

Flávio Marcílio de Oliveira

**ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE PROBLEMAS ENVOLVENDO
MASSAS MÓVEIS APLICADAS EM CABOS E ELEMENTOS DE VIGA**

UFMG

2012

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais Sireno e Terezinha
E aos meus irmãos Fábio e
Glauciana,
Grandes incentivadores e
apoiadores dessa caminhada.*

AGRADECIMENTOS

À Deus pelas oportunidades concedidas.

À minha família pela força nos momentos mais difíceis.

À Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, pela formação profissional e pessoal.

Ao professor Marcelo Greco pela orientação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pela bolsa de estudos concedida.

À secretária do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Maria Inês Miranda de Souza pela gentileza nos auxílios.

Aos colegas e professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG pelos momentos vividos.

À banca de defesa, composta pelos professores Estevam e Marcílio pelas valiosas contribuições para a melhoria da dissertação.

“Não te deixem o amor e a fidelidade; ata-os ao teu pescoço e escreve-os na tábua do teu coração. Então acharás graça e bom nome aos olhos de Deus e dos homens.”

Provérbios 3.3,4

Resumo

Esta dissertação irá trabalhar com as análises dinâmicas não lineares de massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga. Esse tipo de sistema mecânico é muito empregado em sistemas de transporte de passageiros como trens, e também possibilita a utilização de sistemas autônomos na inspeção e manutenção dos cabos de linhas de transmissão. Os sistemas estruturais são modelados numericamente com o auxílio de uma formulação baseada no método dos elementos finitos. Existem artigos recentes que trabalham essas análises utilizando vários métodos de solução, porém todos apresentam um alto nível de dificuldades na hora da discretização das equações governantes e na implementação dos algoritmos. Tais métodos, utilizando o conceito básico do Método dos Elementos Finitos dos sistemas de coordenadas locais e globais, são obrigados a trabalhar com um número maior de termos nas equações governantes. Assim, torna-se necessário o desenvolvimento de métodos numéricos de alta precisão, mas também simples para formulação não linear dinâmica. Portanto, o objetivo principal deste trabalho é apresentar uma abordagem numérica do sistema acoplado massa-cabo e massa-viga utilizando o conceito de não linearidade geométrica posicional. Usando esta metodologia, serão apresentadas análises com massas móveis movendo-se com velocidades constantes ou variáveis em problemas adimensionais e físicos reais. Para estes problemas, um conjunto de resultados será apresentado para análises do comportamento mecânico, como vibração no centro do vão durante o curso da massa ao longo do sistema estrutural (vibrações forçadas) e após a massa terminar seu curso (vibrações livres). Os resultados preliminares apontam para o enrijecimento do sistema acoplado massa-cabo durante o trajeto da massa, com o aumento da velocidade da massa. Esse fenômeno não é observado no sistema massa-viga.

Palavras chave: Análise não linear, dinâmica não linear, massa móvel, cabos.

Abstract

This dissertation deals with the nonlinear dynamic analysis of moving masses applied on cables and beam elements. This mechanical system is often used in systems for transport of passenger, such as trains, and also enables the use of autonomous systems used for inspection and maintenance of cable structures. The structural systems are modeled numerically with the aid of a formulation based on the Finite Element Method. There are recent articles that work these analyzes using various solution's methods, but all show a high level of difficulty at the time of discretization of the governing equations and the implementation of the algorithms. Such methods, using the basic concept of the Finite Element Method of the local and global coordinate systems, are forced to work with a larger number of terms in the governing equations. Thus, it becomes necessary the development of simple methods with more numerical accuracy, for the dynamic nonlinear formulation. Therefore, the main objective of this work is to present a numerical approach of the system mass-cable and mass-beam using the concept of positional geometrical nonlinearity. Using this methodology, the analysis will be presented to moving masses traveling with constant or variable velocities in dimensionless or real physical problems. For these problems, sets of results will be presented for the mechanical behavior analyses, as the midspan vibration during the course of the mass along the structural system (forced vibrations) and after the mass finishing their entire course (free vibrations). Preliminary results point to the increase of stiffness of the system mass-cable during the course of the mass, with the increase of mass velocity. This phenomenon is not observed in beam-mass system.

Keywords: Nonlinear analysis, nonlinear dynamic, moving mass, cables.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Trem de alta velocidade Madri-Barcelona (Fonte: http://maragao.com.br/2009/02/ave-o-trem-de-alta-velocidade-completa-1-ano/) | 2 |
| Figura 2 – Robô LineScout da Hydro-Québec (Fonte: http://www.audeladeslignes.com/robot-telecommande-repere-degats-reseau-transport-electricite-4518) | 2 |
| Figura 3 – Ponte de Milau na França (Fonte: http://blogdoslisossomos.blogspot.com.br/) | 3 |
| Figura 4 – Cabo suspenso e o equilíbrio de um elemento..... | 21 |
| Figura 5 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L < 1:15$ | 24 |
| Figura 6 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L < 1:11$ | 25 |
| Figura 7 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L \approx 1:8$ | 25 |
| Figura 8 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L \approx 1:8$ | 26 |
| Figura 9 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L > 1:4$ | 26 |
| Figura 10 – Modelo do problema de força móvel | 29 |
| Figura 11 – Modelo do problema de massa móvel..... | 29 |
| Figura 12 – Modelo do problema de oscilador móvel | 30 |
| Figura 13 – Modelo do problema de massa móvel analisado nesta dissertação | 31 |
| Figura 14 – Movimento de uma viga prismática no espaço..... | 44 |
| Figura 15 – Parametrização do elemento de treliça no espaço..... | 62 |
| Figura 16 – Parametrização da viga no plano | 62 |
| Figura 17 – Definição da curvatura | 66 |
| Figura 18 – Cabo suspenso submetido à cargas concentradas do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980) | 73 |
| Figura 19 – Diagrama de corpo livre do cabo suspenso do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 73 |
| Figura 20 – Equilíbrio no nó A para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 75 |
| Figura 21 – Equilíbrio no nó B para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 75 |
| Figura 22 – Equilíbrio no nó C para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 76 |
| Figura 23 – Equilíbrio no nó E para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 76 |
| Figura 24 – Numeração dos elementos e nós para o cabo suspenso com cargas concentradas do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 77 |
| Figura 25 – Sistema elastoplástico sem amortecimento com um grau de liberdade (Fonte: Biggs, 1964) | 82 |
| Figura 26 – Resposta numérica para o exemplo elastoplástico de Biggs (1964) | 87 |

| | |
|---|-----|
| Figura 27 – Comparação gráfica da resposta do exemplo elastoplástico de Biggs (1964)..... | 88 |
| Figura 28 – Viga com rotação prescrita do exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986) | 89 |
| Figura 29 – Função que representa a rotação da lâmina giratória de Simo e Vu-Quoc (1986) | 90 |
| Figura 30 – Definição dos deslocamentos U_1 e U_2 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986) | 90 |
| Figura 31 – Deslocamento U_1 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986) | 91 |
| Figura 32 – Deslocamento U_2 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986) | 92 |
| Figura 33 – Rotação relativa para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986) | 92 |
| Figura 34 – Movimento da viga em diferentes instantes de tempo para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)..... | 93 |
| Figura 35 – Deslocamento vertical para a viga horizontal do exemplo de Wu (2005)..... | 97 |
| Figura 36 – Deslocamento vertical obtido pela formulação proposta para a viga inclinada do exemplo de Wu (2005)..... | 98 |
| Figura 37 – Deslocamento horizontal obtido pela formulação proposta para a viga inclinada do exemplo de Wu (2005)..... | 98 |
| Figura 38 – Deslocamento no centro do vão para cabo suspenso (Fonte: Wang e Rega, 2010) | 100 |
| Figura 39 – Deslocamento no centro do vão para o exemplo de Wang e Rega (2010)..... | 100 |
| Figura 40 – Influência da taxa de amortecimento no deslocamento para o exemplo de Wang e Rega (2010) | 101 |
| Figura 41 – Desenho esquemático do cabo suspenso analisado..... | 105 |
| Figura 42 – Trajetória da massa móvel no cabo suspenso horizontal..... | 107 |
| Figura 43 – Trajetória da massa móvel no cabo suspenso inclinado | 107 |
| Figura 44 – Trajetória da massa móvel no cabo reto | 108 |
| Figura 45 – Influência do valor da massa no deslocamento vertical do cabo horizontal..... | 109 |
| Figura 46 – Influência do valor da massa no deslocamento vertical do cabo inclinado..... | 109 |
| Figura 47 – Influência da massa na força normal para o cabo horizontal..... | 110 |
| Figura 48 – Influência da massa na força normal para o cabo inclinado | 111 |
| Figura 49 – Influência da força vertical no deslocamento para o cabo horizontal | 112 |
| Figura 50 – Influência da força vertical no deslocamento para o cabo inclinado | 112 |
| Figura 51 – Influência da força vertical na força normal do cabo horizontal | 113 |
| Figura 52 – Influência da força vertical na força normal do cabo inclinado..... | 114 |
| Figura 53 – Exemplo envolvendo duas massas móveis..... | 114 |

| | |
|--|-----|
| Figura 54 – Efeito da distância entre duas massas móveis no deslocamento vertical de um cabo horizontal | 115 |
| Figura 55 – Velocidade da massa ao longo do comprimento do cabo..... | 116 |
| Figura 56 – Efeito da velocidade variável para um cabo inclinado..... | 117 |
| Figura 57 – Trajetória da massa em um cabo suspenso entre três suportes | 118 |
| Figura 58 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 0,2c$ | 119 |
| Figura 59 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 0,6c$ | 119 |
| Figura 60 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 1,0c$ | 120 |
| Figura 61 – Deslocamento vertical no centro do vão de uma viga para massas com diferentes velocidades | 121 |
| Figura 62 – Influência da condição de contorno no deslocamento da viga | 122 |
| Figura 63 – Plastificação da viga inclinada..... | 123 |
| Figura 64 – Variação da tensão normal na seção transversal da viga..... | 124 |
| Figura 65 – Representação esquemática do MEF convencional | 136 |
| Figura 66 – Representação esquemática do MEF posicional | 137 |
| Figura 67 – Sistema para comparação entre os métodos de solução | 138 |
| Figura 68 – Sistema de coordenadas locais..... | 138 |
| Figura 69 – Sistema de coordenadas para o método posicional | 140 |
| Figura 70 – Sistema de referência com rotação..... | 149 |
| Figura 71 – Idealização do modelo perfeitamente plástico (Fonte: Simo e Hughes, 1998) .. | 154 |
| Figura 72 – Meio cisalhante com constante $\sigma_Y > 0$ (Fonte: Simo e Hughes, 1998)..... | 155 |
| Figura 73 – Comparação entre o modelo perfeitamente plástico (esquerda) com um modelo com encruamento (direita) (Fonte: Simo e Hughes, 1998) | 160 |
| Figura 74 – Módulo tangente elastoplástico (esquerda) e módulo plástico (direita) (Fonte: Simo e Hughes, 1998)..... | 162 |
| Figura 75 – Efeito Bauschinger no modelo constitutivo elastoplástico (Fonte: Simo e Hughes, 1998) | 163 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Comparação entre a catenária e a parábola | 27 |
| Tabela 2 – Derivadas da energia potencial total em relação aos parâmetros nodais | 72 |
| Tabela 3 – Resultados analíticos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 77 |
| Tabela 4 – Coordenadas dos nós para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 78 |
| Tabela 5 – Resultados numéricos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980) | 78 |
| Tabela 6 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)..... | 79 |
| Tabela 7 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o exemplo de Biggs (1964) | 88 |
| Tabela 8 – Comparação entre os métodos matricial e posicional..... | 142 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------------|---|
| Π | Energia potencial total |
| U | Energia de deformação |
| K | Energia cinética |
| Q | Energia devido ao amortecimento |
| E_e | Energia de caráter externo devido à massa móvel |
| σ | Tensor de tensões genérico |
| ε | Tensor de deformações genérico |
| σ_N | Tensor de tensões de engenharia |
| ε_N | Tensor de deformações de engenharia |
| K_e | Energia cinética relacionada com o elemento |
| K_m | Energia cinética relacionada com a massa móvel |
| x_i | Posição nodal |
| Ω_x | Domínio do vetor de posição |
| ξ | Variável adimensional utilizada para mapear o elemento, taxa de amortecimento |
| X_m | Posição da massa móvel |
| $v \equiv \dot{x}_i$ | Velocidade do elemento |
| v_m | Velocidade da massa móvel |
| m | Massa da massa móvel |
| L_1 | Operador que define o amortecimento |

| | |
|------------------------|---|
| γ | Constante de proporcionalidade de amortecimento, regra de fluxo |
| I_0 | Operador identidade definido para o amortecimento viscoso |
| c_d, λ_m | Coefficiente de amortecimento |
| I | Momento de inércia |
| $g(s)$ | Função kernel do amortecimento de histerese temporal |
| α_c, β_c | Constantes da função kernel $g(s)$ |
| $h(x, \xi)$ | Função kernel de amortecimento de histerese espacial |
| a_c, b_c | Constantes da função kernel $h(x, \xi)$ |
| F_e | Força efetiva |
| P | Força imposta |
| Q_m | Energia devido a inércia da massa móvel |
| F | Energia potencial das forças devido ao movimento da massa móvel |
| ρ | Densidade de massa |
| E | Módulo de elasticidade |
| ε_e | Deformação elástica |
| ε_p | Deformação plástica |
| $\Lambda(x)$ | Rotação da seção transversal da viga |
| ${}^{t+\Delta t}X$ | Posição no tempo $t + \Delta t$ |
| 0X | Posição inicial |
| ${}^{t+\Delta t}{}_0u$ | Deslocamento entre o tempo $t + \Delta t$ e o tempo inicial |

| | |
|---------------------------------|--|
| $\hat{\theta}_x$ | Matriz antissimétrica para as derivadas do vetor de rotação θ |
| θ | Vetor de rotação |
| κ | Curvatura |
| A_0 | Área inicial |
| u | Densidade de energia por unidade de volume (ou por unidade de comprimento) |
| s_0 | Coordenada auxiliar definida no elemento |
| β, γ | Constantes de Newmark |
| α | Parâmetro de amortecimento numérico, variável de encruamento interno |
| \mathbf{M} | Matriz de massa |
| \mathbf{C} | Matriz de amortecimento |
| \mathbf{X} | Vetor posição |
| $\dot{\mathbf{X}}$ | Vetor velocidade |
| $\ddot{\mathbf{X}}$ | Vetor aceleração |
| $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ | Energia potencial mínima ou vetor de resíduos |
| $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X})$ | Matriz hessiana |
| l_0 | Comprimento inicial |
| l | Comprimento final |
| σ_Y | Tensão de escoamento |
| \mathbb{E}_σ | Conjunto de tensões possíveis |
| $\partial \mathbb{E}_\sigma$ | Superfície de escoamento |

| | |
|----------|---|
| K | Módulo plástico |
| H | Módulo de encruamento cinemático |
| q | Tensão de retorno (back stress) |
| T | Força de tração no cabo |
| H_c | Componente horizontal da força de tração |
| ω | Frequência natural |
| c_c | Amortecimento crítico |
| c | Velocidade de propagação de onda no meio elástico |
| N | Tensão de tração no cabo |
| t^* | Tempo adimensional |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... | 6 |
| | 2.1 - História do Estudo dos Cabos | 6 |
| | 2.2 - História do Estudo das Massas Móveis..... | 10 |
| | 2.3 - Os Métodos Numéricos na Análise Dinâmica..... | 13 |
| 3 | DEDUÇÃO MATEMÁTICA DO PERFIL GEOMÉTRICO DOS CABOS | 20 |
| | 3.1 - Introdução | 20 |
| | 3.2 - A catenária (peso próprio distribuído no comprimento real do cabo) | 20 |
| | 3.3 - A parábola (peso próprio distribuído na projeção horizontal do cabo) | 23 |
| | 3.4 - Comparação entre a parábola e catenária para um cabo suspenso | 24 |
| 4 | FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE PROBLEMAS | |
| | ENVOLVENDO MASSAS MÓVEIS..... | 28 |
| | 4.1 - Introdução | 28 |
| | 4.2 - Apresentação do modelo | 28 |
| | 4.3 - Estratégia de solução | 31 |
| | 4.4 - Formulação das equações governantes..... | 32 |
| | 4.4.1 - Energia de Deformação | 34 |
| | 4.4.2 - Energia Cinética..... | 35 |
| | 4.4.3 - Energia de Amortecimento..... | 37 |
| | 4.4.4 - Energia de caráter externo devido à massa móvel | 39 |
| | 4.4.5 - A equação da energia total do sistema envolvendo massa móvel | 40 |
| 5 | DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES | 42 |
| | 5.1 - Introdução | 42 |
| | 5.2 - Discretização Espacial..... | 42 |
| | 5.3 - Discretização Temporal..... | 51 |
| | 5.3.1 - Método da superposição modal | 51 |

| | |
|---|------------|
| 5.3.2 - Métodos diretos de integração temporal | 52 |
| 5.3.3 - Discretização temporal das equações de equilíbrio | 56 |
| 6 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES..... | 59 |
| 6.1 - Introdução | 59 |
| 6.2 - Método incremental-iterativo | 59 |
| 6.3 - Desenvolvimento interno do método incremental-iterativo | 61 |
| 7 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MÉTODO | 70 |
| 7.1 - Introdução | 70 |
| 7.2 - Problemas Estáticos..... | 70 |
| 7.2.1 - Exemplo numérico | 72 |
| 7.3 - Problemas dinâmicos..... | 79 |
| 7.3.1 - Primeiro exemplo numérico | 82 |
| 7.3.2 - Segundo exemplo numérico | 88 |
| 7.4 - Problemas envolvendo massa móvel..... | 93 |
| 7.4.1 - Primeiro exemplo numérico: Massa móvel em vigas | 94 |
| 7.4.2 - Segundo exemplo numérico: Massa móvel em cabos | 99 |
| 8 RESULTADOS | 104 |
| 8.1 - Introdução | 104 |
| 8.2 - Cabos submetidos a massas móveis | 105 |
| 8.2.1 - Um vão | 106 |
| 8.2.2 - Dois vãos | 117 |
| 8.3 - Vigas submetidas a massas móveis | 120 |
| 8.4 - Análise Elastoplástica..... | 122 |
| 9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS | 125 |
| 10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 128 |
| APÊNDICE A..... | 136 |
| APÊNDICE B..... | 143 |

| | |
|-------------------------|------------|
| APÊNDICE C | 149 |
| APÊNDICE D | 152 |
| ANEXO | 153 |

1

INTRODUÇÃO

Essa dissertação apresentará um estudo dentro da área da dinâmica não linear de estruturas. A análise dinâmica não linear de estruturas permite conhecer o comportamento das estruturas com maior precisão contribuindo com projetos mais econômicos, pois essa precisão influencia diretamente na escolha de materiais com melhor desempenho e conseqüentemente estruturas mais leves podem ser empregadas para a mesma resposta esperada quando se utiliza uma análise linear.

Dentro dessa área da dinâmica não linear de estruturas, o autor se propõe a desenvolver análises de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga. Este novo ponto de vista dos sistemas mecânicos e estruturais com características específicas contribuiu para o desenvolvimento de novas tecnologias na área de engenharia de transportes, como o caso dos trens de alta velocidade (Fig. 1), engenharia de manutenção, como os robôs desenvolvidos pela Hydro-Québec para inspeção e manutenção de linhas de transmissão (Fig. 2) e para o aperfeiçoamento dos projetos das estruturas existentes, como o caso das pontes rodoviárias (Fig. 3).



Figura 1 – Trem de alta velocidade Madri-Barcelona (Fonte: <http://maragao.com.br/2009/02/ave-o-trem-de-alta-velocidade-completa-1-ano/>)



Figura 2 – Robô LineScout da Hydro-Québec (Fonte: <http://www.audeladeslignes.com/robot-telecommande-repere-degats-reseau-transport-electricite-4518>)



Figura 3 – Ponte de Milau na França (Fonte: <http://blogdoslisossomos.blogspot.com.br/>)

Considerando a importância tecnológica dos sistemas envolvendo massas móveis, esta dissertação apresentará um estudo baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) para análise do comportamento dinâmico dos sistemas acoplados massa-cabo e massa-viga. O objetivo geral desta dissertação é apresentar o desenvolvimento das equações governantes baseando na formulação desenvolvida em Greco (2004) e Coda e Greco (2004), que considera as posições nodais dos elementos finitos (EF), sem considerar o sistema de coordenadas locais, típico do MEF clássico. A diferença entre as duas abordagens é apresentada no Apêndice A. O objetivo específico é analisar o comportamento dos cabos e vigas quando submetidos aos esforços provocados pelas massas móveis.

O interesse e a dedicação na elaboração deste trabalho são justificados pela grande aplicabilidade na engenharia de sistemas mecânicos, como os mostrados nas Figs. 1, 2 e 3. Também existe a possibilidade de extrapolar a teoria desenvolvida, com pequenos ajustes, para problemas de escoamento interno em dutos. Em Lee (1998), o autor mostra que a formulação das forças de interação entre a massa móvel e uma viga pode ser prontamente deduzida da equação dinâmica transversal de um duto com escoamento interno, equação essa deduzida em Lee *et al.* (1995).

Sendo assim, o autor apresentará um desenvolvimento baseado na determinação da energia potencial total do sistema e na minimização dessa energia com o objetivo de encontrar as

condições de equilíbrio do sistema. A formulação desenvolvida envolverá dois tipos de comportamento não linear: a não linearidade geométrica, relacionada à influência da mudança de geometria além da mudança contida nas hipóteses lineares; e a não linearidade física, relacionada com as características mecânicas do material quando submetido a esforços superiores ao limite elástico linear.

A metodologia para o que se propõe a fazer nesta dissertação seguirá os seguintes passos: a) Desenvolvimento da equação da energia do sistema e dedução de cada parcela que contribui nessa energia; b) Com cada termo de energia definido, o funcional de energia é minimizado em relação às posições nodais, encontrando o estado de equilíbrio do sistema; c) A seguir é realizada a discretização espacial utilizando o conceito das coordenadas absolutas no método dos elementos finitos, chegando-se a um sistema de equações semi-discretas. Utilizando um algoritmo de integração direta apropriado, esse sistema de equações é por sua vez discretizado no tempo; d) O último passo é a solução do sistema. Por ser um sistema de equações não lineares, um procedimento de solução voltado para problemas não lineares é utilizado gerando respostas aproximadas para o problema. Todo o procedimento de solução é implementado computacionalmente utilizando a linguagem de programação FORTRAN (compilador PowerStation 4.0).

Para uma melhor compreensão do trabalho, a apresentação foi dividida em nove capítulos de uma forma a garantir um entendimento sequencial do trabalho. No próximo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os aspectos mais importantes dessa dissertação como a evolução da teoria dos cabos, massas móveis e métodos numéricos, sendo que apenas os trabalhos mais relevantes serão comentados. No capítulo três é apresentada a dedução da equação que define o perfil geométrico de um cabo suspenso entre dois apoios e as hipóteses que podem ser aplicadas com a finalidade de simplificar o estudo. No capítulo quatro é apresentado o modelo matemático utilizado, a estratégia de solução e assim a formulação das equações governantes do problema. Com as equações definidas, o capítulo cinco é utilizado para apresentar a discretização espacial e temporal dessas equações. O capítulo seis é dedicado a apresentar o método utilizado na solução das equações de equilíbrio e também deduzir explicitamente os termos necessários na implementação computacional. Tendo definido a formulação e com o código implementado, uma etapa importante é a verificação e validação do desenvolvimento. Essa etapa é desenvolvida no capítulo sete, onde se inicia com a verificação da formulação aplicada em problemas estáticos e com um aumento sequencial

na complexidade das equações verifica-se a aplicação em problemas dinâmicos e por último a aplicação em problemas envolvendo massas móveis, sendo assim validada a formulação pela comparação com resultados da literatura. O capítulo oito é voltado para apresentar as análises desenvolvidas e no capítulo nove são feitas as conclusões e considerações finais sobre a dissertação, com algumas sugestões para trabalhos posteriores.

2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - História do Estudo dos Cabos

A importância do estudo dos cabos e elementos flexíveis para o desenvolvimento da Mecânica pode ser compreendida pela citação de Lord Rayleigh:

Para o matemático as cordas devem sempre possuir um interesse especial, tendo sido o campo de batalha onde se travaram as controvérsias de D'Alembert, Euler, [Daniel] Bernoulli e Lagrange, ligadas à natureza da solução das equações diferenciais parciais (Strutt, 1945).

O interesse no comportamento estático e dinâmico de cabos e cordas teve início provavelmente com os gregos, há cerca de 2500 anos, quando Pitágoras investigava os sons produzidos por cordas tensionadas, atribuindo-se a ele a primeira lei da vibração em cordas (Truesdell, 1960). Os resultados obtidos por Pitágoras nas relações da harmonia musical foram tão surpreendentes e exatos que ele sonhou encontrar nelas as leis que governavam o movimento das estrelas (Pauletti, 2002). Novos estudos relacionados a cabos são de Leonardo da Vinci (1452 – 1519) que se dedicou também ao estudo do problema da catenária, apresentando suas conclusões acerca desse assunto e ao estudo do equilíbrio das cordas suspensas, dentre os muitos problemas da mecânica de seu interesse. Nos seus diagramas é introduzido o primeiro modelo discreto para sistemas contínuos, representando exatamente o equilíbrio da corda suspensa entre dois apoios. Jerome Fracastoro em 1546 apresentou a primeira explicação verdadeira da natureza da ressonância, sendo corroborada pelo trabalho de John Baptist Benedetti, *On musical intervals*, publicado em 1585 (Truesdell, 1960). Stevin em 1586 estabeleceu o triângulo de forças (anteriormente mostrado por Leonardo da Vinci em seus diagramas) através de experimentos com cordas carregadas (Irvine, 1981). Isaac Beeckman (1588 – 1637) provavelmente nos anos de 1614 e 1615 se dedicou ao estudo de

pontes suspensas por cabos em uma geometria parabólica, mostrando em suas anotações a solução correta para o problema. Em 1618, Descartes auxiliou Beeckman em suas questões envolvendo vibrações em cabos. Nesse mesmo período, Marin Mersenne se dedicou aos estudos envolvendo sons provocados em sinos e outros instrumentos. Em 1625, Mersenne publicou o primeiro resultado concreto da ciência da vibração de corpos. Em 1629, Mersenne, Beeckman e Descartes discutiram em conjunto o problema da vibração da corda. Mersenne, em 1635, publicou seus livros sobre temas harmônicos, mostrando ser grandes obras em acústica e música (Truesdell, 1960).

A obra “Discursos e demonstrações matemáticas em relação às duas novas ciências relativas à mecânica e movimento local” de Galileo publicada em 1638 mostrou seu interesse na questão da vibração de cordas e no seu perfil de equilíbrio. No que se relaciona à vibração das cordas, Galileo é definido por Truesdell como inferior a Mersenne quanto à capacidade de experimentação, inferior a Beeckman quanto à capacidade de formulação teórica, mas superior a ambos na imaginação e na capacidade de convencer os outros pela escrita. Galileo apresentou ainda a conclusão equivocada que a figura formada por uma corda presa em dois suportes na mesma altura seria uma parábola, utilizando para chegar nessa conclusão uma analogia com o movimento de um projétil. Em 1646, o Lord Christiaan Huygens demonstrou que o perfil formado por correntes ou cordas presas em dois suportes não é parabólico. Em suas análises, Huygens considerou cordas com massa desprezível sendo carregadas por pesos discretos, como fez Beeckman. Huygens foi desde cedo estimulado por Mersenne a procurar as explicações teóricas da vibração das cordas. O jesuíta Ignace-Gaston Pardies em 1673 formulou o princípio básico para a solução de problemas em cordas submetidas a cargas verticais, afirmando que a geometria da corda não poderia ser parabólica. Essa formulação ficou conhecida como Teorema de Pardies. No ano de 1675, Robert Hooke durante um encontro da Royal Society em que propôs as relações de proporcionalidade, enunciou também que um arco incompressível, livre de momento, suportando seu próprio peso, poderia ser obtido invertendo-se a catenária, qualquer que fosse sua forma. Hooke foi o principal proponente de ideias acerca do som, porém nunca avançou além do que Beeckman e Mersenne já haviam discutido. Em 1677, através de seus experimentos, William Noble e Thomas Pigot puderam discutir sobre a existência de vários modos de vibrações com o surgimento de nós internos.

Na Acta Eruditorum de Maio de 1690, James Bernoulli propôs um concurso para encontrar a forma da catenária. Em junho de 1691, foram publicadas na Ata as soluções obtidas por Huygens, Leibniz e John Bernoulli, irmão mais novo de James Bernoulli. A solução proposta por Huygens foi baseada em princípios geométricos enquanto as soluções propostas por Leibniz e John foram baseadas nos recentes conceitos de cálculo.

Taylor em 1713 apresentou a primeira formulação por princípios dinâmicos do período fundamental de vibração de uma corda. Em 1728 o filho de John Bernoulli, Daniel Bernoulli famoso por suas pesquisas em dinâmica dos fluidos e Euler apresentaram uma teoria unificada da catenária e linha elástica. Euler apresentou trabalhos em acústica e música sendo o primeiro autor após Mersenne a afirmar regras para fornecer um conjunto de cordas visando à geração de sons, aplicadas em instrumentos musicais. Em 1733 Daniel Bernoulli publicou um artigo estabelecendo a sua descoberta dos modos de vibração e das frequências naturais de sistemas oscilantes. Em 1738 ele publicou uma solução na forma de uma série infinita para o problema das frequências naturais de uma corrente suspensa por uma extremidade, hoje essa série é conhecida como uma função de Bessel de ordem zero.

O período seguinte que se estende de 1746 a 1788 se tornou anos de muita disputa no campo científico (período das controvérsias citadas por Lord Rayleigh) entre D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange, todos envolvidos com estudos da teoria de vibrações e cordas. Em 1746 D'Alembert completou suas pesquisas sobre a curva formada por uma corda esticada, publicando seu primeiro memorando acerca desse assunto. Neste seu estudo, D'Alembert apresentou a primeira solução de equações diferenciais parciais pelo método da separação de variáveis. Em 1748 Euler publicou seu primeiro memorando, esclarecendo e adicionando pontos importantes na publicação de D'Alembert. Em 1750 Euler publicou sua obra "Primeiros princípios da mecânica", expressando as leis do movimento no sistema de coordenadas retangulares cartesianas. Em 1753 Daniel Bernoulli, "enfurecido pelas publicações de D'Alembert e Euler apressou-se para descrever e publicar suas ideias" sobre a composição dos modos simples de vibração. Nesta publicação Daniel citou D'Alembert e Euler como descuidados em relação às suas pesquisas, forçando-o a investigar as curvas admitidas por Brook Taylor para expressar a forma da corda. Em 1754 Euler publicou, com alguma irritação pelas críticas recebidas, seu segundo memorando "Observações sobre as memórias anteriores" reafirmando sua posição através de novas explicações, como uma representação por uma série trigonométrica infinita. Nos anos seguintes esses autores

continuam publicando críticas e repostas aos outros autores, sendo que em 1755, Daniel Bernoulli demonstrou que a vibração de uma corda poderia ser decomposta em formas modais independentes. Em 1759, Joseph-Louis de la Grange entrou nessa disputa criticando os artigos anteriores na publicação de seu primeiro memorando “Pesquisas sobre a natureza e propagação do som”, onde apresentou a solução explícita do problema de valor inicial para uma corda carregada. Em 1760 Lagrange utilizou um modelo discreto de corda para representar sua equação de movimento e o método das diferenças finitas para obter a solução do problema de vibração. No período de 1760 a 1767 a controvérsia continuou com D’Alembert, Daniel Bernoulli e Euler mantendo seus pontos de vista originais com pouca ou nenhuma modificação, enquanto Lagrange, mantendo uma oposição particular a Bernoulli, se inclinou levemente para a opinião de D’Alembert. Nesse período Lagrange publicou seu segundo memorando “Novas pesquisas sobre a natureza e propagação do som”, e também apresentou em 1761 a equação do movimento de corda formulada por métodos variacionais. Euler publicou suas pesquisas sobre a propagação e reflexão de ondas “Esclarecimento sobre o movimento de cordas vibrantes”. Em 1764 Euler obtém a equação do movimento de uma membrana em termos de coordenadas polares e determinou a solução através da separação de variáveis, sendo parte dessa solução uma série infinita, que hoje é conhecida como uma função de Bessel de primeira ordem. Em 1788 D’Alembert publicou “Novas reflexões sobre vibrações de cordas” ainda debatendo com os autores dos artigos anteriores. Nesse ano também é publicado o celebrado livro de Lagrange “Mécanique Analytique”.

É importante destacar que apesar da natureza agressiva da disputa gerada no período de 1746 a 1788, pelos autores citados e outros que apresentaram de alguma forma sua contribuição, a teoria dos cabos teve um avanço bastante significativo, como pode ser visto em detalhes em Truesdell (1960).

Em 1820, Poisson estendeu a equação de D’Alembert para o movimento de uma corda sujeita a ação de um sistema genérico de forças. Em 1829 também resolveu o problema da membrana retangular utilizando séries de Fourier. Em 1851 John Henry Rohrs analisou pela primeira vez a influência do peso próprio sobre as vibrações de um cabo suspenso. Este trabalho apresentou resultados cruciais provavelmente deduzidos por George G. Stokes. Rankine, em 1858, estudando as pontes suspensas, desenvolveu a teoria para análise do comportamento do cabo parabólico submetido a vários tipos de carregamento. Essa teoria de análise estática mostrou que esse comportamento é não linear. Em 1868 Edward John Roth, estendendo a

pesquisa de Rohrs, determinou a solução exata da vibração vertical simétrica de um cabo heterogêneo. Considerando cabo inextensível, ele mostrou que sua solução tende para a solução obtida por Rohrs, quando a razão flecha/vão é pequena. Routh obtém, também, a solução exata para os modos antissimétricos. Novos estudos só foram publicados depois do famoso acidente da ponte suspensa de Tacoma em 1940, ocasião em que Theodore von Kármán, duas semanas após o ocorrido, explicou a tragédia utilizando princípios aerodinâmicos aplicados em oscilações auto excitáveis. Em 1941, W. D. Rannie e von Kármán deduziram de forma independente os resultados para modos planos simétricos e antissimétricos de um cabo inextensível em três dimensões. Em 1945, George Sylvester Vicent estendeu essas análises para incluir o efeito da elasticidade do cabo nos modos simétricos. Em 1953, David S. Saxon e A. S. Cahn, considerando cabos inextensíveis, fizeram a maior contribuição para a teoria das vibrações no plano. Eles obtiveram soluções que convergiram efetivamente para as soluções previamente conhecidas para cabos inextensíveis com pequena razão flecha/vão e obtiveram através de soluções assintóticas resultados muito bons para grandes razões flecha/vão. Em 1961, W. J. Goodey também realizou pesquisas de cabos com grandes deflexões utilizando diferentes métodos. Em 1973, C. E. Smith e R. S. Thompson mostram que essas análises podem ser estendidas para cabos inclinados (Irvine, 1981).

2.2 - História do Estudo das Massas Móveis

A resposta dinâmica de estruturas excitadas por massas móveis tem sido investigada por muitos anos e muitas das vezes com o objetivo de explicar falhas das estruturas de engenharia como ocorreu em 1847 quando a ponte ferroviária Dee, em Chester – Inglaterra falhou provocando cinco vítimas fatais (Lewis e Gagg, 2004). Nesta ocasião o governo britânico criou uma comissão real formada por renomados pesquisadores, os quais realizaram vários experimentos para examinar o efeito do aumento ou diminuição da velocidade do trem na tendência de quebra da ponte com a passagem do trem. Como auxílio, George G. Stokes apresentou sua contribuição na discussão da equação diferencial obtida a partir dos experimentos e essa contribuição foi publicada em julho de 1849 no relatório final da comissão real (Stokes, 1849). Desse período em diante os novos projetos de pontes foram aperfeiçoados e as pontes existentes foram reforçadas para atender as novas análises.

Desde então, a aplicação e a importância desse assunto tem crescido, chegando a ser parte essencial nos projetos de pontes rodoviárias, pontes ferroviárias, pontes rolantes e até mesmo

em pesquisas da indústria bélica como projeto de canos de armas. A maioria das pesquisas desenvolvidas nesta área, apesar de cada uma apresentar um ponto de vista diferente do assunto e a aplicação de uma metodologia de solução diferente, possuem características semelhantes que permitem agrupar todos os estudos realizados em dois grupos: Os problemas envolvendo forças móveis e os problemas envolvendo massas móveis.

No primeiro grupo, o estudo das forças móveis foi realizado para simular a atuação e efeito de explosivos em cabos e membranas (Kanninen e Florence, 1967). Os autores utilizaram as cargas impulsivas uniformemente distribuídas em cabos e membranas infinitas. Flaherty (1968) é outro autor que estudou este tipo de problema apresentando resultados para a velocidade transversal de um cabo ideal submetido a uma carga pontual movendo-se com velocidade variável. Em sua pesquisa, Flaherty detectou a origem e propagação de uma singularidade no comportamento dinâmico do cabo. Até então as análises realizadas apresentam um tratamento linear, mas Yen e Tang (1970), utilizando a técnica da perturbação, apresentam a análise não linear de um cabo submetido a uma carga móvel. Em 1972, Fryba publicou a primeira edição de uma obra completa sobre tal assunto, explorando exaustivamente o caso de forças móveis em diferentes configurações geométricas e para diferentes tipos de força. O autor apresentou abordagens unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, avaliou a influência de diversas características dinâmicas e mecânicas no comportamento das estruturas analisadas.

O tipo de problema tratado nesta dissertação se enquadra no segundo grupo de problemas, envolvendo massas móveis. Neste grupo vários autores contribuíram com muitos trabalhos ao longo dos anos. O desenvolvimento de um algoritmo geral, incluindo termos relativos aos fenômenos interativos entre a massa móvel e uma viga, é apresentado por Ting *et al.* (1974). Utilizando uma técnica de transformação, Rodeman *et al.* (1976) representou a deflexão de um cabo ideal infinitamente longo em termos de uma integral envolvendo a aceleração transversal da massa como incógnita. Xu *et al.* (1997) utilizam o princípio de Hamilton para deduzir uma equação diferencial não linear para o movimento longitudinal e outra equação diferencial não linear para o movimento transversal de uma viga finita submetida a uma massa móvel. A solução dessas equações é realizada utilizando uma combinação entre o método das diferenças finitas com a técnica da perturbação. Ainda neste artigo os autores apresentam uma comparação do mesmo problema sendo tratado como um problema de força móvel e como um problema de massa móvel. Lee (1998) investigou uma situação que muitos

autores desconsideram – a separação entre a massa e a estrutura. Neste trabalho, Lee faz uso de uma analogia com um problema de fluxo de fluidos no interior de dutos (Lee *et al.*, 1995) para descrever as forças de interação entre a massa e a viga. Usando a equação diferencial do movimento transversal do duto, Lee identificou a contribuição do termo inercial, dos termos relativos às forças de Coriolis e centrífuga ambos devido ao movimento da massa móvel, e também dos termos interativos que se relacionam com a deflexão da viga e a velocidade da massa. Os dois termos interativos representam o efeito local e convectivo ocasionado pela variação da velocidade da massa. De acordo com Lee (1998), o termo convectivo pode ser desprezado para casos em que se tratam apenas de massas móveis pontuais, mas que deve ser considerado para o caso em que se estuda o comportamento de uma distribuição de massas, aproximando da semelhança de um fluxo de fluido em duto.

O estudo de massas móveis em cabos com perfil de catenária é realizado em Al-Qassab *et al.* (2003), utilizando o princípio de Hamilton para determinar a equação diferencial parcial do problema, e a solução é obtida através do método de Galerkin.

A influência das forças de inércia, de Coriolis, centrífuga e de atrito induzidas pela massa móvel em vigas inclinadas é investigada em Wu (2005). O autor chegou à conclusão que apenas as forças de atrito não apresentam uma influência significativa no comportamento dinâmico da viga.

Uma nova abordagem do problema é proposta em Bajer e Dyniewicz (2008), na qual é utilizado o conceito de domínio espaço-temporal para deduzir e discretizar as equações diferenciais do sistema acoplado. Em 2009, Dyniewicz e Bajer apresentam uma formulação possibilitando analisar o movimento crítico, subcrítico e supercrítico de uma massa móvel em cabos. Na resposta obtida, Dyniewicz e Bajer detectam a presença de descontinuidades na trajetória da massa no fim do seu percurso. Os autores provam matematicamente essa descontinuidade fazendo a consideração de massa desprezível do cabo.

A resposta transiente de cabos suspensos com massas móveis é apresentada em Wang e Rega (2010). Greco *et al.* (2011) apresentam uma metodologia baseada no conceito de não linearidade posicional para descrever e discretizar as equações do problema da massa móvel em cabos suspensos. Essa metodologia apresentada em Greco *et al.* (2011) será utilizada nesta dissertação para analisar o problema envolvendo massas móveis em cabos e vigas.

2.3 - Os Métodos Numéricos na Análise Dinâmica

A análise de problemas complexos, quando uma solução analítica não pode ser obtida, é realizada através de métodos numéricos que servem para aproximar a solução por meio de técnicas específicas. A técnica mais empregada no estudo dos meios contínuos é o método dos elementos finitos, que consiste na divisão do meio em unidades básicas conhecidas como “elemento finito”.

Historicamente, a raiz do Método dos Elementos Finitos vem de três linhas de pesquisas distintas: a matemática aplicada (Courant, 1943), física (Synge *apud* Bathe, 1996) e engenharia (Argyris e Kelsey *apud* Bathe, 1996). Entretanto, o método obteve seu verdadeiro impulso a partir do desenvolvimento de engenheiros. Os primeiros a contribuírem para esse desenvolvimento foram Argyris, Kelsey, Turner, Clough, Martin e Topp, sendo que Clough utilizou pela primeira vez o nome “elemento finito” em seus artigos. Duas importantes contribuições iniciais são “Continua and Discontinua” de Argyris e “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics” de Zienkiewicz e Cheung (Bathe, 1996). A partir dos anos 1960, a pesquisa relacionada com o Método dos Elementos Finitos se expandiu de tal forma que Zienkiewicz resumiu esse desenvolvimento analisando o tamanho de sua obra que na primeira edição (1967) continha apenas 272 páginas, na quarta edição (1989) passou a ter 1455 páginas divididas em dois volumes e no ano 2000 com a quinta edição passou a conter mais de 1700 páginas divididas em três volumes.

O Método dos Elementos Finitos, com seu grande desenvolvimento, passou a ser a principal ferramenta numérica na busca de soluções aproximadas para problemas complexos. Os problemas estruturais estáticos se tornaram então uma classe de problemas apresentando um procedimento padrão, com variáveis se relacionando apenas com o domínio espacial. Já os problemas estruturais dinâmicos constituem uma classe de problemas com um grau de complexidade maior que os estáticos, por envolver variáveis relacionadas tanto com o domínio espacial quanto com o domínio temporal.

Argyris e Mlejnek (1991) apresenta um entendimento básico a respeito do MEF aplicados em problemas dinâmicos:

[...]. Uma estrutura real, por conter somente um espaço limitado, pode perfeitamente ser discretizada por um número finito de elementos. Em princípio, a mesma técnica idealizada também pode ser

aplicada para o domínio do tempo. Apesar de o domínio do tempo ser ilimitado, um problema real necessita, em uma análise, apenas de um intervalo de tempo finito.

Essa discretização espacial e temporal pode ser realizada simultaneamente na mesma etapa, procedimento conhecido como Método de Galerkin Descontínuo, Método DG ou Método dos Elementos Finitos Espaço-temporais, STFEM (Hughes e Hulbert, 1988; Han e Lu, 1999), ou discretização realizada em duas etapas distintas, um caso especial do Método de Kantorovich e também denotado como semi-discretização (Argyris e Mlejnek, 1991).

Segundo Jamet (1978), o Método de Galerkin Descontínuo foi utilizado pela primeira vez em 1969 com J. T. Oden. Em seu trabalho, Jamet desenvolveu análises de equações parabólicas em um domínio dependente do tempo utilizando elementos finitos espaço-temporais.

Hughes e Hulbert (1988) apresentam a formulação para problemas elastodinâmicos com o MEF espaço-temporal. Neste artigo, os autores ressaltam uma vantagem desse método em relação ao método de semi-discretização: a possibilidade de malhas não estruturadas, já que no método semi-discreto “a discretização é feita primeiro no espaço e então independentemente no tempo, a malha espaço-temporal é inevitavelmente estruturada”. Os autores também ressaltam que os métodos de discretização simultânea requerem muita memória e tempo computacional, o que é uma desvantagem em relação aos outros métodos. Conforme Hughes e Hulbert (1988), a elastodinâmica clássica pode ser convertida em uma forma hiperbólica simétrica de primeira ordem, na qual a metodologia espaço-temporal pode ser aplicada imediatamente. Entretanto, esta transformação produz um sistema com algumas desvantagens de cálculo, e sua generalização para a elastodinâmica não linear só é possível em circunstâncias especiais. Por estas razões, é conveniente e mais natural uma transformação em um problema hiperbólico de segunda ordem.

Em 1990, Hulbert e Hughes, apresentam o desenvolvimento do MEF espaço-temporal para equações hiperbólicas de segunda ordem. Neste trabalho os autores apresentam uma comparação entre as respostas de um problema de impacto obtidas com a formulação de semi-discretização e a formulação descontínua de Galerkin. Com seus desenvolvimentos, os autores apontam a desvantagem da abordagem semi-discreta na captura de descontinuidades nas soluções.

Uma solução da equação de onda obtida com a discretização simultânea no espaço e no tempo é apresentada por French (1993). Uma análise de estimativas de erros a priori e a posteriori para problemas hiperbólicos de segunda ordem é realizada por Johnson (1993).

Hou e Peters (1994) apresentam um desenvolvimento de elementos espaço-temporais triangulares e quadriláteros para aplicações em problemas de propagação de ondas. As bases teóricas utilizadas neste trabalho decorrem do princípio fraco de Hamilton e sua metodologia segue a formulação das “ações”, um princípio variacional da elastodinâmica no domínio espaço-temporal afirmado por Peters e Izadpanah.

Em 1998, Li e Wiberg desenvolvem um MEF espaço-temporais adaptativo e implementam para análises dinâmicas de problemas uni e bidimensionais. O método aproxima deslocamentos e velocidades por funções lineares por partes no espaço e no tempo simultaneamente permitindo descontinuidades no tempo discreto.

Han e Lu, em 1999, desenvolvem um MEF espaço-temporais para análises dinâmicas elastoplásticas. A forma fraca das equações governantes, que é a forma integral das equações diferenciais do problema, é derivada do princípio do trabalho virtual. Essa abordagem pode ser interpretada fisicamente como uma generalização da lei de conservação de impulso-momento, podendo ser aplicada a uma classe mais ampla de problemas.

Em 2008, Bajer e Dyniewicz apresentam uma abordagem espaço-temporal para análises de problemas envolvendo massas móveis em cabos. A interação da massa móvel com a estrutura é descrita em um sistema de coordenadas local do domínio dos elementos finitos espaço-temporais.

Outro método mais difundido no campo científico é o método da semi-discretização. Neste método uma aproximação espacial é utilizada para discretizar as equações diferenciais parciais, transformando-as em equações diferenciais ordinárias no tempo. Essa primeira etapa, clássica dos métodos de elementos finitos aplicados em problemas estáticos, confere o nome “semi” ao método. Tendo estabelecido esse sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) no tempo, diversas técnicas são utilizadas para a determinação da solução das EDO's. As soluções são obtidas através de um procedimento incremental, sendo que em cada incremento da resposta necessita-se de duas integrações no tempo para determinar todas as

incógnitas do problema, sendo tais algoritmos denominados de “algoritmo de integração temporal”.

Os algoritmos de integração temporal são divididos em dois grupos: Métodos explícitos e Métodos implícitos. Nos métodos explícitos, a solução no tempo $t + \Delta t$ é obtida considerando as condições de equilíbrio no tempo t . Nos métodos implícitos, a solução no tempo $t + \Delta t$ é obtida considerando velocidade e aceleração também no tempo $t + \Delta t$.

Os algoritmos explícitos, de acordo com Dokainish e Subbaraj (1989), geralmente apresentam um custo computacional, por passo de tempo, muito menor que algoritmos implícitos e também necessitam de pouca memória. Entretanto, são algoritmos com estabilidade condicional e requerem pequenos passos de tempo para alcançar uma estabilidade numérica. Ainda segundo os autores, algoritmos com estabilidade condicional requerem que o passo de tempo empregado seja inversamente proporcional à maior frequência do sistema discreto.

Dentre os algoritmos explícitos, o método das diferenças centrais de segunda ordem é o mais empregado em programas de análise estrutural dinâmica. É o método com maior precisão e máximo limite de estabilidade para um método explícito de segunda ordem. Dokainish e Subbaraj (1989) citam ainda o método Runge-Kutta de quarta ordem, muito popular e muitas vezes recomendado por sua precisão numérica, possui várias características de interesse, tais como, auto inicialização, passo de tempo facilmente alterado, não necessita de iterações para problemas não lineares e é de uma ordem relativamente alta e na pior das hipóteses possui uma fraca instabilidade. Os autores citam os métodos rigidamente estáveis desenvolvidos para estender o limite de estabilidade de cálculos explícitos usados em sistemas de equações “rígidos”, produzidos por processos de discretização, em que algumas componentes de frequência variam rapidamente no tempo enquanto outras não. Outro método apresentado pelos autores é o preditor-corretor (PC), um método iterativo que utiliza um ou mais passos de tempo anteriores para auxiliar na avaliação das variáveis de cada passo de tempo seguinte. Esse método apresentou algumas evoluções como o PEC (preditor-avaliador-corretor) e o PECE (preditor-avaliador-corretor-avaliador). Um método PC de segunda ordem de Adams-Molton foi desenvolvido para análise estrutural dinâmica não linear de estruturas de aeronaves. Esse método é também utilizado em conjunto com outros métodos como Newmark e Runge-Kutta de quarta ordem para melhorar a estabilidade e a precisão.

De acordo com Dokainish e Subbaraj (1989), muitos métodos implícitos são incondicionalmente estáveis para análises lineares e o maior passo de tempo é determinado em função da precisão do método e não em função da estabilidade. Ao contrário dos métodos explícitos, nos métodos implícitos é necessário um maior esforço computacional por passo de tempo, mas permite passos de tempo maiores.

Para Subbaraj e Dokainish (1989) os métodos implícitos são mais eficientes em análises estruturais dinâmicas, nas quais a resposta é controlada por um número relativamente pequeno de modos de baixa frequência, enquanto os métodos explícitos são mais eficientes em problemas de propagação de onda, nos quais a contribuição de modos de frequência intermediária e alta na resposta é mais significativa. Neste artigo, os autores apresentam alguns métodos já desenvolvidos e explicam suas características mais expressivas. Em primeiro lugar citam os métodos da família de Newmark, que são o grupo de métodos mais utilizados dentre os algoritmos implícitos de integração temporal direta. Os métodos da família de Newmark possuem parâmetros numéricos que controlam a estabilidade e a precisão do algoritmo. O algoritmo inicialmente foi proposto considerando a aceleração constante e depois com uma aproximação linear. Em problemas de dinâmica estrutural o método com aceleração constante é um dos mais eficientes e populares, sendo que o valor considerado para a aceleração é a média das acelerações no início e fim de um intervalo de tempo. Subbaraj e Dokainish (1989) citam ainda o método Wilson- θ , que é uma extensão do método da aceleração linear. No método Wilson- θ é considerada uma aceleração linear do tempo t ao tempo $t + \theta\Delta t$, onde $\theta \geq 1,0$. Para $\theta = 1,0$, o método se equivale ao método da aceleração linear da família de Newmark, mas nesse caso o método é apenas condicionalmente estável. Em problemas lineares o método é incondicionalmente estável para $\theta \geq 1,37$, mas $\theta = 1,4$ é usualmente empregado. O método de Houbolt, também citado, é um método incondicionalmente estável e sua maior desvantagem está associada com o amortecimento numérico introduzido na resposta quando grandes passos de tempo são utilizados.

A partir de suas análises, Subbaraj e Dokainish (1989) destacam algumas características importantes que os algoritmos de integração temporal direta devem possuir: estabilidade incondicional, amortecimento numérico controlável, auto inicialização e precisão de segunda ordem. De acordo com os autores, o método de Newmark apesar de ser um dos mais eficientes e populares algoritmos implícitos, possui estabilidade incondicional, permitir soluções com até segunda ordem de precisão e não necessitar de procedimentos especiais de

inicialização, não possui um mecanismo de controle do amortecimento numérico. O método Wilson- θ , popular em engenharia de terremotos, atende todas as características citadas, porém, é também dissipativo em modos de baixa frequência o que não é interessante para problemas de análise estrutural dinâmica. Além disso, o método Wilson- θ tem a tendência de ultrapassar significativamente a solução exata ('overshoot') nos cinco primeiros passos quando grandes passos de tempo são empregados e em problemas não-lineares passa a ser independente de θ . O método de Houbolt requer um procedimento especial de inicialização, é incondicionalmente estável e mais dissipativo que o método Wilson- θ .

Em 1977, Hilber *et al.*, a partir de estudos dos três algoritmos precedentes, desenvolveram um novo algoritmo com as características levantadas em Subbaraj e Dokainish (1989). Esse novo algoritmo denominado por muitos autores de HHT- α , possui uma nova forma de amortecimento, chamada pelos autores de dissipação- α . A dissipação do algoritmo HHT- α consiste na combinação de uma dissipação- γ positiva de Newmark e uma dissipação- α negativa.

Hoff e Pahl (1988) apresentam o desenvolvimento de um novo algoritmo conhecido como método θ_1 ou método HP- θ_1 com precisão de segunda ordem para qualquer valor de amortecimento físico ou numérico, incondicionalmente estável, permite obter soluções com nenhuma oscilação espúria na faixa de frequências mais baixas, não apresenta pontos de bifurcação e com amortecimento numérico controlável em altas frequências.

Em 1993, Chung e Hulbert utilizam o método HHT- α desenvolvido por Hilber *et al.* (1977) e o método WBZ- α desenvolvido por Wood *et al.* (1981) e cria o método α -generalizado, também denominado de método CH- α . Tal método não possui o fenômeno de 'overshoot' observado em outros algoritmos. O método tem estabilidade incondicional, precisão de segunda ordem e possui uma combinação ótima de amortecimento de alta e baixa frequência. Para um desejado nível de amortecimento de alta frequência, o amortecimento de baixa frequência é minimizado. Os autores concluem que esse método possui as melhores características de amortecimento e os menores erros relativos ao período e deslocamento se comparados com outros métodos dissipativos. No entanto, o método tem uma implementação computacional pesada.

Em 1994, Chung e Hulbert apresentaram um novo algoritmo implícito, conhecido como método CH-SSH. Esse método pode ser considerado sendo da família dos métodos de

Houbolt, mas sem suas desvantagens de inicialização e de amortecimento em baixas frequências e com a capacidade de produzir as raízes do polinômio característico com magnitude zero no limite das frequências altas (característica conhecida como aniquilação assintótica).

Em 2002, Erlicher *et al.* estenderam a análise do método CH- α , da família dos métodos G- α (métodos α generalizado), para problemas dinâmicos não lineares e prova a precisão de segunda ordem para deslocamentos e velocidades e de primeira ordem para aceleração o que ocorre também no método HHT- α .

Em 2004, Zhou e Tamma realizam uma análise dos métodos existentes e apresenta o desenvolvimento do método GSSSS, contendo algumas características dos métodos existentes e outras específicas para um determinado problema. Também em 2006, Yu e Zhao, comenta algumas características dos métodos existentes e propõe o novo método α generalizado. Assim, se sucede ao longo dos anos, novos algoritmos são propostos e para seus criadores, são os melhores para análise dos problemas estudados por eles.

Portanto, o que se pode concluir é que não existe um algoritmo ideal que possa ser aplicado em todos os problemas. Na verdade, existem algoritmos que apresentam algumas características melhores do que em outros para problemas específicos e para o que se deseja investigar nesses problemas. Sendo assim, a escolha do algoritmo HHT- α para as análises desenvolvidas nesta dissertação é feita considerando sua aplicabilidade ao problema em questão, além de ser um método simples e bastante estudado, visto que no desenvolvimento dos novos algoritmos, o algoritmo HHT- α é tomado como referência.

3

DEDUÇÃO MATEMÁTICA DO PERFIL GEOMÉTRICO DOS CABOS

3.1 - Introdução

Como descrito no capítulo sobre Revisão Bibliográfica, a teoria envolvendo cabos despertou o interesse de muitos pesquisadores e por esse motivo apresenta uma teoria bastante consolidada e largamente aplicada na engenharia de estruturas.

O princípio de todos os estudos e o conseqüente emprego em estruturas ocorre com o entendimento da geometria assumida pelo cabo quando suspenso entre dois apoios. Sendo assim, é apresentada a seguir uma descrição sucinta sobre a dedução matemática do perfil de um cabo suspenso e sobre as hipóteses envolvidas nas equações seguindo a teoria apresentada em Irvine, 1981 e Beer *et al.*, 2010.

3.2 - A catenária (peso próprio distribuído no comprimento real do cabo)

O perfil de um cabo suspenso entre dois apoios sujeito ao peso próprio é denominado de catenária. A equação que expressa matematicamente a forma da catenária é deduzida considerando um cabo inextensível, uniforme, perfeitamente flexível e incapaz de resistir forças de compressão. A Fig. 4 apresenta o cabo suspenso entre dois apoios e o diagrama de corpo livre de um elemento.

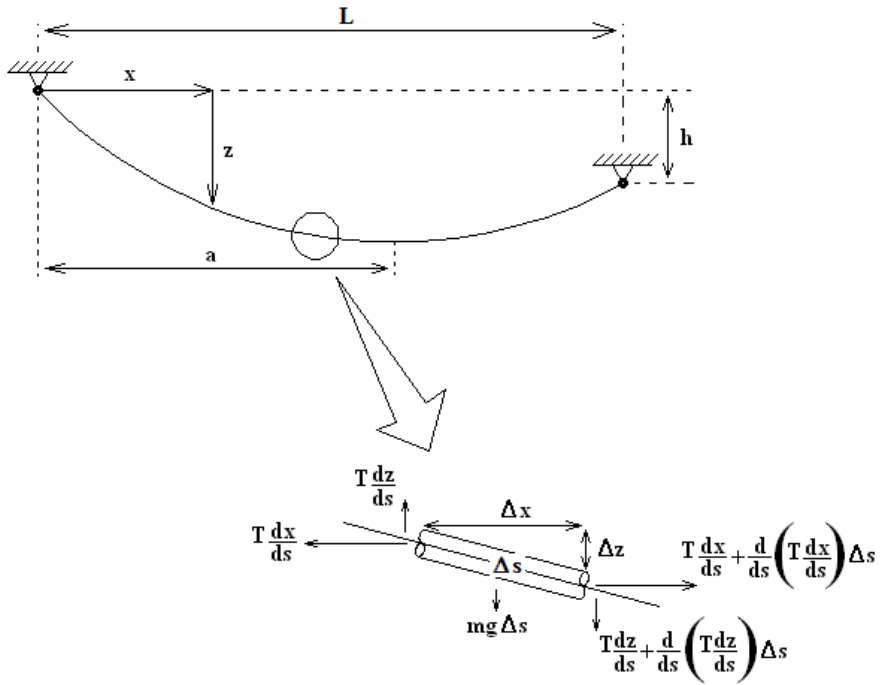


Figura 4 – Cabo suspenso e o equilíbrio de um elemento

Com as condições de equilíbrio aplicadas no elemento, tem-se:

$$\begin{cases} \Sigma F_z = 0 \Rightarrow -T \frac{dz}{ds} + T \frac{dz}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) \Delta s + mg \Delta s = 0 \\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -T \frac{dx}{ds} + T \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) \Delta s = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Através do equilíbrio em Z, define-se:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = -mg \quad (3.2)$$

Onde T é a força de tração no cabo.

Através do equilíbrio em X, define-se:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Integrando a Eq. (3.3), tem-se:

$$T \frac{dx}{ds} = H_c \quad (3.4)$$

Onde H_c é a componente horizontal da força de tração no cabo.

Isolando T da Eq. (3.4) e substituindo na Eq. (3.2):

$$\frac{d}{ds} \left(H_c \frac{ds}{dx} \frac{dz}{ds} \right) = -mg \Rightarrow H_c \frac{d^2z}{dx^2} = -mg \frac{ds}{dx} \quad (3.5)$$

Analisando a Fig. 4 conclui-se que:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.6) na Eq. (3.5):

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{mg}{H_c} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad (3.7)$$

Integrando uma vez a Eq. (3.7) tem-se a tangente da curva:

$$z'(x) = -\operatorname{senh} \left(\frac{mg}{H_c} x - c_0 \right) = \operatorname{senh} \left(c_0 - \frac{mg}{H_c} x \right) \quad (3.8)$$

Integrando duas vezes a Eq. (3.7) tem-se a equação da catenária, definida por:

$$z(x) = -\frac{H_c}{mg} \cosh \left(c_0 - \frac{mg}{H_c} x \right) + c_1 \quad (3.9)$$

Para determinar as duas constantes são necessárias duas condições de contorno, que para este exemplo podem ser expressas por:

$$\begin{cases} z'(x = a) = 0 \\ z(x = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Aplicando as condições de contorno dadas pela Eq. (3.10) são determinadas as constantes c_0 e c_1 :

$$c_0 = \frac{mg}{H}a \quad (3.11)$$

$$c_1 = \frac{H}{mg} \cosh\left(\frac{mg}{H}a\right) \quad (3.12)$$

Inserindo as constantes dadas pelas Eqs. (3.11) e (3.12) na Eq. (3.9), obtém-se a equação da catenária para um cabo suspenso entre dois apoios de níveis diferentes:

$$z(x) = -\frac{H_c}{mg} \cosh\left(\frac{mg}{H_c}a - \frac{mg}{H_c}x\right) + \frac{H_c}{mg} \cosh\left(\frac{mg}{H_c}a\right) \quad (3.13)$$

Considerando:

$$C_1 = \frac{H_c}{mg} \quad (3.14)$$

a Eq. (3.13) pode ser expressa na sua forma mais conhecida:

$$z(x) = -C_1 \left[\cosh\left(\frac{a-x}{C_1}\right) - \cosh\left(\frac{a}{C_1}\right) \right] = C_1 \left[\cosh\left(\frac{x-a}{C_1}\right) - \cosh\left(\frac{a}{C_1}\right) \right] \quad (3.15)$$

3.3 - A parábola (peso próprio distribuído na projeção horizontal do cabo)

De acordo com Irvine (1981), um cabo sujeito ao seu peso próprio suspenso entre dois apoios tal que a razão entre a flecha e o comprimento do vão for de 1:8 ou menos a equação diferencial que governa o equilíbrio vertical de um elemento pode ser precisamente expressa por:

$$H_c \frac{d^2z}{dx^2} = -mg \quad (3.16)$$

O que fornece uma equação de segundo grau para representar o perfil do cabo. Integrando uma vez a Eq. (3.16):

$$z'(x) = -\frac{mg}{H_c}x + c_0 \quad (3.17)$$

Integrando novamente a Eq. (3.17), tem-se:

$$z(x) = -\frac{mg}{2H_c}x^2 + c_0x + c_1 \quad (3.18)$$

Inserindo as condições de contorno dadas pela Eq. (3.10), as constantes da Eq. (3.18) podem ser determinadas:

$$c_0 = \frac{mg}{H_c} a \quad (3.19)$$

$$c_1 = 0 \quad (3.20)$$

Portanto, a equação do perfil do cabo é expressa por:

$$z(x) = -\frac{1}{2C_1} (x^2 - 2ax) \quad (3.21)$$

Onde C_1 é definida pela Eq. (3.14).

3.4 - Comparação entre a parábola e catenária para um cabo suspenso

As Figs. 5, 6, 7, 8 e 9 mostram uma comparação entre a catenária e a parábola para várias razões de flecha/vão com a finalidade de comprovar para qual razão a representação do perfil de um cabo suspenso por meio de uma parábola produz erros desprezíveis no cálculo.

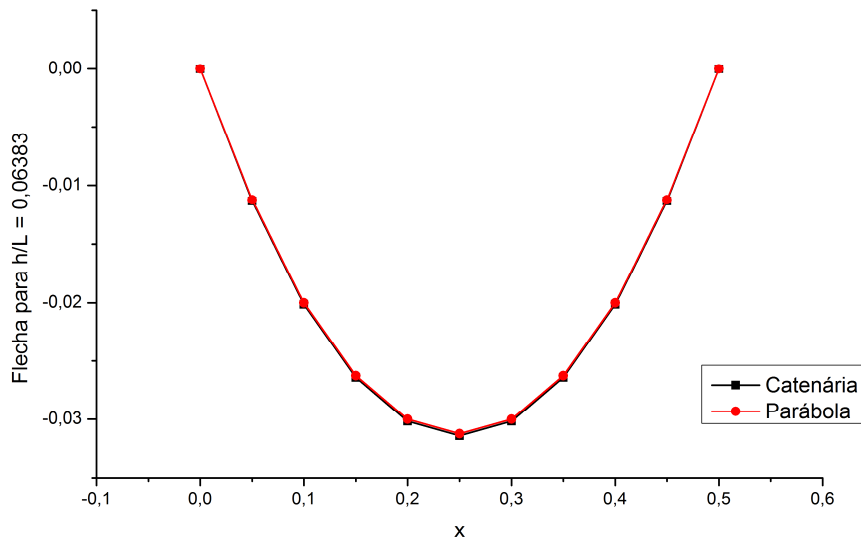


Figura 5 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L < 1:15$

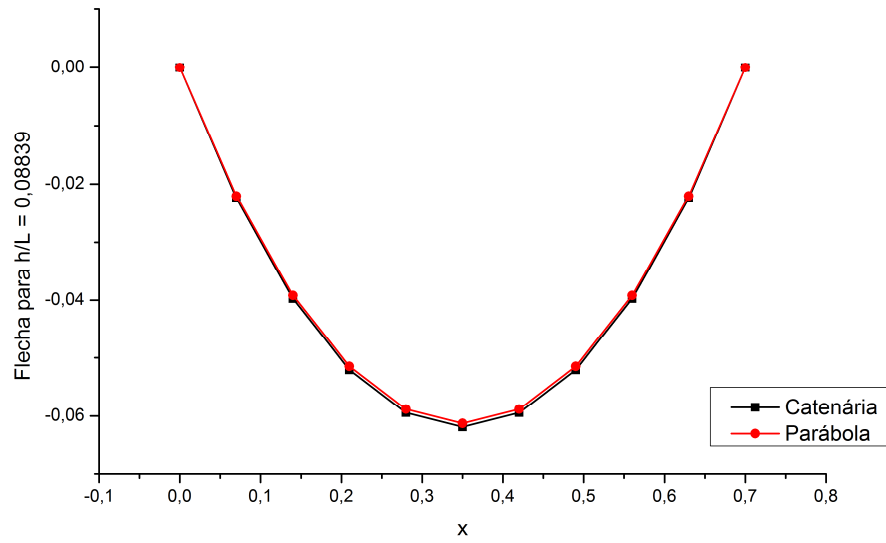


Figura 6 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L < 1:11$

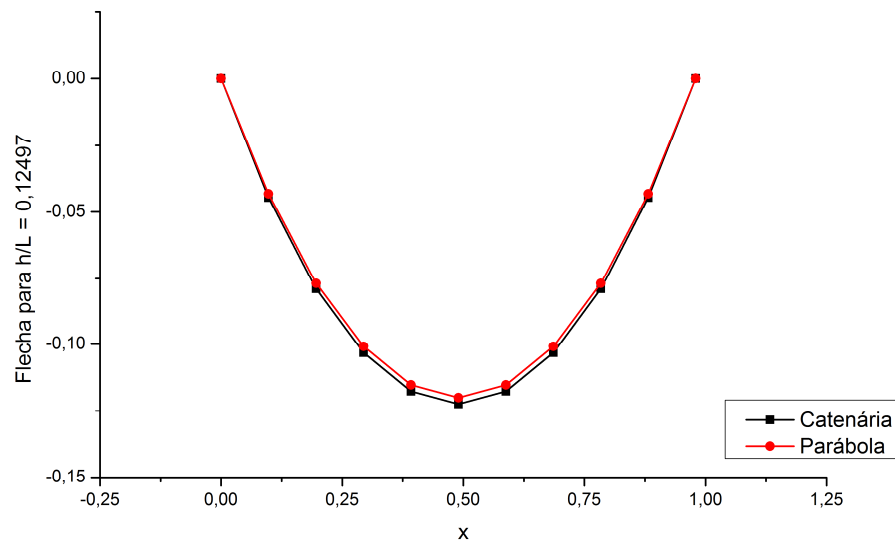


Figura 7 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L \approx 1:8$

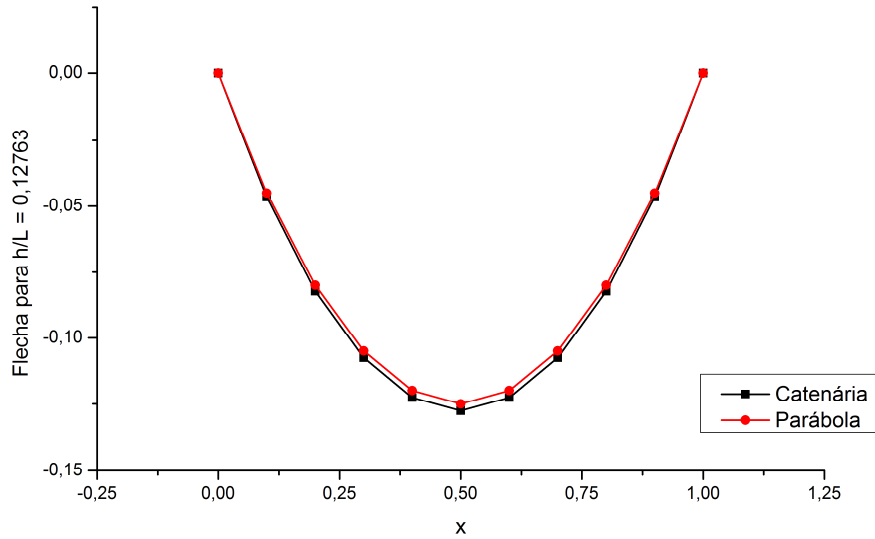


Figura 8 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L \approx 1:8$

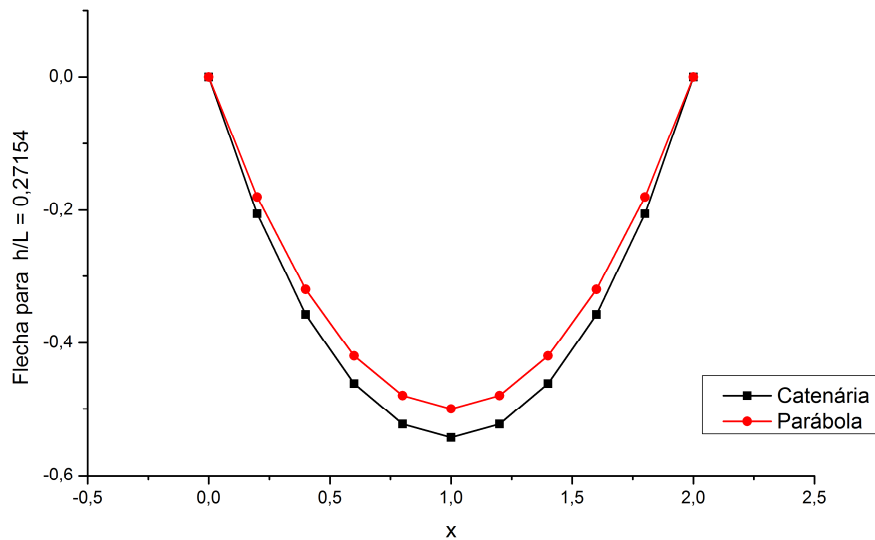


Figura 9 – Comparação entre a catenária e a parábola para $h/L > 1:4$

Observando as Figs. 5, 6, 7, 8 e 9 verifica-se que a aproximação da catenária pela parábola é possível para baixos valores de h/L . Na Tab. 1 são apresentados os vários valores de h/L e os erros relativos obtidos entre o ponto mais baixo ($x = L/2$) da curva definida pela catenária e pela parábola.

Tabela 1 – Comparação entre a catenária e a parábola

| Razão h/L | Catenária | Parábola | Erro relativo (%) |
|----------------|-------------|-------------|-------------------|
| 0,06283 | -0,03141310 | -0,03125000 | 0,52 |
| 0,08839 | -0,06187782 | -0,06125000 | 1,01 |
| 0,12497 | -0,12247131 | -0,12005000 | 1,98 |
| 0,12763 | -0,12762597 | -0,12500000 | 2,06 |
| 0,27154 | -0,54308063 | -0,50000000 | 7,93 |

Com os dados da Tab. 1 pode-se dizer que para uma razão $h/L = 1/8$, conforme citado em Irvine (1981), tem-se um erro relativo de aproximadamente 2% no ponto mais baixo do cabo, que é a posição em que ocorre as maiores diferenças.

4

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE PROBLEMAS ENVOLVENDO MASSAS MÓVEIS

4.1 - Introdução

Os problemas envolvendo massas móveis são estudados há mais de um século por diversos pesquisadores. Esse grande interesse demonstra a importância comprovada do assunto tanto para explicar falhas estruturais (como nos estudos pioneiros) como para possibilitar projetos mais confiáveis.

Os estudos de problemas com a natureza dos que serão desenvolvidos nesta dissertação apresentam, no meio científico, diversas abordagens com características peculiares que permitem diferentes aplicações e representações. Esses problemas são muitas das vezes analisados como osciladores móveis (Sofi e Muscolino, 2007), massas móveis (Bajer e Dyniewicz, 2008) e forças móveis (Fryba, 1999).

Na próxima seção será apresentada uma visão geral das abordagens utilizadas nos estudos existentes na literatura e assim definir o modelo utilizado no desenvolvimento das análises deste trabalho.

4.2 - Apresentação do modelo

Os problemas analisados podem envolver forças móveis, massas móveis ou osciladores móveis. Cada um dos modelos apresenta uma equação de movimento diferente e conseqüentemente uma resposta diferente.

Um problema de força móvel é apresentado na Fig. 10:

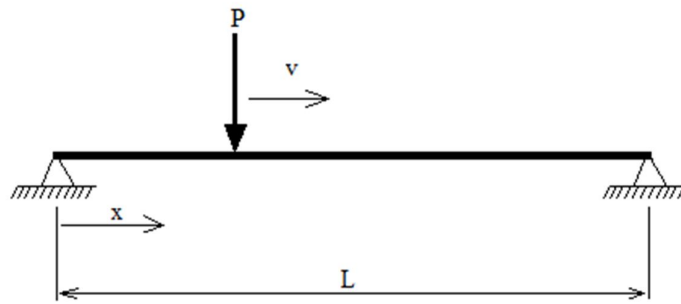


Figura 10 – Modelo do problema de força móvel

Esse tipo de problema apresenta uma equação de movimento com o termo $\delta(x - vt)P$ que define o tipo de solicitação. Conforme desenvolvido em Fryba (1999) a força P pode ser constante, harmônica, contínua ou com uma variação no tempo arbitrária.

O problema de massa móvel é apresentado na Fig.11:

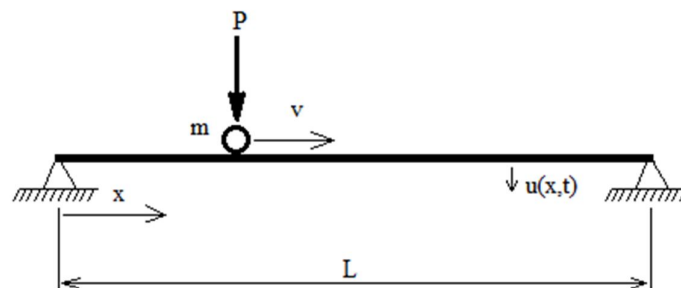


Figura 11 – Modelo do problema de massa móvel

Para problemas deste tipo, o termo que aparece na equação do movimento é da forma:

$$\delta(x - vt) \left[P + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (4.1)$$

Onde $P = mg$ representa a solicitação devido à gravidade.

Já os problemas envolvendo osciladores móveis são da forma como apresentado na Fig. 12:

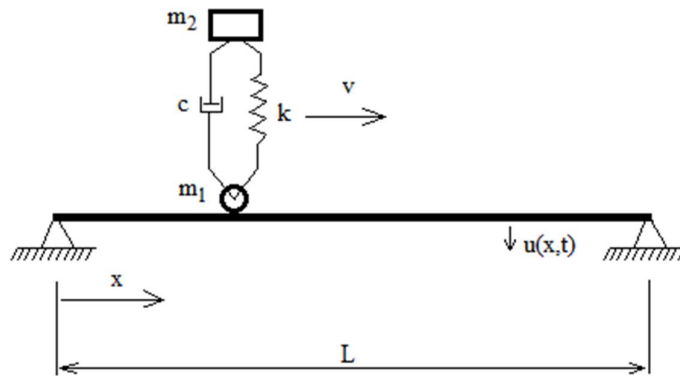


Figura 12 – Modelo do problema de oscilador móvel

Esse problema, também denominado em Fryba (1999) por sistema móvel com dois graus de liberdade, apresenta em sua equação de movimento o termo:

$$\delta(x - vt)f(u, t) \quad (4.2)$$

Onde $f(u, t)$ representa a força interativa transmitida para o corpo no qual o oscilador se move.

Para as análises realizadas nesta dissertação, o modelo a ser considerado será envolvendo a massa móvel (Fig.11), que é um modelo intermediário no que se relaciona com a complexidade das equações trabalhadas e atende aos objetivos propostos. Se observar com mais rigor os modelos propostos nas Figs. 10, 11 e 12, a formulação desses problemas envolveria a consideração analisada por Lee (1998), que é a condição em que ocorre a separação entre a massa móvel e o elemento estrutural. Entretanto, a proposta de análise será baseada na hipótese de que o contato entre a massa móvel e o elemento estrutural permaneça durante todo o intervalo de tempo considerado. Portanto, o modelo que representa rigorosamente o problema analisado nesta dissertação é apresentado na Fig. 13:

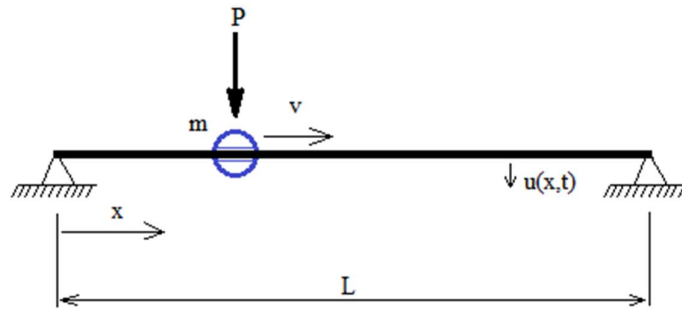


Figura 13 – Modelo do problema de massa móvel analisado nesta dissertação

Muitos trabalhos apresentam um modelo como os apresentados nas Figs. 10, 11 ou 12, mas as formulações são todas desenvolvidas baseadas em um modelo conforme o apresentado na Fig. 13. Portanto, a identificação do modelo deve ser feita pelas equações governantes, já que as representações gráficas não são muito respeitadas.

4.3 - Estratégia de solução

As análises serão desenvolvidas considerando grandes deslocamentos, incluindo-se aqui tanto translações quanto rotações, grandes deformações e com uma resposta constitutiva não linear.

Devido à mudança contínua da geometria do problema será necessário utilizar uma estratégia de solução incremental. Para considerar as grandes deformações e uma relação constitutiva não linear será necessário definir uma condição de escoamento, uma regra de fluxo e uma regra de encruamento. Além disso, devido às mudanças das propriedades do material, um procedimento iterativo deve ser empregado para corrigir os cálculos realizados em cada passo incremental.

Nas análises envolvendo não linearidades geométricas e físicas, uma atenção especial deve ser dada na escolha das medidas de tensão e deformação e qual a maneira de se avaliar essas propriedades no processo de resolução do sistema mecânico. Em conjunto com essas importantes considerações de natureza espacial e material, também existem as considerações de natureza temporal, já que as análises desenvolvidas neste trabalho envolvem problemas dinâmicos.

Em relação à natureza dinâmica do problema, a escolha do sistema de referência deve ser realizada com muito critério e consciência, pois uma determinada escolha leva a seguir um caminho com um tratamento matemático mais difícil. A distribuição de massa e o amortecimento também são características importantes nas análises dinâmicas e por isso devem ser tratadas de uma maneira a fornecer os melhores resultados com uma manipulação mais fácil.

Uma característica que diferencia as análises apresentadas neste trabalho dos demais problemas de dinâmica estrutural está relacionada com o tipo de solicitação imposta no sistema: a massa móvel. Para considerar um problema envolvendo uma massa móvel deverão ser considerados os efeitos inerciais da massa e as condições de contato desta massa com o elemento utilizado.

Após um adequado equacionamento do problema, deve ser adotada uma estratégia de solução eficaz, capaz de fornecer resultados confiáveis. Portanto, a escolha do procedimento e do método de solução deve levar em conta todas as características apresentadas e assim conduzir aos resultados esperados. Após esse processo de formulação e implementação do método de solução, deverá ser realizada uma verificação criteriosa e a validação do procedimento empregado, e só então as análises poderão ser realizadas com segurança.

4.4 - Formulação das equações governantes

A formulação de um problema dinâmico pode ser realizada basicamente de duas maneiras distintas de acordo com as grandezas consideradas. Esses dois caminhos são definidos por: a) formulação diferencial (de acordo com Bathe, 1996) ou mecânica vetorial (de acordo com Lanczos, 1970); b) formulação variacional (de acordo com Bathe, 1996) ou mecânica analítica (de acordo com Lanczos, 1970).

A formulação diferencial ou mecânica vetorial baseia-se em princípios de equilíbrio de quantidades vetoriais como forças e momentos enquanto a formulação variacional ou mecânica analítica baseia-se em princípios de equilíbrio de quantidades escalares como energia e trabalho. A escolha de um ou outro caminho é feita analisando algumas características do problema em questão. Para Lanczos (1970), em sistemas com restrições, o tratamento analítico (variacional) é mais simples e mais econômico que o tratamento vetorial. Bathe (1996) cita quatro aspectos que tornam a formulação variacional mais atraente que a formulação diferencial:

1. O método variacional pode fornecer um caminho relativamente fácil para construir o sistema de equações governantes. Esta facilidade de uso é devido à utilização de grandezas escalares em vez de grandezas vetoriais utilizadas na formulação diferencial;
2. Uma abordagem variacional pode levar mais diretamente para o sistema de equações governantes e condições de contorno. Por exemplo, se um sistema complexo é inicialmente considerado, é vantajoso que algumas variáveis que necessita ser incluídas em uma formulação direta não sejam consideradas em uma formulação variacional (tais como forças internas que na soma total não contribui com nenhuma variação do trabalho realizado pelo sistema);
3. A abordagem variacional fornece algumas informações adicionais do problema e possibilita uma verificação independente na formulação do problema;
4. Para soluções aproximadas, uma grande classe de funções de teste pode ser empregada em muitos casos se o analista opera na formulação variacional em vez da formulação diferencial do problema; por exemplo, as funções de teste não precisam satisfazer as condições de contorno naturais, pois estas condições de contorno estão contidas implicitamente no funcional.

Portanto, após estas considerações e verificando as características do problema a ser analisado neste trabalho, é vantajoso adotar a formulação variacional como caminho na obtenção das equações que regem esse problema.

A energia potencial total do sistema a ser analisado pode ser expressa por:

$$\Pi = U + K + Q - E_e \quad (4.3)$$

onde U é a energia de deformação, K é a energia cinética, Q é a energia devido ao amortecimento, E_e é a energia de caráter externo devido à massa móvel.

Nas seções seguintes, serão desenvolvidos os termos das energias que somadas representam a energia total de um sistema envolvendo massas móveis aplicadas em elementos de treliça e elementos de viga. Será apresentada a identificação das parcelas relacionadas com cada um dos elementos, a fim de facilitar a compreensão pelo leitor.

4.4.1 - Energia de Deformação

A energia de deformação (ou trabalho interno) em um corpo solicitado por forças externas é dada por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV \quad (4.4)$$

onde σ , um tensor de tensões, e $d\varepsilon$, um tensor de incrementos de deformação, devem apresentar, segundo Pai e Nayfeh (1994) e Bathe (1996), duas características essenciais para uma análise teórica consistente de problemas com não linearidades físicas e geométricas: serem medidas conjugadas energeticamente e objetivas.

Lavall (1996) define assim essas duas características:

“Tensões e deformações conjugadas são um par de medidas de tensão e deformação que ao se integrar o produto da tensão pela taxa de deformação em todo o volume da fibra fornece a energia interna total.”

“Tensões e deformações objetivas são invariantes sob movimentos de corpo rígido, ou seja, nenhuma componente dos tensores de tensão ou deformação muda, quando ocorrem rotações puras de corpo rígido.”

Como pode ser visto no Apêndice B, o tensor de deformação de Green-Lagrange é conjugado energeticamente com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Além de serem medidas conjugadas, a deformação de Green-Lagrange e a segunda tensão de Piola-Kirchhoff, são medidas objetivas e por isso, são as mais utilizadas em análises estruturais não lineares, de acordo com Lavall (1996) e Pai e Nayfeh (1994). Entretanto, essas medidas não possuem significado físico aparente (Lavall, 1996 e Bathe, 1996), impossibilitando compatibilizá-las com as condições de contorno naturais de um sistema estrutural sem utilizar manipulações matemáticas envolvendo o tensor de tensões de Cauchy, que é uma medida física.

A utilização do tensor de Cauchy em problemas envolvendo grandes rotações é viável desde que uma medida objetiva possa ser calibrada. Belytschko, *et al.* (2000) apresentam um estudo bastante detalhado relacionado com esse procedimento. Crisfield (1991) também afirma que a medida de deformação de engenharia pode ser empregada em problemas complexos envolvendo grandes deformações desde que se utilizem incrementos de deformações durante o processo de solução. Além do exposto em Belytschko, *et al.* (2000) e em Crisfield (1991),

Greco e Costa (2012) apresentam o desenvolvimento da Eq. (4.4) aplicando as duas equações, que representam as famílias de medidas de deformações e de medidas de tensões, provando que a energia de deformação pode ser calculada por qualquer medida de deformação e seu par conjugado de tensão sem perder a objetividade (ver Apêndice B). Portanto, a escolha do tensor de tensões de engenharia e da deformação de engenharia é viável para problemas não lineares geométricos definidos pelos métodos variacionais.

Com essas informações apresentadas, a energia de deformação é calculada através de:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon_N} \sigma_N d\varepsilon_N dV \quad (4.5)$$

onde σ_N é o tensor de tensões de engenharia e $d\varepsilon_N$ incrementos de deformação de engenharia.

4.4.2 - Energia Cinética

No cálculo da energia cinética total do sistema deve ser considerada tanto a contribuição da energia cinética do elemento quanto a contribuição da energia cinética da massa móvel. Portanto, a energia cinética total é dada por:

$$K = K_e + K_m \quad (4.6)$$

onde K_e é a energia cinética relacionada com o elemento e K_m é a energia relacionada com a massa móvel.

A energia cinética do elemento é dada por:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV \quad (4.7)$$

onde \dot{x}_i é a velocidade de um ponto no elemento nas três direções, no caso de elementos de treliças espaciais, e duas direções e um giro, no caso de elementos de vigas.

Para equacionar a contribuição da energia cinética da massa móvel, algumas características específicas deste tipo de problema devem ser esclarecidas. A primeira está relacionada com a forma na qual a massa solicita o elemento e como tratar essa característica matematicamente e

a segunda é como considerar o acoplamento entre o movimento da massa móvel com o movimento do elemento.

Para a primeira característica, pode-se considerar que a região de contato entre a massa móvel e o elemento é definida por um ponto. Já pensando no processo de solução, onde será utilizado o Método dos Elementos Finitos, será considerado o efeito da massa móvel em cada nó, e para desenvolver um tratamento matemático adequado será utilizada a “função” Delta de Dirac na forma:

$$\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \quad (4.8)$$

Onde x_i são as coordenadas de um ponto no elemento, X_m são as coordenadas da massa e Ω_x é o domínio de x_i . Pela definição, essa função apresenta valor igual a um para todo X_m no domínio Ω_x e valor igual à zero para todo X_m fora desse domínio.

Para a segunda característica, o acoplamento do movimento da massa com o movimento do elemento será considerado na definição da posição dos nós do elemento e da massa móvel, respectivamente, pelas funções:

$$x_i = f(\xi, X, t) \quad (4.9)$$

$$x_i = f(\xi, X_m, t) \quad (4.10)$$

Onde ξ é uma variável adimensional (que varia de zero a um) utilizada para mapear o elemento e $X_m = f(\xi, X, t)$. Pela função que representa a posição da massa é possível notar o acoplamento dos movimentos.

Sendo assim, pode-se determinar a velocidade de um ponto qualquer do elemento pela definição diferencial da velocidade dada por:

$$v = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{x}_i \quad (4.11)$$

E a velocidade da massa, através da diferenciação em cadeia, será definida por:

$$v_m = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j} \quad (4.12)$$

Pela Eq. (4.12), verifica-se que a velocidade da massa apresenta uma parcela de contribuição da velocidade do cabo e uma parcela influenciada pela deflexão do cabo, portanto, essa análise apenas considera que a massa está em contato com o elemento todo instante e que a possibilidade da ausência de contato entre ambos está descartada.

Com todas estas definições, a energia cinética devido à massa móvel é expressa, então, por:

$$K_m = \frac{1}{2}m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \quad (4.13)$$

Assim, a energia cinética total do sistema é:

$$K = K_e + K_m = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \frac{1}{2}m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \quad (4.14)$$

4.4.3 - Energia de Amortecimento

A energia de amortecimento é a energia mecânica que um sistema mecânico oscilante perde para o meio através da transformação em outra forma de energia. De acordo com Adhikari (2000), a maneira como a energia é dissipada (ou como a vibração é amortecida) depende de mecanismos físicos que atuam no sistema. E esses mecanismos físicos são processos físicos complexos e não são totalmente conhecidos.

Banks e Inman (1991) apresentam quatro modelos de amortecimento utilizados em análises de sistemas contínuos: Amortecimento de ar viscoso, amortecimento de Kelvin-Voigt, amortecimento de histerese temporal e amortecimento de histerese espacial. Os modelos foram desenvolvidos para vigas e os operadores que serão apresentados são baseados, quando for o caso, nas propriedades das vigas.

Amortecimento de ar viscoso: utilizado para modelar o amortecimento de um objeto vibrando no ar. O operador é definido por:

$$L_1 = \gamma I_0 \quad (4.15)$$

onde I_0 é o operador identidade e γ é uma constante de proporcionalidade de amortecimento viscoso.

O método mais simples utilizando esse modelo considera I_0 definido por:

$$I_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.16)$$

Sendo um amortecimento proporcional à velocidade. Esse modelo fisicamente representa a resistência do ar ao movimento e, muitas vezes, é denominado de amortecimento externo.

Amortecimento de Kelvin-Voigt: ou amortecimento da taxa de deformação, apresenta operador definido por:

$$L_1 = c_d I \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} \quad (4.17)$$

onde I é o momento de inércia e c_d é o coeficiente de amortecimento da taxa de deformação.

É um modelo que também satisfaz um critério de proporcionalidade e, por isso, é também matematicamente interessante. É um modelo compatível com análise modal teórica e juntamente com o amortecimento viscoso é amplamente utilizado nos modelos de elementos finitos. Por ser dependente da deformação, este modelo gera um momento de amortecimento nas equações de movimento que deve ser compatibilizado nas condições de contorno.

Amortecimento de histerese temporal: é um modelo de amortecimento geralmente associado com carregamento senoidal. A ideia desse modelo é indicar nas equações constitutivas de vibração da viga que a tensão é proporcional à deformação e também à história da deformação passada. O operador para este modelo é expresso por:

$$L_1 = \int_{-r}^0 g(s) f(x, t + s) ds \quad (4.18)$$

Com a função kernel $g(s)$, definida por:

$$g(s) = \frac{\alpha_c e^{\beta_c s}}{\sqrt{-s}} \quad (4.19)$$

onde α_c e β_c são constantes.

Amortecimento de histerese espacial: é um tipo de amortecimento causado pelas taxas diferenciais de rotação de seções transversais vizinhas de uma viga gerando atritos internos e perda de energia. O operador deste modelo é da forma:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^l h(x, \xi) \{f(t, x) - f(t, \xi)\} d\xi \right] \quad (4.20)$$

onde a função kernel $h(x, \xi)$, pode ser definida por:

$$h(x, \xi) = \frac{a_c}{b_c \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2b_c^2}} \quad (4.21)$$

onde a_c e b_c são constantes.

Os dois últimos modelos de amortecimento apresentados são modelos mais complexos envolvendo funções e expressões mais trabalhosas, dificultando sua abordagem no problema proposto. O amortecimento de Kelvin-Voigt é amplamente utilizado em modelos de elementos finitos, porém exige um tratamento especial das condições de contorno. O amortecimento viscoso, definido no primeiro modelo passa a ser, para o trabalho desenvolvido nesta dissertação, o mais interessante e por isso será aplicado para estudar os efeitos dissipativos do problema de massa móvel.

Sendo assim, a energia devido a um amortecimento pode ser calculada pela Eq. (4.22), que é uma forma integral de representar o amortecimento viscoso, conforme Ferreira (2009):

$$Q = \int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i x_i dV - \int_V \int_{x_r} \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dx_r dV \quad (4.22)$$

onde λ_m é o coeficiente de amortecimento.

4.4.4 - Energia de caráter externo devido à massa móvel

A energia de caráter externo é uma energia inserida no sistema pela presença da massa móvel.

Essa energia pode ser calculada por:

$$E_e = \int_{x_r} F_e dx_r \quad (4.23)$$

onde F_e é a força efetiva atuando ao longo do comprimento x_r .

Essa força efetiva, conforme Lanczos (1970) pode ser calculada pela Eq. (4.24):

$$F_e = P + I \quad (4.24)$$

onde P é a força imposta e I é a força de inércia dada por $I = -m\ddot{X}_m$.

Portanto, a energia devido à massa móvel é então calculada pela expressão:

$$E_e = \int_{x_r} F_e dx_r = \int_{x_r} (P + I) dx_r = \int_{x_r} (P - m\ddot{X}_m) dx_r \quad (4.25)$$

Para considerar a contribuição dessa energia no sistema global, deve-se utilizar o conceito da “função” Delta de Dirac. Com isso, a energia devido à massa móvel é dada por:

$$E_e = \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} (P - m\ddot{X}_m) dx_r \quad (4.26)$$

É possível entender essa energia como a contribuição de duas parcelas: energia devido à inercia da massa móvel, Q_m e energia potencial das forças devido ao movimento da massa móvel, F . As equações para Q_m e F são dadas respectivamente pelas Eqs. (4.27) e (4.28):

$$Q_m = - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} m\ddot{X}_m dx_r \quad (4.27)$$

$$F = \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} P dx_r \quad (4.28)$$

4.4.5 - A equação da energia total do sistema envolvendo massa móvel

Com as definições apresentadas nas subseções anteriores, a Eq. (4.3) pode ser expressa pelo funcional:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \\
& + \int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i x_i dV - \int_V \int_{x_r} \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dx_r dV \\
& + \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} m \ddot{X}_m dx_r \\
& - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} P dx_r
\end{aligned} \tag{4.29}$$

No próximo capítulo o equilíbrio do sistema mecânico é obtido, de modo aproximado, pela derivada primeira da Eq. (4.29) em relação às posições nodais. Assim, é obtido um sistema de equações discretas no espaço e contínuas no tempo, denominadas de equações semi-discretas. Com auxílio de um método numérico, o tempo é discretizado, gerando um sistema de equações discretas. A solução dessas equações é realizada através de procedimentos matemáticos específicos para resolução de sistemas não-lineares.

5

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

5.1 - Introdução

A discretização espacial das equações será realizada utilizando a formulação posicional (ver Apêndice A) que se baseia em um sistema de coordenadas absolutas e utilizando vetores de posições como incógnitas ao invés do clássico vetor de deslocamentos.

O método de descrição posicional com coordenadas absolutas apresenta uma grande vantagem em relação ao método convencional, simplificando as equações discretizadas. Caso o método convencional seja empregado para problemas dinâmicos da natureza dos que serão resolvidos nesta dissertação, uma atenção especial deverá ser dada ao surgimento de forças aparentes no sistema, como descrito no Apêndice C.

Por se tratar de problema dinâmico, as equações obtidas na formulação apresentada no capítulo anterior deverão ser discretizadas tanto no domínio espacial quanto no domínio temporal. A etapa de discretização espacial permite obter um conjunto de equações denominadas semi-discretas. A partir das equações semi-discretas, através dos métodos de integração temporal consegue um novo conjunto de equações discretas prontas para implementação computacional.

5.2 - Discretização Espacial

Para definir as variáveis do problema será adotada a descrição Lagrangiana Total. Inicialmente, são definidas algumas hipóteses que serão adotadas no desenvolvimento das equações subsequentes. Será considerada a cinemática de Euler-Bernoulli para vigas, o material será considerado homogêneo e isotrópico. Além dessas informações, as equações serão

desenvolvidas já pensando no processo incremental, no qual a definição da deformação de engenharia será utilizada, como já mostrado no capítulo anterior.

Iniciando pelo equacionamento da energia de deformação dada pela Eq. (4.5):

$$U = \int_V \int_{\varepsilon_N} \sigma_N d\varepsilon_N dV \quad (4.5)$$

Sabendo que o material é homogêneo e isótropo, a equação constitutiva pode ser expressa por:

$$\sigma_N = E \varepsilon_e \quad (5.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal. Para facilitar a reprodução das equações o índice N , que indica tensor de tensões de Cauchy e deformação de engenharia, será omitido. Para trabalhar com problemas no regime plástico, pode-se utilizar a decomposição da deformação em uma parte elástica (ε_e) e outra parte plástica (ε_p) de acordo com:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \implies \varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p \quad (5.2)$$

Utilizando a decomposição da deformação definida pela Eq. (5.2), a Eq. (5.1) pode ser reescrita por:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (5.3)$$

A energia de deformação é expressa, inserindo a Eq. (5.3) na Eq. (4.5), por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} E(\varepsilon - \varepsilon_p) d\varepsilon dV \quad (5.4)$$

Resolvendo para ε e simplificando a Eq. (5.4):

$$U = \int_V \left[\int_{\varepsilon} E \varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon} E \varepsilon_p d\varepsilon \right] dV$$

$$U = \int_V \left[E \frac{\varepsilon^2}{2} - E \varepsilon \varepsilon_p \right] dV = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon^2 - 2\varepsilon \varepsilon_p) dV \quad (5.5)$$

A Eq. (5.5) é uma equação geral que pode ser utilizada para quantificar a energia de deformação de qualquer corpo homogêneo e isotrópico. Para atender os objetivos desta dissertação, a Eq. (5.5) será desenvolvida para elementos de viga, tendo em mente que problema envolvendo elementos de treliça é um caso particular do problema envolvendo viga no qual se desconsidera os efeitos da flexão. Esse desenvolvimento será baseado em Zienkiewicz e Taylor (2000), utilizando o conceito posicional.

O movimento da viga é apresentado na Fig. 14:

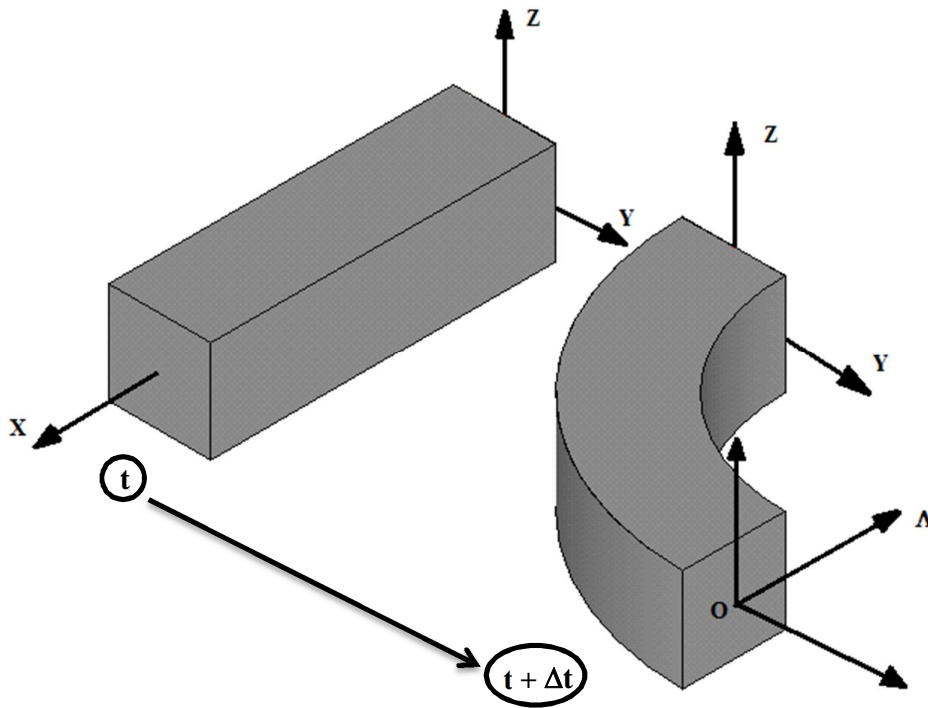


Figura 14 – Movimento de uma viga prismática no espaço

Considerando que a coordenada X é o eixo da viga e Y, Z são os eixos da seção transversal, a nova posição da extremidade da viga pode ser expressa na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}X \\ {}^{t+\Delta t}Y \\ {}^{t+\Delta t}Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tX \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde $\Lambda(X)$ é a rotação da seção transversal da viga.

A definição da deformação de engenharia utilizando as posições nodais, ao invés da definição tradicional que utiliza deslocamentos, é dada utilizando a relação entre posições e deslocamentos expressa por:

$${}^{t+\Delta t}X = {}^0X + {}^{t+\Delta t}{}_0u \quad (5.7)$$

onde 0X é a posição inicial e ${}^{t+\Delta t}{}_0u$ é o deslocamento que ocorre entre o tempo inicial e o tempo $t + \Delta t$. Assim o deslocamento é expresso por:

$${}^{t+\Delta t}{}_0u = {}^{t+\Delta t}X - {}^0X \quad (5.8)$$

Portanto, a deformação de engenharia, expressa em sua forma diferencial, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}X}{\partial x} \quad (5.9)$$

Sabendo que $\partial {}^0X/\partial x = 0$, já que 0X é uma constante. Portanto, a determinação da deformação envolve as derivadas das posições, que por sua vez necessitam da derivada dos incrementos nas posições e da matriz de rotação. A derivada da matriz de rotação, conforme Zienkiewicz e Taylor (2000) é dada por:

$$\Lambda_{,X} = \hat{\theta}_{,X}\Lambda \quad (5.10)$$

onde $\hat{\theta}_{,X}$ denota uma matriz anti-simétrica para as derivadas de um vetor de rotação θ e é expressa por:

$$\hat{\theta}_{,X} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{Z,X} & \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} & 0 & -\theta_{X,X} \\ -\theta_{Y,X} & \theta_{X,X} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Considerando-se um movimento da viga no plano X-Z e com $\theta_Y = \phi(x)$, a matriz ortogonal pode ser escrita como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Com essa consideração, as Eqs. (5.6) são expressas pelas Eqs. (5.13):

$$\begin{bmatrix} t+\Delta t X \\ t+\Delta t Y \\ t+\Delta t Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tX \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Com o movimento da viga definido pelas Eqs. (5.13), a deformação é, então, calculada por:

$$\varepsilon = \frac{\partial t+\Delta t X}{\partial x} = \frac{\partial tX}{\partial x} + \frac{\partial \Delta X}{\partial x} + z \frac{d\phi}{dx} \cos\phi \quad (5.14)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial t+\Delta t X}{\partial x} = \varepsilon_{m\u00e9dio} + z\kappa$$

onde $\varepsilon_{m\u00e9dio}$ representa a deformação axial devido à extensão que é constante em toda a fibra do elemento, κ representa a curvatura e $z\kappa$ a deformação axial devido à flexão que varia de acordo com a curvatura.

Inserindo-se a Eq. (5.14) na Eq. (5.5) e separando a integral no volume por uma integral no comprimento e outra na área, tem-se:

$$U = E \int_{s_0} \int_A \left[\frac{(\varepsilon_{m\u00e9dio} + z\kappa)^2}{2} - (\varepsilon_{m\u00e9dio} + z\kappa)\varepsilon_p \right] dA ds_0 \quad (5.15)$$

Expandindo-se a Eq. (5.15), omitindo o subscrito *m\u00e9dio* por comodidade, obt\u00eam-se:

$$U = E \int_{s_0} \int_A \left[\frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon z\kappa + z^2\kappa^2}{2} - (\varepsilon + z\kappa)\varepsilon_p \right] dA ds_0 \quad (5.16)$$

Separando-se cada termo da Eq. (5.16), algumas definições geom\u00e9tricas podem ser identificadas e conseq\u00fcentemente algumas simplificações podem ser feitas:

$$U = E \int_{s_0} \left[\frac{A_0}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon \kappa \int_A z dA + \frac{\kappa^2}{2} \int_A z^2 dA - \int_A (\varepsilon + z\kappa)\varepsilon_p dA \right] ds_0 \quad (5.17)$$

Como o elemento utilizado \u00e9 uma representa\u00e7\u00e3o de uma barra pela linha que passa no centroide dessa barra, tem-se que:

$$\int_A z dA = 0 \quad (5.18)$$

E considerando que:

$$\int_A z^2 dA = I \quad (5.19)$$

A Eq. (5.17) é reescrita pela Eq. (5.20):

$$U = \int_{s_0} \left[\frac{EA_0}{2} \varepsilon^2 + \frac{EI}{2} \kappa^2 - \int_A (\varepsilon + z\kappa) \varepsilon_p dA \right] ds_0 \quad (5.20)$$

Pelo desenvolvimento apresentado até aqui, pode-se dizer que $EA_0/2$ está relacionado com uma solicitação axial e $EI/2$ com uma solicitação de flexão. O desenvolvimento desta equação para elementos de treliça é feito considerando apenas o termo $EA_0/2$ e para elementos de viga o desenvolvimento é feito considerando os dois termos.

Para facilitar a clareza do desenvolvimento e evitar a repetição de muitos termos nas equações, será adotada a definição da densidade de energia de deformação por unidade de volume simbolizada por u . Com isso, a energia da deformação será representada pela Eq. (5.21) na sequência desse desenvolvimento e no momento apropriado a definição da Eq. (5.20) será retomada.

$$U = \int_V u dV \quad (5.21)$$

Com todos os termos necessários definidos, a equação da energia potencial total dada pela Eq. (4.29) pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_V u dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \\
& + \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} m \ddot{X}_m dx_r + \int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i x_i dV \\
& - \int_V \int_{x_r} \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dx_r dV - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} P dx_r
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Para aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial deve-se minimizar o funcional Π em relação às posições. Minimizando o funcional, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial X_r} = & \int_V \frac{\partial u}{\partial X_r} dV + \frac{1}{2} \left(\int_V \rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_r} \dot{x}_i dV + \int_V \rho \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_r} dV \right) \\
& + \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \\
& + \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \left[2(\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j}) \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_r} + \frac{\partial \dot{X}_m}{\partial X_r} x_{i,j} \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{X}_m \frac{\partial x_{i,j}}{\partial X_r} \right) \right] + \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} m \ddot{X}_m dx_r \\
& + \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] m \ddot{X}_m \\
& + \left[\int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i dV + \int_V \lambda_m \rho x_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_r} dV - \int_V \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dV \right] \\
& - \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} P dx_r - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] P = 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Conhecendo a propriedade da derivada primeira do operador Delta de Dirac, expressa por:

$$\int_{\Omega_x} f(x_i) \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x = - \frac{\partial f(x_i)}{\partial X_r} \Big|_{x_i=X_m} \tag{5.24}$$

Fazendo $f(x_i) = 1$ na Eq. (5.24), tem-se:

$$\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x = 0 \quad (5.25)$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 &= 0 \\ \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} m \ddot{X}_m dx_r &= 0 \\ \left[\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial X_r} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \int_{x_r} P dx_r &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Assim, o equilíbrio do sistema é expresso por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_r} &= \int_V \frac{\partial u}{\partial X_r} dV + \int_V \rho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_r} \dot{x}_i dV \\ &+ m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) dx_i \right] \left[(\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j}) \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_r} + \frac{\partial \dot{X}_m}{\partial X_r} x_{i,j} \right. \right. \\ &\left. \left. + \dot{X}_m \frac{\partial x_{i,j}}{\partial X_r} \right) \right] + \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) dx_i \right] m \ddot{X}_m \\ &+ \left[\int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i dV + \int_V \lambda_m \rho x_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_r} dV - \int_V \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dV \right] \\ &- \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) dx_i \right] P = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Utilizando a regra da derivação em cadeia, a derivada da velocidade em relação à posição é expressa por:

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial X_j} = \ddot{X}_i \frac{1}{\dot{X}_j} \quad (5.28)$$

Inserindo a relação dada pela Eq. (5.28) na Eq. (5.27), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_r} = & \int_V \frac{\partial u}{\partial X_r} dV + \int_V \rho \ddot{x}_i dV + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \ddot{x}_i \\ & + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \left(\ddot{X}_m \frac{\dot{x}_i}{\dot{X}_m} x_{i,j} + \dot{x}_i \dot{X}_m x_{i,jr} \right) \\ & + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (x_{i,j}) \left(\ddot{x}_i \frac{\dot{X}_m}{\dot{x}_j} + (\dot{X}_m)^2 x_{i,jr} \right) \\ & + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \ddot{X}_m (x_{i,j})^2 \\ & + \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] m \ddot{X}_m + \int_V \lambda_m \rho \ddot{x}_i dV \\ & - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] P = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Agrupando os termos que se repetem na Eq. (5.29), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_r} = & \int_V \frac{\partial u}{\partial X_r} dV + \int_V \rho \ddot{x}_i dV + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \ddot{x}_i \left(1 + \frac{\dot{X}_m}{\dot{x}_j} x_{i,j} \right) \\ & + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] \ddot{X}_m \left[1 + \frac{\dot{x}_i}{\dot{X}_m} x_{i,j} + (x_{i,j})^2 \right] \\ & + m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] x_{i,jr} \left[\dot{x}_i \dot{X}_m + x_{i,j} (\dot{X}_m)^2 \right] + \int_V \lambda_m \rho \ddot{x}_i dV \\ & - \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] P = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Escrevendo a Eq. (5.30) no domínio espacial discreto (semi-discretização da equação de equilíbrio), para o instante de tempo $t + \Delta t$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} &+ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \\
&+ m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \ddot{\mathbf{X}}_m \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\dot{\mathbf{X}}_m} \mathbf{F} + (\mathbf{F})^2 \right] \\
&+ m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \mathbf{F}_{,r} \left[\dot{\mathbf{X}}_t \dot{\mathbf{X}}_m + \mathbf{F} (\dot{\mathbf{X}}_m)^2 \right] + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \\
&- \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) P = 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde

$$\mathbf{F} = x_{i,j}$$

$$\mathbf{F}_{,r} = x_{i,jr}$$

$$\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_m \\ 0 & \text{para } \mathbf{X}_t \neq \mathbf{X}_m \end{cases}$$

5.3 - Discretização Temporal

A discretização temporal dos problemas dinâmicos pode ser realizada através de dois caminhos distintos, sendo que esses caminhos a serem seguidos definem os métodos de solução empregados no problema: o método da integração direta e o método da superposição modal.

5.3.1 - Método da superposição modal

O método da superposição modal é um método de solução no qual se busca transformar as posições e suas derivadas temporais em um vetor de coordenadas generalizadas com suas derivadas temporais. Se o problema possuir amortecimento e este for ortogonal, as equações tornam-se desacopladas permitindo que cada uma seja resolvida independentemente (Cook, *et al.*, 1989). Esse é um método viável para os casos de dinâmica linear de estruturas. Em problemas não lineares, o método modal só pode ser aplicado se todas as não linearidades forem tratadas como pseudoforças e incorporadas no vetor de forças externas, como explica Cook. Além disso, para não linearidades severas a convergência das pseudoforças é muito instável. Então para problemas com não linearidades é indicada a utilização de métodos de integração direta.

5.3.2 - Métodos diretos de integração temporal

Nos métodos de integração direta ou métodos passo-a-passo, uma aproximação por diferenças finitas é usada para substituir as derivadas no tempo na equação de equilíbrio. Dentro do conjunto dos métodos diretos existem dois grupos com características distintas: os métodos explícitos e os métodos implícitos.

Nos métodos explícitos as variáveis no intervalo de tempo $t + \Delta t$ são determinadas apenas em função das variáveis no tempo t . Nos métodos implícitos a variável principal no tempo $t + \Delta t$ é dependente de seu próprio valor e das variáveis no tempo t . Os métodos implícitos são, necessariamente, métodos iterativos.

5.3.2.1 - Métodos explícitos

Como apresentado no capítulo de Revisão Bibliográfica, no método explícito a solução no tempo $t + \Delta t$ é obtida considerando as condições de equilíbrio no tempo t e assim não há necessidade de processos iterativos em cada passo incremental. Para esses métodos é necessário um menor número de operações computacionais. Caso sejam utilizadas matrizes de massa e de amortecimento diagonais (ortogonais) o problema é desacoplado e assim a memória computacional necessária é mínima. Essas características tornam os métodos explícitos mais vantajosos que os métodos implícitos. Entretanto, os métodos de integração explícita são apenas condicionalmente estáveis e geralmente requerem pequenos intervalos de tempos para apresentarem estabilidade numérica. O valor crítico para Δt é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema discreto independente do tipo de solicitação aplicada. Portanto, em problemas quase estáticos ou de dinâmica estrutural os métodos explícitos tornam-se pouco eficazes, já que o Δt é bem menor que o necessário para uma integração precisa. Em problemas não lineares como o estudado nesta dissertação o valor crítico para o intervalo de tempo é variável, já que é ligado às frequências naturais do sistema que se modificam ao longo da análise (Dokainish e Subbaraj, 1989). Outro aspecto desfavorável dos métodos explícitos é o problema do amortecimento numérico não controlável, que geralmente gera respostas erradas, mesmo para intervalos de tempo inferiores ao intervalo de tempo crítico.

➤ Método da diferença central

O método explícito mais empregado é o método da diferença central. Esse é um método explícito de segunda ordem com maior precisão e máxima estabilidade. O algoritmo é baseado em uma expansão por série de Taylor até os termos de segunda ordem. As aproximações da velocidade e aceleração são dadas respectivamente pelas Eqs. (5.32) e (5.33):

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_{t-\Delta t}) \quad (5.32)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{X}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_{t-\Delta t}) \quad (5.33)$$

Uma importante aplicação do algoritmo de diferenças centrais está relacionada com a inicialização de alguns métodos de integração implícita. Essa aplicação será útil para os desenvolvimentos apresentados nesta dissertação.

5.3.2.2 - Métodos implícitos

Como também apresentado no capítulo de Revisão Bibliográfica, nos métodos implícitos as equações de equilíbrio para o intervalo de tempo corrente $t + \Delta t$, envolvem variáveis deste mesmo intervalo de tempo e também do intervalo de tempo passado. Essa característica implica em soluções iterativas dentro de cada intervalo de tempo, aumentando o custo computacional destes métodos.

Os algoritmos implícitos apresentam uma tendência natural a serem numericamente estáveis, permitindo grandes intervalos de tempo. Geralmente, são mais efetivos em problemas de dinâmica estrutural. Os métodos implícitos mais comuns são: método de Houbolt, método Wilson- θ e o método de Newmark.

➤ Método de Houbolt

O método de Houbolt é obtido através de uma interpolação cúbica de Lagrange entre os intervalos de tempo $t - 2\Delta t$ à $t + \Delta t$. São geradas as Eqs. (5.34) e (5.35):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{X}_{t+\Delta t} - 5\mathbf{X}_t + 4\mathbf{X}_{t-\Delta t} - \mathbf{X}_{t-2\Delta t}) \quad (5.34)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11\mathbf{X}_{t+\Delta t} - 18\mathbf{X}_t + 9\mathbf{X}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{X}_{t-2\Delta t}) \quad (5.35)$$

É um método incondicionalmente estável, mas que possui um amortecimento numérico alto nas respostas de baixa frequência, o que é uma desvantagem para solução dos problemas de dinâmica estrutural (Cook *et al.*, 1989).

➤ Método Wilson- θ

O método Wilson- θ é essencialmente uma extensão do método da aceleração linear, em que uma variação linear da aceleração do tempo t ao tempo $t + \Delta t$ é tomada como hipótese.

Sendo τ um incremento no tempo, onde $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, então para o intervalo de tempo t a $t + \theta\Delta t$, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{X}}_t) \quad (5.36)$$

Integrando essa equação e aplicando as condições iniciais para t , têm-se:

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{X}}_t + \tau\ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{X}}_t) \quad (5.37)$$

$$\mathbf{X}_{t+\tau} = \mathbf{X}_t + \tau\dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{X}}_t) \quad (5.38)$$

Para o tempo $t + \theta\Delta t$ (fazendo $\tau = \theta\Delta t$), as equações fornecem, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{X}}_t) \quad (5.39)$$

$$\mathbf{X}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{X}_t + \theta\Delta t\dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{X}}_t) \quad (5.40)$$

Resolvendo para $\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t}$ e $\dot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t}$ em termos de $\mathbf{X}_{t+\theta\Delta t}$:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(\mathbf{X}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{X}_t) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{\mathbf{X}}_t - 2\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (5.41)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta\Delta t}(\mathbf{X}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{X}_t) - 2\dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (5.42)$$

Para $\theta = 1$ o método Wilson- θ reduz ao algoritmo da aceleração linear, um dos métodos da família de Newmark, sendo nesse caso apenas um método condicionalmente estável. Em problemas lineares esse método torna-se incondicionalmente estável para $\theta \geq 1,37$ sendo usualmente empregado o valor de $\theta = 1,4$ (Bathe, 1996 e Subbaraj e Dokainish, 1989).

➤ Método de Newmark

O método de Newmark é o mais popular entre os métodos implícitos. As aproximações para a velocidade e posição são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (5.43) e (5.44):

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t\dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{X}}_t + \beta\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \right] \quad (5.44)$$

Onde os parâmetros β e γ determina a estabilidade e precisão do algoritmo. Quando $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$ as equações correspondem ao método da aceleração linear. Newmark originalmente propôs este método como um algoritmo incondicionalmente estável, com uma aceleração constante dentro do intervalo de tempo Δt igual à média das acelerações no início e fim deste intervalo, sendo nesse caso $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$

Segundo Cook *et al.* (1989), o método de Newmark é instável para $\gamma \leq \frac{1}{2}$ e estável quando $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$

Uma desvantagem do método de Newmark é que o amortecimento numérico somente pode ser obtido com uma redução drástica da precisão. Um método proposto por Hilber, Hughes e Taylor (Hilber, *et al.*, 1977), chamado de método- α em Cook *et al.* (1989) e método α -HHT em Greco *et al.* (2011), possui propriedades de amortecimento numérico com possibilidade de controle contínuo. Com uma escolha apropriada dos parâmetros é possível conseguir precisão de segunda ordem e também um amortecimento efetivo nas altas frequências.

➤ Método- α ou Método α -HHT

O método α -HHT utiliza as fórmulas de Newmark com a introdução de um parâmetro de amortecimento numérico (α) nas equações de equilíbrio. Esse método defasa a aceleração das demais variáveis transientes. Para um sistema com amortecimento a equação de equilíbrio é expressa por:

$$M\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + (1 + \alpha)C\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} - \alpha C\dot{\mathbf{X}}_t + (1 + \alpha)K\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \alpha K\mathbf{X}_t = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{ext} \quad (5.45)$$

Se os parâmetros são selecionados dentro da faixa:

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0 \quad , \quad \gamma = \frac{(1-2\alpha)}{2} \quad , \quad \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \quad (5.46)$$

O método é implícito, incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. O amortecimento numérico aumenta com o decréscimo de α (Cook *et al.*, 1989).

Portanto, a escolha do método α -HHT para a discretização temporal das equações de equilíbrio do problema analisado é a mais interessante.

5.3.3 - Discretização temporal das equações de equilíbrio

Tomando a equação de equilíbrio dada pela Eq. (5.31), aplicando a modificação proposta pelo método α -HHT, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = & (1 + \alpha) \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \\ & + m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \ddot{\mathbf{X}}_m \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\dot{\mathbf{X}}_m} \mathbf{F} + (\mathbf{F})^2 \right] \\ & + m \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \mathbf{F}_{,r} \left[\dot{\mathbf{X}}_t \dot{\mathbf{X}}_m + \mathbf{F} (\dot{\mathbf{X}}_m)^2 \right] + (1 + \alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \\ & - (1 + \alpha) \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \mathbf{P} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t - \alpha \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \right|_t = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Expressando as equações de Newmark para aceleração e velocidade, respectivamente, pelas Eqs. (5.48) e (5.49):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (5.48)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \quad (5.49)$$

Inserindo as Eqs. (5.48) e (5.49) na equação de equilíbrio dada pela Eq. (5.47), tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] \\
+ m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \left[\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} \right. \\
\left. - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\dot{\mathbf{X}}_m} \mathbf{F} + (\mathbf{F})^2 \right] \ddot{\mathbf{X}}_m \\
+ m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[\dot{\mathbf{X}}_t \dot{\mathbf{X}}_m + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}_m)^2 \right] \mathbf{F}_{,r} \\
+ (1 + \alpha) \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \right] \\
- (1 + \alpha) \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) P - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Agrupando os termos referentes ao tempo t e ao tempo $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\left[\mathbf{M} + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \right]}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\
- \left[\mathbf{M} + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \right] \left[\frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} \right. \\
\left. + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\dot{\mathbf{X}}_m} \mathbf{F} + (\mathbf{F})^2 \right] \ddot{\mathbf{X}}_m \\
+ m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[\dot{\mathbf{X}}_t \dot{\mathbf{X}}_m + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}_m)^2 \right] \mathbf{F}_{,r} \\
+ (1 + \alpha) \mathbf{C} \gamma \Delta t \left[\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] \\
+ (1 + \alpha) \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] - (1 + \alpha) \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) P - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t \\
- \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Para os termos relacionados como o tempo t que se repetem considerar as seguintes variáveis:

$$\mathbf{Q}_t = \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \tag{5.52}$$

$$\mathbf{R}_t = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t \tag{5.53}$$

Sendo assim, a Eq. (5.51) que representa o equilíbrio do sistema pode ser escrita pela Eq. (5.54):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} &= (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\left[\mathbf{M} + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m \mathbf{F}}{\dot{\mathbf{X}}_t} \right) \right]}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\
&\quad - \left[\mathbf{M} + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m \mathbf{F}}{\dot{\mathbf{X}}_t} \right) \right] \mathbf{Q}_t \\
&\quad + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t \mathbf{F}}{\dot{\mathbf{X}}_m} + (\mathbf{F})^2 \right] \ddot{\mathbf{X}}_m \\
&\quad + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left[\dot{\mathbf{X}}_t \dot{\mathbf{X}}_m + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}_m)^2 \right] \mathbf{F}_r + (1 + \alpha) \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\
&\quad - (1 + \alpha) \mathbf{C} \gamma \Delta t \mathbf{Q}_t + (1 + \alpha) \mathbf{C} \mathbf{R}_t - (1 + \alpha) \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \mathbf{P} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t \\
&\quad - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

6

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

6.1 - Introdução

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada para resolver o sistema de equações deduzido no capítulo anterior, bem como os procedimentos necessários para uma implementação computacional. Dentro do desenvolvimento dos processos de solução serão apresentadas, também, explicações de caráter teórico quando necessárias para uma melhor compreensão do problema.

A metodologia de solução é um procedimento numérico específico para resolver sistemas mecânicos com não linearidades geométricas e físicas. A utilização de um algoritmo de integração temporal implícito já obriga a utilização de um método numérico iterativo, o que é exigido também para problemas com não linearidades físicas. Os problemas com não linearidades geométricas, por sua vez, exigem métodos incrementais. Portanto, o método a ser utilizado é incremental e iterativo.

6.2 - Método incremental-iterativo

As equações já foram deduzidas e discretizadas para um processo incremental, tendo em vista que se partiu do pressuposto que o equilíbrio do sistema é alcançado no tempo t e que todas as informações referentes ao tempo t são conhecidas. A solução consiste em encontrar um sistema de equações para o equilíbrio no tempo $t + \Delta t$, ou seja, qual será o incremento de informação necessário para se chegar a um sistema em equilíbrio quando ocorre um incremento de Δt no tempo.

O método iterativo se faz necessário dentro de cada passo incremental, corrigindo qualquer alteração das informações. No problema analisado, dentro de cada passo incremental é determinado um novo vetor de posição que ao ser substituído na equação de equilíbrio, gera um termo desbalanceado. A correção desse vetor de posições é realizada através do método iterativo. Por motivos práticos, será adotado o Método de Newton-Raphson, dado por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = 0 \cong \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \quad (6.1)$$

onde $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ é a energia potencial mínima ou vetor dos resíduos, que define o equilíbrio do sistema.

Através da Eq. (6.2), determinamos o vetor de correção das posições:

$$\Delta \mathbf{X} = -[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \quad (6.2)$$

onde $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) = \partial^2 \Pi / \partial \mathbf{X}^2$ é a matriz hessiana para o problema analisado.

A matriz hessiana é determinada com a derivada da Eq. (5.54) em relação à $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) = & (1 + \alpha) \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{\left[\mathbf{M} + m\delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m) \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{X}}_m}{\dot{\mathbf{X}}_t} \mathbf{F} \right) \right]}{\beta \Delta t^2} \\ & + (1 + \alpha) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Durante o processo iterativo as posições nodais são corrigidas pela expressão:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{X}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{X} \quad (6.4)$$

onde k é o número da iteração.

Com as posições corrigidas, calculam-se os novos valores da velocidade e da aceleração, respectivamente, pelas Eqs. (6.5) e (6.6):

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t + \gamma \Delta t \left(\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{k+1}}{\beta \Delta t^2} - \mathbf{Q}_t \right) \quad (6.5)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{k+1}}{\beta \Delta t^2} - \mathbf{Q}_t \quad (6.6)$$

O processo iterativo é interrompido quando as correções das posições ($\Delta \mathbf{X}$) são suficientemente pequenas dentro de certa tolerância. O critério de tolerância é dado por:

$$\sqrt{\sum g^2(X_0)} \leq tol \quad (6.7)$$

A inicialização das variáveis é realizada da seguinte forma: \mathbf{X}_0 e $\dot{\mathbf{X}}_0$ são dados para o intervalo de tempo inicial; $\ddot{\mathbf{X}}_0$ pode ser avaliado das equações de equilíbrio:

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left[(1 + \alpha) \left(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_0 - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_0 \right) + \alpha \left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{-\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{-\Delta t} \right) \right] \quad (6.8)$$

As variáveis necessárias do passo de tempo anterior ao passo inicial ($-\Delta t$) podem ser calculadas usando o algoritmo de diferenças centrais, como segue:

$$\mathbf{X}_{-\Delta t} = \mathbf{X}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{X}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_0 \quad (6.9)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{-\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_{-\Delta t}}{\Delta t} \quad (6.10)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{-\Delta t} = \frac{\dot{\mathbf{X}}_0 - \dot{\mathbf{X}}_{-\Delta t}}{\Delta t} \quad (6.11)$$

6.3 - Desenvolvimento interno do método incremental-iterativo

Para a implementação do algoritmo e a correta execução de todo o processo de solução, alguns passos algébricos intermediários precisam ser dados. Esses passos algébricos são a determinação explícita de algumas expressões, como as derivadas primeira e segunda da equação da energia. A dedução destas expressões será baseada na cinemática da treliça mostrada na Fig. 15 e na cinemática da viga apresentada na Fig. 16.

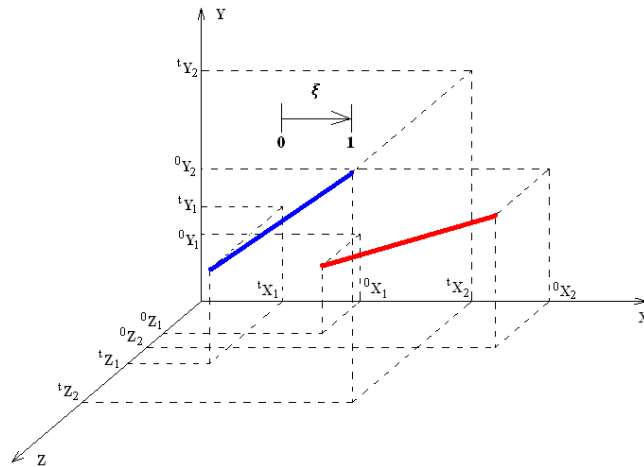


Figura 15 – Parametrização do elemento de treliça no espaço

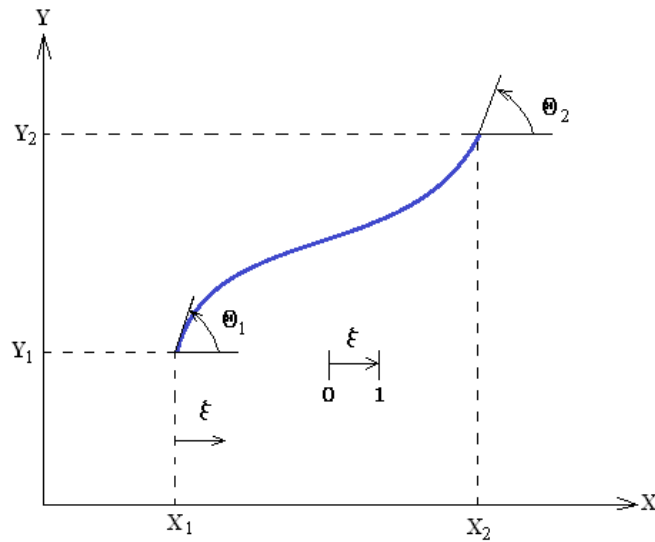


Figura 16 – Parametrização da viga no plano

onde ξ é uma variável adimensional (que varia de zero a um) utilizada para mapear o elemento.

O elemento mostrado na Fig. 15 tem sua cinemática descrita apenas pelas posições dos nós da extremidade, conforme as Eqs. (6.12) a (6.14):

$$x_1 = X_1 + (X_2 - X_1)\xi \quad (6.12)$$

$$x_2 = Y_1 + (Y_2 - Y_1)\xi \quad (6.13)$$

$$x_3 = Z_1 + (Z_2 - Z_1)\xi \quad (6.14)$$

O elemento mostrado na Fig. 16 apresenta a cinemática de vigas de Euler-Bernoulli, sendo descrita pelas Eqs. (6.12) e (6.15).

$$x_2 = y(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (6.15)$$

A explicação de se adotar a Eq. (6.15) como a forma de um polinômio de terceiro grau será apresentada posteriormente.

Para calcular a derivada primeira em relação às posições, da energia de deformação U , é necessário retomar a Eq. (5.20):

$$U = \int_{s_0} \left[\frac{EA_0}{2} \varepsilon^2 + \frac{EI}{2} \kappa^2 - \int_A (\varepsilon + z\kappa) \varepsilon_p dA \right] ds_0 \quad (5.20)$$

A Eq. (5.20) pode ser expressa, utilizando a representação da densidade de energia por unidade de comprimento, na forma da Eq. (6.16):

$$U = \int_{s_0} u ds_0 \quad (6.16)$$

onde $u = \left[\frac{EA_0}{2} \varepsilon^2 + \frac{EI}{2} \kappa^2 - \int_A (\varepsilon + z\kappa) \varepsilon_p dA \right]$ e s_0 é uma coordenada auxiliar definida no elemento.

A Eq. (6.16) pode ser definida utilizando a parametrização apresentada nas Fig. 15 ou 16. Para elementos parametrizados, tem-se:

$$\frac{ds_0}{d\xi} = \sqrt{\sum \left(\frac{d^0 x_i}{d\xi} \right)^2} = l_0 \quad (6.17)$$

Resolvendo para ds_0 , obtém-se:

$$ds_0 = l_0 d\xi \quad (6.18)$$

Reescrevendo a Eq. (6.16) para um elemento parametrizado, a equação da energia de deformação é dada por:

$$U = \int_0^1 l_0 u(\xi) d\xi \quad (6.19)$$

Portanto, a derivada primeira da energia de deformação é expressa por:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} = \int_V \frac{\partial u}{\partial X_r} dV = \frac{\partial}{\partial X_r} \left(\int_0^1 l_0 u(\xi) d\xi \right) = \int_0^1 l_0 \frac{\partial u(\xi)}{\partial X_r} d\xi \quad (6.20)$$

onde $u(\xi)$ é definido pela Eq. (6.21):

$$u(\xi) = \frac{EA_0}{2} \varepsilon^2 + \frac{EI}{2} \kappa^2 - E \int_A (\varepsilon + z\kappa) \varepsilon_p dA \quad (6.21)$$

Inicialmente, é necessário deduzir a equação de uma forma que possibilite a implementação, devendo-se fazer algumas considerações de como será determinada a curvatura κ , para a formulação que trabalha com as posições dos nós dos elementos definidos por uma curva parametrizada.

Leithold (1994) desenvolve a equação da curvatura de uma curva definida por equações paramétricas $x(\xi)$ e $y(\xi)$, sendo expressa por:

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{dx}{d\xi} \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{d^2x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}}{\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \right)^3} \quad (6.22)$$

No caso da formulação utilizada, $y(\xi)$ representa a equação da linha elástica da viga. Conforme Fish e Belytschko (2009), a aproximação da linha elástica deve ser feita por funções com grau de continuidade no mínimo C^1 (função contínua até na derivada primeira). Essa necessidade é explicada fisicamente pela consideração que as seções transversais permaneçam planas e normais à linha elástica. Funções com grau de continuidade C^0 (função simplesmente contínua por partes) viola essa consideração nos nós dos elementos causando uma sobreposição de material em uma extremidade e gerando uma fenda na outra extremidade. O polinômio de terceiro grau é uma função com grau de continuidade C^2 e por

isso pode ser empregado. Portanto, a parametrização da linha elástica pode ser escrita pela Eq. (6.15):

$$x_2 = y(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (6.15)$$

Onde a_i são parâmetros que relacionam os valores nodais. Os parâmetros a_i são determinados a partir das condições de contorno. Utilizando as condições de contorno conforme apresentadas na Fig. 16, a Eq. (6.12) juntamente com a Eq. (6.15) descreverá a cinemática da viga no plano.

As condições de contorno representadas na Fig. 16 são dadas por:

$$\begin{cases} y(\xi = 0) = Y_1 & e & y(\xi = 1) = Y_2 \\ \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \text{tg}(\theta_1) & e & \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \text{tg}(\theta_2) \end{cases} \quad (6.23)$$

Aplicando as condições de contorno definidas pelas Eqs. (6.23) na Eq. (6.15), chega-se aos seguintes parâmetros:

$$a_0 = Y_1 \quad (6.24)$$

$$a_1 = \text{tg}(\theta_1)(X_2 - X_1) \quad (6.25)$$

$$a_2 = 3(Y_2 - Y_1) - [\text{tg}(\theta_2) + 2\text{tg}(\theta_1)](X_2 - X_1) \quad (6.26)$$

$$a_3 = [\text{tg}(\theta_2) + \text{tg}(\theta_1)](X_2 - X_1) - 2(Y_2 - Y_1) \quad (6.27)$$

Portanto, está definida a aproximação da linha elástica para o elemento de viga possibilitando o cálculo da curvatura.

Com a finalidade de verificar a coerência entre a equação da curvatura deduzida nesta dissertação e a forma apresentada por Leithold (1994), é apresentada uma viga curva na Fig. 17:

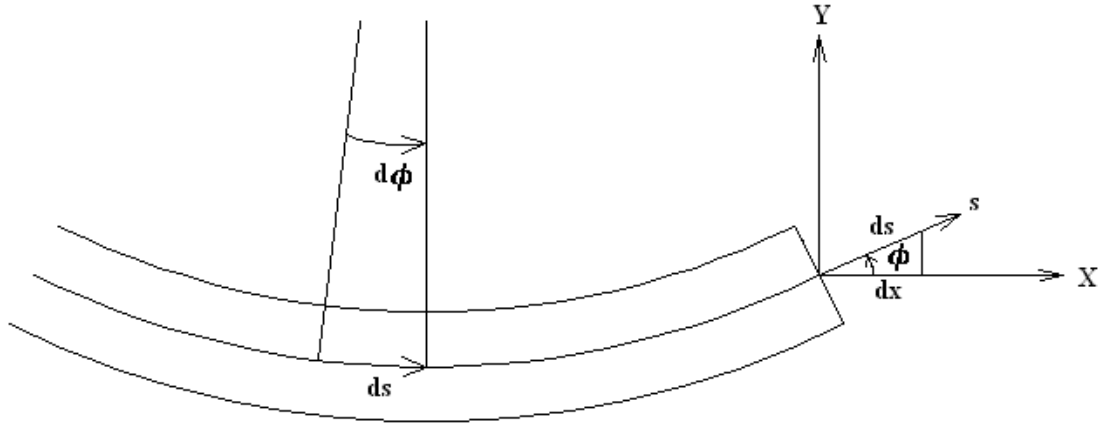


Figura 17 – Definição da curvatura

Pela representação gráfica apresentada na Fig. 17, é possível verificar que a curvatura dada pela Eq. (5.14) é uma forma de expressar a curvatura dada pela Eq. (6.22), apenas com mais um passo na dedução da equação diferencial da curvatura:

$$\kappa = \frac{d\phi}{d^t X} \cos\phi = \frac{d\phi}{d^t X} \frac{d^t X}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \quad (6.28)$$

Portanto, utilizando a Eq. (6.22) a curvatura será definida por:

$$\kappa = \frac{(X_2 - X_1)(2a_2 + 6a_3\xi)}{(\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2})^3} \quad (6.29)$$

Pode-se agora partir para a determinação das derivadas da densidade de energia de deformação por unidade de comprimento, sabendo que essa energia de deformação específica é dada pela Eq. (6.21):

$$u(\xi) = \frac{EA_0}{2} \varepsilon^2 + \frac{EI}{2} \kappa^2 - E \int_A (\varepsilon + z\kappa) \varepsilon_p dA \quad (6.21)$$

A derivada primeira da energia de deformação em sua forma indicial, fazendo uma troca de índices r por j , é expressa por:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} = \int_0^1 l_0 \frac{\partial u(\xi)}{\partial X_j} d\xi = \int_0^1 l_0 u_{i,j} d\xi \quad (6.30)$$

Utilizando a deformação de engenharia definida por:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (6.31)$$

Onde l_0 é o comprimento inicial e l é o comprimento final do elemento.

Substituindo a Eq. (6.31) e a Eq. (6.29) na Eq. (6.21):

$$u_i = \frac{EA_0}{2} \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 + \frac{EI}{2} \frac{(X_2 - X_1)^2 (2a_2 + 6a_3\xi)^2}{[(X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2]^3} +$$

$$-E \int_A \left[\left(\frac{l - l_0}{l_0} \right) + z \frac{(X_2 - X_1)(2a_2 + 6a_3\xi)}{(\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2})^3} \right] \varepsilon_p dA \quad (6.32)$$

Multiplicando os dois lados da Eq. (6.32) por l_0 e sabendo que l_0 é uma constante, a Eq. (6.32) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$l_0 u_i = \frac{l_0 EA_0}{2} \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)^2 + \frac{l_0 EI}{2} \frac{(X_2 - X_1)^2 (2a_2 + 6a_3\xi)^2}{[(X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2]^3} +$$

$$-l_0 E \int_A \left[\left(\frac{l}{l_0} - 1 \right) + z \frac{(X_2 - X_1)(2a_2 + 6a_3\xi)}{(\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2})^3} \right] \varepsilon_p dA \quad (6.33)$$

Definindo algumas variáveis conforme as Eqs. (6.34) a (6.37):

$$l = \sqrt{B} \quad (6.34)$$

$$l_x = (X_2 - X_1) \quad (6.35)$$

$$G = (X_2 - X_1)^2 (2a_2 + 6a_3\xi)^2 \quad (6.36)$$

$$B = (X_2 - X_1)^2 + (a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2)^2 \quad (6.37)$$

A Eq. (6.33) pode ser reescrita de uma forma simplificada por:

$$l_0 u_i = \frac{l_0 E A_0}{2} \left(\frac{\sqrt{B}}{l_0} - 1 \right)^2 + \frac{l_0 E I}{2} G B^{-3} - l_0 E \int_A \left[\left(\frac{\sqrt{B}}{l_0} - 1 \right) + z \sqrt{G} B^{-\frac{3}{2}} \right] \varepsilon_p dA \quad (6.38)$$

Assim, a derivada primeira da Eq. (6.38) é dada por:

$$l_0 u_{i,j} = \frac{E A_0}{2 l_0} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}} \right) B_j + \frac{l_0 E I}{2} \left(\frac{B G_j - 3 G B_j}{B^4} \right) - l_0 E \int_A \varepsilon_j \varepsilon_p dA \quad (6.39)$$

Onde

$$\varepsilon_j = \left(\frac{B_j}{2 l_0 \sqrt{B}} \right) + \left(\frac{G_j B^{-\frac{3}{2}}}{2 \sqrt{G}} - \frac{3 \sqrt{G} B_j}{2 B^{\frac{5}{2}}} \right) z \quad (6.40)$$

A segunda derivada da energia de deformação em relação às posições é realizada de maneira análoga:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}^2} = \int_0^1 l_0 u_{i,jm} d\xi \quad (6.41)$$

$$l_0 u_{i,jm} = \frac{E A_0}{2 l_0} \left[\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}} \right) B_{jm} + \frac{l_0 B_j B_m}{2 (\sqrt{B})^3} \right] + \frac{l_0 E I}{2 B^5} [G_{jm} B^2 - 3 B (G_j B_m + G_m B_j + G B_{jm}) + 12 G B_j B_m] \quad (6.42)$$

$$- l_0 E \int_A \varepsilon_{jm} \varepsilon_p dA$$

$$\varepsilon_{jm} = \frac{1}{2 l_0} \left[\frac{B_{jm}}{\sqrt{B}} - \frac{B_j B_m}{2 (\sqrt{B})^3} \right] + \left[\frac{1}{2 \sqrt{G}} \left(\frac{2 B G_{jm} - 3 G_j B_m}{2 B^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{G_j G_m}{4 (G B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 B_j G_m}{4 \sqrt{G} B^{\frac{5}{2}}} \right. \quad (6.43)$$

$$\left. - \frac{3 \sqrt{G}}{2} \left(\frac{2 B B_{jm} - 5 B_j B_m}{2 B^{\frac{7}{2}}} \right) \right] z$$

O comprimento inicial l_0 do elemento é calculado pela Eq. (6.17) e o comprimento final l apresenta equação semelhante:

$$l = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\sum \left(\frac{d {}^t x_i}{d\xi} \right)^2} \quad (6.44)$$

Este desenvolvimento apresentado para a energia de deformação segue o mesmo desenvolvimento apresentado em Greco (2004), onde todo o procedimento visando à implementação se encontra bastante detalhado.

O termo ε_p , que define a deformação plástica e os mecanismos envolvidos no comportamento mecânico do elemento quando as condições de carregamento atingem valores superiores ao limite elástico é trabalhado conforme o desenvolvimento apresentado no Anexo.

O Apêndice D apresenta o fluxograma do programa, com o desenvolvimento das principais ideias desenvolvidas para análise de problemas envolvendo massas móveis.

7

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MÉTODO

7.1 - Introdução

A verificação da formulação do problema e do método utilizado para resolver o problema apresentado nesta dissertação será desenvolvida gradativamente, com o objetivo de comprovar com clareza a aplicabilidade da formulação desenvolvida neste trabalho. A validação do método será realizada comparando com resultados obtidos na literatura pesquisada.

A verificação da formulação seguirá o seguinte procedimento: primeiro será apresentada a formulação de problemas estáticos e a solução de alguns exemplos; na segunda parte a contribuição dos termos inerciais será adicionada ao problema anterior e assim, apresentada a solução de problemas dinâmicos; e por último a transformação do problema dinâmico em um problema de massa móvel. Como o objetivo é apenas verificar a formulação utilizada, o desenvolvimento será bastante sucinto sem explicações detalhadas. Para um estudo mais detalhado de todo o desenvolvimento aplicado em problemas estáticos e dinâmicos, o autor sugere pesquisa à referência Greco (2004), onde o leitor também poderá verificar os detalhes da implementação computacional.

7.2 - Problemas Estáticos

A energia potencial total de um problema estático geral pode ser dada pela Eq. (7.1):

$$\Pi = U - P \quad (7.1)$$

A energia de deformação é dada pela Eq. (5.5) repetida aqui:

$$U = \int_V \left[E \frac{\varepsilon^2}{2} - E\varepsilon\varepsilon_p \right] dV = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_p) dV \quad (5.5)$$

A energia potencial das forças externas é dada por:

$$P = \sum FX \quad (7.2)$$

A equação da energia potencial das forças externas representa um carregamento geral, incluindo a capacidade de realizar trabalho de momentos fletores aplicados em pontos nodais.

A energia potencial total pode ser expressa por:

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_p) dV - \sum FX \quad (7.3)$$

Considerando a parametrização do elemento apresentada nas Figs. 15 e 16, que permite expressar a energia de deformação pela Eq. (6.19),

$$U = l_0 \int_0^1 u(\xi) d\xi \quad (6.19)$$

a energia potencial das forças externas, de carácter geral, é expressa por:

$$\begin{aligned} \sum FX = F_{X1}X_1 + F_{X2}X_2 + F_{Y1}Y_1 + F_{Y2}Y_2 + F_{Z1}Z_1 + F_{Z2}Z_2 + M_1\theta_1 + M_2\theta_2 \\ + M_3\theta_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

A energia potencial total pode ser expressa por:

$$\Pi = l_0 \int_0^1 u(\xi) d\xi - F_{X1}X_1 - F_{X2}X_2 - F_{Y1}Y_1 - F_{Y2}Y_2 - F_{Z1}Z_1 - F_{Z2}Z_2 - M_1\theta_1 - M_2\theta_2 - M_3\theta_3 \quad (7.5)$$

Aplicando o Princípio da Energia Potencial Total Mínima, tem-se um conjunto de nove equações em função dos parâmetros nodais:

Tabela 2 – Derivadas da energia potencial total em relação aos parâmetros nodais

| | | |
|--|--|---|
| $\frac{\partial \Pi}{\partial X_1} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial X_1} d\xi - F_{X1} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial X_2} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial X_2} d\xi - F_{X2} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \theta_1} d\xi - M_1 = 0$ |
| $\frac{\partial \Pi}{\partial Y_1} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} d\xi - F_{Y1} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial Y_2} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial Y_2} d\xi - F_{Y2} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} d\xi - M_2 = 0$ |
| $\frac{\partial \Pi}{\partial Z_1} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial Z_1} d\xi - F_{Z1} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial Z_2} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial Z_2} d\xi - F_{Z2} = 0$ | $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \theta_3} d\xi - M_3 = 0$ |

Como o problema analisado também envolve não linearidades físicas e geométricas, a solução é obtida através de um processo incremental-iterativo. Portanto, o mesmo procedimento de solução utilizado no desenvolvimento de problemas de massa móvel pode ser empregado para este problema estático.

7.2.1 - Exemplo numérico

Problema 7.64 do livro “Mecânica Vetorial para Engenheiros” 3ed. de Beer e Johnston, 1980.

Considerando a estrutura apresentada na Fig. 18, constituída por trechos de cabos retos e solicitada por três forças concentradas, sendo $a = 2$ m e $b = 2,25$ m, determinar as componentes das reações de apoio e os esforços axiais em cada trecho. Dados: $E = 200$ GPa e $A = 0,005$ m².

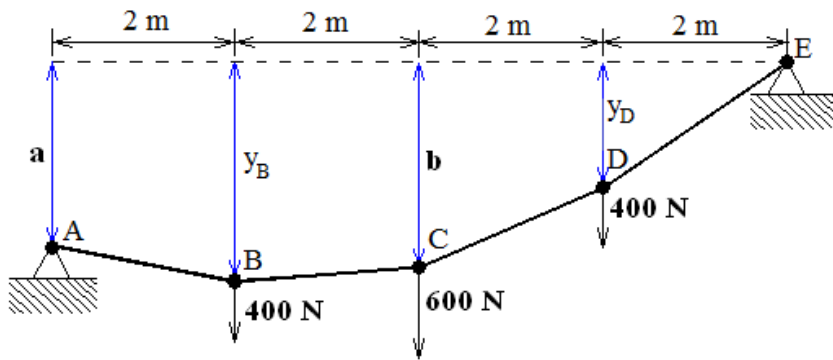


Figura 18 – Cabo suspenso submetido à cargas concentradas do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

Solução:

1) Solução Analítica

A obtenção da solução analítica pode ser realizada através das condições de equilíbrio, aplicadas ao problema. A Fig. 19 apresenta o diagrama de corpo livre do problema global:

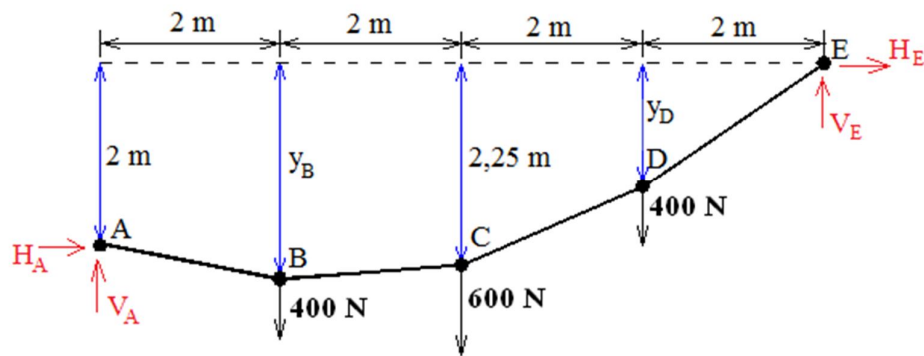


Figura 19 – Diagrama de corpo livre do cabo suspenso do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

➤ Momento no nó C, a partir da direita:

$$\sum M_C^{Dir} = 0 \rightarrow 4V_E - 2,25H_E - 2 * 400 = 0$$

$$V_E = \frac{2,25H_E + 800}{4}$$

➤ Momento no nó A:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -2 * 400 - 4 * 600 - 6 * 400 + 8V_E - 2H_E = 0$$

$$8\left(\frac{2,25H_E + 800}{4}\right) - 2H_E = 5600 \rightarrow 2,5H_E = 4000 \rightarrow H_E = 1600 \text{ N}$$

$$V_E = \frac{2,25 * 1600 + 800}{4} \rightarrow V_E = 1100 \text{ N}$$

➤ Equilíbrio global:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A + 1600 = 0 \rightarrow H_A = -1600 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A - 400 - 600 - 400 + 1100 = 0 \rightarrow V_A = 300 \text{ N}$$

➤ Momento no nó B, a partir da esquerda:

$$\sum M_B^{Esq} = 0 \rightarrow -2 * 300 + (y_B - 2) * 1600 = 0$$

$$y_B = \frac{600}{1600} + 2 \rightarrow y_B = 2,375 \text{ m}$$

➤ Momento no nó D, a partir da direita:

$$\sum M_D^{Dir} = 0 \rightarrow -y_D * 1600 + 2 * 1100 = 0$$

$$y_D = \frac{2200}{1600} \rightarrow y_D = 1,375 \text{ m}$$

➤ Determinação das inclinações dos trechos de cabo retos em relação à horizontal:

$$\theta_{AB} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2,375 - 2}{2}\right) \rightarrow \theta_{AB} = 10,62^\circ$$

$$\theta_{BC} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2,25 - 2,375}{2}\right) \rightarrow \theta_{BC} = -3,58^\circ$$

$$\theta_{CD} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2,25 - 1,375}{2}\right) \rightarrow \theta_{CD} = 23,63^\circ$$

$$\theta_{DE} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0 - 1,375}{2}\right) \rightarrow \theta_{DE} = 34,51^\circ$$

➤ Tração no trecho AB:

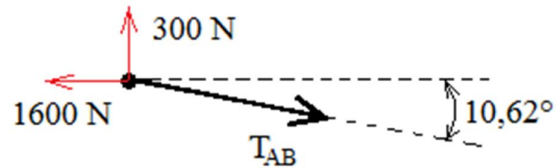


Figura 20 – Equilíbrio no nó A para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -1600 + T_{AB} \cos(10,62^\circ) = 0$$

$$T_{AB} = \frac{1600}{\cos(10,62^\circ)} \rightarrow T_{AB} = 1627,8839 \text{ N}$$

➤ Tração no trecho BC:

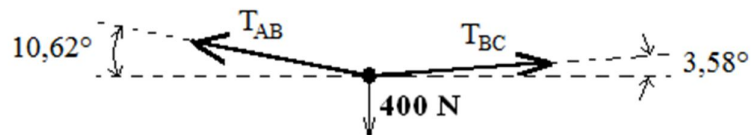


Figura 21 – Equilíbrio no nó B para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -1627,8839 \cos(10,62^\circ) + T_{BC} \cos(3,58^\circ) = 0$$

$$T_{BC} = \frac{1627,8839 \cos(10,62^\circ)}{\cos(3,58^\circ)} \rightarrow T_{BC} = 1603,1284 \text{ N}$$

➤ Tração no trecho CD:

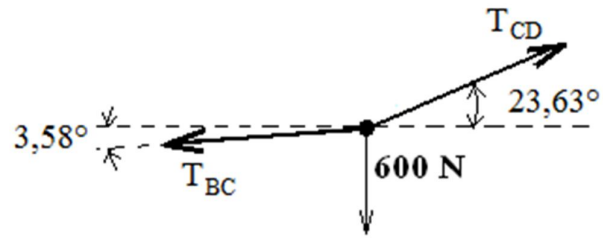


Figura 22 – Equilíbrio no nó C para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -1603,1284 \cos(3,58^\circ) + T_{CD} \cos(23,63^\circ) = 0$$

$$T_{CD} = \frac{1603,1284 \cos(3,58^\circ)}{\cos(23,63^\circ)} \rightarrow T_{CD} = 1746,4333 \text{ N}$$

➤ Tração no trecho DE:

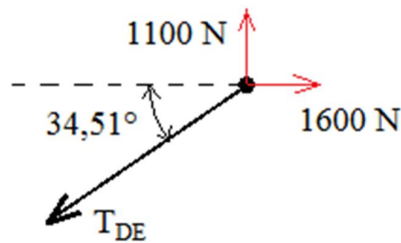


Figura 23 – Equilíbrio no nó E para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -T_{DE} \cos(34,51^\circ) + 1600 = 0$$

$$T_{DE} = \frac{1600}{\cos(34,51^\circ)} \rightarrow T_{DE} = 1941,6832 \text{ N}$$

Os resultados obtidos através do cálculo analítico são apresentados na Tab. 3:

Tabela 3 – Resultados analíticos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

| Descrição | | Resultados Analíticos |
|---------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| Reações de apoio | H_A (\leftarrow) | 1600 N |
| | V_A (\uparrow) | 300 N |
| | H_E (\rightarrow) | 1600 N |
| | V_E (\uparrow) | 1100 N |
| Força de tração nos cabos retos | T_{AB} | 1627,8839 N |
| | T_{BC} | 1603,1284 N |
| | T_{CD} | 1746,4333 N |
| | T_{DE} | 1941,6832 N |
| Posição vertical dos nós | y_A | 2,000 m |
| | y_B | 2,375 m |
| | y_C | 2,250 m |
| | y_D | 1,375 m |
| | y_E | 0,0 |

2) Solução Numérica

A solução numérica será desenvolvida referenciando os elementos e nós conforme a Fig. 24:

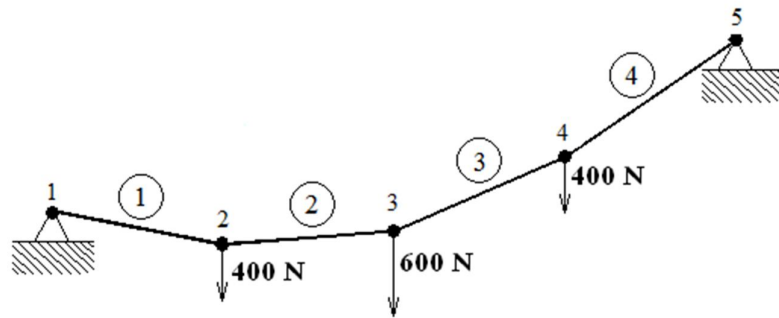


Figura 24 – Numeração dos elementos e nós para o cabo suspenso com cargas concentradas do problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

As coordenadas iniciais dos nós são informadas como dados de entrada para definir a geometria inicial e a divisão dos elementos. Como as coordenadas dos nós 2 e 4 não informadas, serão consideradas aquelas definidas no cálculo analítico e com base na orientação da Fig. 24 serão dadas conforme descrito na Tab. 4:

Tabela 4 – Coordenadas dos nós para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

| Nó | X | Y | Z |
|-----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 2,0 | -0,375 | 0,0 |
| 3 | 4,0 | -0,250 | 0,0 |
| 4 | 6,0 | 0,625 | 0,0 |
| 5 | 8,0 | 2,000 | 0,0 |

Os resultados obtidos numericamente são apresentados na Tab. 5:

Tabela 5 – Resultados numéricos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

| Descrição | Resultados Numéricos | |
|--|-----------------------------|---------------------------|
| Reações de apoio | H_A (\leftarrow) | 1599,9712 N |
| | V_A (\uparrow) | 300,0078 N |
| | H_E (\rightarrow) | 1599,9717 N |
| | V_E (\uparrow) | 1099,9948 N |
| Força de tração nos cabos retos | T_{AB} | 1627,8526 N |
| | T_{BC} | 1603,0902 N |
| | T_{CD} | 1746,3932 N |
| | T_{DE} | 1941,6188 N |
| Deslocamento vertical dos nós | Δy_1 | 0,0 |
| | Δy_2 | $-0,165 \times 10^{-4}$ m |
| | Δy_3 | $-0,230 \times 10^{-4}$ m |
| | Δy_4 | $0,148 \times 10^{-4}$ m |
| | Δy_5 | 0,0 |

3) Comparação entre o cálculo analítico e o cálculo numérico

Os resultados para os cálculos analíticos e numéricos são comparados na Tab. 6:

Tabela 6 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos para o problema 7.64 de Beer e Johnston (1980)

| Descrição | | Resultados Analíticos | Resultados Numéricos | Erro relativo [%] |
|---------------------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------|
| Reações de apoio | H_A (\leftarrow) | 1600 N | 1599,9712 N | 0,002 |
| | V_A (\uparrow) | 300 N | 300,0078 N | 0,003 |
| | H_E (\rightarrow) | 1600 N | 1599,9717 N | 0,002 |
| | V_E (\uparrow) | 1100 N | 1099,9948 N | 0 |
| Força de tração nos cabos retos | T_{AB} | 1627,8839 N | 1627,8526 N | 0,002 |
| | T_{BC} | 1603,1284 N | 1603,0902 N | 0,002 |
| | T_{CD} | 1746,4333 N | 1746,3932 N | 0,002 |
| | T_{DE} | 1941,6832 N | 1941,6188 N | 0,003 |
| Deslocamento vertical nos nós | $\Delta y_{1,A}$ | - | 0,0 | - |
| | $\Delta y_{2,B}$ | - | $-0,165 \times 10^{-4}$ m | - |
| | $\Delta y_{3,C}$ | - | $-0,230 \times 10^{-4}$ m | - |
| | $\Delta y_{4,D}$ | - | $0,148 \times 10^{-4}$ m | - |
| | $\Delta y_{5,E}$ | - | 0,0 | - |

7.3 - Problemas dinâmicos

Para análise de problemas dinâmicos é necessário incluir na equação da energia potencial total as contribuições dos termos relacionados com a energia cinética (K) e com a perda de energia devido ao amortecimento (Q). A equação da energia potencial total, para um problema dinâmico, pode ser expressa por:

$$\Pi = U - P + K + Q \quad (7.6)$$

Como no problema estático, a energia potencial das forças externas (P) foi considerada na sua forma geral, no problema dinâmico essa consideração também deve ser feita. Sendo assim, uma nova forma de calcular essa energia deve ser proposta já que agora o tempo é mais uma variável do problema. Para um problema dinâmico, a energia potencial das forças externas pode ser expressa por:

$$P = FX = F_0X[c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5\text{sen}(c_6t) + c_7\text{cos}(c_8t) + c_9e^{c_{10}t}] \quad (7.7)$$

A energia cinética pode ser expressa pela Eq. (4.7):

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV \quad (4.7)$$

A energia devido ao amortecimento é dada pela Eq. (4.22):

$$Q = \int_V \lambda_m \rho \dot{x}_i x_i dV - \int_V \int_{x_r} \lambda_m \rho \frac{x_i \ddot{x}_i}{\dot{x}_i} dx_r dV \quad (4.22)$$

Aplicando o Princípio da Energia Potencial Mínima, a Eq. (7.6) diferenciada em relação às posições nodais e apresentada na sua forma incremental é expressa por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} = 0 \quad (7.8)$$

Utilizando o algoritmo α -HHT na Eq. (7.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} &= (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + (1 + \alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} - (1 + \alpha) \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t \\ &\quad - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Utilizando as equações de Newmark, a equação de equilíbrio é expressa pela Eq. (7.10):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} &= (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] \\
&\quad + (1 + \alpha) \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \right] - (1 + \alpha) \mathbf{F}_{t+\Delta t} \\
&\quad - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} &= (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] \\
&\quad + (1 + \alpha) \mathbf{C} \gamma \Delta t \left[\frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] \\
&\quad + (1 + \alpha) \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t \right] - (1 + \alpha) \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.10}$$

As mesmas variáveis definidas pelas Eqs. (5.52) e (5.53), podem ser utilizadas:

$$\mathbf{Q}_t = \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \tag{5.52}$$

$$\mathbf{R}_t = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t \tag{5.53}$$

A Eq. (7.10) reescrita em uma forma mais compacta é expressa por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} &= (1 + \alpha) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_t + (1 + \alpha) \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\
&\quad - (1 + \alpha) \mathbf{C} \gamma \Delta t \mathbf{Q}_t + (1 + \alpha) \mathbf{C} \mathbf{R}_t - (1 + \alpha) \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_t \\
&\quad - \alpha \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_t = 0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

A solução é obtida através do processo incremental-iterativo mostrado no capítulo sobre a Solução das Equações e as correções durante as iterações também são processadas através do método de Newton-Raphson.

Para calcular as correções é necessário calcular a matriz hessiana, que neste caso é expressa pela Eq. (7.12):

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) = (1 + \alpha) \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + (1 + \alpha) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (7.12)$$

As correções e os dados iniciais são calculados e informados conforme já apresentado no capítulo sobre a Solução das Equações.

7.3.1 - Primeiro exemplo numérico

Exemplo retirado do livro “Introduction to structural dynamics” de Biggs, 1964.

Considerando um sistema sem amortecimento de um grau de liberdade, mostrado na Fig. 25, submetido a um carregamento axial constante no tempo, obter a resposta em deslocamento. O modelo de plastificação do sistema é considerado elastoplástico perfeito.

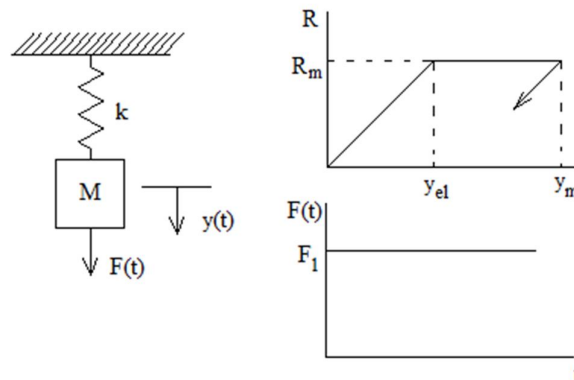


Figura 25 – Sistema elasto-plástico sem amortecimento com um grau de liberdade (Fonte: Biggs, 1964)

Biggs (1964) apresenta o desenvolvimento da solução analítica desse problema considerando as seguintes informações:

$$k = 83,4 \frac{kips}{in}$$

$$M = 0,0259 \frac{kip s^2}{in}$$

$$F_1 = 30 kips$$

Utilizando a relação dada pela Eq. (7.13), Biggs (1964) apresenta a solução para o caso utilizando uma viga de aço.

$$k = \frac{48EI}{l^3} \quad (7.13)$$

A viga utilizada apresenta as seguintes propriedades:

$$E = 30000 ksi$$

$$R_m = 45,3 kips$$

Onde R_m representa a força máxima que a viga suporta para um carregamento dinâmico.

1) Solução Analítica

Conforme Biggs (1964), devido à presença de duas descontinuidades na resposta do problema analisado, é necessário dividir o processo de solução em três estágios: (1) resposta elástica até o limite elástico, y_{el} ; (2) resposta plástica entre o limite elástico e o máximo deslocamento, e (3) resposta elástica que ocorre após o máximo ter sido alcançado e os deslocamentos começam a diminuir, vibração residual de característica harmônica.

➤ 1º Estágio:

A equação do movimento é expressa por:

$$\ddot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F_1}{M} \quad \text{para} \quad y \leq y_{el} \quad (7.14)$$

A solução desta equação, considerando deslocamento e velocidades iniciais nulos, é dada por:

$$y = y_{st}(1 - \cos\omega t) \quad (7.15)$$

Onde

$$y_{st} = \frac{F_1}{k} = \frac{30}{83,4} = 0,360 \text{ in}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{83,4}{0,0259}} = 56,746 \text{ Hz}$$

A solução, para o problema em questão, é expressa então por:

$$y = 0,360[1 - \cos(56,746t)] \quad \text{para } t \leq t_{el} \quad (7.16)$$

Considerando o deslocamento no limite elástico dado por:

$$y_{el} = \frac{R_m}{k} = \frac{45,3}{83,4} = 0,543$$

O tempo necessário para ocorrer o máximo deslocamento no regime elástico pode ser calculado utilizando a Eq. (7.16), que neste caso é:

$$t_{el} = 0,0371 \text{ s}$$

➤ 2º Estágio:

A equação do movimento é dada por:

$$M\ddot{y} + R_m = F_1 \quad \text{para } y_{el} \leq y \leq y_m \quad (7.17)$$

Através de duas integrações diretas obtém-se a resposta com duas constantes, que podem ser determinadas com as seguintes condições iniciais:

$$y_0 = y_{el} \quad e \quad \dot{y}_0 = y_{st}\omega \sin(\omega t_{el}) \quad (7.18)$$

Determinadas as constantes, a resposta é expressa por:

$$y = \frac{1}{2M}(F_1 - R_m)t_1^2 + y_{st}\omega t_1 \text{sen}(\omega t_{el}) + y_{el} \quad (7.19)$$

Onde

$$t_1 = t - t_{el}$$

Para os dados do problema estudado, tem-se:

$$y = -295,367t_1^2 + 17,579t_1 + 0,543 \quad (7.20)$$

Derivando a Eq. (7.19) e igualando a zero é possível determinar o intervalo de tempo após t_{el} em que ocorre o máximo deslocamento. Este intervalo de tempo é igual a:

$$t_{1m} = \frac{M\omega y_{st}}{R_m - F_1} \text{sen}(\omega t_{el}) = 0,0298 \text{ s}$$

O tempo total em que ocorre o máximo deslocamento é dado por:

$$t_m = t_{1m} + t_{el} = 0,0669 \text{ s}$$

Inserindo o valor de t_{1m} na Eq. (7.20) determina-se o valor do deslocamento máximo:

$$y_m = 0,805 \text{ in}$$

➤ 3º Estágio:

O mesmo procedimento utilizado no segundo estágio pode ser empregado, apenas tomando como condições iniciais as condições finais deste segundo estágio, porém, uma maneira mais fácil é empregada. Quando a massa está em sua posição neutra, a força da mola é igual à força aplicada. Para que isso ocorra, o deslocamento da massa deve diminuir um valor de $(R_m - F_1)/k$ abaixo do deslocamento máximo. Essa situação é equivalente a um deslocamento inicial desta quantidade em um sistema que se encontra em uma posição neutra correspondente a $y_m - (R_m - F_1)/k$. Portanto, a resposta neste estágio é expressa por:

$$y = \left(y_m - \frac{R_m - F_1}{k} \right) + \frac{R_m - F_1}{k} \cos(\omega t_2) \quad (7.21)$$

Onde

$$t_2 = t - t_{1m} - t_{el}$$

Para os dados deste exemplo, pode-se expressar essa equação por:

$$y = 0,622 + 0,183\cos(56,746t_2) \quad (7.22)$$

2) Solução Numérica utilizando elementos de treliça

Para representar esse problema numericamente, e assim definir os dados de entrada no programa deve-se fazer algumas considerações, tendo em vista que serão utilizados elementos de treliça e a forma que os dados são informados para o programa não são necessariamente como apresentados por Biggs (1964). O módulo de elasticidade (E) é um dado utilizado como entrada e por isso não necessita de alteração, entretanto, a força máxima de resistência a um carregamento dinâmico (R_m) deverá entrar como tensão de escoamento (σ_y), a rigidez (k) entrará como uma relação entre o módulo de elasticidade, área e comprimento e a massa como uma relação entre a densidade, área e comprimento.

Sendo assim, define-se a rigidez por:

$$k = \frac{EA}{L} \quad (7.23)$$

Em relação à massa, como o programa considera uma matriz de massa discreta, com a distribuição de massa em cada nó dada pela Eq. (7.24), a definição da massa do exemplo pode ser expressa pela densidade definida para o elemento:

$$M = \frac{\rho AL}{2} \quad (7.24)$$

Considerando um comprimento $L = 100 \text{ in}$, a partir da Eq. (7.23) determina-se a área transversal do elemento de treliça:

$$A = \frac{kL}{E} = 0,278 \text{ in}^2$$

A partir da Eq. (7.24) determina-se a densidade do elemento, compatibilizando as dimensões, evitando erros nos resultados gerados numericamente:

$$\rho = \frac{2M}{AL} = 1,863 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{in}^3 \cdot \text{in}}$$

Conhecendo a área, a tensão de escoamento é dada por:

$$\sigma_y = \frac{R_m}{A} = 162,950 \text{ ksi}$$

A solução numérica é mostrada na Fig. 26:

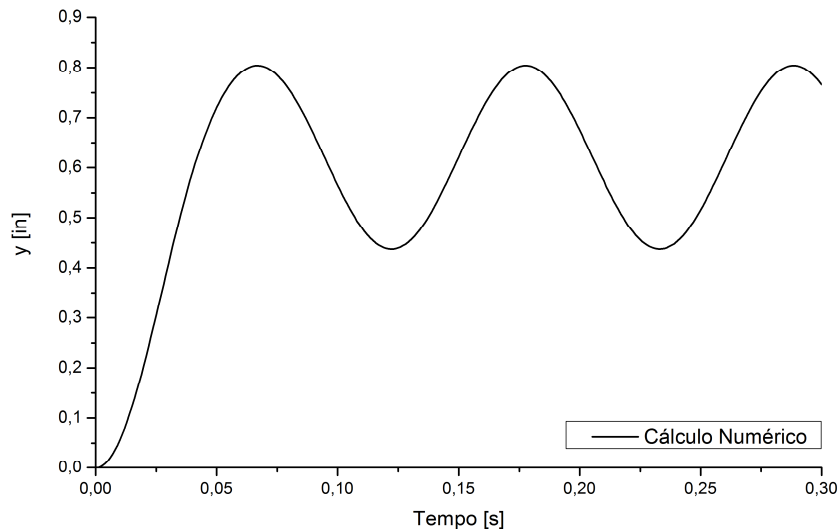


Figura 26 – Resposta numérica para o exemplo elastoplástico de Biggs (1964)

3) Comparação de resultados

A Fig. 27 mostra os resultados obtidos através do método analítico e do método numérico:

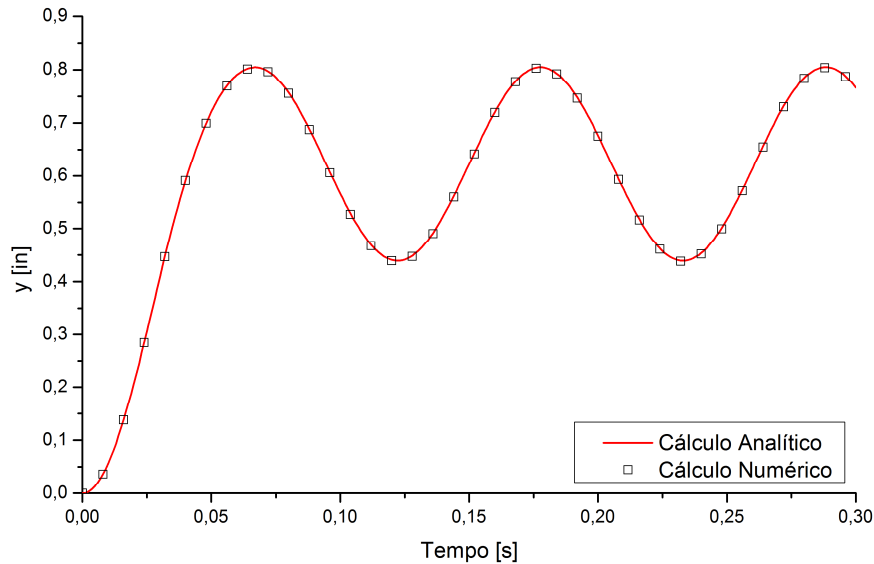


Figura 27 – Comparação gráfica da resposta do exemplo elastoplástico de Biggs (1964)

A Tab. 7 mostra a comparação entre os resultados obtidos analiticamente com os obtidos numericamente:

Tabela 7 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos para o exemplo de Biggs (1964)

| Descrição | Cálculo Numérico | Cálculo Analítico | Erro relativo [%] |
|---------------|------------------|-------------------|-------------------|
| y_{el} [in] | 0,5427175 | 0,5433818 | 0,1 |
| y_m [in] | 0,8037955 | 0,8045565 | 0,1 |

7.3.2 - Segundo exemplo numérico

Este exemplo, apresentado por Simo e Vu-Quoc (1986), Christensen e Lee (1986), Elkaranshaw e Dokainish (1995) e Greco (2004), trata-se de uma viga com rotação prescrita em um apoio. Esse exemplo tem o objetivo de mostrar que a formulação utilizada abrange os efeitos das forças inerciais, Coriolis e centrífuga conforme as formulações tradicionais, mas sem as dificuldades inerentes destas formulações.

O problema é apresentado na Fig. 28, com as seguintes propriedades:

$$EA = 2,8 \times 10^7$$

$$EI = 1,4 \times 10^4$$

$$\rho A = 1,2$$

$$\rho I = 6,0 \times 10^{-4}$$

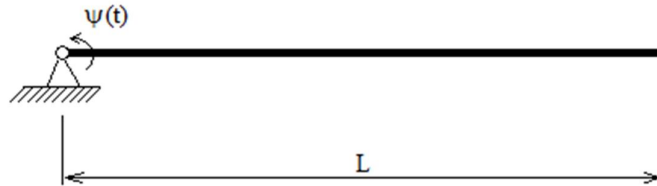


Figura 28 – Viga com rotação prescrita do exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

A rotação é representada pela função $\psi(t)$ expressa na Eq. (7.25), que representa um movimento típico de lâmina de rotor, como por exemplo, rotor de helicóptero. O gráfico da função $\psi(t)$ é apresentado na Fig. 29.

$$\psi(t) = \begin{cases} \left[\frac{2}{5} \left[\frac{t^2}{2} + \left(\frac{15}{2\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi t}{15} - 1 \right) \right] \right] \text{rad} & \text{para } 0 \leq t \leq 15 \\ (6t - 45) \text{rad} & \text{para } t > 15 \end{cases} \quad (7.25)$$

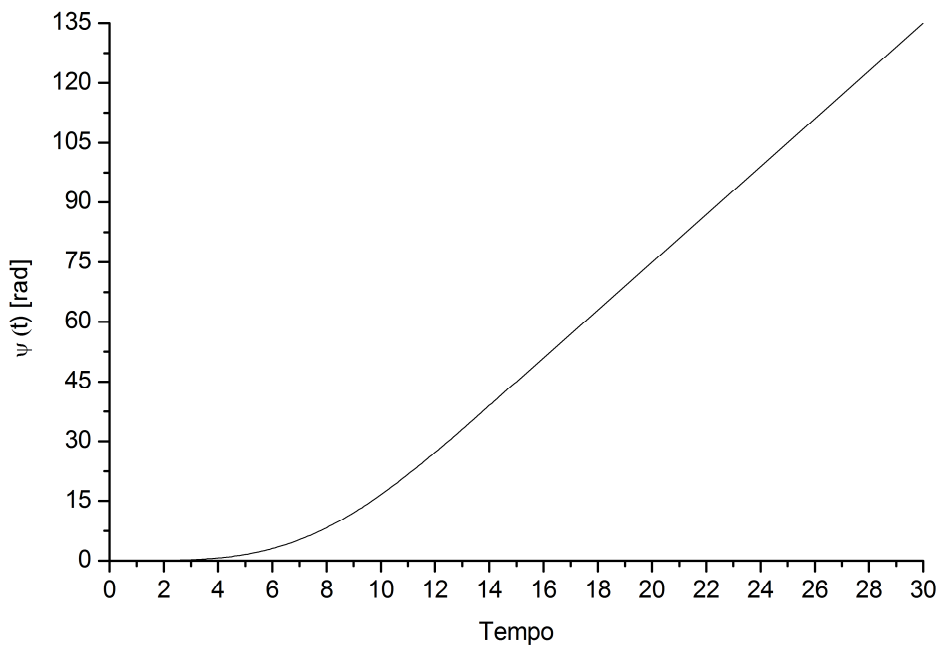


Figura 29 – Função que representa a rotação da lâmina giratória de Simo e Vu-Quoc (1986)

Na Fig. 30 é mostrado como são definidos os deslocamentos U_1 e U_2 . Esses deslocamentos têm como referência o nó da extremidade livre na estrutura submetida a um movimento de corpo rígido no mesmo instante t em que a estrutura se encontra na configuração deformada.

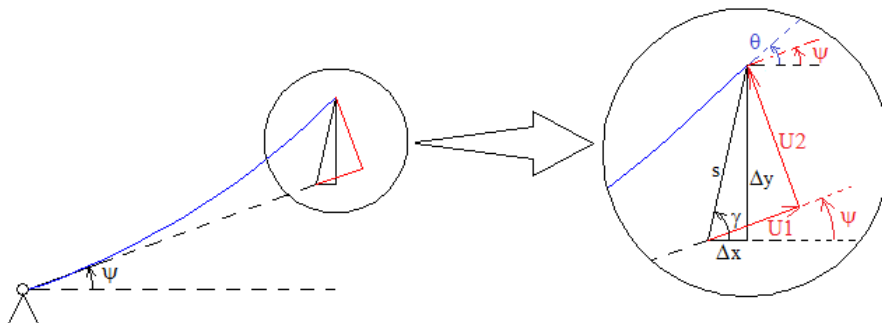


Figura 30 – Definição dos deslocamentos U_1 e U_2 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

Com as definições apresentadas na Fig. 30, os deslocamentos U_1 e U_2 são calculados utilizando as posições (X, Y) do nó na extremidade livre, utilizando para isso as Eqs. (7.26) a (7.29):

$$S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (7.26)$$

$$\beta = \gamma - \psi \quad (7.27)$$

$$U_1 = S \cos\beta \quad (7.28)$$

$$U_2 = S \sin\beta \quad (7.29)$$

A rotação relativa entre a configuração deformada e o movimento de corpo rígido (α) é dada pela Eq. (7.30):

$$\alpha = \theta - \psi \quad (7.30)$$

Nas Figs. 31, 32 e 33 são apresentados os deslocamentos U_1 e U_2 e a rotação relativa α , respectivamente.

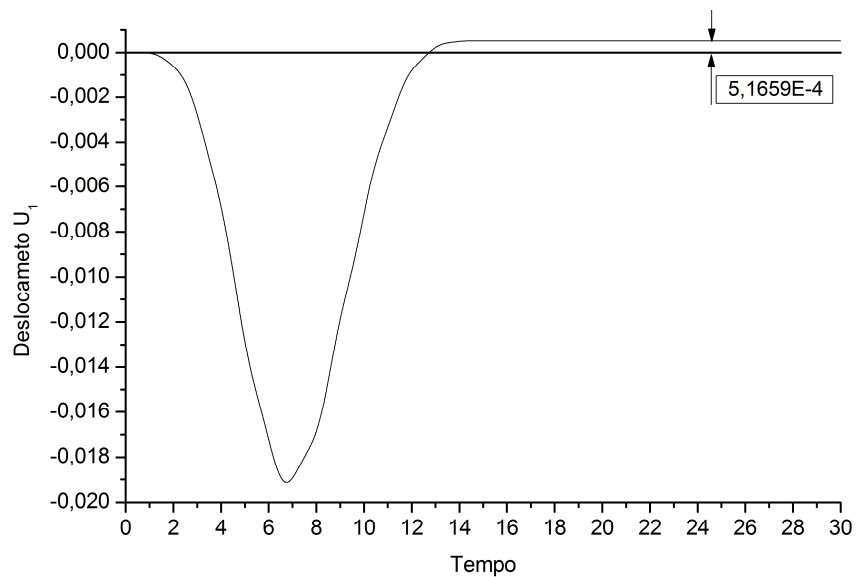


Figura 31 – Deslocamento U_1 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

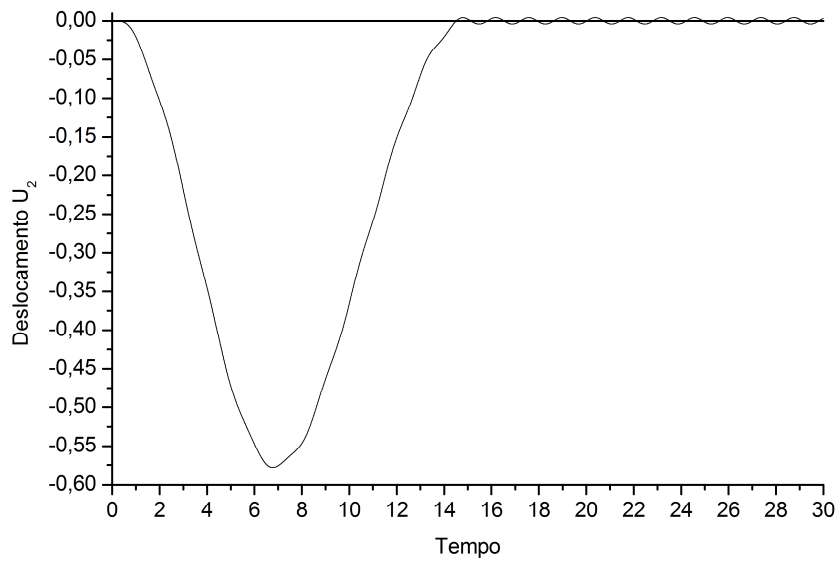


Figura 32 – Deslocamento U_2 para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

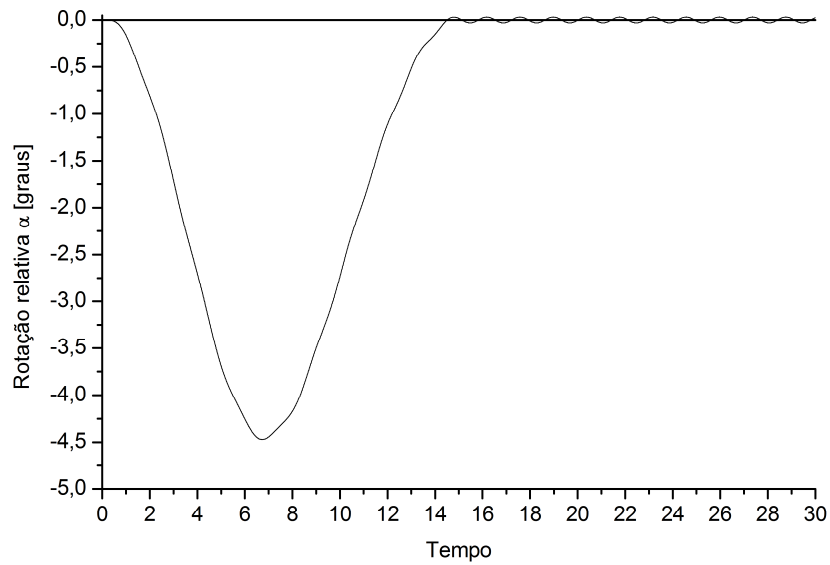


Figura 33 – Rotação relativa para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

Destaca-se aqui, que as respostas obtidas pelo procedimento numérico proposto estão bem próximas das repostas obtidas nas referências citadas. Nas referências são obtidos valores de 0,019; 0,578 e 4,468 para U_1 , U_2 e α , respectivamente. Utilizando o método proposto nesta

dissertação, são encontrados os valores de 0,019; 0,578 e 4,323 para U_1 , U_2 e α , respectivamente.

Na Fig. 34 é possível comparar as posições durante o primeiro ciclo de rotação para o cálculo numérico proposto considerando não linearidades geométricas e para movimento de corpo rígido.

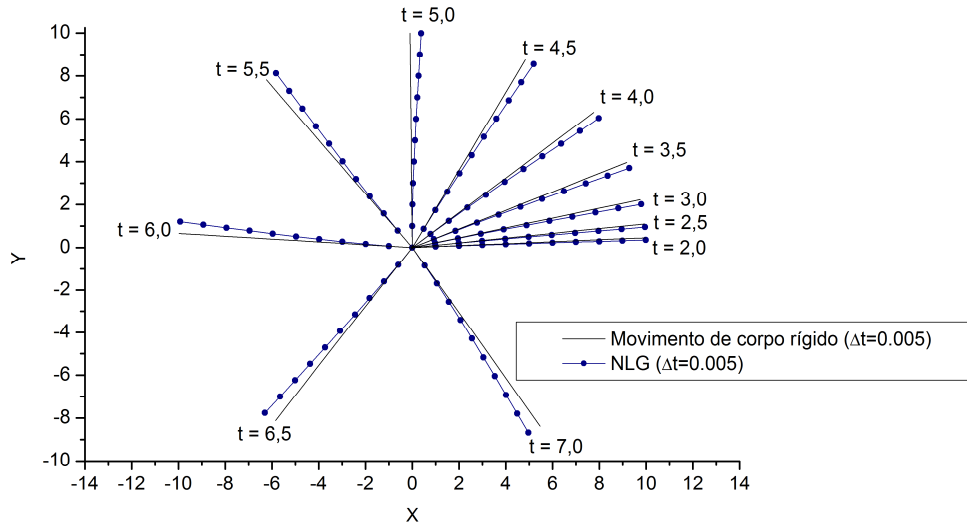


Figura 34 – Movimento da viga em diferentes instantes de tempo para o exemplo de Simo e Vu-Quoc (1986)

7.4 - Problemas envolvendo massa móvel

Para finalizar a verificação da formulação e validar a metodologia proposta, são comparadas as respostas de problemas envolvendo massas móveis com os resultados presentes na literatura.

Antes de iniciar a apresentação do problema envolvendo massa móvel, convém mostrar o que muda do problema dinâmico apresentado na seção anterior para este desta seção. Como neste problema existe uma massa móvel, a equação da energia total tem um termo a mais, que considera a energia relacionada com a inércia desta massa. Além dessa alteração, a energia cinética total também deve considerar a contribuição da massa. Com isso a equação da energia total é dada por:

$$\Pi = U - F + K + Q + Q_m \quad (7.31)$$

Onde a energia cinética é a mesma apresentada pela Eq. (4.14):

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{x}_i \dot{x}_i dV + \frac{1}{2} m \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] (\dot{x}_i + \dot{X}_m x_{i,j})^2 \quad (4.14)$$

E a energia relacionada com a inércia da massa tem a forma apresentada pela Eq. (4.27):

$$Q_m = \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] m \ddot{X}_m x_i \quad (4.27)$$

Outra alteração que é feita na equação do problema dinâmico anterior para este, está relacionada com a equação que representa o carregamento externo. No problema anterior é apresentada uma equação que representa um carregamento geral, o que deixa de acontecer para o problema envolvendo massa móvel. Para este problema o carregamento externo é específico e deve representar a solicitação devido ao movimento da massa, que neste caso é representado pela Eq. (4.28):

$$F = \left[\int_{\Omega_x} \delta(x_i - X_m) d\Omega_x \right] P x_i \quad (4.28)$$

7.4.1 - Primeiro exemplo numérico: Massa móvel em vigas

O exemplo envolvendo massas móveis em vigas inclinadas foi desenvolvido por Wu (2005) considerando que as forças interativas nas direções x e y, induzidas pela massa móvel são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 F_x &= m_c \ddot{u}_x \\
 F_y &= m_c (\ddot{u}_x + 2V\dot{u}'_y + V^2 u''_y)
 \end{aligned}
 \tag{7.32}$$

Onde u_x e u_y representam as componentes do deslocamento do ponto de contato da massa com a viga nas direções locais x e y do elemento.

As forças nodais equivalentes do elemento de viga induzidas pelas duas forças F_x e F_y são dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_k &= \varphi_k F_x & (k = 1, 4) \\
 f_k &= \varphi_k F_y & (k = 2, 3, 5, 6)
 \end{aligned}
 \tag{7.33}$$

Onde $\varphi_{k=1 \text{ a } 6}$ são funções de forma definidas por:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 - \zeta \\
 \varphi_2 &= 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\
 \varphi_3 &= (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)l \\
 \varphi_4 &= \zeta \\
 \varphi_5 &= 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\
 \varphi_6 &= (-\zeta^2 + \zeta^3)l
 \end{aligned}
 \tag{7.34}$$

Com $\zeta = x_i/l$. Sendo x_i a coordenada local x da massa móvel com relação ao nó esquerdo do elemento e l o comprimento total do elemento no qual a massa se encontra.

Utilizando as funções de forma dadas pelas Eqs. (7.34), as componentes do deslocamento do ponto de contato i são dadas por:

$$u_x = \varphi_1 u_1 + \varphi_4 u_4$$

(7.35)

$$u_y = \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \varphi_5 u_5 + \varphi_6 u_6$$

Onde $u_{i=1 a 6}$ são os deslocamentos nodais do elemento onde a massa móvel se encontra. As derivadas dos deslocamentos u_x e u_y em relação ao tempo são obtidas derivando-se os deslocamentos nodais. Substituindo as Eqs. (7.35) e suas derivadas nas Eqs. (7.32) e (7.33) chega-se ao sistema local definido por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u}$$

(7.36)

Onde

$$\mathbf{m} = m_c \begin{bmatrix} \varphi_1^2 & 0 & 0 & \varphi_1\varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2^2 & \varphi_2\varphi_3 & 0 & \varphi_2\varphi_5 & \varphi_2\varphi_6 \\ 0 & \varphi_3\varphi_2 & \varphi_3^2 & 0 & \varphi_3\varphi_5 & \varphi_3\varphi_6 \\ \varphi_4\varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_5\varphi_2 & \varphi_5\varphi_3 & 0 & \varphi_5^2 & \varphi_5\varphi_6 \\ 0 & \varphi_6\varphi_2 & \varphi_6\varphi_3 & 0 & \varphi_6\varphi_5 & \varphi_6^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = 2m_c V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2\varphi_2' & \varphi_2\varphi_3' & 0 & \varphi_2\varphi_5' & \varphi_2\varphi_6' \\ 0 & \varphi_3\varphi_2' & \varphi_3\varphi_3' & 0 & \varphi_3\varphi_5' & \varphi_3\varphi_6' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_5\varphi_2' & \varphi_5\varphi_3' & 0 & \varphi_5\varphi_5' & \varphi_5\varphi_6' \\ 0 & \varphi_6\varphi_2' & \varphi_6\varphi_3' & 0 & \varphi_6\varphi_5' & \varphi_6\varphi_6' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = m_c V^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2\varphi_2'' & \varphi_2\varphi_3'' & 0 & \varphi_2\varphi_5'' & \varphi_2\varphi_6'' \\ 0 & \varphi_3\varphi_2'' & \varphi_3\varphi_3'' & 0 & \varphi_3\varphi_5'' & \varphi_3\varphi_6'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_5\varphi_2'' & \varphi_5\varphi_3'' & 0 & \varphi_5\varphi_5'' & \varphi_5\varphi_6'' \\ 0 & \varphi_6\varphi_2'' & \varphi_6\varphi_3'' & 0 & \varphi_6\varphi_5'' & \varphi_6\varphi_6'' \end{bmatrix}$$

A matriz global é obtida através da matriz de transformação de coordenadas e em cada matriz de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} e de rigidez \mathbf{K} se soma a contribuição dos termos relacionados com a massa móvel apenas nos elementos que corresponde à posição da massa.

Utilizando o método de integração direta de Newmark, Wu (2005) apresenta os resultados do sistema massa móvel em vigas inclinadas.

Com o procedimento proposto nesta dissertação são apresentados alguns resultados com o objetivo de comparar com os resultados obtidos em Wu (2005). Este exemplo também foi analisado em Cifuentes (1989). Os dados utilizados para este exemplo são: viga com seção retangular de largura $b = 0,018113$ m e altura $h = 0,072322$ m; comprimento total $L = 4,352$ m; densidade de massa $\rho = 15267,1756$ kg/m³; módulo de elasticidade $E = 2020,797216 \times 10^8$ N/m² e uma massa móvel $m_c = 21,8$ kg.

Wu (2005) e Cifuentes (1989) analisam uma viga simplesmente apoiada horizontal com uma massa movendo-se com uma velocidade de $v = 27,49$ m/s. Para este exemplo, foi utilizado um modelo em elementos finitos composto de 100 elementos. O resultado obtido para o deslocamento vertical é apresentado na Fig. 35:

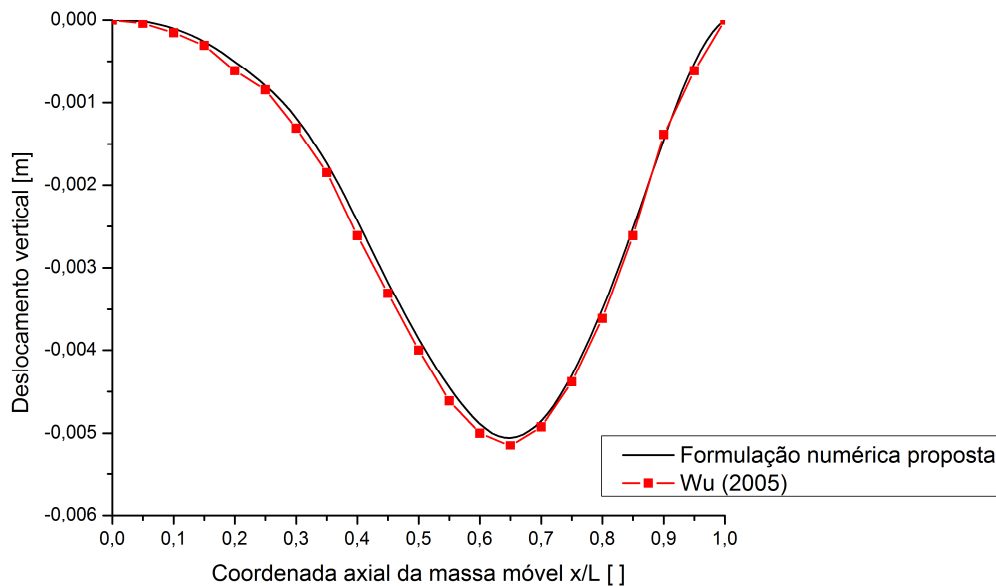


Figura 35 – Deslocamento vertical para a viga horizontal do exemplo de Wu (2005)

Wu (2005) também apresenta uma análise da viga inclinada simplesmente apoiada com um ângulo de inclinação $\theta = 30^\circ$. Para essa situação é considerado que a massa móvel se desloca da extremidade inferior para a superior e com velocidades de $v = 5, 10$ e 20 m/s. Os resultados obtidos são apresentados nas Figs. 36 e 37:

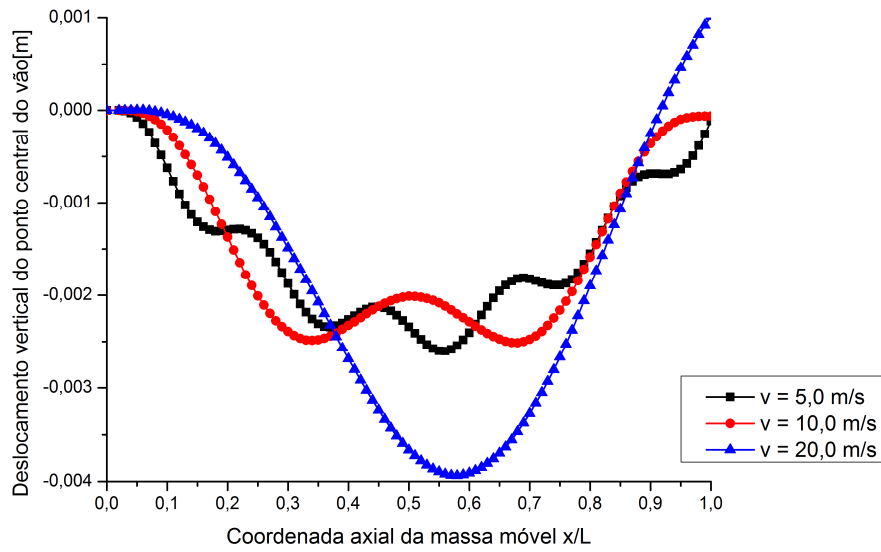


Figura 36 – Deslocamento vertical obtido pela formulação proposta para a viga inclinada do exemplo de Wu (2005)

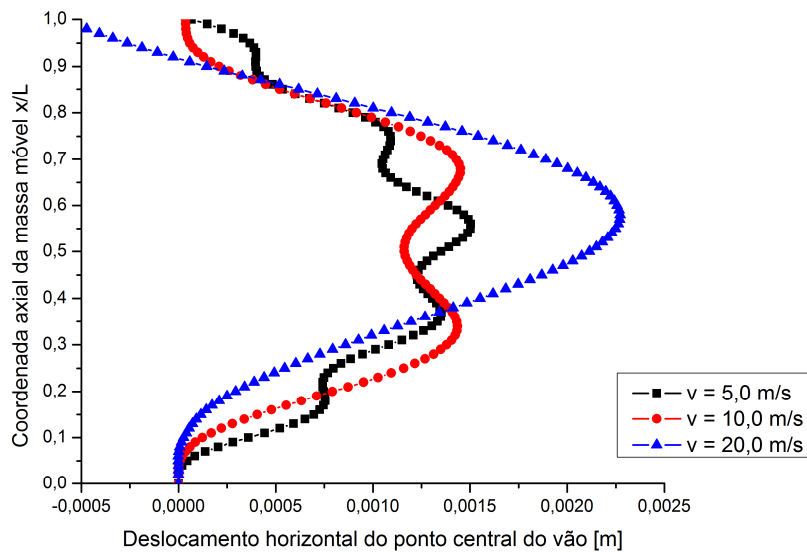


Figura 37 – Deslocamento horizontal obtido pela formulação proposta para a viga inclinada do exemplo de Wu (2005)

Destaca-se que os resultados obtidos pela formulação numérica proposta apresenta resultados muito próximos dos obtidos na referência, como pode ser observado nas Figs. 36 e 37. Uma

pequena diferença é observada nas respostas, quando a massa móvel ultrapassa a coordenada axial equivalente a $x/L = 0,9$.

7.4.2 - Segundo exemplo numérico: Massa móvel em cabos

O exemplo que será reproduzido para validação do problema de massa móvel aplicado em cabos foi extraído de Wang e Rega (2010) onde se analisa um cabo com o perfil definido pela parábola:

$$y(x) = 4bx \frac{(l-x)}{l^2} \quad (7.37)$$

Onde b é a flecha máxima e l é o vão. O exemplo é definido pelas seguintes propriedades: área da seção transversal $A = 1,175 \times 10^{-3}$ m; massa por unidade de comprimento $m = 9,7$ kg/m; módulo de elasticidade $E = 147$ GPa; vão do cabo $l = 500$ m; flecha máxima do cabo $b = 15$ m. Para este exemplo é considerada uma massa móvel $M = 100$ kg percorrendo o cabo com uma velocidade de 25 m/s.

Em Wang e Rega (2010) é definido o parâmetro adimensional $\beta = M/ml$, para o qual são obtidos os valores do deslocamento em um ponto no centro do vão, conforme apresentado na Fig. 38, para uma velocidade da massa móvel de 25 m/s. Nota-se nos resultados obtidos em Wang e Rega (2010), algumas oscilações para o deslocamento no ponto central do vão, sendo mais significativas no início e término do percurso da massa móvel. A expectativa para esses deslocamentos é que ocorram sem as oscilações apresentadas na Fig. 38. Tais oscilações são características de problemas envolvendo osciladores móveis (Fig. 12) conforme desenvolvimentos apresentados em Frýba (1999) e Sofi e Muscolino (2007).

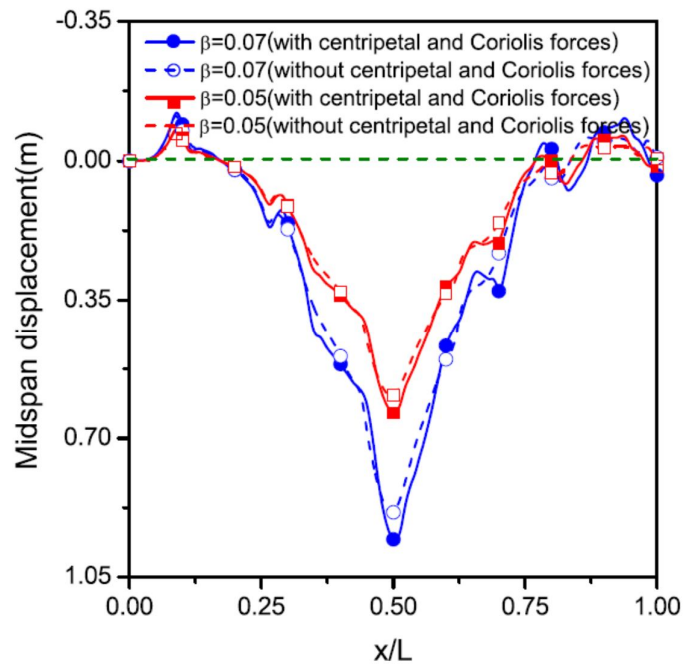


Figura 38 – Deslocamento no centro do vão para cabo suspenso (Fonte: Wang e Rega, 2010)

Utilizando a formulação proposta nesta dissertação foram obtidos os resultados apresentados na Fig. 39. Nota-se que os resultados obtidos pela formulação proposta nesta dissertação não apresentam as oscilações observadas na Fig. 38.

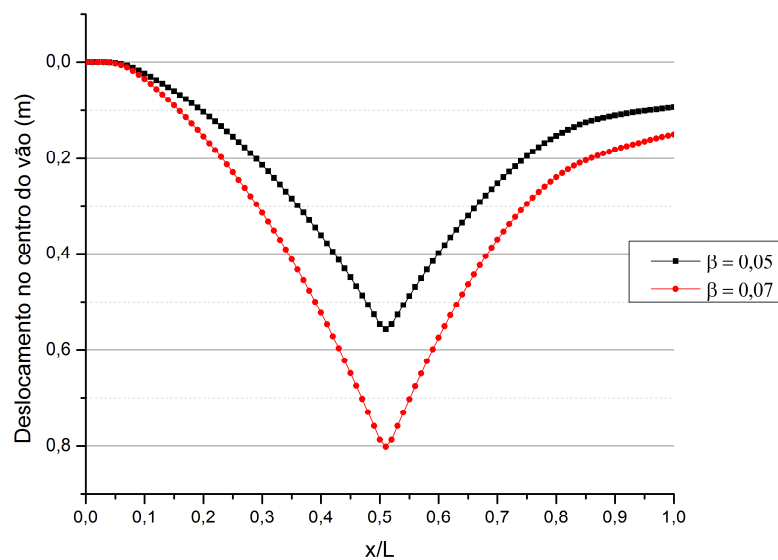


Figura 39 – Deslocamento no centro do vão para o exemplo de Wang e Rega (2010)

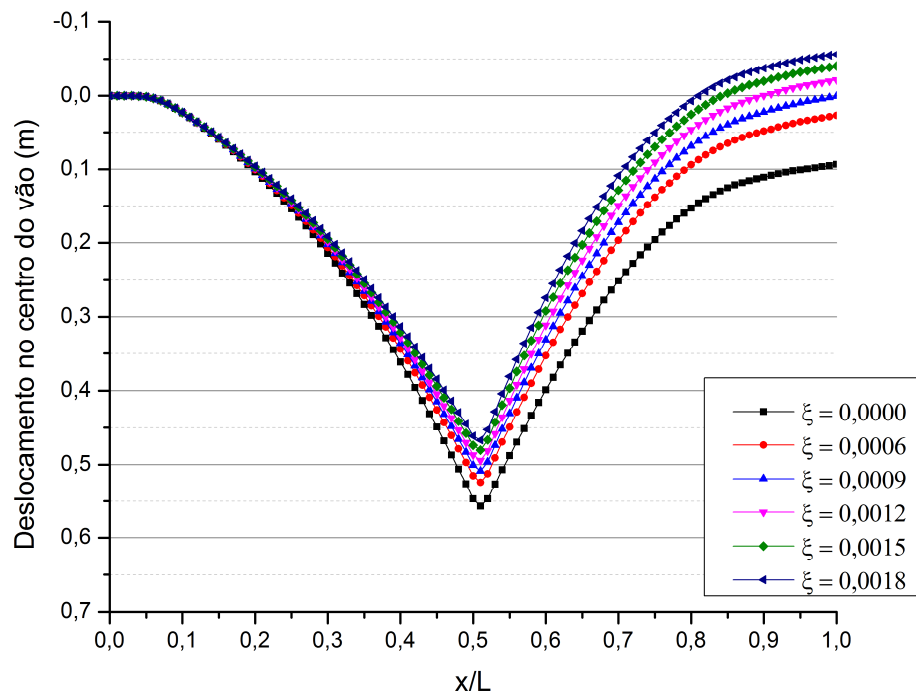


Figura 40 – Influência da taxa de amortecimento no deslocamento para o exemplo de Wang e Rega (2010)

A divergência dos resultados obtidos pela formulação proposta com os resultados encontrados em Wang e Rega (2010) provavelmente está relacionada com o método de solução adotado pelos autores que utilizaram o método de Galerkin com uma forma linearizada e funções aproximadoras baseadas em séries de senos. Outra divergência observada ocorre quando a massa termina seu percurso e o deslocamento no centro do vão apresenta um valor maior que o encontrado em Wang e Rega (2010).

Ao contrário de problemas de massas móveis em vigas, problemas envolvendo cabos são mais complexos na obtenção de solução, pois são influenciados com maior intensidade por diversos parâmetros do sistema que podem em muitos casos provocar instabilidade numérica dependendo do tipo de método e implementação utilizados. Com o objetivo apenas de mostrar essa influência, na Fig. 40 é apresentada uma comparação do deslocamento no centro do vão para $\beta = 0,05$, velocidade de 25 m/s e diferentes valores de amortecimento.

Como o problema analisado envolve um alto grau de não linearidade e, além disso, apresenta uma matriz de massa variável em cada instante de tempo é impossível definir uma frequência natural do sistema por métodos matemáticos e assim determinar uma taxa de amortecimento.

Entretanto, como o objetivo aqui não é analisar a taxa de amortecimento real e nem a frequência natural real, serão adotadas medidas linearizadas, apenas para facilitar o entendimento, calculadas da seguinte forma:

A rigidez será calculada por:

$$k = \frac{EA}{L} \quad (7.38)$$

onde L é o comprimento indeformado do cabo. No cálculo da massa, não será considerado a influência da massa móvel, sendo dada por:

$$m = \rho AL \quad (7.39)$$

Com as Eqs. (7.38) e (7.39), é possível definir uma frequência natural dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.40)$$

O amortecimento crítico é dado por:

$$c_c = 2m\omega \quad (7.41)$$

E a taxa de amortecimento é expressa por:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (7.42)$$

Com os resultados apresentados na Fig. 40, verifica-se que uma taxa de apenas 0,06% provoca uma alteração considerável no deslocamento no centro do vão quando a massa termina seu percurso ($x/L = 1,0$). Portanto, a mínima alteração de natureza dissipativa na solução apresentada em Wang e Rega (2010) pode contribuir com as divergências observadas

quando se comparam os dois resultados. Além de que em Wang e Rega (2010) não é relatado se foi ou não utilizado algum valor de amortecimento.

Com o apresentado nesta seção e pelos exemplos resolvidos, considera-se comprovado e validado a metodologia proposta nesta dissertação, possibilitando, assim, o desenvolvimento das análises que serão apresentadas no capítulo de Resultados.

8

RESULTADOS

8.1 - Introdução

Com a formulação desenvolvida e validada nos capítulos anteriores, é possível analisar as características dos problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e vigas. As características desses sistemas devem ser bem compreendidas para aperfeiçoar os projetos e as aplicações em engenharia.

Os projetos estruturais envolvem o conhecimento de como a estrutura se comporta quando submetida a diversas variações de solicitações externas, como por exemplo, variações de massa, de velocidade, de frequência da solicitação, entre outras variações de caráter externo. Além desse conhecimento, é também muito interessante o conhecimento de como algumas alterações nas características internas da estrutura influenciam seu comportamento global, o que possibilita melhorar a resposta global do sistema estrutural com algumas pequenas alterações de características internas.

Com o objetivo de aprofundar esse conhecimento sobre o comportamento de cabos e vigas solicitados por massas móveis, nas próximas seções são apresentadas as análises de problemas envolvendo cabos suspensos em um vão e dois vãos solicitados por uma única massa móvel percorrendo com velocidade constante e variável ou duas massas móveis percorrendo com velocidade constante. Também serão apresentadas algumas análises envolvendo vigas e uma análise elastoplástica com o objetivo de verificar o comportamento dinâmico quando o limite elástico é ultrapassado.

8.2 - Cabos submetidos a massas móveis

Os cabos suspensos serão analisados para diferentes configurações geométricas conforme apresentado na Fig. 41:

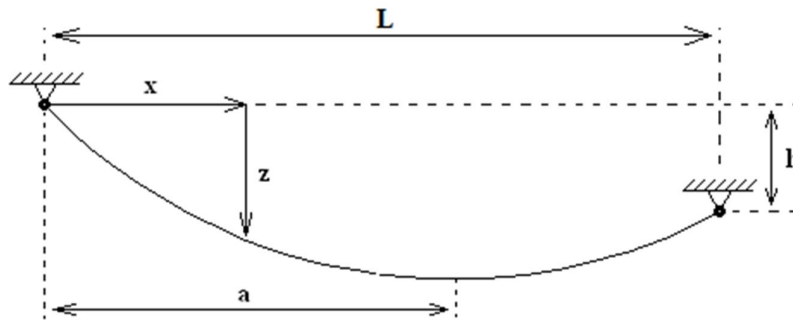


Figura 41 – Desenho esquemático do cabo suspenso analisado

A partir da Fig. 41, as configurações são definidas por: Cabo horizontal para $h = 0$ e cabo inclinado para $h \neq 0$. Uma terceira configuração é o Cabo reto, que é a consideração de que o cabo não apresenta flecha e apresenta protensão inicial.

Conforme apresentado na seção 3.3, as análises serão desenvolvidas para cabos com perfil parabólico, segundo a Eq. (3.21):

$$z(x) = -\frac{1}{2C_1}(x^2 - 2ax) \quad (3.21)$$

Essa equação é a mesma definida em Wang e Rega (2010), considerando um cabo horizontal no qual $a = l/2$ e $z(x = l/2) = b$:

$$z(x) = \frac{4bx}{l^2}(l - x) \quad (8.1)$$

Serão apresentadas tanto análises adimensionais quanto dimensionais quando necessário para melhor compreensão. Para as análises adimensionais serão consideradas as propriedades:

comprimento do vão $l = 1,0$; módulo de elasticidade $E = 1,0$; área da seção transversal $A = 1,0$; densidade de massa $\rho = 1,0$; flecha máxima $b = -0,125$. Para o cabo inclinado será considerado um desnível de $h = 0,1$. No caso do cabo reto a deformação inicial será $\varepsilon_{inicial} = 0,0001$. Em todas as análises o amortecimento numérico definido no algoritmo α -HHT será $\alpha = -0,0001$.

Os exemplos serão discretizados em 100 elementos e utilizados 500 passos de tempo que é um valor razoável para obter resultados tanto para uma resposta em vibração forçada (durante o percurso da massa ao longo do cabo) quanto uma resposta em vibração livre (tempo após a massa finalizar seu percurso).

A velocidade da massa será considerada como uma fração da velocidade de propagação de onda no cabo dada pela Eq. (8.2):

$$c = \sqrt{\frac{N}{m}} \quad (8.2)$$

Onde N é a tensão de tração no cabo e m é a sua massa. Para análise adimensional a velocidade de propagação da onda coincide com a velocidade de propagação de uma onda longitudinal definida pela Eq. (8.3):

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.3)$$

8.2.1 - Um vão

- Uma massa com velocidade constante

- Influência da velocidade da massa móvel

A velocidade da massa móvel tem uma importante contribuição nas forças de inércia do sistema e na interação dinâmica entre o cabo suspenso e a massa. Entretanto, os resultados obtidos mostram que o aumento da velocidade da massa móvel provoca uma diminuição dos

deslocamentos verticais. Tal fenômeno também é observado em Wang e Rega (2010). Para mostrar essa influência, as Figs. 42, 43 e 44 apresentam a trajetória da massa nos cabos horizontal, inclinado e reto, respectivamente, para velocidades constantes da massa variando de $0,2c$ a $1,0c$.

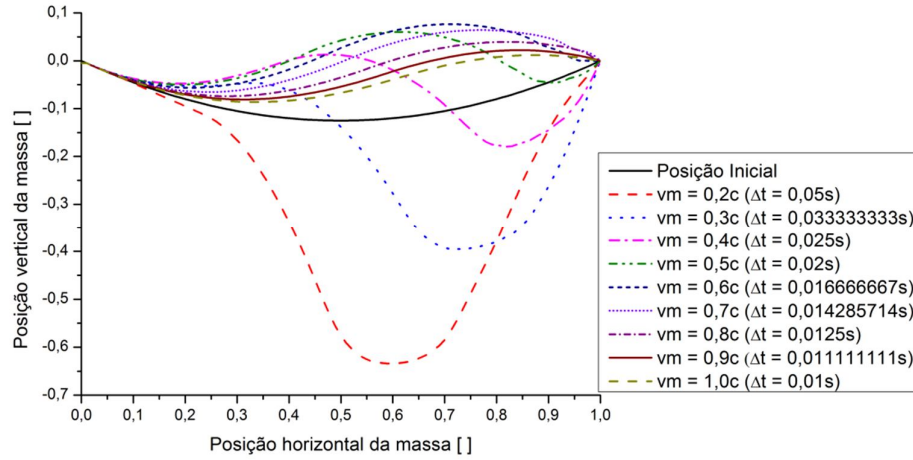


Figura 42 – Trajetória da massa móvel no cabo suspenso horizontal

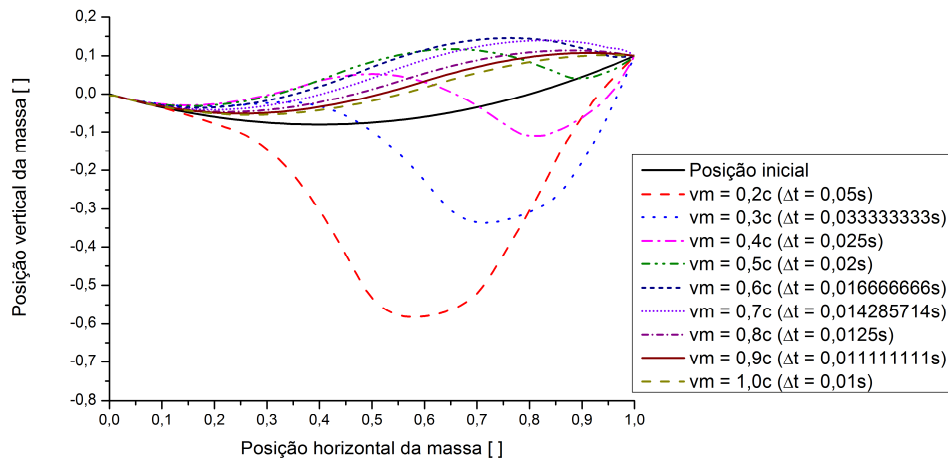


Figura 43 – Trajetória da massa móvel no cabo suspenso inclinado

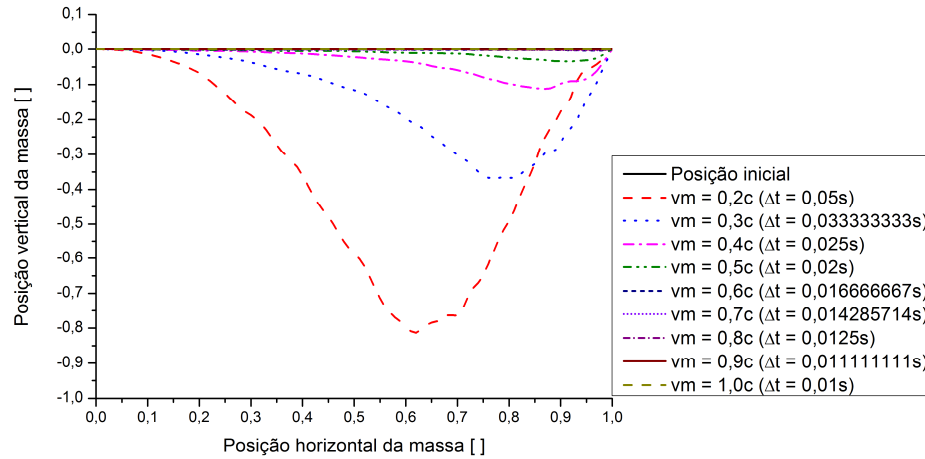


Figura 44 – Trajetória da massa móvel no cabo reto

As Figs. 42 e 43 mostram ainda que para velocidades da massa superiores a 0,5c os deslocamentos são menores que a posição inicial do cabo.

➤ Influência do valor da massa móvel

A influência do valor da massa móvel é apresentada nas Figs. 45 e 46, para os cabos horizontal e inclinado, respectivamente. Nos gráficos das Figs. 45 e 46 são mostrados os deslocamentos verticais no centro do vão em função de um tempo adimensional, definido pela Eq. (8.4):

$$t^* = \frac{t}{NPT * \Delta t} \quad (8.4)$$

Onde NPT é o número de passos de tempo. Para o tempo adimensional t^* , definem-se dois intervalos de respostas:

$$\begin{cases} t^* \leq 0,2 & \Rightarrow \text{vibração forçada} \\ 0,2 < t^* \leq 1,0 & \Rightarrow \text{vibração livre} \end{cases} \quad (8.5)$$

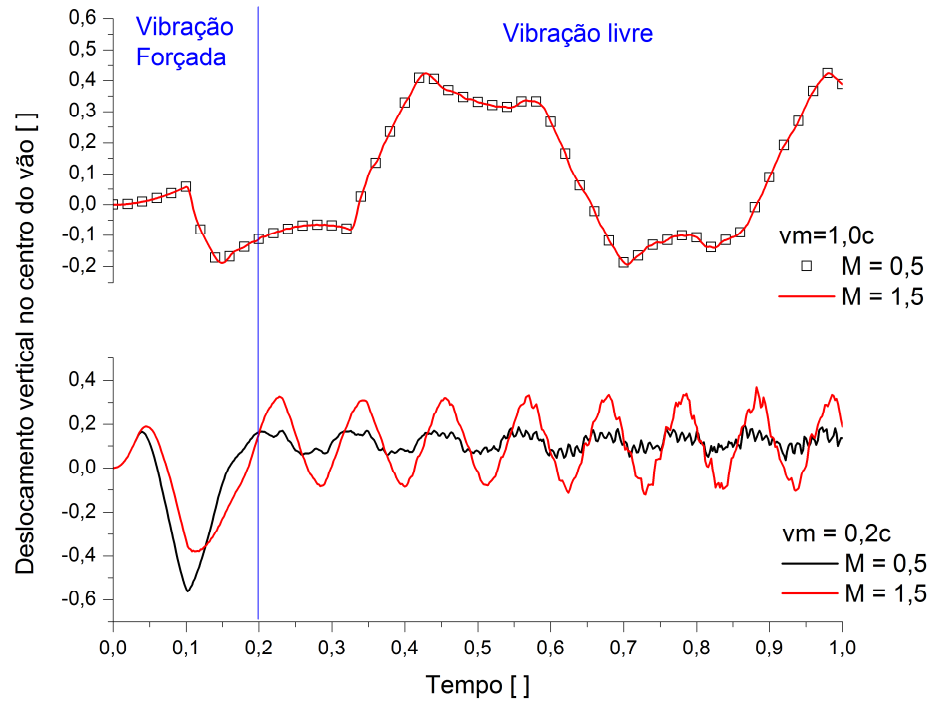


Figura 45 – Influência do valor da massa no deslocamento vertical do cabo horizontal

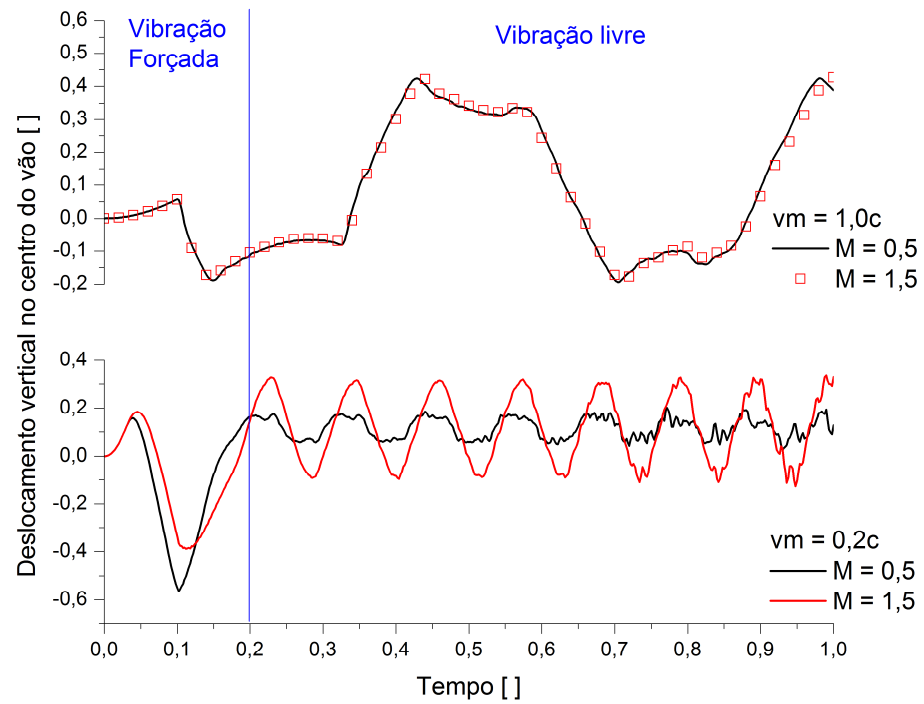


Figura 46 – Influência do valor da massa no deslocamento vertical do cabo inclinado

Como pode ser observado nas Figs. 45 e 46, para baixas velocidades da massa móvel a influência da variação da massa é mais acentuada que para altas velocidades, sendo que as diferenças entre o cabo inclinado e horizontal apresentados são mínimas. Além disso, é possível observar, para massa com velocidade baixa, que o aumento da massa provoca uma pequena diminuição dos deslocamentos durante a vibração forçada e inverte durante a vibração livre, provocando um aumento desses deslocamentos, sendo estes ainda menores que os deslocamentos observados no intervalo de tempo menor que 0,2.

A influência da variação do valor da massa na força normal no último elemento da discretização dos cabos é apresentada na Fig. 47 para o cabo horizontal e na Fig. 48 para o cabo inclinado.

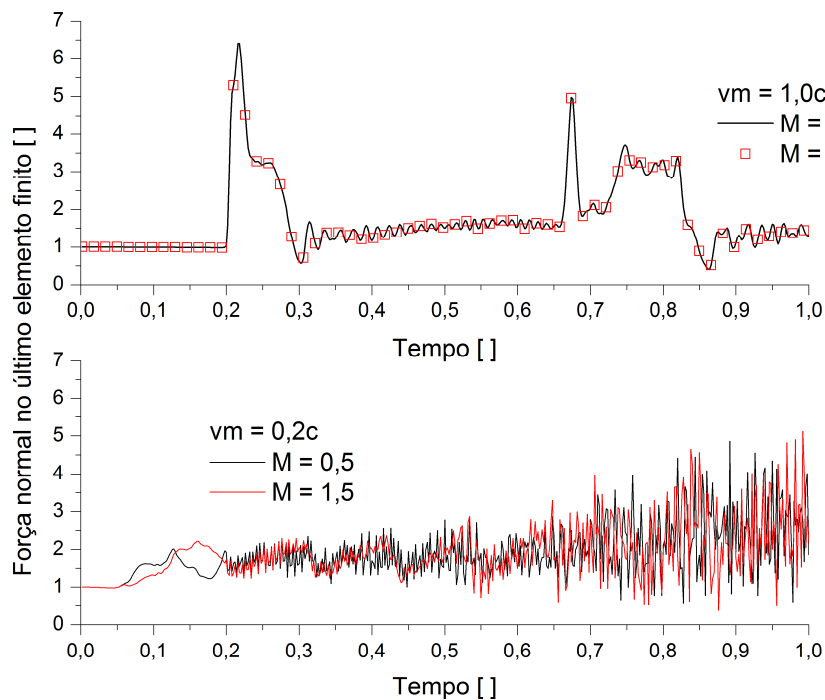


Figura 47 – Influência da massa na força normal para o cabo horizontal

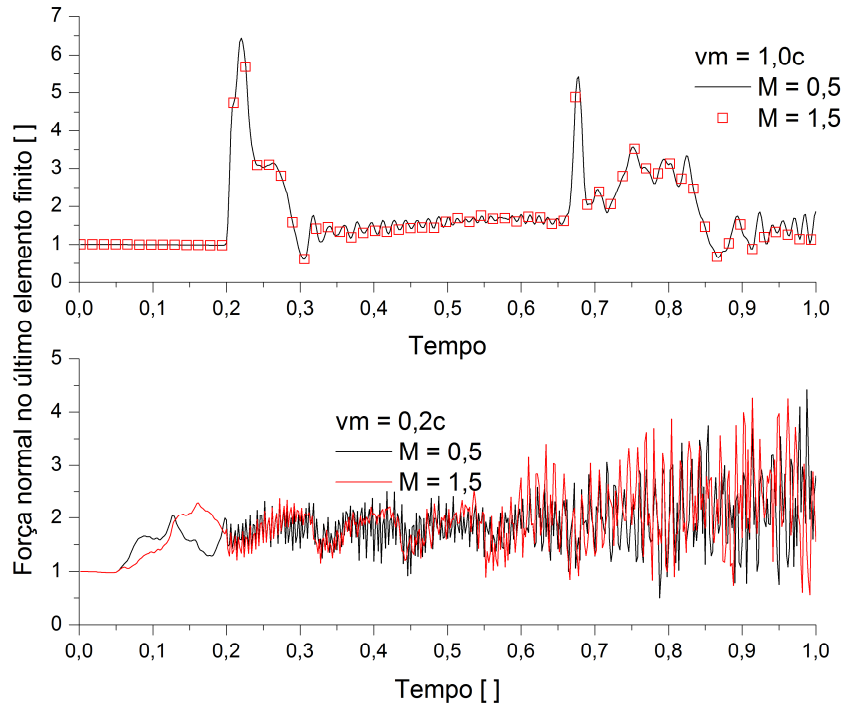


Figura 48 – Influência da massa na força normal para o cabo inclinado

Observa-se que a variação da massa não provoca variações na força normal quando a massa se move com velocidade alta, mas provoca variações quando a massa se move com velocidade baixa. A variação da força normal em velocidade baixa é mais significativa durante o percurso da massa, onde o aumento da massa provoca um aumento de quase duas vezes quando a massa está próxima do final do seu percurso.

➤ Influência da força vertical

As Figs. 49 e 50 apresentam a influência do valor da força vertical para ambos os cabos horizontal e inclinado, respectivamente.

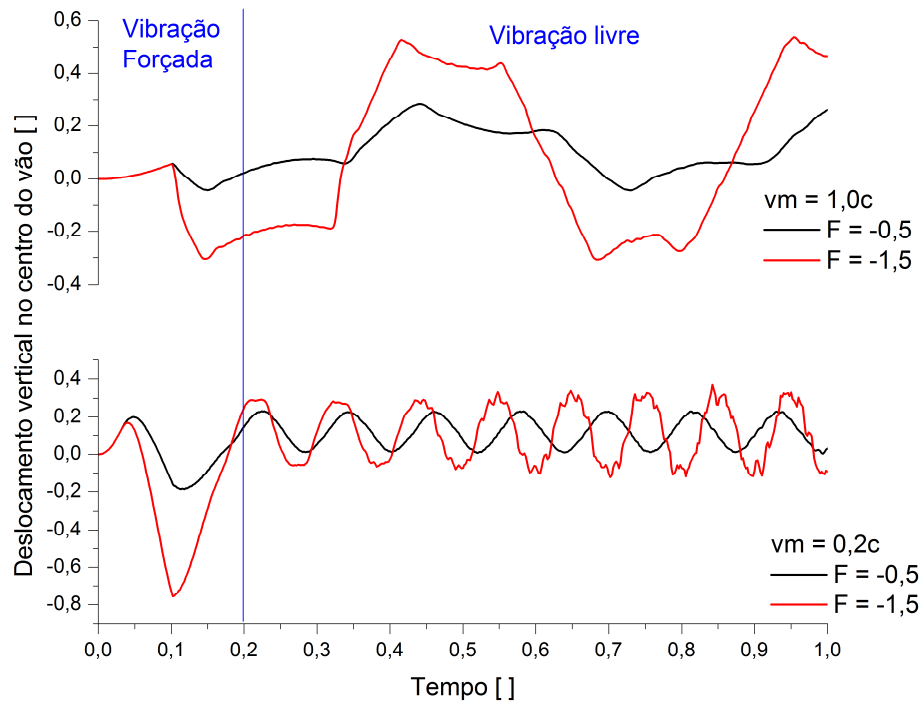


Figura 49 – Influência da força vertical no deslocamento para o cabo horizontal

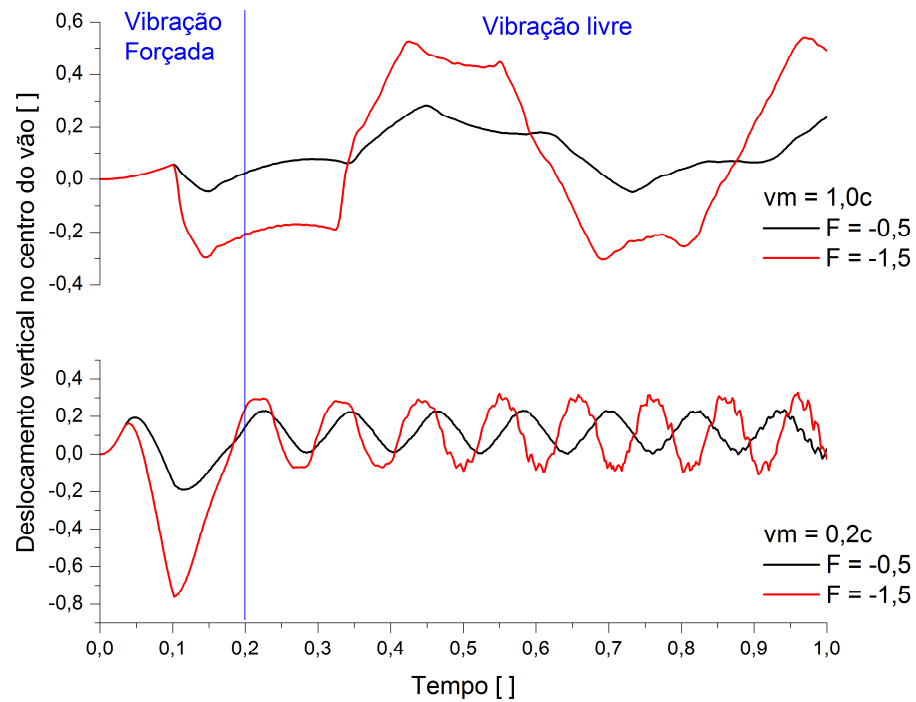


Figura 50 – Influência da força vertical no deslocamento para o cabo inclinado

Como esperado, o aumento da força vertical, independente da velocidade, provoca um aumento dos deslocamentos verticais dos cabos.

As Figs. 51 e 52 apresentam a influência da variação da força vertical na força normal dos cabos.

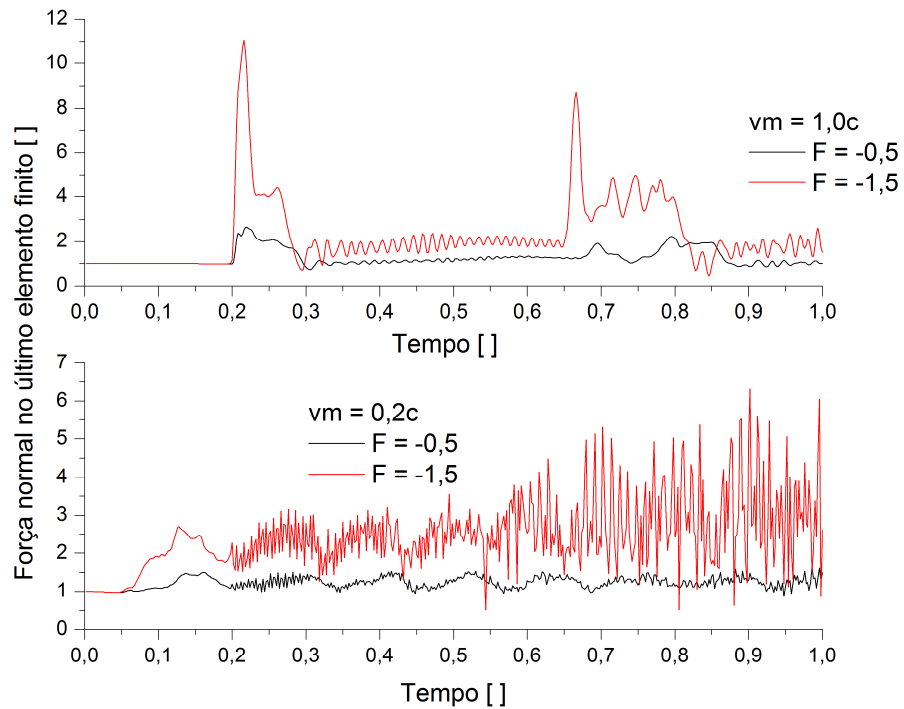


Figura 51 – Influência da força vertical na força normal do cabo horizontal

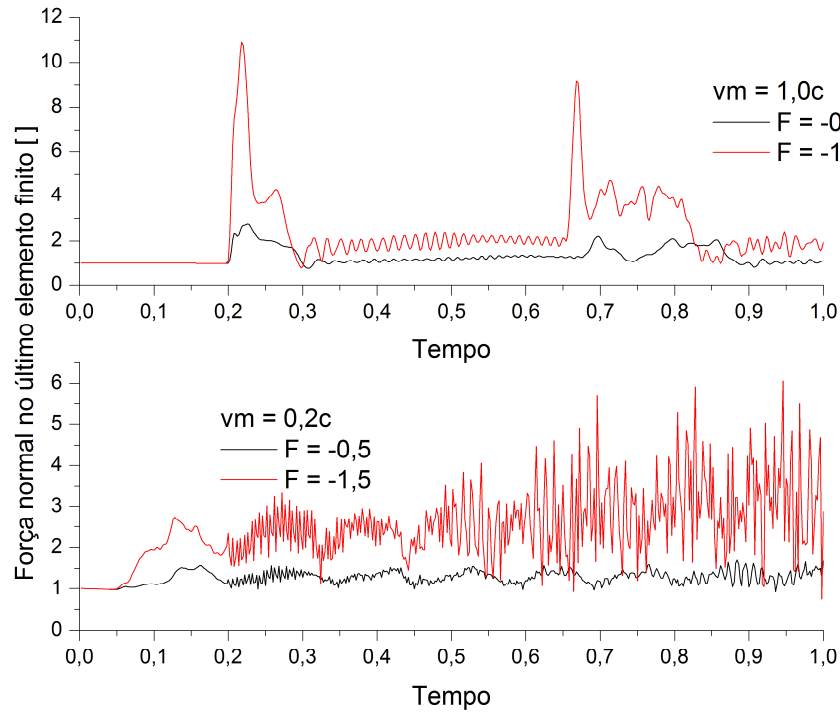


Figura 52 – Influência da força vertical na força normal do cabo inclinado

O aumento da força vertical também contribui para o aumento da força normal nos cabos, independente da velocidade da massa móvel.

- Duas massas com velocidades constantes

➤ Influência da distância (d) entre as massas móveis

Este exemplo será desenvolvido considerando a Fig. 53:

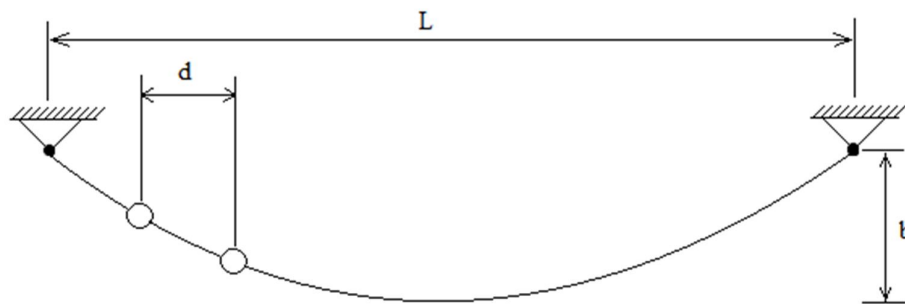


Figura 53 – Exemplo envolvendo duas massas móveis

A distância (d), conforme apresentado na Fig. 53, é uma medida na direção horizontal baseada em L . Será considerada a velocidade de $0,5c$ para análises.

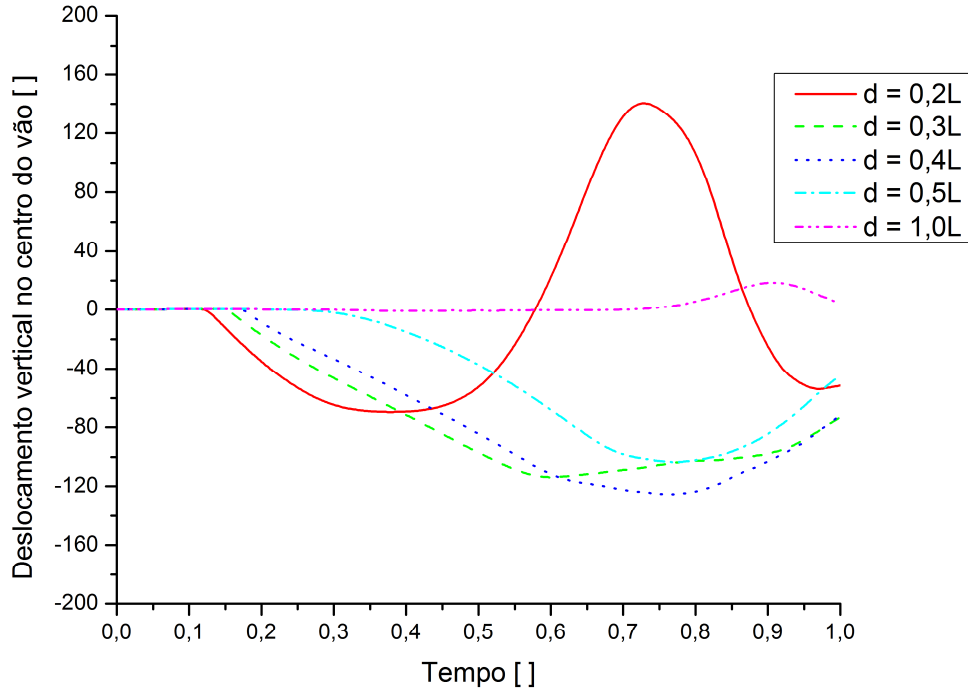


Figura 54 – Efeito da distância entre duas massas móveis no deslocamento vertical de um cabo horizontal

O efeito da distância entre duas massas móveis se movendo com velocidade constante mostrado na Fig. 54 indica que, para distâncias maiores o deslocamento vertical no centro do vão tende a diminuir. Esse comportamento também foi observado em Wang e Rega (2010).

- Uma massa com velocidade variável

O caso envolvendo uma massa móvel com velocidade variável será analisado considerando a velocidade variando com a posição horizontal conforme a Eq. (8.6):

$$v_m = \frac{4}{L}(v_{max} - v_0) \left(1 - \frac{x}{L}\right)x + v_0 \quad (8.6)$$

Onde v_{max} é a velocidade máxima que ocorre no centro do vão e v_0 é a velocidade inicial, que para evitar inconsistência numérica, será definida com um valor diferente de zero. A

velocidade máxima para esta análise será considerada como $1,15v_0$ e $1,5v_0$. A variação da velocidade ao longo do cabo é mostrada na Fig. 55.

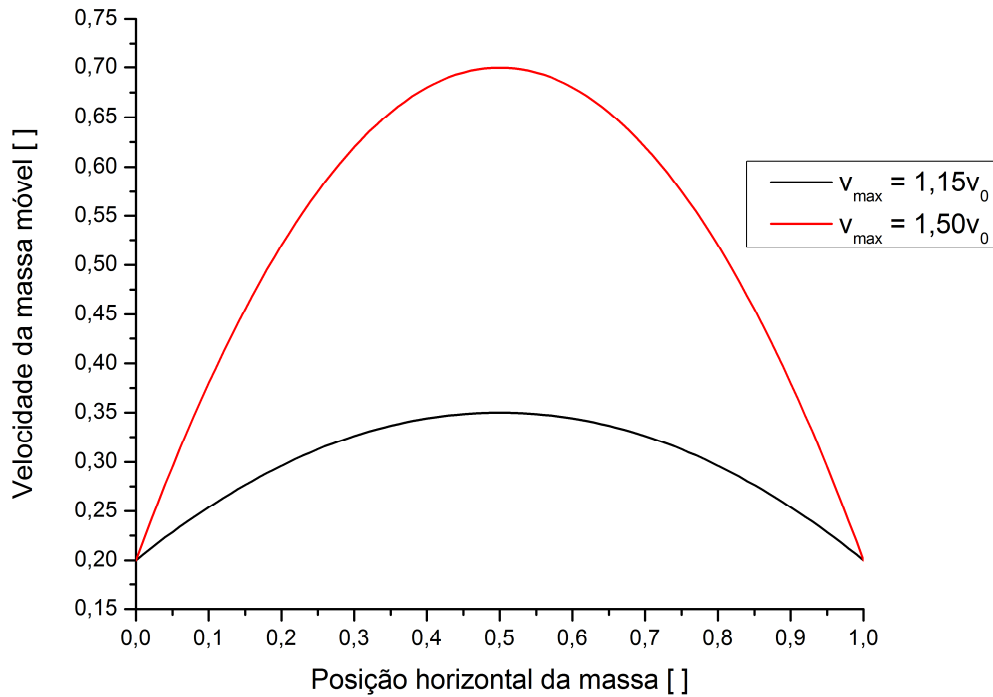


Figura 55 – Velocidade da massa ao longo do comprimento do cabo

Comparando o efeito da velocidade variável da massa ao longo do cabo, é possível notar que ocorre uma diminuição nos deslocamentos durante o percurso da massa, para uma velocidade inicial baixa, e um aumento após a massa terminar seu percurso quando a velocidade máxima aumenta. Com uma velocidade inicial alta, os deslocamentos apresentam uma variação mínima para o mesmo instante de tempo. Esse efeito apresentado na Fig. 56 para cabos inclinados também é observado para cabos horizontais.

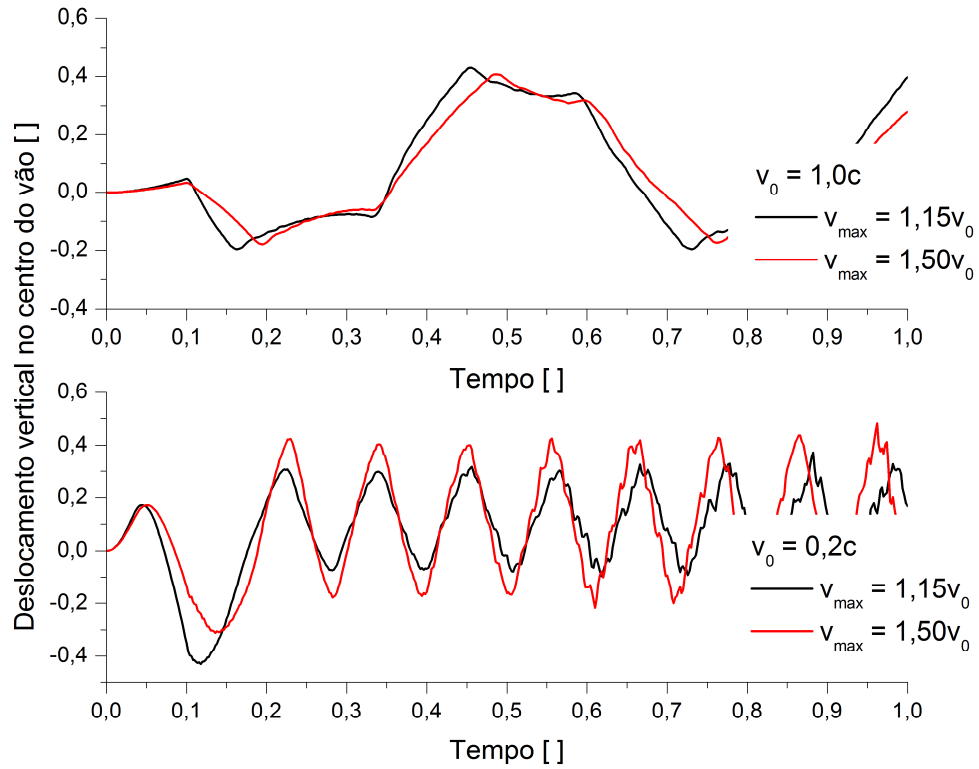


Figura 56 – Efeito da velocidade variável para um cabo inclinado

8.2.2 - Dois vãos

A análise envolvendo dois vãos do cabo será realizada para cabo suspenso entre suportes no mesmo nível. A Fig. 57 mostra o comportamento do cabo durante o percurso da massa móvel.

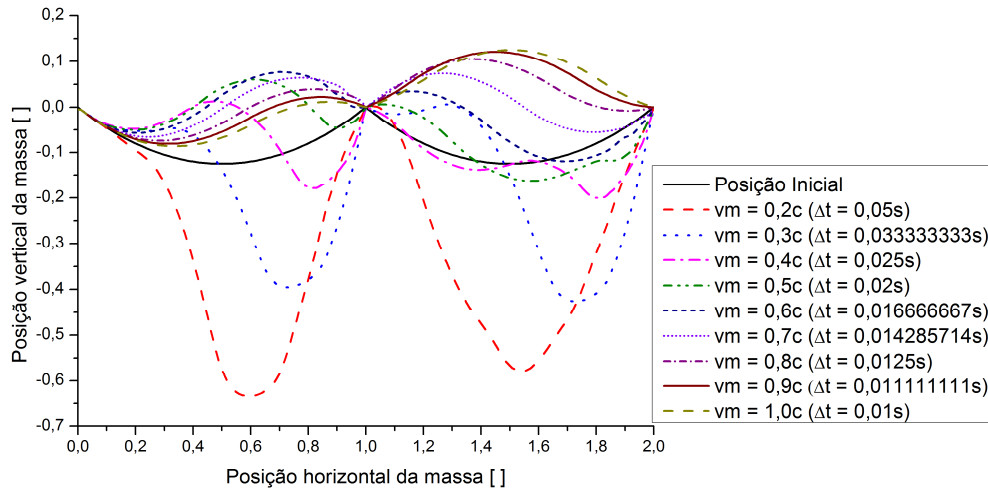


Figura 57 – Trajetória da massa em um cabo suspenso entre três suportes

O comportamento do cabo se altera no segundo vão onde é possível notar que ocorre um aumento dos deslocamentos quando a velocidade ultrapassa os valores intermediários ($v_m \geq 0,6c$).

O deslocamento de um ponto no centro dos dois vãos é mostrado nas Figs. 58, 59 e 60, para velocidades 0,2c; 0,6c e 1,0c respectivamente. Neste caso envolvendo dois vãos, a massa percorre o primeiro vão no intervalo de tempo adimensional $0 < t^* \leq 0,2$ e o segundo vão no intervalo de tempo adimensional $0,2 < t^* \leq 0,4$. No intervalo de tempo $0,4 < t^* \leq 1,0$ o cabo permanece em vibração livre.

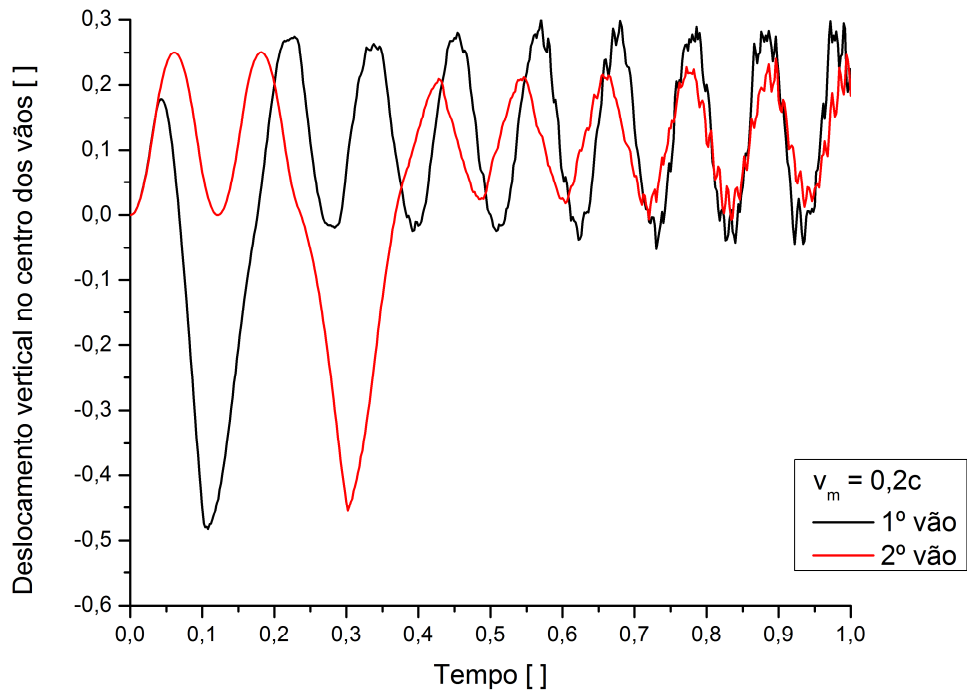


Figura 58 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 0,2c$

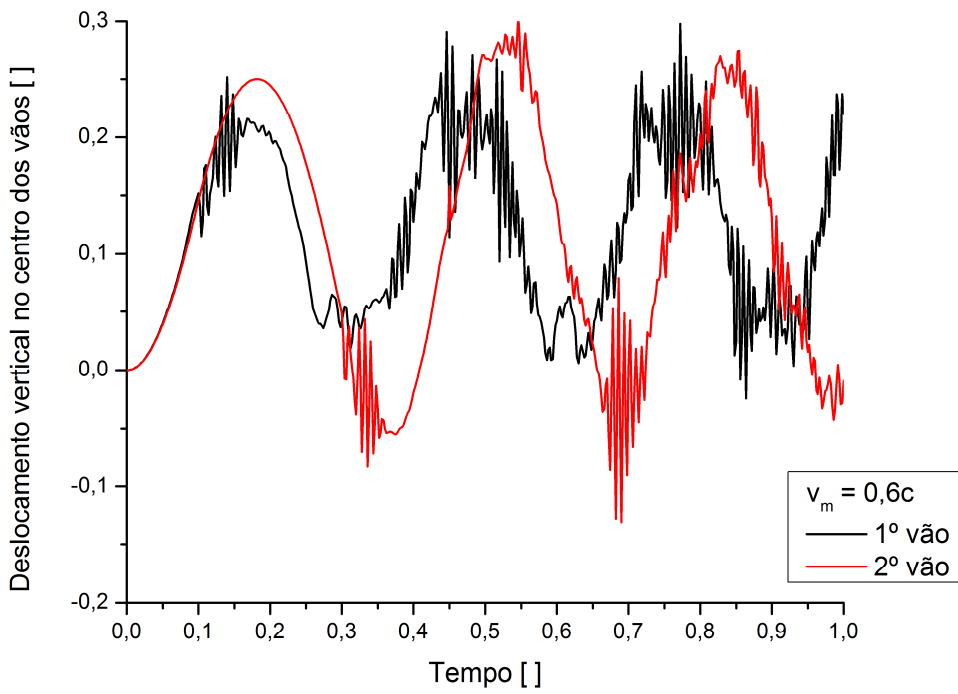


Figura 59 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 0,6c$

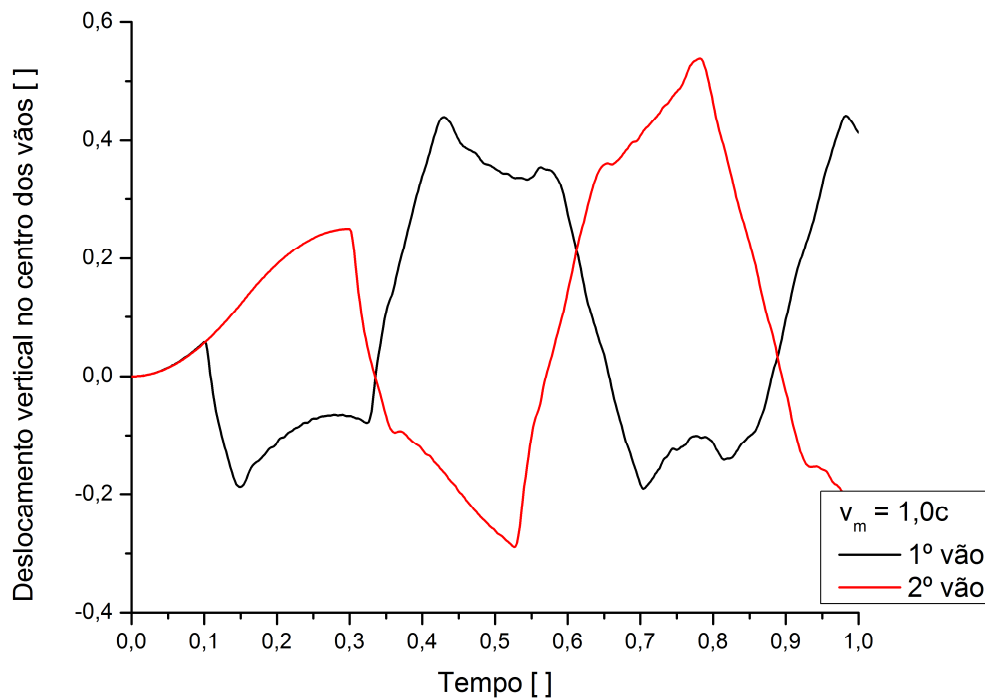


Figura 60 – Deslocamento vertical nos dois vãos para $v_m = 1,0c$

No caso envolvendo dois vãos ocorre um fenômeno bem interessante com o aumento da velocidade da massa móvel, que é o aumento progressivo da resposta no segundo vão com uma respectiva defasagem dessas respostas. Com a massa em baixa velocidade ($v_m = 0,2c$), a resposta na vibração forçada é máxima quando a massa se localiza no ponto central do vão, diminuindo para a massa fora desse ponto e em vibração livre. Em uma velocidade intermediária ($v_m = 0,6c$), a resposta em um vão atinge os máximos mesmo quando a massa está no outro vão. Além disso, essa resposta é independente da situação de vibração forçada ou livre. Para uma velocidade alta ($v_m = 1,0c$) a resposta nos dois vãos está em contra-fase, ou seja, quando atinge um mínimo em um vão a resposta no outro atinge um máximo, ocorrendo valores maiores em vibração livre.

8.3 - Vigas submetidas a massas móveis

A análise de vigas solicitadas por massas móveis será realizada baseando-se no exemplo retirado de Wu (2005), no qual é analisado o comportamento de uma viga com uma inclinação de $\theta = 30^\circ$ e submetida a uma massa móvel de $M = 21,8 \text{ kg}$. Os dados utilizados para este exemplo foram definidos no capítulo de validação da formulação proposta e

repetidos aqui: viga com seção retangular de largura $b = 0,018113$ m e altura $h = 0,072322$ m; comprimento total $L = 4.352$ m; densidade de massa $\rho = 15267,1756$ kg/m³; módulo de elasticidade $E = 2020,797216 \times 10^8$ N/m². Nos gráficos apresentados será adotado o tempo adimensional definido anteriormente, valendo os intervalos da resposta forçada e livre.

A Fig. 61 apresenta a resposta considerando as velocidades de $v = 5$, 10 e 20 m/s analisada em Wu (2005). Essas velocidades foram adotadas visando mostrar o comportamento das vigas em comparação com o comportamento dos cabos. Nota-se que o aumento da velocidade provoca um aumento dos deslocamentos no centro do vão, passando por uma velocidade intermediária que provoca uma diminuição da resposta em vibração livre, ou seja, existe uma velocidade intermediária da massa em que a resposta em vibração livre que os deslocamentos são desprezíveis. Esse comportamento não é observado nos cabos.

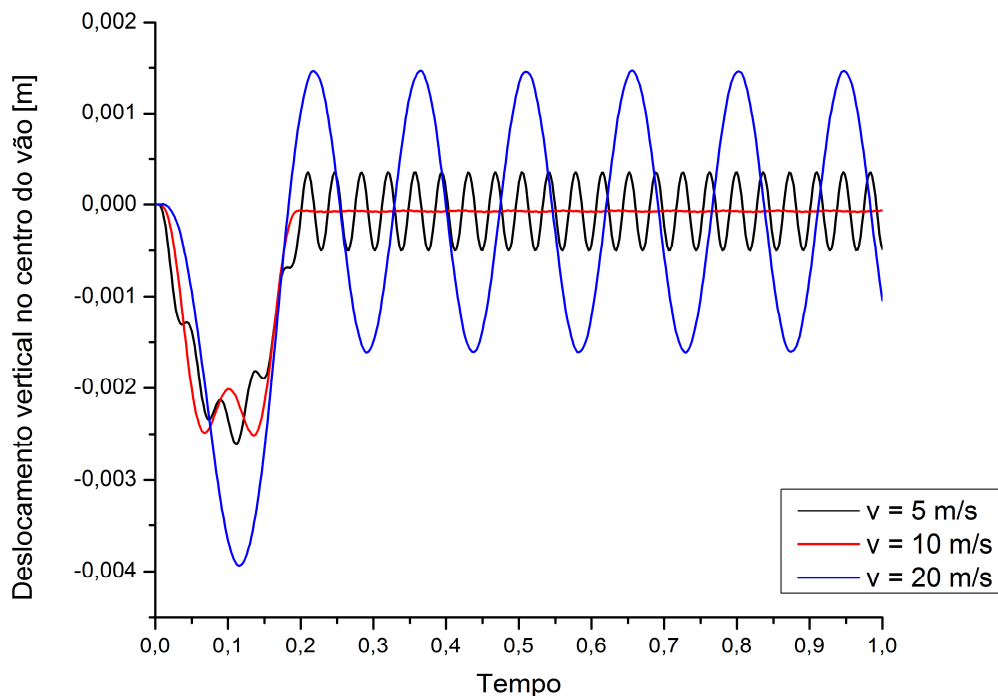


Figura 61 – Deslocamento vertical no centro do vão de uma viga para massas com diferentes velocidades

Na Fig. 62 é apresentada a influência da condição de contorno na resposta da viga para uma velocidade da massa de 5 m/s.

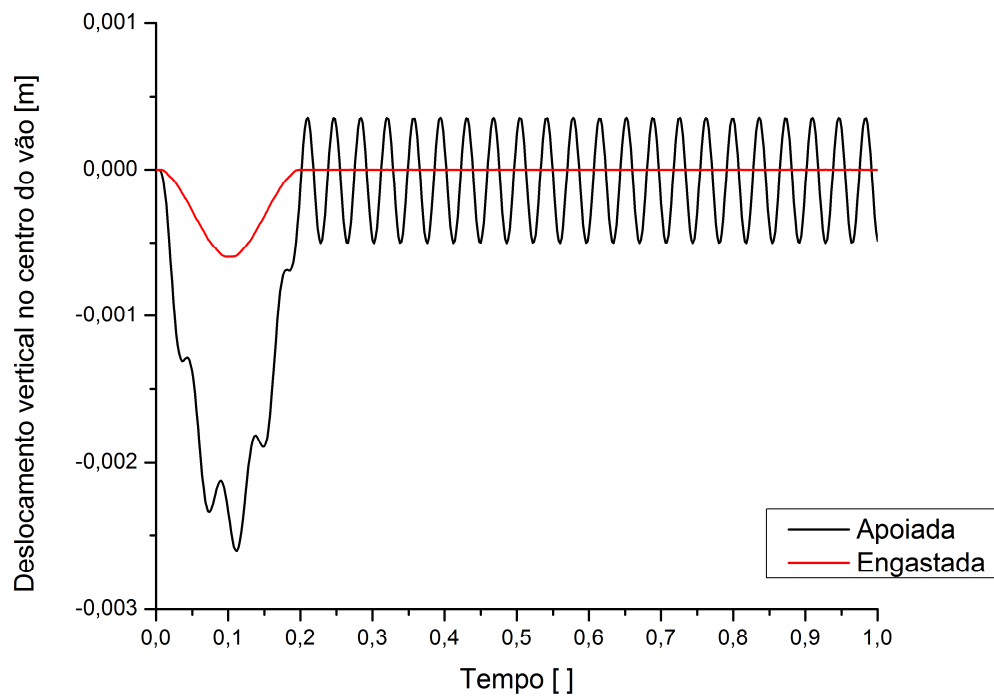


Figura 62 – Influência da condição de contorno no deslocamento da viga

Como esperado, a viga engastada apresenta uma característica mais rígida, onde se verificam deslocamentos menores que para uma mesma viga simplesmente apoiada.

8.4 - Análise Elastoplástica

A análise elastoplástica será realizada para um problema de massa móvel em vigas. Para este exemplo será utilizada a viga inclinada do problema analisado em Wu (2005) com uma velocidade da massa móvel igual a 20 m/s. Além dos dados já informados na seção anterior, define-se o módulo tangente elastoplástico $K = 2020,797216 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ e a tensão de escoamento $\sigma_Y = 350 \text{ MPa}$.

Para avaliar o efeito do encruamento serão consideradas forças variando de 213,858 N a 10692,9 N. Para os exemplos analisados, foi observado que a primeira plastificação ocorreu com um tempo igual a 0,11968 segundos, com uma força igual a 3207,87 N. A Fig. 63 mostra os resultados obtidos, considerando o alongamento axial para o tempo da primeira plastificação e diferentes valores de força aplicada:

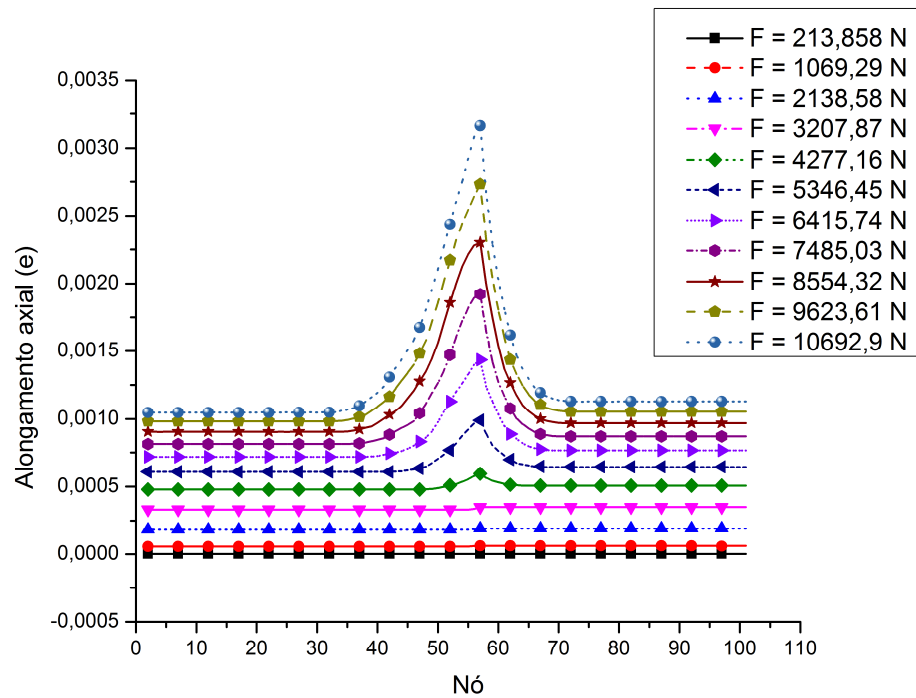


Figura 63 – Plastificação da viga inclinada

A Fig. 63 mostra o alongamento axial calculado em todos os nós. O aumento da força contribui para o aumento proporcional do alongamento axial em todos os nós. Quando a força atinge um valor de 3207,87 N se observa o início da plastificação no nó 57 que aumenta com o aumento da força aplicada. A formulação proposta é capaz de capturar o efeito da plastificação na viga. Esse efeito é evidenciado na Fig. 64, onde é mostrada a deformação calculada para o nó 57.

A variação da tensão normal em função do tempo ao longo da altura da viga é mostrada na Fig. 64. Observa-se o início da plastificação na extremidade superior da viga, como mostrado no detalhe da Fig. 64.

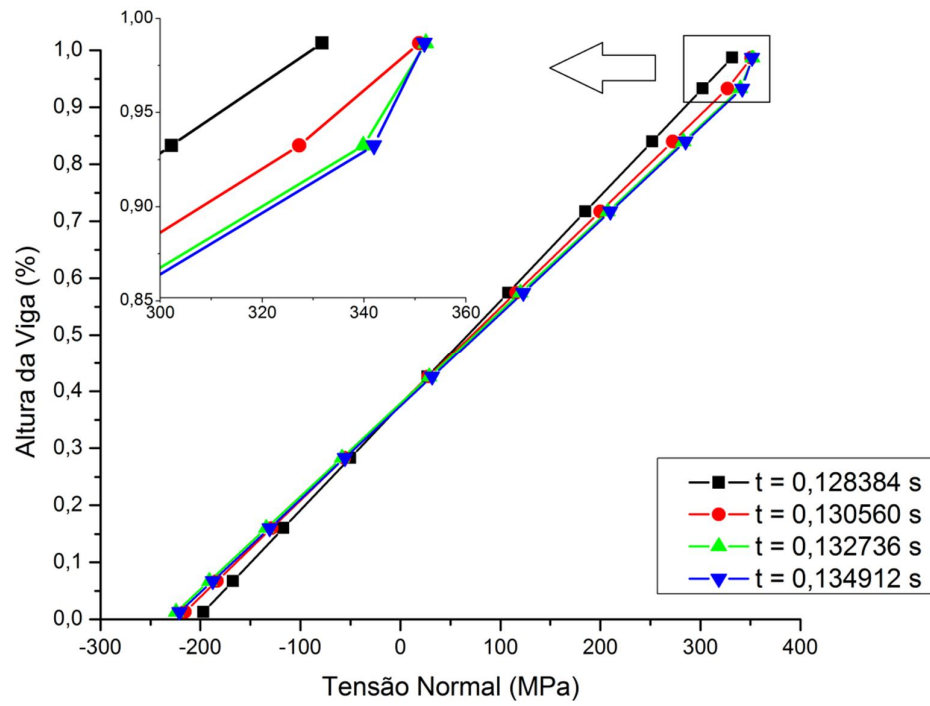


Figura 64 – Variação da tensão normal na seção transversal da viga

9

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formulação numérica proposta apresenta um desenvolvimento mais simples que as formulações convencionais, permitindo análise de problemas complexos como os envolvendo massas móveis com boa precisão. Isto pode ser dito considerando os resultados apresentados na literatura, como o caso de Wang e Rega (2010), Bajer e Dyniewicz (2008), Wu (2005) e Al-Qassab *et al.* (2003).

A influência da velocidade foi investigada tanto para problemas envolvendo massas móveis em cabos quanto em vigas e constatou-se que em cabos ocorre uma tendência de enrijecimento, apresentando deslocamentos menores com o aumento da velocidade como observado nas Figs. 42, 43 e 44. Tal fenômeno também é observado em Wang e Rega (2010) e contradiz a ideia inicial de que o aumento da velocidade contribuiria para o aumento dos deslocamentos. Entretanto, nos problemas de vigas essa ideia é confirmada, ou seja, o aumento da velocidade aumenta os deslocamentos como observado na Fig. 61, porém, é uma tendência que passa por um fenômeno não investigado em Wu (2005), onde ocorre uma diminuição drástica dos deslocamentos quando em vibração livre, para uma velocidade intermediária, fenômeno que não é observado nos cabos.

A influência do valor da massa também é investigada para os cabos, verificando-se que para massa com velocidade de translação alta essa influência é desprezível, porém, em velocidade baixa essa influência é significativa, como pode ser observado nas Figs. 45 e 46. Além disso, foi observado para massa com velocidade baixa, que o aumento da massa provoca uma pequena diminuição dos deslocamentos durante a vibração forçada e inverte durante a vibração livre, provocando um aumento desses deslocamentos, sendo estes ainda menores que

os deslocamentos observados no intervalo de tempo menor que 0,2. Essa influência também é observada na força axial atuante no cabo.

A influência do valor da força vertical também foi avaliada, verificando-se que os deslocamentos e a força axial aumentam com forças verticais maiores, independente da velocidade.

O problema envolvendo duas massas se movendo com velocidade constante também foi analisado. Para esse exemplo, o efeito da distância entre as duas massas móveis no comportamento do cabo foi avaliado e constatou-se que o aumento da distância provoca uma diminuição do deslocamento vertical medido no centro do vão, como mostrado na Fig. 54. Esse comportamento também foi observado em Wang e Rega (2010).

A variação da velocidade da massa ao longo do cabo também foi investigada. Para uma velocidade inicial baixa, verificou-se que o aumento da velocidade máxima provoca uma diminuição dos deslocamentos durante o percurso da massa e um aumento após a massa terminar seu percurso. Essa influência não é verificada quando a velocidade inicial é alta. Esse efeito é mostrado na Fig. 56 para cabos inclinados e é observado para cabos horizontais.

Um fenômeno bem interessante é observado no caso envolvendo dois vãos de cabos horizontais: ocorre um aumento progressivo da resposta no segundo vão com uma respectiva defasagem dessas respostas, com o aumento da velocidade da massa móvel. Com a massa em baixa velocidade ($v_m = 0,2c$), a resposta na vibração forçada é máxima quando a massa se localiza no ponto central do vão, diminuindo para a massa fora desse ponto e em vibração livre. Em uma velocidade intermediária ($v_m = 0,6c$), a resposta em um vão atinge os máximos mesmo quando a massa está no outro vão. Além disso, essa resposta é independente da condição de vibração forçada ou livre. Para uma velocidade alta ($v_m = 1,0c$) a resposta nos dois vãos está em contra-fase, ou seja, quando atinge um mínimo em um vão a resposta no outro atinge um máximo, ocorrendo valores maiores em vibração livre.

Em relação aos problemas envolvendo vigas, as condições de contorno foram avaliadas chegando-se ao que se espera quando se compara uma viga engastada e outra simplesmente apoiada. A viga engastada apresenta uma característica mais rígida, onde se verifica deslocamentos menores que para uma mesma viga simplesmente apoiada, como visto na Fig. 62.

A análise elastoplástica realizada permitiu obter os resultados esperados pela literatura. A Fig. 64 mostra claramente o comportamento elastoplástico isotrópico para a viga, comprovando que, mesmo utilizando uma medida de deformação usualmente considerada para problemas lineares, é possível capturar os efeitos não lineares do modelo de plasticidade isotrópica com a formulação proposta. Na Fig. 64 é possível verificar a plastificação em um ponto na superfície superior da viga.

Em trabalhos futuros, uma análise interessante seria incluir as torres que servem de apoio para os cabos e assim verificar o comportamento delas quando as massas se movem com velocidade constante ou variável. Tendo em vista também que os problemas envolvendo massa móvel em cabos apresentam um comportamento muito instável, e que os estudos neste campo ainda não estão totalmente concluídos, é interessante elaborar uma metodologia de estudos em laboratórios com a finalidade de obter resultados para comprovar os estudos teóricos realizados. Nota-se que na literatura não existem resultados obtidos em laboratórios sendo utilizados na comprovação final dos estudos realizados.

10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADHIKARI, S. *Damping Models for Structural Vibration*. 2000. Dissertation for the Degree Doctor of Philosophy – University of Cambridge, Trinity College, Cambridge.

ALMEIDA NETO, E.S. *Introdução à análise dinâmica de fundações de máquinas*. 1989. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas e Fundações – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

AL-QASSAB, M.; NAIR, S.; O'LEARY, J. Dynamics of an elastic cable carrying a moving mass particle. *Nonlinear Dynamics*, v.33, p.11-32, 2003.

ARGYRIS, J.H.; KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft engineering*, v.26-27, 1954.

ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H.P. *Dynamics of Structures*, Vol.V. Amsterdam: North-Holland, 1991.

BAJER, C.I.; DYNIEWICZ, B. Virtual functions of the space-time element method in moving mass problems. *Computers and structures*, v.87, p.444-455, 2009.

BAJER, C.I.; DYNIEWICZ, B. Space-time approach to numerical analysis of a string with a moving mass. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.76, p.1528-1543, 2008.

BANKS, H.T.; INMAN, D.J. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics*, 1989.

BATHE, K.J. *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BEER, F.T.; JOHNSTON, E.R.; MAZUREK, D.F.; CORNWELL, P.J.; EISENBERG, E.R. *Vector mechanics for engineers: Statics and Dynamics*. 9ed. New York: McGraw Hill, 2010.

BEER, F.T.; JOHNSTON, E.R. *Mecânica vetorial para engenheiros*. 3ed. São Paulo: McGraw Hill, 1980.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W.K.; MORAN, B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester: Wiley, 2000.

BIGGS, J.M. *Introduction to structural dynamics*. New York: McGraw Hill, 1964.

CHRISTENSEN, E.R.; LEE, S.W. Nonlinear finite element modeling of the dynamics of unrestrained flexible structures. *Computers and Structures*, v.23, n.6, p.819-829, 1986.

CHUNG, J.; HULBERT, G.M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. *Journal of applied mechanics*. v.60, p.371-375, 1993.

CHUNG, J.; HULBERT, G.M. A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v.118, p.1-11, 1994.

CIFUENTES, A.O. Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite element in analysis and design*. v.5, p.237-246, 1989.

CODA, H.B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v.193, p.3541-3557, 2004.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. *Concepts and applications of finite element analysis*. 3ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

COSTA, R.S. *Análise inelástica avançada de sistemas estruturais formados por estruturas de cabos e de treliças espaciais visando à aplicação em torres metálicas estaiadas*. 2011. Projeto de Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas (utilizado com autorização). Escola de Engenharia de Estruturas – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American mathematical society*, v.49, p.1-23, 1943.

CRISFIELD, M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Chichester: John Wiley & Sons. 1991, v.1.

DOKAINISH, M.A.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. Explicit methods. *Computers and structures*, v.32, n.6, p.1371-1386, 1989.

DYNIWICZ, B.; BAJER, C.I. Paradox of a particle's trajectory moving on a string. *Archive of Applied Mechanics*, v.79, p. 213–223, 2009.

ELKARANSHAWY, H.A.; DOKAINISH, M.A. Corotational finite element analysis of planar flexible multibody systems. *Computers and structures*, v.54, n.5, p.881-890, 1995.

ERLICHER, S.; BONAVENTURA, L.; BURSI, O.S. The analysis of the generalized- α method for non-linear dynamic problems. *Computational mechanics*, v.28, p. 83-104, 2002.

FERREIRA, I.P. *Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais*. 2009. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *Um primeiro curso em elementos finitos*. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

FLAHERTY, F.T. Transient resonance of an ideal string under a load moving with varying speed. *International journal of solids and structures*, v.4, p.1221-1231, 1968.

FRENCH, D.A. A space-time finite element method for the wave equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.107, p.145-157, 1993.

FRÝBA, L. *Vibration of solids and structures under moving loads*. 3ed. Prague: Thomas Telford, 1999.

GRAFF, K.F. *Wave motions in elastic solids*. Toronto: Oxford University, 2001.

GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. 2004. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

GRECO, M.; CODA, H.B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamics analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v.290, p.1141-1174, 2006.

GRECO, M.; da COSTA, L.J.R. Discussion on “The logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 45 (2009) 632-639] and “Nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 42 (2006) 1079-1086]. *Finite element in analysis and design*, v.52, p.93-95, 2012.

GRECO, M.; da AUNCIACÃO, A.C.; de OLIVEIRA, F.M.; VECCI, M.A.M. Nonlinear analysis of sagged cables with moving masses. *Proceedings of 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering*. Natal, Outubro, 2011.

GRECO, M., FERREIRA, I.P. Logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v.45, p.632-639, 2009.

GRECO, M.; GESUALDO, F.A.R.; VENTURINI, W.S.; CODA, H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.42, p.1079-1086, 2006.

HAN, R.P.S.; LU, J. A space-time finite element method for elasto-plastic shock dynamics. *Journal of sound and vibration*, v.222, p.65-84, 1999.

HILBER, H.M.; HUGHES, T.J.; TAYLOR, R. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.5, p.283-292, 1977.

HOFF, C.; PAHL, P.J. Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.67, p.367-385, 1988.

HOU, L.J.; PETERS, D.A. Application of triangular space-time finite elements to problems of wave propagation. *Journal of sound and vibration*, v.173, p.611-632, 1994.

HUGHES, T.J.R.; HULBERT, G.M. Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.66, p.339-363, 1988.

HULBERT, G.M.; HUGHES, T.J.R. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.84, p.327-348, 1990.

HULBERT, G.; CHUNG, J. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.137, p.175-188, 1996.

HUSSEIN, B.; NEGRUT, D.; SHABANA, A. Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations. *Nonlinear Dynamics*, v.54, p.283-296, 2008.

IRVINE, H. *Cable Structures*. Cambridge: MIT, 1981.

JAMET, P. Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain. *Society for industrial and applied mathematics*, v.15, n.5, p.912-928, 1978.

JOHNSON, C. Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.107, p.117-129, 1993.

KANNINEN, M.F.; FLORENCE, A.L. Traveling forces on strings and membranes. *International journal of solids and structures*, v.3, p.143-154, 1967.

LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*, 4ed. Dover, New York, USA, 1970.

LAVALL, A.C.C. *Uma formulação consistente para análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais*. 1996. Tese de doutorado em Engenharia Civil – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

- LEE, U. Separation between the flexible structure and the moving mass sliding on it. *Journal of Sound and Vibration*, v.209, n.5, p.867–877, 1998.
- LEE, U.; PAK, C.H.; HONG, S.C. The dynamics of a piping system with internal unsteady flow. *Journal of Sound and Vibration*, v.180, n.2, p.297–311, 1995.
- LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3ed. São Paulo: HARBRA, 1994, v.2.
- LEWIS, P.R.; GAGG, C. Aesthetics versus function: the fall of the Dee bridge, 1847. *Interdisciplinary science reviews*, v.29, n.2, p.177–191, 2004.
- LI, X.D.; WIBERG, N.E. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.156, p.211-229, 1998.
- LUONGO A., *Private Communication*, University of L'Aquila, Italy, 2010.
- PAI, P.F.; NAYFEH, A.H. A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures. *Computers and structures*, v.53, n.4, p.877-895, 1994.
- PAULETTI, R.M.O. Sobre cabos e cordas. *I Simpósio nacional sobre tensoestruturas*, São Paulo, 2002.
- RODEMAN, R.; LONGCOPE, D.B.; SHAMPINE, L.F. Response of a string to an accelerating mass. *Journal of Applied Mechanics*, p.675–680, 1976.
- SHABANA, A. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics*, v.16, p.293-306, 1998.
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. *Computational inelasticity*. New York: Springer, 1998.
- SIMO, J.C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions – The plane case: Part I. *Journal of applied mechanics*, v.53, p.849-854, 1986.
- SIMO, J.C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions – The plane case: Part II. *Journal of applied mechanics*, v.53, p.855-863, 1986.
- SOFI, A.; MUSCOLINO, G. Dynamic analysis of suspended cables carrying moving oscillators. *International journal of solids and structures*, v.44, p.6725-6743, 2007.

STOKES, G.G. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v.8, p.707–735, 1849.

STRUT, J.W. *The theory of sound*, 2ed., New York: Dover, 1945.

SUBBARAJ, K.; DOKAINISH, M.A. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – II. Implicit methods. *Computers and structures*, v.32, n.6, p.1387-1401, 1989.

SYNGE, J.L. *The hipercircle in mathematical physics*. London: Cambridge University press, 1957.

TING, E.C.; GENIN, J.; GINSBERG, J.H. A general algorithm for moving mass problem. *Journal of Sound and Vibration*, v.33, n.1, p.49–58, 1974.

TOKLU, Y. Nonlinear analysis of trusses through energy minimization. *Computers and Structures*, v.82, p.1581-1589, 2004.

TRUESDELL, C. The rational mechanics of flexible or elastic bodies. *Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae*, Zürich, Suíça, 1960.

WANG, L.; REGA, G. Modelling and transient planar dynamics of suspended cables with moving mass. *International Journal of Solids and Structures*, v.47, p.2733-2744, 2010.

WOOD, W.L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O.C. An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v.15, p.1562-1566, 1981.

WU, J. Dynamics analysis of an inclined beam due to moving loads. *Journal of sound and vibration*, v.288, p.107-131, 2005.

XU, X.; XU, W.; GENIN, J. A non-linear moving mass problem. *Journal of Sound and Vibration*, v.204, n.3, p.495–504, 1997.

YEN, D.H.Y.; TANG, S.C. On the non-linear response of an elastic string to a moving load. *International journal non-linear mechanics*, v.5, p.465-474, 1970.

YU, K.; ZHAO, J. A time integral formulation and algorithm for structural dynamics with nonlinear stiffness. *Acta Mechanica Sinica*, v.22, p.479-485, 2006.

ZHOU, X.; TAMMA, K.K. Design, analysis, and synthesis of generalized single step single solve and optimal algorithms for structural dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, v.59, p.597-668, 2004.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. *The finite element method*. 5ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. v.2.

APÊNDICE A

DISTINÇÃO ENTRE A ABORDAGEM CONVENCIONAL E A ABORDAGEM POSICIONAL PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A abordagem convencional para o Método dos Elementos Finitos faz o uso de sistemas coordenados locais e globais, conforme a Fig. 65:

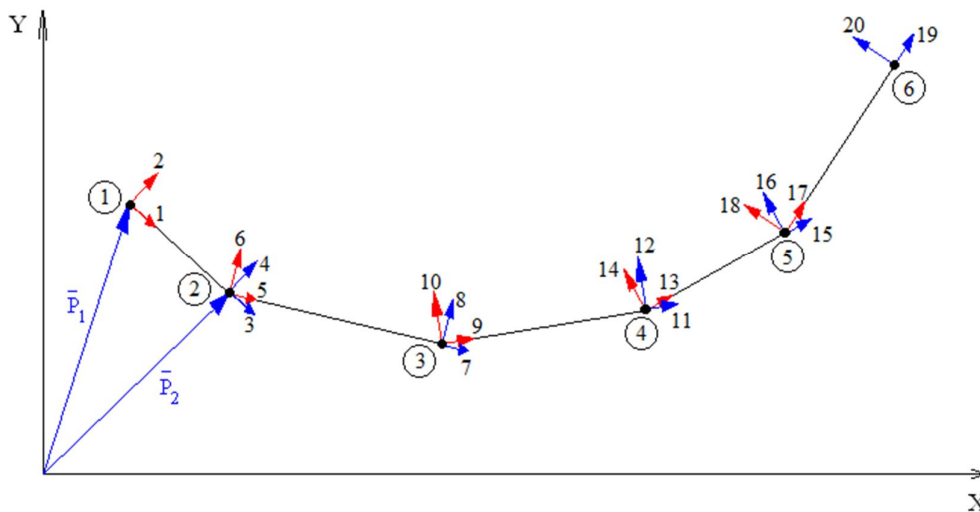


Figura 65 – Representação esquemática do MEF convencional

De acordo com a abordagem convencional do MEF, as equações são discretizadas nos sistemas de coordenadas locais, depois são agrupadas em um sistema global considerando as rotações dos sistemas locais. As equações são solucionadas para a obtenção de um vetor de deslocamentos.

A grande dificuldade da abordagem convencional é observada quando é necessário analisar problemas dinâmicos com as características do desenvolvido nesta dissertação: massa móvel em cabos. O sistema de coordenadas local para problemas desse tipo apresenta uma velocidade angular, gerando fatores complicadores do sistema de equações, como pode ser observado no Apêndice C e relatado em Bajer e Dyniewicz (2009).

A abordagem posicional para o Método dos Elementos Finitos considera apenas um sistema global de posições, conforme a Fig. 66:

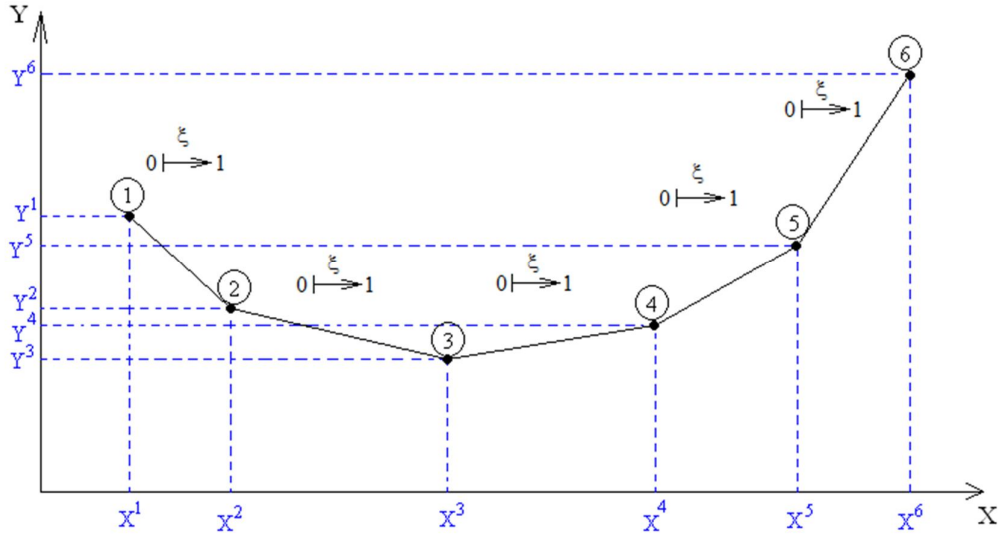


Figura 66 – Representação esquemática do MEF posicional

Nesta abordagem, as equações são discretizadas já no sistema global. A solução desse sistema global gera um vetor de posições.

A utilização dessa abordagem é vantajosa para análise dos problemas proposta nesta dissertação, eliminando as dificuldades que seriam encontradas pela formulação convencional.

- Comparação entre solução pelo Método dos Trabalhos Virtuais, Análise Matricial Linear, Método Posicional Não Linear

Determinação do deslocamento do sistema apresentado na Fig. 67:

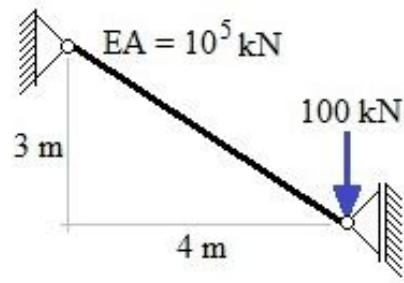


Figura 67 – Sistema para comparação entre os métodos de solução

1) Método dos Trabalhos Virtuais (análise linear)

$$\delta F u^R = \int_x \delta N \frac{N}{EA} dx = \delta N \frac{N}{EA} L \quad (\text{A.1})$$

Onde $N = 500/3 \text{ kN}$, $\delta N = 5/3 \delta F$ e $L = 5 \text{ m}$

$$\delta F u^R = \frac{5\delta F}{3} * \frac{500}{3} * \frac{5}{10^5} \Rightarrow u^R = 0,01389 \text{ m}$$

2) Análise Matricial

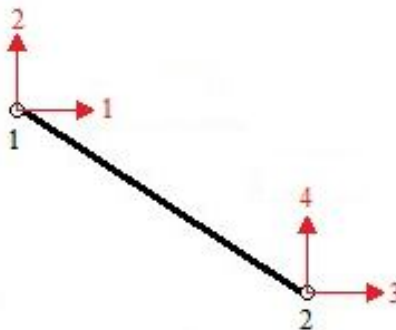


Figura 68 – Sistema de coordenadas locais

Matriz de rigidez local:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Matriz de transformação de coordenadas:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Matriz de Rigidez Global:

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (\text{A.4})$$

Sistema global:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (\text{A.5})$$

1ª Iteração –

$$L = 5$$

$$\cos\theta = 4/5$$

$$\text{sen}\theta = -3/5$$

$$[K] = 2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ 0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$2 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 \\ 0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema tem-se:

$$u_4 = -0,01389 \text{ m}$$

2ª Iteração –

$$L = \sqrt{3,01389^2 + 4^2} = 5,00835$$

$$\cos\theta = 4/5,00835$$

$$\sen\theta = -3,01389/5,00835$$

$$[K] = 19966,655 \begin{bmatrix} 0,63787 & -0,48062 & -0,63787 & 0,48062 \\ -0,48062 & 0,36213 & 0,48062 & -0,36213 \\ 0,63787 & 0,48062 & 0,63787 & -0,48062 \\ 0,48062 & -0,36213 & -0,48062 & 0,36213 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$19966,655 \begin{bmatrix} 0,63787 & -0,48062 & -0,63787 & 0,48062 \\ -0,48062 & 0,36213 & 0,48062 & -0,36213 \\ 0,63787 & 0,48062 & 0,63787 & -0,48062 \\ 0,48062 & -0,36213 & -0,48062 & 0,36213 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema tem-se:

$$u_4 = -0,01383 \text{ m}$$

3) Método Posicional

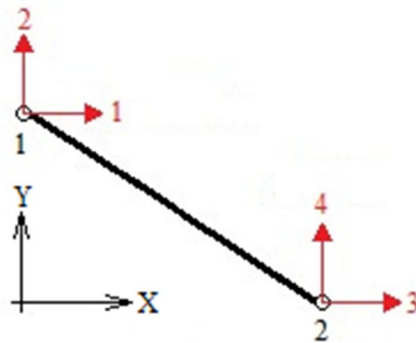


Figura 69 – Sistema de coordenadas para o método posicional

Dados iniciais:

$$X_1 = 0 \quad Y_1 = 3 \quad X_2 = 4 \quad Y_2 = 0 \quad l_0 = 5 \quad P = -100$$

Funcional de energia:

$$\Pi = U - PX_4 \quad (\text{A.6})$$

Equilíbrio do sistema:

$$g(X) = \frac{\partial \Pi}{\partial X_4} = \frac{\partial U}{\partial X_4} - P = 0 \quad (\text{A.7})$$

Solução do sistema:

$$g(X) \cong g(X_0) + \nabla g(X_0) \Delta X = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$g(X_0) = \int_0^1 l_0 u_{,4} d\xi \Big|_{X_0} - P \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla g(X_0) = \int_0^1 l_0 u_{,44} d\xi \Big|_{X_0} \quad (\text{A.10})$$

Procedimento algébrico:

$$\frac{\partial U}{\partial X_4} = \int_0^1 l_0 u_{,4} d\xi \quad (\text{A.11})$$

$$l_0 u_{,4} = \frac{EA}{2l_0} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}} \right) B_{,4} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_4^2} = \int_0^1 l_0 u_{,44} d\xi \quad (\text{A.13})$$

$$l_0 u_{,44} = \frac{EA}{2l_0} \left[\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}} \right) B_{,44} + \frac{l_0 B_{,4} B_{,4}}{2(\sqrt{B})^3} \right] \quad (\text{A.14})$$

Onde $B = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$; $B_{,4} = 2(Y_2 - Y_1)$ e $B_{,44} = 2$

Resultados:

1ª Iteração –

$$B = 25; B_{,4} = -6; l_0 u_{,4} = 0; l_0 u_{,44} = 7200$$

$$g(X_0) = 0 - (-100) = 100$$

$$\nabla g(X_0) = 7200$$

$$\nabla g(X_0) \Delta X = -g(X_0) \Rightarrow \Delta X = -0,01389 \text{ m}$$

$$X_1 = 0 \quad Y_1 = 3 \quad X_2 = 4 \quad Y_2 = -0,01389 \quad l_0 = 5 \quad P = -100$$

2ª Iteração –

$$B = 25,0835262; B_{,4} = -6,0277778; l_0 u_{,4} = -100,4438951; l_0 u_{,44} = 7263,8812858$$

$$g(X_0) = -100,4438951 - (-100) = -0,4438951$$

$$\nabla g(X_0) = 7263,8812858$$

$$\nabla g(X_0) \Delta X = -g(X_0) \Rightarrow \Delta X = 0,00006 \text{ m}$$

$$X_1 = 0 \quad Y_1 = 3 \quad X_2 = 4 \quad Y_2 = -0,01383 \quad l_0 = 5 \quad P = -100$$

4) Comparação entre os resultados do método matricial e método posicional

Tabela 8 – Comparação entre os métodos matricial e posicional

| | Método Matricial, K_{44} | Método Posicional, $\nabla g(X_0)$ |
|--------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Primeira Iteração | 7200 | 7200 |
| Segunda Iteração | 7231 | 7264 |

APÊNDICE B

DEFORMAÇÕES E TENSÕES

A deformação é uma medida que quantifica a variação do comprimento de uma fibra de material submetida a uma sollicitação externa. Essa medida relaciona o comprimento em um instante de tempo após a aplicação da sollicitação (ou comprimento corrigido, l_c) com o comprimento tomado como referência (ou comprimento de referência, l_r). Essa relação pode ser feita de diferentes formas gerando com isso, diferentes medidas de deformação.

A definição dessas diferentes medidas de deformação pode ser feita considerando uma medida de deformação básica, conhecida como estiramento, λ :

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (\text{B.1})$$

Com a definição dada pela Eq. (B.1), uma família de medidas de deformação pode ser definida através da Eq. (B.2):

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{(\lambda^m - 1)}{m} & \text{para } m \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

De acordo com o valor de m , as medidas de deformação são denominadas e definidas por:

- Deformação quadrática ou de Green-Lagrange ($m = 2$):

$$\varepsilon_G = \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_r^2} \quad (\text{B.3})$$

- Deformação linear, técnica ou de engenharia ($m = 1$):

$$\varepsilon_N = (\lambda - 1) = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (\text{B.4})$$

- Deformação natural, logarítmica ou de Hencky ($m = 0$):

$$\varepsilon_L = \ln(\lambda) = \ln\left(\frac{l_c}{l_r}\right) \quad (\text{B.5})$$

➤ Deformação hiperbólica ou de Reiner ($m = -1$):

$$\varepsilon_H = 1 - \lambda^{-1} = \frac{l_c - l_r}{l_c} \quad (\text{B.6})$$

➤ Deformação de Almansi ($m = -2$):

$$\varepsilon_A = \frac{(1 - \lambda^{-2})}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_c^2} \quad (\text{B.7})$$

As taxas de deformação são determinadas derivando-se a Eq. (B.2) em relação ao tempo:

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{d\varepsilon_m}{dt} = \lambda^{m-1} \dot{\lambda} \quad (\text{B.8})$$

Utilizando a Eq. (B.1) e sabendo que $\dot{\lambda} = \dot{l}_c/l_r$, a Eq. (B.8) pode ser reescrita na forma da Eq. (B.9):

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^m \frac{\dot{l}_c}{l_c} \quad (\text{B.9})$$

Pela definição da taxa instantânea de deformação, $\dot{d} = \dot{l}_c/l_c$, independente da configuração de referência, a Eq. (B.9) é expressa por:

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^m \dot{d} \quad (\text{B.10})$$

No caso de pequenas deformações é considerado que $\lambda \cong 1$ e, neste caso, todos os membros das famílias de deformações e taxas de deformações representadas, respectivamente, pelas Eqs. (B.2) e (B.10) se confundem.

Medidas de deformação e tensão conjugadas energeticamente

Para uma análise consistente é necessário que as medidas de deformações e tensões sejam conjugadas energeticamente, ou seja, o par de medidas de tensão e deformação que ao se integrar o produto da tensão pela taxa de deformação em todo o volume da fibra fornece a

energia interna total. A definição da tensão σ_m conjugada com a deformação ε_m dada pela Eq. (B.2) é feita igualando a potência dos esforços externos com a potência dos esforços internos.

O trabalho dos esforços externos (N), por unidade de volume de referência (V_r), é calculado pela Eq. (B.11):

$$W = \frac{N(l_c - l_r)}{V_r} \quad (\text{B.11})$$

Portanto, a potência é determinada por:

$$\dot{w} = \frac{N}{V_r} \dot{l}_c \quad (\text{B.12})$$

Utilizando a definição da taxa instantânea de deformação e sabendo que $l_c = V_c/A_c$, a Eq. (B.12) pode ser reescrita:

$$\dot{w} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \dot{d} \quad (\text{B.13})$$

Onde $\sigma_c = N/A_c$ é a tensão de Cauchy. A potência dos esforços internos é dada pela Eq. (B.14):

$$\dot{w} = \sigma_m \dot{\varepsilon}_m \quad (\text{B.14})$$

Igualando as Eqs. (B.13) e (B.14), tem-se que:

$$\sigma_m = \lambda^{-m} \frac{V_c}{V_r} \sigma_c = \lambda^{-m} \sigma_{KT} \quad (\text{B.15})$$

Onde σ_{KT} é a definição da tensão de Kirchhoff-Treffz:

$$\sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \quad (\text{B.16})$$

Utilizando a definição da tensão de engenharia dada pela Eq. (B.17):

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (\text{B.17})$$

A família de tensões conjugadas com ε_m , pode ser expressa por:

$$\sigma_m = \lambda^{1-m} \sigma_N \quad (\text{B.18})$$

Portanto, de acordo com m , as tensões são denominadas e definidas por:

- Segunda tensão de Piola-Kirchhoff ($m = 2$): Tensão conjugada com a deformação de Green-Lagrange ou quadrática.

$$\sigma_G = \lambda^{-1} \sigma_N = \lambda^{-2} \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \lambda^{-2} \sigma_c \quad (\text{B.19})$$

- Tensão de engenharia ou nominal ($m = 1$): Tensão conjugada com a deformação linear ou de engenharia.

$$\sigma_N = \lambda^{-1} \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \lambda^{-1} \sigma_c \quad (\text{B.20})$$

- Tensão de Kirchhoff-Treffz ($m = 0$): Tensão conjugada com a deformação logarítmica ou de Hencky.

$$\sigma_L = \lambda \sigma_N = \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \quad (\text{B.21})$$

- Tensão hiperbólica ou de Reiner ($m = -1$): Tensão conjugada com a deformação hiperbólica ou de Reiner.

$$\sigma_G = \lambda^2 \sigma_N = \lambda \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \lambda \sigma_c \quad (\text{B.22})$$

- Tensão de Almansi ($m = -2$): Tensão conjugada com a deformação de Almansi.

$$\sigma_G = \lambda^3 \sigma_N = \lambda^2 \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \lambda^2 \sigma_c \quad (\text{B.23})$$

Derivando-se a Eq. (B.18) em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\sigma}_m = \lambda^{1-m} \dot{\sigma}_N + (1-m) \lambda^{-m} \dot{\lambda} \sigma_N \quad (\text{B.24})$$

Para a hipótese de pequenas deformações, $\lambda \cong 1$, as Eqs. (B.18) e (B.24) passam a ser:

$$\sigma_m \cong \sigma_N \quad e \quad \dot{\sigma}_m \cong \dot{\sigma}_N + (1-m) \dot{\lambda} \sigma_N \quad (\text{B.25})$$

Significando que com a hipótese de pequenas deformações apenas as medidas de tensão se confundem.

Medidas de deformação e tensão no cálculo da energia de deformação

A energia de deformação pode ser calculada pela integral da densidade de energia por unidade de volume conforme a Eq. (B.26):

$$U = \int_V u dV \quad (\text{B.26})$$

Por sua vez, a densidade de energia de deformação por unidade de volume é calculada pela Eq. (B.27):

$$u = \int_{\varepsilon_m} \sigma_m d\varepsilon_m \quad (\text{B.27})$$

A Eq. (B.18) pode ser relacionada com o estiramento, com a tensão de engenharia expressa pela Eq. (B.28), pela Eq. (B.29):

$$\sigma_N = E(\lambda - 1) \quad (\text{B.28})$$

$$\sigma_m = E(\lambda - 1)\lambda^{1-m} \quad (\text{B.29})$$

A derivada da Eq. (B.2) em relação ao estiramento é expressa pela Eq. (B.30):

$$d\varepsilon_m = \begin{cases} \lambda^{m-1} d\lambda & \text{para } m \neq 0 \\ \frac{d\lambda}{\lambda} & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

Substituindo as Eqs. (B.21), (B.29) e (B.30) na Eq. (B.27), tem-se:

$$u = \begin{cases} \int_{\lambda} E(\lambda - 1)\lambda^{1-m}\lambda^{m-1} d\lambda & \text{para } m \neq 0 \\ \int_{\lambda} E(\lambda - 1)\lambda \frac{d\lambda}{\lambda} & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Resolvendo a Eq. (B.31), obtém-se a Eq. (B.32) independente de m :

$$u = \int_{\lambda} E(\lambda - 1)d\lambda = E\left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda\right) \quad (\text{B.32})$$

Portanto, no cálculo da energia de deformação, o emprego de qualquer medida de deformação é viável para uma análise consistente desde que se utilizem os pares conjugados.

APÊNDICE C

FORÇAS APARENTES EM UM SISTEMA DE REFERÊNCIA EM ROTAÇÃO

A definição das forças que surgem em um sistema de referência, conforme apresentado na Fig. 70, será feita baseando-se em Lanczos (1970):

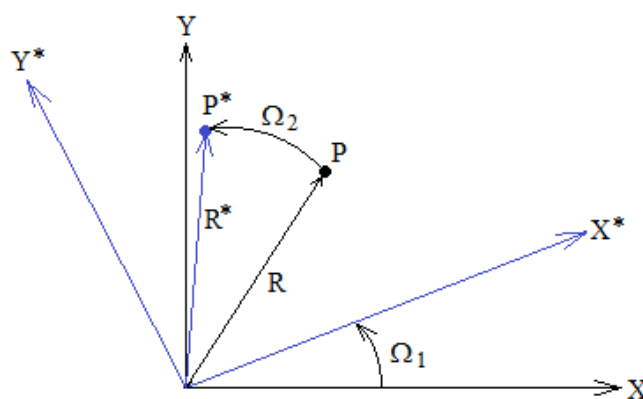


Figura 70 – Sistema de referência com rotação

O sistema S (XY) é um sistema fixo no espaço e o sistema S* (X*Y*) é um sistema móvel, girando com uma velocidade angular Ω_1 em torno do eixo Z. Se ambos os sistemas possuem origem no mesmo ponto do espaço, o raio R e R* no sistema absoluto S e no sistema móvel S* são iguais:

$$R = R^* \quad (C.1)$$

Se as velocidades angulares $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, o vetor R* é constante em S*, porém se observado de S, ele sofre no tempo dt uma variação infinitesimal dada pela Eq. (C.2), por causa da diferença das taxas de variação observadas nos dois sistemas:

$$dR^* = (\Omega \times R^*)dt \quad (C.2)$$

Então, a taxa de variação de R* no tempo medida no sistema fixo S é dada pela Eq. (C.3):

$$\frac{dR^*}{dt} = \Omega \times R^* \quad (\text{C.3})$$

Se essa taxa de variação de R^* for medida no sistema móvel, para o mesmo tempo, tem-se:

$$\frac{d'R^*}{dt} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Sendo que a notação d'/dt se refere à taxa de variação de uma quantidade sendo observada no sistema móvel S^* .

Se por outro lado, o vetor R^* não for constante em S^* , de modo que $d'R^*/dt \neq 0$, então, usando o princípio da superposição de um processo infinitesimal, tem-se que:

$$\frac{dR^*}{dt} = \frac{d'R^*}{dt} + \Omega \times R^* \quad (\text{C.5})$$

Ou seja, a taxa de variação de R^* medida no sistema fixo é a soma da taxa de variação de R^* medida no sistema móvel mais a taxa de variação relativa entre o sistema móvel e o sistema fixo.

A partir da Eq. (C.5) pode-se definir a seguinte relação entre as velocidades V e V^* :

$$V = V^* + \Omega \times R^* \quad (\text{C.6})$$

Para obter, na sequência, a relação entre as acelerações absoluta e relativa A e A^* , basta derivar a equação acima em relação ao tempo, medido no sistema fixo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \times R^* + \Omega \times \frac{dR^*}{dt} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} + \dot{\Omega} \times R^* + \Omega \times \frac{dR^*}{dt}$$

Utilizando a relação da derivada dada pela Eq. (C.8), os termos do lado direito da Eq. (C.7) podem ser expressos em termos de quantidades medidas em S^* :

$$\frac{df}{dt} = \frac{d'f}{dt} + \Omega \times f \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{d'}{dt} + \Omega \times \right) f$$

Portanto:

$$\frac{dV^*}{dt} = \frac{d'V^*}{dt} + \Omega \times V^* \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{dR^*}{dt} = \frac{d'R^*}{dt} + \Omega \times R^* \quad (\text{C.10})$$

Substituindo as Eqs. (C.9) e (C.10) na Eq. (C.7) , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d'V^*}{dt} + \Omega \times V^* + \dot{\Omega} \times R^* + \Omega \times \left(\frac{d'R^*}{dt} + \Omega \times R^* \right) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d'V^*}{dt} + \Omega \times V^* + \dot{\Omega} \times R^* + \Omega \times V^* + \Omega \times (\Omega \times R^*) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d'V^*}{dt} + 2\Omega \times V^* + \Omega \times (\Omega \times R^*) + \dot{\Omega} \times R^*$$

Multiplicando a Eq. (C.11) por $-m$, pode-se expressar a relação entre as duas forças de inércia I e I^* pela Eq. (C.12):

$$I = I^* - 2m\Omega \times V^* - m\Omega \times (\Omega \times R^*) - m\dot{\Omega} \times R^* \quad (\text{C.12})$$

Onde

$-2m\Omega \times V^*$ representa a força de Coriolis;

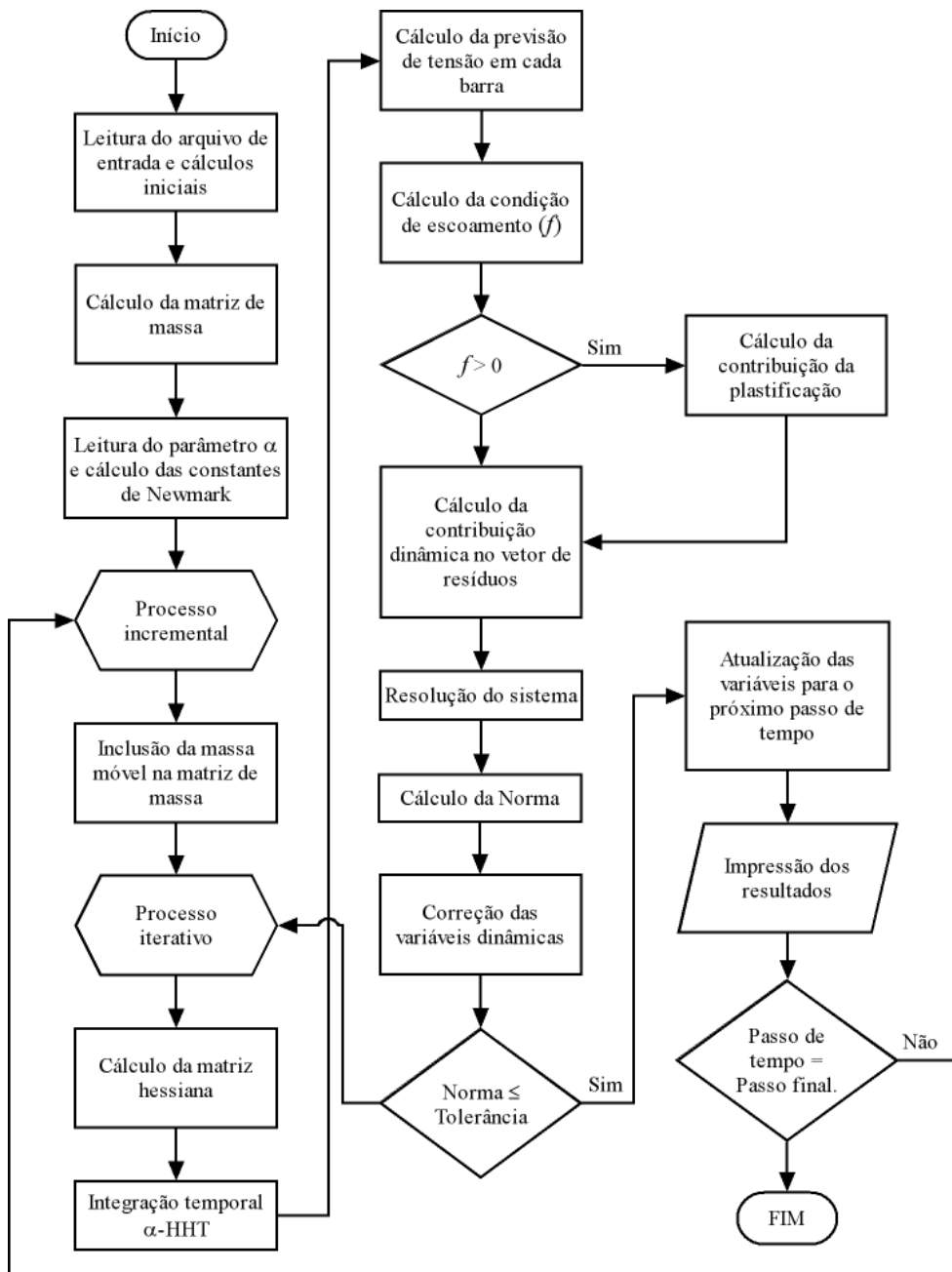
$-m\Omega \times (\Omega \times R^*)$ representa a força centrípeta;

$-m\dot{\Omega} \times R^*$ representa a força de Euler, que só ocorre para uma rotação variável.

APÊNDICE D

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA IMPLEMENTADO PARA ANÁLISE DE MASSAS MÓVEIS

O fluxograma apresenta sucintamente o desenvolvimento das principais ideias utilizadas no programa para análise dos problemas envolvendo massas móveis.



ANEXO

MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO

Para trabalhar a deformação plástica ε_p , é necessário um modelo matemático que seja capaz de descrever o comportamento físico real do material sujeito a uma tensão superior ao limite elástico. O modelo utilizado para os metais e que representa satisfatoriamente o comportamento durante a plastificação ou encruamento é um modelo misto que combina os modelos elastoplásticos isotrópico e cinemático.

Os modelos elastoplásticos isotrópico e cinemático são considerados do tipo taxa-independente (rate-independent), pois as relações tensão-deformação são homogêneas nas taxas de tensão e deformação, ao contrário dos modelos do tipo taxa-dependente (rate-dependent) que apresentam relações não homogêneas. Os conceitos envolvidos nestes dois grupos são diferentes e por isso a identificação correta é necessária (Belytschko *et al.*, 2000).

O desenvolvimento do modelo elastoplástico utilizado neste trabalho será desenvolvido seguindo a metodologia proposta em Simo e Hughes (1998). Os autores começam pela definição de um modelo mais simples, o modelo perfeitamente plástico, e com adição de alguns elementos passam para um modelo intermediário, que é o modelo com encruamento isotrópico e, por fim, com a incorporação de mais alguns elementos, passam ao modelo com encruamento misto, que é a adição das características do modelo com encruamento cinemático.

Modelo perfeitamente plástico

O modelo perfeitamente plástico pode ser claramente entendido como o sistema idealizado da Fig. 71:

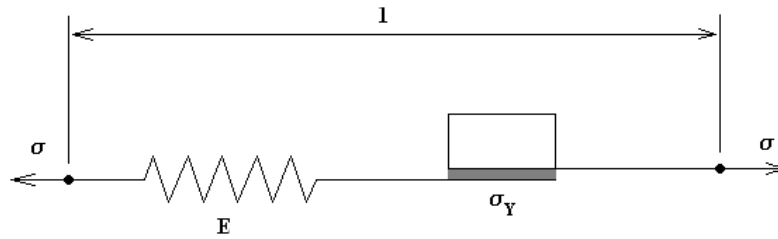


Figura 71 – Idealização do modelo perfeitamente plástico (Fonte: Simo e Hughes, 1998)

O sistema é constituído de uma mola com uma constante elástica (E) e um meio cisalhante com constante $\sigma_Y > 0$. Este sistema é solicitado por uma tensão σ e sofre uma deformação ε (variação do comprimento).

O modelo é desenvolvido baseando-se na possibilidade de separação da deformação total ε em uma parte elástica ε_e e em outra parte plástica ε_p , como também apresentado no capítulo anterior, na forma da Eq. (1):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (1)$$

Portanto, a relação elástica, expressa pela lei de Hooke, apresenta a forma definida pela Eq. (2):

$$\sigma = E\varepsilon_e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2)$$

Algumas características podem ser avaliadas através da análise da resposta mecânica do sistema apresentado:

➤ Resposta cisalhante irreversível

Considerando-se que ε , ε_p e σ são funções do tempo, é possível definir uma taxa de deformação plástica na forma:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} \quad (3)$$

Pela Eq. (3) é possível concluir que qualquer mudança no meio cisalhante só ocorre se $\dot{\epsilon}_p \neq 0$. Isolando o meio cisalhante da Fig. 71, conforme apresentado na Fig. 72, pode-se representar a variação definida pela Eq. (3).

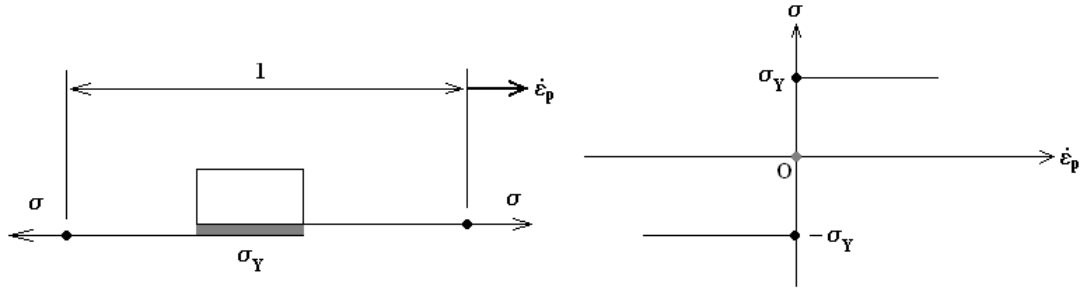


Figura 72 – Meio cisalhante com constante $\sigma_Y > 0$ (Fonte: Simo e Hughes, 1998)

Analisando a Fig. 72, três considerações físicas podem ser feitas:

- 1) A tensão σ no meio cisalhante não pode ser maior em valor absoluto que $\sigma_Y > 0$. Isso significa que as tensões possíveis estão dentro do intervalo fechado $[-\sigma_Y, \sigma_Y] \subset \mathbb{R}$, ou seja:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} | f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y \leq 0\} \quad (4)$$

Onde \mathbb{E}_σ designa um conjunto de tensões possíveis e σ_Y a tensão de escoamento do meio cisalhante. A função $f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y \leq 0$ define a condição de escoamento.

- 2) Se o valor absoluto da tensão σ aplicada é menor que a tensão de escoamento σ_Y , ϵ_p não varia i.e., $\dot{\epsilon}_p = 0$. Esta condição implica:

$$\dot{\epsilon}_p = 0 \quad \text{se} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0 \quad (5)$$

A partir da Eq. (2) e da Eq. (5) tem-se:

$$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (6)$$

E a resposta instantânea do sistema é elástica com constante elástica E .

- 3) Pela consideração (1), estados de tensão σ tal que $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y > 0$ são inadmissíveis e pela consideração (2) $\dot{\varepsilon}_p = 0$ para $f(\sigma) < 0$, então uma variação em ε_p ocorre somente se $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0$. Se isto ocorre, o meio cisalhante experimenta um escorregamento na direção da tensão σ aplicada, com uma taxa de cisalhamento constante, com valor absoluto $\gamma \geq 0$. Essa condição é expressa pelas Eqs. (7) e (8):

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = \sigma_Y > 0 \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}_p = -\gamma \leq 0 \quad \text{se} \quad \sigma = -\sigma_Y < 0 \quad (8)$$

As Eqs. (7) e (8) podem ser escritas em uma forma mais compacta pela Eq. (9):

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad \text{se} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0 \quad (9)$$

Onde $\gamma \geq 0$ é denominada de regra de fluxo e a função $\operatorname{sign}(\sigma)$ é definida como:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (10)$$

O contorno $\partial\mathbb{E}_\sigma$ do conjunto \mathbb{E}_σ , definido pela Eq. (11) é denominado de superfície de escoamento:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y = 0\} \quad (11)$$

A descrição do modelo se torna completa com a determinação da taxa de cisalhamento $\gamma \geq 0$ (ou regra de fluxo), o que envolve as condições essenciais que complementa a noção de irreversibilidade inerente ao modelo apresentado na Fig. 71.

➤ Condições de carregamento/descarregamento

Através das observações anteriores foi mostrado que a avaliação de $\dot{\varepsilon}_p$ pode ser completamente descrita, para qualquer estado de tensões possíveis $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$, com a equação de evolução, Eq. (9):

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad (9)$$

Sendo que a Eq. (9) só é válida desde que γ e σ atendam certas restrições:

- i. Pela consideração (1) σ deve ser possível, i.e., $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$ e pela consideração (3), γ não deve ser negativa. Consequentemente:

$$\gamma \geq 0 \quad e \quad f(\sigma) \leq 0 \quad (12)$$

- ii. Pela consideração (2) $\gamma = 0$ se $f(\sigma) < 0$. Por outro lado, pela consideração (3) $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$ e, portanto, $\gamma > 0$ somente se $f(\sigma) = 0$. Estas observações implicam as condições:

$$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad (13)$$

$$\gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0 \quad (14)$$

Pelas condições representadas pelas Eqs. (13) e (14) conclui-se que é necessário que:

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (15)$$

As condições acima são requisitos físicos e determinam que as tensões devam ser possíveis e que o fluxo plástico, no caso de taxa de deformação plástica diferente de zero ($\dot{\varepsilon}_p \neq 0$), só pode ocorrer na superfície de escoamento $\partial\mathbb{E}_\sigma$. Estas

condições são denominadas condições de Kuhn-Tucker ou condição de complementaridade.

A última condição a ser descrita permite determinar o valor atual de $\gamma \geq 0$ para qualquer tempo t dado e é conhecida como condição de consistência.

- iii. Se $\varepsilon(t)$ e $\varepsilon_p(t)$ são conhecidas para um tempo t , então $\sigma(t)$ é também conhecido para este mesmo tempo t pela relação elástica da Eq. (2). Considerando também que a taxa de deformação total $\dot{\varepsilon}(t)$ é prescrita para o tempo t . Além disso, considerando o caso descrito pela Eq. (16) para o tempo t :

$$\sigma(t) \in \partial \mathbb{E}_\sigma \Leftrightarrow \hat{f}(t) = f[\sigma(t)] = 0 \quad (16)$$

Então, é facilmente demonstrado que $d\hat{f}(t)/dt \leq 0$, uma vez que se $d\hat{f}(t)/dt$ for positivo implicaria que $\hat{f}(t + \Delta t) > 0$ para qualquer $\Delta t > 0$, o que viola a condição de admissibilidade $f(t) \leq 0$. Além disso, especificando que $\gamma > 0$ somente se $d\hat{f}(t)/dt = 0$, e fazendo $\gamma = 0$ se $d\hat{f}(t)/dt < 0$, tem-se a seguinte relação (retirando o circunflexo por comodidade):

$$\gamma > 0 \Rightarrow \dot{f} = 0 \quad (17)$$

$$\dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad (18)$$

Conclui-se, então, que:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (19)$$

A Eq. (19) representa a condição de consistência (ou persistência), que representa o requisito físico de que para $\dot{\varepsilon}_p$ ser diferente de zero (i.e., $\gamma > 0$) o ponto de tensão $\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma$ deve “persistir” em $\partial \mathbb{E}_\sigma$ de modo que $\dot{f}[\sigma(t)] = 0$, ou seja, σ deve permanecer na superfície de escoamento.

➤ Escorregamento cisalhante (fluxo plástico)

Para o modelo com a condição de consistência atendida, a expressão para $\dot{\gamma} > 0$ pode ser determinada pelo uso da regra da cadeia e condições definidas pelas Eqs. (2) e (9):

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\epsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma) \quad (20)$$

Porém,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \quad (21)$$

Consequentemente, ao observar que $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$, as Eqs. (20) e (21) implicam:

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\epsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (22)$$

Substituindo a Eq. (22) na Eq. (9), tem-se:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} \quad \text{para} \quad f(\sigma) = 0, \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (23)$$

O que significa que o escorregamento “plástico” no meio cisalhante é igual à taxa de deformação aplicada. Definindo-se então o modelo perfeitamente plástico.

Subindo um degrau na escada de complexidade dos modelos constitutivos, tem-se o modelo com encruamento isotrópico. A diferença deste modelo para o modelo perfeitamente plástico está relacionada com o domínio do intervalo elástico \mathbb{E}_σ . Para o modelo perfeitamente plástico, \mathbb{E}_σ permanece constante para todo intervalo de tempo e no modelo com encruamento, \mathbb{E}_σ expande na proporção de aumento do fluxo plástico (escorregamento) do sistema (Fig. 73).

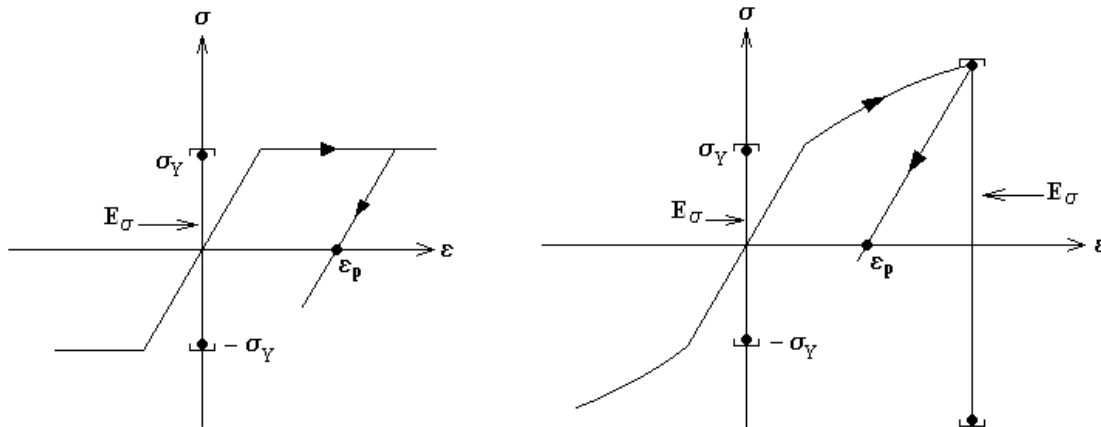


Figura 73 – Comparação entre o modelo perfeitamente plástico (esquerda) com um modelo com encruamento (direita) (Fonte: Simo e Hughes, 1998)

Modelo com Encruamento Isótropo

Neste modelo, a expansão (encruamento) experimentalada por \mathbb{E}_σ obedece a dois requisitos:

- O encruamento é isótropo no sentido de que em qualquer estado de carregamento, o centro de \mathbb{E}_σ permanece na origem;
- O encruamento é linear na parte plástica (i.e., linear em $|\dot{\epsilon}_p|$) e independe de $sign(\dot{\epsilon}_p)$.

Pelo primeiro requisito, a condição de escoamento passa a ser definida pela Eq. (24):

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0; \alpha \geq 0 \quad (24)$$

Onde $\sigma_Y > 0$ e $K \geq 0$ são constantes dadas; K é denominado módulo plástico. A variável α é uma função do tempo, não negativa da quantidade do fluxo plástico, chamada de variável de encruamento interno. Quando $K < 0$ a resposta é de amolecimento.

Considerando a condição (ii) definida no modelo perfeitamente plástico, pode-se expressar a equação de evolução de α por:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_p| \quad (25)$$

O mecanismo irreversível que governa a evolução do escorregamento do sistema (fluxo plástico), que é definido pela regra de fluxo, Eq. (9), permanece inalterado:

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (9)$$

Onde $\gamma \geq 0$ é a taxa com que ocorre o escorregamento. A natureza irreversível do fluxo plástico é novamente capturada por meio das condições de carregamento/descarregamento de Kuhn-Tucker, que agora são expressas por:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (26)$$

Onde $\gamma \geq 0$ é determinada pela condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (27)$$

Essa condição de consistência permite resolver explicitamente para γ e relacionar a taxa de tensão e taxa de deformação. A partir das Eqs. (9), (24) e (25) em conjunto com a relação tensão-deformação elástica, tem-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \text{sign}(\sigma) E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) - K \dot{\alpha} \quad (28)$$

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon} - \gamma [E + K] \leq 0$$

Observando mais uma vez que a relação $\dot{f} > 0$ não pode ocorrer. A partir das Eqs. (26) e (27) segue que γ só pode ser diferente de zero se:

$$f = \dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon}}{E + K} \quad (29)$$

Assim a forma da taxa da relação elástica dada pela Eq. (2) junto com a Eq. (29) pode ser expressa por:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{EK}{E+K}\dot{\varepsilon} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (30)$$

Onde $EK/(E + K)$ é chamado de módulo tangente elastoplástico.

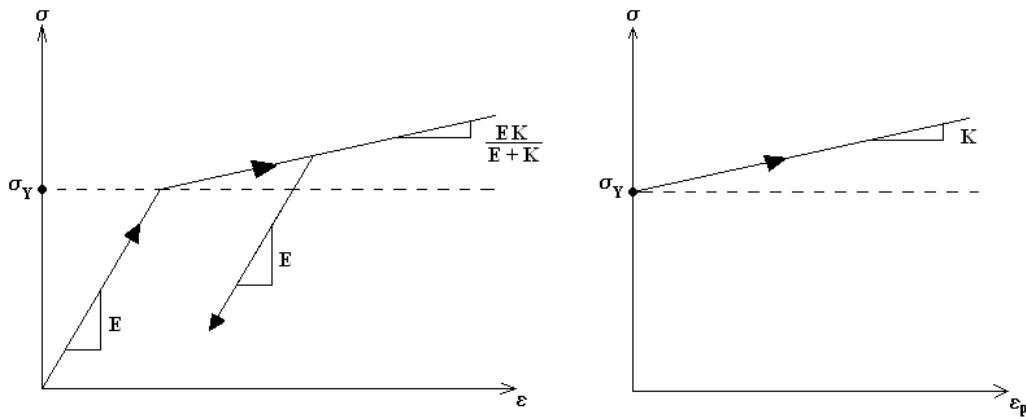


Figura 74 – Módulo tangente elastoplástico (esquerda) e módulo plástico (direita) (Fonte: Simo e Hughes, 1998)

Subindo mais um degrau na escada da complexidade dos modelos constitutivos, tem-se o modelo que inclui as características do modelo isótropo com a adição das características do modelo com encruamento cinemático. Esse modelo mais geral que o isótropo é conhecido como modelo misto ou combinado e será empregado neste trabalho. Esse modelo é muito empregado em problemas que trabalham com inversão do sentido da tensão aplicada, não sendo o caso dos problemas envolvendo cabos que só trabalham a tração.

Modelo constitutivo misto

Na sequência, apresenta-se o modelo de encruamento misto, sendo que as alterações apresentadas a seguir são provenientes do modelo cinemático que muitas das vezes é utilizado sem as características provenientes do modelo com encruamento isotrópico.

Em muitos metais submetidos a carregamentos cíclicos, é observado experimentalmente que o centro da superfície de escoamento apresenta um movimento na direção do fluxo plástico, conforme apresentado na Fig. 75. Esse fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger.

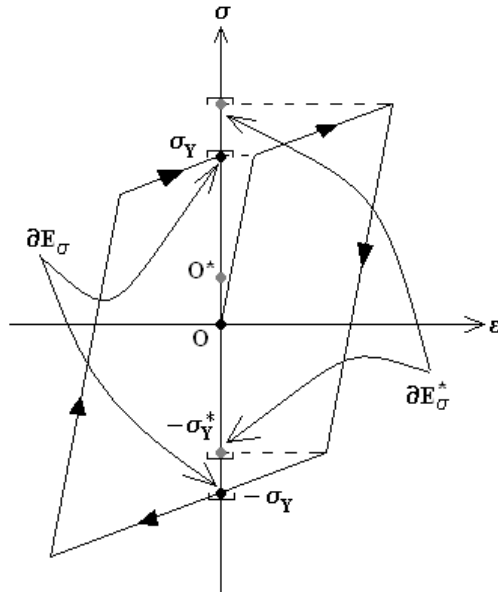


Figura 75 – Efeito Bauschinger no modelo constitutivo elastoplástico (Fonte: Simo e Hughes, 1998)

O modelo que equaciona o efeito Bauschinger é construído introduzindo uma variável interna adicional q , denominada tensão de retorno (back stress). Essa variável define o novo centro da superfície de escoamento. Assim, a condição de escoamento é expressa por:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0 \quad (31)$$

A evolução da tensão de retorno q é definida pela regra de Ziegler:

$$\dot{q} = H\dot{\epsilon}_p \equiv \gamma H \text{sign}(\sigma - q) \quad (32)$$

Onde H é denominado de módulo de encruamento cinemático.

A evolução de α permanece inalterada sendo dada pela Eq. (25). A adição das condições de Kuhn-Tucker na forma dada pela Eq. (26) junto com a condição de consistência complementa a formulação do modelo.

A determinação do parâmetro de consistência e do módulo tangente elastoplástico é feito da mesma maneira que foi desenvolvida na seção anterior. A partir da Eq. (31) tem-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \text{sign}(\sigma - q)[E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) - \dot{q}] - K\dot{\alpha} \quad (33)$$

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma - q)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E + (H + K)] \leq 0$$

Novamente, é importante observar que a relação $\dot{f} > 0$ não pode ocorrer na plasticidade taxa-independente. Por outro lado, se γ é diferente de zero, as condições de Kuhn-Tucker junto com a condição de consistência requerem que $f = 0$ e $\dot{f} = 0$. Assim o último requisito aplicado na Eq. (33) resulta:

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma - q)E\dot{\varepsilon}}{E + H + K} \quad (34)$$

Sendo $\dot{\sigma} = [d\sigma/d\varepsilon]\dot{\varepsilon}$, a relação elástica dada pela Eq. (2) junto com a regra de fluxo dada pela Eq. (9) e Eq. (34) resulta na expressão:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{E(H + K)}{E + H + K} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (35)$$

Que define o módulo tangente elastoplástico para o encruamento misto.