

**ESTRATÉGINA MULTIESCALA PARA DESCRICÃO MICROMÓRFICA
DO CONTÍNUO A PARTIR DO CONTÍNUO CLÁSSICO**

Leandro Lopes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ESTRATÉGIA MULTIESCALA PARA DESCRIÇÃO MICROMÓRFICA
DO CONTÍNUO A PARTIR DO CONTÍNUO CLÁSSICO**

Leandro Lopes da Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutor em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEEs - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEEs - UFMG (Coorientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEEs - UFMG

Profa. Dra. Jamile Salim Fuina
FUMEC

Prof. Dr. Raul Rosas e Silva
PUC - RIO

Prof. Dr. Rodrigo Peluci de Figueiredo
UFOP

Belo Horizonte, 17 de Maio de 2019

S586e

Silva, Leandro Lopes da.

Estratégia multiescala para descrição micromórfica do contínuo a partir do contínuo clássico [manuscrito] / Leandro Lopes da Silva. - 2019. xxiii, 102 f., enc.: il.

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Coorientador: Samuel Silva Penna.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f.89-102.

1. Engenharia de estruturas - Teses. I. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. II. Penna, Samuel Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

A hundred times every day I remind myself that my inner and outer life are based on the labors of other men, living and dead, and that I must exert myself in order to give in the same measure as I have received and am still receiving.

Albert Einstein

A cada um que contribuiu direta ou indiretamente ao longo deste percurso.

Índice

Índice	iv
Lista de Tabelas	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Abreviaturas e Siglas	ix
Lista de Símbolos	x
Resumo	xxi
Abstract	xxii
Agradecimentos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	8
1.1.1 Objetivo Geral	8
1.1.2 Objetivos Específicos	8
1.2 Organização do Texto	9
2 Contínuos Generalizados	10
2.1 Histórico e Contextualização	10
3 Contínuo Micromórfico	23
3.1 Cinemática da Deformação	24
3.2 Elasticidade Micromórfica Linear	28
3.3 Abordagem por Elementos Finitos	34
4 Uma Estratégia de Homogeneização Micromórfica	43
5 Simulações Numéricas	63
5.1 Tração direta em meio linear	64
5.2 Tração direta em meio não linear	69
5.3 Compressão com banda de cisalhamento	75

5.4	Camada infinita sob cisalhamento	80
6	Considerações Finais	86
6.1	Contribuições deste Trabalho	86
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	87
	Referências Bibliográficas	89

Lista de Tabelas

2.1 Hierarquia dos contínuos micromórficos (Forest e Sievert, 2006; Forest, 2013).	16
--	----

Lista de Figuras

1.1	Microestrutura de misturas à base de cimento (Wong et al., 2009).	1
1.2	Microfissuras em um concreto com 70% de agregado (Wong et al., 2009).	2
1.3	Microestrutura de uma areia siliciosa (Voyiadjis et al., 2005).	2
1.4	EVR como ponto material do contínuo (Nemat-Nasser e Hori, 1999).	3
2.1	Cinemática das partículas materiais no contínuo clássico.	17
2.2	Cinemática das partículas materiais no contínuo com microdilatação.	17
2.3	Cinemática das partículas materiais no contínuo micropolar (ou de Cosserat).	17
2.4	Cinemática das partículas materiais no contínuo com microexpansão.	18
2.5	Cinemática das partículas materiais no contínuo com microdeformação.	18
2.6	Cinemática das partículas materiais no contínuo micromórfico.	18
2.7	Relação entre contínuos micromórficos (adaptado de Eringen (1999)).	19
2.8	Teorias de contínuos generalizados (adaptado de Tekoğlu (2007)).	20
3.1	Cinemática do contínuo micromórfico (adaptado de Eringen (1999)).	24
3.2	Diretores deformáveis (adaptado de Eringen (1999)).	27
4.1	Homogeneização micromórfica (adaptado de Hütter (2017)).	45
4.2	Estratégia de homogeneização micromórfica em análise fisicamente não linear.	62
5.1	Tração direta em meio linear: Configuração.	64
5.2	Tração direta em meio linear: Deslocamento na direção da carga.	68
5.3	Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009).	69
5.4	Tração direta em meio não linear: Configuração e lei material.	70
5.5	Tração direta em meio não linear: Malhas.	71

5.6	Carga \times Deslocamento de controle - Clássico.	72
5.7	Carga \times Deslocamento de controle - Micromórfico.	73
5.8	Localização de deformações numericamente induzida - Clássico.	74
5.9	Localização de deformações numericamente induzida - Micromórfico.	74
5.10	Compressão com banda de cisalhamento: Configuração.	75
5.11	Compressão com banda de cisalhamento: Malhas.	76
5.12	Carga \times Deslocamento vertical da borda superior - Clássico.	77
5.13	Configuração deformada e banda de cisalhamento - Clássico.	78
5.14	Configuração deformada e banda de cisalhamento - Micromórfico.	79
5.15	Carga \times Deslocamento vertical da borda superior - Micromórfico.	80
5.16	Camada infinita sob cisalhamento: Configuração.	81
5.17	Camada infinita sob cisalhamento: Malhas.	82
5.18	Fator de carga \times Deslocamento horizontal da borda superior - Clássico.	83
5.19	Configuração deformada e distribuição do dano - Clássico.	84
5.20	Fator de carga \times Deslocamento horizontal da borda superior - Micro- mórfico.	84
5.21	Configuração deformada e distribuição do dano - Micromórfico.	85

Lista de Abreviaturas e Siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
EVR	Elemento de Volume Representativo
FE ²	Método dos Elementos Finitos Multinível
GL	Graus de Liberdade
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
IUTAM	<i>International Union of Theoretical and Applied Mechanics</i>
MD	Medidas de Deformação
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MM	Métodos sem Malha
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PVC	Problema de Valor de Contorno
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

Lista de Símbolos

Letras romanas

B	Configuração material ou de referência
b	Configuração espacial
B_u	Matriz de aproximação das deformações incidente em u
B_ϕ	Matriz de aproximação das deformações incidente em ϕ
C	Centro de massa de P na configuração de referência
c	Centro de massa C de P na configuração espacial
C'	Ponto material $\in P$ na configuração de referência
c'	Ponto material $C' \in P$ na configuração espacial
${}^x C$	Tensor de microdeformação de Cauchy-Green direito (${}^x C = U^2$)
D_{klmn}	Módulo constitutivo clássico (tensor elástico (Mal e Singh, 1991))
d_u	Vetor do graus de liberdade macroscópicos
d_ϕ	Vetor dos graus de liberdade microscópicos
E	Módulo de elasticidade longitudinal
e	Tensor de microdeformação
e_i	Vetores de base

e_{ij}	Tensor de microdeformação
\bar{e}_{ij}	Tensor de microdeformação por homogeneização
e	Microdeformação volumétrica
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{f}	Vetor de força de corpo por unidade de massa
f_l	Vetor de força de corpo por unidade de massa
f_t	Resistência à tração
G_{klmn}	Momento geométrico de quarta ordem
G_{kl}	Momento geométrico de segunda ordem
G_f	Energia de fratura
g_f	Energia de fratura específica
H_{mkin}	Relação geométrica entre c_{lin} e $\bar{\gamma}_{lmk} = \bar{\phi}_{lm,k}$
H	Módulo plástico
h	Banda de fissuração
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
$J_{\alpha k}$	Relação geométrica entre $d_{l\alpha}$ e $\bar{\epsilon}_{kl}$
K_{pk}	Relação geométrica entre b_{lk} e $\bar{\epsilon}_{pl}$
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{L}_u	Operador diferencial incidente em \mathbf{u}
\mathbf{L}_ϕ	Operador diferencial incidente em ϕ

\mathbf{l}	Tensor de momento (força dupla) de corpo por unidade de massa
l_{lm}	Tensor de momento (força dupla) de corpo por unidade de massa
\mathbf{M}	Matriz de rearranjo
\mathbf{m}	Tensor de tensão-momento ou primeiro tensor de tensão-momento de superfície
m_{klm}	Tensor de tensão-momento ou primeiro tensor de tensão-momento de superfície, apresentado sob o símbolo λ^{klm} em Eringen e Şuhubi (1964 <i>a,b</i>)
\bar{m}_{klm}	Tensor de tensão-momento ou primeiro tensor de tensão-momento de superfície por homogeneização
m	Número de nós da discretização considerada para o micromovimento
$\hat{\mathbf{m}}_{(\mathbf{n})}$	Tensor de momento (força dupla) de superfície
$\hat{m}_{(\mathbf{n})lm}$	Tensor de momento (força dupla) de superfície
\mathbf{N}	Matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do macromovimento
N_j	Funções interpoladoras (funções de forma) do macromovimento
\mathbf{n}	Vetor unitário normal ao contorno $\partial\mathcal{V}$
n_k	Vetor unitário normal ao contorno $\partial\mathcal{V}$
n	Número de nós da discretização considerada para o macromovimento; Dimensão do espaço
$\bar{\mathbf{N}}$	Matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento
\bar{N}_j	Funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento

$\bar{\mathbf{N}}_T$	Matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento rearranjada
$\bar{\mathbf{N}}_S$	Matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento simetrizada
P	Partícula material/Ponto geométrico na configuração de referência
p	Partícula material/Ponto geométrico na configuração espacial
\mathbf{R}	Tensor de microrrotação
R_{kL}	Tensor de microrrotação
\mathbf{s}	Tensor de microtensão média
s_{kl}	Tensor de microtensão média
\bar{s}_{kl}	Tensor de microtensão média por homogeneização
\mathbf{t}	Tensor de tensão
t_{kl}	Tensor de tensão
\bar{t}_{kl}	Tensor de tensão por homogeneização
t	Tempo
$\hat{\mathbf{t}}_{(n)}$	Vetor de força de superfície (vetor de tensão)
$\hat{t}_{(n)l}$	Vetor de força de superfície (vetor de tensão)
\mathbf{U}	Tensor de microdeformação (direito)
U	Energia de deformação ($U = \int_V U_0 dv$)
U_0	Função densidade de energia de deformação ($U_0 = \Sigma - \Sigma_0$)

\mathbf{u}	Vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material
u_i	Vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material
\bar{u}_i	Vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material por homogeneização
$u_{i,j}$	Tensor gradiente de deslocamento
$\bar{u}_{i,j}$	Tensor gradiente de deslocamento por homogeneização
\mathbf{u}'	Vetor de deslocamento translacional de um ponto $C' \rightarrow c' \in P$
u'_i	Vetor de deslocamento translacional de um ponto $C' \rightarrow c' \in P$
$u'_{i,j}$	Tensor gradiente de deslocamento microscópico
\hat{u}_k	Componentes prescritos do vetor de deslocamento translacional ao longo do contorno indicado, $\partial\mathcal{V}_u$
\mathbf{V}	Tensor de microdeformação (esquerdo)
V	Energia potencial das forças aplicadas
\mathbf{X}	Coordenadas materiais ou Lagrangianas
X_K	Coordenadas materiais ou Lagrangianas
\mathbf{x}	Coordenadas espaciais, correntes ou Eulerianas
x_k	Coordenadas espaciais, correntes ou Eulerianas
$x_{k,K}$	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{X}'	Coordenadas materiais de um ponto $C' \in P$

- X'_K Coordenadas materiais de um ponto $C' \in P$
- \mathbf{x}' Coordenadas espaciais de um ponto $C' \rightarrow c' \in P$
- $\mathbf{A}_{(9 \times 9)}, \mathbf{B}_{(9 \times 9)}, \mathbf{C}_{(27 \times 27)}, \mathbf{E}_{(9 \times 9)}$ Matrizes constitutivas de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico
- $A_{klmn}, B_{klmn}, C_{klmnpq}, E_{klmn}, F_{klmnp}, G_{klmnp}$ Módulos constitutivos da teoria da elasticidade micromórfica linear
- $\bar{A}_{klmn}, \bar{B}_{klmn}, \bar{C}_{klmnpq}, \bar{E}_{klmn}$ Módulos constitutivos micromórficos de um sólido linear elástico isotrópico por homogeneização
- $a_l, b_{lm}, c_{lmn}, d_{lmno}, d_{l\alpha}$ Constantes da aproximação polinomial cúbica do campo de deslocamento microscópico
- $\mathbf{f}_{eq,u}, \mathbf{f}_{eq,\phi}$ Vetores de força equivalente nodal de um sólido micromórfico
- $\mathbf{K}_{uu}, \mathbf{K}_{u\phi}, \mathbf{K}_{\phi u}, \mathbf{K}_{\phi\phi}$ Submatrizes de rigidez de um sólido micromórfico

Letras gregas

- α Valor máximo de dano admissível para o material na função de evolução do dano com variação exponencial
- β Intensidade de evolução do dano na função de evolução do dano com variação exponencial
- β_r Fator de retenção ao cisalhamento
- Γ_{KLM} Tensor de distorção (*wryness*)
- γ Gradiente de microdeformação
- γ_{ijk} Gradiente de microdeformação

$\bar{\gamma}_{ijk}$	Gradiente de microdeformação por homogeneização
γ_{ij}	Gradiente do vetor de microrrotação (tensor de microcurvatura)
γ_i	Gradiente da microdeformação volumétrica
$\delta_{\alpha mno}$	Delta de Kronecker de quarta ordem
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ	Operador delta
$\delta^{(1)}$	Primeira variação do funcional
ε_{ij}	Tensor de deformação infinitesimal
${}^x\varepsilon_{ij}$	Parcela simétrica de ϕ_{ij} (${}^x\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\chi_{ki}\chi_{kj} - \delta_{ij}) \simeq \frac{1}{2}(\phi_{ij} + \phi_{ji})$)
ε_{eq}	Valor escalar de deformação equivalente
ϵ	Tensor de deformação relativa (macro-micro)
ϵ_{ijk}	Símbolo de permutação (Levi-Civita)
ϵ_{ij}	Tensor de deformação relativa (macro-micro)
$\bar{\epsilon}_{ij}$	Tensor de deformação relativa (macro-micro) por homogeneização
η_{ijklm}	Terceiro gradiente de deformação
η_{ijkl}	Segundo gradiente de deformação
η_{ijk}	Primeiro gradiente de deformação
κ_{ij}	Gradiente do vetor de macrorrotação (tensor de curvatura)
κ_0	Valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia

κ_f	Valor final da deformação equivalente na função de evolução do dano com variação linear
λ_{kl}	Multiplicador de Lagrange
ν	Coefficiente de Poisson
Ξ	Posição material em um microcontínuo relativa ao centro de massa desta região; Vetor incorporado aos microcontínuos na configuração material
Ξ_K	Posição material em um microcontínuo relativa ao centro de massa desta região; Vetor incorporado aos microcontínuos na configuração material
Ξ_α	Vetores incorporados aos microcontínuos na configuração material, cada qual referente a uma sub-região α destes domínios, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$
ξ	Posição espacial em um microcontínuo relativa ao centro de massa desta região; Vetor Ξ na configuração espacial
ξ_k	Posição espacial em um microcontínuo relativa ao centro de massa desta região; Vetor Ξ_K na configuração espacial
ξ_α	Vetores Ξ_α na configuração espacial, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$
Π	Energia potencial total do corpo ($\Pi = U + V$)
ρ	Densidade de massa da partícula material na configuração espacial
ρ_0	Densidade de massa da partícula material na configuração de referência
$\bar{\rho}$	Densidade de massa da partícula material por homogeneização
ρf_l	Vetor de força de corpo por unidade de volume
$\bar{\rho} \bar{f}_l$	Vetor de força de corpo por unidade de volume por homogeneização
ρl_{lm}	Tensor de momento (força dupla) de corpo por unidade de volume

$\bar{\rho} \bar{l}_{lm}$	Tensor de momento (força dupla) de corpo por unidade de volume por homogeneização
$\bar{\rho} \bar{\psi}$	Função densidade de energia interna por homogeneização
Σ	Função densidade de energia interna ($\Sigma = \rho_0 \psi$)
Σ_0	Densidade de energia interna inicial
σ_{kl}	Tensor de tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}_y$	Tensão de escoamento
ϕ	Tensor gradiente de microdeslocamento ($\phi = \chi - \mathbf{I}$)
ϕ_{ij}	Tensor gradiente de microdeslocamento ($\phi_{ij} = \chi_{ij} - \delta_{ij}$)
$\bar{\phi}_{ij}$	Tensor gradiente de microdeslocamento por homogeneização
ϕ_i	Vetor de microrrotação ($R_{jk} - \delta_{jk} \simeq \frac{1}{2}(\phi_{jk} - \phi_{kj}) \Rightarrow \phi_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\phi_{jk}$)
ϕ	Gradiente de microdeslocamento da microdilatação escalar ($\phi = \chi - 1$)
$\hat{\phi}_{kl}$	Componentes prescritos do tensor gradiente de microdeslocamento ao longo do contorno indicado, $\partial\mathcal{V}_\phi$
φ_m	Densidade de armazenamento genérica
χ	Tensor gradiente de microdeformação
χ_K	Diretores deformáveis independentes incorporados às partículas materiais na configuração espacial
χ_{kK}	Tensor gradiente de microdeformação
χ	Microdilatação escalar
$\chi_{ki}\chi_{kj}$	Tensor de microdeformação de Cauchy-Green direito (${}^x\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$)

χ_α	Tensores gradientes de microdeformação, cada qual referente a uma sub-região α dos microcontínuos, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$
ψ	Energia livre
ψ_a	Densidade de fluxo genérica
ψ_{a_i}	Densidade de fluxo genérica
ψ_m	Densidade de recurso (fonte) genérica
α_{kl}, β_{klm}	Constantes da extensão do PVC microscópico clássico ao micromórfico
$\lambda, \mu, \kappa, \nu, \sigma, \tau, \eta, \tau_1 \dots \tau_{11}$	Parâmetros elásticos de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico

Caracteres especiais

\mathfrak{C}_{KL}	Tensor de deformação
\mathfrak{C}_{KL}	Tensor de microdeformação
D/D_t	Derivada material
\mathcal{L}	Funcional de Lagrange
\mathcal{V}	Domínio considerado
\mathfrak{X}	Tensor inverso do tensor gradiente de microdeformação
\mathfrak{X}_k	Diretores deformáveis independentes incorporados às partículas materiais na configuração de referência
\mathfrak{X}_{Kk}	Tensor inverso do tensor gradiente de microdeformação
$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})$	Microdomínio considerado

$\nabla_{\mathbf{X}}$	Gradiente em relação às coordenadas materiais
∂_i	Primeira derivada parcial espacial ($\partial_i = \partial/\partial X_i$)
$\partial\mathcal{V}$	Contorno do domínio considerado
$\partial\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})$	Contorno do microdomínio considerado
$(\dot{\circ})$	Derivada material
$(\circ)_{,t}$	Derivada material
$\langle \circ \rangle_V$	Operador de média no volume
$[\langle \circ_i \rangle_S]_k$	Operador de superfície

Resumo

O comportamento macroscópico dos materiais é função da estrutura que exibem em nível microscópico. A abordagem fenomenológica adotada na teoria do contínuo clássico não considera o comportamento individual dos constituintes da microestrutura, mas propriedades macroscópicas efetivas. Por falta de parâmetros microestruturais, esta teoria não descreve adequadamente materiais com microestrutura complexa ou quando as dimensões estruturais são comparativamente pequenas em relação à sua microestrutura. Neste sentido, diversas teorias de contínuos denominados generalizados foram desenvolvidas, incorporando-se o comportamento microestrutural do meio material. Estas teorias se dividem em dois grupos: (a) as que consideram gradientes de deslocamento de ordem superior e (b) as que adicionam graus de liberdade cinemáticos às partículas materiais. A teoria do contínuo micromórfico, na qual cada partícula material possui nove graus de liberdade cinemáticos adicionais, representa o caso mais geral deste segundo grupo. Esta teoria é adequada à análise de materiais cuja microestrutura se deforma arbitrariamente. A construção heurística do contínuo micromórfico com base em considerações termodinâmicas (ou no princípio dos trabalhos virtuais) está bem estabelecida. No entanto, a identificação das correspondentes leis constitutivas e a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos limitam a aplicação prática desta teoria. Neste sentido, o presente trabalho propõe uma formulação multiescala para obtenção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. O sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, é utilizado na implementação.

Palavras-Chave: Comportamento Microestrutural, Contínuos Generalizados, Contínuo Micromórfico, Formulação Multiescala, Sistema INSANE

Abstract

The macroscopic behavior of materials is a function of the structure they exhibit at the microscopic level. The phenomenological approach adopted in the classical continuum theory does not consider the individual behavior of the microstructure constituents, but rather deals with the effective macroscopic properties. Due to the lack of microstructural parameters, this theory does not adequately describe materials with complex microstructure or when the structural dimensions are comparatively small with respect to its microstructure. In this sense, numerous so-called generalized continuum theories were developed, incorporating the microstructural behavior of the material medium. These theories fall into two groups: (a) those that consider higher order displacement gradients and (b) those that add kinematic degrees of freedom to material particles. The micromorphic continuum theory, in which each material particle is endowed with nine additional kinematic degrees of freedom, represents the most general case of this second group. This theory is suited to analysis of materials with arbitrarily deforming microstructure. The heuristic construction of the micromorphic continuum based on thermodynamic considerations (or at the principle of virtual work) is well-established. However, the identification of corresponding constitutive laws and the determination of the large number of constitutive parameters limit the practical application of such theory. In this sense, this work proposes a multiscale formulation for obtaining the macroscopic micromorphic constitutive relations through the solution of boundary value problems at the microscale according to the classical continuum theory. The INSANE system (INteractive Structural ANalysis Environment), a free software developed at the Department of Structural Engineering of the Engineering School of the Federal University of Minas Gerais, is used in the implementation.

Keywords: Microstructural Behavior, Generalized Continuum, Micromorphic Continuum, Multiscale Formulation, INSANE System

Agradecimentos

À minha família, em especial, à minha mãe, pelo esforço e pelo sacrifício para a minha criação e a dos meus irmãos.

À minha doce namorada Paulinha (.=, pelo amor, pela motivação, pela vibração e pelas “pequenas” perturbações essenciais para a minha saúde mental ao longo deste trabalho.

Ao professor Roque, pela confiança depositada em mim, pela amizade paternal, pelo entusiasmo, pela disponibilidade e pela excelência na orientação deste trabalho.

Ao professor Samuel, por ser um exemplo de retidão, pela disponibilidade, pela atenção, pelo interesse e pela excelência na orientação deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela contribuição à minha formação e ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos conquistados ao longo deste percurso, Danilo Oliveira, Juliano Becho, Lucas Grilo e Tiago Mendonça, e a toda equipe INSANE, por compartilharem desta caminhada sempre solícitos.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela presteza e qualidade nos serviços prestados.

À PUC-MG, em especial aos meus eternos professores, pela sólida formação proporcionada na graduação.

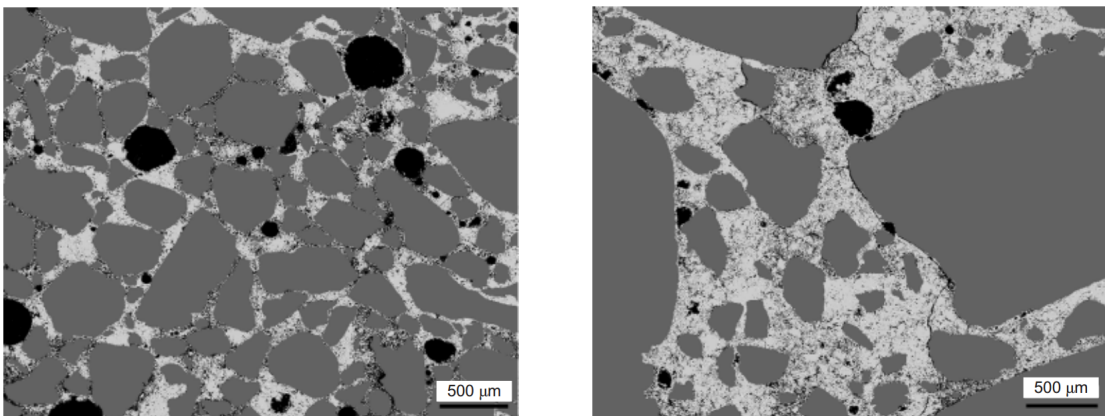
À UFMG, por possibilitar a consolidação da minha formação por meio do mestrado e do doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas.

À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

O comportamento macroscópico dos materiais é função da estrutura que exibem em nível microscópico¹. Por exemplo, a resposta global de materiais granulares, como areias e solos em geral, depende do arranjo de seus grãos minerais e fases fluidas na escala microscópica, o comportamento de policristais, como rochas e metais, é determinado pelas orientações preferenciais de sua microestrutura cristalina e a resistência de meios parcialmente frágeis, como argamassas e concretos, é afetada pelo crescimento de vazios e trincas sob a influência de impurezas e heterogeneidades em sua microescala. Na Figura 1.1, ilustra-se a estrutura microscópica de argamassas e concretos, ampliada na Figura 1.2 para se destacar a presença das microfissuras.



(a) Argamassa com 70% de areia

(b) Concreto com 70% de agregado

Figura 1.1: Microestrutura de misturas à base de cimento (Wong et al., 2009).

¹Nesta tese, o nível de observação associado à escala de comprimento da ordem de 10^{-3} m, de manipulação dos diferentes constituintes, das diferentes fases e do dano do meio material, é referido como nível microscópico, contudo, o termo mesoscópico é o adotado por diversos autores.

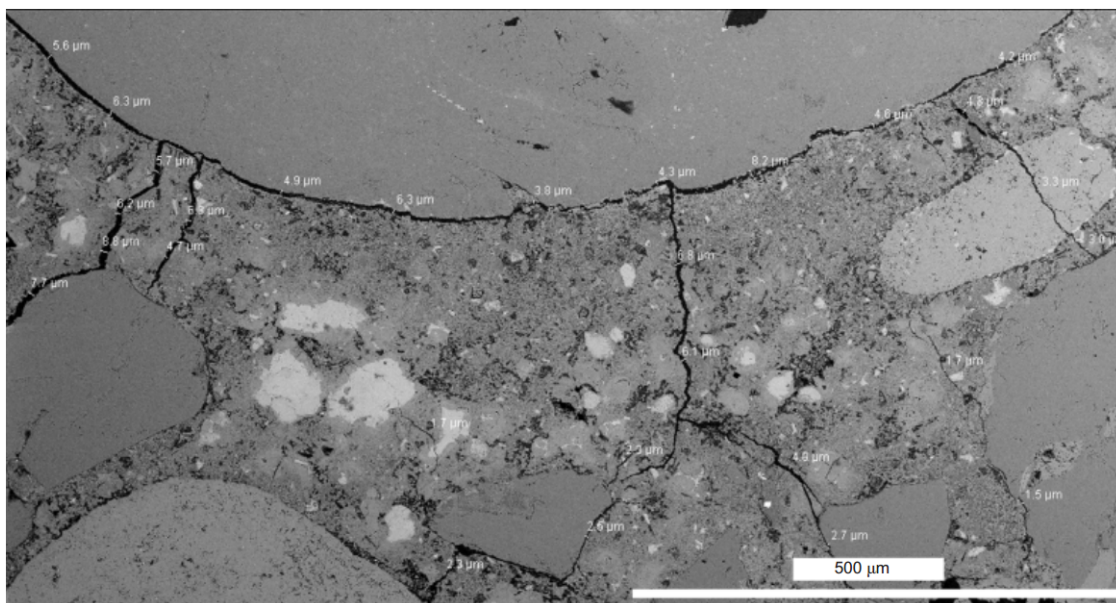
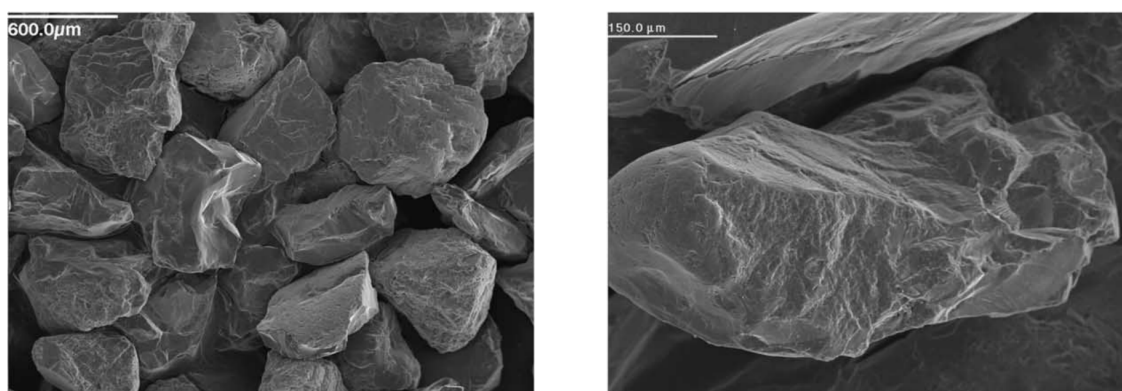


Figura 1.2: Microfissuras em um concreto com 70% de agregado (Wong et al., 2009).

Neste nível de observação, evidenciam-se as complexidades da microestrutura altamente heterogênea de argamassas e concretos (Mehta e Monteiro, 2006). Na Figura 1.3, ilustra-se a microestrutura de um material granular, onde se observam as não uniformidades no tamanho, na forma e na rugosidade de seus grãos. As características próprias de cada constituinte da mistura e o conseqüente comportamento mecânico individual destes constituintes justificam a resposta complexa dos materiais granulares (Voyiadjis et al., 2005).



(a) Tamanho, forma e vazios

(b) Tamanho e forma em alta definição

Figura 1.3: Microestrutura de uma areia siliciosa (Voyiadjis et al., 2005).

O estudo do comportamento dos materiais segundo a teoria do contínuo clássico (Cauchy, 1828) parte do princípio de que a cinemática do meio é descrita por graus de liberdade translacionais das partículas materiais e pelas conseqüentes medidas de deformação avaliadas na vizinhança destas partículas. No contínuo clássico, as partículas materiais são definidas como elementos indeformáveis do meio material, sem estrutura interna e cujas dimensões são pequenas em comparação a todas as dimensões características do meio, de modo que possam ser idealizadas como pontos matemáticos (pontos materiais), porém, são grandes em comparação às dimensões atômicas (Eringen, 1967; Mal e Singh, 1991; Borelli et al., 2011).

Na descrição estática deste contínuo, as relações constitutivas são construídas associando-se ao conceito de ponto material o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) (Hill, 1963; Hashin, 1964, 1983; Kröner, 1977; Willis, 1981). Ou seja, considera-se que o ponto material representa o menor volume estatisticamente representativo da microestrutura (Figura 1.4), a partir do qual propriedades efetivas de um modelo macroscópico homogeneizado são determinadas (Kanit et al., 2003; Gitman et al., 2004). O tamanho do EVR varia em função da complexidade da microestrutura do material. Por exemplo, a ordem de grandeza do EVR para metais é $0,1 \text{ mm}^3$ e para concretos 100 mm^3 (Lemaitre, 1992; Lemaitre e Desmorat, 2005).

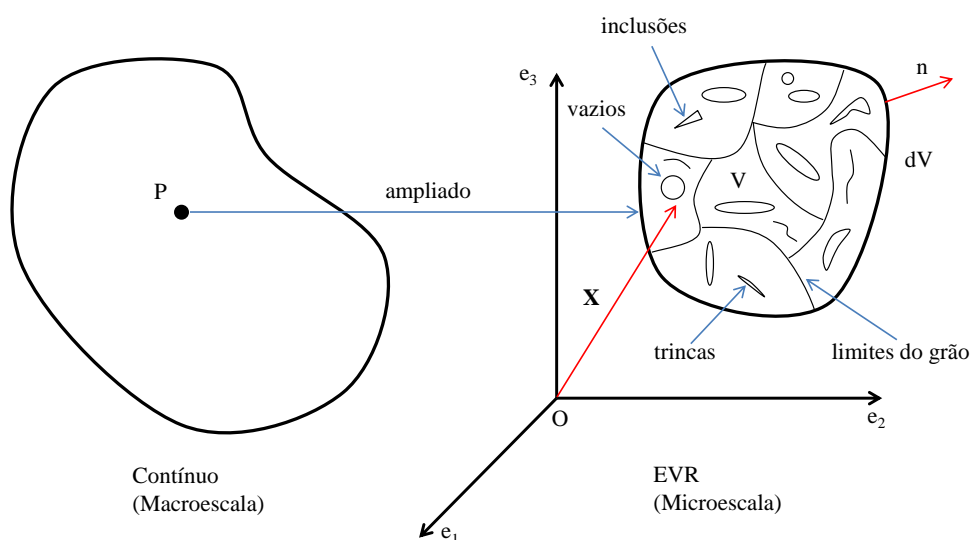


Figura 1.4: EVR como ponto material do contínuo (Nemat-Nasser e Hori, 1999).

A abordagem fenomenológica adotada nas descrições cinemática e estática do contínuo clássico não considera o comportamento individual dos constituintes da microestrutura, mas propriedades macroscópicas efetivas. Na análise de estruturas usuais da engenharia, esta abordagem é suficiente, especialmente quando combinada com elaborados modelos constitutivos que consideram o comportamento complexo do material. No entanto, pela conseqüente falta de parâmetros microestruturais, este *modus operandi* fenomenológico funciona bem se as propriedades do material forem bem caracterizadas pelo conceito de Elemento de Volume Representativo e se as dimensões macroscópicas do meio e as da microestrutura se diferirem por muitas ordens. Por conseqüência, a teoria do contínuo clássico não descreve adequadamente materiais com microestrutura complexa ou quando as dimensões estruturais são comparativamente pequenas em relação à sua microestrutura (Hirschberger, 2008).

Materiais com microestrutura não-periódica, sólidos com microfissuras, materiais celulares naturais, como madeira, cortiça e tecido ósseo esponjoso, e sintéticos, como espumas poliméricas, metálicas e cerâmicas, alvenarias, compósitos, pastas, suspensões, fluxos sanguíneos, cristais líquidos, fluidos magneto-reológicos, fluidos em escoamento em regime turbulento com vórtices, líquidos com aglomerado de bolhas de gás *etc.* são exemplos de meios materiais que requerem considerações acerca de sua microestrutura para descrição adequada do seu comportamento macroscópico (Eringen, 1999; Hirschberger, 2008; Vanis, 2010; Altenbach e Eremeyev, 2016).

Neste sentido, com o objetivo de se incorporar o comportamento microestrutural na descrição do meio material, diversas teorias de contínuos denominados generalizados foram desenvolvidas. Os primeiros estudos visando incorporar efeitos da microestrutura do material na mecânica do contínuo se referem ao trabalho de Voigt (1887). Neles, sugeria-se que a interação entre as partículas materiais poderia se dar por meio de vetores de tensão-momento, além do clássico vetor de tensão (Lages, 1997). A introdução de tensões-momento implica no surgimento de parâmetros de comprimento relativos à microestrutura nas relações constitutivas macroscópicas.

Os diversos contínuos generalizados propostos podem ser divididos em dois grandes grupos² (Germain, 1973*a,b*; Forest, 1998; Tekoğlu, 2007; Hirschberger, 2008):

- (a) Contínuos de Gradiente Superior - que consideram gradientes de deslocamento de ordem superior; e
- (b) Contínuos de Ordem Superior - que adicionam graus de liberdade cinemáticos às partículas materiais.

A teoria do contínuo micromórfico, proposta de forma independente por Mindlin (1964) e Eringen e Şuhubi (1964*a,b*), representa o caso mais geral deste segundo grupo (Germain, 1973*b*; Eringen, 1999; Forest e Sievert, 2006; Hirschberger, 2008; Forest, 2013). Nesta teoria, cada partícula material possui nove graus de liberdade cinemáticos adicionais, decorrentes das microdeformações, sendo adequada à análise de meios materiais cuja microestrutura se deforma arbitrariamente (Mindlin, 1964; Eringen, 1999; Kirchner e Steinmann, 2005; Hirschberger, 2008; Maugin, 2014*b*).

Segundo Borelli et al. (2011), a teoria micromórfica é a formulação mais bem sucedida de um modelo contínuo de dois níveis, capaz de considerar a microestrutura do meio material preservando intactas as vantagens da teoria do contínuo clássico. Forest (2013) destaca que a teoria micromórfica tem despertado forte interesse das comunidades de ciência dos materiais e de mecânica computacional devido à sua capacidade de regularização no contexto de plasticidade com amolecimento e dano e pela sua implementação relativamente simples em programas de elementos finitos, observando que o número de graus de liberdade não é mais um obstáculo, tendo em vista a capacidade e a constante evolução dos computadores. Conforme Hütter (2017), dentre as teorias generalizadas de mecânica do contínuo, a micromórfica se destaca, uma vez que incorpora diversas outras como casos especiais.

²Segundo Hirschberger (2008), Forest (2013), dentre outros autores, contínuos não-locais, tal como o proposto no trabalho pioneiro de Eringen (1972*a*), também constituem uma categoria de contínuos generalizados.

A construção do contínuo micromórfico com base em considerações termodinâmicas macroscópicas (ou no princípio dos trabalhos virtuais) está bem estabelecida (Mindlin, 1964; Eringen e Şuhubi, 1964*a,b*; Eringen, 1964, 1999; Eringen e Kafadar, 1976; Germain, 1973*b*; Hütter, 2016, 2017). Nesta formulação, surgem tensões ditas generalizadas nas equações de equilíbrio adicionais, o que requer a identificação das leis constitutivas adicionais correspondentes. Para este propósito, por simplicidade, as leis constitutivas clássicas têm sido generalizadas heurísticamente por meio de aproximações lineares inversíveis, isto é, supõem-se funções quadráticas nos potenciais termodinâmicos (Hütter, 2017). No entanto, segundo Hütter et al. (2013), Forest (2016) e Hütter (2017), em determinados casos, esta suposição é questionável e leva a previsões não realistas. Além da identificação das leis constitutivas adicionais, é necessária a determinação do consequente elevado número de parâmetros constitutivos desta teoria. Um sólido micromórfico linear elástico isotrópico, por exemplo, requer a determinação de dezoito parâmetros elásticos (Eringen, 1999; Isbuga e Regueiro, 2011), em contraposição aos dois coeficientes elásticos de Lamé necessários na teoria clássica. Segundo Kalampakas e Aifantis (2014) e Hütter (2017), a identificação das leis constitutivas adicionais e a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos têm sido os limitantes da aplicação prática da teoria micromórfica.

Como alternativa para se contornar estas limitações, com base no trabalho de Hütter (2017, 2019), propõe-se nesta tese uma estratégia multiescala para obtenção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas por meio da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. A partir do problema de valor de contorno macroscópico, impõem-se condições para construção de problemas de valor de contorno em microrregiões do macrodomínio representativas da microescala do meio material, cujas soluções segundo a teoria do contínuo clássico são devolvidas para a macroescala como relações constitutivas em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas, definidas de modo que o macrodomínio se comporte como um contínuo micromórfico.

Para a formulação das relações constitutivas micromórficas macroscópicas, são estudadas expressões para todas as medidas de tensão generalizadas macroscópicas envolvidas e para as medidas de deformação energeticamente conjugadas.

Esta estratégia se inicia por meio de modelos do contínuo clássico na microescala, sem se fazer nenhum pressuposto constitutivo na macroescala. Consequentemente, os parâmetros materiais necessários são os da teoria clássica, bem como é possível se adotar modelos constitutivos consagrados desta teoria.

As heterogeneidades observadas na microescala e o comportamento não linear de seus constituintes podem ser incorporados naturalmente nesta abordagem.

A formulação resultante na macroescala, que recupera um contínuo micromórfico ao invés dele ser postulado a priori, resguarda as principais aplicações desta teoria. Assim sendo, dentre outras aplicações, possibilita-se a modelagem do fenômeno de localização de deformações e de suas implicações. O contínuo micromórfico possui parâmetros de comprimento relativos à microestrutura do meio que o caracterizam como não local e fornecem um efeito de regularização que possibilita a modelagem deste fenômeno (de Borst, 1991; Lages, 1997; Tekoğlu, 2007; Hirschberger, 2008; Fuina, 2009; Clasen et al., 2013; Biswas e Poh, 2017). Segundo de Borst (1991), a perda de elipticidade da equação diferencial governante observada no contínuo clássico na localização de deformações está intimamente ligada à falta de parâmetros de comprimento interno nesta teoria.

Uma característica vantajosa no tratamento discreto do contínuo micromórfico consiste na necessidade somente de continuidade C^0 nas variáveis de estado primárias³ (deslocamentos), o que facilita a sua abordagem e implementação segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Kirchner e Steinmann, 2005; Hirschberger, 2008; Nguyen, 2014; Biswas e Poh, 2017), método discreto empregado nesta tese.

³Em contraste às teorias de gradiente superior de ordem P que requerem continuidade C^{P-1} , de modo que o gradiente P represente, no mínimo, uma função constante ao invés de desaparecer (Kirchner e Steinmann, 2005; Hirschberger, 2008; Nguyen, 2014; Biswas e Poh, 2017).

Para a implementação, empregou-se o sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (<http://www.insane.dees.ufmg.br>).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Elaborar uma estratégia de homogeneização micromórfica, que consiste em uma formulação multiescala para a construção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas obtidas da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria clássica.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Estudar, a partir do problema de valor de contorno macroscópico, condições a se impor para construção de problemas de valor de contorno na microescala cujas soluções se deem segundo a teoria do contínuo clássico;
2. Avaliar expressões para as medidas de tensão generalizadas macroscópicas e para as medidas de deformação energeticamente conjugadas em termos de grandezas da teoria clássica, que governa a microescala, homogeneizadas;
3. Elaborar uma estratégia de construção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas explorando-se a definição dos pares energéticos desta teoria por homogeneização;
4. Implementar a estratégia de homogeneização micromórfica acoplada à forma fraca desta teoria no sistema INSANE;

5. Realizar simulações numéricas consagradas na literatura, de modo a verificar a validade da implementação realizada e a consistência do estudo proposto em comparação aos resultados já amplamente discutidos e avaliados no meio acadêmico. Para se justificar a aplicação da teoria micromórfica, os resultados obtidos com o modelo proposto são confrontados com os obtidos com modelos consagrados da teoria clássica. Nestas simulações, objetiva-se demonstrar a capacidade da estratégia elaborada em reproduzir o comportamento esperado para a teoria micromórfica, resguardando as suas principais características, embora se definam somente parâmetros materiais clássicos.

1.2 Organização do Texto

No Capítulo 2, apresentam-se teorias de contínuos generalizados sob contexto histórico, discutindo-se as diversas teorias propostas, suas relações, suas distinções e suas aplicações. No Capítulo 3, a teoria do contínuo micromórfico é apresentada, cuja formulação tal como proposta em Eringen (1999) é discutida nas Seções 3.1 e 3.2 e a abordagem segundo o MEF na Seção 3.3. No Capítulo 4, a estratégia de homogeneização micromórfica objeto desta tese é formulada, apresentando-se a proposta para construção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. No Capítulo 5, apresentam-se simulações numéricas de modo a verificar a consistência do estudo elaborado. Finalmente, no Capítulo 6, apresentam-se as considerações finais e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Contínuos Generalizados

2.1 Histórico e Contextualização

A noção de contínuos generalizados abrange diversas teorias de contínuos que apresentam características que vão além daquelas da teoria do contínuo clássico, com o objetivo de se incorporar o comportamento microestrutural na descrição do meio material (Hirschberger, 2008). Segundo Lages (1997), os primeiros estudos visando incorporar efeitos da microestrutura do material na mecânica do contínuo se referem ao trabalho de Voigt (1887), em que se sugeria que a interação entre as partículas materiais poderia se dar por meio de vetores de tensão-momento, além do clássico vetor de tensão. Em 1909, os irmãos Eugène e François Cosserat apresentaram uma teoria da elasticidade assimétrica não linear (Cosserat e Cosserat, 1909), em que se incorporaram tríades de diretores rígidos às partículas materiais, de modo que pudessem rotacionar independentemente das rotações locais do meio no curso da deformação (Tekoğlu, 2007). Desta forma, o contínuo de Cosserat incorporou plenamente os efeitos das tensões-momento na deformação de meios elásticos. Neste trabalho, no entanto, não foram fornecidas relações constitutivas específicas.

Dada a complexidade da exposição, os conceitos do contínuo de Cosserat não receberam a devida atenção por aproximadamente meio século, retomados no notável trabalho do professor Günther (1958), que marcou o início de novas interpretações para os efeitos da microestrutura nos anos de 1960 (Fuina, 2009).

No início desta década, foram desenvolvidos diversos trabalhos independentes devotados à teoria da elasticidade com tensões-momento, análogos ao contínuo de Cosserat (Grioli, 1960; Rajagopal, 1960; Truesdell e Toupin, 1960; Aero e Kuvshinskii, 1961; Eringen, 1962; Mindlin e Tiersten, 1962; Koiter, 1964*a,b*).

Truesdell e Toupin (1960) apresentaram uma teoria incompleta, revisada por Toupin (1962) e Mindlin e Tiersten (1962), denominada teoria das tensões-momento¹. Esta teoria é um caso especial da teoria de Cosserat, em que a rotação do triáde de diretores rígidos não é uma variável cinemática independente, mas definida como igual àquela do contínuo clássico referente a um elemento de linha infinitesimal na vizinhança de um ponto material (Tekoğlu, 2007), ou seja, as microrrotações foram consideradas iguais às macrorrotações (Lages, 1997). Logo, nesta teoria, inclui-se o gradiente do vetor de macrorrotação (tensor de curvatura) na função densidade de energia de deformação, ou seja, incluem-se oito² dos dezoito componentes do primeiro gradiente de deformação (Grentzelou e Georgiadis, 2005; Tekoğlu, 2007).

Toupin (1962, 1964) desenvolveu uma teoria mais geral não linear em que todos os componentes do primeiro gradiente de deformação foram introduzidos na função densidade de energia de deformação, denominada teoria do primeiro gradiente de deformação. A versão linear desta teoria foi proposta por Mindlin (1964) e Mindlin e Eshel (1968). Green e Rivlin (1964*a,b*) estabeleceram as bases de uma teoria ainda mais abrangente que inclui todos os gradientes de deslocamento de ordem superior na função densidade de energia de deformação e a denominaram teoria multipolar. A teoria do primeiro gradiente de deformação é um caso especial desta teoria, assim como a teoria do segundo gradiente de deformação de Mindlin (1965), em que se consideram o primeiro e o segundo gradiente de deformação.

¹Esta teoria é referida como teoria das tensões-momento (Koiter, 1964*a,b*), teoria de Cosserat com rotação restrita (Toupin, 1964), teoria indeterminada das tensões-momento (Eringen, 1968*c*), pseudo-contínuo de Cosserat (Nowacki, 1986) ou, mesmo, teoria de Cosserat (Mora e Waas, 2000).

²Conforme Mindlin e Eshel (1968), os dezoito componentes do primeiro gradiente de deformação podem ser combinados linearmente de modo a serem representados pelos oito componentes do gradiente do vetor de (macro)rotação e os dez componentes de sua parte simétrica.

O efeito do gradiente pode também ser limitado à parcela plástica da deformação, o que leva a modelos de plasticidade de gradiente de deformação (Aifantis, 1984; Forest e Bertram, 2011), assim como têm teorias que incluem gradientes de variáveis internas (Maugin, 1990). Todas essas teorias, que associam energia aos gradientes de deformação, ou seja, que consideram gradientes de deslocamento de ordem superior, são referidas na literatura como teorias de contínuos de gradiente superior.

Os contínuos de gradiente superior são apropriados à análise de meios nos quais a definição de deformação na vizinhança de um ponto material por transformação afim ($d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$, em que $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$) não é suficiente para caracterização do seu comportamento, por serem sensíveis a gradientes de deslocamento de ordem superior (Hirschberger, 2008; Forest, 2013). A consideração de gradientes de deslocamento de ordem superior introduz constantes materiais e fenômenos associados às escalas subjacentes à macroscópica (Mindlin, 1965; Forest et al., 2011).

Outra alternativa proposta de se estender a teoria do contínuo clássico para se incorporar o comportamento microestrutural na descrição do meio material consiste em se adicionar graus de liberdade cinemáticos às partículas materiais, definidos como independentes dos clássicos translacionais (Germain, 1973*a,b*; Forest, 1998; Tekoğlu, 2007; Hirschberger, 2008). Estas teorias são referidas na literatura como teorias de contínuos de ordem superior.

A denominação contínuos de ordem superior se refere à ordem dos termos retidos na expansão em série de Taylor da descrição do movimento nos microcontínuos incorporados às partículas materiais, conforme observado em Eringen e Şuhubi (1964*a*); Eringen (1968*b*); Germain (1973*b*); Hütter (2017). Nos contínuos de ordem superior, incorporam-se às partículas materiais microcontínuos representativos da microestrutura (Mindlin, 1964; Germain, 1973*b*), cuja cinemática define os graus de liberdade adicionais. Os microcontínuos são definidos como regiões de pequena extensão, tal que a descrição do movimento nestes domínios pode ser aproximada por sua expansão em série de Taylor em torno dos respectivos centros de massa (Germain, 1973*b*).

O centro de massa de um microcontínuo é definido como seu ponto de referência na macroescala, cujo movimento é descrito inteiramente neste nível de observação.

Sob esta ótica, pode-se interpretar o contínuo clássico como um contínuo de ordem zero (Hütter, 2017), ou seja, o movimento no microcontínuo é igual ao do seu centro de massa, de modo que a partícula material se comporte rigidamente, definida como ponto material. Nos contínuos de ordem superior, em contraste ao clássico, as partículas materiais são definidas como elementos deformáveis do meio material, com estrutura interna e com tamanho pequeno, porém, finito (Boresi et al., 2011).

Os contínuos de ordem superior são também chamados contínuos micromórficos de ordem n (Eringen, 1966*b*; Germain, 1973*b*). O contínuo micromórfico de ordem 1, ou simplesmente contínuo micromórfico, proposto de forma independente por Mindlin (1964)³ e Eringen e Şuhubi (1964*a,b*)⁴, é o contínuo de ordem superior com maior aplicação prática. De fato, conforme Eringen (1966*b*), os contínuos micromórficos de ordem $n > 1$ têm sua aplicação bastante questionável.

Segundo Eringen (1966*b*), a teoria de ordem 1 é suficientemente complicada para aplicações físicas reais. Além disto, com base nas condições físicas dependentes do tamanho do meio em que a teoria do contínuo é válida, os microcontínuos são pequenos em comparação ao meio, tal que se pode negligenciar os termos de ordem $n > 1$ na expansão em série de Taylor da descrição do movimento nestas regiões.

Na teoria do contínuo micromórfico (de ordem 1), a cinemática nos microcontínuos (partículas materiais) é descrita a partir do mapeamento de um vetor Ξ incorporado a estas regiões e com origem nos respectivos centros de massa ($\Xi \xrightarrow{\mathbf{X}, t} \xi$) por meio de uma transformação afim $\xi = \chi_K(\mathbf{X}, t)\Xi_K$, em que

$$\chi_K(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \xi}{\partial \Xi_K} \right|_{\Xi=0} \quad (2.1)$$

³Segundo Eringen (1968*b*, 1999), a versão linear da teoria micromórfica coincide com a teoria microestrutural de Mindlin (1964).

⁴Esta teoria foi complementada em Eringen (1964) com a introdução da lei de conservação da micro-inércia. A denominação contínuo micromórfico foi introduzida por Eringen (1966*b*).

Observa-se que, com base na consideração desta teoria acerca da ordem da aproximação da descrição do movimento nos microcontínuos (ordem 1), esta transformação é a referida expansão em série de Taylor, ou de Maclaurin, haja vista que esta expansão é em torno do centro de massa dos microcontínuos, definido como a origem do sistema destas regiões e como o ponto de referência na macroescala, cujo movimento é descrito inteiramente neste nível de observação, isto é, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t)|_{\boldsymbol{\Xi}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

O tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\chi}$ é chamado tensor gradiente de microdeformação (alternativamente, diretores deformáveis). A notação $\boldsymbol{\chi}_K$ representa três diretores deformáveis independentes incorporados às partículas materiais (Eringen e Şuhubi, 1964a; Eringen, 1999), que introduzem nove graus de liberdade cinemáticos adicionais, decorrentes das microdeformações. Ou seja, o contínuo micromórfico nada mais é do que um contínuo clássico enriquecido com nove graus de liberdade extras representados por três diretores deformáveis independentes $\boldsymbol{\chi}_K$ (Eringen, 1999).

O sentido físico destes graus de liberdade é investigado decompondo o tensor $\boldsymbol{\chi}$ no produto de dois tensores (Eringen, 1980; Mal e Singh, 1991), um tensor ortogonal próprio \mathbf{R} e um tensor simétrico positivo-definido \mathbf{U} ou \mathbf{V} , isto é

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{U}^2 = \boldsymbol{\chi}^T \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad \mathbf{V}^2 = \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}^T$$

Claramente, esta decomposição (polar) separa o tensor $\boldsymbol{\chi}$ em um componente que alonga (ou encurta) o vetor $\boldsymbol{\Xi}$ ao longo de três eixos mutuamente ortogonais, representado por \mathbf{U} ou \mathbf{V} , e em um componente que o rotaciona rigidamente, representado por \mathbf{R} . Conseqüentemente, os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são chamados tensores de microdeformação e o tensor \mathbf{R} tensor de microrrotação. As microdeformações constituem seis graus de liberdade cinemáticos adicionais e as microrrotações três.

Alusão deve ser feita a uma generalização do contínuo micromórfico (de ordem 1) proposta em Eringen (1968*b*) e mencionada em Eringen (1968*a*, 1970, 1976, 1999); Germain (1973*b*) sob o nome contínuo micromórfico de gradiente N . Nesta generalização, a cinemática nos microcontínuos é descrita a partir de N mapeamentos independentes $\Xi_\alpha \xrightarrow{\mathbf{X},t} \xi_\alpha \Rightarrow \chi_\alpha$, com $\alpha = 1, 2, \dots, N$, em que cada vetor Ξ_α incorporado a um microcontínuo e com origem em seu centro de massa se refere a uma sub-região deste domínio. O contínuo micromórfico anteriormente discutido é um caso especial desta teoria, dito contínuo micromórfico de ordem 1 e de gradiente 1 (Eringen, 1968*b*, 1970, 1999). Segundo Germain (1973*b*) e o próprio Eringen (1999), o contínuo micromórfico de gradiente $N > 1$ não apresenta significado físico claro.

Os conceitos do contínuo micromórfico foram apresentados por Eringen (1968*b*) no simpósio IUTAM (*International Union of Theoretical and Applied Mechanics*) sobre mecânica do contínuo generalizado (Kröner, 1968) em 1967. Esta teoria foi extensivamente considerada por Eringen⁵ e coautores (Eringen e Şuhubi, 1964*a,b*; Eringen, 1964, 1966*b*, 1968*a,b*, 1969, 1970, 1972*b*, 1976, 1992, 1999, 2002; Claus Jr. e Eringen, 1969; Eringen e Claus Jr., 1970; Twiss e Eringen, 1971, 1972) - *etc.*

Com base nos conceitos da teoria de Cosserat, Eringen (1966*a*, 1968*c*) derivou da teoria micromórfica (de ordem 1 e de gradiente 1) a teoria micropolar, que se distingue da teoria das tensões-momento pela consideração de microrrotações independentes das macrorrotações, o que implica na introdução de graus de liberdade adicionais (rotacionais) às partículas materiais. Para tanto, impuseram-se restrições ao gradiente de microdeformação χ , estratégia também adotada para derivação de vários outros casos especiais, que foram considerados previamente ou posteriormente na literatura (Germain, 1973*b*; Eringen, 1999; Forest e Sievert, 2006; Hirschberger, 2008; Forest, 2013).

⁵Ahmed Cemal Eringen (Kayseri, Turquia, 15 de fevereiro de 1921; 7 de dezembro de 2009) foi um engenheiro turco-estadunidense. Foi professor da Universidade de Princeton e fundador da *Society of Engineering Science*.

O contínuo clássico, por exemplo, pode ser obtido fazendo-se $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{I}$, em que \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem, ou seja, as partículas materiais são indeformáveis e não rotacionam. Um meio em que as partículas materiais podem se dilatar (ou contrair), mas não rotacionar, é chamado contínuo com microdilatação (Goodman e Cowin, 1972; Steeb e Diebels, 2003; Forest e Sievert, 2006) e pode ser obtido fazendo-se $\boldsymbol{\chi} = \chi \mathbf{I}$, em que χ é um escalar. Se, ao invés, as partículas materiais puderem rotacionar, mas não se deformar, o meio contínuo é o chamado micropolar (ou de Cosserat) (Cosserat e Cosserat, 1909; Toupin, 1962; Eringen, 1968c) e pode ser obtido fazendo-se $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{R}$. Uma combinação do contínuo com microdilatação e o micropolar é o contínuo com microexpansão (Eringen, 1990), obtido com $\boldsymbol{\chi} = \chi \mathbf{R}$. Analogamente ao contínuo com microdilatação, no contínuo com microdeformação (Forest e Sievert, 2006), as partículas materiais podem se deformar, mas não rotacionar, porém, arbitrariamente, obtido fazendo-se $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{U}$.

A hierarquia destes contínuos, ditos micromórficos, é apresentada na Tabela 2.1, onde se observam a quantidade de graus de liberdade (GL) adicionais e as grandezas que os definem. Nas Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, ilustra-se a cinemática das partículas materiais em cada um destes contínuos (Hirschberger, 2008).

Tabela 2.1: Hierarquia dos contínuos micromórficos (Forest e Sievert, 2006; Forest, 2013).

Contínuo	GL Adicionais		Referência
	Quantidade	Grandezas	
clássico	0	-	Cauchy (1828)
microdilatação	1	χ	Forest e Sievert (2006)
micropolar (Cosserat)	3	\mathbf{R}	Eringen (1968c)
microexpansão	4	χ, \mathbf{R}	Eringen (1990)
microdeformação	6	\mathbf{U}	Forest e Sievert (2006)
micromórfico	9	$\boldsymbol{\chi}$	Mindlin (1964) Eringen e Şuhubi (1964a,b)

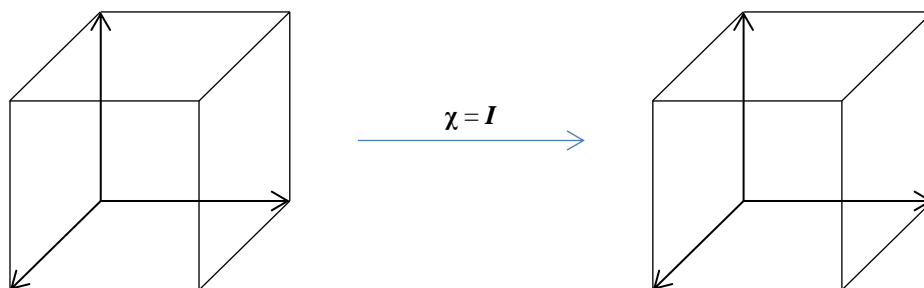


Figura 2.1: Cinemática das partículas materiais no contínuo clássico.

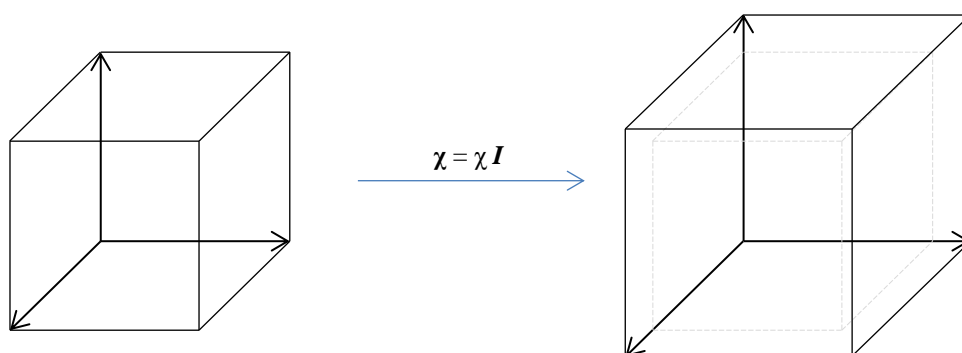


Figura 2.2: Cinemática das partículas materiais no contínuo com microdilatação.

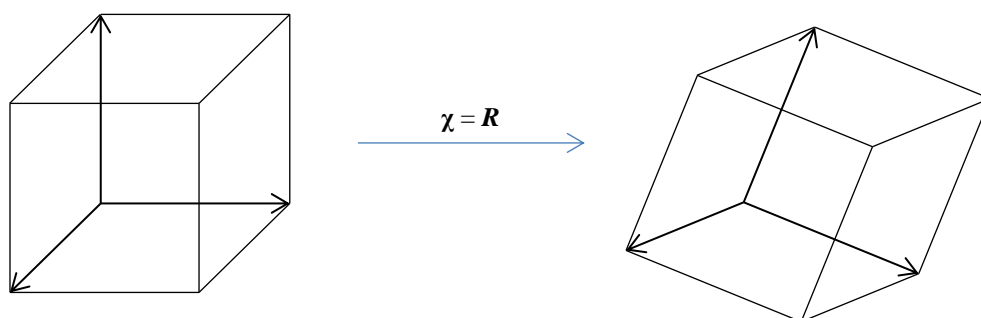


Figura 2.3: Cinemática das partículas materiais no contínuo micropolar (ou de Cosserat).

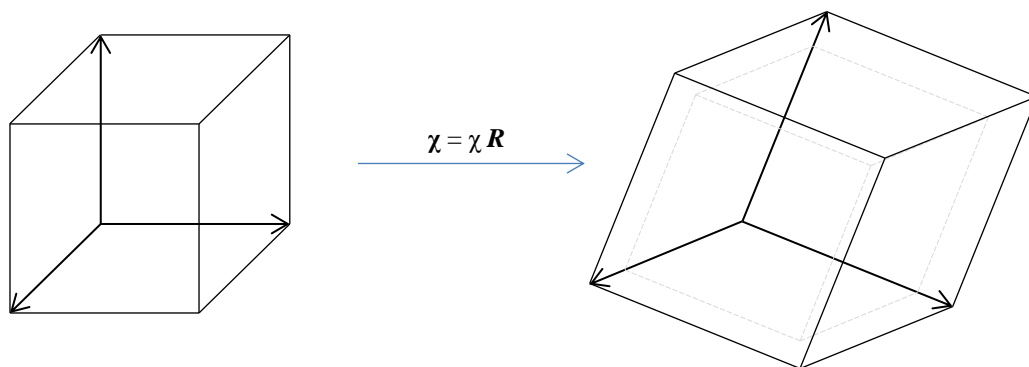


Figura 2.4: Cinemática das partículas materiais no contínuo com microexpansão.

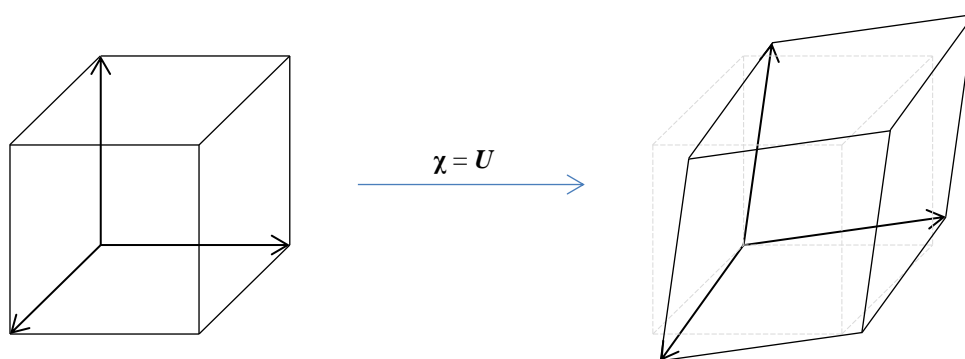


Figura 2.5: Cinemática das partículas materiais no contínuo com microdeformação.

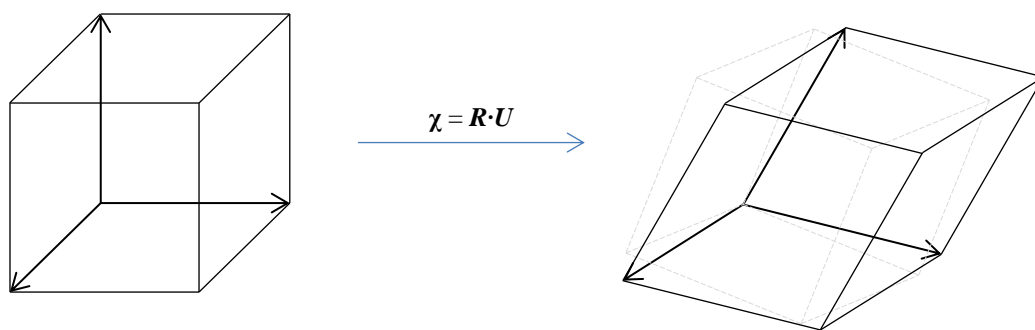


Figura 2.6: Cinemática das partículas materiais no contínuo micromórfico.

A partir da Tabela 2.1 e Figuras 2.1 - 2.6, pode-se estabelecer a relação entre os contínuos micromórficos tal como apresentada na Figura 2.7.

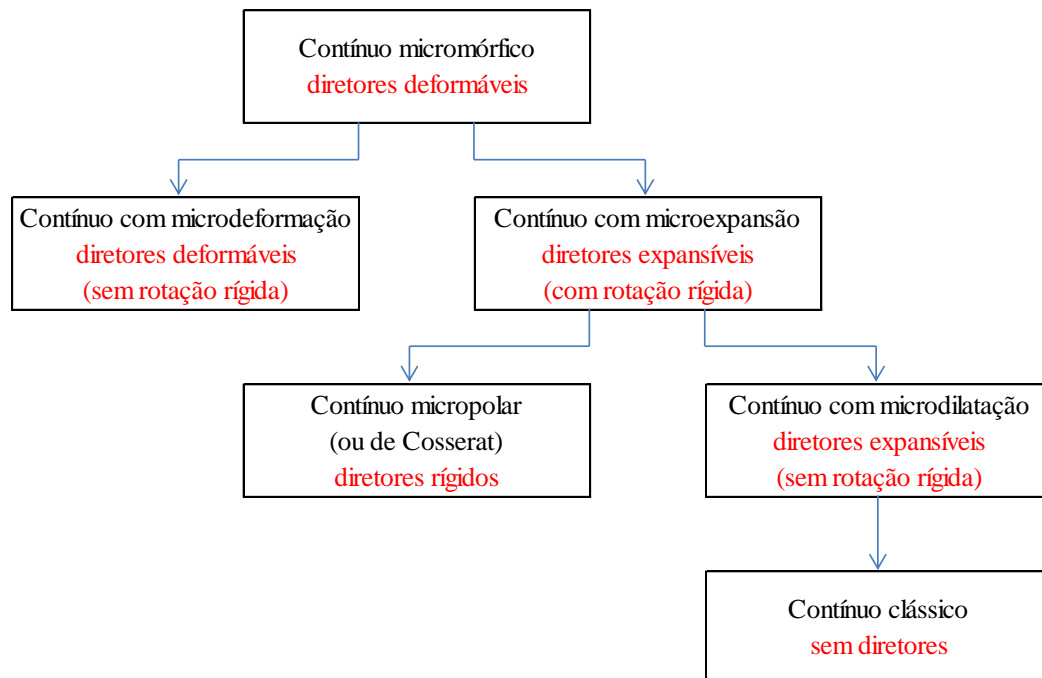


Figura 2.7: Relação entre contínuos micromórficos (adaptado de Eringen (1999)).

Eringen (1999) observa que, além das microdeformações presentes no componente \mathbf{U} ou \mathbf{V} do gradiente de microdeformação $\boldsymbol{\chi}$, existem microdeformações decorrentes do gradiente de $\boldsymbol{\chi}$, isto é, de $\boldsymbol{\chi}_{,K} = \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi}$. Logo, observa-se que a teoria do primeiro gradiente de deformação de Toupin (1962, 1964) também pode ser derivada da teoria do contínuo micromórfico ao se assumir que os microcontínuos estão sujeitos ao mesmo estado de deformação que o meio macroscópico, ou seja, $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{F}$ (Germain, 1973b; Tekoğlu, 2007; Forest, 2013), em que \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação.

A imposição ou não de restrições ao gradiente de microdeformação $\boldsymbol{\chi}$ condiciona a teoria do contínuo à análise de uma determinada classe de materiais, função do comportamento microestrutural (Eringen, 1999). A liberdade dada ao $\boldsymbol{\chi}$ na teoria do contínuo micromórfico faz com que esta teoria seja adequada à análise de meios materiais cuja microestrutura se deforma arbitrariamente (Mindlin, 1964; Eringen, 1999; Kirchner e Steinmann, 2005; Hirschberger, 2008; Maugin, 2014b).

A Figura 2.8 resume algumas teorias de contínuos generalizados e suas relações, apresentando seus graus de liberdade (GL) e medidas de deformação⁶ (MD).

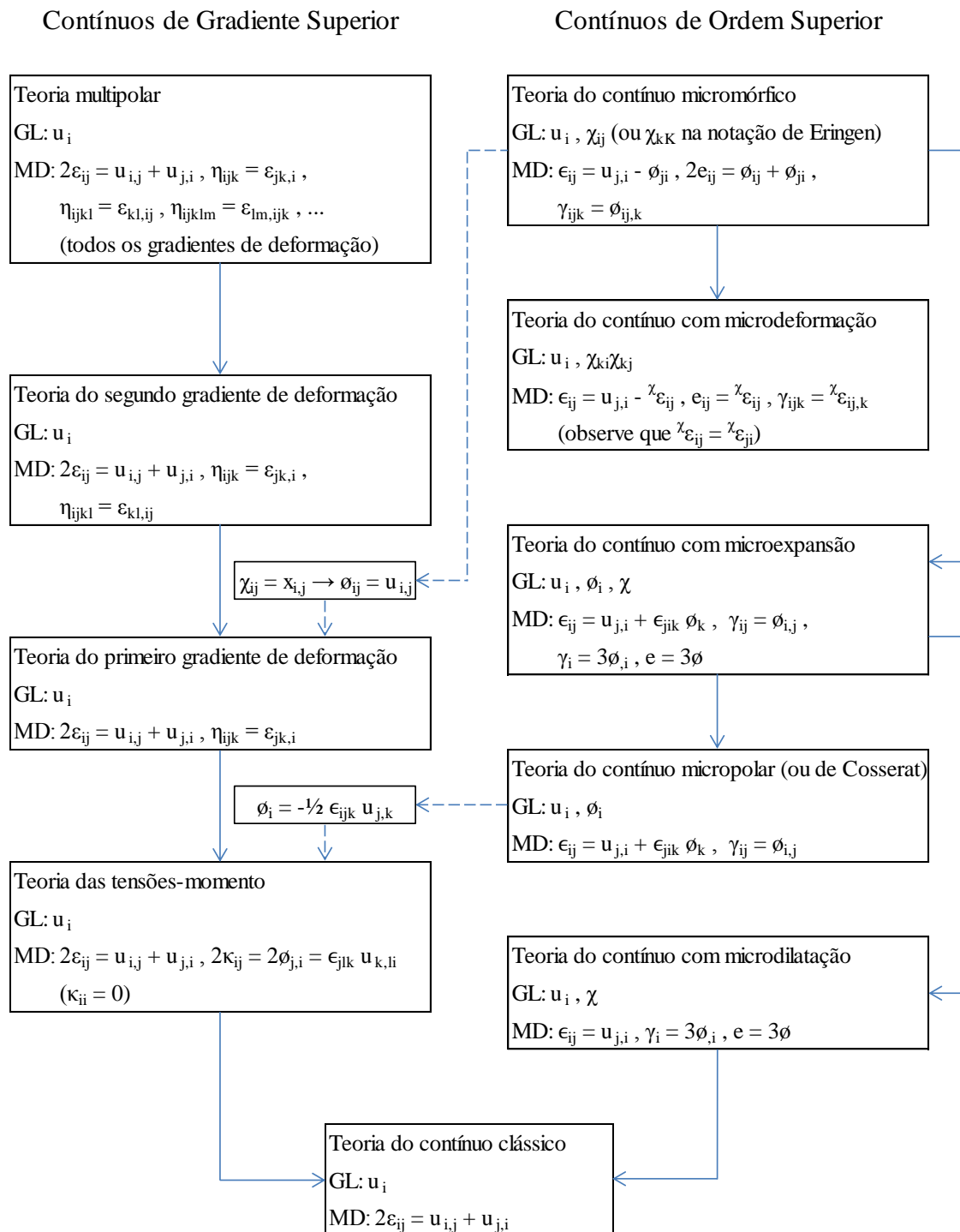


Figura 2.8: Teorias de contínuos generalizados (adaptado de Tekoğlu (2007)).

⁶Medidas de deformação infinitesimais (teoria linear).

Operadores:

δ_{ij} - delta de Kronecker

ϵ_{ijk} - símbolo de permutação (Levi-Civita)

Graus de liberdade:

u_i - vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material

χ_{ij} (ou χ_{kK}) - tensor gradiente de microdeformação

ϕ_{ij} - tensor gradiente de microdeslocamento ($\phi_{ij} = \chi_{ij} - \delta_{ij}$)

$\chi_{ki}\chi_{kj}$ - tensor de microdeformação de Cauchy-Green direito (${}^x\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$)

${}^x\varepsilon_{ij}$ - parcela simétrica de ϕ_{ij} (${}^x\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\chi_{ki}\chi_{kj} - \delta_{ij}) \simeq \frac{1}{2}(\phi_{ij} + \phi_{ji})$)

ϕ_i - vetor de microrrotação ($R_{jk} - \delta_{jk} \simeq \frac{1}{2}(\phi_{jk} - \phi_{kj}) \Rightarrow \phi_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\phi_{jk}$)

χ - microdilatação escalar

ϕ - gradiente de microdeslocamento da microdilatação escalar ($\phi = \chi - 1$)

Medidas de deformação:

$x_{i,j}$ - tensor gradiente de deformação

ε_{ij} - tensor de deformação

$\eta_{ijk}, \eta_{ijkl}, \eta_{ijklm}$ - primeiro, segundo e terceiro gradiente de deformação

κ_{ij} - gradiente do vetor de macrorrotação (tensor de curvatura)

ϵ_{ij} - tensor de deformação relativa (macro-micro)

e_{ij} - tensor de microdeformação

e - microdeformação volumétrica

γ_{ijk} - gradiente de microdeformação

γ_{ij} - gradiente do vetor de microrrotação (tensor de microcurvatura)

γ_i - gradiente da microdeformação volumétrica

Uma vasta literatura sobre teorias de contínuos generalizados foi desenvolvida nas últimas décadas (Aifantis, 1984, 1987; Fleck e Hutchinson, 1993, 1997, 2001; Forest e Sievert, 2003, 2006; Forest e Bertram, 2011; Forest, 2013, 2016) - *etc.*. As referências aqui listadas não esgotam de forma alguma o assunto, mas indicam as principais direções seguidas no campo das teorias de contínuos generalizados.

O ponto de partida deste trabalho é a teoria do contínuo micromórfico de Mindlin (1964) e Eringen e Şuhubi (1964*a,b*); Eringen (1964), cujos fundamentos tal como desenvolvidos em Eringen (1999) são apresentados a seguir (Capítulo 3).

Capítulo 3

Contínuo Micromórfico

Um contínuo micromórfico é uma coleção contínua de partículas deformáveis. Estas partículas, embora deformáveis, não violam o conceito de continuidade da matéria. Fisicamente, as partículas materiais são pontuais, ou seja, têm dimensões desprezáveis. No entanto, para se representar a deformação de partículas pontuais, ao invés de pontos matemáticos sem dimensões na macroescala, consideram-se pontos geométricos P de dimensões finitas e alguns vetores incorporados à P que indicam as orientações e deformações dos pontos materiais de P . Esta abordagem é compatível com a ideia clássica de que uma partícula material em um contínuo possui propriedades físicas, como densidade de massa, campo elétrico, tensor de tensão *etc.*. Os vetores incorporados à P representam, em adição, os graus de liberdade decorrentes das deformações dos pontos materiais desta partícula.

Uma partícula P é identificada pelo seu vetor de posição \mathbf{X} (X_K , $K = 1, 2, 3$) no estado de referência B e os vetores incorporados à P , representativos da estrutura interna de P , por Ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, em que \mathbf{X} e Ξ_α possuem movimentos próprios

$$\mathbf{X} \xrightarrow{t} \mathbf{x}, \quad \Xi_\alpha \xrightarrow{\mathbf{X}, t} \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Esta teoria é a chamada teoria micromórfica de gradiente N . Embora proposta em Eringen (1968b), uma teoria geral desta magnitude ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) ainda não foi desenvolvida, segundo Eringen (1999) e o estado da arte aqui levantado. Neste trabalho, considera-se o caso de gradiente 1 ($\alpha = 1$), isto é, a teoria micromórfica de gradiente 1, ou simplesmente teoria micromórfica.

3.1 Cinemática da Deformação

Na teoria micromórfica, uma partícula material $P(\mathbf{X}, \Xi) \in B$ é caracterizada pelo seu centro de massa C e pelo seu vetor incorporado Ξ , em que o ponto C é identificado por suas coordenadas retangulares X_K ($K = 1, 2, 3$) e o vetor Ξ por seus componentes Ξ_K ($K = 1, 2, 3$). Sob solicitações, movimento acompanhado de deformação do meio ocorre, carregando a partícula material $P(\mathbf{X}, \Xi)$ continuamente para $p(\mathbf{x}, \xi, t)$ em uma configuração espacial b , tal que $X_K \rightarrow x_k$, $\Xi_K \rightarrow \xi_k$ ($K = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$) (Figura 3.1).

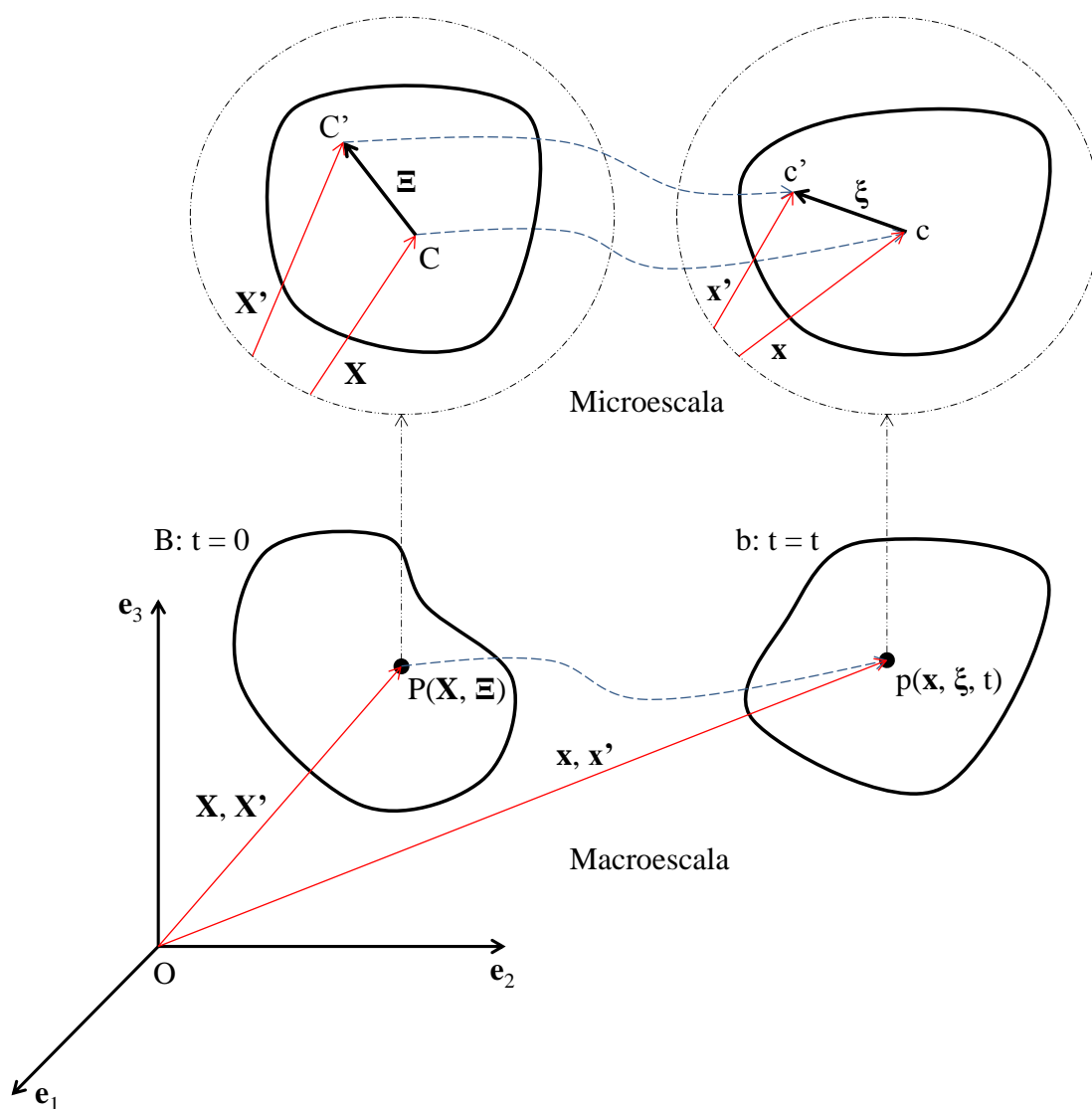


Figura 3.1: Cinemática do contínuo micromórfico (adaptado de Eringen (1999)).

Do ponto de vista físico (e prático), é vantajoso se definir os vetores Ξ e ξ como posições dos pontos materiais de P relativas ao centro de massa desta partícula ($C \rightarrow c$) nas configurações, respectivamente, de referência e espacial (Figura 3.1). É importante se observar que a definição de um único vetor Ξ incorporado à P significa que a deformação de toda a extensão de P é monitorada por este vetor.

Conforme destacado, \mathbf{X} e Ξ possuem movimentos próprios, expressos por

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ou} \quad x_k = x_k(X_K, t) \quad (3.2)$$

$$\Xi \longrightarrow \xi = \xi(\mathbf{X}, \Xi, t) \quad \text{ou} \quad \xi_k = \xi_k(X_K, \Xi_K, t) \quad (3.3)$$

O mapeamento (3.2) é chamado macromovimento (ou somente movimento) e o (3.3) micromovimento. As partículas materiais, embora tenham dimensões finitas, são definidas como regiões de pequena extensão em comparação ao meio, de modo que o micromovimento (3.3) pode ser aproximado por uma transformação afim¹

$$\xi = \chi_K(\mathbf{X}, t)\Xi_K \quad \text{ou} \quad \xi_k = \chi_{kK}(\mathbf{X}, t)\Xi_K \quad (3.4)$$

em que χ , conforme apresentado na Seção 2.1, é o tensor gradiente de microdeformação (alternativamente, diretores deformáveis) dado por

$$\chi_K(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \xi}{\partial \Xi_K} \right|_{\Xi=0} \quad (3.5)$$

em que $\Xi = \mathbf{0}$, deve-se observar, é a posição do centro de massa de P no sistema local relativo desta partícula.

¹Teoria do contínuo micromórfico de ordem 1 (Seção 2.1).

O movimento de um ponto material $C' \in P$ de coordenadas X'_K ($K = 1, 2, 3$) é, então, completamente descrito pela composição macro-micromovimento (3.2) - (3.4)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t) := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\chi}_K(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\Xi}_K \quad (3.6)$$

Observe que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t)|_{\boldsymbol{\Xi}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, isto é, o movimento do centro de massa de P é, por definição, descrito inteiramente na macroescala.

O deslocamento \mathbf{u}' do ponto material $C' \rightarrow c'$ devido ao movimento (3.6) é dado pela diferença entre a sua posição final e a inicial, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{x}'(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t) - \mathbf{X}'(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}) = [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\Xi}] - (\mathbf{X} + \boldsymbol{\Xi}) \quad \therefore \\ \mathbf{u}' &= [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}] + [\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\Xi} - \boldsymbol{\Xi}] = [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}] + [\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{I}] \cdot \boldsymbol{\Xi} \quad \therefore \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\Xi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que

\mathbf{u} é o vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material; $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}$ é o tensor gradiente de microdeslocamento.

A idealização matemática (3.6) pressupõe que os mapeamentos (3.2) e (3.4) são funções contínuas diferenciáveis em X_K e t para todos os $\mathbf{X} \in B$ e $t > 0$. Assume-se, ainda, que estes mapeamentos são injetivos, tal que sejam inversíveis unicamente

$$X_K = X_K(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\mathfrak{X}}_k(\mathbf{x}, t)\xi_k \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\Xi}_K = \boldsymbol{\mathfrak{X}}_{Kk}(\mathbf{x}, t)\xi_k \quad (3.9)$$

em que $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ é o tensor inverso do tensor gradiente de microdeformação.

A existência de inversas únicas (3.8) e (3.9) expressa a suposição de continuidade, indestrutibilidade e impenetrabilidade da matéria. Nenhuma região de volume finito é deformada em um volume zero ou infinito. Toda região vai para uma região, toda superfície para uma superfície e toda curva para uma curva. Os três diretores independentes \mathfrak{X}_k vão para os três diretores independentes χ_K .

Uma partícula material do meio é agora considerada possuindo três diretores deformáveis independentes que representam os nove graus de liberdade decorrentes das microdeformações da partícula física. Ou seja, um contínuo micromórfico nada mais é do que um contínuo clássico enriquecido com nove graus de liberdade extras representados por três diretores deformáveis independentes $\mathfrak{X}_k \rightarrow \chi_K$, tal como ilustrado na Figura 3.2.

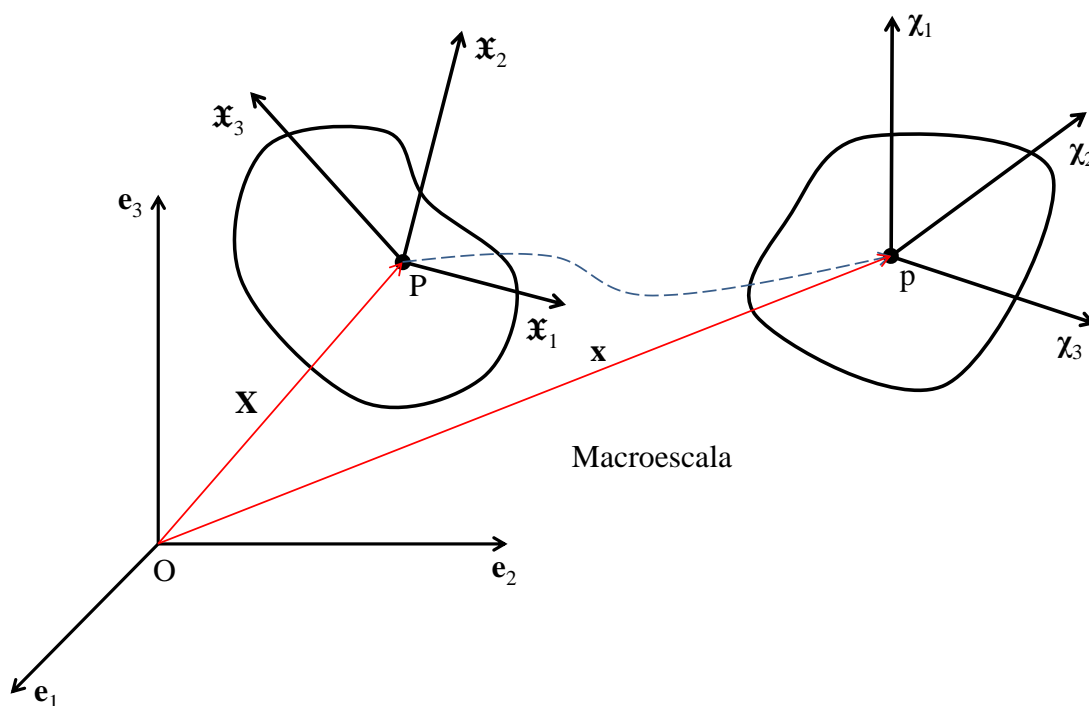


Figura 3.2: Diretores deformáveis (adaptado de Eringen (1999)).

3.2 Elasticidade Micromórfica Linear

A partir da cinemática da deformação apresentada na Seção 3.1, Eringen e Şuhubi (1964*a,b*) construíram diversos conjuntos de tensores de deformação. Um desses conjuntos que conduz a resultados um pouco mais simples, particularmente nas equações constitutivas, é

$$\mathfrak{C}_{KL} = x_{k,K} \mathfrak{X}_{Lk}, \quad \mathfrak{C}_{KL} = \chi_{kK} \chi_{kL} = \mathfrak{C}_{LK}, \quad \Gamma_{KLM} = \mathfrak{X}_{Kk} \chi_{kL,M} \quad (3.10)$$

em que

\mathfrak{C}_{KL} é chamado tensor de deformação;

\mathfrak{C}_{KL} é chamado tensor de microdeformação;

Γ_{KLM} é chamado tensor de distorção (*wryness*).

Em uma aproximação linear, os tensores de deformação (3.10) podem ser reescritos como

$$\mathfrak{C}_{KL} - \delta_{KL} \approx \epsilon_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL}, \quad \mathfrak{C}_{KL} - \delta_{KL} \approx 2e_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL}, \quad \Gamma_{KLM} = \gamma_{klm} \delta_{kK} \delta_{lL} \delta_{mM} \quad (3.11)$$

em que ϵ_{kl} , e_{kl} e γ_{klm} são definidos como (Figura 2.8)

$$\epsilon_{kl} = u_{l,k} - \phi_{lk}, \quad 2e_{kl} = \phi_{kl} + \phi_{lk}, \quad \gamma_{klm} = \phi_{kl,m} \quad (3.12)$$

em que (Equação (3.7))

u_l é o vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material;

$\phi_{kl} = \chi_{kl} - \delta_{kl}$ é o tensor gradiente de microdeslocamento.

A energia livre ψ pode então, desconsiderando-se variação de temperatura, ser aproximada por

$$\begin{aligned} \Sigma = \rho_0 \psi \approx & \Sigma_0 + \frac{1}{2} A_{klmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \frac{1}{2} B_{klmn} e_{kl} e_{mn} + \frac{1}{2} C_{klmnpq} \gamma_{klm} \gamma_{npq} + \\ & + E_{klmn} \epsilon_{kl} e_{mn} + F_{klmnp} \epsilon_{kl} \gamma_{mnp} + G_{klmnp} e_{kl} \gamma_{mnp} \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que

ρ_0 é a densidade de massa da partícula material na configuração de referência;

Σ é a função densidade de energia interna;

Σ_0 é a densidade de energia interna inicial;

$U_0 = \Sigma - \Sigma_0$ é a função densidade de energia de deformação;

A_{klmn} , B_{klmn} , C_{klmnpq} , E_{klmn} , F_{klmnp} e G_{klmnp} são os módulos constitutivos.

Eringen (1999) observa as seguintes simetrias dos módulos constitutivos

$$\begin{aligned} A_{klmn} &= A_{mnkl}, & B_{klmn} &= B_{mnkl} = B_{lkmn} = B_{nmkl}, \\ C_{klmnpq} &= C_{npqklm}, & E_{klmn} &= E_{klnm}, & G_{klmnp} &= G_{lkmp} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da Equação (3.13), pode-se definir os tensores de tensão da teoria da elasticidade micromórfica linear, conjugados energéticos de ϵ_{kl} , e_{kl} e γ_{klm} , isto é

$$t_{kl} \approx \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{kl}} = A_{klmn} \epsilon_{mn} + E_{klmn} e_{mn} + F_{klmnp} \gamma_{mnp} \quad (3.15)$$

$$s_{kl} \approx \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{kl}} = E_{mnkl} \epsilon_{mn} + B_{klmn} e_{mn} + G_{klmnp} \gamma_{mnp} \quad (3.16)$$

$$m_{klm} \approx \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_{lmk}} = F_{nplmk} \epsilon_{np} + G_{nplmk} e_{np} + C_{lmknpq} \gamma_{npq} \quad (3.17)$$

em que

t_{kl} é chamado tensor de tensão;

s_{kl} é introduzido em Eringen (1999) como um tensor simétrico arbitrário, porém, chamado “tensor de microtensão média” em Eringen e Şuhubi (1964a,b);

m_{klm} é chamado tensor de tensão-momento, porém, é definido de forma diferente daquele da teoria do contínuo de Cosserat. Em Eringen e Şuhubi (1964a,b), este tensor de tensão é apresentado sob o símbolo λ^{klm} e chamado “primeiro tensor de tensão-momento de superfície”.

Para sólidos micromórficos que possuem vários grupos de simetria, as equações constitutivas (3.15), (3.16) e (3.17) são simplificadas submetendo os módulos constitutivos às simetrias apropriadas. Para o caso de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico, os módulos constitutivos de ordem ímpar desaparecem e os de ordem par são construídos por meio de produtos do delta de Kronecker δ_{kl} , isto é

$$\begin{aligned}
A_{klmn} &= \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + \kappa) \delta_{km} \delta_{ln} + \mu \delta_{kn} \delta_{lm}, \\
E_{klmn} &= (\lambda + \nu) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + \sigma) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\
F_{klmnp} &= 0, \\
B_{klmn} &= (\lambda + 2\nu + \tau) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + 2\sigma + \eta) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\
G_{klmnp} &= 0, \\
C_{klmnpq} &= \tau_1 (\delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{pq} + \delta_{kq} \delta_{lm} \delta_{np}) + \tau_2 (\delta_{kl} \delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{km} \delta_{lp} \delta_{nq}) + \\
&+ \tau_3 \delta_{kl} \delta_{mq} \delta_{np} + \tau_4 \delta_{kn} \delta_{lm} \delta_{pq} + \tau_5 (\delta_{km} \delta_{ln} \delta_{pq} + \delta_{kp} \delta_{lm} \delta_{nq}) + \\
&+ \tau_6 \delta_{km} \delta_{lp} \delta_{nq} + \tau_7 \delta_{kn} \delta_{lp} \delta_{mq} + \tau_8 (\delta_{kp} \delta_{lq} \delta_{mn} + \delta_{kq} \delta_{ln} \delta_{mp}) + \\
&+ \tau_9 \delta_{kn} \delta_{lq} \delta_{mp} + \tau_{10} \delta_{kp} \delta_{ln} \delta_{mq} + \tau_{11} \delta_{kq} \delta_{lp} \delta_{mn}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

em que $\lambda, \mu, \kappa, \nu, \sigma, \tau, \eta$ e $\tau_1 \dots \tau_{11}$ são 18 parâmetros elásticos.

As equações de equilíbrio estático podem ser obtidas com base em considerações termodinâmicas, conforme em Eringen (1999), por meio do princípio dos trabalhos virtuais, conforme em Germain (1973b), ou ainda pelo princípio da energia potencial total estacionária (Dym e Shames, 2013), em que se enuncia

$$\delta^{(1)}\Pi = \delta^{(1)}(U + V) = 0 \quad (3.19)$$

em que

$\delta^{(1)}$ é a primeira variação do funcional Π ;

$\Pi = U + V$ é a energia potencial total do corpo;

U é a energia de deformação ($U = \int_{\mathcal{V}} U_0 dv$);

V é a energia potencial das forças aplicadas.

Para problemas da teoria da elasticidade micromórfica linear, tem-se

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}U &= \delta^{(1)} \int_{\mathcal{V}} U_0 dv = \int_{\mathcal{V}} \delta^{(1)} U_0 dv = \int_{\mathcal{V}} (t_{kl} \delta \epsilon_{kl} + s_{kl} \delta e_{kl} + m_{klm} \delta \gamma_{lmk}) dv = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ t_{kl} \delta (u_{l,k} - \phi_{lk}) + s_{kl} \delta \left[\frac{1}{2} (\phi_{kl} + \phi_{lk}) \right] + m_{klm} \delta \phi_{lm,k} \right\} dv = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (t_{kl} \delta u_{l,k} - t_{kl} \delta \phi_{lk} + s_{kl} \delta \phi_{lk} + m_{klm} \delta \phi_{lm,k}) dv = \\ &= \int_{\mathcal{V}} [t_{kl} \delta u_{l,k} + (s_{kl} - t_{kl}) \delta \phi_{lk} + m_{klm} \delta \phi_{lm,k}] dv = \\ &= \int_{\mathcal{V}} [t_{kl} \delta u_{l,k} + (s_{ml} - t_{ml}) \delta \phi_{lm} + m_{klm} \delta \phi_{lm,k}] dv \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\delta^{(1)}V = - \int_{\mathcal{V}} (\rho f_l \delta u_l + \rho l_{lm} \delta \phi_{lm}) dv - \int_{\partial \mathcal{V}} (\hat{t}_{(\mathbf{n})l} \delta u_l + \hat{m}_{(\mathbf{n})lm} \delta \phi_{lm}) ds \quad (3.21)$$

em que

\mathcal{V} é o domínio considerado;

$\partial\mathcal{V}$ é o contorno do domínio considerado;

δ é chamado operador delta e aqui representa uma pequena variação arbitrária nos campos de deslocamento/deformação;

ρ é a densidade de massa da partícula material na configuração espacial;

f_l é o vetor de força de corpo por unidade de massa;

l_{lm} é o tensor de momento (força dupla) de corpo por unidade de massa;

$\hat{t}_{(\mathbf{n})l}$ é o vetor de força de superfície (vetor de tensão);

$\hat{m}_{(\mathbf{n})lm}$ é o tensor de momento (força dupla) de superfície;

\mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno $\partial\mathcal{V}$.

Das Equações (3.19), (3.20) e (3.21), se valendo da regra de derivação do produto e aplicando-se o teorema de Green-Gauss (teorema da divergência), tem-se

$$\begin{aligned}
\delta^{(1)}\Pi &= \int_{\mathcal{V}} [-t_{kl,k}\delta u_l + (s_{ml} - t_{ml})\delta\phi_{lm} - m_{klm,k}\delta\phi_{lm}] dv + \\
&+ \int_{\partial\mathcal{V}} (t_{kl}n_k\delta u_l + m_{klm}n_k\delta\phi_{lm}) ds - \\
&- \int_{\mathcal{V}} (\rho f_l\delta u_l + \rho l_{lm}\delta\phi_{lm}) dv - \\
&- \int_{\partial\mathcal{V}} (\hat{t}_{(\mathbf{n})l}\delta u_l + \hat{m}_{(\mathbf{n})lm}\delta\phi_{lm}) ds = \\
&= \int_{\mathcal{V}} [-(t_{kl,k} + \rho f_l)\delta u_l - (m_{klm,k} + t_{ml} - s_{ml} + \rho l_{lm})\delta\phi_{lm}] dv + \\
&+ \int_{\partial\mathcal{V}} [(t_{kl}n_k - \hat{t}_{(\mathbf{n})l})\delta u_l + (m_{klm}n_k - \hat{m}_{(\mathbf{n})lm})\delta\phi_{lm}] ds = 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

A partir da condição de equilíbrio (3.22), observando-se que essa condição é válida para qualquer pequena variação arbitrária nos campos de deslocamento/deformação, δ , definem-se as equações de equilíbrio, bem como as condições de contorno, que regem os problemas estáticos da teoria da elasticidade micromórfica linear.

Equações de equilíbrio:

$$t_{kl,k} + \rho f_l = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (3.23)$$

$$m_{klm,k} + t_{ml} - s_{ml} + \rho l_{lm} = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (3.24)$$

Condições de contorno:

$$u_k = \hat{u}_k \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V}_u, \quad t_{kl}n_k = \hat{t}_{(n)l} \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V}_t \quad (3.25)$$

$$\phi_{kl} = \hat{\phi}_{kl} \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V}_\phi, \quad m_{klm}n_k = \hat{m}_{(n)lm} \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{V}_m \quad (3.26)$$

em que

\hat{u}_k são componentes prescritos do vetor de deslocamento translacional ao longo do contorno indicado, $\partial\mathcal{V}_u$;

$\hat{\phi}_{kl}$ são componentes prescritos do tensor gradiente de microdeslocamento ao longo do contorno indicado, $\partial\mathcal{V}_\phi$;

n_k é o vetor unitário normal ao contorno $\partial\mathcal{V}$;

$\partial\mathcal{V}_u \cap \partial\mathcal{V}_t = 0$, $\partial\mathcal{V}_\phi \cap \partial\mathcal{V}_m = 0$ e $\partial\mathcal{V} = \partial\mathcal{V}_u \cup \partial\mathcal{V}_t = \partial\mathcal{V}_\phi \cup \partial\mathcal{V}_m$.

3.3 Abordagem por Elementos Finitos

Conforme Hirschberger (2008), Isbuga e Regueiro (2011) e Ansari et al. (2016), na abordagem da teoria micromórfica segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF), definem-se interpolações independentes para o macro e micromovimento

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}_u \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n N_j \begin{Bmatrix} d_{u_1} \\ d_{u_2} \\ d_{u_3} \end{Bmatrix}_j \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{d}_\phi \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \\ \phi_{33} \\ \phi_{23} \\ \phi_{32} \\ \phi_{31} \\ \phi_{13} \\ \phi_{12} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \bar{N}_j \begin{Bmatrix} d_{\phi_{11}} \\ d_{\phi_{22}} \\ d_{\phi_{33}} \\ d_{\phi_{23}} \\ d_{\phi_{32}} \\ d_{\phi_{31}} \\ d_{\phi_{13}} \\ d_{\phi_{12}} \\ d_{\phi_{21}} \end{Bmatrix}_j \quad (3.28)$$

em que

\mathbf{u} é o vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material;

$\boldsymbol{\phi}$ é o tensor gradiente de microdeslocamento no formato vetorial;

\mathbf{N} é a matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do macromovimento;

$\bar{\mathbf{N}}$ é a matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento;

\mathbf{d}_u é o vetor dos graus de liberdade macroscópicos;

\mathbf{d}_ϕ é o vetor dos graus de liberdade microscópicos;

n é o número de nós da discretização considerada para o macromovimento;

m é o número de nós da discretização considerada para o micromovimento.

A partir das interpolações (3.27) e (3.28), os campos de deformação (3.12) podem ser aproximados por

$$\boldsymbol{\epsilon} = M\mathbf{L}_u\mathbf{N}\mathbf{d}_u - M\bar{\mathbf{N}}\mathbf{d}_\phi, \quad 2\mathbf{e} = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{d}_\phi + M\bar{\mathbf{N}}\mathbf{d}_\phi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{L}_\phi\bar{\mathbf{N}}\mathbf{d}_\phi \quad \therefore$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_u\mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T\mathbf{d}_\phi, \quad \mathbf{e} = \bar{\mathbf{N}}_S\mathbf{d}_\phi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_\phi\mathbf{d}_\phi \quad (3.29)$$

em que

$\boldsymbol{\epsilon}$, \mathbf{e} e $\boldsymbol{\gamma}$ são os tensores de deformação relativa (macro-micro), de microdeformação e gradiente de microdeformação no formato vetorial

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \epsilon_{23} \quad \epsilon_{32} \quad \epsilon_{31} \quad \epsilon_{13} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{21}]^T \quad (3.30)$$

$$\mathbf{e} = [e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad e_{23} \quad e_{32} \quad e_{31} \quad e_{13} \quad e_{12} \quad e_{21}]^T \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{array} \right\}_{(27 \times 1)} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 = [\gamma_{111} \quad \gamma_{221} \quad \gamma_{122} \quad \gamma_{212} \quad \gamma_{331} \quad \gamma_{133} \quad \gamma_{313}]^T \\ \gamma_2 = [\gamma_{222} \quad \gamma_{112} \quad \gamma_{211} \quad \gamma_{121} \quad \gamma_{332} \quad \gamma_{233} \quad \gamma_{323}]^T \\ \gamma_3 = [\gamma_{333} \quad \gamma_{113} \quad \gamma_{311} \quad \gamma_{131} \quad \gamma_{223} \quad \gamma_{322} \quad \gamma_{232}]^T \\ \gamma_4 = [\gamma_{231} \quad \gamma_{321} \quad \gamma_{312} \quad \gamma_{132} \quad \gamma_{123} \quad \gamma_{213}]^T \end{array} \quad (3.32)$$

\mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são matrizes de aproximação das deformações, e

$\bar{\mathbf{N}}_T$ e $\bar{\mathbf{N}}_S$ são matrizes das funções interpoladoras do micromovimento, respectivamente, “transposta” e “simétrica”

$$\mathbf{B}_u = M\mathbf{L}_u\mathbf{N}, \quad \mathbf{B}_\phi = \mathbf{L}_\phi\bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}}_T = M\bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}}_S = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{N}} + \bar{\mathbf{N}}_T) \quad (3.33)$$

em que

\mathbf{M} é aqui chamada matriz de rearranjo, introduzida para o cômputo adequado dos componentes de deformação no formato vetorial,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

\mathbf{L}_u e \mathbf{L}_ϕ são operadores diferenciais ($\partial_i = \partial/\partial X_i$)

$$\mathbf{L}_u = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{L}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\phi;1} \\ \mathbf{L}_{\phi;2} \\ \mathbf{L}_{\phi;3} \\ \mathbf{L}_{\phi;4} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

em que

$$\mathbf{L}_{\phi;1} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{L}_{\phi;2} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{L}_{\phi;3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{L}_{\phi;4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Definidas as aproximações para os campos de deformação (3.29), definem-se, também, suas variações

$$\delta\epsilon = \mathbf{B}_u\delta\mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T\delta\mathbf{d}_\phi, \quad \delta\mathbf{e} = \bar{\mathbf{N}}_S\delta\mathbf{d}_\phi, \quad \delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_\phi\delta\mathbf{d}_\phi \quad (3.41)$$

Dando continuidade à formulação fraca da teoria micromórfica, reescrevem-se as relações constitutivas (3.15), (3.16) e (3.17) no formato matricial, considerando-se a isotropia do meio, bem como definem-se as aproximações para os campos de tensão

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{E}\mathbf{e} \quad \therefore \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}(\mathbf{B}_u\mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T\mathbf{d}_\phi) + \mathbf{E}\bar{\mathbf{N}}_S\mathbf{d}_\phi \quad (3.42)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}^T\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{B}\mathbf{e} \quad \therefore \quad \mathbf{s} = \mathbf{E}^T(\mathbf{B}_u\mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T\mathbf{d}_\phi) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{N}}_S\mathbf{d}_\phi \quad (3.43)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} \quad \therefore \quad \mathbf{m} = \mathbf{C}\mathbf{B}_\phi\mathbf{d}_\phi \quad (3.44)$$

em que

\mathbf{t} , \mathbf{s} e \mathbf{m} são os tensores de tensão, de microtensão média e de tensão-momento no formato vetorial

$$\mathbf{t} = [t_{11} \quad t_{22} \quad t_{33} \quad t_{23} \quad t_{32} \quad t_{31} \quad t_{13} \quad t_{12} \quad t_{21}]^T \quad (3.45)$$

$$\mathbf{s} = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad s_{23} \quad s_{32} \quad s_{31} \quad s_{13} \quad s_{12} \quad s_{21}]^T \quad (3.46)$$

$$\mathbf{m} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_3 \\ \mathbf{m}_4 \end{array} \right\}_{(27 \times 1)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{m}_1 = [m_{111} \quad m_{122} \quad m_{212} \quad m_{221} \quad m_{133} \quad m_{313} \quad m_{331}]^T \\ \mathbf{m}_2 = [m_{222} \quad m_{211} \quad m_{121} \quad m_{112} \quad m_{233} \quad m_{323} \quad m_{332}]^T \\ \mathbf{m}_3 = [m_{333} \quad m_{311} \quad m_{131} \quad m_{113} \quad m_{322} \quad m_{232} \quad m_{223}]^T \\ \mathbf{m}_4 = [m_{123} \quad m_{132} \quad m_{231} \quad m_{213} \quad m_{312} \quad m_{321}]^T \end{array} \quad (3.47)$$

$\mathbf{A}_{(9 \times 9)}$, $\mathbf{B}_{(9 \times 9)}$, $\mathbf{C}_{(27 \times 27)}$ e $\mathbf{E}_{(9 \times 9)}$ são as matrizes constitutivas de um sólido micro-mórfico linear elástico isotrópico, construídas por meio dos 18 parâmetros elásticos dados na Equação (3.18).

O sistema de equações lineares pode ser obtido a partir da condição de equilíbrio (3.19), definida por meio das Equações (3.20) e (3.21) reescritas no formato matricial, convenientemente estruturadas

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Pi &= \int_{\mathcal{V}} (\delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{t} + \delta \mathbf{e}^T \mathbf{s} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{m}) dv - \\ &- \int_{\mathcal{V}} (\delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{f} + \delta \boldsymbol{\phi}^T \rho \mathbf{l}) dv - \int_{\partial \mathcal{V}} (\delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}_{(\mathbf{n})} + \delta \boldsymbol{\phi}^T \hat{\mathbf{m}}_{(\mathbf{n})}) ds = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que

$\rho \mathbf{f}$ e $\hat{\mathbf{t}}_{(\mathbf{n})}$ são os vetores de força, respectivamente, de corpo por unidade de volume e de superfície (vetor de tensão), e

$\rho \mathbf{l}$ e $\hat{\mathbf{m}}_{(\mathbf{n})}$ são os tensores de momento (força dupla), respectivamente, de corpo por unidade de volume e de superfície, no formato matricial

$$\rho \mathbf{f} = [\rho f_1 \quad \rho f_2 \quad \rho f_3]^T \quad (3.49)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_{(\mathbf{n})} = [\hat{t}_{(\mathbf{n})1} \quad \hat{t}_{(\mathbf{n})2} \quad \hat{t}_{(\mathbf{n})3}]^T \quad (3.50)$$

$$\rho \mathbf{l} = [\rho l_{11} \quad \rho l_{22} \quad \rho l_{33} \quad \rho l_{23} \quad \rho l_{32} \quad \rho l_{31} \quad \rho l_{13} \quad \rho l_{12} \quad \rho l_{21}]^T \quad (3.51)$$

$$\hat{\mathbf{m}}_{(\mathbf{n})} = [\hat{m}_{(\mathbf{n})11} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})22} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})33} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})23} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})32} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})31} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})13} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})12} \quad \hat{m}_{(\mathbf{n})21}]^T \quad (3.52)$$

As aproximações para os campos de deslocamento (3.27) e (3.28), de deformação (3.29) (ou suas variações (3.41)) e de tensão (3.42), (3.43) e (3.44) podem, então, ser introduzidas na condição estacionária (3.48)

$$\begin{aligned}
\delta^{(1)}\Pi &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ \left(\delta \mathbf{d}_u^T \mathbf{B}_u^T - \delta \mathbf{d}_\phi^T \bar{\mathbf{N}}_T^T \right) \left[\mathbf{A} \left(\mathbf{B}_u \mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T \mathbf{d}_\phi \right) + \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S \mathbf{d}_\phi \right] + \right. \\
&+ \delta \mathbf{d}_\phi^T \bar{\mathbf{N}}_S^T \left[\mathbf{E}^T \left(\mathbf{B}_u \mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T \mathbf{d}_\phi \right) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_S \mathbf{d}_\phi \right] + \\
&+ \left. \delta \mathbf{d}_\phi^T \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\phi \mathbf{d}_\phi \right\} dv - \\
&- \int_{\mathcal{V}} \left(\delta \mathbf{d}_u^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{f} + \delta \mathbf{d}_\phi^T \bar{\mathbf{N}}^T \rho \mathbf{l} \right) dv - \\
&- \int_{\partial \mathcal{V}} \left(\delta \mathbf{d}_u^T \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}_{(n)} + \delta \mathbf{d}_\phi^T \bar{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{m}}_{(n)} \right) ds = 0 \quad \therefore \\
\delta \mathbf{d}_u^T &\left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u dv d\mathbf{u} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_u^T \left(-\mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T + \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S \right) dv d\phi - \right. \\
&\left. - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{f} dv - \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}_{(n)} ds \right\} + \\
+ \delta \mathbf{d}_\phi^T &\left\{ \int_{\mathcal{V}} \left(-\bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{A} + \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{E}^T \right) \mathbf{B}_u dv d\mathbf{u} + \int_{\mathcal{V}} \left[-\bar{\mathbf{N}}_T^T \left(-\mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T + \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \bar{\mathbf{N}}_S^T \left(-\mathbf{E}^T \bar{\mathbf{N}}_T + \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_S \right) + \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\phi \right] dv d\phi - \\
&\left. - \int_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \rho \mathbf{l} dv - \int_{\partial \mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{m}}_{(n)} ds \right\} = 0 \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Observando-se que a condição de equilíbrio (3.53) também é válida para qualquer pequena variação arbitrária nos campos de deslocamento, δ , obtém-se a formulação fraca aplicável aos problemas estáticos da teoria da elasticidade micromórfica linear²

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_u \\ \mathbf{d}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{eq,u} \\ \mathbf{f}_{eq,\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

em que

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u dv \quad (3.55)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S - \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T) dv \quad (3.56)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{E}^T \mathbf{B}_u - \bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u) dv = \mathbf{K}_{u\phi}^T \quad (3.57)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T - \bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S - \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{E}^T \bar{\mathbf{N}}_T + \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_S + \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\phi) dv \quad (3.58)$$

$$\mathbf{f}_{eq,u} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}_{(n)} ds \quad (3.59)$$

$$\mathbf{f}_{eq,\phi} = \int_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \rho \mathbf{l} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{m}}_{(n)} ds \quad (3.60)$$

²Observa-se que a matriz de rigidez \mathbf{K} de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico é simétrica, observadas as simetrias dos módulos constitutivos dadas na Equação (3.14).

A abordagem da teoria micromórfica segundo o Método dos Elementos Finitos aqui apresentada se distingue da comumente apresentada na literatura, por exemplo, em Isbuga e Regueiro (2011) e Ansari et al. (2016), em especial, na definição do conjunto de tensores de deformação considerado.

A formulação discreta desta teoria, assim como a analítica, está bem estabelecida, no entanto, a identificação das correspondentes leis constitutivas e a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos limitam a sua aplicação prática.

Como alternativa para se contornar estas limitações, apresenta-se no Capítulo 4 uma estratégia de homogeneização micromórfica que consiste em uma formulação multiescala para construção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas obtidas a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. Esta estratégia se baseia na homogeneização micromórfica de Hütter (2017, 2019).

Capítulo 4

Uma Estratégia de Homogeneização Micromórfica

Em relação à teoria do contínuo clássico, a estratégia de homogeneização, em que as tensões e as deformações macroscópicas são definidas como médias volumétricas de suas contrapartes microscópicas por meio da imposição de condições de contorno correspondentes na microescala, está bem estabelecida há décadas (Hill, 1963, 1972).

Dentre as teorias de contínuos generalizados, esta estratégia é mais facilmente estendida àquelas em que se impõem restrições ao micromovimento (Seção 2.1), pois se dá a partir da especificação das condições de contorno adicionais, por exemplo, as do tipo flexão no caso da teoria das tensões-momento (teoria de Cosserat com rotação restrita) (Adomeit, 1968; Forest, 1998; Bouyge et al., 2001).

Na recuperação de um contínuo micromórfico na macroescala (que não possui restrição prévia ao micromovimento) a partir de homogeneização do contínuo de Cauchy na microescala, a definição das grandezas macroscópicas e a formulação das correspondentes condições de contorno na microescala não são triviais.

Forest e Sab (1998); Forest (2002) formularam expressões para relações entre quantidades cinemáticas micro e macroscópicas de teorias micromórficas, contudo, observou-se ser um problema o fato de as expressões para as medidas de deformação generalizadas não poderem ser transformadas em integrais de superfície e, desta forma, em contraste à homogeneização clássica, não serem prescritas como condições de contorno na formulação do problema na microescala.

Por essa razão, expressões polinomiais foram identificadas por meio de diversas estratégias de modo que satisfizessem as expressões integrais identicamente, bem como atenção foi dada para se caracterizar os campos de “flutuação” adicionais (Forest e Sab, 1998; Forest, 1999; Jänicke et al., 2009; Bellis e Addessi, 2011).

Essa abordagem se adéqua bem à estratégia do Método dos Elementos Finitos Multinível (FE²) de Feyel (1998); Feyel e Chaboche (2000), conforme observado em Feyel (2003); Jänicke (2010), entretanto, apresenta a desvantagem de não ser possível formular problemas de valor de contorno estritamente na microescala.

Alternativamente, Jänicke e Steeb (2012) propuseram prescrever as definições integrais das medidas de deformação micromórficas macroscópicas de Forest como restrições mínimas às equações diferenciais parciais clássicas na microescala, sendo as tensões generalizadas obtidas implicitamente como quantidades energeticamente conjugadas. Hütter (2017) observa que essas tensões generalizadas satisfazem as equações de equilíbrio do contínuo micromórfico de Eringen (1999).

Neste contexto, cabe-se destacar que Eringen (1999) derivou essas equações de equilíbrio por meio de um procedimento de média espacial, fornecendo definições explícitas para as tensões generalizadas (e para todas as grandezas de fluxo) em termos de um operador de superfície, no entanto, não definiu uma expressão para esse operador, nem para as relações entre as medidas de deformação macroscópicas e campos de grandezas microscópicas.

Essas lacunas foram abordadas em Hütter (2017), em que se apresenta uma formulação analítica de homogeneização que recupera um contínuo micromórfico na macroescala a partir do contínuo clássico na microescala por meio de imposição de condições de contorno naturais ou essenciais aos microcontínuos.

Nesta tese, a partir do proposto em Hütter (2017, 2019), propõe-se uma estratégia de homogeneização micromórfica visando as relações constitutivas, em especial, os módulos constitutivos em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas para emprego na abordagem discreta da teoria micromórfica apresentada na Seção 3.3.

Para formulação, retorna-se à representação geométrica do contínuo micromórfico (Figura 4.1), definindo-se a dimensão (finita) dos microdomínios como $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})$.

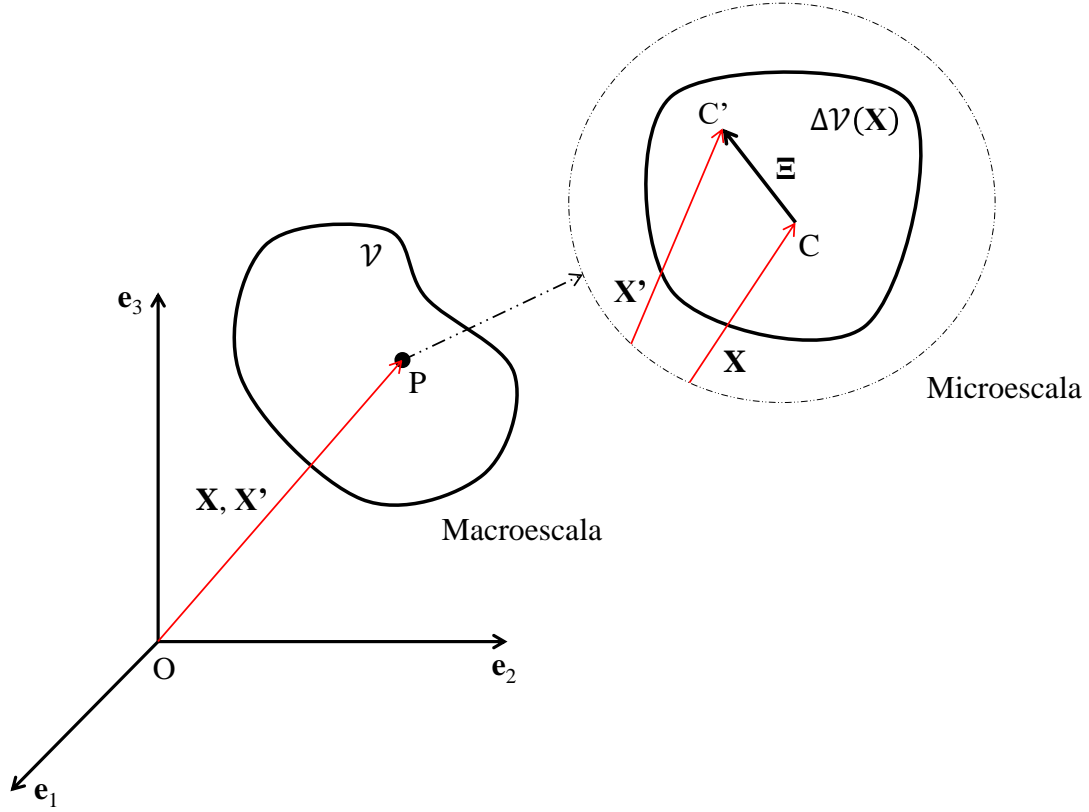


Figura 4.1: Homogeneização micromórfica (adaptado de Hütter (2017)).

Para determinação das contrapartes macroscópicas das equações de equilíbrio e grandezas microscópicas, primeiramente, considera-se uma equação de equilíbrio genérica referida às coordenadas $\mathbf{X}' \in \mathcal{V}$ de um contínuo com densidade de massa ρ

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \varphi_m dv(\mathbf{x}') = \int_{\partial\mathcal{V}} \psi_{a_i} n_i ds(\mathbf{x}') + \int_{\mathcal{V}} \rho \psi_m dv(\mathbf{x}') \quad (4.1)$$

em que

φ_m é uma densidade de armazenamento genérica;

ψ_a é uma densidade de fluxo genérica;

ψ_m é uma densidade de recurso (fonte) genérica;

\mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno $\partial\mathcal{V}$.

Os termos do balanço (4.1) podem ser computados por meio de um somatório na macroescala, com referência às coordenadas $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$, dos microcontínuos que compõem o contínuo micromórfico

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho \varphi_m dv(\mathbf{x}') &= \sum \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho \varphi_m dv(\mathbf{x}') = \\ &= \sum \underbrace{\frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho \varphi_m dv(\mathbf{x}')}_{:= \langle \rho \varphi_m \rangle_{\mathcal{V}}} \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \approx \int_{\mathcal{V}} \langle \rho \varphi_m \rangle_{\mathcal{V}} dv(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}} \psi_{a_i} n_i ds(\mathbf{x}') &= \int_{\mathcal{V}} \psi_{a_i, i} dv(\mathbf{x}') = \sum \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \psi_{a_i, i} dv(\mathbf{x}') = \\ &= \sum \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \psi_{a_i, i} dv(\mathbf{x}') \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) = \\ &= \sum \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \psi_{a_i} n_i ds(\mathbf{x}') \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \approx \\ &\approx \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \psi_{a_i} n_i ds(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}) := \\ &:= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \Xi_k \psi_{a_i} n_i ds(\mathbf{x}') \right]_{,k}}_{:= [\langle \psi_{a_i} \rangle_S]_{k,k}} dv(\mathbf{x}) = \int_{\partial \mathcal{V}} [\langle \psi_{a_i} \rangle_S]_k n_k ds(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho \psi_m dv(\mathbf{x}') &= \sum \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho \psi_m dv(\mathbf{x}') = \\ &= \sum \underbrace{\frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho \psi_m dv(\mathbf{x}')}_{:= \langle \rho \psi_m \rangle_{\mathcal{V}}} \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \approx \int_{\mathcal{V}} \langle \rho \psi_m \rangle_{\mathcal{V}} dv(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que

$$\langle \circ \rangle_V = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \circ \, dv(\mathbf{x}') \quad (4.5)$$

$$[\langle \circ_i \rangle_S]_k = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \Xi_k \circ_i n_i ds(\mathbf{x}') \quad (4.6)$$

são os operadores, respectivamente, de média no volume e de superfície¹.

Reescrevendo-se o balanço (4.1) a partir das Equações (4.2) - (4.4), obtém-se o equilíbrio genérico referido às coordenadas $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$

$$\frac{D}{D_t} \int_{\mathcal{V}} \langle \rho \varphi_m \rangle_V \, dv(\mathbf{x}) = \int_{\partial \mathcal{V}} [\langle \psi_{a_i} \rangle_S]_k n_k ds(\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{V}} \langle \rho \psi_m \rangle_V \, dv(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

Os balanços (4.1) e (4.7) são válidos para qualquer região \mathcal{V} , de modo que podem ser localizados se valendo do teorema de Green-Gauss (teorema da divergência)

$$\rho \dot{\varphi}_m = \psi_{a_i, i} + \rho \psi_m \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (4.8)$$

$$\langle \rho \dot{\varphi}_m \rangle_V = [\langle \psi_{a_i} \rangle_S]_{k, k} + \langle \rho \psi_m \rangle_V \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (4.9)$$

em que $(\dot{\circ})$ denota derivada material D/D_t .

A equação de equilíbrio (4.9) é a contraparte macroscópica do equilíbrio (4.8), relação empregada na estratégia de homogeneização micromórfica.

¹O operador de superfície tal como apresentado é proposto em Hütter (2017), definido de forma similar em Kouznetsova et al. (2002) e em Li (2011).

Para problemas geometricamente lineares da teoria da elasticidade, o contínuo de Cauchy na microescala é descrito pelas seguintes equações de equilíbrio

$$\text{Conservação da massa: } \rho := \text{constante} \quad \therefore \quad \dot{\rho} := 0 \quad (4.10)$$

$$\text{Momento linear: } \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \quad (\text{equilíbrio estático}) \quad (4.11)$$

$$\text{Momento angular: } \epsilon_{jkl}\sigma_{kl} = 0 \quad \therefore \quad \sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad (\text{simetria}) \quad (4.12)$$

$$\text{Energia mecânica: } \rho \dot{\psi} + \frac{1}{2}\rho (\dot{u}_i \dot{u}_i)_{,t} = (\sigma_{kl} \dot{u}_i)_{,k} + \rho f_l \dot{u}_i \quad (4.13)$$

em que, ambos, $(\dot{\circ})$ e $(\circ)_{,t}$ denotam derivada material D/D_t .

Para determinação das contrapartes macroscópicas das equações de equilíbrio (4.10) - (4.13), emprega-se a relação entre as Equações (4.8) e (4.9) e a descrição do campo de deslocamento microscópico segundo a teoria micromórfica (3.7).

i. Conservação da massa:

$$\bar{\rho} = \langle \rho \rangle_V \quad \therefore \quad \dot{\bar{\rho}} = 0 \quad (4.14)$$

em que $\bar{\rho}$ é a densidade de massa da partícula material por homogeneização.

Conforme em Hütter (2017), obtêm-se também os balanços da micro-inércia, definidos como as contrapartes macroscópicas dos produtos da Equação (4.10) por Ξ_k e pelo seu quadrado $\Xi_k \Xi_l$

$$[\langle \rho \Xi_k \rangle_V]_{k,t} = 0, \quad [\langle \rho \Xi_k \Xi_l \rangle_V]_{kl,t} = 0 \quad (4.15)$$

ii. Momento linear:

$$[\langle \sigma_{il} \rangle_S]_{kl,k} + [\langle \rho f_l \rangle_V]_l = 0 \quad (4.16)$$

em que (Equação (3.23))

$$\bar{t}_{kl} := [\langle \sigma_{il} \rangle_S]_{kl} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \Xi_k \sigma_{il} n_i ds(\mathbf{x}') \quad (4.17)$$

$$\bar{\rho} \bar{f}_l := [\langle \rho f_l \rangle_V]_l = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho f_l dv(\mathbf{x}') \quad (4.18)$$

são, respectivamente, os componentes do tensor de tensão e do vetor de força de corpo por unidade de volume definidos por homogeneização.

A equação de equilíbrio adicional micromórfica (3.24) também pode ser explorada de modo a se definir contrapartes macroscópicas de grandezas microscópicas. Para tanto, primeiramente, multiplica-se a Equação (4.11) por X'_m e determina-se a sua contraparte macroscópica

$$\begin{aligned} \sigma_{il,i} X'_m + \rho f_l X'_m = 0 \quad \therefore \quad \sigma_{il,i} X'_m + \sigma_{il} X'_{m,i} - \sigma_{il} X'_{m,i} + \rho f_l X'_m = 0 \quad \therefore \\ (\sigma_{il} X'_m)_{,i} - \sigma_{il} \delta_{mi} + \rho f_l X'_m = 0 \quad \therefore \quad (\sigma_{il} X'_m)_{,i} - \sigma_{ml} + \rho f_l X'_m = 0 \quad \therefore \\ [[\langle \sigma_{il} X'_m \rangle_S]_{klm,k} - [\langle \sigma_{ml} \rangle_V]_{ml} + [\langle \rho f_l X'_m \rangle_V]_{lm} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em seguida, subtrai-se da Equação (4.19) a Equação (4.16) multiplicada por X_m

$$[\langle \sigma_{il} \Xi_m \rangle_S]_{klm,k} + [\langle \sigma_{il} \rangle_S]_{ml} - [\langle \sigma_{ml} \rangle_V]_{ml} + [\langle \rho f_l \Xi_m \rangle_V]_{lm} = 0 \quad (4.20)$$

em que (Equação (3.24))

$$\bar{m}_{klm} := [\langle \sigma_{il} \Xi_m \rangle_S]_{klm} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \Xi_k \sigma_{il} \Xi_m n_i dS(\mathbf{x}') \quad (4.21)$$

$$\bar{s}_{kl} := [\langle \sigma_{kl} \rangle_V]_{kl} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \sigma_{kl} dv(\mathbf{x}') \quad (4.22)$$

$$\bar{\rho} l_{lm} := [\langle \rho f_l \Xi_m \rangle_V]_{lm} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \rho f_l \Xi_m dv(\mathbf{x}') \quad (4.23)$$

são, respectivamente, os componentes dos tensores de tensão-momento, de micro-tensão média e de momento (força dupla) de corpo por unidade de volume definidos por homogeneização. Das definições (4.17) e (4.22), obtém-se

$$\bar{t}_{kl} - \bar{s}_{kl} = [\langle \Xi_k \sigma_{il,i} \rangle_V]_{kl} \quad (4.24)$$

Embora a determinação dos tensores de tensão da teoria micromórfica por meio de homogeneização não seja o foco desta tese, mas sim empregá-los na formulação, cabe-se ressaltar que as definições por homogeneização apresentadas são consistentes com o proposto em Eringen (1999), no entanto, onde não se definiu o operador de superfície, conforme destacado.

iii. Momento angular:

$$\epsilon_{jkl} \underbrace{[\langle \sigma_{kl} \rangle_V]_{kl}}_{\bar{s}_{kl}} = 0 \quad \therefore \quad \bar{s}_{kl} = \bar{s}_{lk} \quad (\text{simetria, Seção 3.2}) \quad (4.25)$$

A contraparte macroscópica da Equação (4.12) multiplicada por Ξ_m não fornece informação adicional (Hütter, 2017).

iv. Energia mecânica:

$$\underbrace{\langle \rho \dot{\psi} \rangle_V}_{:= \bar{\rho} \dot{\psi}} + \frac{1}{2} \langle \rho (\dot{u}_i \dot{u}_i)_{,t} \rangle_V = [\langle \sigma_{il} \dot{u}_i \rangle_S]_{k,k} + \langle \rho f_l \dot{u}_i \rangle_V$$

em que $\dot{u}_i = \dot{u}_i + \dot{\phi}_{lm} \Xi_m$ (Equação (3.7)), logo,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \dot{\psi} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\dot{u}_i \dot{u}_i)_{,t} + \frac{1}{2} (\dot{\phi}_{lm} \dot{\phi}_{ln})_{,t} [\langle \rho \Xi_m \Xi_n \rangle_V]_{mn} + (\dot{u}_l \dot{\phi}_{lm})_{,t} [\langle \rho \Xi_m \rangle_V]_m = \\ = \left(\bar{t}_{kl} \dot{u}_l + \bar{m}_{klm} \dot{\phi}_{lm} \right)_{,k} + \bar{\rho} \bar{f}_l \dot{u}_l + \bar{\rho} \bar{l}_{lm} \dot{\phi}_{lm} \end{aligned} \quad (4.26)$$

É fácil demonstrar que os termos que acompanham $\bar{\rho} \dot{\psi}$ do lado esquerdo da Equação (4.26) são os termos adicionais das Equações (4.16) e (4.20) caso, ao invés de se considerar a equação da estática (4.11), se considerasse a equação do movimento de Cauchy $\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho \ddot{u}_i$. Tendo isto em vista, substituindo-se as Equações (4.16) e (4.20) na Equação (4.26), respectivamente, nos termos $\bar{\rho} \bar{f}_l$ e $\bar{\rho} \bar{l}_{lm}$ e explorando-se a Equação (4.25), obtém-se

$$\bar{\rho} \dot{\psi} = \bar{t}_{kl} (\dot{u}_{l,k} - \dot{\phi}_{lk}) + \bar{s}_{kl} \frac{1}{2} (\dot{\phi}_{kl} + \dot{\phi}_{lk}) + \bar{m}_{klm} \dot{\phi}_{lm,k} \quad (4.27)$$

em que o 1/2 na composição (3.13) e (3.15) - (3.17) é eliminado na derivação material.

Da Equação (4.27), de forma consistente ao apresentado na Seção 3.2, têm-se as taxas dos campos de deformação micromórficos, conjugados energéticos dos campos de tensão \bar{t}_{kl} , \bar{s}_{kl} e \bar{m}_{klm} , respectivamente,

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{u}_{l,k} - \dot{\phi}_{lk}, \quad 2\dot{e}_{kl} = \dot{\phi}_{kl} + \dot{\phi}_{lk}, \quad \dot{\gamma}_{klm} = \dot{\phi}_{kl,m} \quad (4.28)$$

Das Equações (4.27) e (4.28), obtém-se a taxa da função densidade de energia interna macroscópica em termos dos pares energéticos da teoria micromórfica

$$\bar{\rho}\dot{\bar{\psi}} = \bar{t}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{kl}\dot{e}_{kl} + \bar{m}_{klm}\dot{\gamma}_{lmk} \quad (4.29)$$

Procedendo-se de forma análoga, observada a ressalva acerca do termo referente à aceleração, introduzindo-se a Equação (4.11) na Equação (4.13) e explorando-se a Equação (4.12), obtém-se

$$\rho\dot{\psi} = \sigma_{kl}\frac{1}{2}(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}) = \sigma_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad \therefore \quad \bar{\rho}\dot{\bar{\psi}} = \langle \sigma_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} \rangle_V \quad (4.30)$$

Das Equações (4.29) e (4.30), obtém-se a condição de Hill-Mandel generalizada para a homogeneização micromórfica

$$\langle \sigma_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} \rangle_V = \bar{t}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{kl}\dot{e}_{kl} + \bar{m}_{klm}\dot{\gamma}_{lmk} \quad (4.31)$$

Se a densidade de energia interna macroscópica pode ser definida como uma função dos campos de deformação macroscópicos, $\bar{\rho}\bar{\psi}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma})$, então

$$\bar{\rho}\dot{\bar{\psi}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma}) = \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\epsilon_{kl}}\dot{\epsilon}_{kl} + \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial e_{kl}}\dot{e}_{kl} + \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\gamma_{lmk}}\dot{\gamma}_{lmk}, \quad (4.32)$$

de modo que a Equação (4.29) é satisfeita para quaisquer campos de deslocamento arbitrários $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ e $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)$, bem como para valores arbitrários de seus gradientes, se e somente se

$$\bar{t}_{kl} = \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\epsilon_{kl}}, \quad \bar{s}_{kl} = \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial e_{kl}}, \quad \bar{m}_{klm} = \bar{\rho}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\gamma_{lmk}} \quad (4.33)$$

Na estratégia de homogeneização clássica, as relações constitutivas macroscópicas são construídas a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala, cuja formulação está bem estabelecida. Uma alternativa para se construir os módulos constitutivos macroscópicos micromórficos, objetos desta tese, é se estender a formulação clássica, na qual se impõe a seguinte restrição cinemática micro-macro

$$\dot{\tilde{u}}_{l,k} := \left[\langle \dot{u}_{l,k} \rangle_V \right]_{lk} \quad (4.34)$$

Normalmente, o lado direito da Equação (4.34) é transformado em uma integral de superfície de modo que o gradiente da taxa de deslocamento macroscópico possa ser prescrito como condições de contorno essenciais ao microcontínuo.

Alternativamente, conforme em Hütter (2017), aqui se emprega o princípio de minimização proposto em Jänicke e Steeb (2012), com a condição (4.34) imposta como restrição ao funcional da densidade de energia interna microscópica $\langle \rho \dot{\psi} \rangle_V$ por meio de um funcional de Lagrange (\mathcal{L}), isto é,

$$\mathcal{L} = \langle \rho \dot{\psi} \rangle_V + \lambda_{kl} \left\{ \dot{\tilde{u}}_{l,k} - \left[\langle \dot{u}_{l,k} \rangle_V \right]_{lk} \right\} \rightarrow \text{Mín.} \quad (4.35)$$

em que λ_{kl} é um multiplicador de Lagrange.

Aplicando-se a primeira variação ao funcional de Lagrange (4.35), observada a Equação (4.30) e explorando-se a Equação (4.12), tem-se

$$\langle \sigma_{kl} \delta \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle_V - \lambda_{kl} \left[\langle \delta \dot{u}_{l,k} \rangle_V \right]_{lk} = \frac{1}{2} \langle \sigma_{kl} (\delta \dot{u}_{l,k} + \delta \dot{u}_{k,l}) \rangle_V - \lambda_{kl} \left[\langle \delta \dot{u}_{l,k} \rangle_V \right]_{lk} = 0 \quad \therefore$$

$$\langle \sigma_{kl} \delta \dot{u}_{l,k} \rangle_V - \lambda_{kl} \left[\langle \delta \dot{u}_{l,k} \rangle_V \right]_{lk} = 0 \quad (4.36)$$

Observando-se que a condição estacionária (4.36) é válida para qualquer campo de deslocamento arbitrário δu_l^i , incluindo o real u_l^i , comparando esta equação com a condição de Hill-Mandel (4.31), observada a relação cinemática micro-macro (4.34) e que na teoria clássica $\phi_{kl} = 0$, conclui-se que

$$\lambda_{kl} = \bar{t}_{kl} \quad (4.37)$$

Retornando-se à condição estacionária (4.36) com a definição do multiplicador de Lagrange (4.37), observando-se que \bar{t}_{kl} é constante no microcontínuo $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})} (\sigma_{kl} - \bar{t}_{kl}) \delta \dot{u}_{l,k}^i dv(\mathbf{x}') &= 0 \quad \therefore \\ \int_{\partial\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})} (\sigma_{kl} - \bar{t}_{kl}) n_k \delta \dot{u}_l^i ds(\mathbf{x}') - \int_{\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X})} \sigma_{kl,k} \delta \dot{u}_l^i dv(\mathbf{x}') &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

obtêm-se as equações de Euler-Lagrange do funcional (4.35), ou seja, as equações de equilíbrio e as condições de contorno naturais² do problema de valor de contorno na microescala da homogeneização clássica

$$\sigma_{kl,k} = 0 \quad \text{em} \quad \Delta\mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.39)$$

$$\sigma_{kl} n_k = \bar{t}_{kl} n_k \quad \text{em} \quad \partial\Delta\mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.40)$$

em que, na homogeneização clássica, define-se $\bar{t}_{kl} := [\langle \sigma_{kl} \rangle_V]_{kl}$.

²Conforme destacado, alternativamente, condições de contorno essenciais podem ser prescritas, impondo-se a restrição cinemática (4.34) a priori.

Para que se tenha consistência na extensão da formulação do problema de valor de contorno da homogeneização clássica para a micromórfica, é conveniente se impor uma restrição à distribuição da densidade de massa $\rho(\mathbf{X}')$ no microcontínuo, de modo que o centro de massa coincida com o centro geométrico (Eringen e Kafadar, 1976), por exemplo, impondo-se uma simetria central ao microcontínuo. A partir desta restrição, têm-se

$$X_l = [\langle X'_l \rangle_V]_l \quad \therefore \quad [\langle \Xi_l \rangle_V]_l = 0, \quad \dot{u}_l = [\langle \dot{u}'_l \rangle_V]_l \quad (4.41)$$

de modo que, no contexto da homogeneização clássica, como se espera, a introdução das Equações (4.39) e (4.40) nas definições (4.21) e (4.24) implica

$$\bar{m}_{klm} = 0, \quad \bar{t}_{kl} - \bar{s}_{kl} = 0, \quad (4.42)$$

ou seja, na nulidade dos tensores de tensão generalizada, que, por sua vez, implica na satisfação automática da equação de equilíbrio adicional (3.24) (ou (4.20)).

Desta forma, a extensão da formulação clássica pode ser realizada avaliando-se quais modificações nas Equações (4.39) e (4.40) são necessárias para que as definições (4.21) e (4.24) resultem não nulas. Uma alternativa adotada por Hütter (2017) é introduzir termos lineares nestas equações

$$\sigma_{kl,k} = \alpha_{kl} \Xi_k \quad \text{em} \quad \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.43)$$

$$\sigma_{kl} n_k = \bar{t}_{kl} n_k + \beta_{klm} \Xi_m n_k \quad \text{em} \quad \partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.44)$$

em que α_{kl} e β_{klm} são constantes.

As constantes α_{kl} e β_{klm} ³ podem ser definidas em termos dos tensores de tensão generalizada a partir das Equações (4.43) e (4.44) introduzidas, respectivamente, nas Equações (4.24) e (4.21), observada a restrição (4.41),

$$\alpha_{kl} = (\bar{t}_{nl} - \bar{s}_{nl}) G_{nk}^{-1} \quad (4.45)$$

$$\beta_{klm} = \frac{1}{4} (\bar{m}_{kln} + \bar{m}_{nlk}) G_{nm}^{-1} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{km} \bar{m}_{nlo} G_{no}^{-1} \quad (4.46)$$

em que

$G_{nk} = [\langle \Xi_n \Xi_k \rangle_V]_{nk}$ é o momento geométrico de segunda ordem;

$n = \delta_{ii}$ é a dimensão do espaço.

Retornando-se às Equações (4.43) e (4.44) com as definições (4.45) e (4.46), obtêm-se as equações de equilíbrio e as condições de contorno naturais que governam o problema de valor de contorno na microescala da homogeneização micromórfica proposta por Hütter (2017)

$$\sigma_{kl,k} = (\bar{t}_{nl} - \bar{s}_{nl}) G_{nk}^{-1} \Xi_k + \frac{1}{2+n} \bar{m}_{nlk} G_{nk}^{-1} \quad \text{em } \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.47)$$

$$\sigma_{kl} n_k = \bar{t}_{kl} n_k + \left[\frac{1}{4} (\bar{m}_{kln} + \bar{m}_{nlk}) G_{nm}^{-1} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{km} \bar{m}_{nlo} G_{no}^{-1} \right] \Xi_m n_k \quad \text{em } \partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad (4.48)$$

³Devido à simetria do tensor de tensão-momento por homogeneização $\bar{m}_{klm} = \bar{m}_{mlk}$ observada na definição (4.21), β_{klm} não é definido univocamente por meio desta equação, sendo, pois, imposta a mesma simetria para a sua determinação na forma apresentada na Equação (4.46), que, por sua vez, não é auto equilibrada na Equação (4.44) para todos os valores prescritos de \bar{m}_{klm} , logo, introduz-se o termo de volume constante na Equação (4.47) de modo que o problema tenha solução, observado que a Equação (4.24) não é sensível a termos constantes (Hütter, 2017).

Sendo as Equações (4.47) e (4.48) as equações de Euler-Lagrange do problema, pode-se, então, determinar a condição estacionária que as resultam

$$\begin{aligned}
& \langle \sigma_{kl} \delta \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle_V - \bar{t}_{kl} \left\{ \left[\langle \delta \dot{u}_{i,k} \rangle_V \right]_{lk} - [\langle \Xi_i \delta \dot{u}_i \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \right\} - \\
& - \bar{s}_{kl} \frac{1}{2} \left\{ [\langle \Xi_i \delta \dot{u}_k \rangle_V]_{ik} G_{li}^{-1} + [\langle \Xi_i \delta \dot{u}_l \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \right\} - \\
& - \bar{m}_{klm} \left[\langle \Xi_i \delta \dot{u}_{l,j} \rangle_V \right]_{ilj} \left[\frac{1}{4} \delta_{kj} G_{mi}^{-1} + \frac{1}{4} \delta_{mj} G_{ki}^{-1} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{ji} G_{km}^{-1} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

em que, observando-se que esta condição estacionária também é válida para qualquer campo de deslocamento arbitrário δu_i , incluindo o real u_i , comparando-a com a condição de Hill-Mandel (4.31), definem-se os campos de deformação micromórficos por homogeneização

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \bar{u}_{l,k} - \bar{\phi}_{lk} = \left[\langle u_{i,k} \rangle_V \right]_{lk} - [\langle \Xi_i u_i \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \tag{4.50}$$

$$2\bar{e}_{kl} = \bar{\phi}_{kl} + \bar{\phi}_{lk} = [\langle \Xi_i u_k \rangle_V]_{ik} G_{li}^{-1} + [\langle \Xi_i u_l \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \tag{4.51}$$

$$\bar{\gamma}_{lmk} = \bar{\phi}_{lm,k} = \left[\langle \Xi_i u_{l,j} \rangle_V \right]_{ilj} \left[\frac{1}{4} \delta_{kj} G_{mi}^{-1} + \frac{1}{4} \delta_{mj} G_{ki}^{-1} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{ji} G_{km}^{-1} \right] \tag{4.52}$$

À luz da equação de equilíbrio que governa o problema de valor de contorno na microescala (4.47), para a formulação da estratégia aqui proposta, adota-se uma aproximação polinomial cúbica para o campo de deslocamento microscópico, tal como usualmente se assume em homogeneizações micromórficas (Forest e Sab, 1998; Forest, 2002, 2005; Jänicke et al., 2009; Forest e Trinh, 2011; Hütter et al., 2014)

$$u_i := a_l + b_{lm}\Xi_m + \frac{1}{2}c_{lmn}\Xi_m\Xi_n + \frac{1}{3}d_{lmno}\Xi_m\Xi_n\Xi_o \quad (4.53)$$

em que a_l , b_{lm} , c_{lmn} e d_{lmno} são constantes.

Em função das simetrias dos tensores $\Xi_m\Xi_n$ e $\Xi_m\Xi_n\Xi_o$, pode-se impor as seguintes simetrias, respectivamente, às constantes c_{lmn} e d_{lmno}

$$c_{lmn} = c_{lnm}$$

$$d_{lmno} = d_{lmon} = d_{lnmo} = d_{lnom} = d_{lomn} = d_{lonm} \quad (4.54)$$

Para determinação destas constantes, exploram-se as definições dos campos de deformação micromórficos por homogeneização (4.50) - (4.52), no entanto, conforme se demonstrará a relação, o coeficiente d_{lmno} do termo cúbico da aproximação (4.53) possui 30 termos independentes, ao passo que o tensor de deformação relativa $\bar{\epsilon}_{kl}$ possui apenas 9, logo, d_{lmno} não é definido univocamente por $\bar{\epsilon}_{kl}$, sendo necessárias considerações adicionais.

Nesta tese, adota-se a estratégia empregada em Jänicke (2010) no contexto de sua abordagem por FE², em que se assume que o coeficiente d_{lmno} não é completo, contendo apenas os modos de deformação periódicos, ou seja, as formas de maior ordem dos modos de deformação linear⁴. Para tanto, impõe-se

$$d_{lmno} \neq 0 \iff m = n = o \quad (4.55)$$

⁴Em Forest (1998); Forest e Sab (1998), adota-se estratégia semelhante, impondo-se que os termos lineares dependem apenas do gradiente de deslocamento macroscópico, ao passo que, em Hütter et al. (2014), determinam-se as constantes para um caso particular de microcontínuo esférico por meio do método de Rayleigh-Ritz, minimizando o funcional da densidade de energia interna.

de modo que a aproximação (4.53) pode ser reescrita como

$$u_i := a_i + b_{lm}\Xi_m + \frac{1}{2}c_{lmn}\Xi_m\Xi_n + \frac{1}{3}d_{l\alpha}\delta_{\alpha mno}\Xi_m\Xi_n\Xi_o \quad (4.56)$$

em que $\delta_{\alpha mno}$ é o delta de Kronecker de quarta ordem, definido como

$$\delta_{\alpha mno} = \begin{cases} 1, & \alpha = m = n = o \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.57)$$

Introduzindo-se a aproximação (4.56) nas definições (4.50) - (4.52), observando-se as simetrias impostas em (4.54) e que $\langle \Xi^p \rangle_V = 0$ para todo p ímpar, têm-se

$$\bar{u}_{l,k} = b_{lk} + d_{l\alpha}\delta_{\alpha kmn}G_{mn}, \quad \bar{\phi}_{lk} = b_{lk} + \frac{1}{3}d_{l\alpha}\delta_{\alpha mno}G_{imno}G_{ki}^{-1}, \quad \bar{\phi}_{lm,k} = H_{mkin}c_{lin} \quad \therefore$$

$$\bar{\epsilon}_{kl} = d_{l\alpha}J_{\alpha k}, \quad \bar{\phi}_{lk} + \bar{\epsilon}_{kl} = b_{lk} + d_{l\alpha}\delta_{\alpha kmn}G_{mn}, \quad \bar{\gamma}_{lmk} = H_{mkin}c_{lin} \quad \therefore$$

$$d_{l\alpha} = J_{\alpha k}^{-1}\bar{\epsilon}_{kl}, \quad b_{lk} = \bar{\phi}_{lk} + K_{pk}\bar{\epsilon}_{pl}, \quad c_{lmk} = H_{mkin}^{-1}\bar{\gamma}_{lin} \quad (4.58)$$

em que⁵

$G_{imno} = [\langle \Xi_i\Xi_m\Xi_n\Xi_o \rangle_V]_{imno}$ é o momento geométrico de quarta ordem;

$H_{mkin} = \frac{1}{2}\delta_{mi}\delta_{kn} - \frac{1}{2(2+n)}G_{mk}^{-1}G_{in}$ é a relação geométrica entre c_{lin} e $\bar{\gamma}_{lmk} = \bar{\phi}_{lm,k}$;

$J_{\alpha k} = \delta_{\alpha mno} \left(\delta_{ok}G_{mn} - \frac{1}{3}G_{imno}G_{ki}^{-1} \right)$ é a relação geométrica entre $d_{l\alpha}$ e $\bar{\epsilon}_{kl}$;

$K_{pk} = \delta_{pk} - J_{\alpha p}^{-1}\delta_{\alpha kmn}G_{mn}$ é a relação geométrica entre b_{lk} e $\bar{\epsilon}_{pl}$.

⁵Quando a geometria do microcontínuo implica em $G_{ij} = G\delta_{ij}$, ou seja, momento geométrico de segunda ordem dado por um tensor esférico, tem-se: $H_{mkin} = \frac{1}{2}\delta_{mi}\delta_{kn} - \frac{1}{2(2+n)}\delta_{mk}\delta_{in}$.

Retornando-se à aproximação (4.56) com as constantes dadas na Equação (4.58), determinam-se aproximações para as variáveis de estado microscópicas em termos dos componentes de deformação micromórficos macroscópicos

$$u_{i,k}^j = (K_{pk} + J_{\alpha p}^{-1} \delta_{\alpha kmn} \Xi_m \Xi_n) \bar{\epsilon}_{pl} + \bar{\phi}_{lk} + H_{mkin}^{-1} \Xi_m \bar{\gamma}_{lin} \quad \therefore \quad (4.59)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} [(K_{pk} + J_{\alpha p}^{-1} \delta_{\alpha kmn} \Xi_m \Xi_n) \bar{\epsilon}_{pl} + \bar{\phi}_{lk} + H_{mkin}^{-1} \Xi_m \bar{\gamma}_{lin}] \quad (4.60)$$

em que D_{ijkl} é o módulo constitutivo clássico (tensor elástico (Mal e Singh, 1991)) da lei de Hooke generalizada $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} = D_{ijkl} u_{i,k}^j$, que possui as seguintes simetrias $D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{klij}$.

A partir da aproximação para os componentes de tensão de Cauchy (4.60) no microcontínuo, pode-se, então, determinar os componentes dos tensores de tensão generalizada por homogeneização (4.17), (4.21) e (4.22) em termos dos componentes de deformação micromórficos macroscópicos. Logo, finalmente, reescrevendo-se as relações constitutivas (3.15) - (3.17) para o caso de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico (Equação (3.18)) no contexto da estratégia de homogeneização e convenientemente estruturadas explorando-se as simetrias (3.14)

$$\bar{t}_{kl} = \bar{A}_{klmn} \bar{\epsilon}_{mn} + \bar{E}_{klmn} \bar{\phi}_{mn}, \quad \bar{s}_{kl} = \bar{E}_{mnkl} \bar{\epsilon}_{mn} + \bar{B}_{klmn} \bar{\phi}_{mn}, \quad \bar{m}_{klm} = \bar{C}_{lmknpq} \bar{\gamma}_{npq} \quad (4.61)$$

determinam-se os módulos constitutivos submetendo a aproximação (4.60) a estados elementares de deformação, ou seja, a componente por componente de deformação micromórfico macroscópico com valor unitário, determinando-se os componentes de tensão generalizada, que são os termos da correspondente coluna dos módulos.

Estratégia análoga é empregada em Rodrigues et al. (2018), em que, por meio de soluções sucessivas do problema de valor de contorno na microescala a partir de estados elementares de deformação, constroem-se os parâmetros macroscópicos do contínuo de Cauchy adotando o próprio contínuo de Cauchy na microescala, e, em Trovalusci et al. (2015), em que se constroem os parâmetros macroscópicos do micropolar a partir do próprio micropolar na microescala.

Observa-se, a partir da aproximação (4.60) nas Equações (4.17), (4.21) e (4.22), que a estratégia proposta respeita o desacoplamento observado em meio isotrópico do conjugado energético tensão-momento/gradiente de microdeformação dos demais.

Em análise fisicamente não linear, o procedimento para construção dos módulos constitutivos micromórficos é o mesmo, sendo o estado do material determinado por meio de modelos constitutivos consagrados da teoria do contínuo clássico a partir da aproximação (4.59) construída com o estado de deformação macroscópico corrente.

Esta estratégia foi implementada no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) (<http://www.insane.dees.ufmg.br>). Maiores detalhes sobre a descrição deste sistema podem ser encontrados em Penna (2007); Fonseca (2008); Silva (2016).

Para modelagem da degradação do material, emprega-se o arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica do sistema INSANE, desenvolvido por Penna (2011).

As etapas da estratégia de homogeneização micromórfica estão esquematizadas na Figura 4.2 no contexto de uma análise fisicamente não linear. Para o cômputo da degradação na iteração “j” do passo “i”, parte-se da transição macro-micro, em que se determina o estado do material constituinte da microescala em função do seu estado de deformação dado pelo estado de deformação corrente da macroescala. Os módulos constitutivos micromórficos, construídos por meio de estados elementares de deformação, são então devolvidos para a macroescala na transição micro-macro.

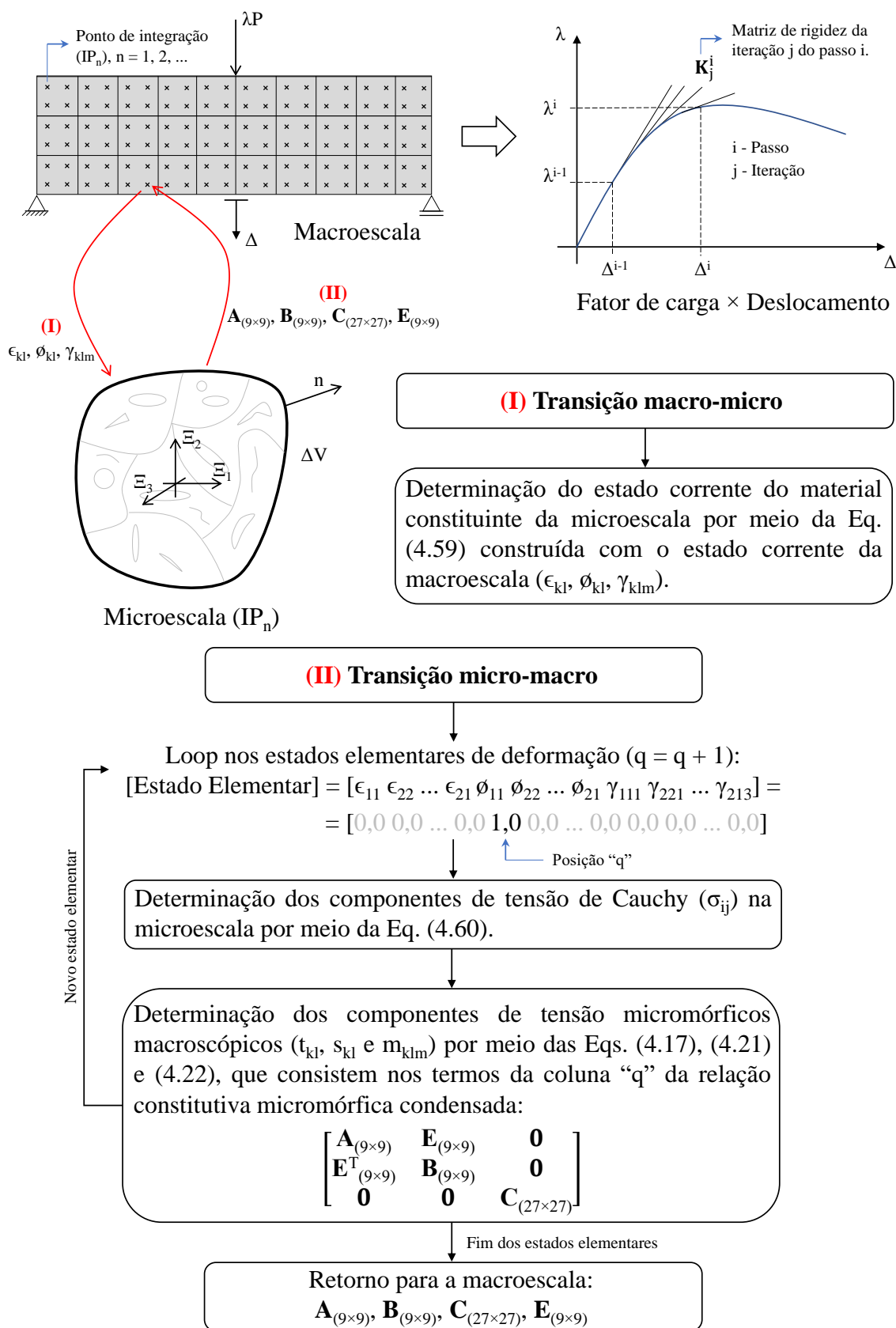


Figura 4.2: Estratégia de homogeneização micromórfica em análise fisicamente não linear.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Neste capítulo, simulações de experimentos numéricos consagrados na literatura, a saber, são apresentados de modo a verificar a validade da implementação realizada e a consistência e contribuição do estudo proposto em comparação a resultados amplamente discutidos e avaliados no meio acadêmico.

- Seção 5.1: Tração direta em meio linear - Objetiva-se apresentar os módulos constitutivos micromórficos obtidos a partir da estratégia de homogeneização micromórfica proposta, bem como demonstrar a capacidade do modelo em reproduzir a resposta segundo a teoria clássica;
- Seção 5.2: Tração direta em meio não linear - Objetiva-se ilustrar a capacidade de regularização da teoria micromórfica, teoria naturalmente não local, demonstrando-se a capacidade em se obter a resposta deste problema mesmo com o refinamento da malha;
- Seção 5.3: Compressão com banda de cisalhamento - Objetiva-se ilustrar a capacidade da teoria micromórfica em reproduzir o fenômeno de localização de deformações, contornando-se a localização de deformações numericamente induzida inerente à teoria clássica;
- Seção 5.4: Camada infinita sob cisalhamento - *Idem* ao anterior;

5.1 Tração direta em meio linear

Nesta seção, simula-se um ensaio de tração direta em um cubo de dimensão unitária $(1,0 \times 1,0 \times 1,0) \text{ m}^3$, cuja carga uniformemente distribuída de $1,0 \text{ kN/m}^2$ é aplicada em um dos seus lados (Figura 5.1).

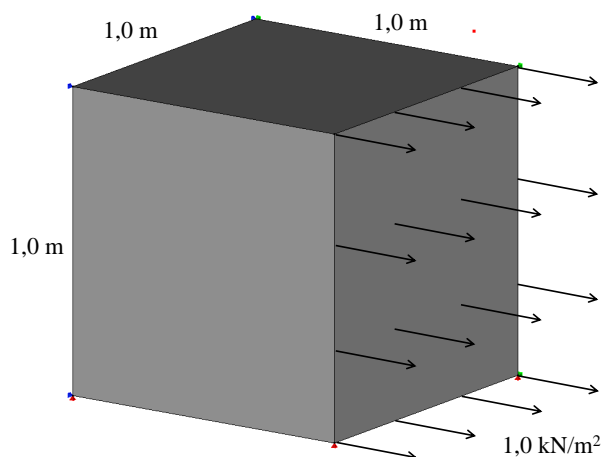


Figura 5.1: Tração direta em meio linear: Configuração.

Admite-se um microcontínuo cúbico de dimensão igual a 50 mm, homogêneo e isotrópico descrito pelo módulo de elasticidade $E = 2,40 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. A partir destes parâmetros materiais, tem-se o seguinte módulo constitutivo da teoria clássica governando o comportamento na microescala, apresentado segundo a notação de Voigt

$$D = \begin{bmatrix} 2,67 \times 10^7 & 6,67 \times 10^6 & 6,67 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^6 & 2,67 \times 10^7 & 6,67 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^6 & 6,67 \times 10^6 & 2,67 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

Por meio da estratégia de homogeneização micromórfica proposta, constroem-se os módulos constitutivos micromórficos, organizados no formato matricial conforme as Equações (3.45) - (3.47) e (3.30) - (3.32)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 2,49 \times 10^7 & 4,96 \times 10^6 & 4,96 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4,96 \times 10^6 & 2,49 \times 10^7 & 4,96 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4,96 \times 10^6 & 4,96 \times 10^6 & 2,49 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1,42 \times 10^7 & 5,83 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 5,83 \times 10^6 & 1,42 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42 \times 10^7 & 5,83 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,83 \times 10^6 & 1,42 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42 \times 10^7 & 5,83 \times 10^6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,83 \times 10^6 & 1,42 \times 10^7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42 \times 10^7 & 5,83 \times 10^6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,83 \times 10^6 & 1,42 \times 10^7
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
 6,87 \times 10^7 & 2,00 \times 10^7 & 2,00 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,00 \times 10^7 & 6,87 \times 10^7 & 2,00 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,00 \times 10^7 & 2,00 \times 10^7 & 6,87 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,44 \times 10^7 & 2,44 \times 10^7
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \quad \text{em que}$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1,00 \times 10^5 & 8,02 \times 10^3 & 6,92 \times 10^3 & 9,02 \times 10^3 & 8,02 \times 10^3 & 6,92 \times 10^3 & 9,02 \times 10^3 & 9,02 \times 10^3 \\ 8,02 \times 10^3 & 3,00 \times 10^4 & 2,66 \times 10^4 & 2,78 \times 10^4 & 3,08 \times 10^3 & 1,85 \times 10^3 & 3,08 \times 10^3 & 3,08 \times 10^3 \\ 6,92 \times 10^3 & 2,66 \times 10^4 & 3,25 \times 10^4 & 2,42 \times 10^4 & 1,85 \times 10^3 & 3,40 \times 10^3 & 3,40 \times 10^3 & 1,67 \times 10^3 \\ 9,02 \times 10^3 & 2,78 \times 10^4 & 2,42 \times 10^4 & 3,34 \times 10^4 & 3,08 \times 10^3 & 1,67 \times 10^3 & 4,27 \times 10^3 & 4,27 \times 10^3 \\ 8,02 \times 10^3 & 3,08 \times 10^3 & 1,85 \times 10^3 & 3,08 \times 10^3 & 3,00 \times 10^4 & 2,66 \times 10^4 & 2,78 \times 10^4 & 2,78 \times 10^4 \\ 6,92 \times 10^3 & 1,85 \times 10^3 & 3,40 \times 10^3 & 1,67 \times 10^3 & 2,66 \times 10^4 & 3,25 \times 10^4 & 2,42 \times 10^4 & 2,42 \times 10^4 \\ 9,02 \times 10^3 & 3,08 \times 10^3 & 1,67 \times 10^3 & 4,27 \times 10^3 & 2,78 \times 10^4 & 2,42 \times 10^4 & 3,34 \times 10^4 & 3,34 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 1,68 \times 10^4 & 1,02 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \\ 1,02 \times 10^4 & 1,68 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \\ 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,68 \times 10^4 & 1,02 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \\ 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,02 \times 10^4 & 1,68 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \\ 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,68 \times 10^4 & 1,02 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \\ 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,02 \times 10^4 & 1,68 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 & 1,24 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Ainda não se identificou uma maneira para se explicitar os parâmetros elásticos da teoria micromórfica, observado que se têm mais informações que parâmetros. Uma alternativa em estudo consiste em se explorar as restrições impostas a estes parâmetros de modo que a energia de deformação seja não negativa para qualquer variação das medidas de deformação, discutido na seção 7.3 de Eringen (1999).

A explicitação destes parâmetros não é necessária para as pretensões desta tese, mas, sim, os módulos constitutivos por homogeneização que, por sua vez, respeitam a isotropia (e as consequentes simetrias) observada na Equação (3.18).

Diferentemente do que se observa na simulação deste exemplo por meio da teoria micropolar (Lages, 1997; Fuina, 2009), os graus de liberdade adicionais também são incitados na simulação por meio da teoria micromórfica, no entanto, observa-se que o estado puro simulado não é afetado pela consideração de partículas deformáveis, nem pela dimensão definida para as partículas, desde que fisicamente consistente¹. Na Figura 5.2, apresenta-se a configuração deformada com ampliação de 10^7 vezes sobreposta ao campo de deslocamento na direção da carga, donde se observa a mesma resposta obtida por meio da teoria clássica.

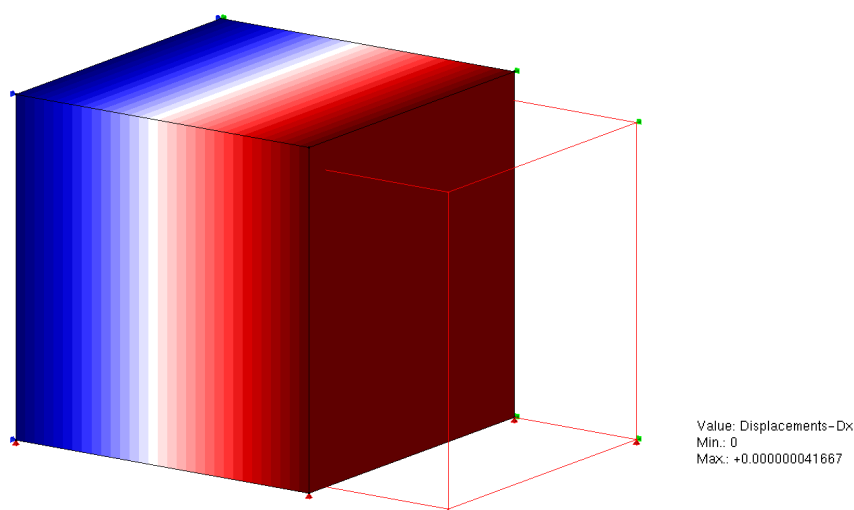


Figura 5.2: Tração direta em meio linear: Deslocamento na direção da carga.

¹Por fisicamente consistente, entende-se uma dimensão definida para o microcontínuo que, ao ser associado aos pontos de integração, não implique em sobreposição das partículas ou na extrapolação do domínio macroscópico. Nas simulações posteriores, a dimensão do microcontínuo é definida de forma fisicamente consistente em função da malha mais refinada.

5.2 Tração direta em meio não linear

Os meios parcialmente frágeis são assim classificados por exibirem o fenômeno de amolecimento. A aproximação clássica utilizada para descrever este comportamento consiste em converter a curva carga \times deslocamento, representativa da amostra ensaiada, numa curva tensão \times deformação, representativa do ponto material.

Na forma fraca, constata-se que este procedimento torna o problema de valor de contorno mal posto, resultando em soluções dependentes do refinamento da malha (de Borst, 1993), podendo-se alcançar um caso limite de discretização em que as deformações tendam a se localizar numa região de dimensão infinitesimal, sendo a energia dissipada considerada nula, impossibilitando o prosseguimento da análise.

Este fenômeno numérico é chamado localização de deformações numericamente induzida e é recorrente em modelagens de meios parcialmente frágeis por meio da forma fraca da teoria clássica. Na Figura 5.3, ilustra-se este fenômeno.

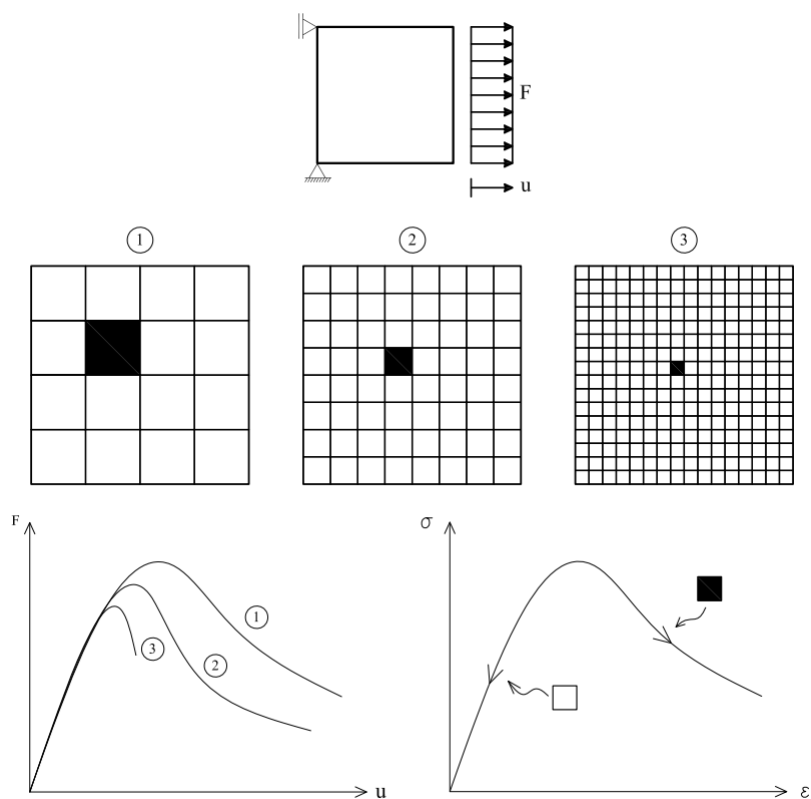


Figura 5.3: Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009).

Na Figura 5.3, as respostas obtidas são representadas pelas curvas carga (F) \times deslocamento (u) distintas para cada discretização, ilustrando a ineficiência do modelo numérico adotado. Isto ocorre por inconsistência no modelo, de modo que, quanto mais refinada a discretização, maior o erro introduzido, o que faz com que as deformações se localizem em uma determinada região da malha, quando deveriam ser uniformes. Estas regiões estão representadas de forma ilustrativa nas malhas, sendo seu comportamento descrito pelo ramo descendente da curva tensão (σ) \times deformação (ε), ao passo que o restante do domínio descarrega. Esta é a razão das diferentes respostas em função da malha, tendo em vista que, em cada uma delas, a razão entre as dimensões das regiões carregadas e descarregadas é distinta. Esta falta de objetividade da malha é devida ao caráter local da teoria do contínuo clássico.

Sendo o contínuo micromórfico naturalmente não local, é possível se valer de sua capacidade de regularização para simular de maneira consistente o fenômeno de localização de deformações contornando a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida. Nesta seção, simula-se o problema de tração direta, objetivando-se demonstrar a capacidade do modelo micromórfico em reproduzir a resposta deste problema independentemente do refinamento da malha, o que não se observa com o contínuo clássico. Para tanto, estuda-se o problema de um cubo com dimensão unitária ($1,0 \times 1,0 \times 1,0$) m^3 em estado plano de tensão submetido a uma carga uniformemente distribuída de $1,0$ MN/m (Figura 5.4).

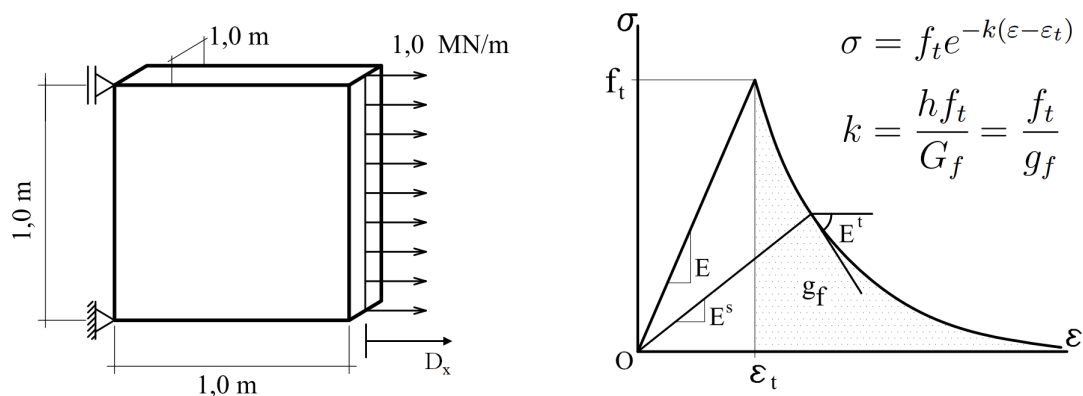


Figura 5.4: Tração direta em meio não linear: Configuração e lei material.

Admite-se um microcontínuo quadrado de dimensão igual a 15 mm, inicialmente homogêneo e isotrópico constituído por um material com módulo de elasticidade $E = 2,0 \times 10^4$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e regido por uma lei exponencial (Boone et al., 1986) descrita pelos seguintes parâmetros (Figura 5.4): resistência à tração $f_t = 2,0$ MPa, energia de fratura $G_f = 2,0 \times 10^{-5}$ MN/m, banda de fissuração $h = 0,05$ m e fator de retenção ao cisalhamento $\beta_r = 0,05$. Para acompanhamento da degradação, associa-se esta lei ao modelo de fissuração distribuída com direção de fissuração fixa, cujos detalhes podem ser encontrados em Penna (2011).

Este estudo é realizado considerando-se seis diferentes malhas, apresentadas na Figura 5.5, compostas por elementos finitos quadrilaterais de quatro nós.

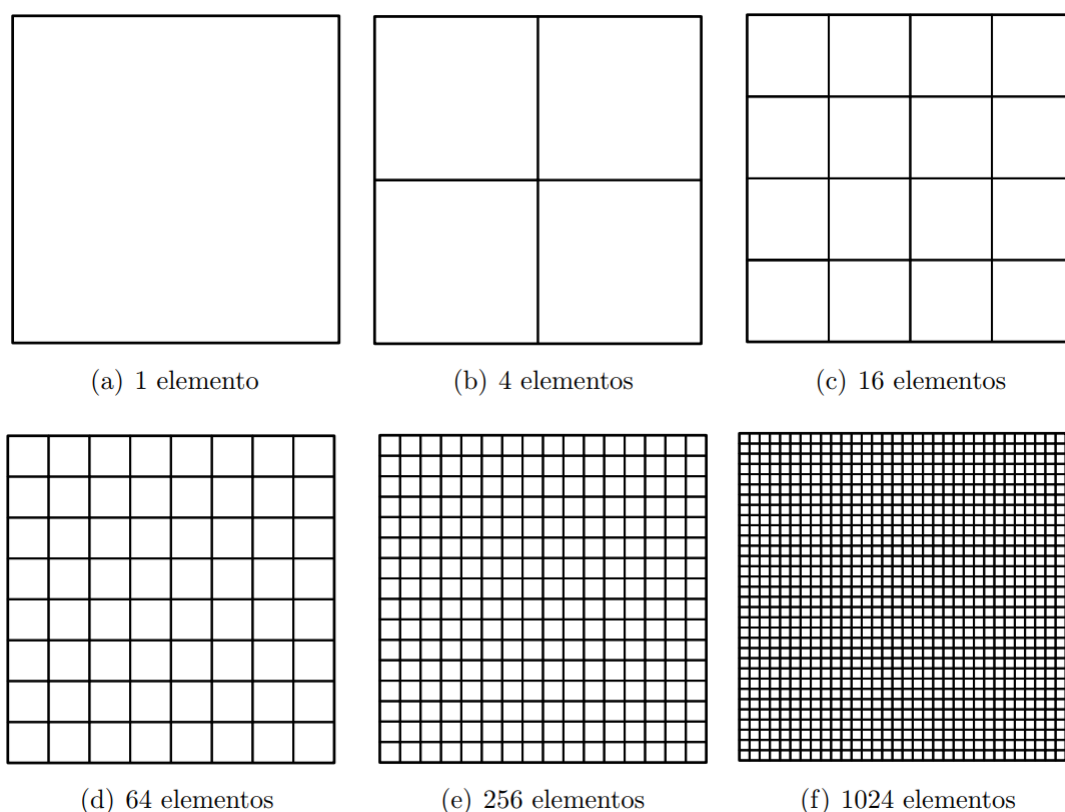


Figura 5.5: Tração direta em meio não linear: Malhas.

A análise não linear foi realizada com o método de Newton-Raphson padrão, incrementando-se o deslocamento horizontal do contorno sob a carga (D_x) de 10^{-5} m, com tolerância para a convergência em deslocamento de 10^{-4} .

As respostas obtidas com o modelo clássico estão apresentadas na Figura 5.6 por meio das curvas carga \times deslocamento de controle, que reproduzem a lei material neste problema elementar.

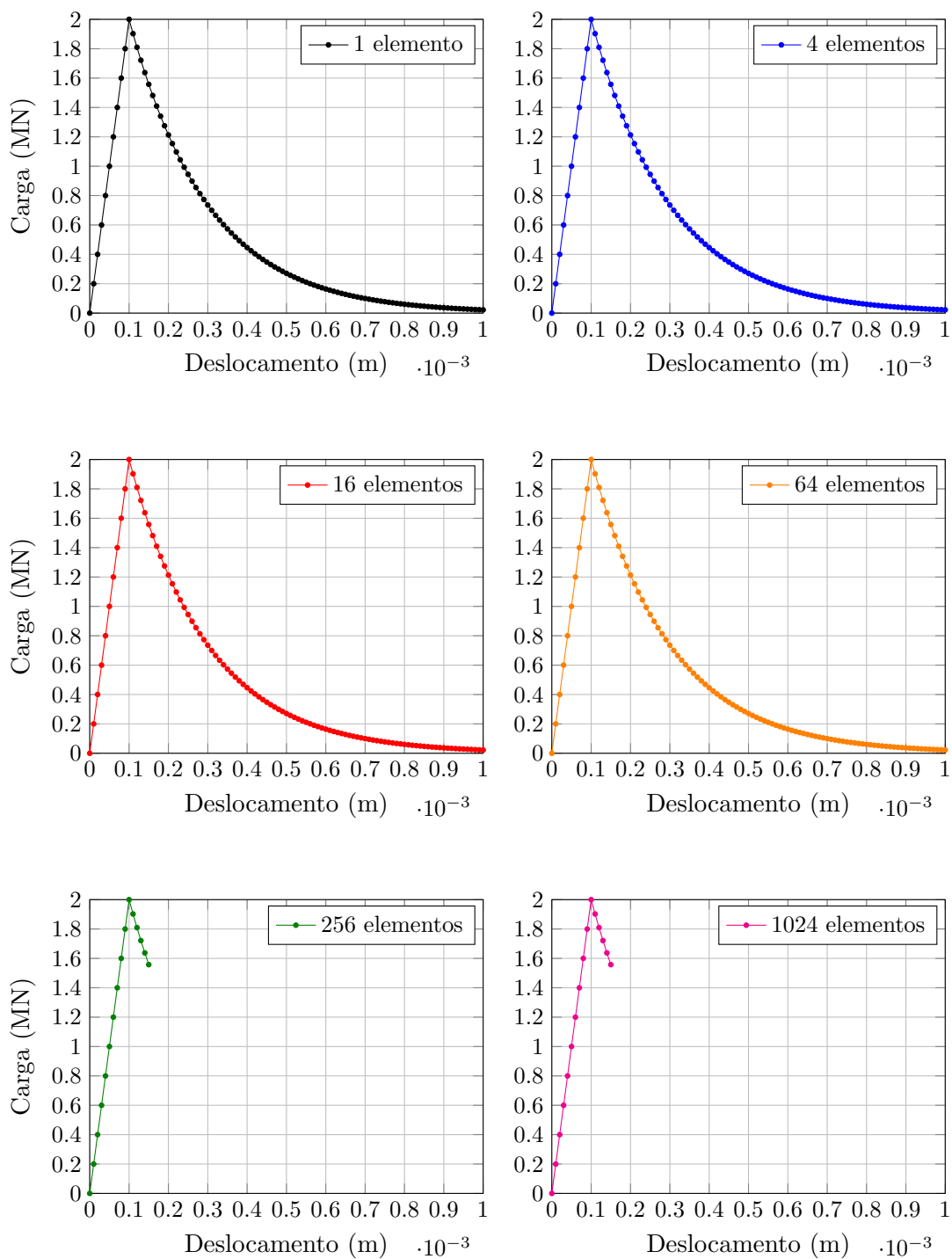


Figura 5.6: Carga \times Deslocamento de controle - Clássico.

Na Figura 5.7, apresentam-se as curvas obtidas com o modelo micromórfico, que foi capaz de reproduzir o comportamento com todas as malhas consideradas, ressaltando-se que isso se deu com no máximo três iterações por passo com tolerância para a convergência em deslocamento.

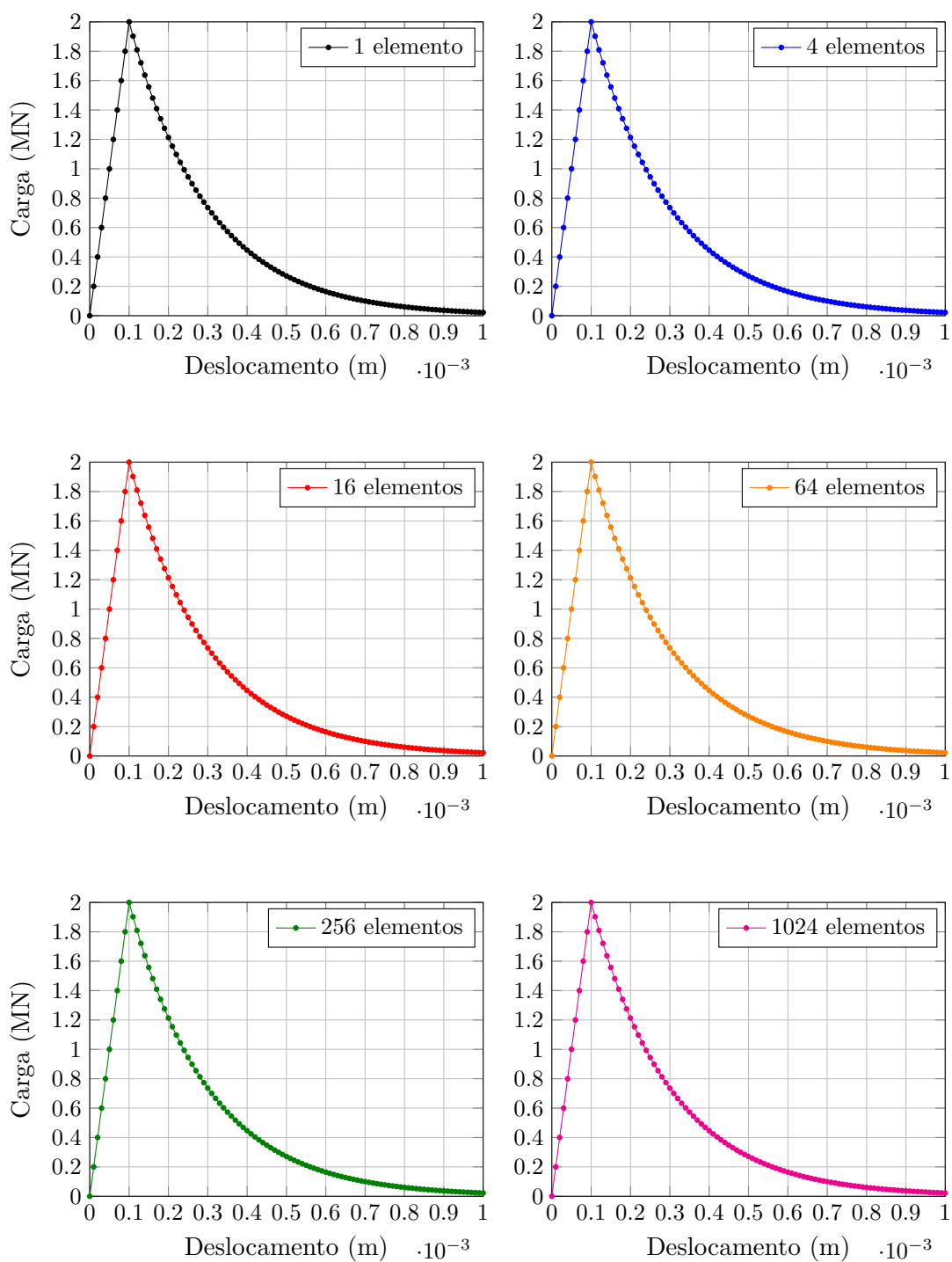


Figura 5.7: Carga \times Deslocamento de controle - Micromórfico.

Na Figura 5.8, apresenta-se o mapa de danificação ilustrando-se a localização de deformações numericamente induzida responsável por paralisar a análise com o modelo clássico com 1024 elementos no passo em que $D_x = 1,5 \times 10^{-4}$ m.

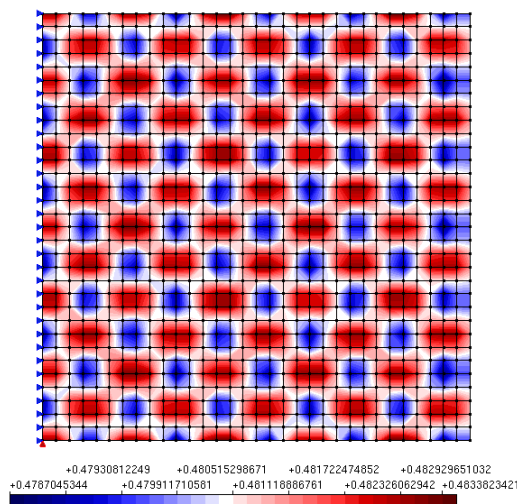


Figura 5.8: Localização de deformações numericamente induzida - Clássico.

O modelo micromórfico também acusa a localização de deformações numérica, porém, menos acentuada tanto na concentração, quanto na variação dos valores da danificação (Figura 5.9), além de seu caráter não local conseguir contorná-la em passos subsequentes, regularizando a danificação.

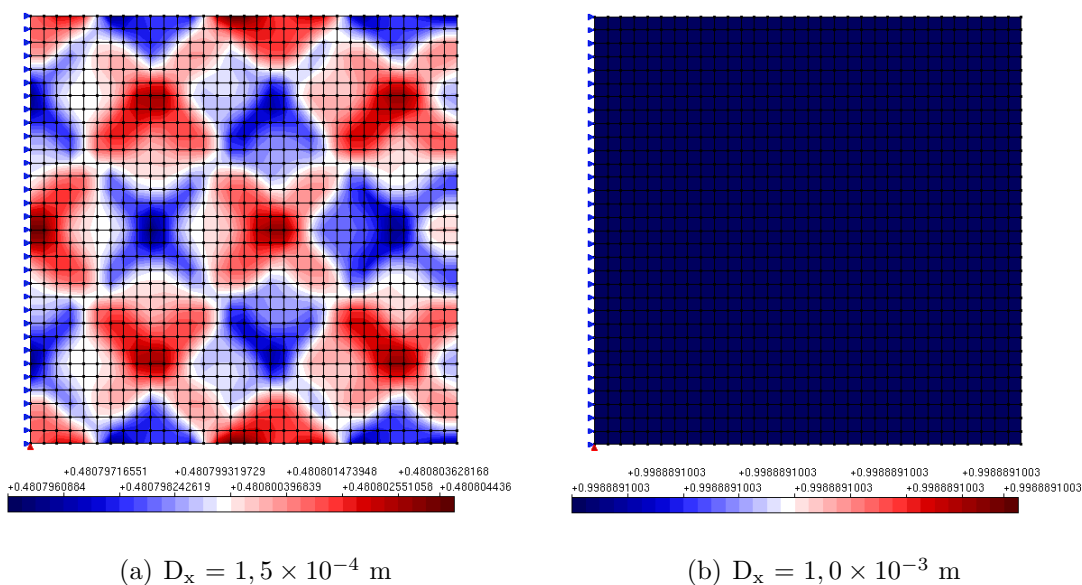


Figura 5.9: Localização de deformações numericamente induzida - Micromórfico.

5.3 Compressão com banda de cisalhamento

A formação da zona de localização de deformações em um ensaio de compressão (banda de cisalhamento) foi investigada por diversos pesquisadores. Sob o enfoque de contínuos generalizados, podem-se citar os trabalhos de Mühlhaus e Vardoulakis (1987), de Borst (1990, 1991, 1993), de Borst e Sluys (1991), Sluys (1992), Steinmann (1994, 1995), Ristinmaa e Vecchi (1996), Lages (1997) e Fuina (2009).

Nesta seção, simula-se o ensaio de compressão com a formação da banda de cisalhamento, objetivando-se demonstrar a capacidade do modelo micromórfico em reproduzir o fenômeno de localização de deformações sem perda de objetividade da malha, o que não se observa com o contínuo clássico. Para tanto, estuda-se o problema em estado plano de deformação, cujo corpo de prova tem dimensões de (60×120) mm², está engastado na base e submetido a uma carga uniformemente distribuída de 20,0 N/mm na borda superior (Figura 5.10).

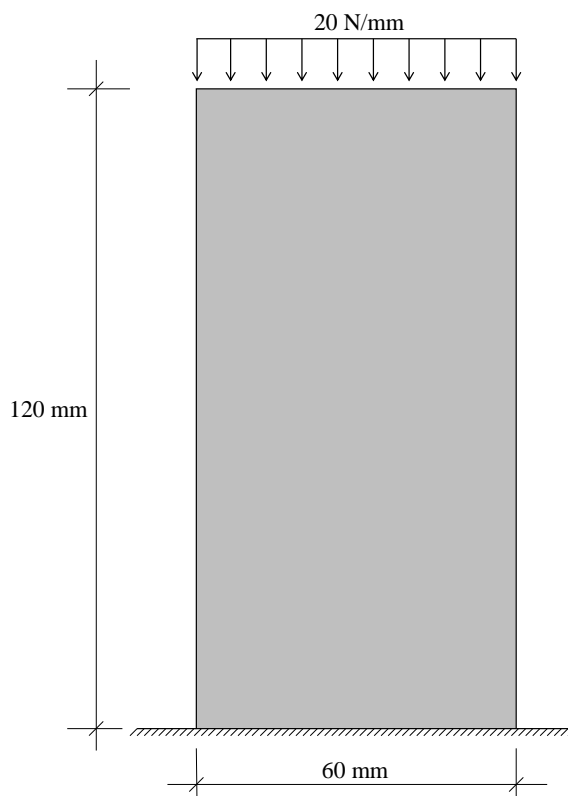


Figura 5.10: Compressão com banda de cisalhamento: Configuração.

De modo a simular uma prensa, impõe-se que os deslocamentos para os pontos da borda superior do modelo são únicos em cada direção por meio da estratégia *master-slave* disponível no sistema INSANE.

Admite-se um microcontínuo quadrado de dimensão igual a 1,25 mm, isotrópico e inicialmente homogêneo constituído por um material com módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^4$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$. Para acompanhar a evolução do dano, adota-se o modelo constitutivo de dano isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984), cuja deformação equivalente é dada por $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$, associado à função de evolução do dano com variação linear descrita pelos parâmetros (Penna, 2011) $\kappa_0 = 1,75 \times 10^{-3}$ e $\kappa_f = 0,07$, de modo a simular o comportamento elastoplástico² com tensão de escoamento $\sigma_y = 20$ MPa e módulo plástico $H = -300$ MPa adotado por Lages (1997). Este estudo é realizado considerando-se três diferentes malhas (Figura 5.11) compostas por elementos finitos quadrilaterais de nove nós.

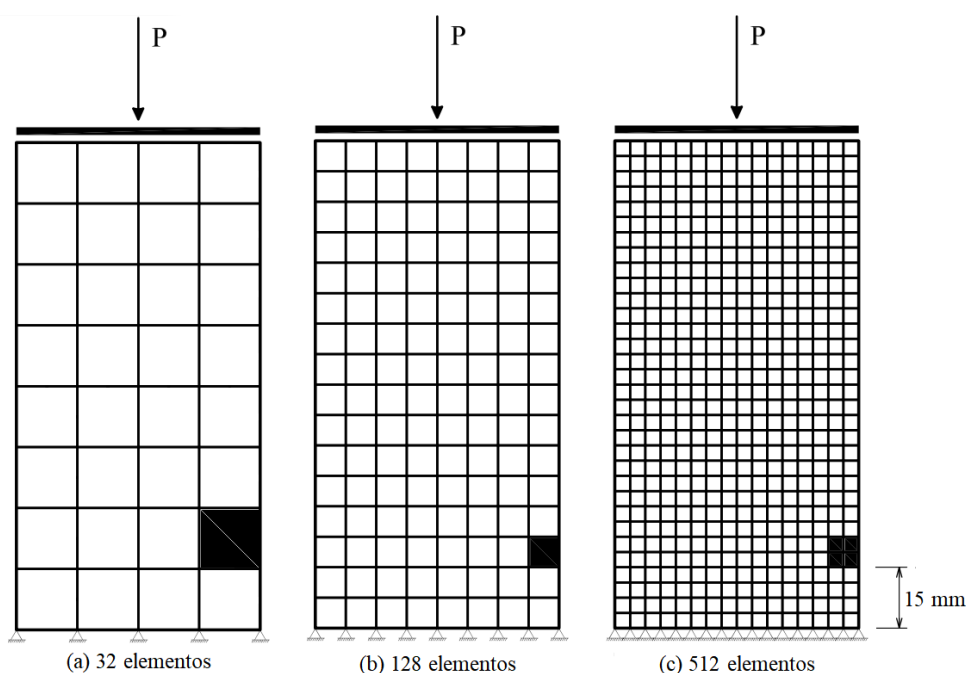


Figura 5.11: Compressão com banda de cisalhamento: Malhas.

²Tendo em vista que, na estratégia de homogeneização micromórfica proposta, o estado corrente do microcontínuo é propagado para a macroescala por meio de estados elementares de deformação e pelas conseqüentes tensões e que, nos modelos de plasticidade, as tensões são calculadas por meio de algoritmos de retorno, esta estratégia requer adequações em estudo para se empregar modelos de plasticidade.

Para forçar a localização por meio da banda de cisalhamento, introduz-se como imperfeição inicial um carregamento horizontal uniformemente distribuído na borda superior do modelo da ordem de 1% do carregamento vertical, bem como se considera uma região menos resistente situada a 15 mm da base (Figura 5.11) reduzindo-se em 5% o valor da tensão limite do regime elástico inicial adotando $\kappa_0 = 1,65 \times 10^{-3}$ para o material dos elementos finitos que compõem essa região.

A análise não linear foi realizada com o método de Newton-Raphson padrão, por meio do método de controle de deslocamento generalizado com fator de carga inicial igual a 0,02 e tolerância para a convergência em carga de 10^{-4} .

As respostas obtidas com o modelo clássico estão apresentadas na Figura 5.12 por meio das curvas carga \times deslocamento vertical da borda superior, donde se observa a perda de objetividade da malha.

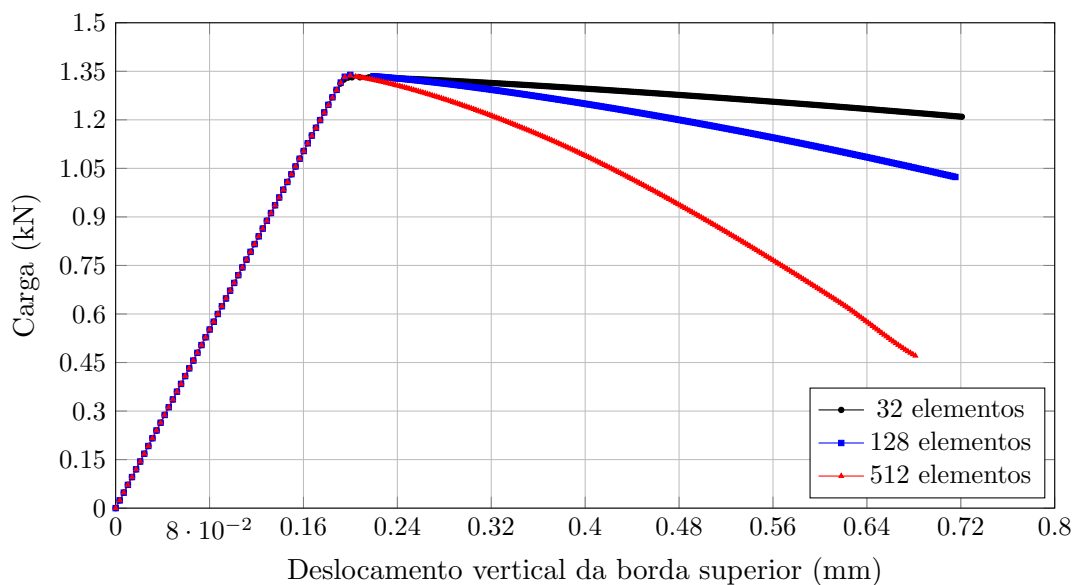


Figura 5.12: Carga \times Deslocamento vertical da borda superior - Clássico.

Conforme discutido na Seção 5.2, essa perda de objetividade é consequência da localização de deformações tender, à medida em que se aumenta o refinamento da malha com o modelo clássico, para uma região de dimensão infinitesimal sem que, para tal, necessite-se de uma dissipação de energia (Lages, 1997).

Essa tendência é observada na Figura 5.13, em que se apresentam as deformadas com ampliação de n vezes, em que n é a dimensão do elemento finito correspondente, e as bandas de cisalhamento correspondentes ao último passo da análise.

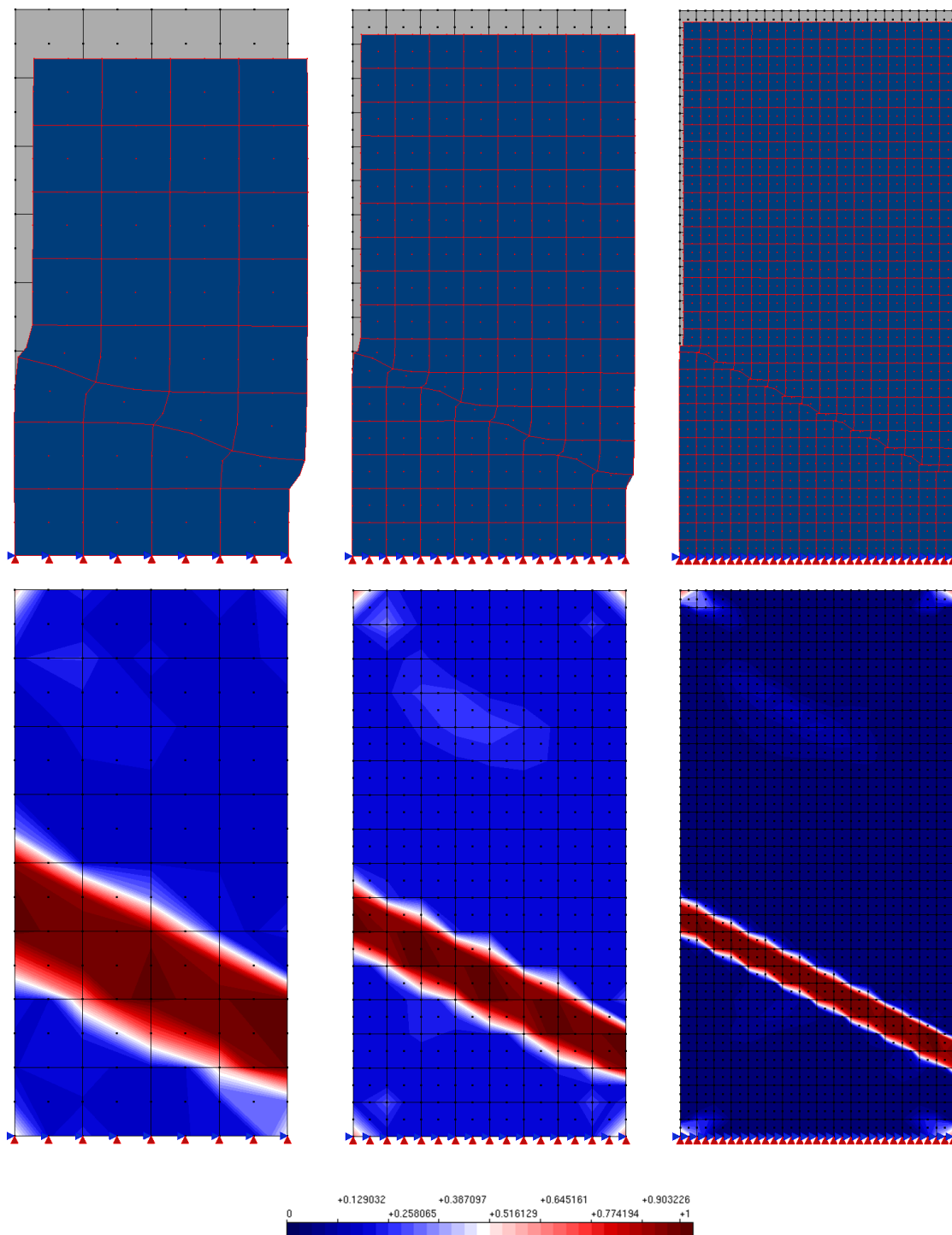


Figura 5.13: Configuração deformada e banda de cisalhamento - Clássico.

Essa inconsistência não é observada com o modelo micromórfico (Figura 5.14, com a deformada ampliada em 15 vezes), que reproduz o fenômeno de localização de deformações sem perda de objetividade da malha, observado na Figura 5.15.

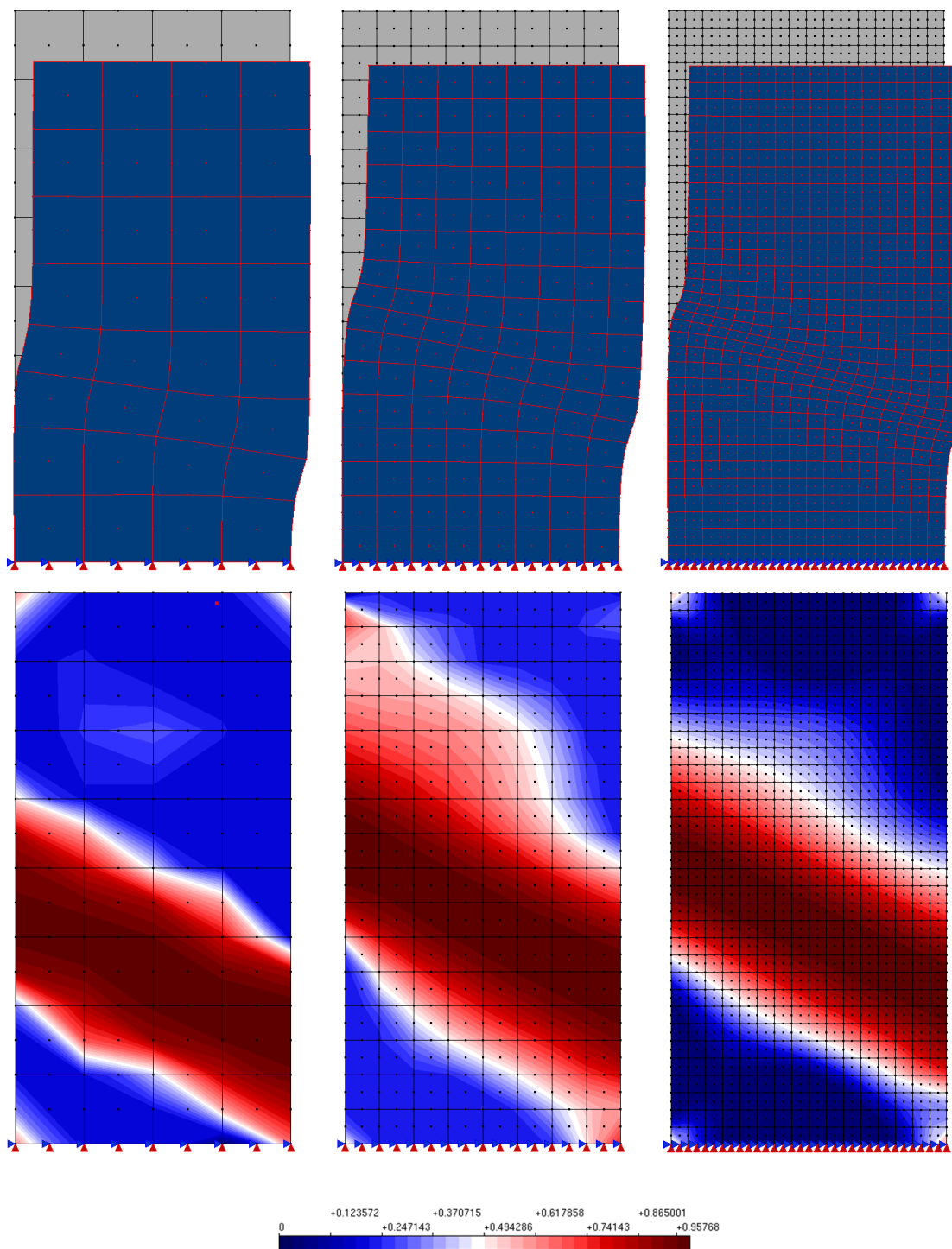


Figura 5.14: Configuração deformada e banda de cisalhamento - Micromórfico.

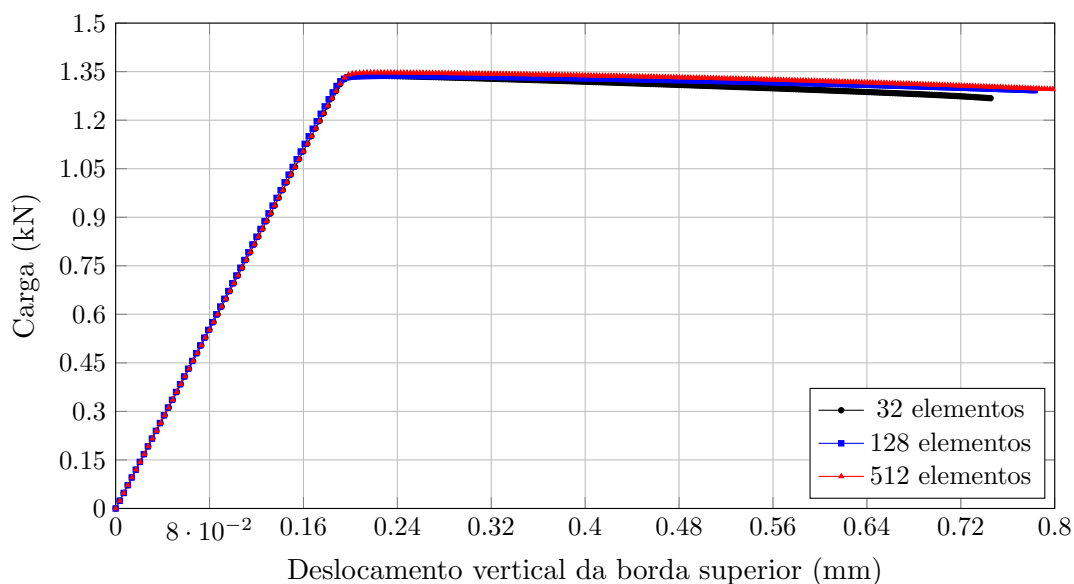


Figura 5.15: Carga × Deslocamento vertical da borda superior - Micromórfico.

5.4 Camada infinita sob cisalhamento

O problema da camada infinita sob cisalhamento foi amplamente empregado para se expor as propriedades de regularização de contínuos generalizados no contexto de modelos elastoplásticos. Entre as diferentes contribuições, citam-se os trabalhos de de Borst (1990, 1991, 1993), de Borst e Sluys (1991), Lages (1997), Fuina (2009), Gori (2018) e Hütter (2019).

Nesta seção, simula-se o ensaio da camada infinita sob cisalhamento, visando-se reafirmar o observado nos problemas anteriores, isto é, o contínuo micromórfico como mecanismo estabilizante no processo de localização de deformações. Para tanto, considera-se uma camada com dimensão infinita na direção horizontal submetida a um carregamento distribuído de cisalhamento de $1,0 \text{ N/mm}$ nas bordas superior e inferior, tal como esquematizado na Figura 5.16(a). Em virtude da suposição de extensão infinita, este problema pode ser estudado por meio de uma faixa da camada com elevada razão de aspecto (2×100) mm^2 , conforme Figura 5.16(b), impondo-se deslocamento vertical nulo. A análise é realizada em estado plano de deformação.

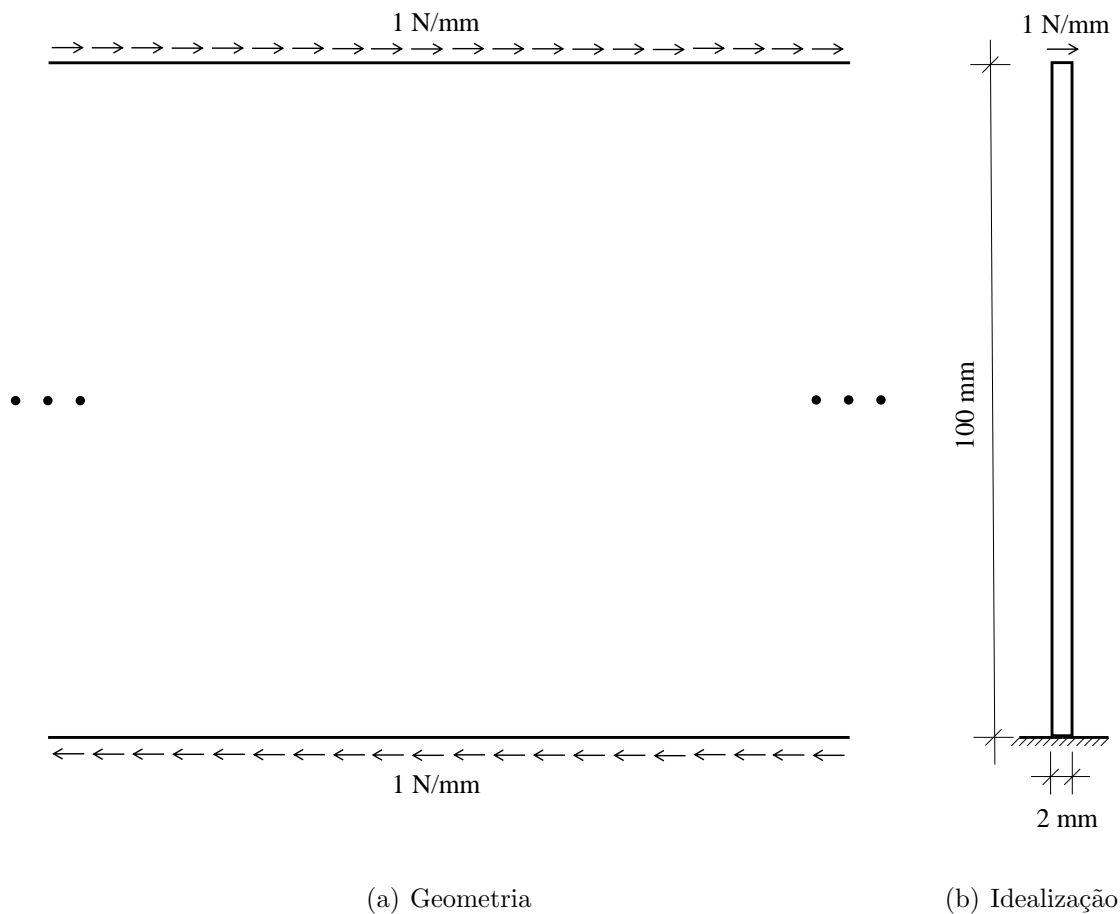


Figura 5.16: Camada infinita sob cisalhamento: Configuração.

Admite-se um microcontínuo quadrado de dimensão igual a 1,0 mm, isotrópico e inicialmente homogêneo constituído por um material com módulo de elasticidade $E = 3,0 \times 10^4$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Para acompanhar a evolução do dano, adota-se o modelo constitutivo de dano isotrópico de Lemaitre e Chaboche (1990), cuja deformação equivalente é dada por $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{ij} / E}$, associado à função de evolução do dano com variação exponencial descrita pelos parâmetros (Penna, 2011) $\alpha = 0,950$, $\beta = 750$ e $\kappa_0 = 1,0 \times 10^{-5}$. Este estudo é realizado considerando-se quatro diferentes malhas (Figura 5.17) compostas por elementos finitos quadrilaterais de quatro nós. Para se impor o deslocamento vertical nulo, restringem-se os deslocamentos verticais de todos os nós. Neste problema, os pontos a uma mesma altura apresentam o mesmo deslocamento horizontal, no entanto, nenhuma imposição se faz necessária para se reproduzir este comportamento.

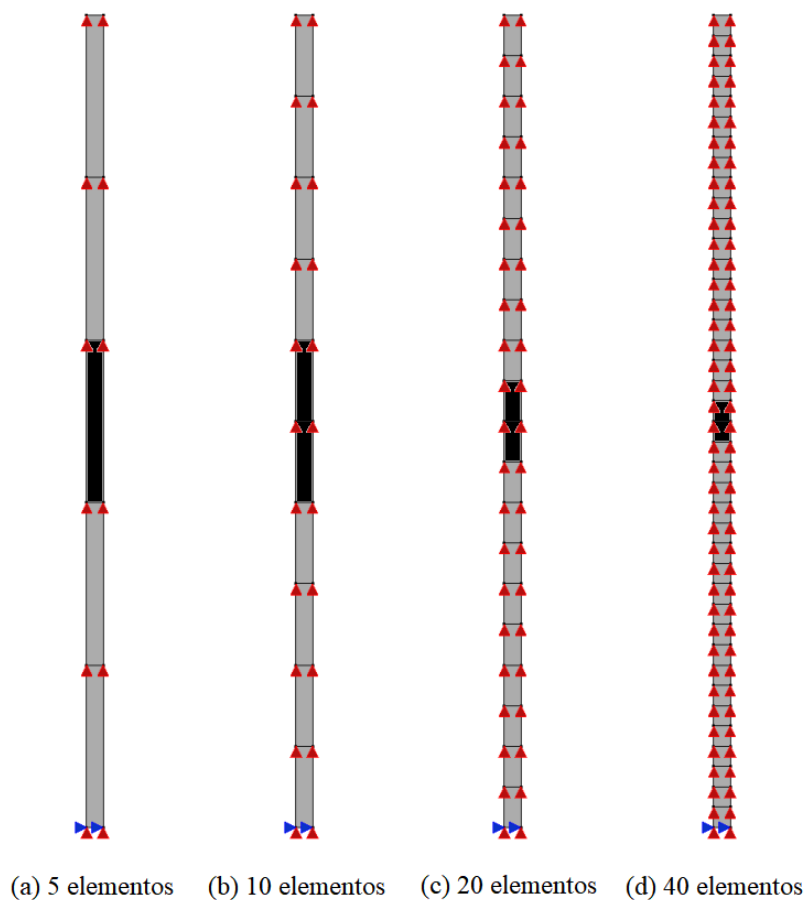


Figura 5.17: Camada infinita sob cisalhamento: Malhas.

Assim como no exemplo anterior, nesta simulação, também se faz necessária uma imperfeição inicial para desencadear o fenômeno de localização de deformações. Para tanto, considera-se uma região menos resistente no centro da faixa adotando-se $\kappa_0 = 0,95 \times 10^{-5}$ para o material dos elementos finitos que compõem essa região. A região menos resistente foi escolhida de acordo com cada discretização, tal como em Gori (2018). Na malha mais grosseira, a zona enfraquecida ocupa o elemento central da faixa, enquanto, nas demais, ocupa os dois elementos centrais, ou seja, as malhas com 5 e 10 elementos são caracterizadas pela mesma altura de zona enfraquecida, enquanto as malhas com 20 e 40 elementos por uma altura reduzida (Figura 5.17).

A análise não linear foi realizada com o método de Newton-Raphson padrão, incrementando-se o deslocamento horizontal da borda superior de 10^{-5} mm, com tolerância para a convergência em carga de 10^{-4} .

As respostas obtidas com o modelo clássico estão apresentadas na Figura 5.18 por meio das curvas fator de carga \times deslocamento horizontal da borda superior. As duas malhas mais grosseiras (com 5 e 10 elementos), caracterizadas pela mesma altura da zona enfraquecida, apresentam a mesma trajetória de equilíbrio, ao passo que as mais refinadas (com 20 e 40 elementos) manifestam um amolecimento mais acentuado no ramo pós-pico.

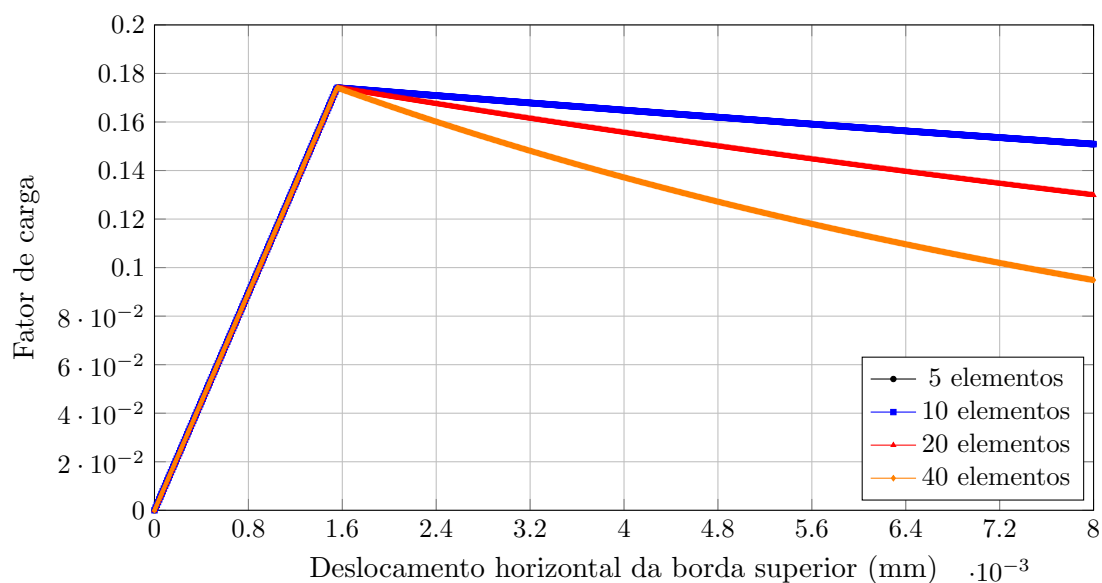


Figura 5.18: Fator de carga \times Deslocamento horizontal da borda superior - Clássico.

O efeito das diferentes alturas da zona enfraquecida também é observado na Figura 5.19, em que se apresentam as deformadas com ampliação de 1000 vezes e as distribuições do dano correspondentes ao último passo da análise. Durante a análise, observou-se que, no início do processo de danificação, a zona degradada se concentra nos elementos enfraquecidos e, durante o processo de carregamento, essa zona não se expande, tendendo a permanecer concentrada nos elementos inicialmente degradados, conforme se observa na Figura 5.19. Estes resultados são análogos aos encontrados por outros autores no contexto de modelos elastoplásticos e ilustram como a dimensão da zona de localização é governada pela malha de elementos finitos no modelo clássico (de Borst, 1991; Gori, 2018).

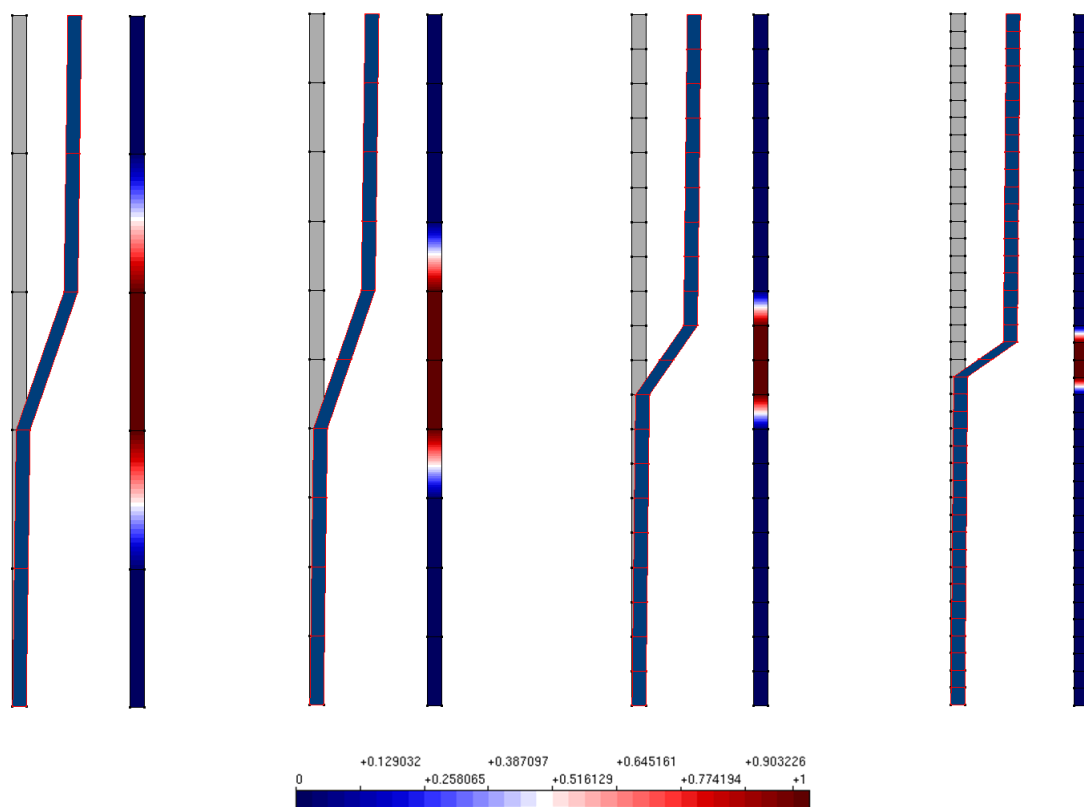


Figura 5.19: Configuração deformada e distribuição do dano - Clássico.

Na Figura 5.20, apresentam-se as respostas obtidas com o modelo micromórfico, observando-se mais uma vez a objetividade da malha.

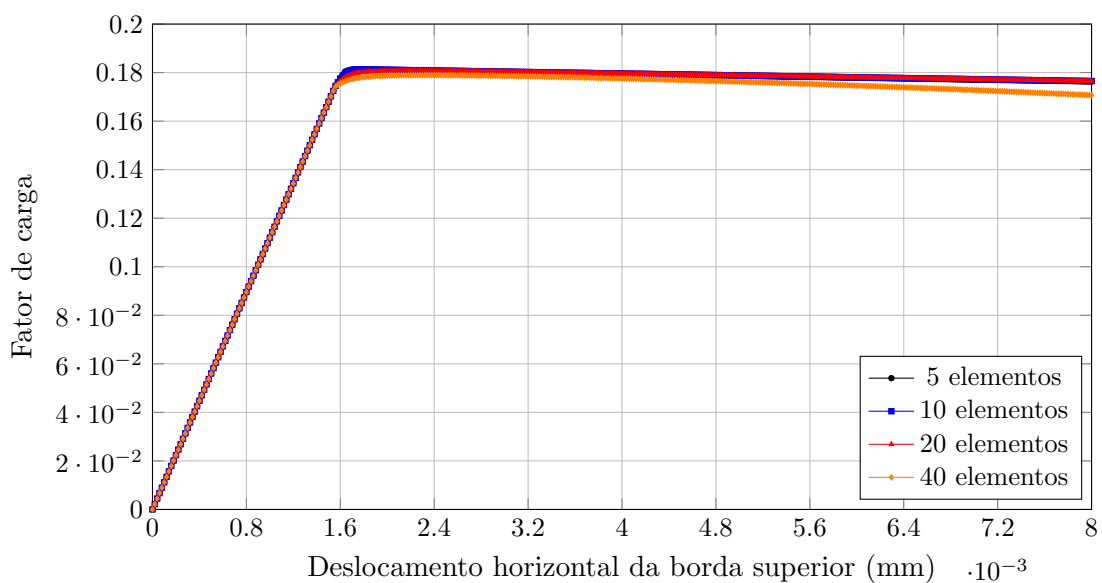


Figura 5.20: Fator de carga \times Deslocamento horizontal da borda superior - Micromórfico.

Deve-se observar que esta objetividade é garantida mesmo com a dimensão da zona enfraquecida função da discretização, devido à capacidade de regularização do modelo micromórfico destacada nos exemplos anteriores, observada na Figura 5.21.

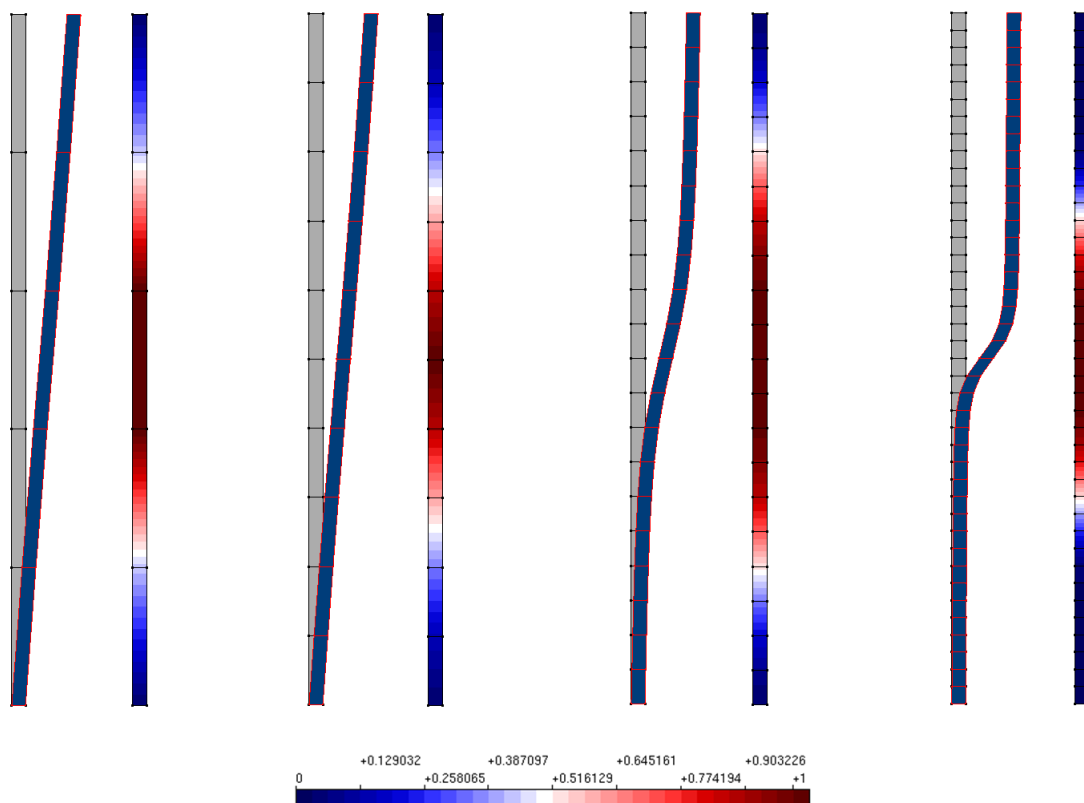


Figura 5.21: Configuração deformada e distribuição do dano - Micromórfico.

Resultados semelhantes foram obtidos por Gori (2018) por meio de modelos micropolares associados a modelos constitutivos baseados em degradação elástica, avaliando-se também a influência dos parâmetros adicionais da teoria micropolar nos resultados, alcançando a objetividade da malha para um caso particular destes parâmetros. Analogamente, esta simulação foi aqui realizada variando a dimensão dos microcontínuos, no entanto, alcançou-se o mesmo resultado para as dimensões fisicamente consistentes consideradas.

Esta objetividade do modelo micromórfico na capacidade de predição é destacada por Hütter (2019), atribuindo-a à maior quantidade de efeitos microestruturais em comparação a outras teorias de contínuos.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Contribuições deste Trabalho

Neste trabalho, desenvolveu-se uma estratégia de homogeneização micromórfica associada à abordagem fraca desta teoria de contínuo, permitindo-se explorar as vantagens do emprego desta teoria sem a necessidade de se definir o seu elevado número de parâmetros materiais.

Para tanto, tomou-se por base a homogeneização micromórfica desenvolvida por Hütter (2017, 2019), de modo a se construir as relações constitutivas micromórficas macroscópicas a partir de parâmetros materiais do contínuo clássico, responsável por governar o problema de valor de contorno na microescala.

Esta estratégia multiescala, que se vale da imposição de estados elementares de deformação às partículas materiais (microcontínuos) como agente responsável por estabelecer a comunicação entre as duas escalas, é aplicável a análises lineares e fisicamente não lineares, permitindo-se empregar modelos constitutivos consagrados da teoria clássica para acompanhamento da degradação no microcontínuo e consequente propagação para a macroescala.

A implementação deste arcabouço no sistema INSANE, além de facilitada pela estrutura segmentada deste sistema, permitiu associar a esta estratégia o arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica (Penna (2011)), generalizando a sua aplicação.

As simulações numéricas apresentadas corroboram com o que se diz sobre a capacidade de regularização dos modelos de contínuos generalizados, sob ótica do contínuo micromórfico, no entanto, o objetivo principal é demonstrar a capacidade da estratégia elaborada em reproduzir o comportamento esperado para a teoria micromórfica, resguardando as suas principais características, embora se definam somente parâmetros materiais da teoria clássica.

Ou seja, a principal contribuição deste trabalho consiste em possibilitar análises segundo a teoria micromórfica contornando-se a sua grande limitação prática, que é a determinação do seu elevado número de parâmetros materiais. Desta forma, permite-se estudar fenômenos bem representados pela teoria micromórfica, mas não pela clássica, como, por exemplo, o fenômeno de localização de deformações em meios parcialmente frágeis, a partir de parâmetros materiais bem conhecidos.

Embora não tenha sido o foco desta tese, a estratégia proposta é promissora no estudo da influência das heterogeneidades microscópicas na resposta macroscópica, uma vez que as heterogeneidades observadas na microescala podem ser incorporadas naturalmente nesta abordagem, abrindo-se, pois, vastas possibilidades para a análise estrutural multiescala.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

A partir desta tese, têm-se as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

1. Estudar mecanismos para representação das heterogeneidades observadas na microescala dos materiais (Pitangueira, 1998), prevendo a aleatoriedade da constituição do meio a partir da consideração de variáveis como geometria, posição relativa, propriedades mecânicas das inclusões, entre outras, e estudar os efeitos gerados por diferentes morfologias;
2. Estudar os efeitos gerados por diferentes geometrias e dimensões definidas para os microcontínuos;

3. Adequar a estratégia pra consideração de modelos constitutivos elastoplásticos na microescala;
4. Adequar a formulação para consideração de porosidade nos microcontínuos, tal como formulado por Hütter (2019);
5. Formular a degradação macroscópica no contexto desta estratégia, a partir da adequação de modelos constitutivos à teoria micromórfica, observando-se que, na estratégia atual, a degradação se dá na microescala e é propagada para a macroescala;
6. Estudar uma alternativa para se explicitar os parâmetros elásticos da teoria micromórfica no contexto desse processo de homogeneização;
7. Particularizar esta estratégia para outras teorias de contínuos generalizados, como o micropolar (ou de Cosserat), o com microexpansão e o do primeiro gradiente de deformação;
8. Adequar esta estratégia a outras abordagens discretas, tal como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e os Métodos sem Malha (MM);
9. Reformular esta estratégia de modo a possibilitar análises geometricamente não-lineares com grandes deslocamentos e deformações infinitesimais e com grandes deslocamentos e deformações finitas;
10. Estudar o emprego de processamento paralelo de modo a otimizar esta estratégia, reduzindo o tempo de processamento das análises.

Referências Bibliográficas

- Adhikary, D. P. e Dyskin, A. V., 1998. ‘A continuum model of layered rock masses with non-associative joint plasticity’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 22, pp. 245–261.
- Adomeit, G., (1968), Determination of elastic constants of a structured material, *in* E. Kröner, ed., ‘Mechanics of Generalized Continua’, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 80–82.
- Aero, E. L. e Kuvshinskii, E. V., 1961. ‘Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles’. *Soviet Physics Solid State*, vol. 2, pp. 1272–1281.
- Aifantis, E. C., 1984. ‘On the microstructural origin of certain inelastic models’. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 106, pp. 326–330.
- Aifantis, E. C., 1987. ‘The physics of plastic deformation’. *International Journal of Plasticity*, vol. 3(3), pp. 211–247.
- Altenbach, H. e Eremeyev, V. A., (2016), On strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials, *in* H. Altenbach e S. Forest, eds, ‘Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials’, *Advanced Structured Materials*, Vol. 42, Springer International Publishing, Suíça, pp. 1–13.
- Ansari, R., Bazdid-Vahdati, M., Shakouri, A. H., Norouzzadeh, A. e Rouhi, H., 2016. ‘Micromorphic prism element’. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 22(6), pp. 1438–1461.
- Bellis, M. L. e Addressi, D., 2011. ‘A cosserat-based multi-scale model for masonry structures’. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 9, pp. 543–563.

- Biswas, R. e Poh, L. H., 2017. ‘A micromorphic computational homogenization framework for heterogeneous materials’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 102, pp. 187–208.
- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R., 1986. ‘Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing’. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, vol. 23(3), pp. 255–265.
- Boresi, A. P., Chong, K. P. e Lee, J. D., 2011. *Elasticity in Engineering Mechanics*. John Wiley & Sons.
- Bouyge, F., Jasiuk, I. e Ostoja-Starzewski, M., 2001. ‘A micromechanically based couple-stress model of an elastic two-phase composite’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38(10), pp. 1721–1735.
- Cauchy, A.-L., 1828. ‘Sur les équations qui expriment l’équilibre ou les lois du mouvement intérieur d’un corps solide élastique ou non élastique’. *Exercices de mathématiques*, vol. 2, pp. 160–187. Este artigo apresenta em impressão as ideias originalmente enviadas à Academia de Ciências de Paris em 30 de setembro de 1822 (Maugin, 2014a).
- Clasen, H., Hirschberger, C. B., Korelc, J. e Wriggers, P., (2013), FE² - homogenization of micromorphic elasto-plastic materials, in E. Oñate, D. R. J. Owen, D. Peric e B. Suárez, eds, ‘Computational Plasticity XII’, Proceedings of the XII International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS XII. Fundamentals and Applications, International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Espanha, pp. 1–12.
- Claus Jr., W. D. e Eringen, A. C., (1969), Three dislocation concepts and micromorphic mechanics, in ‘Developments in Mechanics’, Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference, Vol. 6, Midwestern, Estados Unidos, pp. 349–358.
- Cosserat, E. M. P. e Cosserat, F., 1909. *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris, França.

- de Borst, R., (1990), Simulation of localisation using Cosserat theory, *in* N. Bicanic e H. A. Mang, eds, ‘Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures’, Proceedings of the 2nd International Conference, Pineridge Press, Swansea, pp. 931–944.
- de Borst, R., 1991. ‘Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum’. *Engineering Computations*, vol. 8(4), pp. 317–332.
- de Borst, R., 1993. ‘A generalisation of J_2 -flow theory for polar continua’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 103, pp. 347–362.
- de Borst, R. e Sluys, L. J., 1991. ‘Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 90, pp. 805–827.
- Dym, C. L. e Shames, I. H., 2013. *Solid Mechanics: A Variational Approach, Augmented Edition*. SpringerLink: Bücher, Springer New York.
- Eringen, A. C., 1962. *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos.
- Eringen, A. C., 1964. ‘Simple microfluids’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 205–217.
- Eringen, A. C., 1966a. ‘Linear theory of micropolar elasticity’. *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 15(6), pp. 909–923.
- Eringen, A. C., (1966b), Mechanics of micromorphic materials, *in* H. Görtler, ed., ‘Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964’, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 131–138.
- Eringen, A. C., 1967. *Mechanics of continua*. Wiley.
- Eringen, A. C., (1968a), Compatibility conditions of the theory of micromorphic elastic solids, Relatório técnico No. 8-5 - NASA CR-1236, pp. i - iii / 1-16, National Aeronautics and Space Administration and General Technology Corporation, Washington, D. C., Estados Unidos.

- Eringen, A. C., (1968*b*), Mechanics of micromorphic continua, *in* E. Kröner, ed., 'IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) Mechanics of Generalized Continua. (Kröner, 1968)', Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Alemanha, pp. 18–35.
- Eringen, A. C., (1968*c*), Theory of micropolar elasticity, *in* H. Liebowitz, ed., 'Fracture: An Advanced Treatise', A Treatise on Fracture. Mathematical Fundamentals, Vol. II, Academic Press, Nova Iorque, Estados Unidos, chapter 7, pp. 621–729.
- Eringen, A. C., 1969. 'Compatibility conditions of the theory of micromorphic elastic solids'. *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 19(6), pp. 473–481.
- Eringen, A. C., 1970. 'Balance laws of micromorphic mechanics'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 8(10), pp. 819–828.
- Eringen, A. C., 1972*a*. 'Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 10, pp. 425–435.
- Eringen, A. C., 1972*b*. 'Theory of micromorphic materials with memory'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 10(7), pp. 623–641.
- Eringen, A. C., 1976. *Continuum physics. Volume 4 - Polar and nonlocal field theories*. Academic Press Inc.
- Eringen, A. C., 1980. *Mechanics of continua*. 2 edn, Robert E. Krieger Publishing Company.
- Eringen, A. C., 1990. 'Theory of thermo-microstretch elastic solids'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 28(12), pp. 1291–1301.
- Eringen, A. C., 1992. 'Balance laws of micromorphic continua revisited'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 30(6), pp. 805–810.
- Eringen, A. C., 1999. *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. Microcontinuum Field Theories, Springer New York.
- Eringen, A. C., 2002. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer-Verlag New York.

- Eringen, A. C. e Claus Jr., W. D., (1970), A micromorphic approach to dislocation theory and its relation to several existing theories, *in* J. A. Simmons, R. De Wit e R. Bullough, eds, 'Fundamental aspects of dislocation theory', National Bureau of Standards (US), Special Publication 317, Vol. II, Washington, D. C., Estados Unidos, pp. 1023–1040.
- Eringen, A. C. e Şuhubi, E. S., 1964a. 'Nonlinear theory of simple micro-elastic solids - I'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 189–203.
- Eringen, A. C. e Şuhubi, E. S., 1964b. 'Nonlinear theory of simple micro-elastic solids - II'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 389–404.
- Eringen, A. C. e Kafadar, C. B., (1976), Polar field theories, *in* A. C. Eringen, ed., 'Polar and nonlocal field theories', Continuum physics, Volume 4, Academic Press, Nova Iorque, Estados Unidos, chapter 1, pp. 1–73.
- Feyel, F., 1998. Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes. Tese de Doutorado, Ecole National Supérieure des Mines de Paris, Paris, França.
- Feyel, F., 2003. 'A multilevel finite element method (FE²) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192(28), pp. 3233–3244.
- Feyel, F. e Chaboche, J.-L., 2000. 'FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183(3), pp. 309–330.
- Fleck, N. A. e Hutchinson, J. W., 1993. 'A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41(12), pp. 1825–1857.
- Fleck, N. A. e Hutchinson, J. W., 1997. 'Strain gradient plasticity'. *Advances in applied mechanics*, vol. 33, pp. 295–362.
- Fleck, N. A. e Hutchinson, J. W., 2001. 'A reformulation of strain gradient plasticity'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49(10), pp. 2245–2271.

- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Forest, S., (1998), Mechanics of generalized continua: construction by homogenization, *in* ‘40e Colloque de Métallurgie de l’INSTN - Comportement mécanique et effets d’échelle’, Journal de Physique IV, Vol. 08, França, pp. Pr4–39 – Pr4–48.
- Forest, S., 1999. ‘Aufbau und identifikation von stoffgleichungen für höhere kontinua mittels homogenisierungsmethoden’. *Technische Mechanik*, vol. 19, pp. 297–306.
- Forest, S., 2002. ‘Homogenization methods and the mechanics of generalized continua - Part 2’. *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 28-29, pp. 113–143.
- Forest, S., 2005. ‘Mechanics of Cosserat media - An introduction’. *Ecole des Mines de Paris, Paris*, pp. 1–20.
- Forest, S., (2013), Micromorphic media, *in* H. Altenbach e V. A. Eremeyev, eds, ‘Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications’, CISM International Centre for Mechanical Sciences: Courses and Lectures, Vol. 541, Springer Vienna, Vienna, pp. 249–300.
- Forest, S., 2016. ‘Nonlinear regularization operators as derived from the micromorphic approach to gradient elasticity, viscoplasticity and damage’. *Proceedings of the Royal Society A, London*, vol. 472(2188), pp. 1–27.
- Forest, S. e Bertram, A., (2011), Formulations of strain gradient plasticity, *in* H. Altenbach, G. A. Maugin e V. Erofeev, eds, ‘Mechanics of Generalized Continua’, Advanced Structured Materials, Vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 137–149.
- Forest, S., Cordero, N. M. e Busso, E. P., 2011. ‘First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales’. *Computational Materials Science*, vol. 50, pp. 1299–1304.
- Forest, S. e Sab, K., 1998. ‘Cosserat overall modeling of heterogeneous materials’. *Mechanics Research Communications*, vol. 25(4), pp. 449–454.

- Forest, S. e Sievert, R., 2003. ‘Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua’. *Acta Mechanica*, vol. 160(1), pp. 71–111.
- Forest, S. e Sievert, R., 2006. ‘Nonlinear microstrain theories’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43(24), pp. 7224–7245.
- Forest, S. e Trinh, D.-K., 2011. ‘Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods’. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 91, pp. 90–109.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Germain, P., 1973a. ‘La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, Première partie: théorie du second gradient’. *Journal de Mécanique*, vol. 12(2), pp. 235–274.
- Germain, P., 1973b. ‘The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure’. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 25(3), pp. 556–575.
- Gitman, I. M., Askes, H., Sluys, L. J. e Sluys, L. J., (2004), The concept of representative volume for elastic, hardening and softening materials, *in* ‘Proceedings of XXXII International Summer School-Conference: Advanced Problems in Mechanics’, São Petersburgo, Rússia, pp. 180–184.
- Goodman, M. A. e Cowin, S. C., 1972. ‘A continuum theory for granular materials’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 44, pp. 249–266. Comunicado por J. L. Ericksen.
- Gori, L., 2018. Failure analysis of quasi-brittle media using the micropolar continuum theory, elastic-degrading constitutive models, and smoothed point interpolation methods. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Green, A. E. e Rivlin, R. S., 1964a. ‘Simple force and stress multipoles’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 325–353.

- Green, A. E. e Rivlin, R. S., 1964b. ‘Multipolar continuum mechanics’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, pp. 113–147.
- Grentzelou, C. G. e Georgiadis, H. G., 2005. ‘Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42(24), pp. 6226–6244.
- Grioli, G., 1960. ‘Elasticità asimmetrica’. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 50(1), pp. 389–417.
- Günther, W., 1958. ‘Zur statik und kinematik des Cosseratschen kontinuums’. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, vol. 10, pp. 195–213.
- Hashin, Z., 1964. ‘Theory of mechanical behavior of heterogeneous media’. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 17, pp. 1–9.
- Hashin, Z., 1983. ‘Analysis of composite materials: A survey’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 481–505.
- Hill, R., 1963. ‘Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 357–372.
- Hill, R., 1972. ‘On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain’. *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 326, pp. 131–147.
- Hirschberger, C. B., 2008. A Treatise on Micromorphic Continua. Theory, Homogenization, Computation. Tese de Doutorado, Universidade de Kaiserslautern, Kaiserslautern, Renânia-Palatinado, Alemanha.
- Hütter, G., 2016. ‘An extended Coleman-Noll procedure for generalized continuum theories’. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 28(6), pp. 1935–1941.
- Hütter, G., 2017. ‘Homogenization of a Cauchy continuum towards a micromorphic continuum’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 99, pp. 394–408.
Correção: Corrigendum to “Homogenization of a Cauchy continuum towards a

- micromorphic continuum” [J. Mech. Phys. Solids 99 (2017) 394-408]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 107, pp. 320 (2017).
- Hütter, G., 2019. A theory for the homogenisation towards micromorphic media and its application to size effects and damage. Tese de Doutorado, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Freiberg, Alemanha.
- Hütter, G., Linse, T., Mühlich, U. e Kuna, M., 2013. ‘Simulation of ductile crack initiation and propagation by means of a non-local Gurson-model’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50(5), pp. 662–671.
- Hütter, G., Mühlich, U. e Kuna, M., 2014. ‘Micromorphic homogenization of a porous medium: elastic behavior and quasi-brittle damage’. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 27(6), pp. 1059–1072.
- Isbuga, V. e Regueiro, R. A., 2011. ‘Three-dimensional finite element analysis of finite deformation micromorphic linear isotropic elasticity’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 49(12), pp. 1326–1336.
- Jänicke, R., 2010. Micromorphic media: Interpretation by homogenisation. Tese de Doutorado, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Alemanha.
- Jänicke, R., Diebels, S., Sehlhorst, H.-G. e Düster, A., 2009. ‘Two-scale modelling of micromorphic continua: A numerical homogenization scheme’. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 21, pp. 297–315.
- Jänicke, R. e Steeb, H., 2012. ‘Minimal loading conditions for higher-order numerical homogenisation schemes. Cauchy, Second Gradient and Micromorphic substitute media’. *Archive of Applied Mechanics*, vol. 82, pp. 1075–1088.
- Kalampakas, A. e Aifantis, E. C., 2014. ‘A note on the discrete approach for generalized continuum models’. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 23(5-6), pp. 181–183.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V. e Jeulin, D., 2003. ‘Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 3647–3679.

- Kirchner, N. e Steinmann, P., 2005. ‘A unifying treatise on variational principles for gradient and micromorphic continua’. *Philosophical Magazine*, vol. 85(33-35), pp. 3875–3895.
- Koiter, W. T., 1964a. ‘Couple stress in the theory of elasticity I’. *Proceeding of the Koninklijke Nederland Akademie van Wetenschappen*, vol. B-67, pp. 17–29.
- Koiter, W. T., 1964b. ‘Couple stress in the theory of elasticity II’. *Proceeding of the Koninklijke Nederland Akademie van Wetenschappen*, vol. B-67, pp. 30–44.
- Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D. e Brekelmans, W. A. M., 2002. ‘Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, pp. 1235–1260.
- Kröner, E., 1977. ‘Bounds for effective elastic moduli of disordered materials’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 25, pp. 137–155.
- Kröner, E., ed., 1968, *Proceedings of the IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications, Freudenstadt and Stuttgart (Germany) 1967*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Alemanha.
- Lages, E. N., 1997. Modelagem de Localização de Deformações com Teorias de Contínuo Generalizado. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer Berlin Heidelberg.

- Li, J., 2011. ‘A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials - Part I: Homogenization methodology and constitutive relations’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 3336–3345.
- Mal, A. K. e Singh, S. J., 1991. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice Hall.
- Maugin, G. A., 1990. ‘Internal variables and dissipative structures’. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 15, pp. 173–192.
- Maugin, G. A., 2014a. *Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries: Historical Perspectives from John Bernoulli (1727) to Ernst Hellinger (1914)*. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 214, Springer International Publishing.
- Maugin, G. A., 2014b. ‘Some remarks on generalized continuum mechanics’. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 20(3), pp. 280–291.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., (1984), Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete, in S. P. Shah, ed., ‘Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites’, NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro., Northwestern University, pp. 375–378.
- Mehta, P. K. e Monteiro, P. J. M., 2006. *Concrete: Microstructure, Properties, and Materials*. McGraw Hill professional, McGraw-Hill Education.
- Mindlin, R. D., 1964. ‘Micro-structure in linear elasticity’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 51–78. Comunicado por R. A. Toupin.
- Mindlin, R. D., 1965. ‘Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 1, pp. 417–438.
- Mindlin, R. D. e Eshel, N. N., 1968. ‘On first strain gradient theories in linear elasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 4(1), pp. 109–124.
- Mindlin, R. D. e Tiersten, H. F., 1962. ‘Effects of couple-stresses in linear elasticity’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, pp. 415–448.

- Mora, R. e Waas, A. M., 2000. ‘Measurement of the Cosserat constant of circular-cell polycarbonate honeycomb’. *Philosophical Magazine A*, vol. 80(7), pp. 1699–1713.
- Mühlhaus, H.-B. e Vardoulakis, I., 1987. ‘The thickness of shear bands in granular materials’. *Géotechnique*, vol. 37(3), pp. 271–283.
- Nemat-Nasser, S. e Hori, M., 1999. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics Series, Elsevier.
- Nguyen, V. D., 2014. Computational homogenization of cellular materials capturing micro-buckling, macro-localization and size effects. Tese de Doutorado, Université de Liège, Liège, Bélgica.
- Nowacki, W., 1986. *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Rajagopal, E. S., 1960. ‘The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity’. *Annalen der Physik*, vol. 6, pp. 192–201.
- Ristinmaa, M. e Vecchi, M., 1996. ‘Use of couple-stress theory in elasto-plasticity’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 136, pp. 205–224.
- Rodrigues, D. E. S., Belinha, J., Pires, F. M. A., Dinis, L. M. J. S. e Jorge, R. M. N., 2018. ‘Homogenization technique for heterogeneous composite materials

- using meshless methods'. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 92, pp. 73–89.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Sluys, L. J., 1992. Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids. Dissertação de Mestrado, Delft University of Technology, Delft.
- Steeb, H. e Diebels, S., 2003. 'A thermodynamic-consistent model describing growth and remodeling phenomena'. *Computational Materials Science*, vol. 28(3), pp. 597–607.
- Steinmann, P., 1994. 'An improved FE expansion for micropolar localization analysis'. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, pp. 1005–1012.
- Steinmann, P., 1995. 'Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 583–606.
- Tekoğlu, C., 2007. Size effects in cellular solids. Tese de Doutorado, Universidade de Groninga, Groninga, Países Baixos.
- Toupin, R. A., 1962. 'Elastic materials with couple-stresses'. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11(1), pp. 385–414.
- Toupin, R. A., 1964. 'Theories of elasticity with couple-stress'. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17(2), pp. 85–112.
- Trovalusci, P., Ostoja-Starzewski, M., Bellis, M. L. D. e Murralli, A., 2015. 'Scale-dependent homogenization of random composites as micropolar continua'. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 49, pp. 396–407.
- Truesdell, C. e Toupin, R. A., (1960), The classical field theories, in S. Flügge, ed., 'Encyclopedia of Physics: Principles of Thermodynamics and Statistics / Handbuch der Physik: Prinzipien der Thermodynamik und Statistik', Principles of

Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie, Vol. III/1, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, pp. 226–858.

Twiss, R. J. e Eringen, A. C., 1971. ‘Theory of mixtures for micromorphic materials - I: Balance laws’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 9(10), pp. 1019–1044.

Twiss, R. J. e Eringen, A. C., 1972. ‘Theory of mixtures for micromorphic materials - II: Elastic constitutive equations’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 10(5), pp. 437–465.

Vanis, S., 2010. Numerical simulation of finite micromorphic elasticity using FETI-DP domain decomposition methods. Dissertação de Mestrado, Universidade de Duisburg-Essen, Essen, Renânia do Norte-Vestfália, Alemanha.

Voigt, W., 1887. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Vol. 34, Dieterichsche Verlags-Buchhandlung. Citado em Mindlin e Tiersten (1962); Eringen (1968*b*); Adhikary e Dyskin (1998).

Voyiadjis, G. Z., Alsaleh, M. I. e Alshibli, K. A., 2005. ‘Evolving internal length scales in plastic strain localization for granular materials’. *International Journal of Plasticity*, vol. 21, pp. 2000–2024.

Willis, J. R., 1981. ‘Variational and related methods for overall properties of composites’. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21, pp. 1–78.

Wong, H. S., Zobel, M., Buenfeld, N. R. e Zimmerman, R. W., 2009. ‘Influence of the interfacial transition zone and microcracking on the diffusivity, permeability and sorptivity of cement-based materials after drying’. *Magazine of Concrete Research*, vol. 61, pp. 571–589.