdade (2.20) não é uma desigualdade de Boole, porém existe uma desigualdade de Boole associada aos projetores de Yu e Oh [42] dada por:

$$\sum_{i=1}^9 \langle A_i \rangle + 2 \sum_{i=10}^{13} \langle A_i \rangle - 3 \sum_{i=1}^3 \langle A_i A_{2+2i} A_{3+2i} \rangle - \sum_{\substack{\{\text{arestas}\} \\ i \leq 9 \\ j < 4, j \geq 10}} \langle A_i A_j \rangle \leq 25. \quad (2.21)$$

A mecânica quântica prevê um valor de $25/3 \approx 8,33$ em qualquer estado de qutrit para o lado esquerdo da desigualdade (2.20) e um valor $25 + 8/3 \approx 27,67$ em qualquer estado de qutrit para o lado esquerdo da desigualdade (2.21). Uma violação de aproximadamente 4,17% para o primeiro caso e de aproximadamente 10,67% para o segundo caso, portanto apresentando uma melhoria quanto a margem experimental para se observar a violação da desigualdade. Porém, a segunda desigualdade requer a realização de medições conjuntas triplas, dificultando assim sua implementação experimental em relação à primeira desigualdade.

A capacidade de se aperfeiçoar a desigualdade (2.20) para realizações experimentais mantendo a sua independência de estado motiva a busca por uma desigualdade com características intermediárias entre as duas anteriores: que aumente a violação prevista pela mecânica quântica em relação a desigualdade (2.20) e ao mesmo tempo não possua as medições conjuntas triplas que a desigualdade (2.21) possui.

Uma desigualdade com as características desejadas acima foi proposta por Cabello *et al* em 2012 [43], e se apresenta como:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=10}^{13} \langle A_i \rangle - \sum_{i=10}^{13} \sum_{j=4}^9 \Gamma_{ij} \langle A_i A_j \rangle \right) + \sum_{k=1}^9 \langle A_k \rangle - \sum_{m=1}^8 \sum_{n>m}^9 \Gamma_{mn} \langle A_m A_n \rangle \leq 9, \quad (2.22)$$

onde $\Gamma_{ij} = 1$ se $\langle v_i | v_j \rangle = 0$, e $\Gamma_{ij} = 0$ em todos os outros casos.

A previsão da mecânica quântica para o lado esquerdo da desigualdade acima é de $9 + 2/3 \approx 9,67$, portanto uma violação de $\approx 7,41\%$, consideravelmente melhor que a violação prevista para a desigualdade (2.20) e sem os termos de medições conjuntas triplas da desigualdade (2.21), como desejado.

Outra melhoria alcançada na desigualdade (2.22) em relação à desigualdade (2.20) está na robustez da violação prevista. Essa robustez pode ser calculada assumindo que todos os termos da desigualdade são igualmente sensíveis a erros e então calcular a razão entre a violação prevista e o número de termos da desigualdade multiplicados pelos seus respectivos pesos, assim encontrando um valor de $\approx 0,023$ para a desigualdade (2.22) e $\approx 0,013$ para (2.20), demonstrando uma melhoria também na robustez [43].

Neste trabalho nos interessamos particularmente pelo n -ciclo com $n = 5$ por ser o n -ciclo de menor n ímpar, assim se destacando pelo número reduzido de observáveis a serem experimentalmente implementados e a possibilidade de se utilizar estados de qutrit; e também pela desigualdade (2.22) por sua independência de estado e otimização experimental.

3 Medições Sequenciais

3.1 Testes Elementares

Na mecânica quântica as medições A_i são observáveis de testes elementares que consistem em experimentos com resultados binários. Um exemplo simples pode ser encontrado no experimento de Stern-Gerlach [44], onde um estado geral de spin-1/2 entra no aparato que discrimina os estados *up* e *down* através de um processo de emaranhamento de estado de spin com estado de caminho e então é realizada uma medição de posição [25–27]. Assim, as partículas detectadas em um caminho possuem um auto-estado de spin e as partículas detectadas no outro caminho disponível estão em um outro auto-estado de spin ortogonal ao primeiro. Por possuir apenas dois resultados possíveis o experimento de Stern-Gerlach é um exemplo de teste elementar. Seja S o observável de spin desse teste elementar: associando o valor 1 ao spin *up* e o valor -1 ao spin *down*, temos que o valor de $\langle S \rangle$ é dado por:

$$\langle S \rangle = \frac{N_{up} - N_{down}}{N}, \quad (3.1)$$

onde N_{up} é o número de partículas detectadas com spin *up* e N_{down} é o número de partículas detectadas com spin *down*, e $N = N_{up} + N_{down}$ é o número total de detecções.

Generalizaremos a ideia de teste elementar para um observável A_i em d dimensões. Devemos encontrar primeiramente o espectro de A_i resolvendo a equação:

$$A_i |v_{i(j)}\rangle = \lambda_{i(j)} |v_{i(j)}\rangle, \quad (3.2)$$

onde o índice j denota o espectro de A_i . Dessa forma caso existam apenas dois valores diferentes de λ_i que satisfazem a equação temos $j = \{0, 1\}$ e dizemos que a

discriminação dos auto-estados de A_i é um teste elementar. Assim, o valor esperado de A_i é dado por:

$$\langle A_i \rangle = p(0)\lambda_{i(0)} + p(1)\lambda_{i(1)}, \quad (3.3)$$

onde $p(j)$ é a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|v_{i(j)}\rangle$, sendo $j = 0$ um estado de spin *up* com $\lambda_{i(0)} = 1$ e $j = 1$ um estado de spin *down* com $\lambda_{i(1)} = -1$, recupera-se a expressão (3.1) para $\langle S \rangle$.

Aqui consideraremos que para o caso de dimensão *geq3* apenas um dos resultados do teste elementar é não degenerado. Pode-se, então, derivar uma expressão geral para um observável que represente este teste elementar, para isso escreve-se o observável A_i como:

$$A_i = \alpha_i P_i + \beta_i Q_i, \quad (3.4)$$

onde α_i e β_i são coeficientes reais, sendo α_i o resultado não degenerado, assim denotamos $P_i = |v_{i(0)}\rangle\langle v_{i(0)}|$, com $Q_i P_i = 0$, ou seja, P_i é um projetor na direção $|v_{i(0)}\rangle$ e Q_i é um projetor nas direções ortogonais a $|v_{i(0)}\rangle$. Denotaremos então $|v_i\rangle = |v_{i(0)}\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle = |v_{i(1)}\rangle$. Com isso $|\bar{v}_i\rangle$ é uma superposição qualquer dos autovetores associados ao autovalor degenerado β_i . Dessa forma, aplicando A_i em v_i tem-se que:

$$A_i |v_{i(0)}\rangle = (\alpha_i P_i + \beta_i Q_i) |v_i\rangle = \alpha |v_i\rangle, \quad (3.5)$$

e aplicando A_i ao estado ortogonal a $|v_i\rangle$ que é simplesmente $|\bar{v}_i\rangle$:

$$A_i |\bar{v}_i\rangle = (\alpha_i P_i + \beta_i Q_i) |\bar{v}_i\rangle = \beta |\bar{v}_i\rangle, \quad (3.6)$$

ou seja, o observável A_i representa um teste elementar, com α e β os autovalores referentes aos auto-vetores $|v_i\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle$ respectivamente. Além disso, lembrando que $P_i + Q_i = I$ pode-se escrever A_i apenas em função de $|v_i\rangle$:

$$\begin{aligned}
A_i &= \alpha_i P_i + \beta_i Q_i \\
&= \alpha_i P_i + \beta(I - P_i) \\
&= \beta I + (\alpha - \beta) P_i \\
&= \beta I + (\alpha - \beta) |v_i\rangle \langle v_i| .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Exigindo que os autovalores sejam $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ temos que a equação acima se torna:

$$A_i = I - 2 |v_i\rangle \langle v_i| , \tag{3.8}$$

recuperando a forma geral do observável de teste elementar. Para obter os observáveis do n-ciclo basta realizar a seguinte transformação $A_i \rightarrow -A_i$.

3.2 Medições Simples

Para realizar uma medição simples de um teste elementar deve-se ser capaz de distinguir os auto-estados do observável A_i . Na mecânica quântica essa distinção pode ser através de uma medição direta dos auto-estados, porém muitas vezes essa medição direta pode ser bastante difícil. Uma alternativa pode ser realizada através de uma operação unitária U_i , que correlaciona via emaranhamento os auto-estados do observável com outros estados que podem ser mais facilmente medidos. O aparato de Stern-Gerlach [44] é novamente um bom exemplo: o primeiro passo é realizar uma operação que emaranha os estados de spin com estados de caminho, e são medições sobre os estados de caminho que são realizadas no final do experimento. Esse grau de liberdade adicional utilizado para facilitar o processo de medição é conhecido como *estado auxiliar*. Para testes elementares esse *estado auxiliar* será sempre um estado de qubit e então chamaremos de *qubit auxiliar* [25–27].

Assim, sendo A_i um observável na forma $A_i = I - 2 |v_i\rangle \langle v_i|$ gostaríamos de obter uma unitária U_i em um espaço expandido que discrimine os estados $|v_i\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle$, onde $\langle \bar{v}_i | v_i \rangle = 0$, de forma a permitir uma medição isolada. Para isso usamos um grau de liberdade extra como *qubit auxiliar*. Assim o estado inicial é escrito como:

$$|\psi_0\rangle = |1\rangle \otimes |\phi_0\rangle, \quad (3.9)$$

onde $|\phi_0\rangle$ é o estado sobre o qual se deseja realizar a medição, e $|1\rangle$ é um estado de *qubit auxiliar*. Dessa forma a unitária deve realizar a seguinte operação (em blocos de subespaços) sobre $|\psi_0\rangle$:

$$U_i |\psi_0\rangle = U_i \begin{bmatrix} 0 \\ |\phi_0\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i |v_i\rangle \\ \beta_i |\bar{v}_i\rangle \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde $\alpha_i = \langle v_i | \phi_0 \rangle$ e $\beta_i = \langle \bar{v}_i | \phi_0 \rangle$. Dessa forma ao se encontrar o sistema no estado auxiliar $|0\rangle$ obtém-se a projeção de $|\phi_0\rangle$ em $|v_i\rangle$ e ao se encontrar o sistema no estado auxiliar $|1\rangle$ obtém-se a projeção de $|\phi_0\rangle$ em $|\bar{v}_i\rangle$. A unitária que realiza esse processo possui a seguinte forma em blocos:

$$U_i = U(A_i) = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i & P_i \\ \tilde{P}_i & Q_i \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde $\tilde{Q}_i \tilde{Q}_i^\dagger = Q_i$, $\tilde{P}_i \tilde{P}_i^\dagger = P_i$, e P_i é um projetor em $|v_i\rangle$ e Q_i é um projetor no subespaço ortogonal a $|v_i\rangle$. Sendo então um estado arbitrário $|\phi_0\rangle$ em um grau de liberdade qualquer, e o *qubit auxiliar* sendo as saídas de um aparato que implementa U_i , a medição simples do teste A_i pode então ser esquematizada como na Fig. 2.

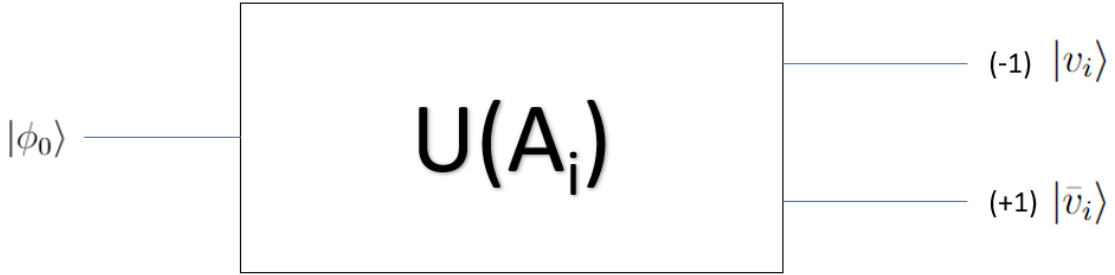


Figura 2 – Representação esquemática da atuação de $U_i = U(A_i)$ em um estado inicial qualquer $|\phi_0\rangle$ para realização de uma medição simples.

Dessa forma, o sistema medido na saída de cima, em $|0\rangle \otimes |v_i\rangle$, possui autovalor -1 para o teste A_i e o sistema medido na saída de baixo, em $|1\rangle \otimes |\bar{v}_i\rangle$,

possui autovalor $+1$ para o teste A_i , e o valor de $\langle A_i \rangle$ é obtido através da média ponderada dos resultados das medições como em (3.3).

3.3 Medições Sequenciais

Nas desigualdades (2.13) e (2.22), sobre as quais deseja-se observar sua violação, além de termos referentes à medições simples de testes elementares $\langle A_i \rangle$ existem também termos a serem determinados que dependem de dois testes elementares realizados em conjunto $\langle A_i A_j \rangle$. Outra forma de realizar essa medição é através da implementação dos dois testes A_i e A_j realizados em sequência, e em seguida realizar uma medição, assim configurando uma medição sequencial. Por se tratarem de medições compatíveis a ordem da realização dos testes A_i e A_j não importa, assim podendo ser escolhida a ordem mais eficiente experimentalmente.

Para realizar esses testes elementares em sequencia deve-se então realizar medições sequenciais, que no diagrama da Fig. 2 consiste em conectar uma das saídas do experimento de medição simples em um novo experimento de medição simples como exemplificado na Fig. 3.

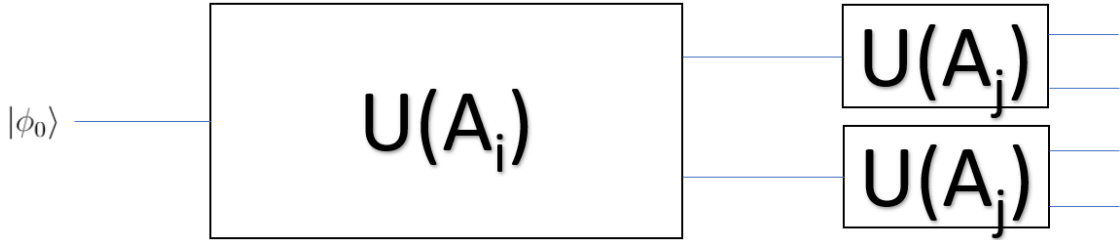


Figura 3 – Representação esquemática da atuação sequencial de $U_i = U(A_i)$ e $U_j = U(A_j)$ em um estado inicial qualquer $|\phi_0\rangle$ para realização de uma medição sequencial.

O sistema encontrado na primeira saída (contando de cima para baixo) é portanto um sistema que possui autovalor -1 referente a A_i e valor -1 referente a A_j , assim possuindo autovalor 1 referente a $A_i A_j$. Seguindo essa lógica é possível concluir que os sistemas medidos na primeira e última saída possuem autovalor 1 para o teste $A_i A_j$ e os sistemas medidos nas duas saídas do meio possuem autovalor

–1. Após uma grande quantidade de medições para se obter uma estatística é possível calcular o valor de $\langle A_i A_j \rangle$ através da média ponderada.

3.4 Compatibilidade

É importante notar que apesar da medição sequencial ser teoricamente possível para qualquer par de observáveis, nem todo par de observáveis A_i e A_j configura uma medição sequencial utilitária para testes de contextualidade. A condição sobre os observáveis das desigualdades de não-contextualidade é que todos sejam teste elementares e todas as medições sequenciais sejam feitas entre observáveis **compatíveis** entre si.

A definição mais usual de compatibilidade segue como:

Se um sistema físico é preparado de forma que o resultado do teste A é predizível e repetível, e se um teste compatível B é realizado (ao invés do teste A), uma execução subsequente do teste A deve resultar no mesmo valor que resultaria se o teste B não tivesse sido realizado [45]

Na teoria quântica, a compatibilidade entre observáveis ocorre quando seus operadores A e B comutam [45]. Porém, como o teste de não-contextualidade envolve testar a própria mecânica quântica não podemos partir da mesma para garantir que os teste A_i e A_j sejam compatíveis.

Portanto, devemos testar a compatibilidade entre testes elementares de uma forma que não dependa de um modelo específico, para isso utilizaremos a proposta descrita em [46] adaptada para as desigualdades de interesse (2.13) e (2.22).

Trataremos da definição de compatibilidade apenas entre dois observáveis quaisquer A e B : define-se $A^{[i]}$ a realização do teste A na posição i de uma sequência de medições. Assim $A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]}$ denota o processo de realizar a medição A primeiro, B em seguida e A novamente por último. O valor $v(B^{[2]}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]})$ é o resultado da medição de $B^{[2]}$ dentro da sequência acima, e as probabilidades são denotadas como: $p(B^{[2]+}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]})$ e $p(B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]})$ onde o primeiro é a probabilidade do teste $B^{[2]}$ na sequência $A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]}$ resultar no valor $+1$ enquanto

o segundo é a probabilidade do teste $B^{[2]}$ na sequência $A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]}$ resultar no valor -1 . Assim o valor esperado de B na sequência acima é simplesmente dado por: $\langle B^{[2]}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]} \rangle = p(B^{[2]+}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]}) - p(B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]}A^{[3]})$.

Obteremos a seguir uma definição operacional para compatibilidade de dois observáveis A e B implementados como medição sequencial. Sendo assim, define-se S_{AB} como o conjunto infinito de todas as sequências possíveis que utilizam apenas os observáveis A e B , ou seja, $S_{AB} = \{A^{[1]}, B^{[1]}, A^{[1]}A^{[2]}, A^{[1]}B^{[2]}, B^{[1]}A^{[2]}, \dots\}$. Com isso formulam-se duas condições para definir a compatibilidade:

Definição 1. Dois observáveis A e B são compatíveis se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para qualquer estado e para qualquer sequência $S \in S_{AB}$, os resultados das medições de A e B permanecem os mesmos:

$$v(A^{[k]}|S) = v(A^{[l]}|S), \quad (3.12)$$

$$v(B^{[m]}|S) = v(B^{[n]}|S), \quad (3.13)$$

onde k, l, m, n são todos os possíveis índices para quais os observáveis em questão são medidos nas posições k, l, m, n na sequência S .

(ii) Para qualquer preparação de estado, os valores médios de A e B durante a medição de quaisquer duas sequências $S_1, S_2 \in S_{AB}$ são iguais:

$$\langle A^{[k]}|S_1 \rangle = \langle A^{[l]}|S_2 \rangle, \quad (3.14)$$

$$\langle B^{[m]}|S_1 \rangle = \langle B^{[n]}|S_2 \rangle. \quad (3.15)$$

As condições (i) e (ii) são necessárias para afirmar a compatibilidade de observáveis, ou seja, dois observáveis que violam qualquer um das duas condições não podem ser chamados de compatíveis.

Utilizando das definições acima e de considerações adicionais é possível modelar uma correção para algumas desigualdades de não-contextualidade que leve em conta possíveis imperfeições na compatibilidade entre os observáveis.

Inicialmente, considere um modelo de variável oculta λ com uma distribuição de probabilidade $p(\lambda)$ e seja $p[(A^{[1]+}|A^{[1]})e(B^{[1]+}|B^{[1]})]$ a probabilidade de encontrar +1 se A é medido primeiro e +1 se B é medido primeiro. Essa probabilidade, apesar de bem definida em todos os modelos de variável oculta considerados, é impossível de ser obtida experimentalmente, pois é necessária fazer uma escolha entre medir A ou B primeiro. E após a medição escolhida ser realizada seria necessária ter a capacidade de voltar no tempo para alterar a escolha e medir o outro observável.

É possível concluir que a probabilidade em questão respeita a seguinte desigualdade [46]:

$$p[(A^{[1]+}|A^{[1]})e(B^{[1]+}|B^{[1]})] \leq p[A^{[1]+}, B^{[2]+}|A^{[1]}B^{[2]}] + p[(B^{[1]+}|B^{[1]})e(B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]})], \quad (3.16)$$

o termo $p[A^{[1]+}, B^{[2]+}|A^{[1]}B^{[2]}]$ é experimentalmente acessível, enquanto $p[(B^{[1]+}|B^{[1]})e(B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]})]$ permanece inacessível.

Reescrevendo o valor esperado em termo de probabilidades inacessíveis:

$$\langle AB \rangle = 1 - 2p[(A^{[1]+}|A^{[1]})e(B^{[1]-}|B^{[1]})] - 2p[(A^{[1]-}|A^{[1]})e(B^{[1]+}|B^{[1]})], \quad (3.17)$$

e então usando a desigualdade (3.16) é possível obter:

$$\langle A^{[1]}B^{[2]} \rangle - 2p^{flip}[AB] \leq \langle AB \rangle \leq \langle A^{[1]}B^{[2]} \rangle + 2p^{flip}[AB], \quad (3.18)$$

onde $p^{flip}[AB] = p[(B^{[1]+}|B^{[1]})e(B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]})] + p[(B^{[1]-}|B^{[1]})e(B^{[2]+}|A^{[1]}B^{[2]})]$. Essa probabilidade $p^{flip}[AB]$ pode ser interpretada como a probabilidade da medição de A alterar o valor predeterminado da medição de B .

A estratégia consiste em incluir as considerações acima em uma desigualdade que contenha no máximo medições sequenciais de dois observáveis. Com isso

aparecem termos extras de $p^{flip}[AB]$ na desigualdade, porém esses termos são experimentalmente inacessíveis e então é necessária uma consideração adicional para resolver esse problema.

É possível então estimar experimentalmente o valor de $p^{flip}[AB]$ partindo de suposições adicionais sobre o modelo. Para isso assume-se que:

$$\begin{aligned} p[(B^{[1]+}|B^{[1]}) \text{ e } (B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]})] &\leq p[(B^{[1]+}|B^{[1]}) \text{ e } (B^{[1]+}, B^{[3]-}|B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]})] \\ &= p[B^{[1]+}, B^{[3]-}|B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

essa suposição é motivada pelo procedimento experimental: assume-se a existência de um estado físico para o qual $v(B^{[1]}|B^{[1]}) = +1$ sempre, porém encontraria-se $v(B^{[2]}|A^{[1]}B^{[2]}) = -1$ para o mesmo. Fisicamente, explicaríamos esse comportamento como uma perturbação do sistema devido ao procedimento experimental para realizar a medição de $A^{[1]}$. O lado esquerdo da equação (3.19) pode então ser visto como a quantidade de perturbação que a medição de A causa no resultado de B . Já o lado direito quantifica a perturbação no resultado de B quando a sequência $B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}$ é implementada. Em experimentos reais é esperado que essa segunda perturbação seja maior que a primeira por causa das imperfeições experimentais dos procedimentos adicionais envolvidos. Ou seja, mais passos experimentais nos desviam do resultado ideal esperado para dois observáveis a princípio compatíveis.

Logo, por um raciocínio similar, a suposição representada na desigualdade acima pode ser relaxada para:

$$p[(B^{[1]+}|B^{[1]}) \text{ e } (B^{[2]-}|A^{[1]}B^{[2]})] \leq p[B^{[1]+}, B^{[k]-}|B^{[1]}SA^{[k-1]}B^{[k]}], \quad (3.20)$$

onde S é novamente uma dada sequência finita pertencente a S_{AB} . Dessa forma, se as medições forem aproximadamente compatíveis, esse tipo de modelo de variável oculta pode ser testado experimentalmente via uma desigualdade modificada. A desigualdade original (2.22) ao ser expandida é dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\langle A_{10} \rangle + \langle A_{11} \rangle + \langle A_{12} \rangle + \langle A_{13} \rangle \\
& - \langle A_{11}A_5 \rangle - \langle A_{11}A_6 \rangle - \langle A_{11}A_8 \rangle \\
& - \langle A_{12}A_4 \rangle - \langle A_{12}A_7 \rangle - \langle A_{12}A_8 \rangle \\
& - \langle A_{13}A_4 \rangle - \langle A_{13}A_6 \rangle - \langle A_{13}A_9 \rangle \\
& - \langle A_{10}A_5 \rangle - \langle A_{10}A_7 \rangle - \langle A_{10}A_9 \rangle) \\
& + \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle A_3 \rangle \\
& + \langle A_4 \rangle + \langle A_5 \rangle + \langle A_6 \rangle + \langle A_7 \rangle + \langle A_8 \rangle + \langle A_9 \rangle \\
& - \langle A_4A_5 \rangle - \langle A_4A_1 \rangle - \langle A_5A_1 \rangle \\
& - \langle A_6A_7 \rangle - \langle A_6A_2 \rangle - \langle A_7A_2 \rangle \\
& - \langle A_8A_9 \rangle - \langle A_8A_3 \rangle - \langle A_9A_3 \rangle \\
& - \langle A_1A_2 \rangle - \langle A_1A_3 \rangle - \langle A_2A_3 \rangle \\
& \leq 9.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Partindo da desigualdade anterior e utilizando as condições (3.18) e (3.19) sobre os valores esperados de medições sequenciais de dois observáveis é possível encontrar uma nova forma para desigualdade de não-contextualidade original, que se apresenta como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\langle A_{10} \rangle + \langle A_{11} \rangle + \langle A_{12} \rangle + \langle A_{13} \rangle \\
& - \langle A_{11}A_5 \rangle - \langle A_{11}A_6 \rangle - \langle A_{11}A_8 \rangle \\
& - \langle A_{12}A_4 \rangle - \langle A_{12}A_7 \rangle - \langle A_{12}A_8 \rangle \\
& - \langle A_{13}A_4 \rangle - \langle A_{13}A_6 \rangle - \langle A_{13}A_9 \rangle \\
& - \langle A_{10}A_5 \rangle - \langle A_{10}A_7 \rangle - \langle A_{10}A_9 \rangle) \\
& + \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle A_3 \rangle \\
& + \langle A_4 \rangle + \langle A_5 \rangle + \langle A_6 \rangle + \langle A_7 \rangle + \langle A_8 \rangle + \langle A_9 \rangle \\
& - \langle A_4A_5 \rangle - \langle A_4A_1 \rangle - \langle A_5A_1 \rangle \\
& - \langle A_6A_7 \rangle - \langle A_6A_2 \rangle - \langle A_7A_2 \rangle \\
& - \langle A_8A_9 \rangle - \langle A_8A_3 \rangle - \langle A_9A_3 \rangle \\
& - \langle A_1A_2 \rangle - \langle A_1A_3 \rangle - \langle A_2A_3 \rangle) \tag{3.22} \\
& \leq 9 + p^{err}[A_{11}A_5A_{11}] + p^{err}[A_{11}A_6A_{11}] + p^{err}[A_{11}A_8A_{11}] \\
& + p^{err}[A_{12}A_4A_{12}] + p^{err}[A_{12}A_7A_{12}] + p^{err}[A_{12}A_8A_{12}] \\
& + p^{err}[A_{13}A_4A_{13}] + p^{err}[A_{13}A_6A_{13}] + p^{err}[A_{13}A_9A_{13}] \\
& + p^{err}[A_{10}A_5A_{10}] + p^{err}[A_{10}A_7A_{10}] + p^{err}[A_{10}A_9A_{10}] \\
& + 2(p^{err}[A_4A_5A_4] + p^{err}[A_4A_1A_4] + p^{err}[A_5A_1A_5] \\
& + p^{err}[A_6A_7A_6] + p^{err}[A_6A_2A_6] + p^{err}[A_7A_2A_7] \\
& + p^{err}[A_8A_9A_8] + p^{err}[A_8A_3A_8] + p^{err}[A_9A_3A_9] \\
& + p^{err}[A_1A_2A_1] + p^{err}[A_1A_3A_1] + p^{err}[A_2A_3A_2])
\end{aligned}$$

onde a ordem das medições sequenciais foi absorvida novamente na notação, de forma que $BAB = B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}$ e $p^{err}[ABA] = p^{err}[B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}] = p[B^{[1]+}, B^{[3]-}|B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}] + p[B^{[1]-}, B^{[3]+}|B^{[1]}A^{[2]}B^{[3]}]$, ou seja, todos os termos são experimentalmente acessíveis.

Dessa forma a desigualdade acima é experimentalmente testável e inclui imperfeições na condição de compatibilidade entre os observáveis, desde que essa imperfeição esteja contida na suposição (3.19).

Aplicando as mesmas suposições e resultados na desigualdade (2.13) com $n = 5$ obtém-se a seguinte desigualdade modificada:

$$\begin{aligned}
& - \langle A_0 A_1 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_3 A_4 \rangle - \langle A_4 A_0 \rangle \\
& \leq 3 + p^{err} [A_0 A_1 A_0] + p^{err} [A_1 A_2 A_1] \\
& \quad + p^{err} [A_2 A_3 A_2] + p^{err} [A_3 A_4 A_3] + p^{err} [A_4 A_0 A_4] . \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Com isso, o objetivo se torna testar experimentalmente as desigualdades (3.22) e (3.23).

4 Circuitos Fotônicos

4.1 Introdução & Fabricação

Com o objetivo definido, o próximo passo é a escolha da plataforma física na qual os testes de não-contextualidade serão implementados. Os circuitos fotônicos surgem então como uma boa opção pois se destacam por sua estabilidade, miniaturização e escalabilidade, características importantes para os experimentos a serem realizados.

A estabilidade provém da interação quase nula dos fótons entre si e com o ambiente (quando estes se propagam em circuitos desenhados em materiais sólidos), assim reduzindo o ruído presente no experimento. Isto é importante pois desejamos medir violações com margens teóricas reduzidas que poderiam ser mascaradas pela presença de um alto valor de ruído. A miniaturização se refere à possibilidade de fabricação de interferômetros de dimensões bastante reduzidas e a escalabilidade diz respeito à capacidade de aumentar o número de elementos ópticos do circuito sem uma perda significativa na qualidade do experimento. Dada a grande quantidade de observáveis e medições que um teste de não-contextualidade pode exigir, essa miniaturização e escalabilidade se apresentam como recursos extremamente relevantes.

Os circuitos fotônicos podem ser fabricados através de diversas técnicas desenvolvidas nos últimos anos, destacando-se como as mais utilizadas a litografia em silício e a escrita direta por laser de femtossegundo. A litografia em silício [47] apresenta como vantagem imediata o acesso a fenômenos não-lineares devida a alta não-linearidade do próprio silício [48–50]. Porém, a técnica de litografia é custosa, demorada e muitas vezes limitada a duas dimensões.

A técnica de escrita direta por laser de femtossegundo (ou *FLDW: Femtossecond Laser Direct-Write*) [51] é um método de fabricação alternativo que evita alguns dos problemas citados na técnica anterior. O processo de fabricação (Fig. 4 e Fig. 5) consiste em incidir pulsos de lasers ultra rápidos focalizados em

um substrato transparente de vidro, assim provocando uma mudança no índice de refração desse substrato através de um processo de absorção não-linear de muitos fótons provocada pelo intenso campo elétrico na região na qual o feixe do laser está focalizado. Dessa forma, as regiões fora do foco não sofrem alteração. O processo segue com o deslocamento do substrato em relação ao laser, fazendo com que o laser escreva um caminho de índice de refração alterado dentro do substrato; caso o índice de refração desse caminho escrito seja maior que o do substrato ocorre a formação de uma guia de onda. Portanto, a técnica pode em princípio ser usada em qualquer dielétrico transparente, como vidros, cerâmicas e materiais cristalinos [52].

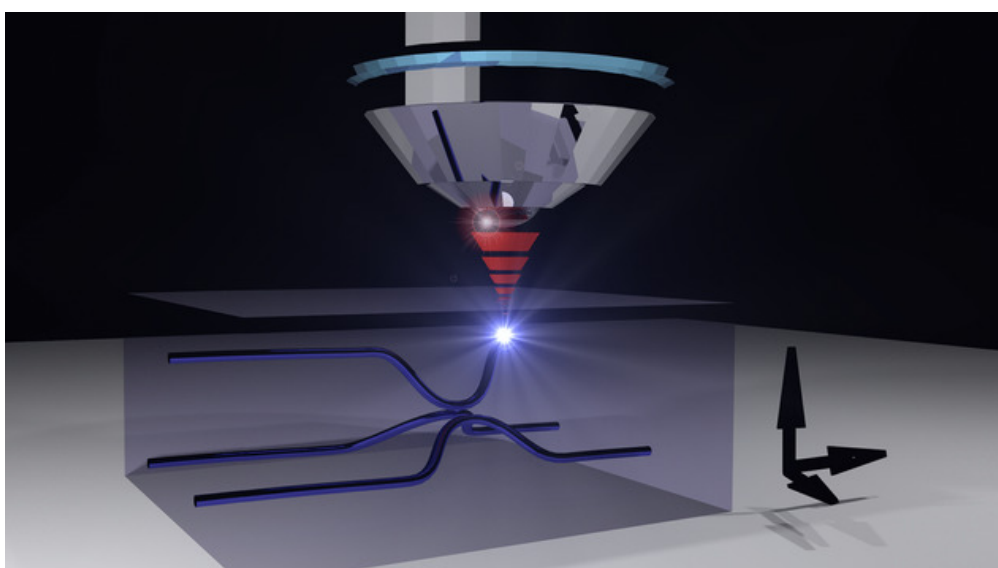


Figura 4 – Representação esquemática da técnica de fabricação de guias de ondas através da escrita direta por laser de femtossegundo (*FLDW*). Fonte: [52].

As vantagens da utilização da técnica de *FLDW* são o baixo custo e a alta velocidade de fabricação do circuito, bem como a capacidade de fabricação de circuitos tridimensionais de forma simples e direta [53].

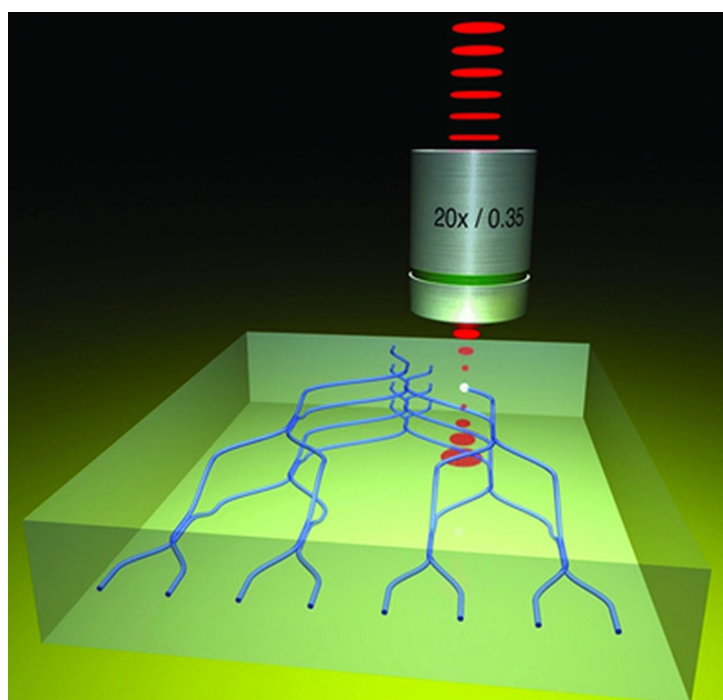


Figura 5 – Representação esquemática da fabricação de circuitos tridimensionais com a técnica *FLDW*. Fonte: [52].

4.2 Informação Quântica em Circuitos Fotônicos

Circuitos fotônicos fabricados com a técnica *FLDW*, devem ser capazes de codificar, processar e transmitir informação utilizando sistemas físicos que exibem propriedades quânticas de forma a se qualificarem como plataforma para a realização de protocolos de informação quântica. Tais propriedades já foram demonstradas via reprodução de fenômenos como interferência quântica de um, dois e três fótons [54] e realização de protocolos para geração de estados de Bell de alta fidelidade, codificados em caminho [55].

As seções a seguir apresentam um resumo introdutório sobre como codificar informação quântica nos estados quânticos disponíveis nos circuitos fotônicos, como processar essa informação quântica através da implementação de operações unitárias gerais via interferômetros inscritos no chip, e como obter a informação resultante do processamento através da detecção dos fótons.

4.2.1 Estados Quânticos

Os graus de liberdades disponíveis pelo sistema formado pelos fótons e circuitos fotônicos são polarização, modo espacial de propagação, caminho e intervalo temporal. Neste trabalho nos limitaremos apenas a estados de caminho fotônico e a estados de qutrit. Portanto, um estado puro de qutrit geral na forma

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle + \gamma |2\rangle , \quad (4.1)$$

é codificado fisicamente nos estados de caminho associando cada estado da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ a uma guia de onda disponível e então preparando um estado fotônico de superposição entre as guias de onda, com as amplitudes de probabilidade de acordo com o estado acima, como representado na Fig. 6. A verificação de que o sistema formado pelas guias de onda e o fóton codifica o estado quântico acima pode ser feita através de uma tomografia do estado quântico na saída das guias.

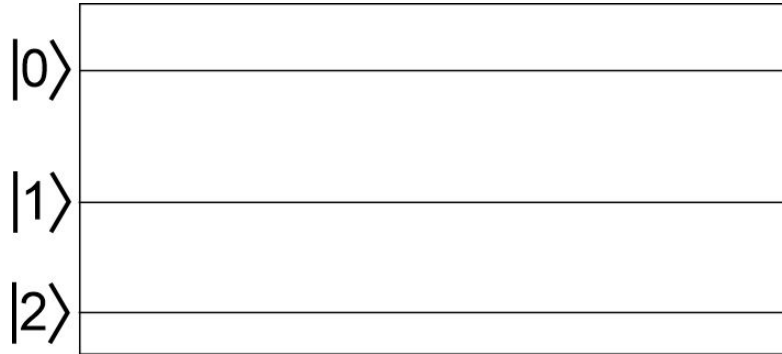


Figura 6 – Codificação de Estados Quânticos em Circuitos Fotônicos.

4.2.2 Operações Unitárias

Com os estados quânticos codificados em caminho volta-se o interesse para a capacidade de circuitos fotônicos de realizar operações unitárias gerais sobre esses estados. Para isso, utilizam-se de divisores de feixe inscritos no chip, que podem ser formados aproximando duas guias de onda de forma a permitir o tunelamento

do fóton de um caminho a para um caminho b e vice-versa, com probabilidades definidas pelos parâmetros de fabricação dessa estrutura, como comprimento da região de interação L e distância entre as guias D , como na Fig. 7. Estes divisores de feixe realizam operações gerais entre dois caminhos, que no caso simétrico (quando os coeficientes de refletividade e transmissividade são os mesmos para ambos os caminhos) podem ser expressas como:

$$|a\rangle \rightarrow r_{ab} |a\rangle + t_{ab} |b\rangle , \quad (4.2)$$

$$|b\rangle \rightarrow -t_{ab} |a\rangle + r_{ab} |b\rangle , \quad (4.3)$$

onde r_{ab}, t_{ab} são números complexos e satisfazem $|r|^2 + |t|^2 = 1$, $Re(rt^*) = 0$. Portanto a operação geral entre os caminhos a e b pode ser expressa como uma unitária:

$$BS_{ab} = \begin{bmatrix} r_{ab} & -t_{ab} \\ t_{ab} & r_{ab} \end{bmatrix} , \quad (4.4)$$

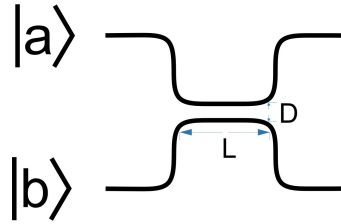


Figura 7 – Circuito fotônico que realiza uma operação análoga a de divisores de feixe em mesa óptica, também chamados de acopladores direcionais.

Quando aplicada em sistema de qutrit em chips fotônicos, as unitárias de divisores de feixe podem se apresentar de duas formas:

$$BS_{01} = \begin{bmatrix} r_{01} & -t_{01} & 0 \\ t_{01} & r_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad BS_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{12} & -t_{12} \\ 0 & t_{12} & r_{12} \end{bmatrix} , \quad (4.5)$$

correspondentes respectivamente aos circuitos da Fig. 8.

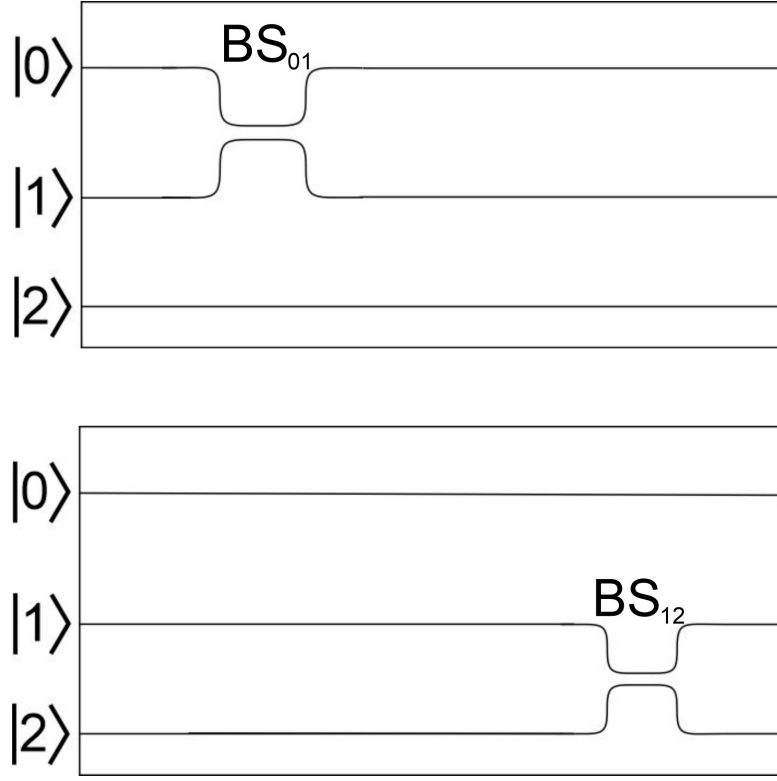


Figura 8 – Os divisores de feixe em circuitos fotônicos 2D interferem apenas dois caminhos adjacentes. Dessa forma, para um sistema de qutrit, podemos implementar essa operação apenas como as duas formas apresentadas na figura.

Para o caso das desigualdades de interesse, é possível destacar que os coeficientes dos estados que definem os observáveis, e por consequência os observáveis e operações unitárias podem ser representadas como matrizes com elementos reais. Dessa forma podemos construir a unitária através de divisores de feixe com coeficientes r e t reais. Sendo assim, a construção de uma operação unitária com parâmetros reais, suficientemente geral para realizar todas as operações de interesse em um qutrit, partindo de unitárias com parâmetros reais gerais sobre dois caminhos, pode ser feita através de alguns argumentos simples. Uma operação unitária nos espaços dos qutrits possui 9 parâmetros livres, enquanto uma unitária entre dois caminhos possui 4 parâmetros livres (módulo e fase de r e t); assim são necessárias 3 unitárias de dois caminhos para oferecer pelo menos 9 parâmetros

livres. Portanto, necessitamos de 3 divisores de feixe, e a operação unitária deve atuar em todo estado de caminho pelo menos uma vez, ou seja, todo caminho deve ser parte de pelo menos um interferômetro. Além disso se faz necessária a presença de 6 deslocadores de fase extras, sendo dois em cada caminho, um antes da aplicação dos divisores de feixe e um após. Estes deslocadores são capazes de aplicar apenas fases ϕ_i igual a 0 ou π , logo resultando em coeficientes $f_i = \exp\{i\phi_i\}$ que podem ser apenas $+1$ ou -1 . Com isso obtém-se como resultado o seguinte design para um circuito fotônico que realiza operações unitárias gerais em qutrits (Fig. 9).

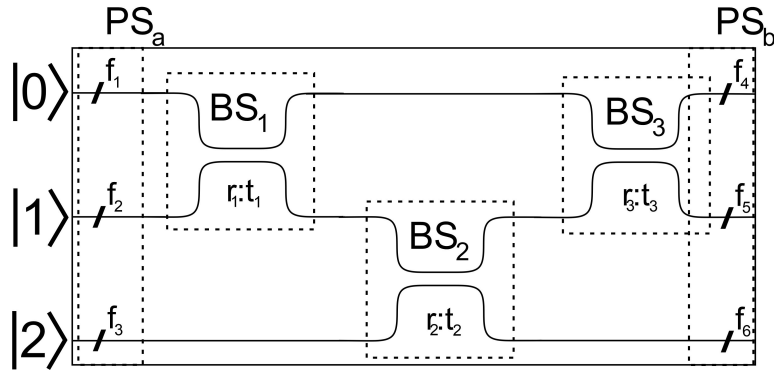


Figura 9 – Design geral esquemático e parâmetros do circuito fotônico que realiza uma operação unitária suficientemente geral em qutrits através de 3 divisores de feixe e 6 deslocadores de fase. Em representações futuras utilizaremos elementos visuais para destacar os deslocadores de fase apenas quando os mesmos forem necessários (ou seja, quando realizarem uma aplicação de fase π) para garantir uma simplicidade visual dos circuitos.

A unitária total $U_{BS} = PS_b BS_3 BS_2 BS_1 PS_a$ do circuito da Fig. 9 é dada por:

$$U_{BS} = \begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_5 & 0 \\ 0 & 0 & f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 r_3 - r_2 t_1 t_3 & -r_3 t_1 - r_1 r_2 t_3 & t_2 t_3 \\ r_2 r_3 t_1 + r_1 t_3 & r_1 r_2 r_3 - t_1 t_3 & -r_3 t_2 \\ t_1 t_2 & r_1 t_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde a notação foi condensada para melhor visualização e PS são as matrizes relativas aos deslocadores de fase. O índice i dos parâmetros refere-se ao divisor de feixe i , logo r_1 e t_1 pertencem a BS_1 de acordo com a Fig. 9.

4.2.3 Detecção

Definida a capacidade de codificar e processar informação quântica em circuitos fotônicos, foca-se a atenção agora na capacidade de transmissão de informação que pode ser definida em dois momentos: o transporte do sistema físico que codifica a informação, sendo assim a transmissão dos fótons em estados de caminho e a obtenção da informação realizada através de um processo de medição. O transporte dos fótons em estados de caminho pode ser facilmente realizada por fibras ópticas, já que o modo transversal dos fótons na fibra é gaussiano, e até mesmo pelo espaço livre, nos restando o problema da detecção.

Felizmente, a detecção de estados de caminho fotônicos é, em princípio, bastante simples: basta posicionar detectores de fótons em posições que tornem estes detectores capazes de discriminar de qual guia de onda o fóton detectado emergiu, assim configurando uma medição projetiva que destrói o sistema físico no qual o estado quântico foi codificado. Assim, para um estado como em (4.1) a probabilidade de se detectar um fóton no caminho $|j\rangle$ é dado por:

$$P(j) = |\langle j|\psi\rangle|^2. \quad (4.7)$$

No entanto, é importante mencionar que não se medem probabilidades em laboratório e sim contagens de fótons. Portanto, é necessário que nas saídas do interferômetro tenhamos contagens proporcionais a projetores ortogonais P_i , no caso de medições projetivas, ou proporcionais aos elementos de POVM Π_i , no caso de medições generalizadas. Em ambos os casos temos que $\sum_{i=1}^N P_i = I$ ou $\sum_{i=1}^N \Pi_i = I$, com N podendo ser maior ou menor que a dimensão do espaço de Hilbert. Como consequência, supondo a mesma eficiência do detector para todas as guias, temos que:

$$P(j) = \frac{C_j}{\sum_i C_i},$$

sendo C_j as contagens relativas aos elementos adequados (P_j ou Π_j). Para o caso do teste das desigualdades de não-contextualidade, estaremos medindo valores esperados de produtos de operadores observáveis implementados em sequência. Os detalhes do processo de medição e obtenção de dados para os testes dessas desigualdades estão descritos na Seção 5.1 e 5.2.

5 Desigualdades de Não-Contextualidade para Qutrits via Medições Sequenciais em Circuitos Fotônicos

Todos os elementos fundamentais para a compreensão e realização de um teste de não-contextualidade via medições sequenciais em circuitos fotônicos foram apresentados. Assim o caminho está pavimentado para a apresentação das propostas experimentais e este capítulo se dedica a esta tarefa. Inicialmente serão realizadas algumas conexões a temas apresentados anteriormente, como por exemplo a discussão sobre como realizar experimentalmente testes elementares em circuitos fotônicos e como realizar experimentalmente medições sequenciais desses testes elementares. Em seguida será apresentada a forma como a correção para a compatibilidade introduzida na seção 2.4 pode ser realizada em laboratório utilizando os circuitos fotônicos. Serão apresentadas as duas propostas completas para realização de um experimento que tem como objetivo a verificação da violação de desigualdades de não-contextualidade por qutrits em circuitos fotônicos, sendo uma proposta dependente de estado e outra independente de estado.

5.1 Teste Elementar em Circuito Fotônico

Para realizar os testes elementares A_i , relembremos primeiramente a forma do observável $A_i = I - 2|v_i\rangle\langle v_i|$, que possui dois autovalores: -1 com autovetor $|v_i\rangle$ e $+1$ com autovetores $|\bar{v}_i\rangle$, onde $\langle \bar{v}_i | v_i \rangle = 0$. Para estados de qutrit o autovalor $+1$ de A_i possui grau de degenerescência igual a 2^1 . Com isso, a fim de realizar experimentalmente o teste A_i devemos implementar uma operação física que transforme um estado inicial qualquer $|\phi_0\rangle$ em uma superposição dos estados $|v_i\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle$, acoplados a estados ortogonais de um grau de liberdade auxiliar. Em seguida, é

¹ portanto podemos dizer que em geral $|\bar{v}_i\rangle = c_1|u_i\rangle + c_2|w_i\rangle$, onde c_1, c_2 são coeficientes complexos tais que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, e $|u_i\rangle, |w_i\rangle$ são autovetores ortogonais entre si de A_i ambos com autovalor $+1$

realizada uma medição que projete esse estado em algum dos auto-estados de A_i . Do ponto de vista de uma teoria de variável oculta interpretaríamos a medição não como uma projeção do estado original mas sim como uma verificação de em qual estado $|v_i\rangle$ ou $|\bar{v}_i\rangle$ o estado inicial se apresentava, ou seja, qual valor do teste elementar A_i o estado $|\phi\rangle$ possuía desde o início do experimento.

Desejamos realizar o teste A_i em circuitos fotônicos utilizando divisores de feixe e deslocadores de fase. Dessa forma buscamos implementar uma operação unitária que realize o teste A_i e para isso realiza-se uma expansão no espaço de Hilbert através de um estado de qubit auxiliar; a forma geral dessa operação unitária pode ser encontrada na equação (3.11). O espaço expandido é então formado por 6 caminhos fotônicos representados como $|ij\rangle$ com $i = 0, 1$ e $j = 0, 1, 2$. O circuito fotônico expandido deve então realizar uma projeção de um estado inicial qualquer nos estados $|v_i\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle$ como na Fig. 2, porém entendendo cada linha desta figura como um estado de qutrit de caminho no espaço de Hilbert estendido, assim resultando na operação esquemática apresentada na Fig. 10.

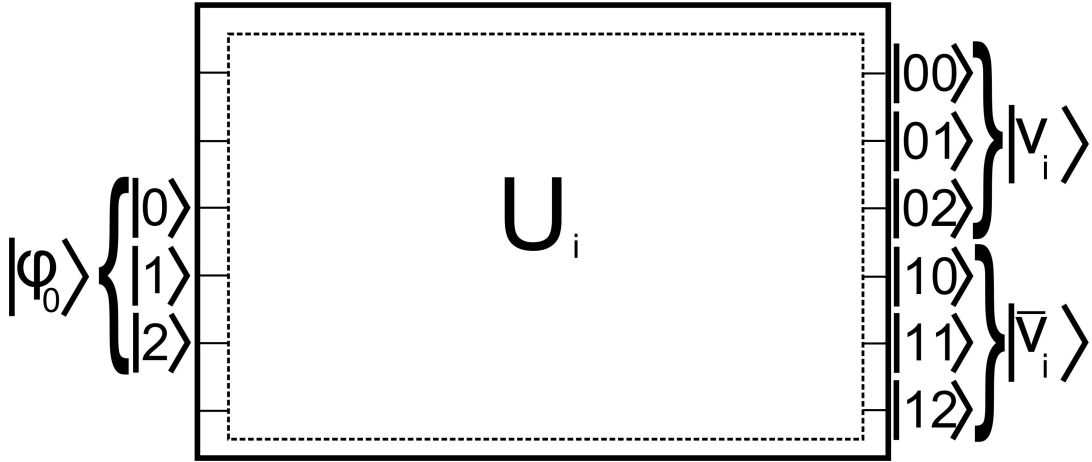


Figura 10 – Representação esquemática da operação que o chip fotônico deve realizar através de U_i .

Logo, devemos encontrar sempre o estado $|v_i\rangle$ com probabilidade $|\langle v_i|\phi_0\rangle|^2$ no qutrit dos caminhos de cima na Fig. 10 e um estado ortogonal a $|v_i\rangle$ com probabilidade $1 - |\langle v_i|\phi_0\rangle|^2$ no qutrit dos caminhos de baixo desta figura. A operação

geral pode então ser realizada em duas etapas: primeiramente uma rotação no qutrit de entrada para obtenção de um estado cujo os coeficientes são proporcionais às amplitudes de probabilidades dos projetores $|v_i\rangle\langle v_i|$ ou $I - |v_i\rangle\langle v_i|^2$, e em seguida, uma transformação dos estados da base nos estados de qutrit $|v_i\rangle$ e $|\bar{v}_i\rangle$ via expansão do espaço de Hilbert.

A primeira etapa deve então realizar a seguinte operação:

$$|\phi_0\rangle \rightarrow \langle v_i|\phi_0\rangle |0\rangle + \langle u_i|\phi_0\rangle |1\rangle + \langle w_i|\phi_0\rangle |2\rangle , \quad (5.1)$$

onde $|u_i\rangle$ e $|w_i\rangle$ são uma base para o sub-espaço ortogonal a $|v_i\rangle$ ou seja, são uma base para $|\bar{v}_i\rangle$. Para obter essa operação para um qutrit qualquer $|\phi_0\rangle$ no circuito, basta exigir que a mesma operação seja realizada nos estados da base:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \langle v_i|0\rangle |0\rangle + \langle u_i|0\rangle |1\rangle + \langle w_i|0\rangle |2\rangle , \\ |1\rangle &\rightarrow \langle v_i|1\rangle |0\rangle + \langle u_i|1\rangle |1\rangle + \langle w_i|1\rangle |2\rangle , \\ |2\rangle &\rightarrow \langle v_i|2\rangle |0\rangle + \langle u_i|2\rangle |1\rangle + \langle w_i|2\rangle |2\rangle , \end{aligned} \quad (5.2)$$

e então, utilizando o design obtido na Fig. 9, basta encontrar os parâmetros que realizam a operação descrita em (5.2).

A segunda etapa é realizada expandindo o espaço de Hilbert de acordo com a Fig. 11.

Utilizaremos a notação $|ij\rangle$ apresentada anteriormente para denotar os 6 estados de caminho na saída no circuito e $|k\rangle$ continuará sendo a base original do estado de entrada, onde $i = 0, 1$ e $j = 0, 1, 2$. Logo, $i = 0$ rotula o "qutrit de cima", $i = 1$ rotula o "qutrit de baixo", e $j = 0, 1, 2$ denota a base desses qutrits no espaço estendido. Assim, a segunda operação pode ser entendida como duas operações separadas em qutrits. O estado $|02\rangle$ deve ser transformado em $|v_i\rangle$ na base $|0j\rangle$ e os estados $|10\rangle$ e $|11\rangle$ devem ser transformados em um estado ortogonal a $|v_i\rangle$ na base $|1j\rangle$, logo:

$$|02\rangle \rightarrow |v_i\rangle = \langle 00|v_i\rangle |00\rangle + \langle 01|v_i\rangle |01\rangle + \langle 02|v_i\rangle |02\rangle , \quad (5.3)$$

² Ou simplesmente $|u_i\rangle\langle u_i| + |w_i\rangle\langle w_i|$

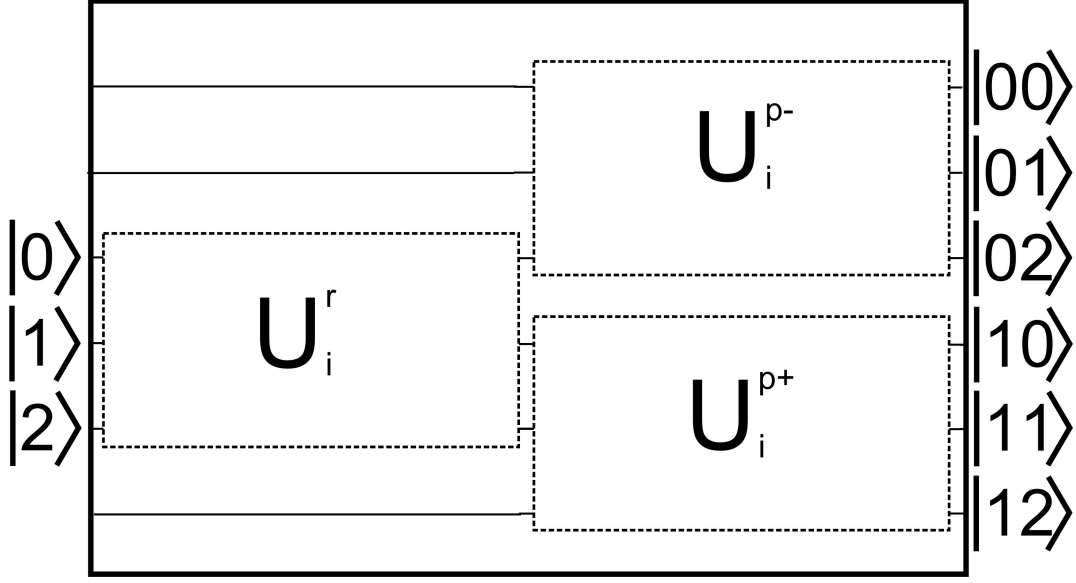


Figura 11 – Representação esquemática da operação que o chip fotônico deve realizar através de três unitárias agindo em sub-espacos de qutrit U_i^r , U_i^{p-} e U_i^{p+} .

e

$$|10\rangle \rightarrow |u_i\rangle = \langle 10|u_i\rangle |10\rangle + \langle 11|u_i\rangle |11\rangle + \langle 12|u_i\rangle |12\rangle , \quad (5.4)$$

$$|11\rangle \rightarrow |w_i\rangle = \langle 10|w_i\rangle |10\rangle + \langle 11|w_i\rangle |11\rangle + \langle 12|w_i\rangle |12\rangle . \quad (5.5)$$

Dessa forma a operação acima pode ser entendida como duas unitárias distintas agindo apenas em subespacos de qutrit ($i = 0, 1$), e então novamente recorreremos ao design geral na Fig. 9 para encontrar os parâmetros que constroem a operação desejada. Podemos então decompor a operação geral que realiza o teste elementar em três unitárias que atuam em sub-espacos de qutrit de acordo com o esquema da Fig. 12.

As unitárias de qutrit apresentadas na Fig.11 possuem a seguinte represen-

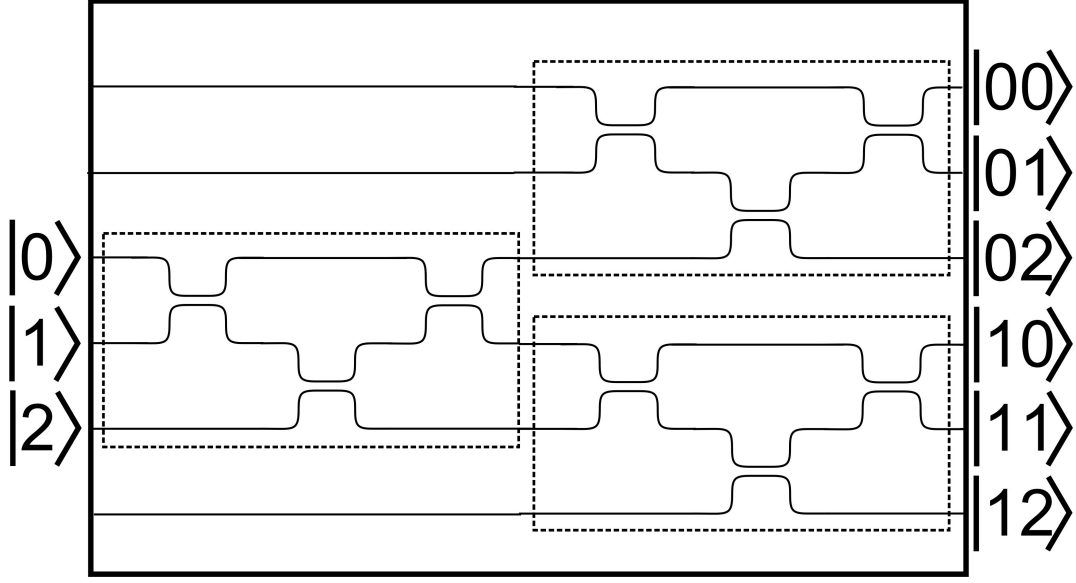


Figura 12 – Representação do design geral para construir as unitárias de qutrit U_i^r , U_i^{p-} e U_i^{p+} apresentadas na figura anterior.

tação na base computacional³:

$$U_i^r = \begin{bmatrix} \langle v_i|0\rangle & \langle v_i|1\rangle & \langle v_i|2\rangle \\ \langle u_i|0\rangle & \langle u_i|1\rangle & \langle u_i|2\rangle \\ \langle w_i|0\rangle & \langle w_i|1\rangle & \langle w_i|2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v_i| \\ \langle u_i| \\ \langle w_i| \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$U_i^{p-} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \langle 00|v_i\rangle \\ x_1 & y_1 & \langle 01|v_i\rangle \\ x_2 & y_2 & \langle 02|v_i\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |x\rangle & |y\rangle & |v_i\rangle \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$U_i^{p+} = \begin{bmatrix} \langle 10|u_i\rangle & \langle 10|w_i\rangle & z_0 \\ \langle 11|u_i\rangle & \langle 11|w_i\rangle & z_1 \\ \langle 12|u_i\rangle & \langle 12|w_i\rangle & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u_i\rangle & |w_i\rangle & |z\rangle \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

³ Aqui utilizamos um pequeno abuso de notação: um vetor $|v\rangle$ como elemento de matriz indica que os coeficientes desse vetor devem ser escritos como uma coluna da matriz em questão. Consistentemente um vetor dual $\langle v|$ como elemento de matriz indica que os coeficientes desse vetor devem ser escritos como uma linha da matriz em questão

onde x_k , y_k e z_k são parâmetros livres que devem satisfazer a condição $U^\dagger U = I$ para cada matriz. A escolha de $x = u_i$, $y = w_i$ e $z = v_i$ satisfaz essa condição e resulta nas seguintes matrizes:

$$U_i^{p-} = \begin{bmatrix} \langle 10|u_i \rangle & \langle 10|w_i \rangle & \langle 00|v_i \rangle \\ \langle 11|u_i \rangle & \langle 11|w_i \rangle & \langle 01|v_i \rangle \\ \langle 12|u_i \rangle & \langle 12|w_i \rangle & \langle 02|v_i \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u_i \rangle & |w_i \rangle & |v_i \rangle \end{bmatrix} = U_i^{p+}. \quad (5.9)$$

Os parâmetros dos divisores de feixe que compõem o circuito que realiza as operações acima podem ser encontrados igualando a unitária (4.6) às unitárias $U_i^{p\pm}$ e U_i^r determinadas em (5.6) e (5.9) e resolvendo o sistema que se forma. Para resolver esse sistema de equações e determinar os valores de r e t para cada divisor de feixe foi construído um algoritmo em *Python*, que pode ser encontrado no Apêndice A assim como os parâmetros encontrados e os designs dos chips fotônicos. Considerando a operação unitária completa $U(A_i)$:

$$U(A_i) = \begin{bmatrix} U^{p-} & 0 \\ 0 & U^{p+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & U_i^r & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} P, \quad (5.10)$$

podemos associa-lá com a forma geral da operação unitária encontrada em (3.11) através de uma matriz de permutação P . Essa matriz se faz necessária pois na Seção 2.1 supomos que o estado inicial seria *esse*, logo nosso qutrit inicial seria inserido nos 3 últimos caminhos (de cima para baixo) do chip, porém, podemos notar pela Fig. 12 que os caminhos nos quais se codifica o qutrit de entrada são o terceiro, quarto e quinto caminhos (de cima para baixo). Esta modificação pode ser realizada através de uma matriz de permutação de caminhos P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

e com isso encontra-se que:

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} |u_i\rangle & |w_i\rangle & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & |v_i\rangle \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

bem como $P_i = |v_i\rangle \langle v_i|$ e $Q_i = |u_i\rangle \langle u_i| + |w_i\rangle \langle w_i|$.

Com os parâmetros do chip definidos, a realização do teste A_i é concluída com a obtenção do valor esperado $\langle A_i \rangle$ do teste A_i sobre o estado que está sendo testado. Essa quantidade é determinada através das contagens obtidas por detectores de fótons posicionados de forma a distinguirem se a detecção provém de um fóton no estado $|v_i\rangle$ ou $|\bar{v}_i\rangle$, como esquematizado na Fig. 13.

Sendo $C_i(-)$ o número de fótons detectados no estado $|v_i\rangle$ (com resultado -1 para o teste A_i), e $C_i(+)$ o número de fótons detectados no estado $|\bar{v}_i\rangle$ (com resultado $+1$ para o teste A_i), o valor esperado do teste A_i é então dado por:

$$\langle A_i \rangle = \frac{C_i(+) - C_i(-)}{C_i(+) + C_i(-)}. \quad (5.14)$$

5.2 Medições Sequenciais em Circuitos Fotônicos

Com o método para implementar os testes elementares em circuitos fotônicos definido, a implementação dos testes conjuntos $\langle A_i A_j \rangle$ se torna bastante direta: basta acoplar a saída de um chip que realiza um teste elementar na entrada do chip que realiza o teste seguinte. Seguindo a notação de [43], o teste $\langle A_i A_j \rangle$ significa que primeiro o teste realizado é A_i .

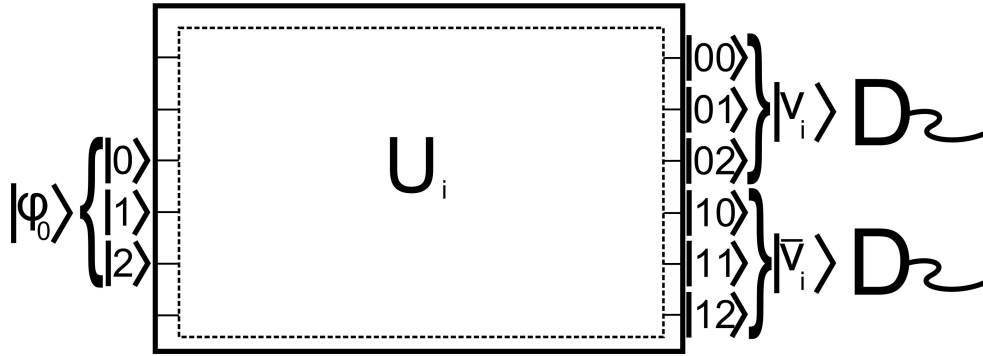


Figura 13 – Realização de Medição Simples A_i . O detector de cima (baixo) deve detectar fótons vindos dos três caminhos de cima (baixo) na saída do circuito, realizando então uma soma das contagens dos fótons vindos de cada um destes caminhos. Associa-se o valor -1 ($+1$) como resultado o teste A_i para uma detecção nesta posição.

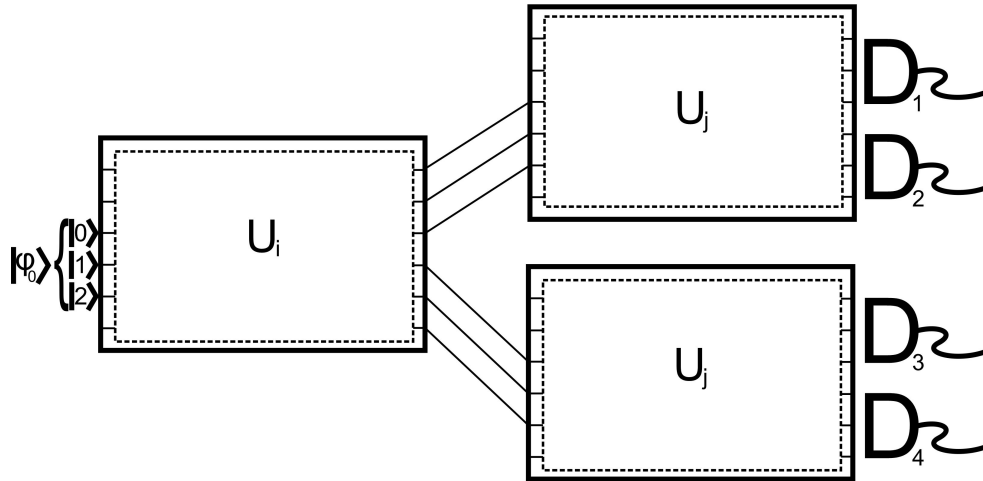


Figura 14 – Realização de Medição Sequencial de dois observáveis

Nas saídas do circuito para medição sequencial acima temos acesso à contagens relativas a todos os resultados possíveis dos testes elementares; assim denotamos $C(a_i, a_j)$ como o número de fótons detectados no caminho correspondente ao resultado $a_k = \pm 1$ para o teste A_k ($k = i, j$). Por simplicidade, usaremos $a_k = \pm$, se referindo aos resultados ± 1 . Logo, de acordo com a imagem acima, sendo $C(D_l)$ o

número de fótons detectados na medição sequencial $A_i A_j$ no detector D_l , temos:

$$\begin{aligned} C(D_1) &= C(-, -), \\ C(D_2) &= C(-, +), \\ C(D_3) &= C(+, -), \\ C(D_4) &= C(+, +). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Com essas contagens determinadas é possível calcular as contagens relativas aos testes elementares individualmente:

$$\begin{aligned} C_i(-) &= C(D_1) + C(D_2), \\ C_i(+) &= C(D_3) + C(D_4), \\ C_i(-) &= C(D_1) + C(D_3), \\ C_i(+) &= C(D_2) + C(D_4), \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde $C_i(\pm)$ é o número de fótons relativos ao resultado $\pm$ para o teste A_i , e então podemos determinar também os valores de $\langle A_i \rangle$ através de equação (5.14) e $\langle A_i A_j \rangle$ como:

$$\langle A_i A_j \rangle = \frac{C(D_1) + C(D_4) - C(D_2) - C(D_3)}{C(D_1) + C(D_2) + C(D_3) + C(D_4)}. \tag{5.17}$$

O valor de $\langle A_j \rangle$ pode, em princípio, também ser determinado através das contagens obtidas experimentalmente, assumindo que a realização do teste A_i não altera os resultados do teste A_j . Porém, essa hipótese pode não ser verificada experimentalmente nos testes de não-contextualidade, logo não podemos obter os valores de testes elementares a partir da medição sequencial. Para diferenciar as situações onde o teste A_j é realizado de forma isolada ou em sequência de um outro teste A_i convém modificarmos nossa notação para contagens e valores esperados. Seguindo a notação adaptada de [46] já apresentada na Seção 2.3, o teste realizado na Fig. 14 é então denotado por $A_i^{[1]} A_j^{[2]}$, $C(A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})$ é então o número de fótons detectados com resultado +1 para o teste A_j realizado no contexto da sequência de testes elementares $A_i^{[1]} A_j^{[2]}$, e $C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})$ é o número de fótons detectados com resultado +1 para o teste A_j e -1 para o teste A_i realizados

no contexto da sequência de testes elementares $A_i^{[1]} A_j^{[2]}$. Logo a notação anterior é readaptada:

$$\begin{aligned} C(-, -) &\rightarrow C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(-, +) &\rightarrow C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(+, -) &\rightarrow C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(+, +) &\rightarrow C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

com isso podemos obter também:

$$\begin{aligned} C(A_i^{[1]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) + C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(A_i^{[1]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) &= C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) + C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) + C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \\ C(A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) + C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

possibilitando a obtenção de alguns valores esperados:

$$\langle A_i^{[1]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} \rangle = \frac{C(A_i^{[1]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) - C(A_i^{[1]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})}{C(A_i^{[1]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) + C(A_i^{[1]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})}, \quad (5.20)$$

$$\langle A_j^{[2]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} \rangle = \frac{C(A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) - C(A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})}{C(A_j^{[2]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]}) - C(A_j^{[2]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]})}. \quad (5.21)$$

Supondo causalidade, ou seja, que a realização de um teste $A_i^{[k]}$ na k -ésima posição de uma sequência de testes não altera o resultado dos $(k - 1)$ testes realizados anteriormente, podemos dizer que:

$$\langle A_i \rangle = \langle A_i^{[1]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} \rangle + \epsilon(A_i^{[1]} A_j^{[2]}), \quad (5.22)$$

$$\langle A_j \rangle \neq \langle A_i^{[1]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} \rangle, \quad (5.23)$$

onde $\epsilon(A_i^{[1]} A_j^{[2]})$ é uma perda de fótons aleatória que ocorre devida a imperfeições na realização experimental do teste A_j depois do teste A_i porém antes da detecção dos fótons. E $\langle A_j \rangle$ não pode ser associado a $\langle A_i^{[1]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} \rangle$ pois a ordem causal

do experimento implica que A_i pode alterar o comportamento do sistema sob o teste A_j . Dessa forma, dada a realização de uma medição sequencial $A_i^{[1]} A_j^{[2]} \dots A_k^{[n]}$ é possível obter de forma consistente o valor esperado de qualquer sequência de testes na forma $A_i^{[1]} A_j^{[2]} \dots A_k^{[l]}$, ou seja, qualquer sequência de testes que não possua nenhum outro teste que a anteceda.

Para realização dos testes de interesse serão necessárias medições sequenciais de três observáveis na forma $A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}$, para calcular os termos $p^{err}[A_i A_j A_i]$. Essa realização é feita de acordo com o esquema da Fig. 15⁴.

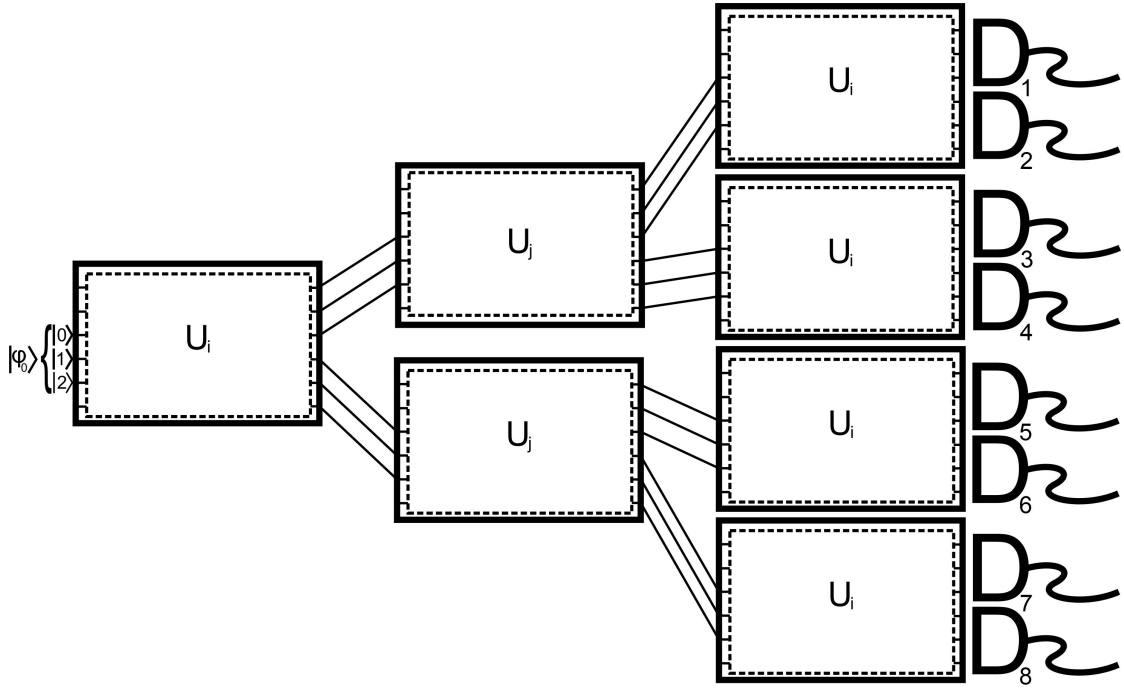


Figura 15 – Realização de Medição Sequencial de três observáveis

Além disso, as contagens obtidas na realização experimental de $A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}$ nos permite determinar também os valores de $\langle A_i \rangle$ e $\langle A_i A_j \rangle$, assim obtendo três termos relevantes através de uma única realização experimental. Para o caso da implementação da sequência, cada detector realiza as seguintes contagens:

⁴ A princípio a terceira etapa poderia ser simplificada pois os chips recebem estados previamente conhecidos. Porém, por um questão de consistência, todos os chips pretendem realizar o mesmo teste elementar devem ser o mais idênticos possível.

$$\begin{aligned}
C(D_1) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]-}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_2) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]-}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_3) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_4) &= C(A_i^{[1]-}, A_j^{[2]+}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_5) &= C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]-}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_6) &= C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]-}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_7) &= C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]+}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \\
C(D_8) &= C(A_i^{[1]+}, A_j^{[2]+}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Com essas contagens determinadas pode-se então calcular $\langle A_i \rangle$ e $\langle A_i A_j \rangle$ e $p^{err}[A_i A_j A_i]$:

$$\langle A_i \rangle = \langle A_i^{[1]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]} \rangle + \epsilon(A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \tag{5.25}$$

$$\langle A_i A_j \rangle = \langle A_i^{[1]} A_j^{[2]} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]} \rangle + \epsilon(A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}), \tag{5.26}$$

$$p^{err}[A_i A_j A_i] = p[A_i^{[1]+}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}] + p[A_i^{[1]-}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}], \tag{5.27}$$

onde as probabilidades acima são dadas por:

$$\begin{aligned}
p[A_i^{[1]+}, A_i^{[3]-} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}] &= \frac{C(D_5) + C(D_7)}{\sum_k C(D_k)}, \\
p[A_i^{[1]-}, A_i^{[3]+} | A_i^{[1]} A_j^{[2]} A_i^{[3]}] &= \frac{C(D_2) + C(D_4)}{\sum_k C(D_k)}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3 Compatibilidade em Circuitos Fotônicos

O termo p^{err} , apresentado na Seção 2.4 é uma correção para eventuais erros experimentais que impossibilitariam a condição de compatibilidade entre dois testes

elementares realizados em sequência. Já o termo ϵ apresentado na seção anterior considera desvios dos valores experimentais por consequência de perdas adicionais de fótons causadas pela implementação de um teste adicional. Essa perda de fótons pode ser dividida em dois tipos de eventos gerais.

Chamaremos de tipo 1 uma perda de fótons completamente aleatória, que não beneficia nenhum resultado em particular dos testes elementares, e pode ser modelada como uma multiplicação das contagens por um termo fixo para todas as contagens ($C(D_k) \rightarrow \kappa C(D_k)$), assim não alterando o valor de $\langle A_i \rangle$, seja realizado sozinho ou como parte de uma sequência. Logo para esse tipo de perda de fótons $\epsilon = 0$.

Na perda de fótons tipo 2 consideramos que podem existir um desbalanceamento nas perdas dos fótons entre dois resultados distintos de um teste inicial. Por exemplo, num teste $A_i A_j$ onde desejamos obter o valor esperado do primeiro teste, quando o primeiro teste A_i resulta no valor -1 temos o estado $|v_i\rangle$ entrando no setor que realiza o teste A_2 , já quando o primeiro teste A_i resulta no valor $+1$ temos o estado $|\bar{v}_i\rangle$ entrando no segundo setor que realiza o teste A_2 . Porém, um dos testes A_2 pode provocar uma maior perda de fótons para um desses dois testes em relação ao outro. Além disso, como cada estado entrará num setor distinto do circuito, mas que deveria realizar precisamente o mesmo teste, pode haver novamente esse desbalanceamento devido a pequenas diferenças de fabricação entre os dois setores do circuito que realizam A_2 . Neste tipo de perda de fótons ocorre uma alteração do valor esperado de A_1 entre o valor obtido do teste elementar simples e o valor obtido após a realização do teste A_2 , neste caso $\epsilon \neq 0$. Porém, como o efeito do erro é uma alteração no resultado do teste A_1 devido a realização do teste A_2 (ou seja, uma imperfeição na compatibilidade), este tipo de erro pode ser considerado como parte de p^{err} .

Dessa forma podemos considerar que os valores obtidos através das contagens de fótons são simplesmente $\langle A_i \rangle$ e $\langle A_i A_j \rangle$, e os possíveis erros descritos acima, bem como outros erros experimentais que causam imperfeições na condição de compatibilidade estão todos considerados no termo p^{err} , assim demonstrando a importância dessa correção para os testes que desejamos realizar e mantendo a forma das inequações (3.23) e (3.22).

Os termos das desigualdades serão obtidos através da realização de medições sequenciais na forma $A_i^{[1]}A_j^{[2]}A_i^{[3]}$ através das contagens obtidas em cada um dos oito detectores. Sendo essas contagens precisamente os valores apresentados em (5.24), podemos obter valores esperados $\langle A_i \rangle$ e $\langle A_i A_j \rangle$ como:

$$\langle A_i \rangle = \frac{C(D_5) + C(D_6) + C(D_7) + C(D_8) - C(D_1) - C(D_2) - C(D_3) - C(D_4)}{\sum_k C(D_k)}, \quad (5.29)$$

$$\langle A_i A_j \rangle = \frac{C(D_1) + C(D_2) + C(D_7) + C(D_8) - C(D_3) - C(D_4) - C(D_5) - C(D_6)}{\sum_k C(D_k)}. \quad (5.30)$$

Logo, com os parâmetros do chip definidos através do método apresentado na Seção 4.1 e com as expressões (5.28), (5.29) e (5.30) em mãos temos todo o ferramental necessário para propor e realizar os experimentos. Outra consideração experimental importante é que se decidirmos que cada chip implementará um observável A_k , para a realização do teste $A_i^{[1]}A_j^{[2]}A_i^{[3]}$ serão necessários 5 chips que realizarão A_i e 2 chips que realizarão A_j , e como a ordem de realização dos testes $A_i A_j$ é irrelevante para os testes de não-contextualidade é interessante considerar sempre o teste A_j como sendo o mais complexo de se fabricar.

5.4 Teste de Não-Contextualidade dependente de estado para Qutrits em Circuito Fotônico

Nesta seção, iniciamos as propostas com os detalhes do teste de não-contextualidade dependente de estado. Como já enfatizado anteriormente, direcionamos nossa atenção a um teste de uma desigualdade do cenário do 5-ciclo utilizando qutrits fotônicos. A desigualdade em questão foi apresentada em (3.23) e a reproduzimos na equação (5.31) sem nenhuma alteração na ordem de realização das medições, pois é possível constatar que para os observáveis em questão não existem uma preferência na facilidade de fabricação entre os chips que implementariam A_k .

$$\begin{aligned}
 & - \langle A_0 A_1 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_3 A_4 \rangle - \langle A_4 A_0 \rangle \\
 & \leq 3 + 2(p^{err}[A_0 A_1 A_0] + p^{err}[A_1 A_2 A_1] \\
 & \quad + p^{err}[A_2 A_3 A_2] + p^{err}[A_3 A_4 A_3] + p^{err}[A_4 A_0 A_4]). \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

De acordo com os resultados das seções anterior, para obter todos os termos da desigualdade acima é necessária a realização de 5 experimentos de medição sequencial tripla, esquematizados na Fig. 15, sendo eles $A_0 A_1 A_0$, $A_1 A_2 A_1$, $A_2 A_3 A_2$, $A_3 A_4 A_3$, $A_4 A_0 A_4$. Resultando na necessidade de se obter 5 chips que implementam cada observável.

Dessa forma nos resta apenas o cálculo dos parâmetros experimentais que configuram cada chip. Assim como os designs e as operações unitárias, a tarefa do cálculo dos parâmetros foi dividida em três sub-tarefas: utilizando a Fig. 12 como base calculamos separadamente os parâmetros que realizam as operações unitárias de qutrit em seus devidos sub-espacos. As operações unitárias U_i^{p-} e U_i^{p+} foram igualadas como demonstrado em (5.9), e então devemos buscar os parâmetros de dois designs, um que realiza a operação U_i^r e outro que realiza $U_i^p = U_i^{p-} = U_i^{p+}$. Como apresentado anteriormente, esta tarefa é realizada igualando as matrizes das operações unitárias com a matriz de parâmetros (4.6) e resolvendo as equações, e para esse fim foi implementado um algoritmo em *Python* cuja apresentação se encontra no Apêndice A. E os resultados dos parâmetros para realização do 5-ciclo se encontram no Apêndice B, aqui exploraremos os detalhes dos parâmetros de A_0 como um exemplo.

Os parâmetros calculados $f_1, f_2, f_3, r_1, t_1, r_2, t_2, r_3, t_3, f_4, f_5, f_6$, se referem à Fig. 9. Esses parâmetros foram calculados para as unitárias agindo em sub-espaco de qutrit U_i^r e U_i^p , com isso se completa a operação unitária total, como exibido na Fig. 12, que desejamos realizar para implementar cada teste elementar. Assim, listamos na Tabela 1 os valores encontrados para se realizar $U(A_0)$, que gera os designs para U_0^r e U_0^p mostrados abaixo.

Uma consideração adicional importante que simplifica um pouco os circuitos é a constatação que para todo U_i^{p-} não há entrada de fótons nos estados $|0\rangle$ e

Tabela 1 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_0 .

			U_0^r	U_0^p
A_0	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-0,669	1
		t_1	-0,743	0
	BS_2	r_2	0,9	0,437
		t_2	0,437	0,9
	BS_3	r_3	0	0,669
		t_3	1	0,743
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

$|1\rangle$ de seu subespaço. Em todas as ocasiões U_i^{p-} recebe apenas o estado $|2\rangle$, isso possibilita que possamos ignorar BS_1 e PS_a em sua fabricação. Porém essa mesma conclusão não pode ser aplicada em U_i^{p+} .

Além disso para o teste dependente de estado é tentador aplicar um raciocínio similar e simplificar U_i^r , dado que o mesmo recebe sempre o estado $|0\rangle$. Porém é importante notar que U_i^r recebe o estado $|0\rangle$ apenas quando é a primeira operação da medição sequencial, circuitos que realizam os U_i^r seguintes recebem auto-estados do teste anterior e não apenas $|0\rangle$. Portanto seria possível simplificar apenas o primeiro circuito de qutrit U_i^r de uma medição sequencial. Porém, isso tornaria o primeiro chip que realiza A_i na sequência $A_i A_j A_i$ diferente do último, e por consistência com as condições de compatibilidade desejamos manter os chips que implementam um mesmo observável de teste elementar idênticos.

Note que na Tabela 1 encontramos parâmetros r_i e t_i negativos. Quando ambos os parâmetros são negativos significa que tanto o feixe transmitido quando o feixe refletido recebem uma fase π em relação ao estado de qutrit que não participa do acoplador direcional.

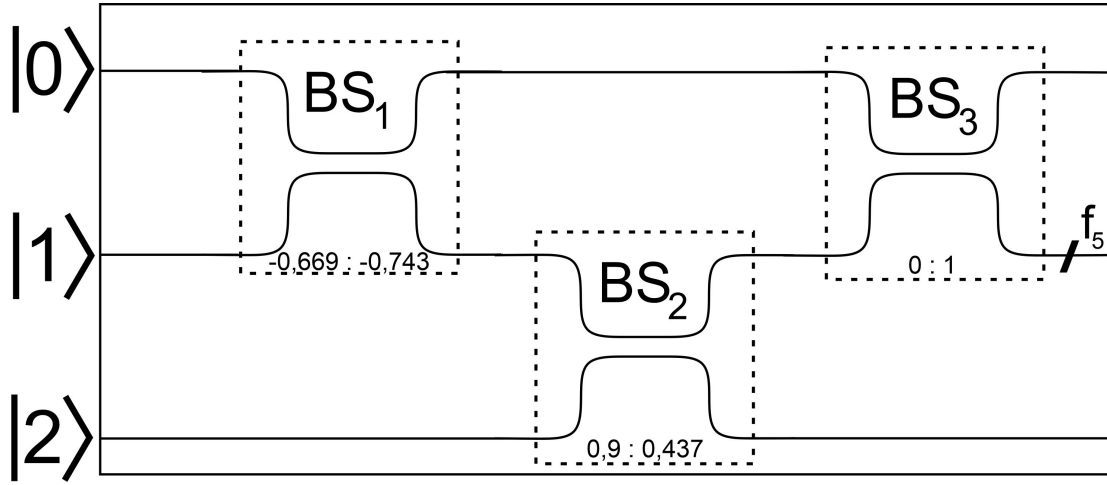


Figura 16 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_0^r . Utilizamos uma convenção de excluir os elementos visuais quando os mesmos representarem uma operação equivalente à identidade. Assim, a ausência de algum parâmetro nos designs representará operações identidades.

5.5 Teste de Não-Contextualidade independente de estado para Qutrits em Circuito Fotônico

Para o teste independente de estado, modificamos a desigualdade de interesse (3.22) para uma versão que prioriza observáveis mais simples de implementar nas posições 1 e 3 dos observáveis nas medições sequenciais triplas que serão realizadas, assim tomando a forma da desigualdade (5.32)

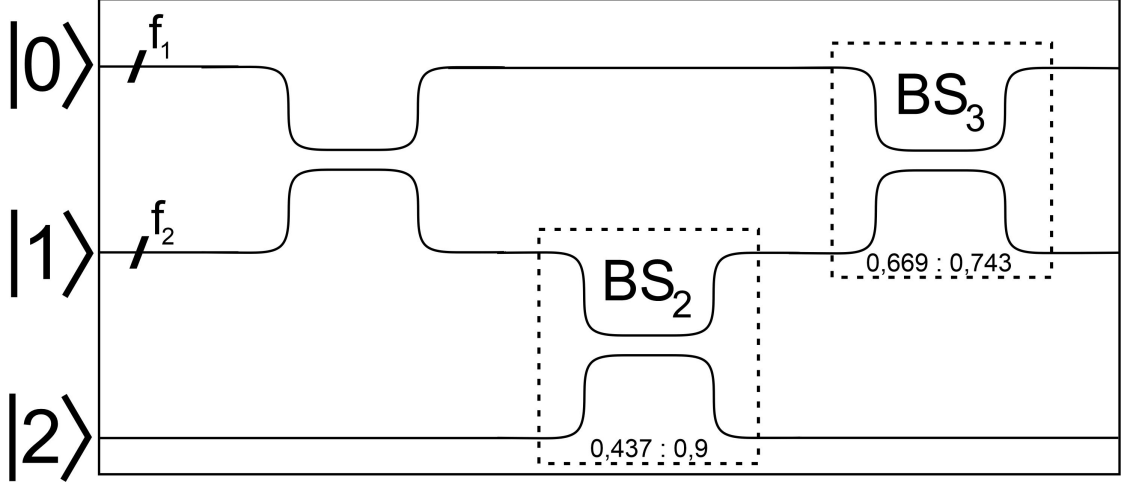


Figura 17 – Parâmetros e design da Operação Unitária U_0^p .

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\langle A_{10} \rangle + \langle A_{11} \rangle + \langle A_{12} \rangle + \langle A_{13} \rangle \\
 & - \langle A_5 A_{10} \rangle - \langle A_7 A_{10} \rangle - \langle A_9 A_{10} \rangle) \\
 & - \langle A_5 A_{11} \rangle - \langle A_6 A_{11} \rangle - \langle A_8 A_{11} \rangle \\
 & - \langle A_4 A_{12} \rangle - \langle A_7 A_{12} \rangle - \langle A_8 A_{12} \rangle \\
 & - \langle A_4 A_{13} \rangle - \langle A_6 A_{13} \rangle - \langle A_9 A_{13} \rangle \\
 & + \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle A_3 \rangle \\
 & + \langle A_4 \rangle + \langle A_5 \rangle + \langle A_6 \rangle + \langle A_7 \rangle + \langle A_8 \rangle + \langle A_9 \rangle \\
 & - \langle A_4 A_5 \rangle - \langle A_1 A_4 \rangle - \langle A_1 A_5 \rangle \\
 & - \langle A_6 A_7 \rangle - \langle A_2 A_6 \rangle - \langle A_2 A_7 \rangle \\
 & - \langle A_8 A_9 \rangle - \langle A_3 A_8 \rangle - \langle A_3 A_9 \rangle \\
 & - \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_1 A_3 \rangle - \langle A_2 A_3 \rangle \\
 & \leq 9 + p^{err}[A_5 A_{10} A_5] + p^{err}[A_7 A_{10} A_7] + p^{err}[A_9 A_{10} A_9] \\
 & + p^{err}[A_5 A_{11} A_5] + p^{err}[A_6 A_{11} A_6] + p^{err}[A_8 A_{11} A_8] \\
 & + p^{err}[A_4 A_{12} A_4] + p^{err}[A_7 A_{12} A_7] + p^{err}[A_8 A_{12} A_8] \\
 & + p^{err}[A_4 A_{13} A_4] + p^{err}[A_6 A_{13} A_6] + p^{err}[A_9 A_{13} A_9] \\
 & + 2(p^{err}[A_4 A_5 A_4] + p^{err}[A_1 A_4 A_1] + p^{err}[A_1 A_5 A_1] \\
 & + p^{err}[A_6 A_7 A_6] + p^{err}[A_2 A_6 A_2] + p^{err}[A_2 A_7 A_2] \\
 & + p^{err}[A_8 A_9 A_8] + p^{err}[A_3 A_8 A_3] + p^{err}[A_3 A_9 A_3] \\
 & + p^{err}[A_1 A_2 A_1] + p^{err}[A_1 A_3 A_1] + p^{err}[A_2 A_3 A_2]).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Novamente, apenas os seguintes experimentos de medição sequencial tripla necessitam ser realizados de forma a obtermos todos os termos da desigualdade (5.32): $A_5 A_{10} A_5$, $A_7 A_{10} A_7$, $A_9 A_{10} A_9$, $A_5 A_{11} A_5$, $A_6 A_{11} A_6$, $A_8 A_{11} A_8$, $A_4 A_{12} A_4$, $A_7 A_{12} A_7$, $A_8 A_{12} A_8$, $A_4 A_{13} A_4$, $A_6 A_{13} A_6$, $A_9 A_{13} A_9$, $A_4 A_5 A_4$, $A_1 A_4 A_1$, $A_1 A_5 A_1$, $A_6 A_7 A_6$, $A_2 A_6 A_2$, $A_2 A_7 A_2$, $A_8 A_9 A_8$, $A_3 A_8 A_3$, $A_3 A_9 A_3$, $A_1 A_2 A_1$, $A_1 A_3 A_1$, $A_2 A_3 A_2$. Logo, 24 experimentos de medição sequencial tripla são necessários. Se cada chip implementa um observável, necessitamos então de 5 chips para cada um dos observáveis A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , A_9 e 2 chips para cada um dos observáveis A_{10} , A_{11} , A_{12} , A_{13} . Veja por exemplo Fig. 15.

Novamente realizamos o procedimento descrito na seção anterior, calculando os parâmetros das operações unitárias de qutrit U_i^r e U_i^p através do mesmo algoritmo em *Python*. Para os chips que realizam o teste independente de estado a simplificação pós-cálculo dos parâmetros no design de U_i^{p-} indicada na seção anterior também é válida pelos mesmo argumentos. Para a desigualdade independente de estado podemos dividir os testes elementares em três categorias de dificuldade de fabricação, os mais simples A_1 , A_2 e A_3 , os de dificuldade intermediária A_4 , A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , A_9 , e os mais difíceis A_{10} , A_{11} , A_{12} , A_{13} . Aqui exemplificaremos um teste elementar de cada categoria de dificuldade citada acima, escolhemos portanto A_1 , A_5 e A_{12} . Os parâmetros para a construção da operação unitária que realiza o teste elementar A_1 se encontram na Tabela 2.

Os designs dos circuitos com os parâmetros da Tabela 2 se encontram nas Fig. 18 e Fig. 19 .

Para o teste elementar A_5 , exibimos os parâmetros calculados e os designs resultantes, na Tabela 3 e Fig. 20 e Fig. 21, respectivamente.

E por fim os parâmetros e design dos circuitos que implementa a operação unitária que realiza o teste elementar A_{12} , se encontram na Tabela 4 e Fig. 22 e Fig. 23, respectivamente.

Tabela 2 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_1 .

			U_1^r	U_1^p
A_1	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	1	0
		t_3	0	1
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	-1
		f_6	1	-1

Tabela 3 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_5 .

			U_5^r	U_5^p
A_5	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	-1
		f_3	-1	1
	BS_1	r_1	-1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	0,707	-0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	-1
		t_3	1	0
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	-1	1

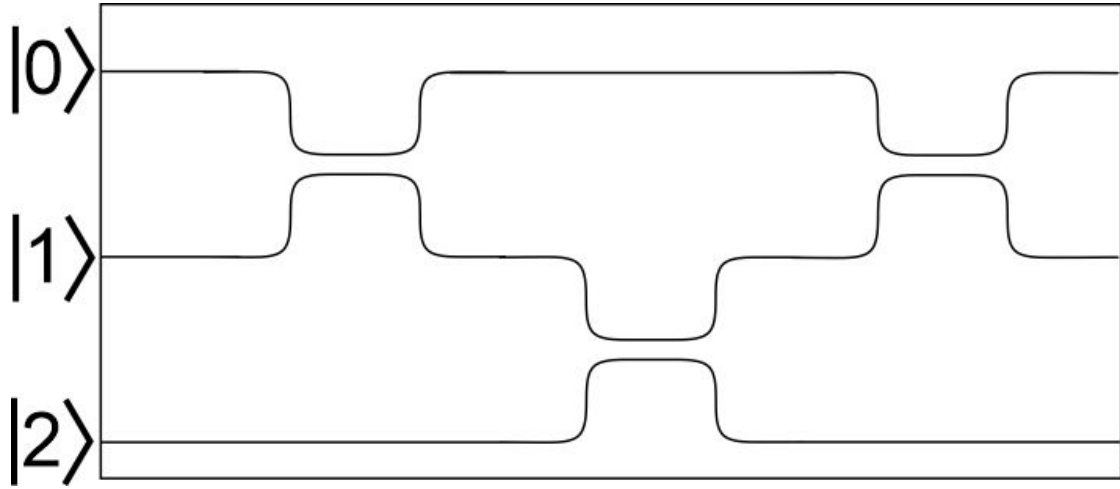


Figura 18 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_1^r . Utilizamos a convenção de excluir os elementos visuais quando os mesmos representarem uma operação equivalente à identidade. U_1^r é precisamente a operação identidade aqui.

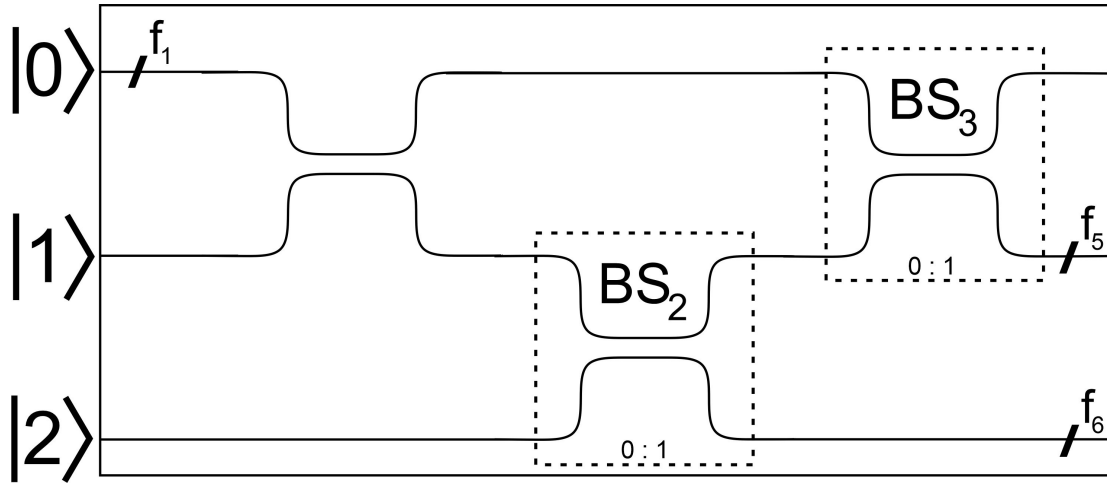


Figura 19 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_1^p . Através da Tabela 2 vemos que para o circuito em questão $r_1 = -1$ e $f_1 = 1$, porém dado que BS_1 apenas gera uma aplicação de fase π no estado $|0\rangle$ é possível transpor operação para PS_a , fazendo $f_1 = -1$ e $r_1 = 1$, logo essa é mais uma adaptação pós-cálculo dos parâmetros possível de ser realizada nos designs dos circuitos.

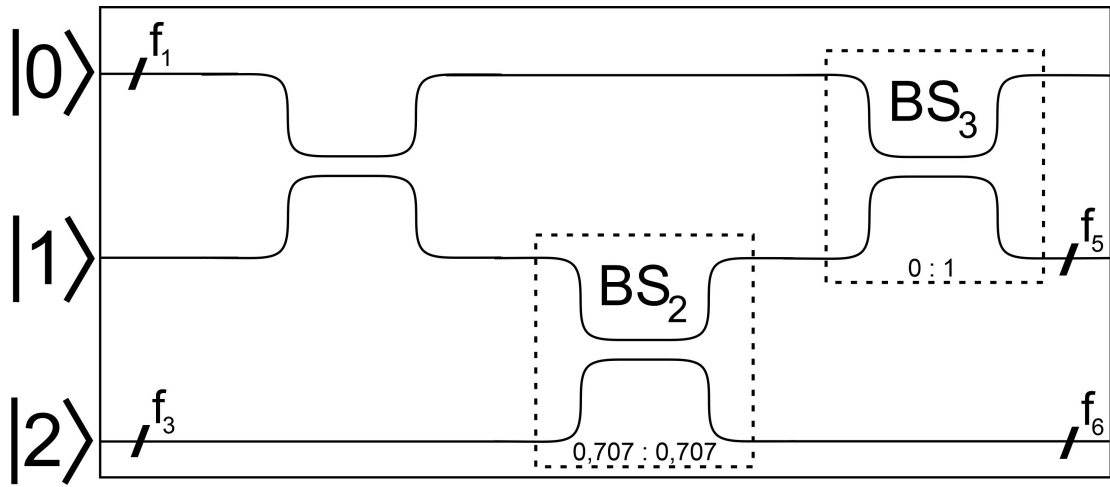


Figura 20 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_5^r .

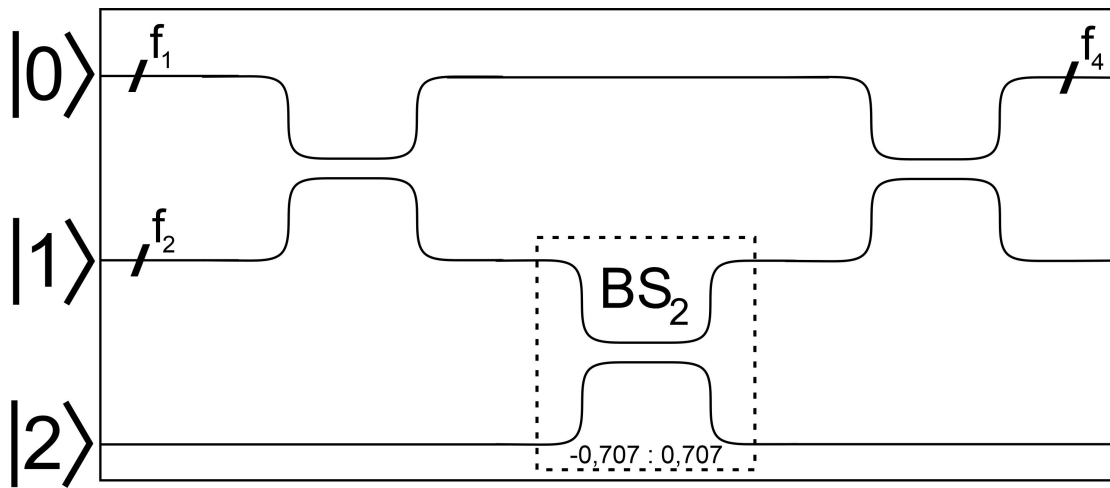


Figura 21 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_5^p .

Tabela 4 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_{12} .

			U_{12}^r	U_{12}^p
A_{12}	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-0,707	-1
		t_1	-0,707	0
	BS_2	r_2	0,816	0,577
		t_2	0,577	0,816
	BS_3	r_3	0	0,707
		t_3	1	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

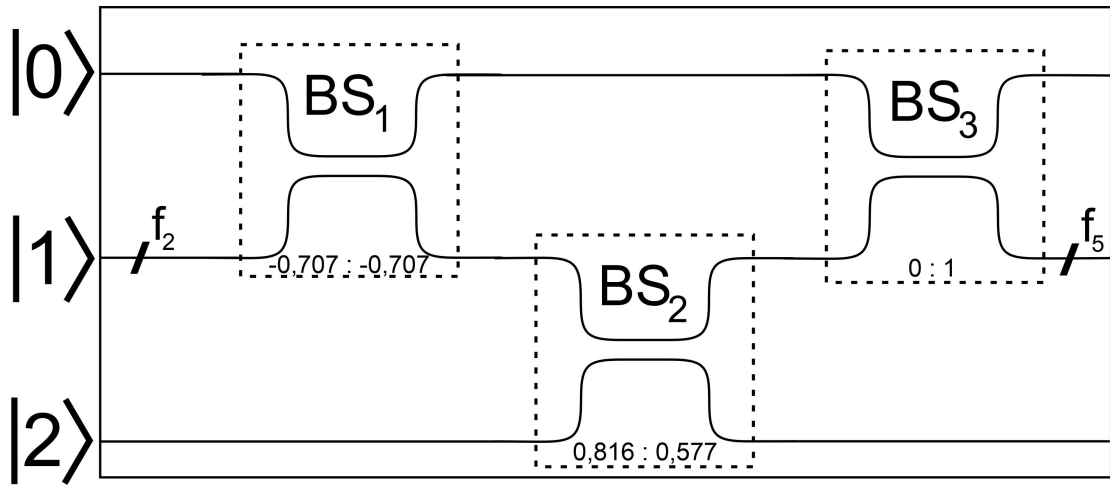


Figura 22 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_{12}^r .

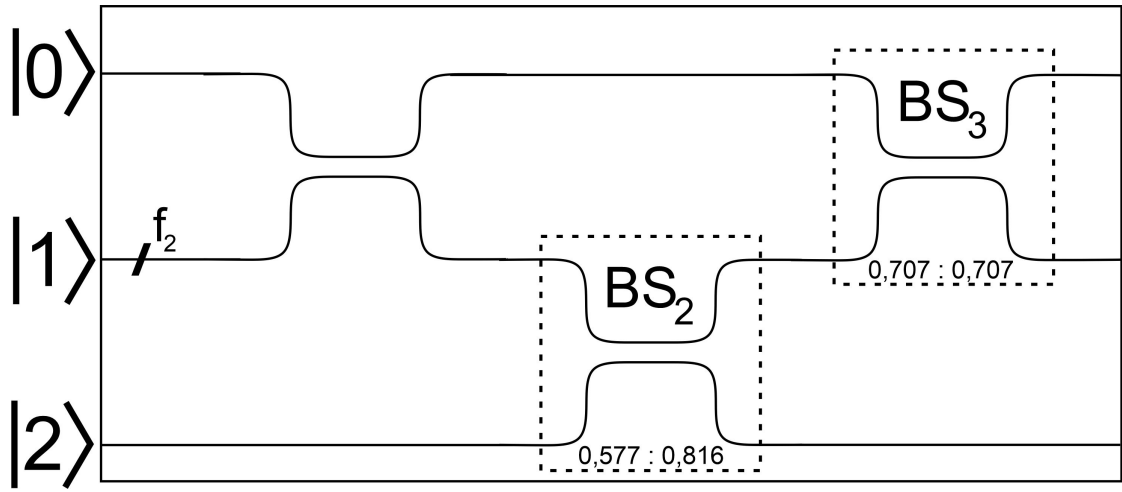


Figura 23 – Parâmetros e Design da Operação Unitária U_{12}^p .

6 Conclusão

A impossibilidade de descrever sistemas quânticos através de variáveis ocultas não-contextuais comprovada por violações experimentais das desigualdades de não-contextualidade [18, 30, 31] é mais uma demonstração da capacidade que sistemas quânticos possuem de oferecerem correlações mais fortes que as esperadas por nossa intuição clássica ou por modelos clássicos. Essas correlações quânticas, que também podem ser visualizadas através de outros fenômenos como o emaranhamento [56] e mais fundamentalmente na interferência quântica [57], podem ser vistos como o recurso que a natureza oferece para realização de protocolos de informação quântica que prometem superar protocolos clássicos de informação em velocidade e eficiência. O fenômeno da contextualidade em si já foi observado como fundamental para realização da computação quântica baseada em medições [58, 59] e também para distribuição quântica de chaves [60] e geração de números aleatórios [61]. Dessa forma o estudo da contextualidade quântica apresenta uma importância tanto para um melhor entendimento de questões fundamentais da natureza quântica bem como para aplicações em protocolos das mais diversas utilidades.

Nesta dissertação revimos os fundamentos da contextualidade quântica, as desigualdades de não-contextualidade, as medições sequenciais e os circuitos fotônicos fabricados em vidros visando a sua utilização como interferômetro para a realização física de testes destas desigualdades. O caminho percorrido para obtenção dessas propostas foi bastante multi temático. Estudamos os conceitos de contextualidade quântica com foco nas diversas desigualdades disponíveis, suas particularidades e implementações experimentais. Buscamos os detalhes de plataformas físicas para realização dos testes com fótons e suas vantagens e desvantagens, com a escolha final sendo por circuitos fotônicos fabricados com a técnica de escrita direta por laser de femtossegundo (*FLDW*).

Com o estudo das desigualdades de não-contextualidade e das plataformas físicas para realização dos testes concluído buscamos obter uma metodologia adequada e sistemática para obtenção de um design de circuito fotônico e seus

parâmetros de forma a implementar experimentalmente as operações desejadas, resultando nos designs apresentados no Capítulo 4. Portanto, restando apenas o cálculo dos parâmetros dos circuitos fotônicos, que a princípio se mostrou bastante demorado e por isso foi automatizado em um algoritmo em *Python*, decorrendo em uma metodologia sistemática para obtenção de designs de circuito fotônico de qutrits e um algoritmo para o cálculo dos parâmetros do teste independente de estado em qutrits e para qualquer n-ciclo em qutrits.

Obtivemos neste trabalho os parâmetros para a fabricação de um total de 18 chips fotônicos para realização de dois testes de não-contextualidade via medição sequenciais em qutrits, um dependente de estado, proveniente do cenário n-ciclo, e um independente de estado, proveniente do cenário de Yu e Oh, e adaptado por Cabello *et al* [43]. Além disso, incluímos nestas propostas uma correção para as condições de compatibilidade proposta por Cabello *et al* [46] de forma a contornar pequenas diferenças de fabricação nos diferentes chips que são necessários para os testes sequenciais.

Perspectivas futuras em relação a este trabalho incluem a fabricação dos chips fotônicos propostos e realização dos experimentos, assim realizando mais um passo na verificação da presença do fenômeno da contextualidade quântica em sistemas fotônicos e na validação dos circuitos fotônicos fabricados com a técnica de escrita direta por laser de femtossegundo como plataforma física para realização de protocolos e tecnologias quânticas que utilizem essas correlações não-clássicas como recurso.

Referências

- [1] Costantino Budroni, Adán Cabello, Otfried Gühne Matthias Kleinmann e Jan Åke Larsson: *Quantum Contextuality*. arXiv:2102.13036 [quant-ph], (2021). <https://arxiv.org/abs/2102.13036>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 19.
- [2] Lorentz, H. A. e Instituts Solvay. Conseil de physique.: *Electrons et photons. Rapports et discussions du cinquieme Conseil de physique tenu a Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927 sous les auspices de l'Institut international de physique Solvay*. Paris, Gauthier-Villars et cie, 1928s, (1928). https://dipot.ulb.ac.be/dspace/bitstream/2013/234806/3/DL2256969_000_f.pdf. Citado na página 12.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys. Rev., 47:777–780, 1935. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>. Citado na página 12.
- [4] Broglie, Louis De: *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d'affectation, (1924). <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006807>. Citado na página 12.
- [5] Bohm, David: *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I*. Phys. Rev., 85:166–179, (1952). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.166>. Citado na página 12.
- [6] Bohm, David: *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. II*. Phys. Rev., 85:180–193, (1952). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.180>. Citado na página 12.

- [7] Bell, J. S.: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*. Physics Physique Fizika, 1:195–200, (1964). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- [8] Kochen, Simon e Ernst Specker: *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*. Indiana Univ. Math. J., 17:59–87, (1968), ISSN 0022-2518. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- [9] Gleason, Andrew: *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*. Indiana Univ. Math. J., 6:885–893, (1957), ISSN 0022-2518. Citado na página 13.
- [10] Freedman, Stuart J. e John F. Clauser: *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*. Phys. Rev. Lett., 28:938–941, 1972. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938>. Citado na página 13.
- [11] Alain Aspect, Jean Dalibard e Gérard Roger: *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*. Phys. Rev. Lett., 49:1804–1807, 1982. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>. Citado na página 13.
- [12] Mermin, N. David: *Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems*. Physical Review Letters, 65(3373), (1990). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- [13] Mermin, N. David: *Hidden variables and the two theorems of John Bell*. Reviews Of Modern Physics, 65(803), (1993). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- [14] Peres, Asher: *Incompatible results of quantum measurements*. Physics Letters A, 151(3-4):107–108, (1990). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- [15] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne e Anton Zeilinger: *Going Beyond Bell's Theorem*, 2007. Citado na página 13.
- [16] Spekkens, R. W.: *Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements*. Phys. Rev. A, 71:052108, 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052108>. Citado na página 14.

- [17] Alexander A. Klyachko, M. Ali Can, Sinem Binicio ğlu e Alexander S. Shumovsky: ***Simple Test for Hidden Variables in Spin-1 Systems***. Physical Review Letters, 101:020403, (2008). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.020403>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 21 e 23.
- [18] Radek Lapkiewicz, Peizhe Li, Christoph Schaeff Nathan K. Langford Sven Ramelow Marcin Wieśniak e Anton Zeilinger: ***Experimental non-classicality of an indivisible quantum system***. Nature, 474:490–493, 2011. <https://doi.org/10.1038/nature10119>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 22 e 74.
- [19] Cabello, Adán: ***Experimentally Testable State-Independent Quantum Contextuality***. Physical Review Letters, 101(210401), (2008). Citado 4 vezes nas páginas 14, 17, 18 e 21.
- [20] g, Ingemar Bengtsson, Adán Cabello Piotr Badzia e Itamar Pitowsky: ***Universality of State-Independent Violation of Correlation Inequalities for Noncontextual Theories***. Physical Review Letters, 103:050401, 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.050401>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.
- [21] Vorob'ev, N. N.: ***Consistent Families of Measures and Their Extensions***. Theory of Probability & Its Applications, 7(2):147–163, 1962. <https://doi.org/10.1137/1107014>. Citado na página 14.
- [22] Pitowsky, Itamar: ***George Boole's 'Conditions of Possible Experience' and the Quantum Puzzle***. The British Journal for the Philosophy of Science, 45(1):95–125, 1994. <https://doi.org/10.1093/bjps/45.1.95>. Citado na página 14.
- [23] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt: ***Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories***. Physical Review Letters, 23:880–884, (1969). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 22 e 23.
- [24] Mateus Araújo, Marco Túlio Quintino, Costantino Budroni Marcelo Terra Cunha e Adán Cabello: ***All noncontextuality inequalities for the n -***

- cycle scenario*. Phys. Rev. A, 88:022118, 2013. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.022118>. Citado na página 14.
- [25] Nielsen, Michael A. e Isaac L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011, ISBN 9781107002173. <https://www.amazon.com/Quantum-Computation-Information-10th-Anniversary/dp/1107002176?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=1107002176>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 29 e 31.
- [26] Barnett, Stephen: *Quantum Information*. Oxford University Press, Inc., USA, 2009, ISBN 0198527632. Citado 3 vezes nas páginas 15, 29 e 31.
- [27] Ballentine, Leslie E.: *Quantum Mechanics: A Modern Development*. Cambridge University Press, 1998, ISBN 9810241054. <https://www.amazon.com/Quantum-Computation-Information-10th-Anniversary/dp/1107002176?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=1107002176>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 29 e 31.
- [28] Araújo Santos, Mateus de: *Quantum realism and quantum surrealism*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 17, 23 e 24.
- [29] Boole, G.: *On the theory of probabilities*. Phil. Trans. R. Soc., 152:225–252, 1862. <https://doi.org/10.1098/rstl.1862.0015>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.
- [30] Elias Amselem, Magnus Rådmark, Mohamed Bourennane e Adán Cabello: *State-Independent Quantum Contextuality with Single Photons*. Physical Review Letters, 103(160405), (2009). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 74.
- [31] G. Kirchmair, F. Zähringer, R. Gerritsma M. Kleinmann O. Gühne A. Cabello R. Blatt e C. F. Roos: *State-independent experimental test of quantum*

- contextuality**. Nature, 460:494–497, (2009). Citado 3 vezes nas páginas 19, 22 e 74.
- [32] Christoph Simon, Časlav Brukner e Anton Zeilinger: **Hidden-Variable Theorems for Real Experiments**. Physical Review Letters, 86(4427), (2001). Citado na página 21.
- [33] Larsson, J. Å.: **A Kochen-Specker inequality**. Europhysics Letters (EPL), 58(6):799–805, (2002). Citado na página 21.
- [34] Vorob'ev, N. N.: **Consistent Families of Measures and Their Extensions**. Theory of Probability & Its Applications, 7(2):147–163, (1962). Citado na página 23.
- [35] Yeong-Cherng Liang, Robert W. Spekkens e Howard M. Wiseman: **Specker's parable of the overprotective seer: A road to contextuality, nonlocality and complementarity**. Physics Reports, 506(1):1–39, 2011, ISSN 0370-1573. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157311001517>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- [36] Fine, Arthur: **Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities**. Phys. Rev. Lett., 48:291–295, 1982. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.291>. Citado na página 24.
- [37] Alain Aspect, Jean Dalibard e Gérard Roger: **Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers**. Phys. Rev. Lett., 49:1804–1807, 1982. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>. Citado na página 24.
- [38] Gilberto Borges, Marcos Carvalho, Pierre Louis de Assis José Ferraz Mateus Araújo Adán Cabello Marcelo Terra Cunha Sebastião
btxfnamespacelong ao Pádua: **Quantum contextuality in a Young-type interference experiment**. Phys. Rev. A, 89:052106, 2014. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.052106>. Citado na página 25.

- [39] Júnior, Gilberto Ferreira Borges: *A contextualidade da interferência condicional de dois fótons: um estudo em múltiplos cenários*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2013. Citado na página 25.
- [40] Yu, Sixia e C. H. Oh: *State-Independent Proof of Kochen-Specker Theorem with 13 Rays*. Physical Review Letters, 108:030402, 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.030402>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- [41] Academy), Graph Editor (CS: https://csacademy.com/app/graph_editor/. Acesso em 10 de janeiro de 2022. Citado na página 26.
- [42] Matthias Kleinmann, Costantino Budroni, Jan Åke Larsson Otfried Gühne e Adán Cabello: *Optimal Inequalities for State-Independent Contextuality*. Physical Review Letters, 109:250402, 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.250402>. Citado na página 26.
- [43] Adán Cabello, Elias Amselem, Kate Blanchfield Mohamed Bourennane e Ingemar Bengtsson: *Proposed experiments of qutrit state-independent contextuality and two-qutrit contextuality-based nonlocality*. Physics Review A, 85(032108), (2012). Citado 3 vezes nas páginas 27, 56 e 75.
- [44] Gerlach, Walter e Otto Stern: *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld*. Zeitschrift für Physik, 9:349–352, 1922. <https://doi.org/10.1007/BF01326983>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.
- [45] Peres, A.: *Quantum Theory: Concepts and Methods*, p. 203. Kluwer, Dordrecht, (1995). Citado na página 34.
- [46] Otfried Gühne, Matthias Kleinmann, Adán Cabello Jan Åke Larsson Gerhard Kirchmair Florian Zeilinger Rene Gerritsma e Christian F. Roos: *Compatibility and noncontextuality for sequential measurements*. Physics Review A, 81(022121), (2010). Citado 4 vezes nas páginas 34, 36, 58 e 75.
- [47] Alberto Politi, Martin J. Cryan, John G. Rarity Siyuan Yu e Jeremy L. O’Brien: *Silica-on-Silicon Waveguide Quantum Circuits*. Science,

- 320(5876):646–649, 2008, ISSN 1095-9203. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1155441>. Citado na página 41.
- [48] Jay E. Sharping, Kim Fook Lee, Mark A. Foster Amy C. Turner Bradley S. Schmidt Michal Lipson Alexander L. Gaeta e Prem Kumar: ***Generation of correlated photons in nanoscale silicon waveguides***. Opt. Express, 14(25):12388–12393, 2006. <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-14-25-12388>. Citado na página 41.
- [49] J. Leuthold, C. Koos e W. Freude: ***Nonlinear silicon photonics***. Nature Photonics, 4:535–544, 2010. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.185>. Citado na página 41.
- [50] S. M. Hendrickson, A. C. Foster, R. M. Camacho e B. D. Clader: ***Integrated nonlinear photonics: emerging applications and ongoing challenges [Invited]***. J. Opt. Soc. Am. B, 31(12):3193–3203, 2014. <http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-31-12-3193>. Citado na página 41.
- [51] K. M. Davis, K. Miura, N. Sugimoto e K. Hirao: ***Writing waveguides in glass with a femtosecond laser***. Opt. Lett., 21(21):1729–1731, 1996. <http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-21-21-1729>. Citado na página 41.
- [52] Thomas Meany, Markus Gräfe, René Heilmann Armando Perez Leija Simon Gross Michael J. Steel Michael J. Withford e Alexander Szameit: ***Laser written circuits for quantum photonics***. Laser & Photonics Reviews, 9(4):363–384, 2015. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.201500061>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- [53] S Nolte, M. Will, J. Burghoff e A. Tuennermann: ***Femtosecond waveguide writing: a new avenue to three-dimensional integrated optics***. Applied Physics A, 77:109–111, 1996. <https://doi.org/10.1007/s00339-003-2088-6>. Citado na página 42.
- [54] Graham D. Marshall, Alberto Politi, Jonathan C. F. Matthews Peter Dekker Martin Ams Michael J. Withford e Jeremy L. O’Brien: ***Laser written waveguide photonic quantum circuits***. Opt. Express, 17(15):12546–12554, 2009.

- <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-17-15-12546>. Citado na página 43.
- [55] Meng Li, Qian Zhang, Yang Chen Xifeng Ren Qihuang Gong e Yan Li: ***Femto-second Laser Direct Writing of Integrated Photonic Quantum Chips for Generating Path-Encoded Bell States***. Micromachines, 11(12), 2020, ISSN 2072-666X. <https://www.mdpi.com/2072-666X/11/12/1111>. Citado na página 43.
- [56] Robert Prevedel, Markus Aspelmeyer, Caslav Brukner Anton Zeilinger e Thomas D. Jennewein: ***Photonic entanglement as a resource in quantum computation and quantum communication***. J. Opt. Soc. Am. B, 24(2):241–248, 2007. <http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-24-2-241>. Citado na página 74.
- [57] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso e Martin B. Plenio: ***Colloquium: Quantum coherence as a resource***. Reviews of Modern Physics, 89(4), 2017, ISSN 1539-0756. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.89.041003>. Citado na página 74.
- [58] Anders, Janet e Dan E. Browne: ***Computational Power of Correlations***. Phys. Rev. Lett., 102:050502, 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.050502>. Citado na página 74.
- [59] Raussendorf, Robert: ***Contextuality in measurement-based quantum computation***. Phys. Rev. A, 88:022322, 2013. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.022322>. Citado na página 74.
- [60] Bechmann-Pasquinucci, Helle e Asher Peres: ***Quantum Cryptography with 3-State Systems***. Phys. Rev. Lett., 85:3313–3316, 2000. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.3313>. Citado na página 74.
- [61] Alastair A. Abbott, Cristian S. Calude, Jonathan Conder e Karl Svozil: ***Strong Kochen-Specker theorem and incomputability of quantum randomness***. Phys. Rev. A, 86:062109, 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.062109>. Citado na página 74.

APÊNDICE A – Cálculo dos parâmetros

```

from math import *
import numpy as np

##### DADOS INICIAIS #####

respostas = []

produtos = []

states_yuoh = [[1,0,0],
               [0,1,0],
               [0,0,1],
               [0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)],
               [0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2)],
               [1/sqrt(2),0,1/sqrt(2)],
               [-1/sqrt(2),0,1/sqrt(2)],
               [1/sqrt(2),1/sqrt(2),0],
               [1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0],
               [1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3)],
               [-1/sqrt(3),1/sqrt(3),1/sqrt(3)],
               [1/sqrt(3),-1/sqrt(3),1/sqrt(3)],
               [1/sqrt(3),1/sqrt(3),-1/sqrt(3)]]

states_ncycle = []

##### Funções utilitárias
d = 10**(-6) #margem de erro

def sign(x):

```

```
#Retorna o sinal de um numero real x
if x >= 0.:
    return 1.0
elif x < 0.:
    return -1.0

def check_zeros(M):
    #Atribui valor 0. a valores menores que d de uma Matriz M
    for i in range(0,len(M)):
        if abs(M[i]) < d:
            M[i] = 0.
    return M

def signsolver3(s12,s23,s13):
    #Resolve o problema das fases dos Divisores de Feixe
    s = [s12,s23,s13]
    produtos_s = [[1, 1, 1],
                  [1, -1, -1],
                  [-1, -1, 1],
                  [-1, 1, -1]]
    respostas_a = [[1, 1, 1,],
                  [1, 1, -1],
                  [1, -1, 1],
                  [1, -1, -1]]
    respostas_b = [[-1, -1, -1,],
                  [-1, -1, 1],
                  [-1, 1, -1],
                  [-1, 1, 1]]
    possibilities = []

    for i in range(0,4):
        if s == produtos_s[i]:
            possibilities.append(respostas_a[i])
```

```
possibilities.append(respostas_b[i])

if possibilities == []:
    s = [-s[0],-s[1],-s[2]]
    if s == produtos_s[i]:
        possibilities.append(respostas_a[i])
        possibilities.append(respostas_b[i])

valor = []

for i in range(0,len(possibilities)):
    v = 0
    for j in range(0,len(possibilities[i])):
        v += possibilities[i][j]
    valor.append(v)

p = 0

for i in range(1,len(valor)):
    if valor[i] > valor[p]:
        p = i

return possibilities[p]

def signsolver6(U,x,y,z):
    #Resolve o problema das fases de entrada e saída
    M = [[x[0],y[0],z[0]],
          [x[1],y[1],z[1]],
          [x[2],y[2],z[2]]]

    possibilidades = []
```

```
S = signmatrix(M,U)

for i in range(0,len(produtos)):
    if mtxsignchecker(produtos[i],S):
        possibilidades.append(respostas[i])

valor = []

for i in range(0,len(possibilidades)):
    v = 0
    for j in range(0,len(possibilidades[i])):
        v += possibilidades[i][j]
    valor.append(v)

p = 0

for i in range(1,len(valor)):
    if valor[i] > valor[p]:
        p = i

return possibilidades[p]

def signmatrix(U,M):
    S = [[0,0,0],
          [0,0,0],
          [0,0,0]]
    for i in range(0,3):
        for j in range(0,3):
            if U[i][j] != 0 and M[i][j] != 0:
                S[i][j] = sign(U[i][j]*M[i][j])
            elif U[i][j] == 0 or M[i][j] == 0:
                S[i][j] == 0
    return S
```

```
def resps():
    for i in range(0,64):
        subr = []
        x = bin(i)[2:]
        while len(x) < 6:
            x = '0' + x
        for i in range(0,len(x)):
            subr.append((-1)**int(x[i]))
        respostas.append(subr)

def gerador_produtos():
    for i in range(0,len(respostas)):
        r = respostas[i]
        Mp = [[r[0]*r[3],r[1]*r[3],r[2]*r[3]],
               [r[0]*r[4],r[1]*r[4],r[2]*r[4]],
               [r[0]*r[5],r[1]*r[5],r[2]*r[5]]]
        produtos.append(Mp)

##### FUNÇÕES DE INICIALIZAÇÃO #####

def start_data():
    resps()
    gerador_produtos()

def start_indep():
    D = []
    for i in range(0,13):
        print("Índice i = ",i)
        D.append(circuit_maker(states_yuoh[i]))
    return D

def start_dep(n):
```

```

states_ncycle = ncycle(n)
D = []
for i in range(0,n):
    print("Índice i = ",i)
    D.append(circuit_maker(states_ncycle[i]))
return D

##### Funções específicas do n-ciclo
def ncycle(n):
    #Calcula os estados do n-ciclo em 3D
    S = []
    if n < 2:
        return "Escolha o valor maior ou igual a 2"
    for k in range(1, n+1):
        cos_theta = (cos(pi/n)/(1 + cos(pi/n)))*0.5
        sin_theta = (1 - cos_theta**2)**0.5
        phi_k = (n - 1)*pi*k/n
        v = [cos_theta, sin_theta*cos(phi_k), sin_theta*sin(phi_k)]
        v = check_zeros(v)
        S.append(v)
    return S

def observables_ncycle(S):
    #Calcula os observáveis A_i do n-ciclo
    A = []
    for i in range(0,len(S)):
        kb = ketbra(S[i])
        A_k = mtx_op(2.,kb,-1.)
        A.append(A_k)
    return A

```

```
##### Cálculo dos Observáveis A_i
def ketbra(v):
    #Calcula  $|v\rangle\langle v|$ 
    M = []
    n = len(v)
    for i in range(0,n):
        M_i = []
        for j in range(0,n):
            M_ij = v[i]*v[j]
            M_i.append(M_ij)
        M.append(M_i)
        M_i = check_zeros(M_i)
    return M

def mtx_op(a,M,b):
    #Calcula  $a*M + b*I$ 
    R = [[0.,0.,0.],[0.,0.,0.],[0.,0.,0.]]
    for i in range(0,len(M)):
        for j in range(0,len(M[i])):
            if i == j:
                R[i][j] = a*M[i][j] + b
            else:
                R[i][j] = a*M[i][j]
    for k in range(0,len(R)):
        R[k] = check_zeros(R[k])
    return R

def observables(V):
    #Calcula os observáveis A_i associados aos vetores V_i
    A = []
    for i in range(0,len(V)):
        kb = ketbra(V[i])
        A_k = mtx_op(-2.,kb, 1.)
```

```
A.append(A_k)
return A

##### Processo Ortonormalização de Gram-Schmidt
def prod_int(u,v):
    #Calcula o produto interno entre dois vetores u e v
    S = 0.
    for i in range(0,len(u)):
        S += u[i]*v[i]
    if abs(S) < d:
        S = 0.
    return S

def projector(u,v):
    #Calcula a projeção do vetor v sobre o vetor u (em 3 dimensões)
    VU = prod_int(v,u)
    UU = prod_int(u,u)
    proj_u = [0., 0., 0.]
    if UU != 0.:
        for i in range(0,len(u)):
            proj_u[i] = u[i]*VU/UU
    return proj_u

def normalize(v):
    #Normaliza o vetor v
    N = sqrt(prod_int(v,v))
    if N != 0.:
        for i in range(0,3):
            v[i] = v[i]/N
    return v

def gram_schmidt(v_1,v_2,v_3):
    #Realiza o processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt sobre v_1,v_2,v_3
```

```

    u_1 = v_1
    u_2 = [0.,0.,0.]
    u_3 = [0.,0.,0.]
    for i in range(0,3):
        u_2[i] = v_2[i] - projector(u_1,v_2)[i]
    for i in range(0,3):
        u_3[i] = v_3[i] - projector(u_1,v_3)[i] - projector(u_2,v_3)[i]
    e_1 = normalize(u_1)
    e_2 = normalize(u_2)
    e_3 = normalize(u_3)
    return (e_1,e_2,e_3)

##### Funções de Criação do Chip
def states(v): #Encontra estados ortogonais a v
    if v[0] != 0:
        u = [-v[1]/v[0], 1., 0.]
        w = [-v[2]/v[0], 0., 1.]
        (v,u,w) = gram_schmidt(v,u,w)
    elif v[0] == 0 and v[1] != 0:
        u = [1.,0.,0.]
        w = [0.,-v[2]/v[1], 1.]
        (v,u,w) = gram_schmidt(v,u,w)
    elif v[0] == 0 and v[1] == 0:
        u = [1.,0.,0.]
        w = [0.,1.,0.]
    return (v,u,w)

def projective_circuit_maker(x,y,z):
    #Gera uma unitária de BS que transforma o estado
    #|0> em |x>, |1> em |y> e |2> em |z>
    #Sinais
    sinais = signsolver3(sign(x[2]),sign(z[0]),sign(x[2]*z[0]))
    #r_2

```

```

r_2 = z[2]
#t_2
if 1 - r_2**2 < 0:
    t_2 = 0.
elif 1 - r_2**2 >= 0:
    t_2 = sqrt(1 - r_2**2)*sinais[1]
#r_3
if t_2 != 0:
    r_3 = -z[1]/t_2
elif t_2 == 0 and x[1] == 0:
    r_3 = 1.
elif t_2 == 0 and x[0] == 0:
    r_3 = 1/sqrt(2)
elif t_2 == 0 and abs(x[1]) != 1:
    r_3 = 2*x[0]*x[1]/sqrt(1 + x[0]**2 - x[1]**2 + (2*x[0]*x[1])**2)
#t_3
if 1 - r_3**2 < 0:
    t_3 = 0.
elif 1 - r_3**2 >= 0:
    t_3 = sqrt(1 - r_3**2)*sinais[2]
#r_1
if t_2 != 0:
    r_1 = -y[2]/t_2
elif t_2 == 0 and x[1] == 0:
    r_1 = 1.
elif t_2 == 0 and x[0] == 0:
    r_1 = 1/sqrt(2)
elif t_2 == 0 and abs(x[1]) != 1:
    r_1 = t_3*x[1] + r_3*x[0]
#t_1
if 1 - r_1**2 < 0:
    t_1 = 0.
elif 1 - r_1**2 >= 0:

```

```

    t_1 = sqrt(1 - r_1**2)*sinais[0]
#unitaria esperada
M = [[x[0],y[0],z[0]],
      [x[1],y[1],z[1]],
      [x[2],y[2],z[2]]]
#unitaria
U = [[r_1*r_3 - r_2*t_1*t_3, -r_3*t_1 - r_1*r_2*t_3, t_2*t_3 ],
      [r_1*t_3 + r_2*r_3*t_1, r_1*r_2*r_3 - t_1*t_3 , -r_3*t_2],
      [t_1*t_2 , r_1*t_2 , r_2 ]]

bs1 = (r_1, t_1)
bs2 = (r_2, t_2)
bs3 = (r_3, t_3)
phases = signsolver6(U,x,y,z)
ps1 = (phases[0],phases[1],phases[2])
ps2 = (phases[3],phases[4],phases[5])
phase_shifter1 = [[phases[0], 0, 0],
                  [0, phases[1], 0],
                  [0, 0, phases[2]]]
phase_shifter2 = [[phases[3], 0, 0],
                  [0, phases[4], 0],
                  [0, 0, phases[5]]]

U = mtxprod(U,phase_shifter1)
U = mtxprod(phase_shifter2,U)

for l in range(0,len(U)):
    U[l] = check_zeros(U[l])

bsok = bs_checker([ps1,bs1,bs2,bs3,ps2],M)
mtxok = mtxchecker(U,M)

if bsok and mtxok:

```

```

        print("Resultado: ", True)
        return [ps1,bs1,bs2,bs3,ps2]
    else:
        print("Design -> Unitária: ", bsok)
        print("Unitária -> Design: ", mtxok)
        return "Erro!"

def circuit_maker(v):
    #Encontra o design BS de circuito que realiza uma unitária U
    #que transforma o estado  $|2\rangle$  em  $|v\rangle$ 
    (v,u,w) = states(v)
    a = [v[0],u[0],w[0]]
    b = [v[1],u[1],w[1]]
    c = [v[2],u[2],w[2]]
    BS_pre = projective_circuit_maker(a,b,c)
    BS_pos = projective_circuit_maker(u,w,v)
    return (BS_pre,BS_pos)

def bs2unitary(BS):
    #Encontra a Unitária de Qutrit associada ao design de circuito BS
    (f1, f2, f3) = BS[0]
    (r_1, t_1) = BS[1]
    (r_2, t_2) = BS[2]
    (r_3, t_3) = BS[3]
    (f4, f5, f6) = BS[4]
    PS_1 = [[f1, 0, 0],
            [0, f2, 0],
            [0, 0, f3]]
    PS_2 = [[f4, 0, 0],
            [0, f5, 0],
            [0, 0, f6]]
    BS_1 = [[r_1,-t_1,0.],
            [t_1, r_1,0.],

```

```

        [0., 0., 1.]]
    BS_2 = [[1., 0., 0.],
            [0., r_2, -t_2],
            [0., t_2, r_2]]
    BS_3 = [[r_3, -t_3, 0.],
            [t_3, r_3, 0.],
            [0., 0., 1.]]
    M = mtxprod(PS_2, mtxprod(BS_3, mtxprod(BS_2, mtxprod(BS_1, PS_1))))
    return M

def circuit(v):
    #calcula U(A_i)
    (BS1, BS2) = circuit_maker(v)
    BSA = bs2unitary(BS1)
    BSB = bs2unitary(BS2)
    U1 = [[1., 0., 0., 0., 0., 0.],
           [0., 1., 0., 0., 0., 0.],
           [0., 0., BSA[0][0], BSA[0][1], BSA[0][2], 0.],
           [0., 0., BSA[1][0], BSA[1][1], BSA[1][2], 0.],
           [0., 0., BSA[2][0], BSA[2][1], BSA[2][2], 0.],
           [0., 0., 0., 0., 0., 1.]]
    U2 = [[BSB[0][0], BSB[0][1], BSB[0][2], 0., 0., 0.],
           [BSB[1][0], BSB[1][1], BSB[1][2], 0., 0., 0.],
           [BSB[2][0], BSB[2][1], BSB[2][2], 0., 0., 0.],
           [0., 0., 0., BSB[0][0], BSB[0][1], BSB[0][2]],
           [0., 0., 0., BSB[1][0], BSB[1][1], BSB[1][2]],
           [0., 0., 0., BSB[2][0], BSB[2][1], BSB[2][2]]]
    U = mtxprod(U2, U1)
    return U

##### Algebra Matricial
def mtxprod(A,B): #Multiplicação de Matrizes
    lA = len(A)

```

```

cA = len(A[0])
lB = len(B)
cB = len(B[0])
C = np.zeros((lA,cB))
C = C.tolist()
if cA == lB:
    for i in range(0,lA):
        for j in range(0,cB):
            for k in range(0,cA):
                C[i][j] += A[i][k]*B[k][j]
            C[i] = check_zeros(C[i])
    return C
else:
    return "As matrizes não são multiplicáveis"

```

Funções de Testagem

```

def expval(Ak, Al, v):
    #calcula o valor esperado de A_k A_l sobre v
    vt = np.array(v)
    vt = np.transpose(vt)
    vt = Ut.tolist()
    vtAk = mtxprod(vt,Ak)
    Alv = mtxprod(Al,v)
    ev = mtxprod(vtAk,Alv)[0]
    return ev

```

```

def qu_ineq(n):
    #calcula o valor da desigualdade do n-ciclo
    A = start_ncycle(n)
    B = 0.
    v = [1., 0., 0.]
    for k in range(0,n - 1):

```

```

        B += (-1)*expval(A[k],A[k+1],v)
        print((-1)*expval(A[k],A[k+1]),v)
    B += (-1)*expval(A[n - 1],A[0],v)
    print((-1)*expval(A[n - 1],A[0]),v)
    return B

def check_observables():
    #Confere que os observáveis A[i] possuem o vetor V[i]
    #como autovetor de autovalor -1.
    A = observables()
    AV = []
    trueness = 0.
    for i in range(0,len(A)):
        av = circuit3D(A[i],V[i])
        AV.append(av)
    for i in range(0,len(V)):
        sinal_soma = 0.
        sinais = [0.,0.,0.]
        for j in range(0,len(V[i])):
            if V[i][j] == 0:
                sinal_soma += -1.
                sinais[j] = -1.
            else:
                sinal_soma += AV[i][j]/V[i][j]
                sinais[j] = sign(AV[i][j]/V[i][j])
        if abs(sinal_soma + 3) > d:
            print("Os sinais do vetor ", i, "são ", sinais)
            trueness += 1.
    return (trueness == 0.)

def check_unitary(U):
    #Confere se uma matriz U é unitária.
    Ut = np.array(U)

```

```
Ut = np.transpose(Ut)
Ut = Ut.tolist()
R = mtxprod(Ut,U)
print(np.array(R))
for i in range(0,len(R)):
    for j in range(0,len(R[0])):
        if i == j and abs(R[i][j] - 1) > d:
            return False
        elif i != j and abs(R[i][j]) > 0.:
            return False
        else:
            return True

def mtxsignchecker(M,S):
    #Confere se os sinais de uma matriz M é igual ao
    #de uma matriz de sinais S
    status = True
    for i in range(0,3):
        for j in range(0,3):
            if S[i][j] != 0 and M[i][j] != 0:
                if M[i][j] != S[i][j]:
                    status = False
    return status

def mtxchecker(A,B):
    #Confere se duas matrizes são iguais
    status = 0
    for i in range(0,3):
        for j in range(0,3):
            if abs(A[i][j] - B[i][j]) > d:
                status += 1
    return (status == 0)
```

```
def bs_checker(BS,U):  
    #Confere se um design de BS gera a unitária desejada  
    UBS = bs2unitary(BS)  
    return mtxchecker(U,UBS)  
  
#####EXECUÇÃO#####  
start_data()
```

APÊNDICE B – Parâmetros dos observáveis de teste elementar do cenário 5-ciclo em qutrits

Tabela 5 – Parâmetros experimentais
para implementação do
observável A_0

			U^r	U^p
A_0	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	1	-1
		f_3	+1	1
	BS_1	r_1	-0,669	1
		t_1	-0,743	0
	BS_2	r_2	0,9	0,437
		t_2	0,437	0,9
	BS_3	r_3	0	0,669
		t_3	1	0,743
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 6 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_1

			U_1^r	U_1^p
A_1	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0,325	-1
		t_1	0,946	0
	BS_2	r_2	0,707	-0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	-0,325
		t_3	-1	0,946
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 7 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_2

			U_2^r	U_2^p
A_2	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0,325	-1
		t_1	-0,946	0
	BS_2	r_2	0,707	0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	-0,325
		t_3	1	0,946
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 8 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_3

			U_3^r	U_3^p
A_3	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0,669	-1
		t_1	0,743	0
	BS_2	r_2	0,9	-0,437
		t_2	0,437	0,9
	BS_3	r_3	0	0,669
		t_3	-1	0,743
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 9 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_4

			U_4^r	U_4^p
A_4	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-0,997	-1
		t_1	0,078	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	-0,725	-0,743
		t_3	0,689	0,669
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	1
		f_6	1	-1

APÊNDICE C – Parâmetros dos observáveis de teste elementar do cenário independente de estado em qutrits

Tabela 10 – Parâmetros experimentais
para implementação do ob-
servável A_1

			U_1^r	U_1^p
A_1	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	1	0
		t_3	0	1
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	-1
		f_6	1	-1

Tabela 11 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_2

			U_2^r	U_2^p
A_2	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0,707	-1
		t_1	0,707	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	0,707	-1
		t_3	0,707	0
	PS_b	f_4	-1	x
		f_5	1	x
		f_6	1	x

Tabela 12 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_3

			U_3^r	U_3^p
A_3	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-1	1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	0	1
		t_2	1	0
	BS_3	r_3	0	1
		t_3	1	0
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	-1	1

Tabela 13 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_4

			U_4^r	U_4^p
A_4	PS_a	f_1	1	1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	0,707	0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	-1
		t_3	1	0
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	1
		f_6	1	1

Tabela 14 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_5

			U_5^r	U_5^p
A_5	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	-1
		f_3	-1	1
	BS_1	r_1	-1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	0,707	-0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	-1
		t_3	1	0
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	-1	1

Tabela 15 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_6

			U_6^r	U_6^p
A_6	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0	-1
		t_1	-1	0
	BS_2	r_2	0,707	0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	0
		t_3	1	1
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	-1
		f_6	1	1

Tabela 16 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_7

			U_7^r	U_7^p
A_7	PS_a	f_1	1	1
		f_2	1	1
		f_3	1	-1
	BS_1	r_1	0	-1
		t_1	1	0
	BS_2	r_2	0,707	0,707
		t_2	0,707	0,707
	BS_3	r_3	0	0
		t_3	1	1
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	-1
		f_6	1	-1

Tabela 17 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_8

			U_8^r	U_8^p
A_8	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	-0,707	-0,707
		t_3	0,707	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	1
		f_6	1	-1

Tabela 18 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_9

			U_9^r	U_9^p
A_9	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	1	1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	1	-1
		t_1	0	0
	BS_2	r_2	1	0
		t_2	0	1
	BS_3	r_3	0,707	0,707
		t_3	0,707	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	1
		f_6	1	-1

Tabela 19 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_{10}

			U_{10}^r	U_{10}^p
A_{10}	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	0,707	-1
		t_1	-0,707	0
	BS_2	r_2	0,816	0,577
		t_2	0,577	0,816
	BS_3	r_3	0	-0,707
		t_3	1	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 20 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_{11}

			U_{11}^r	U_{11}^p
A_{11}	PS_a	f_1	1	1
		f_2	-1	1
		f_3	1	-1
	BS_1	r_1	0,707	1
		t_1	0,707	0
	BS_2	r_2	0,816	0,577
		t_2	0,577	0,816
	BS_3	r_3	0	-0,707
		t_3	1	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	1	-1
		f_6	1	-1

Tabela 21 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_{12}

			U_{12}^r	U_{12}^p
A_{12}	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-0,707	-1
		t_1	-0,707	0
	BS_2	r_2	0,816	0,577
		t_2	0,577	0,816
	BS_3	r_3	0	0,707
		t_3	1	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1

Tabela 22 – Parâmetros experimentais para implementação do observável A_{13}

			U_{13}^r	U_{13}^p
A_{13}	PS_a	f_1	1	-1
		f_2	-1	-1
		f_3	1	1
	BS_1	r_1	-0,707	-1
		t_1	0,707	0
	BS_2	r_2	0,816	-0,577
		t_2	0,577	0,816
	BS_3	r_3	0	-0,707
		t_3	-1	0,707
	PS_b	f_4	1	1
		f_5	-1	1
		f_6	1	1