

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

# Estudo do Bilhar no Anel de Círculos Excêntricos

Reginaldo Braz Batista

Orientadoras: Sylvie Oliffson Kamphorst e Sônia Pinto de Carvalho

2008

# Estudo do Bilhar no Anel de Círculos Excêntricos

Reginaldo Braz Batista

Orientadoras: Sylvie Oliffson Kamphorst e Sônia Pinto de Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito à obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

Belo Horizonte- MG

2008

## Resumo

Estudamos uma família a dois parâmetros de bilhares em mesas circulares com um obstáculo interno. A dinâmica do sistema é descrita pela ação de um homeomorfismo no cilindro compacto. Estudamos a estabilidade de pontos fixos e utilizamos as simetrias do problema para analisar o comportamento das variedades invariantes associadas a um ponto fixo hiperbólico. Provamos a existência de pontos homoclínicos para certos parâmetros e estudamos as implicações dinâmicas da ocorrência de interseção homoclínica com cruzamento topológico.

## **Abstract**

We study a two parameter family of billiards in circular tables with an internal obstacle. The dynamic is described by the action of an homeomorphism of the compact cylinder. We study the stability of the fixed points and we use the symmetries of the problem to analyze the behavior of the invariant manifolds of the hyperbolic fixed point. We prove the existence of homoclinic points for some parameters and we study the dynamical implication of the homoclinic intersection with topological crossing.

Para: Ari Guimarães Batista e Stella Braz Batista,  
Sílvia, Divina, Maristela e Bruno.

## Agradecimentos

Agradeço a Sylvie Oliffson Kamphorst e Sônia Pinto de Carvalho por todos os anos de orientação, aos professores Mário Jorge Dias Carneiro, Carlos Gustavo Moreira e José Antônio Miranda pela participação na banca, ao Departamento de Matemática da UFMG, a todos os professores que tive até hoje e aos meus amigos.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>O bilhar no anel excêntrico</b>	<b>13</b>
2.1	A aplicação do bilhar . . . . .	14
2.2	Dinâmica global . . . . .	20
2.3	Estrutura do espaço de fase . . . . .	22
2.3.1	Simetrias e órbitas periódicas . . . . .	23
2.3.2	As curvas $\beta$ constante e o conjunto de singularidades . . . . .	26
2.3.3	Imagens de retas verticais . . . . .	27
2.3.4	Imagens dos eixos de simetria . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Pontos fixos</b>	<b>33</b>
3.1	O ponto fixo elíptico . . . . .	34
3.2	O ponto fixo hiperbólico $(\pi, 0)$ . . . . .	35
3.2.1	Pontos homoclínicos . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Entropia topológica</b>	<b>43</b>

4.1	Critério geométrico para entropia topológica positiva . . . . .	45
4.2	Entropia topológica positiva do bilhar no anel excêntrico . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introdução

Consideremos uma partícula em movimento retilíneo uniforme no interior de uma região plana  $D$ , limitada por uma fronteira,  $\partial D$ , com a qual a partícula sofre colisões elásticas. A descrição do comportamento dinâmico desta partícula é o que chamamos de *Problema do bilhar na mesa  $D$* . Damos o nome de *Bilhar* ao sistema dinâmico definido pela situação descrita acima.

Os bilhares originalmente surgiram como modelos para tratar problemas de mecânica clássica, hoje são interessantes do ponto de vista teórico por constituírem fonte de exemplos e servirem para testes de conjecturas. De fato, estes sistemas apresentam diversos fenômenos dinâmicos variando entre os casos que poderíamos classificar como mais ordenados aos mais caóticos. Esses comportamentos são fundamentalmente determinados pela geometria da mesa.

Para a descrição matemática do problema podemos considerar a partícula se movendo com velocidade  $v$  unitária. O estado do sistema no instante  $t$  é dado pelo ponto  $(q_t, v_t) \in \overline{D} \times S^1$  sendo  $q_t$  a posição da partícula na mesa e  $v_t$  sua velocidade. A partir de um estado inicial  $(q_0, v_0)$  a partícula segue uma trajetória linear com velocidade constante  $v_0$  até sofrer um choque elástico com a fronteira, quando há uma mudança instantânea na direção da velocidade,  $v_0 \rightarrow v'_0$ , determinada por uma reflexão em relação à direção tangente à curva no ponto de choque. Podemos assim descrever a dinâmica por um fluxo

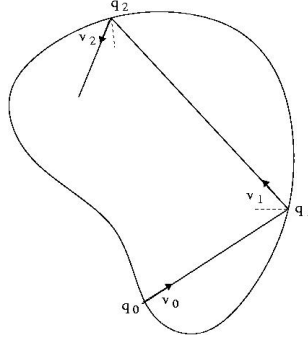


Figura 1.1: O movimento poligonal de uma partícula no bilhar

$\Phi^t : M \rightarrow M$ , onde  $M = \overline{D} \times S^1$  com a identificação  $(q, v) = (q, v')$  nos pontos em que  $q \in \partial D$ . (ver [6] ou [3] para uma definição mais detalhada)

A dinâmica do bilhar é mais comumente descrita por uma aplicação  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ , *A aplicação de bilhar*, onde  $\Omega := \{(q, v); q \in \partial D\}$  é o conjunto dos pontos de colisão na mesa. Dado um ponto  $(q_i, v_i) \in \Omega$  está associado um único ponto  $(q_{i+1}, v_{i+1}) \in \Omega$  correspondente à primeira colisão com o bordo da partícula que sai de  $q_i$  com velocidade  $v_i$ . Definimos:

$$T(q_i, v_i) := (q_{i+1}, v_{i+1})$$

Cada trajetória na mesa é completamente determinada pela seqüência de colisões com o bordo, dada uma dessas colisões  $(q, v)$  obtemos todas as outras por  $\{T^n(q, v)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Na definição da aplicação  $T$  está implícita uma condição sobre a regularidade do bordo da mesa, não é possível determinar o movimento da partícula quando esta se choca com um ponto do bordo onde não está definida a tangente. Esta condição impõe uma restrição sobre a classe de mesas de bilhar tratáveis.

Se a mesa tem o bordo dado por uma curva fechada convexa diferenciável a aplicação do bilhar está definida para todo ponto em  $\Omega$ . Podemos nesse caso tomar as colisões  $(q, v)$  nas coordenadas  $(\omega, \alpha)$  sendo  $\omega$  um parâmetro de comprimento de arco que identifica  $q$  e  $\alpha$  o ângulo entre o vetor  $v$  e a normal ao bordo no ponto de colisão. Temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.0.1** *Se a fronteira da mesa for uma curva fechada  $C^k$  estritamente convexa, a*

aplicação do bilhar  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  é um difeomorfismo  $C^{k-1}$  preservando a medida  $\cos \alpha d\omega d\alpha$ .

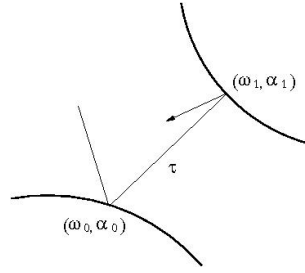


Figura 1.2: Colisões consecutivas numa mesa de bilhar

A prova desse fato é devida a Birkhoff e pode ser encontrada em [6] ou [3]. Basicamente o resultado é obtido da seguinte expressão para a derivada de  $T$ :

$$D_{(\omega_0, \alpha_0)} T = \frac{-1}{\cos(\alpha_1)} \begin{pmatrix} \tau K_0 + \cos \alpha_0 & \tau \\ \tau K_0 K_1 + K_0 \cos \alpha_1 + K_1 \cos \alpha_0 & \tau K_1 + \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Nesta expressão temos  $(\omega_0, \alpha_0)$  e  $(\omega_1, \alpha_1)$  pontos de colisão consecutivos,  $K_0$  e  $K_1$  são as curvaturas do bordo em cada ponto de colisão e  $\tau$  é o comprimento do segmento de reta dado pela trajetória entre  $\omega_0$  e  $\omega_1$ . A dependência em relação à curvatura justifica a perda de um grau de diferenciabilidade da aplicação em relação à diferenciabilidade do bordo.

Podemos obter o seguinte resultado mais geral:

**Teorema 1.0.2** *Se a fronteira da mesa de bilhar é dada pela união finita de curvas  $C^k$  com  $k \geq 3$ , estritamente convexas ou retas, então para um subconjunto de  $\Omega$  a aplicação de bilhar  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  é um difeomorfismo local  $C^{k-1}$  que preserva a medida  $\cos \alpha d\omega d\alpha$ . O subconjunto em questão é de medida total.*

A prova desse fato encontra-se em [3], onde se estuda de forma detalhada o conjunto dos pontos em que a aplicação de bilhar não é diferenciável, *Conjunto de singularidades*.

Este conjunto é basicamente constituído pelas condições iniciais que originam choque com pontos de não diferenciabilidade ou trajetórias que tangenciam o bordo, esta última situação justifica-se pela presença do termo  $\frac{-1}{\cos(\alpha_1)}$  na expressão da derivada que torna-se ilimitado nos pontos de tangência quando tem-se  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ . No complementar do conjunto de singularidades, *Pontos regulares*, a aplicação de bilhar comporta-se como em mesas convexas preservando a medida  $\cos \alpha d\omega d\alpha$ . Mostra-se que o conjunto de singularidades tem medida nula donde conclui-se o resultado.

Em resumo: a dinâmica do bilhar em mesas cujo bordo satisfaz as condições do teorema 1.0.2 pode ser descrita por um *sistema dinâmico discreto*  $(\Omega, T, \mu)$ . Sendo  $\Omega$  o conjunto dos pontos de colisão e  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  um difeomorfismo em um subconjunto  $\Omega' \subset \Omega$  de medida total com respeito à medida  $\mu := \cos \alpha d\omega d\alpha$ . O sistema é *conservativo* o que significa que  $\mu$  é uma medida invariante por  $T$ , i.e  $\mu(T(A)) = \mu(A)$ .

Neste contexto as trajetórias na mesa são traduzidas nas *órbitas* :

$$\mathcal{O}(\omega, \alpha) = \{\dots T^{-1}(\omega, \alpha), (\omega, \alpha), T(\omega, \alpha), \dots\}$$

e estudar a dinâmica consiste em procurar descrever o comportamento de tais órbitas para a maioria dos pontos  $(\omega_0, \alpha_0) \in \Omega$ .

## Capítulo 2

### O bilhar no anel excêntrico

Neste trabalho vamos considerar o problema do bilhar em uma mesa circular contendo um disco como obstáculo interno. A essas mesas daremos o nome de *Anéis Excêntricos*. O estudo destes bilhares foi feito pela primeira vez por Saitô et all em [1].

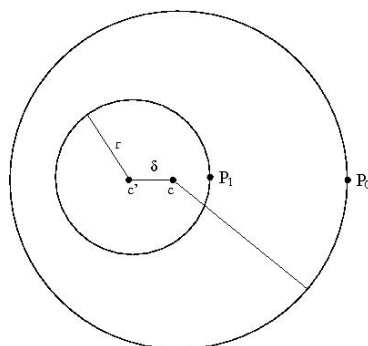


Figura 2.1: Anel Excêntrico

**Definição 2.0.1** Um *Anel Excêntrico*  $(r, \delta)$  é a região plana compreendida no interior de um círculo unitário de centro  $c$  e externa ao disco de raio  $r < 1$  e centro  $c'$  tal que  $|c - c'| = \delta > 0$  e  $r + \delta < 1$

## 2.1 A aplicação do bilhar

A aplicação de bilhar no anel excêntrico é descontínua em decorrência das trajetórias que tangenciam o bordo do disco interno. No entanto, é possível descrever a dinâmica deste sistema por uma aplicação de bilhar modificada que preserva a medida da aplicação de bilhar usual. Para provar estes fatos iniciemos definindo a parametrização do conjunto de colisões.

As colisões com o círculo externo serão identificadas pelas coordenadas  $(\omega, \alpha)$  sendo  $\omega \in [-\pi, \pi)$  o comprimento do arco entre o ponto  $P_0$  (ver Figura 2.1) e o ponto de colisão medido no sentido anti-horário, o ângulo  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor normal no ponto de colisão medido no sentido horário.

As colisões com o círculo interno serão identificadas pelas coordenadas  $(\omega', \beta)$  sendo  $\omega' \in [(3-r)\pi, (3+r)\pi)$  o comprimento de arco medido no sentido horário a partir do ponto  $P_1$  e  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  o ângulo do vetor velocidade com a normal no ponto de colisão medido no sentido anti-horário.

Definimos então o conjunto de colisões por:

$$\mathcal{C} = [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup [(3-r)\pi, (3+r)\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

que é a união de dois cilindros disjuntos dado que os bordos são duas curvas fechadas disjuntas. Observemos que o segundo cilindro, das colisões com o círculo interno, é fechado já que é possível haver colisões de tangência com o este bordo.

Seja  $F := F_{(r,\delta)} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  a aplicação do bilhar em um anel  $(r, \delta)$ . Nas coordenadas  $(\omega, \alpha)$  escreveremos:

$$F(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_1, \alpha_1)$$

Pelo teorema (1.0.2),  $F$  é um difeomorfismo  $C^\infty$  a menos de um conjunto de medida nula, o conjunto de singularidades, que no caso é constituído pelos pontos de  $\mathcal{C}$  que determinam trajetórias tangentes ao bordo interno, i.e os pontos  $(\omega_0, \alpha_0)$  tais que  $|\alpha_1| = \frac{\pi}{2}$ . Veremos adiante que este conjunto é formado por duas curvas fechadas  $C^\infty$  em  $[-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

que são gráficos da coordenada  $\omega$  dados pela equação:

$$|\text{sen}(\omega) + \delta \text{sen}(\omega - \alpha)| = r \quad (2.1)$$

estas curvas dividem o cilindro  $[-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  nos conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{(\omega, \alpha) \in [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), |\text{sen}(\omega) + \delta \text{sen}(\omega - \alpha)| \leq r\}$$

e

$$\mathcal{A} = \{(\omega, \alpha) \in [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), |\text{sen}(\omega) + \delta \text{sen}(\omega - \alpha)| > r\}$$

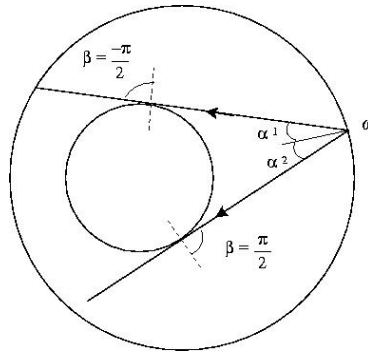


Figura 2.2: Trajetórias tangentes ao disco interno.

O conjunto  $\mathcal{B}$  é formado pelos pontos  $(\omega_0, \alpha_0)$  tais que  $F(\omega_0, \alpha_0)$  é um ponto de colisão com o círculo interno. Os pontos  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{A}$  são tais que  $F(\omega_0, \alpha_0)$  corresponde a uma colisão com o círculo externo.

Toda colisão com o círculo interno é precedida e sucedida por colisões com o círculo externo. Podemos então descrever completamente uma trajetória em  $(r, \delta)$  considerando somente os pontos de colisão com o círculo externo. Isso nos leva a definir uma nova aplicação

$$T : [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

que associa uma colisão  $(\omega_0, \alpha_0)$  no círculo externo com a próxima colisão que ocorrer também com o círculo externo. Podemos escrever:

$$T(\omega, \alpha) = \begin{cases} T_{\mathcal{A}} := F(\omega, \alpha) & \text{se } (\omega, \alpha) \in \mathcal{A}, \\ T_{\mathcal{B}} := F^2(\omega, \alpha) & \text{se } (\omega, \alpha) \in \mathcal{B} \end{cases} \quad (2.2)$$

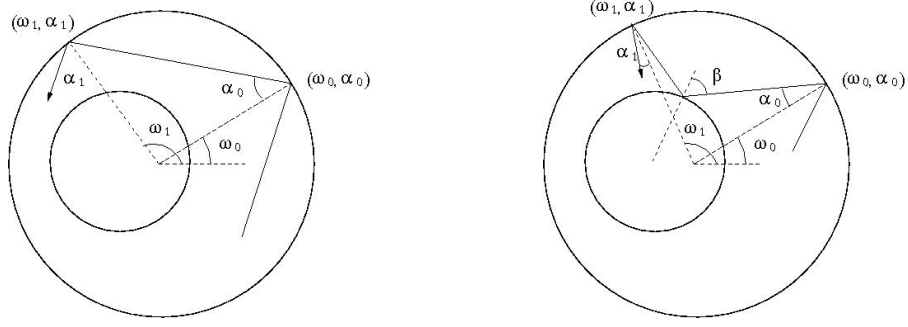


Figura 2.3: Parametrização das colisões na mesa de bilhar.

Podemos também encontrar equações que relacionam  $(\omega_0, \alpha_0)$  com sua imagem  $T(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_1, \alpha_1)$ . A dedução destas relações encontra-se em [10] ou [9] e segue os parâmetros da Figura 2.3.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 \\ \omega_1 = \omega_0 + (\pi - 2\alpha_0) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{cases} \text{sen } \alpha_0 + \delta \text{sen } (\alpha_0 - \omega_0) = r \text{sen } \beta, \\ \text{sen } \alpha_1 + \delta \text{sen } (\alpha_1 + \omega_1) = r \text{sen } \beta, \\ 2\beta = \alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1 + \omega_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Essa nova aplicação substitui  $F$  com vantagens, pois além de estar definida em um domínio conexo é também um homeomorfismo que preserva a medida  $\cos \alpha \, d\omega \, d\alpha$ .

**Proposição 2.1.1** *A aplicação  $T : [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é um homeomorfismo,  $C^\infty$  a menos do conjunto de singularidades, e preserva a medida  $\cos \alpha \, d\omega \, d\alpha$ . Podemos estender continuamente  $T$  ao fecho de  $[-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  definindo os pontos  $(\omega, \pm\frac{\pi}{2})$  como sendo fixos.*

**Prova:** Como  $T|_{\mathcal{A}} := F|_{\mathcal{A}}$  e  $T|_{\text{int } \mathcal{B}} := F^2|_{\text{int } \mathcal{B}}$  são difeomorfismos  $C^\infty$  resta-nos provar a continuidade em  $\partial \mathcal{B}$ . Suponhamos  $\{(\omega^k, \alpha^k)\}_{k \geq 0}$  uma seqüência em  $\mathcal{B}$  convergindo para  $(\omega_0, \alpha_0) \in \partial \mathcal{B}$ . Denotemos  $T(\omega^k, \alpha^k) = (\omega_1^k, \alpha_1^k)$  e  $\beta^k = \beta(\omega^k, \alpha^k)$ . Temos das relações 2.4 que:

$$\text{sen } \alpha_1^k + \delta \text{sen } (\alpha_1^k + \omega_1^k) = r \text{sen } \beta^k$$

$$2\beta^k = \alpha^k - \omega^k + \alpha_1^k + \omega_1^k$$

Segue que:

$$\text{sen } \alpha_1^k + \delta \text{sen } (2\beta^k - \alpha^k + \omega^k) = r \text{sen } \beta^k$$

Quando  $k \rightarrow \infty$  temos  $\beta^k \rightarrow \beta(\omega_0, \alpha_0)$ ,  $\omega_1^k \rightarrow \omega_1(\omega_0, \alpha_0)$  e  $\alpha_1^k \rightarrow \alpha_1(\omega_0, \alpha_0)$ . Tomando o limite na última igualdade acima obtemos:

$$\text{sen } \alpha_1(\omega_0, \alpha_0) + \delta \text{sen } (2\beta(\omega_0, \alpha_0) - \alpha_0 + \omega_0) = r \text{sen } \beta(\omega_0, \alpha_0)$$

Como  $(\omega_0, \beta_0) \in \partial\mathcal{B}$  temos que  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = \pm \frac{\pi}{2}$  portanto:

$$\text{sen } (2\beta(\omega_0, \alpha_0) - \alpha_0 + \omega_0) = \text{sen } \left( \pm \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \omega_0 \right) = \text{sen } (\alpha_0 - \omega_0)$$

Então, podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha_1(\omega_0, \alpha_0) + \delta \text{sen } (\alpha_0 - \omega_0) = r \text{sen } \beta(\omega_0, \alpha_0)$$

Assim:

$$\text{sen } \alpha_1(\omega_0, \alpha_0) = r \text{sen } \beta(\omega_0, \alpha_0) - \delta \text{sen } (\alpha_0 - \omega_0) = \text{sen } (\alpha_0)$$

Esta última igualdade, que segue das relações 2.4, implica que  $\alpha_1 = \alpha_0$ .

Ainda das relações 2.4 temos que:

$$\omega_1^k = 2\beta^k - (\alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1^k)$$

Tomando o limite em  $k$  e já considerando que  $\alpha_0 = \alpha_1(\omega_0, \alpha_0)$  temos:

$$\begin{aligned}\omega_1(\omega_0, \alpha_0) &= 2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) - (\alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1(\omega_0, \alpha_0)) \\ \omega_1 &= \pm\pi - 2\alpha_0 + \omega_0\end{aligned}$$

Como identificamos  $\pi$  e  $-\pi$  temos finalmente que:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\omega_0, \alpha_0) &= \alpha_0 \\ \omega_1(\omega_0, \alpha_0) &= \pi - 2\alpha_0 + \omega_0\end{aligned}$$

Logo  $(\omega_0, \alpha_0)$  e  $T(\omega_0, \alpha_0)$  satisfazem as relações 2.3, ou seja,  $T_{\mathcal{A}}(\omega_0, \alpha_0) = T_{\mathcal{B}}(\omega_0, \alpha_0)$  e concluimos a continuidade de  $T$  em  $\partial B$ .

Sendo  $T$  contínua em  $[-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  há uma única extensão contínua em  $[-\pi, \pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , esta extensão consiste em definir como fixos os pontos  $(\omega, \pm\frac{\pi}{2})$ . De fato:

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\omega_1(\omega_0, \alpha_0)] = \lim_{\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\omega_0 + (\pi - 2\alpha_0)] = \omega_0 + (\pi - 2\pi) = \omega_0$$

portanto  $T(\omega_0, \pm\frac{\pi}{2}) = (\omega_0, \pm\frac{\pi}{2})$ .

Quanto à medida, seja  $\mu$  a medida invariante por  $F$ , e  $C$  um boreleano de  $[-\pi, \pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Denotemos por  $\mathcal{K}$  o união  $\partial B \cup \{\alpha = \pm\frac{\pi}{2}\}$  que é um conjunto de medida nula. Temos que

$$A = (C \cap \mathcal{A}) \cup (C \cap \mathcal{B}) \cup (C \cap \mathcal{K})$$

Sendo esta união disjunta temos:

$$\mu(T(A)) = \mu(T(C \cap \mathcal{A})) + \mu(T(C \cap \mathcal{B})) + \mu(T(C \cap \mathcal{K}))$$

Como

$$\mu(C \cap \mathcal{K}) = 0$$

$$\mu(T(C \cap \mathcal{A})) = \mu(F(C \cap \mathcal{A})) = \mu(C \cap \mathcal{A})$$

$$\mu(T(C \cap \mathcal{B})) = \mu(F^2(C \cap \mathcal{A})) = \mu(A \cap \mathcal{B})$$

temos que

$$\mu(T(A)) = \mu((C \cap \mathcal{A}) \cup (C \cap \mathcal{B}) \cup (C \cap \mathcal{K})) = \mu(A).$$

Portanto  $\mu$  é medida invariante por  $T$ . □

Utilizando a expressão (1.1) para a derivada da aplicação do bilhar vamos obter a derivada da aplicação  $T$ :

$$D_{(\omega_0, \alpha_0)}T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1(\omega_0, \alpha_0)}{\partial \omega} & \frac{\partial \omega_1(\omega_0, \alpha_0)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha_1(\omega_0, \alpha_0)}{\partial \omega} & \frac{\partial \alpha_1(\omega_0, \alpha_0)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Precisamos considerar separadamente os casos em que  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{A}$  e  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{B}$ . No primeiro caso, segue facilmente das relações 2.3 que:

$$D_{(\omega_0, \alpha_0)}T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No caso em que  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{B}$  temos que  $T(\omega_0, \alpha_0) = F^2(\omega_0, \alpha_0)$ , logo pela regra da cadeia  $D_{(\omega_0, \alpha_0)}T = D_{(\omega_0, \alpha_0)}F^2 = D_{F(\omega_0, \alpha_0)}F \cdot D_{(\omega_0, \alpha_0)}F$ .

A condição inicial  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{B}$  determina uma colisão  $(\omega', \beta) = F(\omega_0, \alpha_0)$  com o círculo interno. Da expressão (1.1) temos que:

$$D_{(\omega_0, \alpha_0)}T = \frac{-1}{\cos \beta} \begin{pmatrix} -\tau_0 + \cos \alpha_0 & \tau_0 \\ \frac{-\tau_0 + \cos \alpha_0}{r} - \cos \beta & \frac{\tau_0}{r} + \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

A condição  $(\omega', \beta)$  determina uma colisão  $T(\omega', \beta) = (\omega_1, \alpha_1)$  com o bordo externo. Novamente pela expressão 1.1 temos:

$$D_{(\omega', \beta)}T = \frac{-1}{\cos \alpha_1} \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{r} + \cos \beta & \tau_1 \\ \frac{-\tau_1 + \cos \alpha_1}{r} - \cos \beta & -\tau_1 + \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Fazendo o produto de (2.6) com (2.7) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega} &= -\frac{2\tau_0\tau_1}{r} + \frac{2\tau_1 \cos \alpha_0}{r} - (\tau_0 + \tau_1 - \cos \alpha_0) \cos \beta \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} &= \frac{2\tau_1\tau_0}{r} + \tau_0\tau_1 \cos \beta \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} &= \frac{2}{r}(\tau_1\tau_0 - \tau_1 \cos \alpha_0 - \tau_0 \cos \alpha_1) + (\tau_1 + \tau_0 - \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) \cos \beta + \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_0}{r} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} &= -\frac{2\tau_1\tau_0}{r} + \frac{2\tau_0 \cos \alpha_1}{r} + (\tau_0 - \tau_1) \cos \beta + \cos \alpha_1 \cos \beta\end{aligned}$$

quando calculadas em  $(\omega_0, \alpha_0)$

## 2.2 Dinâmica global

Uma visão global da dinâmica do sistema é obtida observando a disposição das órbitas no espaço de fase  $\Omega$ , as figuras a seguir ilustram casos típicos da dinâmica para diferentes parâmetros  $(r, \delta)$ . Elas são obtidas pela plotagem em  $\Omega$  - aqui representado pelo retângulo  $[-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  - de segmentos de órbitas para várias condições iniciais.

Basicamente a estrutura do espaço de fase nestes bilhares é determinada pela existência de dois pontos fixos  $((0, 0)$  e  $(\pi, 0))$  e as principais alterações da dinâmica global ocorrem em função da mudança de estabilidade destes pontos em decorrência de uma variação nos parâmetros.

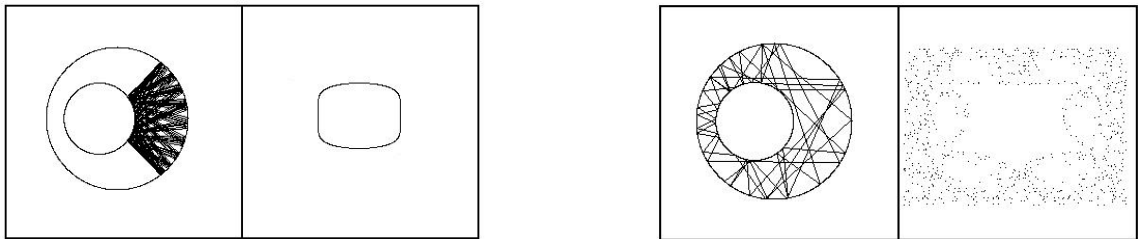


Figura 2.4: Exemplos de trajetórias poligonais na mesa de bilhar e suas respectivas órbitas.

A Figura 2.5 ilustra o caso típico da dinâmica para parâmetros  $r > \delta$ . Nota-se a presença de curvas invariantes em torno de  $(0, 0)$  sugerindo a estabilidade deste ponto. Observa-se uma cadeia de ilhas de estabilidade associadas a uma órbita periódica. Nas proximidades

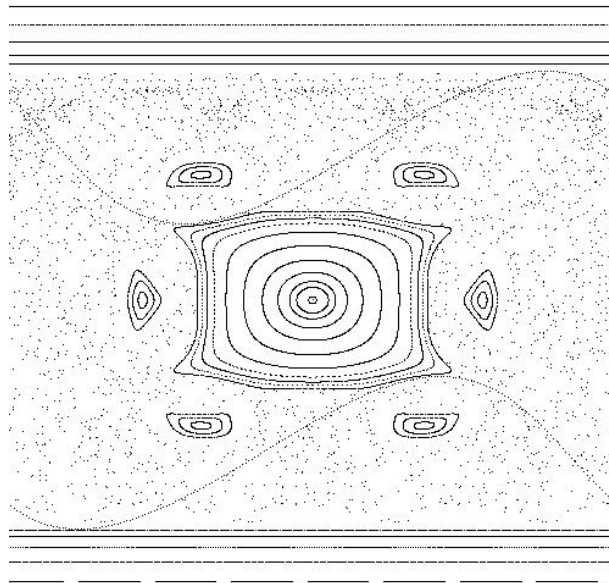


Figura 2.5: Órbitas para a mesa de parâmetros  $(0.5, 0.25)$ . Em destaque o conjunto de singularidades dado pelas curvas em formato de senóides.

dos bordos as órbitas estão restritas a curvas invariantes  $\alpha = \text{constante}$ , correspondendo às condições iniciais que determinam apenas colisões com o círculo externo. Em destaque também as curvas de singularidade.

A Figura 2.6 caracteriza a dinâmica para o caso  $r < \delta$ . Nota-se a ausência da ilha central em torno de  $(0, 0)$  que deixa de ser elíptico para essa região de parâmetros. Persistem as curvas invariantes vizinhas ao bordo e algumas ilhas de estabilidade correspondendo a órbitas periódicas elípticas também são perceptíveis.

Fica clara a dependência da dinâmica em relação aos parâmetros  $(r, \delta)$  e a influência dos pontos  $(\pi, 0)$  e  $(0, 0)$  que são os dois únicos pontos fixos da aplicação  $T$  no interior de  $\Omega$ . Analizaremos a dinâmica na vizinhança destes pontos com mais detalhe no capítulo 3. Em particular temos maior interesse em estudar o comportamento das variedades invariantes associadas ao ponto  $(\pi, 0)$ . Mostraremos a existência de interseções homoclínicas e algumas conseqüências desse fenômeno.

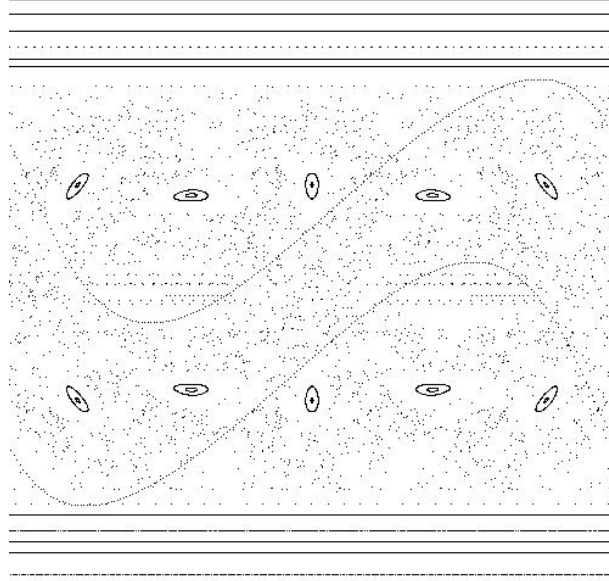


Figura 2.6: Órbitas para a mesa de parâmetros (0.3,0.4)

## 2.3 Estrutura do espaço de fase

Nesta seção provamos algumas propriedades do espaço de fase que serão úteis no estudo que faremos da dinâmica dos bilhares excêntricos.

Representaremos o cilindro  $\Omega$  pelo retângulo  $[-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  o qual dividiremos em quadrantes tendo como referência as curvas

$$\gamma_0 := \{(\omega, 0)\} \quad \phi_0 := \{(\pi, \alpha)\} \quad \xi_0 := \{(0, \alpha)\}$$

Denotaremos os quadrantes por  $Q_i, i = 1, 2, 3, 4$  na ordem da Figura 2.7. Cada  $Q_i$  é um conjunto fechado cujo bordo são segmentos das curvas  $\gamma_0, \phi_0, \xi_0$  e do bordo  $\partial\Omega$ .

Dado  $C \subset \Omega$  um subconjunto qualquer, denotaremos por  $C_n$  o conjunto  $T^n(C)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Diremos que  $C$  é invariante por  $T$  se  $T(C) = C$ . Diremos que  $C$  é fixado por  $T$  se  $\forall x \in C$  temos  $T(x) = x$ .

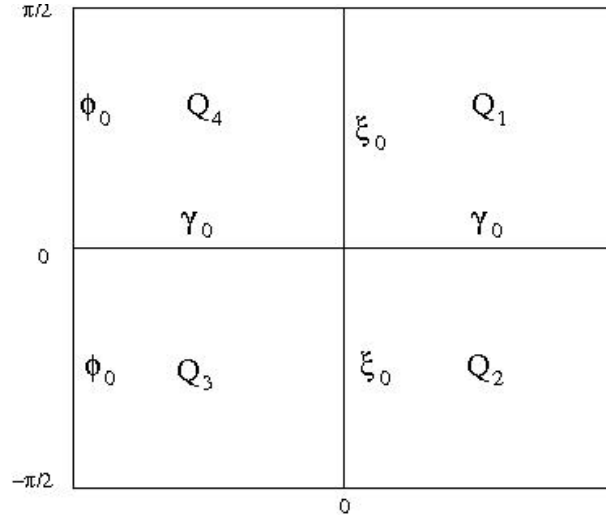


Figura 2.7: A divisão do espaço de fase em quadrantes pelos eixos de simetria.

### 2.3.1 Simetrias e órbitas periódicas

Definiremos em  $\Omega$  as seguintes aplicações, que chamaremos de simetrias:

$$\begin{aligned}
 X : \Omega &\rightarrow \Omega & X(\omega, \alpha) &= (-\omega, \alpha) \\
 Y : \Omega &\rightarrow \Omega & Y(\omega, \alpha) &= (\omega, -\alpha)
 \end{aligned}$$

Aos conjuntos fixados por estas aplicações damos o nome de *eixos de simetria*. Temos  $\gamma_0 := \{(\omega, 0)\}$  como eixo de  $Y$  e os conjuntos  $\phi_0 := \{(\pi, \alpha)\}$  e  $\xi_0 := \{(0, \alpha)\}$  os eixos de simetria de  $X$ .

A aplicação  $T$  satisfaz as seguintes *relações de simetria*:

$$YT^{-1} = TY \quad e \quad XT^{-1} = TX \tag{2.8}$$

A primeira é uma propriedade geral das aplicações de bilhar, a segunda é consequência da simetria do anel excêntrico. Ambas podem ser provadas diretamente das equações 2.4 e 2.3. A Figura 2.8 ilustra as simetrias na mesa de bilhar.

Verificaremos as implicações para a dinâmica decorrentes das relações (2.8). Observemos que  $X$  deixa invariante o eixo de simetria  $Y$ , i.e  $X(\gamma_0) = \gamma_0$ , e  $Y$  deixa invariantes os

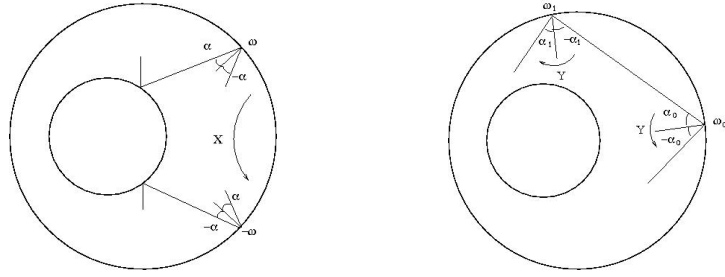


Figura 2.8: Simetrias do bilhar no anel excêntrico.

eixos de simetria de  $X$ , i.e  $Y(\phi_0) = \phi_0$  e  $Y(\xi_0) = \xi_0$ . Além disto se um conjunto  $C$  for invariante por alguma das simetrias  $X$  ou  $Y$  teremos

$$C_{-n} = T^{-n}(C) = T^{-n}X(C) = XT^n(C) \quad \text{se } X(C) = C$$

$$C_{-n} = T^{-n}(C) = T^{-n}Y(C) = YT^n(C) \quad \text{se } Y(C) = C$$

Se tomamos  $C$  como um dos eixos de simetria temos:

$$X(\gamma_n) = Y(\gamma_n)$$

$$\phi_{-n} = X(\phi_n) = Y(\phi_n)$$

$$\xi_{-n} = X(\xi_n) = Y(\xi_n)$$

Logo há uma relação de simetria entres as imagens dos eixos  $\gamma_0$ ,  $\phi_0$  e  $\xi_0$ . Estas curvas também estão relacionadas com os pontos periódicos de  $T$ .

**Proposição 2.3.1** *Dados  $m, n$  inteiros não simultaneamente nulos, os pontos de  $(\gamma_m \cup \phi_m \cup \xi_m) \cap (\gamma_n \cup \phi_n \cup \xi_n)$  são pontos periódicos de  $T$ .*

**prova:** Observemos inicialmente que se  $(\omega, \alpha) \in c_m \cap c'_n$  então  $T^{-n}(\omega, \alpha) \in T^{-n}(c_m \cap c'_n) = c_{m-n} \cap c'_0$ , ou seja,  $T^{-n}((\omega, \alpha)) \in c'_0$  e se este ponto for periódico  $(\omega, \alpha)$  também será. Logo para provar o resultado basta considerarmos as interseções do tipo  $c_m \cap c'_0$ . Vamos dividir em casos :

1.  $\gamma_m \cap \gamma_0$ :

Se  $(\omega_0, \alpha_0) \in \gamma_m \cap \gamma_0$  então  $(\omega_0, \alpha_0) \in \gamma_0$  e  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-m}(\omega_0, \alpha_0) \in T^{-m}(\gamma_m) = \gamma_0$ . Segue que:

$$Y(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = (\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \quad e \quad Y(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, \alpha_0)$$

Pelas relações de simetria satisfeitas por  $T$  temos:

$$\begin{aligned} (\omega_0, \alpha_0) &= Y(\omega_0, \alpha_0) = YT^m(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-m}Y(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \\ &= T^{-m}(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-2m}(\omega_0, \alpha_0) \end{aligned}$$

Portanto  $(\omega_0, \alpha_0)$  é um ponto periódico de período menor ou igual a  $2m$ .

2.  $(\phi_m \cup \xi_m) \cap (\phi_0 \cup \xi_0)$ :

Como no caso anterior, se  $(\omega_0, \alpha_0) \in (\phi_m \cup \xi_m) \cap (\phi_0 \cup \xi_0)$  então  $(\omega_0, \alpha_0) \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  e  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  donde:

$$X(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = (\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \quad e \quad X(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, \alpha_0)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} (\omega_0, \alpha_0) &= X(\omega_0, \alpha_0) = XT^m(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-m}X(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \\ &= T^{-m}(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-2m}(\omega_0, \alpha_0) \end{aligned}$$

Portanto  $(\omega_0, \alpha_0)$  é um ponto periódico de período menor ou igual a  $2m$ .

3.  $(\phi_m \cup \xi_m) \cap \gamma_0$ :

Se  $(\omega_0, \alpha_0) \in (\phi_m \cup \xi_m) \cap \gamma_0$  então  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  donde:

$$X(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = (\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \quad e \quad X(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, \alpha_0)$$

Temos que:

$$(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = Y(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = YT^{-m}(\omega_0, \alpha_0) = T^mY(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_m, \alpha_m)$$

Como  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  temos  $\omega_{-m} \in \{0, \pi\}$  donde  $x_m \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  já que pelas relações acima temos  $\omega_m = \omega_{-m}$ . Segue que  $x_m \in (\phi_0 \cup \xi_0)$  e  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) = T^{-2m}(x_m) \in T(\phi_0 \cup \xi_0) = (\phi_{-m} \cup \xi_{-m})$ . Ou seja,  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m}) \in (\phi_0 \cup \xi_0) \cap (\phi_{-2m} \cup \xi_{-2m})$  donde pelo caso 2  $(\omega_{-m}, \alpha_{-m})$  é um ponto periódico de período menor ou igual a  $4m$ , assim como  $(\omega_0, \alpha_0)$ .

□

Não é uma consequência da proposição acima mas as interseções  $\gamma_0 \cap \phi_0 = (\pi, 0)$  e  $\gamma_0 \cap \xi_0 = (0, 0)$  também são pontos periódicos, sendo os únicos pontos fixos de  $T$  no interior de  $\Omega$ , isso pode ser verificado diretamente das equações 2.4.

### 2.3.2 As curvas $\beta$ constante e o conjunto de singularidades

Consideremos agora as curvas  $\beta$  constante. Relembremos que  $\beta$  identifica o ângulo de colisão com o disco interno e que se expressa em função de  $(\omega_0, \alpha_0)$  por:

$$\beta(\omega_0, \alpha_0) = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1(\omega_0, \alpha_0) + \omega_1(\omega_0, \alpha_0))$$

Uma curva com  $\beta$  constante é o conjunto dos pontos  $(\omega, \alpha)$  tais que  $\beta(\omega, \alpha) = c$  para alguma constante  $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Estas curvas são gráficos  $C^\infty$  de  $\omega$ . De fato, derivando em relação a  $\alpha_0$ :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_0} \right)$$

Mas:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} = -2 \frac{\tau_0 \tau_1}{r} + 2 \frac{\tau_0 \cos \alpha_1}{r} - (\tau_0 + \tau_1) \cos \beta + \cos \alpha_1 \cos \beta$$

e

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_0} = 2 \frac{\tau_0 \tau_1}{r} + (\tau_0 + \tau_1) \cos \beta$$

Portanto:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{\tau_0 \cos \alpha_1}{r} + \cos \alpha_1 \cos \beta \right)$$

que é sempre não nulo já que  $\alpha_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Segue do teorema da função implícita que para cada valor  $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  o conjunto  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = c$  é um gráfico  $C^\infty$  de  $\omega$ . Portanto as curvas  $\beta = \text{const}$  são fechadas e homotópicas aos bordos do cilindro.

A região  $\mathcal{B}$  do cilindro  $\Omega$  é folheada pelas curvas  $\beta$  constante sendo que o conjunto de singularidades  $\partial \mathcal{B}$ , é dado pelas curvas  $\beta = \frac{\pi}{2}$  e  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ . Isso prova que o conjunto de singularidades tem medida nula por ser o gráfico de uma aplicação diferenciável.

Outro caso que nos interessa é a curva  $\beta = 0$ , conjunto no qual coincidem as ações de  $T$  e  $X$ , i.e  $T(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, -\alpha_0) = X(\omega_0, \alpha_0)$ . Provemos esta afirmação.

**Lema 2.3.1**  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = 0$  se e somente se  $T(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, -\alpha_0)$

**Prova:** Se  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = 0$  temos:

$$0 = 2\beta = \alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1 + \omega_1$$

donde  $(\alpha_0 - \omega_0) = -(\alpha_1 + \omega_1)$  e  $\text{sen}(\alpha_0 - \omega_0) = -\text{sen}(\alpha_1 + \omega_1)$ . Das equações (2.4) segue que:

$$\text{sen} \alpha_0 + \text{sen} \alpha_1 + \delta(\text{sen}(\alpha_0 - \omega_0) + \text{sen}(\alpha_1 + \omega_1)) = 2r \text{sen} \beta = 0 \quad (2.9)$$

donde  $\text{sen} \alpha_0 + \text{sen} \alpha_1 = 0$ .

Como  $\alpha_0, \alpha_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  concluímos que  $\alpha_0 = -\alpha_1$  e de (2.3.2) temos  $\omega_1 - \omega_0 = -(\alpha_1 + \alpha_0) = 0$  donde  $\omega_0 = \omega_1$ .

Por outro lado  $T(\omega_0, \alpha_0) = (\omega_0, -\alpha_0)$  então  $\omega_1 = \omega_0$  e  $\alpha_1 = -\alpha_0$  logo  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \omega_0 + \alpha_1 + \omega_1) = 0$ .

□

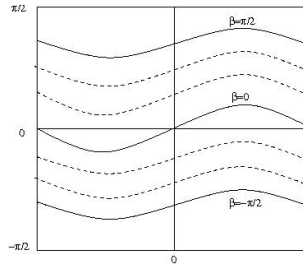


Figura 2.9: As curvas  $\beta$  constante

### 2.3.3 Imagens de retas verticais

Descreveremos agora as imagens de retas verticais, em alguns problemas o comportamento da imagem de tais curvas é determinante para a obtenção de muitos resultados, este é o

caso das aplicações do tipo *Twist* caracterizadas por uma condição de desvio das verticais, ver [7]. Aplicações de bilhares convexos apresentam essa propriedade, não é o caso do bilhar excêntrico como veremos a seguir.

Fixado  $\omega_0$  seja  $v_{\omega_0} := \omega_0 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a reta vertical passando por  $\omega_0$ . Esta reta intercepta cada gráfico  $\beta = \frac{\pi}{2}$  e  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  em um ponto, denotados respectivamente por  $(\omega_0, \alpha^+)$  e  $(\omega_0, \alpha^-)$ . Descreveremos agora a imagem  $T(v_{\omega_0}) = (\omega_1(\omega_0, \alpha), \alpha_1(\omega_0, \alpha))$ .

No intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \alpha^+)$  temos que  $v_{\omega_0}$  pertence à região  $\mathcal{A}$  e temos por (2.8) que  $\frac{\partial \omega_1(\omega_0, \alpha)}{\partial \alpha} = -2$ . Portanto  $\omega_1(\omega_0, \cdot) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \Omega$  é injetiva, donde segue que o único ponto de interseção entre  $v_{\omega_0}$  e  $T(v_{\omega_0})$  neste intervalo é o ponto fixo  $(\omega_0, -\frac{\pi}{2})$ .

No intervalo  $(\alpha^-, \frac{\pi}{2}]$  temos  $v_{\omega_0}$  também contida em  $\mathcal{A}$  e  $\frac{\partial \omega_1(\omega_0, \alpha)}{\partial \alpha} = -2$ . Portanto  $\omega_1(\omega_0, \cdot)$  é injetiva e o único ponto de interseção entre  $v_{\omega_0}$  e  $T(v_{\omega_0})$  neste intervalo é o ponto fixo  $(\omega_0, \frac{\pi}{2})$ .

No intervalo  $[\alpha^+, \alpha^-]$ ,  $v_{\omega_0}$  pertence à região  $\mathcal{B}$  e

$$\frac{\partial \omega_1(\omega_0, \alpha_0)}{\partial \alpha} = \frac{2\tau_1\tau_0}{r} + (\tau_0\tau_1) \cos \beta > 0$$

dado que  $\tau_0, \tau_1$  e  $r$  são positivos e  $\cos \beta \geq 0$  pois  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Segue que  $\omega_1(\omega_0, \cdot)$  é injetiva portanto  $T(v_{\omega_0})$  intercepta  $v_{\omega_0}$  em um único ponto que é exatamente o mesmo ponto de interseção entre  $v_{\omega_0}$  e  $\beta = 0$ , já que pelo lema 2.3.2 temos que se  $(\omega_0, \alpha) \in \{\beta = 0\}$  então  $T(\omega_0, \alpha) = (\omega_0, \alpha_1(\omega_0, \alpha)) \in v_{\omega_0}$ .

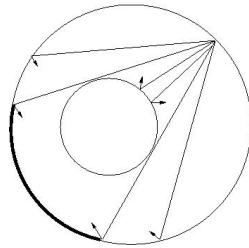


Figura 2.10: Trajetórias correspondentes a uma reta vertical.

Seja  $\Pi_1 : \Omega \rightarrow [-\pi, \pi]$  a projeção na primeira coordenada. Observamos que dado  $\omega_0$ , o conjunto  $\Pi_1(T(v_{\omega_0}))$  não cobre  $[-\pi, \pi]$ , a justificativa geométrica deste fato é que não é possível a partir de um ponto  $\omega_0$  no bordo externo atingir todos os pontos do bordo externo

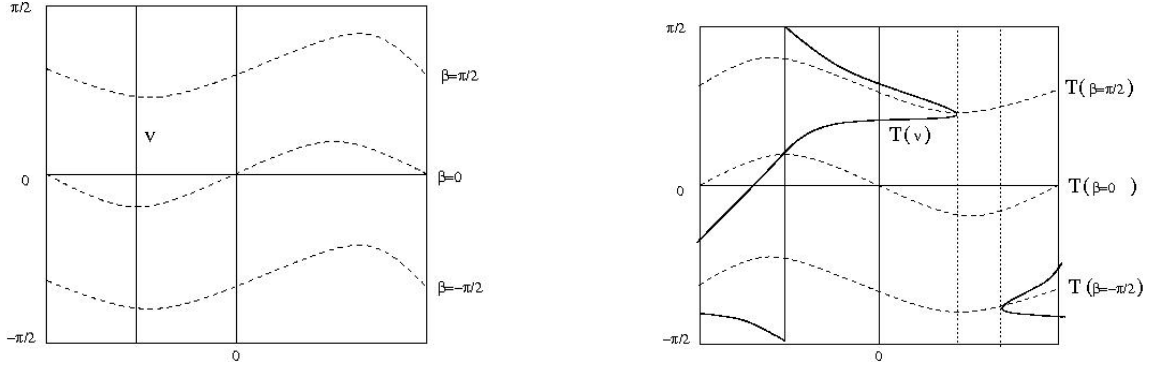


Figura 2.11: Na primeira figura: uma reta vertical,  $v$ , interceptando as curvas  $\beta = \text{constante}$ . Na segunda figura: a imagem da vertical interceptando as imagens das curvas  $\beta = \text{constante}$ .

com uma única iterada da aplicação de bilhar em decorrência do obstáculo interno, ver Figura 2.10.

Assim, para cada  $\omega_0$  existe um intervalo aberto  $I \subset [-\pi, \pi)$  tal que  $\Pi_1(T(v_{\omega_0})) \cap I = \emptyset$ . Nota-se pela Figura 2.11 que os extremos deste intervalo correspondem aos pontos  $\Pi_1(T(\omega_0, \alpha^\pm))$  onde  $(\omega_0, \alpha^\pm)$  são os pontos de interseção entre  $v_{\omega_0}$  e a curva de singularidades,  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ .

No caso específico do eixo  $\xi_0$ , a reta vertical que passa por  $(0, 0)$ , o intervalo complementar de  $\Pi_1(T(\xi_0))$  em  $[-\pi, \pi)$  é um intervalo simétrico  $(-\theta, \theta)$  centrado no ponto  $\pi$ , logo a curva  $T(\xi_0)$  não possui pontos em comum com a curva  $\phi_0$ , ver Figura 2.12

A seguir utilizamos as propriedades das imagens de retas verticais para provar alguns lemas que serão úteis mais à frente.

**Lema 2.3.2** *Se  $(\omega_0, \alpha_0) \in Q_4$  então  $\omega_0 \leq \omega_1(\omega_0, \alpha_0) \leq \pi$*

**prova:** Seja  $\omega_0 \in [-\pi, 0]$  e seja  $v_{\omega_0}$  a reta vertical passando por  $\omega_0$ . Denotemos por  $v_{\omega_0}^+$  o segmento de  $v_{\omega_0}$  entre os pontos  $(\omega_0, \frac{\pi}{2})$  e  $(\omega_0, \alpha^*) = v_{\omega_0} \cap \{\beta = 0\}$ .

O conjunto  $T(v_{\omega_0}^+)$  é uma curva contínua de extremos em  $(\omega_0, \frac{\pi}{2})$  e  $T(\omega_0, \alpha^*) = (\omega_0, -\alpha^*)$ . Observemos que  $T(v_{\omega_0}^+)$  pertence à região de  $Q_4 \cup Q_1$  compreendida entre as curvas  $v_{\omega_0}$  e

$T(\xi_0)$ . Segue disso que  $T(v_{\omega_0}^+)$  não intercepta a curva  $\phi_0$  portanto  $\Pi_1(T(v_{\omega_0}^+))$  pertence ao intervalo  $[\omega_0, \pi)$ .

Observe-mos que  $T(v_{\omega_0} \cap Q_4) \subset v_{\omega_0}^+$  portanto  $\Pi_1 T((v_{\omega_0} \cap Q_4)) \subset [\omega_0, \pi)$  donde segue que  $\omega_0 \leq \omega_1(\omega_0, \alpha_0) \leq \pi$  para todo  $(\omega_0, \alpha_0) \in Q_4$ .  $\square$

**Lema 2.3.3** *Seja  $(\omega, \alpha) \in Q_4$  ponto não fixado por  $T$ , se  $\mathcal{O}^+(\omega, \alpha) := \{T^n(\omega, \alpha)\}_{n \geq 0} \subset Q_4$  então  $(0, 0) \in \overline{\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)}$ .*

**prova:** Sendo  $\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)$  subconjunto limitado em  $Q_4$  podemos definir  $\omega^* := \sup\{\Pi_1(\overline{\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)})\}$ .

Dado esse  $\omega^*$  existe um  $\alpha^*$  tal que  $(\omega^*, \alpha^*) \in \overline{\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)}$ . Pela invariância por  $T$  de  $\overline{\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)}$  e pelo lema 2.3.2 temos que:

$$\omega^* \leq \omega_1(\omega^*, \alpha^*) \leq \sup\{\Pi_1(\overline{\mathcal{O}^+(\omega, \alpha)})\} = \omega^*$$

Portanto  $T(\omega^*, \alpha^*) = (\omega^*, \alpha_1(\omega^*, \alpha^*))$  donde ou  $(\omega^*, \alpha^*)$  é um ponto fixo ou  $T(\omega^*, \alpha^*) \in (\{\beta = 0\} \cap v_{\omega^*})$ .

No caso de  $(\omega^*, \alpha^*)$  ser ponto fixo, não pode ser do tipo  $(\omega^*, \frac{\pi}{2})$  pois existe uma vizinhança do bordo superior de  $\Omega$  tal que a órbita de todo ponto nesta vizinhança pertence a uma curva invariante homotópica ao bordo, ver Figura 2.5 e 2.6 , logo não podemos ter uma órbita se acumulando em  $(\omega^*, \frac{\pi}{2})$ .

Resta-nos então a segunda hipótese que, pelo lema 2.3.1, implica em:

$$(\omega^*, \alpha_1(\omega^*, \alpha^*)) = (\omega^*, -\alpha^*)$$

devemos ter então  $\alpha^* = 0$  pois do contrário teríamos  $(\omega^*, \alpha_1(\omega^*, \alpha^*)) \in \text{int}(Q_3)$ . Sendo assim,  $(\omega^*, \alpha^*) \in \gamma_0 \cap \{\beta = 0\} = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . Para finalizar observemos que  $\pi \leq \omega_0 \leq \omega^*$ . Assim se  $\omega^* = \pi$  teríamos  $(\omega, \alpha) = (\pi, 0)$  ponto fixado por  $T$  o que contradiz nossa hipótese. Concluimos então que  $(\omega^*, \alpha^*) = (0, 0)$ .  $\square$

### 2.3.4 Imagens dos eixos de simetria

Descreveremos agora comportamento das imagens dos eixos de simetria. Segue das observações anteriores sobre as imagens de verticais que as únicas interseções entre as curvas  $\phi_0 = v_\pi$  e  $\phi_1 = T(v_\pi)$  são os pontos fixos  $(\pi, 0)$ ,  $(\pi, \frac{\pi}{2})$  e  $(\pi, -\frac{\pi}{2})$ . Mostraremos que para o caso  $r > \delta$  uma propriedade análoga vale também para a curva  $\gamma_0$ , ou seja, as únicas interseções entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  são os pontos fixos  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ .

De fato se  $(\omega_0, \alpha_0) \in \gamma_0$  e  $(\omega_1, \alpha_1) \in \gamma_1 \cap \gamma_0$  então  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  e segue de 2.4 que:

$$\begin{aligned} \delta \operatorname{sen}(-\omega_0) &= r \operatorname{sen} \beta = \delta \operatorname{sen}(\omega_1) \\ 2\beta &= -\omega_0 + \omega_1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $\cos(\omega_0) = \cos(\omega_1)$  e:

$$\cos(\beta)^2 - \operatorname{sen}(\beta)^2 = \cos(2\beta) = \cos(\omega_1)\cos(\omega_0) + \operatorname{sen}(\omega_1)\operatorname{sen}(\omega_0) = \cos(\omega_1)^2 + \operatorname{sen}(\omega_1)^2 = 1$$

então:

$$2 \cos(\beta)^2 = \cos(\beta)^2 + \operatorname{sen}(\beta)^2 + \cos(\beta)^2 - \operatorname{sen}(\beta)^2 = 2$$

donde  $\cos(\beta)^2 = 1$  e como  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  temos  $\beta = 0$ . Mas se  $\beta(\omega_0, \alpha_0) = 0$  temos que  $(\omega_0, \alpha_0) \in (\gamma_0 \cap \{\beta = 0\}) = \{(0, 0), (\pi, 0)\}$ . O que demonstra o afirmado.

Temos portanto que  $\gamma_1$  é uma curva simples fechada no cilindro e que intesecta  $\gamma_0$  somente nos pontos fixos  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ .

Será útil provar que  $\gamma_1$  possui pontos no interior do quadrante  $Q_4$ . Faremos isso agora:

Seja  $v = (1, 0)$  o vetor tangente a  $\gamma_0$  no ponto fixo  $(\pi, 0)$  numa vizinhança na qual  $T$  é diferenciável. Temos que:

$$D_{(\pi, 0)}T.v = \frac{1}{r}(r - 2\delta r + 2\delta - 2\delta^2, 2\delta(r + \delta))$$

Como  $0 < r + \delta < 1$  temos que:

$$2\delta(r + \delta) > 0$$

Temos também que:

$$r - 2\delta r + 2\delta - 2\delta^2 = r + 2\delta(1 - r - \delta) > 0$$

Logo o vetor  $D_{(\pi,0)}T.v$  tem todas as coordenadas positivas, podemos então concluir que localmente ao ponto  $p$  a curva  $\gamma_1$  tem pontos no interior do quadrante  $Q_4$ .

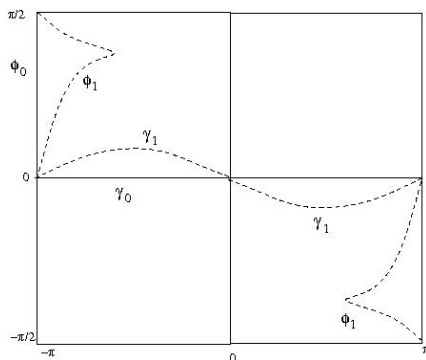


Figura 2.12: Eixos de simetria e suas imagens.

# Capítulo 3

## Pontos fixos



Figura 3.1: Pontos fixos.

Para qualquer valor de parâmetros  $(r, \delta)$  a aplicação  $T$  possui exatamente dois pontos fixos no interior do cilindro  $\Omega$ , situados na região  $\mathcal{B}$  onde a aplicação é diferenciável, são eles  $(\pi, 0)$  e  $(0, 0)$ . O ponto  $(\pi, 0)$  é sempre hiperbólico, já o ponto  $(0, 0)$  pode ser hiperbólico, parabólico ou elíptico dependendo dos parâmetros  $(r, \delta)$ . Verifiquemos estes fatos.

Para o ponto  $(\pi, 0)$  temos:

$$DT_{(\pi,0)} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r - 2\delta r + 2\delta - 2\delta^2 & 2(1 - \delta)(1 - r - \delta) \\ 2\delta(r + \delta) & r - 2\delta r + 2\delta - 2\delta^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

E os autovalores desta matriz são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(r - 2\delta r + 2\delta - 2\delta^2)}{r} \pm \frac{\sqrt{(4\delta(1 + \delta)(\delta - r)(1 - r - \delta))}}{r}$$

Sendo  $\delta \neq 0$  e  $r + \delta < 1$  temos que os termos na raiz quadrada são sempre positivos donde os autovalores são reais e diferentes. Observemos que pela propriedade de preservar área

temos  $\det(DT_{(\pi,0)}) = 1$  portanto os auto-valores satisfazem  $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$  logo ambos têm módulo diferentes de 1 o que caracteriza o ponto fixo como sendo hiperbólico.

Para o ponto  $(0,0)$  temos:

$$DT_{(0,0)} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r + 2\delta r - 2\delta - 2\delta^2 & 2(1 + \delta)(1 + \delta - r) \\ 2\delta(\delta - r) & r + 2\delta r - 2\delta - 2\delta^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Com autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(r + 2\delta r - 2\delta - 2\delta^2)}{r} \pm \frac{\sqrt{(4\delta(1 + \delta)(\delta - r)(1 - r + \delta))}}{r}$$

Como  $r$  e  $\delta$  são positivos, apenas o fator  $(\delta - r)$  na raiz quadrada pode mudar de sinal, alterando assim a natureza dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Temos portanto, as seguintes possibilidades:

- se  $r > \delta$ , os autovalores são complexos conjugados e o ponto fixo é elíptico.
- se  $r = \delta$  os autovalores são iguais a  $-1$  e o ponto fixo é parabólico.
- se  $r < \delta$  temos os autovalores reais e diferentes de  $\pm 1$  e o ponto fixo é hiperbólico.

Passamos agora a estudar a dinâmica localmente a cada um destes pontos fixos no caso  $r > \delta$ , para isso utilizaremos o fato de que a aplicação  $T$  é diferenciável em uma vizinhança de cada ponto.

### 3.1 O ponto fixo elíptico

O Teorema da Forma Normal de Birkhoff, [7], afirma que se os autovalores  $\lambda_j$  de  $D_{(0,0)}T$  são não ressonantes, i.e  $\lambda^n \neq 1$ ,  $n = 1, 2, 3$  ou  $4$ , então existe um homeomorfismo  $h$  tal que  $h \circ T \circ h^{-1}(z) = e^{i(\gamma + \tau_1|z|^2)}z + O(|z|^4)$ , ou seja  $T$  é conjugada com uma rotação, a menos dos termos  $O(|z|^4)$ , onde  $z$  é complexo e o primeiro coeficiente de Birkhoff  $\tau_1$  é dado por uma expressão polinomial nos coeficientes de Taylor de  $T$  até ordem 3.

O Teorema do Twist de Moser, [8], afirma que se  $\tau_1$  é não nulo então a influência de  $O(|z|^4)$  em alguns casos pode ser desconsiderada, nestes casos  $T$  age como uma rotação o que resulta na existência de curvas invariantes na vizinhança do ponto fixo.

É possível mostrar, [12], que para o caso  $r > \delta$  os autovalores de  $D_{(0,0)}T$  são não ressonantes e que o primeiro coeficiente de Birkhoff é dado por:

$$\tau_1 = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{r}\right) \neq 0$$

Prova-se assim a existência de curvas invariantes em torno do ponto fixo elíptico  $(0, 0)$  o que explica a ilha de estabilidade observada na Figura 2.5.

## 3.2 O ponto fixo hiperbólico $(\pi, 0)$

Denotaremos por  $p$  o ponto fixo  $(\pi, 0)$ . Pelo Teorema de Hartman-Grobman, [2], existe uma bola  $B(p, \epsilon)$  de centro  $p$  e raio  $\epsilon$  na qual  $T$  é conjugada topologicamente com  $D_pT$ . É consequência deste teorema a existência local de uma variedade invariante estável cuja definição é:

$$W_{loc}^s(p) := \{x \in B(p, \epsilon) | T^n(x) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Tem-se também a existência de uma variedade invariante instável definida por:

$$W_{loc}^u(p) := \{x \in B(p, \epsilon) | T^{-n}(x) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Segue do Teorema da Variedade Estável, [2], que sendo  $T$  um difeomorfismo  $C^\infty$  em  $B(p, \epsilon)$ , a variedade estável local é uma curva  $C^\infty$  tangente em  $p$  ao auto-espaço associado ao menor auto-valor de  $D_pT$ . Analogamente a variedade instável é uma curva  $C^\infty$  tangente em  $p$  ao auto-espaço associado ao maior auto-valor de  $D_pT$ . Portanto são curvas que se interceptam transversalmente em  $p$ .

É através das variedades invariantes que a influência de um ponto fixo hiperbólico se estende à dinâmica global. De fato, podemos definir globalmente as variedades invariantes pelos conjuntos:

$$W^s(p) := \{x \in M | T^n(x) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(W_{loc}^s(p))$$

$$W^u(p) := \{x \in M \mid T^{-n}(x) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(W_{loc}^s(p))$$

No que segue, vamos estudar propriedades das variedades invariantes globais associadas ao ponto  $(\pi, 0)$ . Iniciamos com algumas observações sobre as simetrias das variedades locais.

Seja  $B(p, \epsilon)$  a vizinhança de  $p$  na qual vale a conjugação entre  $T$  e  $D_p T$ . Podemos definir as variedades invariantes de  $p$  utilizando o conjunto de  $B := B(p, \epsilon)$  da seguinte forma:

$$W_{loc}^s = \bigcap_n T^n(\overline{B}) \quad e \quad W_{loc}^u = \bigcap_n T^{-n}(\overline{B})$$

Essa definição caracteriza  $W_{loc}^s$  como o maior conjunto  $T$ -invariante em  $\overline{B}$ , i.e todo conjunto  $T$ -invariante de  $\overline{B}$  está contido em  $W_{loc}^s$ . Analogamente  $W_{loc}^u$  é o maior conjunto  $T^{-1}$ -invariante em  $\overline{B}$ .

As variedades invariantes locais se relacionam pelas simetrias  $X$  e  $Y$ . De fato, usando que a bola  $\overline{B(p, \epsilon)}$  é um conjunto invariante por  $X$  e  $Y$ , i.e  $X(\overline{B}) = \overline{B}$  e  $Y(\overline{B}) = \overline{B}$  temos:

$$X(W_{loc}^s) = X\left(\bigcap_n T^n(\overline{B})\right) = \bigcap_n XT^n(\overline{B}) = \bigcap_n T^{-n}X(\overline{B}) = \bigcap_n T^{-n}(\overline{B}) = W_{loc}^u$$

Analogamente  $Y(W_{loc}^s) = W_{loc}^u$  e conseqüentemente  $XY(W_{loc}^s) = W_{loc}^s$  e  $XY(W_{loc}^u) = W_{loc}^u$ .

Segue da conjugação entre  $T$  e  $D_p T$  que a única interseção entre  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$  é o ponto fixo  $p$ . Isso implica que  $p$  também é a única interseção entre os eixos de simetria e as variedades locais. De fato, se por exemplo  $W_{loc}^u \cap \gamma_0 = q \neq p$  então:

$$q = Y(q) = Y(W_{loc}^u \cap \gamma_0) = W_{loc}^s \cap \gamma_0$$

onde  $q$  é um ponto de  $W_{loc}^s \cap W_{loc}^u$  diferente de  $p$ , o que não pode ocorrer.

Concluimos então que  $W_{loc}^u$  possui dois ramos totalmente contidos no interior dos quadrantes  $Q_i$  e, como  $XY(W_{loc}^u) = W_{loc}^u$ , concluimos também que cada um destes ramos pertence a um quadrante distinto. Analogamente para  $W_{loc}^s$ .

A próxima proposição e seu corolário garantem que as variedades invariantes globais pertencem ao fecho topológico do conjunto constituído pelas imagens dos eixos de simetria.

**Proposição 3.2.1** *Dado  $\epsilon > 0$  existe  $k_0$  tal que para todo  $k \geq k_0$  as curvas  $\gamma_k$  e  $\phi_k$  possuem segmentos com extremos em  $p$  e são tais que a  $\epsilon$ -vizinhança de qualquer ponto em  $\mathcal{W}_{loc}^u(p)$  possui um ponto destes segmentos.*

**Prova** Seja  $B := B(p, \epsilon)$  uma bola aberta na qual vale a conjugação topológica entre  $T$  e  $D_p T$  garantida pelo teorema de Hartman- Grobman. Podemos escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno de forma que:

$$T(\gamma_0 \cap B \cap Q_4) \subset (Q_4) \text{ e } T(\phi_0 \cap B \cap Q_4) \subset (Q_4) \quad (3.3)$$

o que é garantido pelas propriedades das imagens dos eixos de simetria vistas na seção 2.3.4.

Definimos a seqüência de conjuntos  $\{K_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  da seguinte forma:

$$K_0 = \overline{B} \cap Q_4 \text{ e } K_n := T(K_{n-1}) \cap K_0 \text{ para } n > 0$$

Esta é uma seqüência de compactos encaixados. De fato,  $\overline{B}$  e  $Q_4$  são compactos portanto

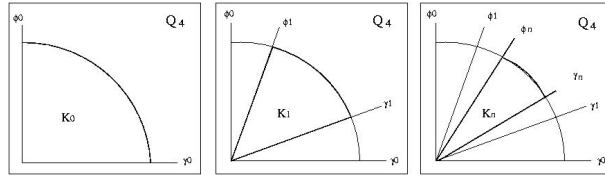


Figura 3.2: Definição dos conjuntos  $K_n$

$K_0 = \overline{B} \cap Q_4$  é compacto. Mas se para algum  $n$  o conjunto  $K_n$  é compacto então  $K_{n+1} = T(K_n) \cap K_0$  também é compacto. Segue por indução em  $n$  que  $K_n$  é compacto para todo  $n$ .

Por definição temos que  $K_1 \subseteq K_0$  e por (3.3) sabemos que esta continência é estrita. Mas se para algum  $n$  tivermos  $K_n \subseteq K_{n-1}$  então  $K_{n+1} = T(K_n) \cap K_0 \subseteq T(K_{n-1}) \cap K_0 = K_n$ . Segue por indução em  $n$  que  $K_n \subseteq K_{n-1}$  para todo  $n$ .

Seja  $K_\infty = \bigcap_{n=0}^\infty K_n$ , por ser a interseção de compactos encaixados este conjunto é não vazio e compacto.  $K_\infty$  também é  $T^{-1}$ -invariante, de fato se  $x \in K_\infty$  então  $x \in K_n$  para

todo  $n > 1$  donde  $T^{-1}(x) \in K_{n-1}$  para todo  $n > 1$ , ou seja  $T^{-1}(x) \in K_n$  para todo  $n$  logo  $T^{-1}(x) \in K^\infty$ .

Sendo  $K_\infty \subset \overline{B}$  um conjunto  $T^{-1}$ -invariante temos que:

$$K_\infty \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\overline{B}) = W_{loc}^u(p) \quad (3.4)$$

A continência acima implica que  $W_{loc}^u(p)$  possui um ramo no interior do quadrante  $Q_4$ . Provaremos agora que este ramo é exatamente  $K_\infty$ .

Denotemos por  $\mathcal{U}$  o conjunto  $(W_{loc}^u(p) \cap Q_4)$ . Como  $p \in \mathcal{U}$  temos que  $\mathcal{U} \subset T(\mathcal{U})$  e por definição temos  $\mathcal{U} \subset (\overline{B} \cap Q_4) = K_0$ . Mas se  $\mathcal{U} \subset K_n$  para algum  $n \geq 0$  temos:

$$\mathcal{U} \subset (T(\mathcal{U}) \cap K_0) \subset (T(K_n) \cap K_0) = K_{n+1}$$

Conclui-se por indução em  $n$  que  $\mathcal{U} \subset K_n$  para todo  $n > 0$  donde  $\mathcal{U} \subset K_\infty$ . E juntamente com (3.4) temos  $K_\infty = W_{loc}^u(p) \cap Q_4$ .  $\square$

**Corolário 3.2.1** *Qualquer segmento compacto da variedade instável global  $\mathcal{W}^u(p)$  é aproximado pelas curvas  $\gamma_k$  e  $\phi_k$  com  $k \in \mathcal{N}$*

**prova** Seja  $\mathcal{L}$  um segmento compacto qualquer da variedade instável  $\mathcal{W}^u(p)$ . Existe  $n_0$  tal que  $T^{-n_0}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{W}_{loc}^u(p)$ . Como  $T^{n_0}$  é homeomorfismo, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta$  tal que se  $x \in B(T^{-n_0}(y), \delta)$  então  $T^{n_0}(x) \in B(y, \epsilon)$ .

Consideremos  $V(\delta)$  uma  $\delta$ -vizinhança de  $\mathcal{W}_{loc}^u(p)$ . Como a variedade local é igual à interseção da seqüência de compactos encaixados  $\{K_n\}$  temos que existe  $n$  tal que  $K_n \subset V(\delta)$ , então  $(\gamma_n \cap \overline{B}) \subseteq \partial K_n \subseteq V(\delta)$ . Conseqüentemente um segmento de  $\gamma_n$  está  $\delta$ -próximo de  $T^{-n_0}(\mathcal{L})$ , logo  $T^{n_0}(\gamma_n)$  possui um segmento que está  $\epsilon$ -próximo de  $\mathcal{L}$ . Analogamente  $(\phi_n \cap \overline{B}) \subseteq \partial K_n$  e pelo mesmo argumento existe um segmento de  $T^{-n_0}(\phi_n)$  que está  $\epsilon$ -próximo de  $\mathcal{L}$ .  $\square$

Utilizando a simetria  $X$  podemos construir a seqüência de compactos  $\{X(K_n)\}_{n \in \mathcal{N}}$  que aproxima o ramo de  $W_{loc}^s(p)$  em  $Q_3$  e concluir que este ramo é aproximado pelas curvas

$\gamma_{-n}$  e  $\phi_{-n}$  assim como qualquer segmento compacto da variedade global  $W^s(p)$ . Resultados análogos são provados para os demais ramos das variedades invariantes.

### 3.2.1 Pontos homoclínicos

Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo, dado um ponto fixo  $p$  dizemos que  $q$  é *homoclínico* a  $p$  se  $q \in \mathcal{W}^s(p) \cap \mathcal{W}^u(p)$ . i.e  $f^n(q)$  e  $f^{-n}(q)$  convergem para  $p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . A existência de pontos homoclínicos acarreta complexidade para a dinâmica. Em particular se o ponto homoclínico é originado por uma interseção transversal. Neste caso prova-se a existência de um subconjunto invariante por alguma potência de  $f$  cuja dinâmica é conjugada com um sistema simbólico, o Shift, [2]. Algumas conseqüências são a densidade de pontos periódicos e homoclínicos neste subconjunto invariante e a positividade da entropia topológica do sistema.

A existência pontos homoclínicos para o ponto fixo  $p$  da aplicação de bilhar  $T$  para a faixa de parâmetros  $r > \delta$  resulta da seguinte proposição:

**Proposição 3.2.2** *No caso  $r > \delta$  as variedades invariantes  $\mathcal{W}^u(p)$  e  $\mathcal{W}^s(p)$  possuem um ponto em comum sobre o eixo de simetria  $\xi_0$*

**Prova** Para provar a existência de interseção entre as variedades basta mostrar que  $\mathcal{W}^u(p)$  possui um ponto  $q \neq p$  em  $\partial Q_4$ , então por simetria  $\mathcal{W}^s(p)$  possui o mesmo ponto.

Suponhamos por contradição que  $(\mathcal{W}^u(p) - p) \cap \partial Q_4 = \emptyset$ , então dado qualquer ponto  $(\omega_0, \alpha_0) \in (Q_4 \cap \mathcal{W}^u(p)) - \{p\}$  temos pelo lema 2.3.3 que  $\mathcal{O}^+(\omega_0, \alpha_0)$  tem  $(0, 0)$  como ponto de acumulação. Mas para  $r > \delta$  o ponto  $(0, 0)$  é elíptico estável, portanto existe um aberto invariante  $V$  contendo  $(0, 0)$ . Assim, se  $\mathcal{O}^+(\omega_0, \alpha_0)$  se acumula em  $(0, 0)$  temos que esta órbita pertence ao aberto  $V$ . Podemos tomar  $V$  suficientemente pequeno de forma que  $p$  não pertença ao fecho de  $V$ , mas isso é uma contradição com o fato de  $(\omega_0, \alpha_0) \in \mathcal{W}_p^u$ .

Concluimos então que  $\mathcal{W}^u(p) \cap \partial Q_4 \neq \emptyset$ . Resta provar agora que esta interseção pertence ao eixo  $\xi_0$ . Seja então  $\mathcal{U}$  o segmento de  $\mathcal{W}^u(p)$  de extremos em  $p$  e em um ponto  $q \in \partial Q_4$  sendo  $q$  o primeiro ponto de interseção entre de  $\mathcal{W}^u(p)$  e  $\partial Q_4$ , o que equivale a dizer que somente  $p$  e  $q$  são pontos de  $\mathcal{U}$  em  $\partial Q_4$ .

Suponhamos que  $q \in \gamma_0$ , então temos que  $Y(\mathcal{U})$  é um segmento de  $\mathcal{W}^s(p)$  contido em  $Q_3$  cujo único ponto em  $\gamma_0$  é  $q$ . Isso implica que  $q$  é um ponto homoclínico.

Por um lado temos que  $T(q) \in \gamma_1 (\in Q_4 \cup Q_1)$  mas por outro temos que  $T(q) \in (Y(\mathcal{U}) - q)$  logo pertence ao quadrante  $Q_3$ . Uma contradição que nos leva a concluir que a primeira interseção entre  $\mathcal{W}^u(p)$  e  $Q_4$  não ocorre em  $\gamma_0$ . Com um argumento análogo podemos provar que essa primeira interseção também não pode ocorrer em  $\phi_0$ .

Resta-nos então o segmento  $\{\alpha = \frac{\pi}{2}\}$  e o eixo  $\xi_0$ . Como o primeiro é formado por pontos fixos concluimos que  $q \in \xi_0$ . □

A proposição acima garante a existência de interseção entre as variedades mas não esclarece a natureza de tal interseção. São possíveis a tangência, a transversalidade ou mesmo a conexão de sela. Como não pedimos mais que a diferenciabilidade na vizinhança do ponto fixo podemos ter ainda outros tipos mais complicados de interseção.

Experimentos numéricos como o ilustrado na Figura 3.3 indicam que para o caso  $r > \delta$  a interseção deve ser em geral, no mínimo, um cruzamento topológico, i.e as variedades se cruzam mas não necessariamente de modo transversal. Assim, vamos supor daqui para frente que ocorre este tipo de interseção e procurar descrever algumas conseqüências dinâmicas advindas dessa suposição.

Iniciamos utilizando a aproximação das variedades invariantes pelas imagens dos eixos de simetria para verificar uma propriedade conhecida dos pontos homoclínicos que é o fato de serem aproximados por órbitas periódicas de período arbitrariamente grande e por pontos homoclínicos. No próximo capítulo ilustramos como provar a positividade da entropia topológica do sistema utilizando a interseção homoclínica e as simetrias do problema.

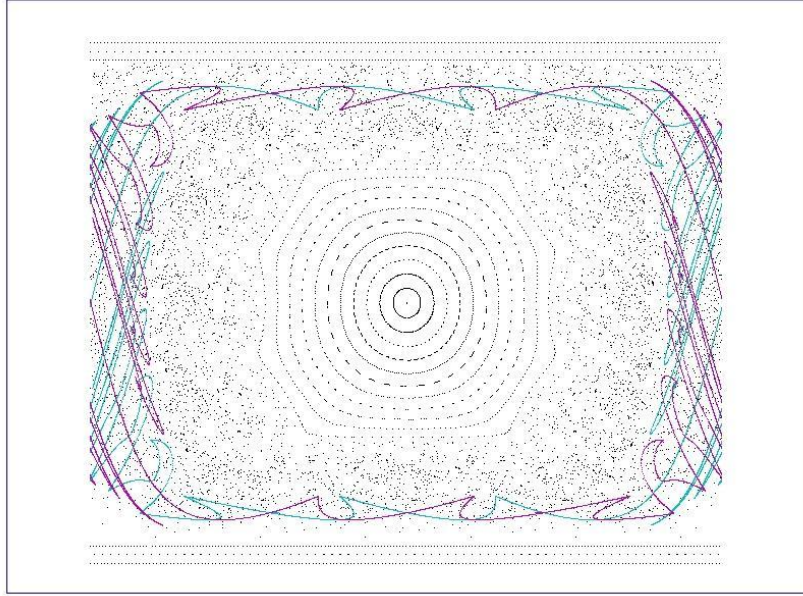


Figura 3.3: A interseção das variedades invariantes sobre o eixo  $\xi_0$ . Ao centro a ilha de estabilidade do ponto fixo elíptico  $(0, 0)$ .

**Proposição 3.2.3** *Os pontos homoclínicos a  $p$  topologicamente transversos são aproximados por pontos periódicos e pontos homoclínicos.*

**prova:** Seja  $q$  um ponto homoclínico dado por uma interseção topologicamente transversa dos segmentos  $\mathcal{L}^s \subset \mathcal{W}^s(p)$  e  $\mathcal{L}^u \subset \mathcal{W}^u(p)$ .

Seja  $\overline{B}(q, \epsilon)$  uma bola fechada de centro em  $q$  e com raio  $\epsilon$  suficientemente pequeno para que os segmentos  $\mathcal{L}^s$  e  $\mathcal{L}^u$  tenham interseção com o bordo  $\partial B$  em quatro pontos distintos:  $a, b \in \mathcal{L}^u \cap \partial B$  e  $c, d \in \mathcal{L}^s \cap \partial B$ . Considere  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de forma que as bolas de raio  $\delta$  e centro em  $a, b, c$  e  $d$  sejam disjuntas.

Seja  $s \subset \overline{B}$  uma curva contínua com extremos em  $B(a, \delta) \cap \partial B(q, \epsilon)$  e  $B(b, \delta) \cap \partial B(q, \epsilon)$  e  $s' \subset \overline{B}$  também contínua com extremos em  $B(c, \delta) \cap \partial B(q, \epsilon)$  e  $B(d, \delta) \cap \partial B(q, \epsilon)$ . A curva  $s$  divide  $\overline{B}$  em duas regiões cada uma delas contendo pontos de  $s'$  o que implica que  $s \cap s' \neq \emptyset$ .

Pela Proposição 3.2.1 existe  $m \in \mathcal{N}$  tal que segmentos de  $\phi_m$  e  $\gamma_m$  estão  $\delta$ -próximos de  $\mathcal{L}^u$  e segmentos de  $\phi_{-m}$  e  $\gamma_{-m}$  estão  $\delta$ -próximos de  $\mathcal{L}^s$ . Segue desse fato que  $\phi_m \cap \partial B$  e

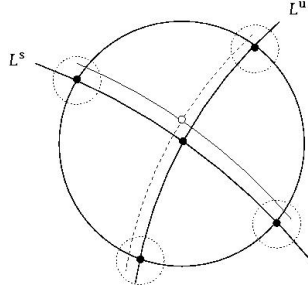


Figura 3.4: A curva  $s$  (pontilhada) que aproxima  $\mathcal{L}^u$  intercepta a curva  $s'$  que aproxima  $\mathcal{L}^s$ .

$\gamma_m \cap \partial B$  são pontos de  $B(c, \delta)$  e  $B(d, \delta)$  e  $\phi_{-m} \cap \partial B$  e  $\gamma_{-m} \cap \partial B$  são pontos de  $B(a, \delta)$  e  $B(b, \delta)$ . Pela observação no parágrafo anterior temos que  $\gamma_m \cap \phi_{-m} \neq \emptyset$ ,  $\gamma_{-m} \cap \phi_m \neq \emptyset$ ,  $\gamma_m \cap \gamma_{-m} \neq \emptyset$  e  $\phi_m \cap \phi_{-m} \neq \emptyset$ . Todos estes pontos de interseção são periódicos.

Pelo mesmo argumento podemos mostrar que  $\mathcal{L}^u \cap (\gamma_{-m} \cup \gamma_m) \neq \emptyset$  e  $\mathcal{L}^s \cap (\gamma_m \cup \gamma_{-m}) \neq \emptyset$  e estes pontos de interseção são homoclínicos a  $p$ .

As conclusões acima valem se considerarmos  $\epsilon' \leq \epsilon$ . Isso implica que para toda vizinhança de um ponto homoclínico à  $p$  topologicamente transverso existem pontos periódicos e outros pontos homoclínicos à  $p$ .  $\square$

Com pequenas alterações na demonstração acima é possível verificar também que os pontos homoclínicos de tangência também são aproximados por órbitas periódicas de período arbitrariamente grande e por pontos homoclínicos.

# Capítulo 4

## Entropia topológica

A entropia topológica de uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  é um número,  $h_{top}(f)$ , que mede a complexidade do comportamento dinâmico do sistema  $(M, f)$  em termos da taxa de crescimento exponencial do número de órbitas que podem ser distinguidas ao longo do tempo dentro uma precisão dada.

O cálculo da entropia topológica de um sistema permite localizá-lo em uma escala de complexidade comparado a outros sistemas, quanto maior  $h_{top}(f)$  maior a complexidade. Por se tratar de um invariante topológico a entropia também permite decidir sobre a equivalência de dois sistemas.

A seguir damos uma definição de entropia topológica para uma aplicação de um espaço compacto e apresentamos algumas propriedades deste conceito, baseamo-nos nas referências [5] e [2].

Dado um espaço métrico compacto  $M$  e uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  dizemos que um conjunto  $S \subset M$  é um  $(n, \epsilon)$  – gerador se para todo  $x \in M$  existe um  $y \in S$  tal que  $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$  para  $0 \leq i \leq n$

Pela compacidade de  $M$  é sempre possível encontrar um  $(n, \epsilon)$  – gerador finito para quaisquer  $n$  e  $\epsilon$ . (ver [5]). A cardinalidade  $r(n, \epsilon)$  de tal conjunto satisfaz  $r(n, \epsilon) \leq m^n$

para algum  $m$ . Daí:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon)) \right) < +\infty$$

pois  $\left( \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon)) \right) \leq \left( \frac{1}{n} \log(m^n) \right) = \log(m)$ .

Definimos a entropia topológica  $h_{top}(f)$  de  $f$  pelo limite:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log(r(n, \epsilon)) \right) \right)$$

Utilizaremos neste trabalho algumas propriedades da entropia topológica que dizem respeito à comparação entre as entropias de sistemas que se relacionam topologicamente. Precisamente dizemos que um sistema  $(N, g)$  é um *fator topológico* de  $(M, f)$  se existe uma plicação  $\theta : M \rightarrow N$  contínua, sobrejetora e satisfazendo  $f\theta = \theta g$ . Neste caso temos que:

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f) \tag{4.1}$$

Se a aplicação  $\theta$  definida acima for um homeomorfismo dizemos que os sistemas  $(M, f)$  e  $(N, g)$  são *topologicamente equivalentes* e teremos  $h_{top}(g) = h_{top}(f)$ . Uma última propriedade útil é a que relaciona a entropia de  $f$  a uma de suas potências  $f^k$ . Neste caso temos:

$$h_{top}(f^k) = k \cdot h_{top}(f) \tag{4.2}$$

Agora apresentaremos brevemente uma classe de sistemas dinâmicos abstratos de grande utilidade teórica: os *Shifts*. Tais sistemas possuem entropia topológica positiva.

Dado um conjunto finito de símbolos  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  definimos o espaço de seqüências bi-infinitas:

$$\Sigma_N = \{ \dots s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 \dots \mid s_j \in A \quad \forall j \in \mathcal{Z} \}$$

define-se uma topologia neste conjunto cuja base é dada pelos *cilindros simétricos*  $C^{\alpha_{-k} \dots \alpha_{-1} \cdot \alpha_0 \dots \alpha_k}$  que por sua vez são definidos por:

$$C^{\alpha_{-k} \dots \alpha_{-1} \cdot \alpha_0 \dots \alpha_k} \{ (s) \in \Sigma_N \mid s_i = \alpha_i \quad \text{com } -k \leq i \leq k \}$$

Com esta topologia  $\Sigma_N$  é um espaço métrico completo, compacto e totalmente desconexo. Neste espaço está definido um homeomorfismo  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  que age "transladando" as seqüências, i.e,  $\sigma(s)_i = s_{i+1}$ , por essa razão  $\sigma$  recebe o nome de *shift*.

O sistema dinâmico  $(\Sigma_N, \sigma)$  é um sistema simbólico de dinâmica bastante complexa tanto que serve de paradigma para o que freqüentemente se chama de caos. A propriedade que nos interessa aqui é que estes sistemas apresentam entropia topológica positiva, mais precisamente podemos provar (ver [15]) que  $h_{top}(\sigma) = \log(N)$  para  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$

## 4.1 Critério geométrico para entropia topológica positiva

O objetivo desta seção é apresentar um método geométrico [14] pelo qual é possível provar que uma aplicação  $f$  possui entropia topológica positiva. A estratégia é conseguir uma fatoração topológica entre alguma potência de  $f$  e o shift  $(\Sigma_2, \sigma)$ . Assim, pelas propriedades (4.1) e (4.2) teremos:

$$h_{top}(f) = \frac{1}{n} h_{top}(f^n) \geq \frac{1}{n} h_{top}(\sigma) > 0$$

Iniciemos com algumas definições: seja  $f : M \rightarrow M$  um homeomorfismo de uma variedade bidimensional. Considere  $N \subset M$  um subconjunto homeomorfo ao retângulo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  e  $R \subset N$  pré imagem em  $N$  do retângulo  $[-1, 1] \times [-\rho, \rho]$ .

Identificaremos  $N$  com o retângulo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  e  $R$  com o retângulo  $[-1, 1] \times [-\rho, \rho]$ , essa identificação é feita por simplicidade de notação sem prejuízo para as definições e resultados que seguem.

**Definição 4.1.1** *Um conjunto  $V \subseteq \text{int}(N)$  é chamado de **essencial** se  $V$  contém uma curva unindo as duas componentes de  $N/R$ .*

**Definição 4.1.2** Uma *faixa horizontal* é um conjunto  $S \subseteq R$  tal que

- $S$  é fechado e conexo por caminhos
- $S$  contém uma curva unindo os bordos verticais de  $R$ , i.e  $\{-1\} \times [-\rho, \rho]$  e  $\{1\} \times [-\rho, \rho]$
- $\partial S$  é uma curva de Jordan dada pela união de um número finito de arcos todos com extremos nos bordos verticais de  $R$

Toda faixa horizontal  $S$  possui em  $\partial S$  exatamente duas curvas ligando os bordos verticais de  $R$ . Denotaremos por  $c_{max}$  a curva mais próxima de  $[-1, 1] \times \{\rho\}$  e por  $c_{min}$  a outra.

**Definição 4.1.3** Seja  $S$  uma faixa horizontal. Dizemos que uma aplicação  $F$  estica  $S$  sobre  $R$  se  $F(S) \subset \text{int}(N)$ ,  $F(\partial S \cap \text{int}(R)) \subset N/R$  e  $F$  leva  $c_{max}$  e  $c_{min}$  em componentes opostas de  $N/R$ .

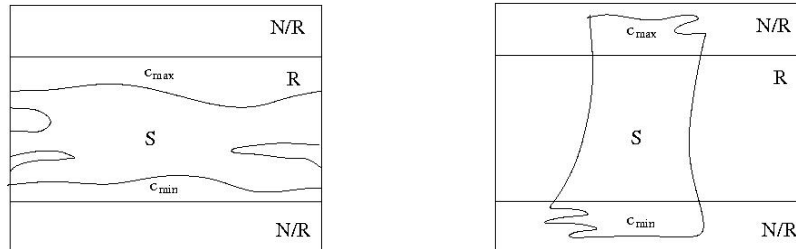


Figura 4.1:

**Lema 4.1.1** Seja  $S$  uma faixa horizontal e  $V$  um subconjunto essencial de  $N$ . Suponhamos que  $F$  estica  $S$  sobre  $R$ . Então  $F(S \cap V)$  é essencial.

**prova** Por definição de conjunto essencial,  $V$  contém um arco  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$  tal que  $\gamma(0)$  pertence a  $c_{max}$  de  $S$ ,  $\gamma(1)$  pertence a  $c_{min}$  e  $\gamma(t) \subseteq \text{int}(R)$  para  $0 < t < 1$ .

Uma componente de  $\partial S \cap \text{int}(R)$  é chamada de *positiva* se é levada por  $F$  na componente de  $N \setminus R$  que contém  $F(c_{\max})$ . Chamamos de *negativa* a componente de  $\partial S \cap \text{int}(R)$  que é levada por  $F$  na componente de  $N/R$  que contém  $F(c_{\min})$ .

Seja  $t_0 \in [0, 1)$  o último valor do parâmetro para o qual  $\gamma(t)$  intercepta uma componente positiva de  $\partial S \cap \text{int}(R)$  e  $t_1 \in (t_0, 1]$  o próximo valor no qual  $\gamma(t)$  intercepta  $\partial S$ .

Observe que se  $\gamma(t)$  deixar  $S$  através de alguma componente de  $\partial S \cap \text{int}(R)$  então deve voltar a  $S$  atravessando a mesma componente.

O arco de  $\gamma(t)$  entre  $\gamma(t_0)$  e  $\gamma(t_1)$  pertence a  $S$  e sua imagem por  $F$  é uma curva em  $\text{int}(N)$  que liga as duas componentes de  $N \setminus R$ , já que  $F(\gamma(t_0))$  e  $F(\gamma(t_1))$  pertencem a componentes opostas de  $N \setminus R$ . Assim  $F(S \cap V)$  é essencial.  $\square$

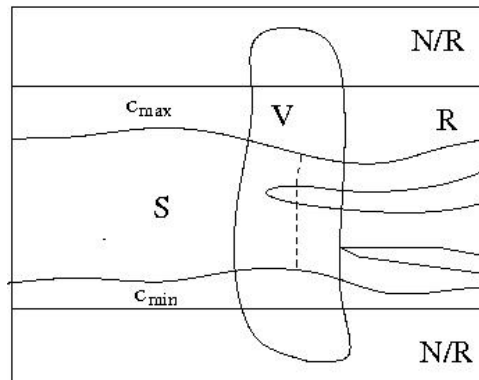


Figura 4.2:

**Teorema 4.1.1** *Suponhamos que  $N$  contém duas faixas horizontais fechadas e disjuntas,  $S_0$  e  $S_1$ , que são esticadas através de  $R$  por  $F$ . Então o shift completo  $\Sigma_2$  é fator topológico de  $F$ .*

**prova:** Seja

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^k(S_0 \cup S_1)$$

que é o conjunto dos pontos cujas órbitas por  $F$  estão contidas nas faixas  $S_0$  e  $S_1$ . A cada  $z \in \Lambda$  associamos uma seqüência  $\pi(z)$  de 0's e 1's de acordo com seu itinerário pelas faixas, mais precisamente  $\pi(z)$  é a seqüência cujo  $k$ -ésimo termo é 0 se  $F^k(z) \in S_0$  ou 1 se  $F^k(z) \in S_1$ .

Seja  $\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  a aplicação que leva um ponto  $z \in \Lambda$  em sua seqüência  $\pi(z) \in \Sigma_2$ . Esta aplicação está bem definida uma vez que as faixas  $S_0$  e  $S_1$  são disjuntas. Logo para todo  $k$  e qualquer  $z$  existe um único  $S_i$  tal que  $F^k(z) \in S_i$  e assim existe uma única seqüência em  $\Sigma_2$  associada a  $z$ . Veremos que  $\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  é uma fatoração de  $\Lambda$  sobre  $\Sigma_2$ .

### 1. $\pi$ é contínua.

Sejam  $z \in \Lambda$  e  $\alpha = \pi(z) \in \Sigma_2$ . Dada uma vizinhança  $V$  de  $\alpha$  existe um inteiro positivo  $r$  para o qual o cilindro  $C_{\alpha[-r,r]}$  está contido em  $V$ .

Para  $-r \leq k \leq r$  seja  $B_k \subset N$  uma bola aberta contendo  $z$  tal que  $F^k(B_k)$  intercepta somente a faixa  $S_{\alpha_k}$ , a existência de  $B_k$  é garantida pela continuidade de  $F$  e pelo fato de  $S_0$  e  $S_1$  serem fechadas e disjuntas.

O conjunto  $B = (\bigcap_{k=-r}^r B_k) \cap \Lambda$  é uma vizinhança de  $z$  em  $\Lambda$  tal que  $F^k(B) \subseteq S_{\alpha_k}$  para  $-r \leq k \leq r$ , ou seja, para todo  $z' \in B$ ,  $\pi(z')_k = \alpha_k$  donde  $F(z') \in C_{\alpha[-r,r]}$  e  $F(B) \subseteq C_{\alpha[-r,r]}$  e conclui-se assim a continuidade de  $\pi$ .

### 2. Vale a igualdade $\pi \circ F|_{\Lambda} = \sigma \circ \pi$ .

Seja  $z \in \Lambda$  e  $\alpha = \pi(z)$ . Por definição  $F^k(z) \in S_{\alpha_k}$  e logo  $z \in F^{-k}(S_{\alpha_k})$ . Temos então que  $z \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_k})$  e  $\pi(\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_k})) = \pi(z)$ .

Logo

$$\pi \circ F(z) \subseteq \pi \circ F\left(\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_k})\right) = \pi\left(\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k+1}(S_{\alpha_k})\right)$$

Por uma mudança de índice na interseção infinita temos:

$$\pi \circ F(z) \subseteq \pi \left( \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_{k+1}}) \right)$$

Observe que

$$\pi \left( \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_{k+1}}) \right)_k = \alpha_{k+1}$$

Logo

$$\pi \left( \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_{k+1}}) \right) = \sigma \circ \pi(z)$$

Finalmente como  $\sigma \circ \pi(z)$  é um único ponto em  $\Sigma_2$  temos a igualdade  $\pi \circ F(z) = \sigma \circ \pi(z)$ .

### 3. $\pi$ é sobrejetiva.

Para mostrar esse item vamos precisar Lema 4.2.1 e do seguinte :

**Lema 4.1.2** *Dado  $r \geq 1$  o conjunto:*

$$F(S_{\alpha_{-1}}) \cap F^2(S_{\alpha_{-2}}) \cap \dots \cap F^r(S_{\alpha_{-r}})$$

*é essencial para cada  $\alpha \in \Sigma_2$*

**prova** Por indução em  $r$ . O caso  $r = 1$  é claro pois  $F$  estica  $S_i$  através  $R$ . Suponha que o lema valha para  $r > 1$ . Então:

$$V = F(S_{\alpha_{-2}}) \cap F^2(S_{\alpha_{-3}}) \cap \dots \cap F^r(S_{\alpha_{-r-1}})$$

é essencial e pelo Lema 4.2.1:

$$F(S_{\alpha_{-1}} \cap V) = F(S_{\alpha_{-1}}) \cap F^2(S_{\alpha_{-2}}) \cap \dots \cap F^{r+1}(S_{\alpha_{-(r+1)}})$$

é essencial, portanto o lemma vale para  $r + 1$ , donde concluímos por indução que é válido para todo  $r$ .

**Corolário** Para cada  $\alpha \in \Sigma_2$  e cada  $r \geq 0$  o conjunto  $\Lambda_r(\alpha) = \bigcap_{k=-r}^r F^{-k}(S_{\alpha_k})$  é não vazio.

**prova:** Seja  $\beta = \sigma^{r+1}(\alpha)$  então  $\alpha_j = \beta_{j-r-1}$ .

$$\Lambda_r(\alpha) = F^{-r}(S_{\alpha_{-r}}) \cap F^{-r+1}(S_{\alpha_{-r+1}}) \cap \dots \cap F^r(S_{\alpha_r})$$

substituindo  $\alpha_j$  por  $\beta_{j-r-1}$  temos:

$$\Lambda_r(\alpha) = F^{-r}(S_{\beta_{-2r-1}}) \cap F^{-r+1}(S_{\beta_{-2r}}) \cap \dots \cap F^r(S_{\beta_{-1}})$$

Podemos escrever:

$$\Lambda_r(\alpha) = F^{-(r+1)}(F(S_{\beta_{-2r-1}}) \cap F^2(S_{\beta_{-2r}}) \cap \dots \cap F^{2r}(S_{\beta_{-1}}))$$

e concluímos que  $\Lambda(r)$  é não vazio já que pelo Lema 4.1.2 o conjunto  $F(S_{\beta_{-2r-1}}) \cap F^2(S_{\beta_{-2r}}) \cap \dots \cap F^{2r}(S_{\beta_{-1}})$  é essencial e portanto não vazio.

Os conjuntos  $\Lambda_r(\alpha)$  são interseções finitas de compactos, portanto são compactos e temos  $\Lambda_0(\alpha) \supset \Lambda_1(\alpha) \supset \dots \supset \Lambda_n(\alpha) \supset \dots$ . Logo  $\bigcap_{r=0}^{\infty} \Lambda_r(\alpha)$  é não vazio para cada  $\alpha$ , ou seja existe  $z \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} F^{-k}(S_{\alpha_k})$ . Segue que para todo  $\alpha \in \Sigma_2$  existe  $z \in \Lambda$  tal que  $\pi(z) = \alpha$  donde  $\pi$  é sobrejetiva.

□

## 4.2 Entropia topológica positiva do bilhar no anel excêntrico

C. Foltin em [13] provou que os bilhares excêntricos apresentam entropia topológica positiva para algum valor de parâmetro  $r$  suficientemente pequeno. Nesta seção ilustramos como a existência de um ponto homoclínico topologicamente transversal implica na positividade da entropia topológica do sistema. Utilizamos as simetrias do espaço de fase para construir a fatoração topológica com o shift de dois símbolos.

Suponha que exista um ponto  $q$  homoclínico topologicamente transverso sobre eixo  $\xi_0$ . Denotemos por  $\mathcal{L}^u$  e  $\mathcal{L}^s$  dois segmentos compactos das variedades invariantes, instável e estável respectivamente, que se interceptam em  $q$ .

**Lema 4.2.1** *Existe  $n_0$  tal que segmentos das curvas  $\gamma_{n_0}$ ,  $\phi_{n_0}$ ,  $\gamma_{-n_0}$  e  $\phi_{-n_0}$  limitam um conjunto conexo contendo  $q$  em seu interior e cujo bordo é formado por exatamente um segmento de cada uma das curvas  $\gamma_{n_0}$ ,  $\gamma_{-n_0}$ ,  $\phi_{n_0}$  e  $\phi_{-n_0}$ .*

**prova:** Na prova da proposição 3.2.3 mostra-se que dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que as seguintes interseções:

$$\gamma_{n_0} \cap \gamma_{-n_0}, \quad \gamma_{n_0} \cap \phi_{-n_0}, \quad \phi_{n_0} \cap \phi_{-n_0} \quad e \quad \phi_{n_0} \cap \gamma_{-n_0}$$

são todas não vazias com pontos da bola aberta  $B(q, \epsilon)$ .

Como  $q \in \xi_0$ , o conjunto  $\phi_{n_0} \cap \phi_{-n_0}$  possui um ponto  $p_1$  sobre o eixo  $\xi_0$ , já que  $\phi_{n_0} = X(\phi_{-n_0})$ . Seja  $\phi_{n_0}(t)$  uma parametrização da curva  $\phi_{n_0}$  tal que  $\phi_{n_0}(t_0) = p_1$ , e orientada de forma que para algum  $t_1 > t_0$  temos  $\phi_{n_0}(t_1) \in \gamma_{-n_0}$ , e para todo  $t_0 < t < t_1$  temos que  $\phi_{n_0}(t)$  não pertence à  $\gamma_{-n_0}$ . Diremos neste caso que  $\phi_{n_0}(t_1)$  é a primeira interseção entre  $\phi_{n_0}$  e  $\gamma_{-n_0}$ . Denotaremos  $\phi_{n_0}(t_1)$  por  $p_2$ .

Seja agora  $\gamma_{-n_0}(t)$  parametrização de  $\gamma_{-n_0}$  tal que  $\gamma_{-n_0}(t'_0) = p_2$  e orientada de forma que para algum  $t'_1 > t'_0$  temos que  $\gamma_{-n_0}(t'_1)$  é a primeira interseção entre  $\gamma_{-n_0}$  e o eixo  $\xi_0$ , que denotaremos por  $p_3$ .

Por construção temos que o segmento de  $\phi_{n_0}(t)$  entre  $t_0$  e  $t_1$  intercepta  $\gamma_{-n_0}(t)$  somente no ponto  $p_2$ . Assim, temos uma curva simples ligando  $p_1$  a  $p_3$  dada pela união de segmentos de  $\phi_{n_0}$  e  $\gamma_{-n_0}$ . A imagem pela simetria  $X$  desta curva é também uma curva simples ligando  $p_1$  a  $p_3$  dada pela união de segmentos das curvas  $\phi_{-n_0}$  e  $\gamma_{n_0}$ . A união desta duas curvas limita uma região conexa contendo  $q$  em seu interior e cujo bordo é formado por exatamente um segmento de cada curva  $\gamma_{n_0}$ ,  $\gamma_{-n_0}$ ,  $\phi_{n_0}$  e  $\phi_{-n_0}$ .

Pelo lema acima podemos definir uma coleção de conjuntos  $\{D_n\}_{n \geq n_0}$  onde  $D_n$  é o conexo contendo  $q$  limitado pelas curvas  $\gamma_n$ ,  $\phi_n$ ,  $\gamma_{-n}$  e  $\phi_{-n}$ . Pela simetria  $Y$  existe um segundo

ponto homoclínico  $q' = Y(q)$  sobre o eixo  $\xi_0$ , ao qual associamos uma coleção de conjuntos  $\{D'_n\}_{n \geq n_0}$  tais que  $D'_n = Y(D_n)$ .

Os lemas a seguir provam algumas propriedades dos conjuntos  $D_n$  e  $D'_n$  que serão úteis mais adiante.

**Lema 4.2.2** *Dado  $\epsilon > 0$  existe  $n$  tal que  $D_n \subset B(q, \epsilon)$*

**prova:** Consideremos  $\mathcal{L}^s$  e  $\mathcal{L}^u$  segmentos compactos das variedades que se interceptem em  $q$  e que estejam totalmente contidos em  $B(q, \epsilon)$ . Dada a compacidade dos segmentos podemos escolher  $\delta > 0$  tal que a  $\delta$ -vizinhança de  $\mathcal{L}^s \cup \mathcal{L}^u$  esteja totalmente contida em  $B(q, \epsilon)$ .

Seja  $n_1$  tal que as imagens por  $T^{n_1}$  e  $T^{-n_1}$  dos eixos de simetria contenham segmentos na  $\delta$ -vizinhança de  $\mathcal{L}^s \cup \mathcal{L}^u$ . Temos assim que  $D_{n_1} \subset B(q, \delta)$ .

**Lema 4.2.3** *Existe  $n$  tal que  $T(D_n) \cap D_n = \emptyset$*

**prova:** Existe  $\epsilon' > 0$  tal que as bolas abertas  $B(q, \epsilon')$  e  $B(T(q), \epsilon')$  são disjuntas. Pela continuidade de  $T$ , existe também  $\delta'$  tal que  $T(B(q, \delta')) \subset B(q, \epsilon')$  donde  $T(B(q, \delta')) \cap B(q, \delta') = \emptyset$ . Escolhendo  $n$  tal que  $D_n \subset B(q, \delta')$  temos que  $T(D_n) \cap D_n = \emptyset$ .

A partir de agora fixemos  $\epsilon > 0$  tal que  $B(q, \epsilon) \cap B(q', \epsilon) = \emptyset$ . Fixaremos também  $n_0$  de forma que  $D_{n_0} \subset B(q, \epsilon)$ ,  $D'_{n_0} \subset B(q', \epsilon)$  e  $T(D_{n_0}) \cap D_{n_0} = \emptyset$ ,  $T(D'_{n_0}) \cap D'_{n_0} = \emptyset$ .

O conjunto  $T^{-n_0}(D_{n_0})$  tem duas componentes do bordo sobre os eixos de simetria  $\gamma_0$  e  $\phi_0$ , são as imagens por  $T^{-n_0}$  dos segmentos de  $\partial D_{n_0}$  pertencentes à  $\gamma_{n_0}$  e  $\phi_{n_0}$ . Analogamente para  $T^{-n_0}(D'_{n_0})$ . Estas pré-imagens servirão como faixas verticais utilizadas no método da seção anterior, portanto passaremos a usar a seguinte notação.

$$S_0 = T^{-n_0}(D_{n_0}) \quad e \quad S_1 = T^{-n_0}(D'_{n_0})$$

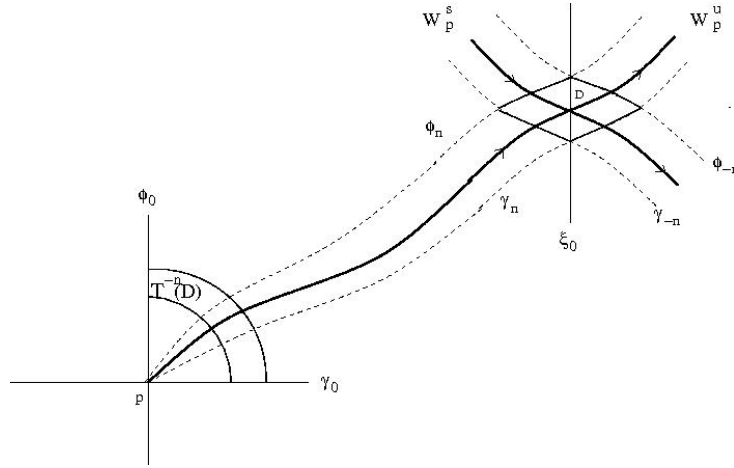


Figura 4.3: A aproximação das variedades pelos eixos de simetria definem o conjunto  $D_n$ . A pré-imagem  $T^{-n}(D_n)$  é um conjunto que possui componentes do bordo sobre os eixos de simetria.

Por construção o conjunto  $D_{n_0}$  é simétrico em relação a  $X$ , i.e  $X(D_{n_0}) = D_{n_0}$ . Como consequência temos  $T^{2n_0}(S_0) = X(S_0)$  e  $S_1 = XY(S_0)$ . De fato:

$$X(S_0) = XT^{-n_0}(D_{n_0}) = T^{n_0}X(D_{n_0}) = T^{n_0}(D_{n_0}) = T^{2n_0}(S_0)$$

e

$$XY(S_0) = XY(T^{-n_0}(D_{n_0})) = T^{-n_0}XY(D_{-n_0}) = T^{-n_0}X(D'_{-n_0}) = T^{-n_0}(D'_{-n_0}) = S_1$$

A Figura 4.4 ilustra os conjuntos  $S_0$ ,  $S_1$  e suas imagens por  $T^{2n_0}$ .

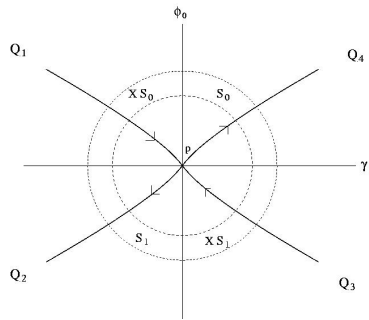


Figura 4.4: Os conjuntos  $S_0$ ,  $S_1$  e suas imagens por  $T^{2n_0}$ ,  $X(S_0)$  e  $X(S_1)$  respectivamente.

Observemos que os segmentos de  $\gamma_0$  e  $\phi_0$  que pertencem a  $\partial S_0$  são levados por  $T^{2n_0}$  em segmentos de  $\gamma_{2n_0}$  e  $\phi_{2n_0}$  que são as componentes de  $\partial X(S_0)$  que não pertencem aos eixos

de simetria. Os segmentos de  $\gamma_{-2n_0}$  e  $\phi_{-2n_0}$  em  $\partial S_0$  por sua vez são levados por  $T^{2n_0}$  nos segmentos de  $\gamma_0$  e  $\phi_0$  pertencentes a  $\partial X(S_0)$ .

Escolhemos  $n_0$  de forma que  $T(D_{n_0}) \cap D_{n_0} = \emptyset$ , portanto temos que  $T(S_0) \cap S_0 = \emptyset$ , o mesmo valendo pra  $S_1$ . Observemos que  $T(S_0)$  é um subconjunto de  $Q_4$  e  $T(S_1)$  um subconjunto de  $Q_2$ , (ver Figura 4.5 ).

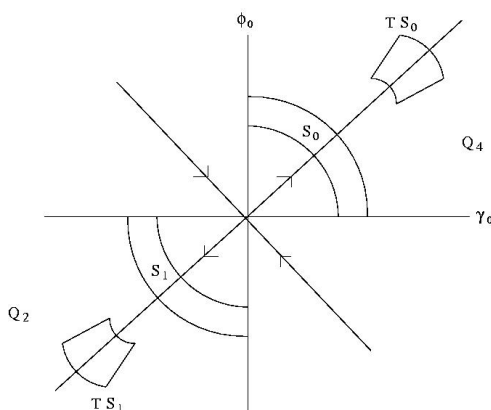


Figura 4.5: O conjunto  $S_0$  e sua imagem  $T(S_0) \subset Q_4$  e o conjunto  $S_1$  com sua imagem  $T(S_1) \subset Q_2$

Passamos agora a descrever a disposição do conjunto  $T(X(S_0))$ , para tanto consideremos  $c : [0, 1] \rightarrow X(S_0)$  uma curva contínua tal que  $c(0) \in \phi_0$  e  $c(1) \in \gamma_0$ . Observemos que para algum  $t_0 \in (0, 1)$   $c(t_0)$  pertence à variedade  $\mathcal{W}_p^s$ .

Como  $T(D_{n_0}) \cap D_{n_0} = \emptyset$  temos que  $T(X(S_0)) \cap X(S_0) = \emptyset$  logo  $T(c(t))$  é uma curva contínua sem pontos em comum com  $X(S_0)$ .

Como  $\phi_0 \cap X(S_0)$  é segmento do bordo de  $S_0$  temos que  $T(c(0)) \in T(S_0) \subset Q_4$ . E como  $\gamma_0 \cap X(S_0)$  é segmento do bordo de  $S_1$  temos que  $T(c(1)) \in T(S_1) \subset Q_2$ .

O ponto  $s(t_0)$  pertencente à variedade estável é levado em um ponto  $T(c(t_0))$  também na variedade só que mais próximo de  $p$ .

Concluimos que  $T(c(t))$  é uma curva contínua ligando um ponto de  $T(S_0)$  a um ponto de  $T(S_1)$  passando por um ponto de  $\mathcal{W}_p^s$  na região interna ao anel composto pelos conjuntos  $S_0, X(S_0), S_1$  e  $X(S_1)$ , (ver Figura 4.4).

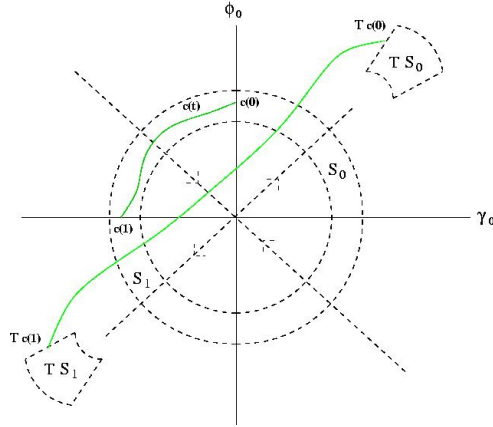


Figura 4.6: A imagem de uma curva contínua ligando pontos de  $\partial X(S_0) \cap \phi_0$  e  $\partial X(S_0) \cap \gamma_0$

Como esse é o comportamento de qualquer curva contínua em  $X(S_0)$  que liga pontos de  $\partial X(S_0) \cap \phi_0$  e  $\partial X(S_0) \cap \gamma_0$  concluímos que o conjunto  $T(X(S_0))$  tem a disposição como ilustrado na Figura 4.7. Por simetria  $XY$  podemos descrever a disposição do conjunto  $T(X(S_1))$ .

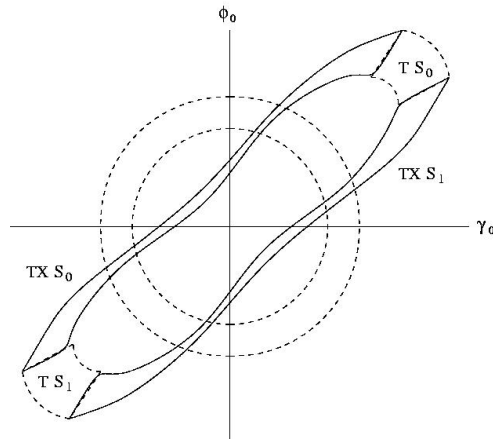


Figura 4.7: As imagens por  $T$  dos conjuntos  $X(S_0)$  e  $X(S_1)$  .

Para nos adequarmos ao método geométrico da seção anterior é necessário definir um conjunto  $N$  homeomorfo a um retângulo o qual tem  $S_0$  e  $S_1$  como faixas horizontais. Para nossos propósitos é suficiente definirmos  $N$  como qualquer conjunto conexo que contenha os conjuntos  $S_0, S_1$  tal que os segmentos  $\gamma_0 \cap \partial S_0, \phi_0 \cap \partial S_0$  e  $\gamma_0 \cap \partial S_1, \phi_0 \cap \partial S_1$  façam parte do bordo de  $N$ . Definiremos  $N$  de forma a conter em seu interior os conjuntos  $T(S_0),$

$T(S_1)$ ,  $T(X(S_0))$  e  $T(X(S_1))$ . A Figura 4.8 ilustra uma escolha possível de  $N$ .

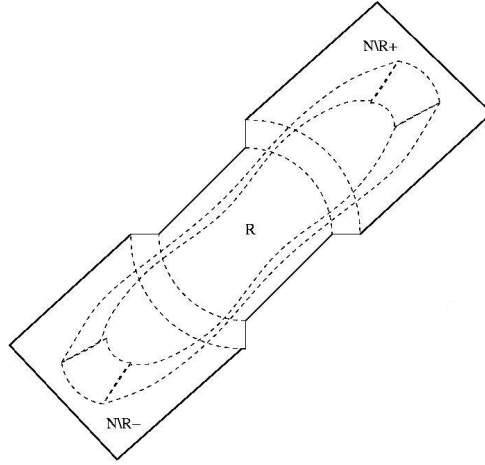


Figura 4.8: O conjunto  $N$ .

**Proposição 4.2.1**  $T^{2n+1}$  estica  $S_0$  e  $S_1$  através de  $R$

**prova**

Indicaremos por  $c_{max}^i$  e  $c_{min}^i$  respectivamente as curvas  $c_{max}$  e  $c_{min}$  da faixa horizontal  $S_i$ .

Com essa notação temos que  $c_{max}^0 = \phi_{-2n_0} \cap \partial S_0$  e  $c_{min}^0 = \gamma_{-2n_0} \cap \partial S_0$ . Segue que:

$$T^{2n+1}(c_{max}^0) = T(T^{2n_0}(\phi_{-2n_0} \cap \partial S_0)) = T(\phi_0 \cap X(S_0)) \subset N/R^+$$

$$T^{2n+1}(c_{min}^0) = T(T^{2n_0}(\gamma_{-2n_0} \cap \partial S_0)) = T(\gamma_0 \cap X(S_0)) \subset N/R^-$$

Ou seja, a aplicação  $T^{2n_0+1}$  leva a faixa horizontal  $S_0$  em  $T(X(S_0))$  que é subconjunto do interior de  $N$  e leva as curvas  $c_{max}^0$  e  $c_{min}^0$  em componentes opostas de  $N/R$ , então  $T^{2n_0+1}$  estica  $S_0$  sobre  $N$ . Por simetria concluímos também que  $T^{2n_0+1}$  estica  $S_1$  sobre  $N$ .  $\square$

A proposição acima conclui o que pretendíamos mostrar, ou seja, se as variedades invariantes  $\mathcal{W}_p^u$  e  $\mathcal{W}_p^s$  possuem uma interseção topologicamente transversal sobre o eixo de simetria  $\xi_0$  então a aplicação  $T$  possui entropia topológica positiva. Observemos mais uma

vez que não provamos que a interseção entre as variedades é topologicamente transversal, mas fizemos esta suposição com base em experimentos computacionais que sugerem que este é o comportamento dessas interseções para a maior parte dos casos em que os parâmetros do bilhar satisfazem  $r > \delta$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] SAITÔ, N.; HIROOKA, H.; FORD, J.; VIVALDI, F.; WALKER, G. H. *Numerical Study of Billiard Motion in a Annulus Bounded by non Concentric Circles*. Physica D, Amsterdam, 1982. 5, p. 273 - 286.
- [2] HASSELBLATT B.; KATOK A. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [3] KATOK, B.; STRELCYN, J.M *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*. Lect. Notes Math., Vol. 1222.
- [4] PALIS; DE MELO. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1978. (Projeto Euclides)
- [5] MAÑÉ, R. *Introdução à teoria ergódica*. Rio de Janeiro: IMPA, 1982.
- [6] MARKARIAN, R; CHERNOV, N. *Chaotic Billiards*
- [7] CARNEIRO, M. J. D., RAGAZZO, C. G., ZANATA, S. A., *Introdução á Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005.
- [8] C. L. SIEGEL, J. K. MOSER. *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1971.
- [9] COSTA, M. *Estudo de Órbitas Periódicas no Bilhar de Círculos não Concêntricos* (Mestrado em Física) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

- [10] LATOSINSKI, I. *Variedades invariantes de aplicações no plano* (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005.
- [11] OLIFFSON KAMPHORST, S.;PINTO DE CARVALHO, S.*The First Birkhoff Coefficient and the Stability of 2-Periodic Orbits on Billiards*. Experimental Mathematics vol 14 (2005).
- [12] BRAZ BATISTA, R. *Estudo do bilhar no anel de círculos excêntricos*. (Relatório de Iniciação científica)- - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005. (2005).
- [13] FOLTIN, C. *Billiards with positive topological entropy*.Nonlinearity 15 (2002).
- [14] BURNS, K.; WEISS, H.; *A geometric criterion for positive topological entropy*. Communications in Mathematical Physics 172(1995).
- [15] LIND, D.;MARCUS, B.; *Introdoction to symbolic dynamics and Coding*. Cambridge Univ.Press, 1996