

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS DE  
INTERFACE COM ELEVADA RAZÃO DE ASPECTO PARA ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO**

**Thais de Oliveira Azevedo**


UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS


**"IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS DE  
INTERFACE COM ELEVADA RAZÃO DE ASPECTO PARA  
ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO"**

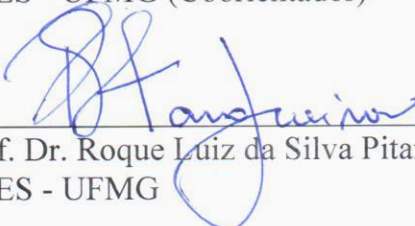
Thais de Oliveira Azevedo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Samuel Silva Penna  
DEES - UFMG (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto  
DEES - UFMG (Coorientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
DEES - UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Jamile Salim Fuina  
FUMEC

Belo Horizonte, 24 de maio de 2019

A994i	<p>Azevedo, Thais de Oliveira.  Implementação computacional de elementos de interface com elevada razão de aspecto para análise não linear de estruturas de concreto [recurso eletrônico] / Thais de Oliveira Azevedo. -- 2019.  1 recurso online (105 f. : il., color.) : pdf..</p> <p>Orientador: Samuel Silva Penna.  Coorientador: Rodrigo Guerra Peixoto.</p> <p>Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndices: f.93-98.</p> <p>Bibliografia: f. 99-105.  Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos- Teses. 3. Interfaces (Computador) - Teses. 4. Análise funcional não-linear - Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Peixoto, Rodrigo Guerra. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624(043)</p>
-------	--

*A persistência é o menor caminho do êxito.*

Charlie Chaplin

*Dedico a meus pais.*

# Índice

<b>Índice</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.1.1 Objetivo Geral . . . . .	4
1.1.2 Objetivos Específicos . . . . .	5
1.2 Organização do Texto . . . . .	5
<b>2 Modelagem do Concreto Estrutural</b>	<b>7</b>
2.1 Caracterização do Comportamento do Concreto Fissurado . . . . .	8
2.2 Breve Histórico . . . . .	15
2.3 Modelos Constitutivos para o Concreto . . . . .	17
2.3.1 Modelo de Fissuração Distribuída . . . . .	18
2.3.2 Modelo Baseado na Mecânica do Dano Contínuo . . . . .	25
2.4 Energia de Fratura . . . . .	30
<b>3 Elemento de Interface Baseado na Cinemática de Descontinuidade Forte</b>	<b>35</b>
3.1 Cinemática de Descontinuidade Forte . . . . .	35
3.2 Formulação do Elemento de Interface . . . . .	38
3.3 Relação Constitutiva Discreta do Elemento de Interface . . . . .	42
<b>4 Implementação Computacional</b>	<b>46</b>
4.1 Organização do Núcleo Numérico . . . . .	47
4.2 Quebra da Malha de Elementos Finitos . . . . .	49
4.3 Implementação do Elemento de Interface . . . . .	53

4.4	Adaptação do Modelo Constitutivo . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>60</b>
5.1	Simulações na Tração Direta . . . . .	61
5.1.1	Tração simples . . . . .	61
5.1.2	Ensaio de Tração Direta com Entalhe Simétrico de Hordijk (1991) . . . . .	64
5.1.3	Ensaio de Tração com Entalhes Assimétricos de Shi et al. (2005)	69
5.2	Flexão em Três Pontos de Petersson (1981) . . . . .	73
5.3	Efeito de Tamanho na Flexão em Três Pontos de García-Álvarez et al. (2012) . . . . .	78
5.4	Painel em L de Winkler et al. (2004) . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>90</b>
6.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Estruturas de Dados para Subdivisão Planar</b>	<b>93</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>99</b>

# Lista de Tabelas

4.1	Dados da vizinhança . . . . .	50
4.2	Dados atualizados da vizinhança ao final do processo de fragmentação.	53
5.1	Parâmetros da lei de Dano. . . . .	73
5.2	Parâmetros da lei de dano. . . . .	79
5.3	Parâmetros da lei de dano. . . . .	83
5.4	Relação entre $h$ e $\beta'$ . . . . .	86

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama da resposta estrutural dos diferentes tipos de materiais: a) Materiais frágeis, b) Materiais dúcteis, c) Materiais parcialmente frágeis. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996). . . . .	8
2.2	Constituintes do concreto nos três níveis de observação (van Mier et al., 1994). . . . .	10
2.3	Mecanismos da zona de processo de fratura. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996). . . . .	11
2.4	Propagação de fissura. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996). . . . .	12
2.5	Diagrama tensão-deformação do concreto Adaptado de Shah (1996). . . . .	13
2.6	Separação do diagrama tensão-deformação total para o concreto em um diagrama tensão-deformação e outro tensão-abertura de trinca. . . . .	14
2.7	Lei de Boone e Ingraffea (Penna, 2011). . . . .	24
2.8	Lei de Carreira e Chu (Penna, 2011). . . . .	25
2.9	Caracterização do dano (Penna, 2011). . . . .	27
2.10	Sólido submetido à tração crescente (Maedo, 2015). . . . .	30
2.11	Modelos de fissuração a) contínuo, b) discreto (Maedo, 2015). . . . .	34
3.1	Cinemática com descontinuidades a) Descontinuidade fraca b) Descontinuidade forte. Adaptado de Peixoto (2016). . . . .	36
3.2	Fragmentação da malha de elementos finitos (Manzoli et al., 2012). . . . .	39
3.3	Modelo do elemento finito de interface (Rodrigues et al., 2016). . . . .	39
3.4	Relação entre $g_f$ e $\mathcal{A}$ . . . . .	45
4.1	Organização do núcleo numérico do INSANE (Fonseca, 2008). . . . .	48
4.2	Fragmentação da malha padrão de elementos finitos - consulta da vizinhança e duplicação das arestas. . . . .	50



4.3	Fragmentação da malha padrão de elementos finitos - troca da incidência e exclusão das arestas antigas. . . . .	51
4.4	Fragmentação da malha padrão de elementos finitos - recuo das arestas e criação dos elementos de interface. . . . .	52
4.5	Diagrama de classe simplificado para <code>Element</code> . . . . .	54
4.6	Representação da nomenclatura do elemento triangular de interface. . . . .	55
4.7	Hierarquia de classes de <code>ConstitutiveModelFilter</code> . . . . .	58
5.1	Configuração geométrica, condições de apoio e de carregamento. . . . .	62
5.2	Influência da energia de fratura na trajetória de equilíbrio . . . . .	62
5.3	Deformada nos passos (a) prévio ao limite de tensão, (b) no limite de tensão e (c) posterior ao limite de tensão . . . . .	63
5.4	Variação de deslocamentos. . . . .	64
5.5	Geometria (medidas em mm) e condições de apoio (Hordijk, 1991). . . . .	65
5.6	Malha de elementos finitos (a) quadrilaterais (b) triangulares . . . . .	66
5.7	Malha quadrilateral (a) configuração deformada (b) variação de deformação. . . . .	67
5.8	Malha triangular (a) configuração deformada (b) variação de deslocamentos . . . . .	68
5.9	Comparação das trajetórias de equilíbrio. . . . .	69
5.10	(a) configuração geométrica (medidas em mm) (Sancho et al., 2006) (b) malha e condições de apoio. . . . .	70
5.11	Trajetoárias de equilíbrio. . . . .	71
5.12	Configuração deformada (a) numérico - elementos de interface, (b) numérico - por Sancho et al. (2006), (c) experimental - por Shi et al. (2005). . . . .	72
5.13	(a) variação de deformações e (b) variação de deslocamentos . . . . .	72
5.14	Geometria (medidas em mm) e condições de apoio (Penna, 2011). . . . .	73
5.15	Malha de elementos finitos. . . . .	74
5.16	Detalhe do refinamento da malha na região da trinca. . . . .	75
5.17	Trajetoárias de equilíbrio - influência da malha. . . . .	75
5.18	Configuração deformada (a) passo 60, (b) passo 200, (c) passo 400. . . . .	76
5.19	Padrão de dano (a) passo 60, (b) passo 400. . . . .	76

5.20	Trajatórias de equilíbro para a malha (c) com modelo de dano isotrópico e fissuração distribuída. . . . .	77
5.21	Configuração geométrica. . . . .	78
5.22	Discretizações (a) $d = 80$ mm, (b) $d = 160$ mm, (c) $d = 320$ mm. . .	80
5.23	Trajatórias de Equilíbro. . . . .	81
5.24	Evolução das deformações com (a) 30 passos, (b) 70 passos, (c) 100 passos. . . . .	81
5.25	Configuração deformada (a) $d = 80$ mm, (b) $d = 160$ mm, (c) $d = 320$ mm . . . . .	82
5.26	Painel em “L” de Winkler et al. (2004). . . . .	83
5.27	Trajatórias de equilíbro obtidas com o modelo de dano de Mazars (1984). . . . .	84
5.28	Trajatórias de equilíbro com $\beta = 20$ - influência de $h$ . . . . .	85
5.29	Trajatórias de equilíbro com ajuste de $\beta$ - influência de $h$ . . . . .	86
5.30	Deformada: (a) passo 50, (b) passo 100, (c) passo 300. . . . .	87
5.31	Padrão de dano obtido com elementos de interface. . . . .	88
5.32	Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004). . . . .	89
A.1	Estrutura “ <i>Half-Edge</i> ” (Penna, 2007). . . . .	94
A.2	Hierarquia de “ <i>Half-Edge</i> ” (Penna, 2007). . . . .	95
A.3	Estrutura de dados de “ <i>Half-Edge</i> ” (Penna, 2007). . . . .	96
A.4	Detalhamento de uma Subdivisão Planar para um cubo unitário (Penna, 2007). . . . .	97
A.5	a) Subdivisão Planar; b) Faces e Loops; c) Semi-Arestas; d) Arestas (Penna, 2007). . . . .	98

# Resumo

Uma estratégia de modelagem baseada em elementos finitos de interface é implementada e aplicada para análise não linear de meios parcialmente frágeis com a finalidade de descrever o comportamento do meio mesmo após a abertura de fissuras. O problema da degradação é tratado a partir de formulações baseadas na cinemática de forte descontinuidade (*Continuum Strong Discontinuity Approach - CSDA*), as quais são utilizadas para traduzir a cinemática do elemento de interface. A fragmentação da malha padrão de elementos finitos, de modo a introduzir elementos com elevada razão de aspecto, possibilita a análise do salto no campo de deslocamentos por meio de um modelo constitutivo contínuo consistente com o regime de descontinuidade forte. A implementação foi realizada no sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), desenvolvido no departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, o qual possui uma gama de modelos constitutivos que podem ser utilizados para a modelagem descrita. No presente trabalho adotou-se, para a descrição do meio, um modelo de fissuração distribuída e um modelo de dano isotrópico. A utilização de elementos de interface, permite o tratamento do problema de propagação de trincas sem a necessidade de definição prévia do caminho da mesma ou de redefinição da malha ao longo da análise, bem como a possibilidade de descrição de múltiplas trincas simultâneas. Simulações numéricas foram realizadas para validação do modelo implementado.

Palavras-Chave: Elemento de Interface, Descontinuidade Forte, Implementação Computacional, Método dos Elementos Finitos, Análise Fisicamente Não Linear.

# Abstract

A finite element model is implemented and applied for nonlinear analysis of quasi brittle media in order to describe the behavior of the media even after the crack opening. The issue of degradation is dealt with formulations based on the Continuum Strong Discontinuity Approach - CSDA, which are used to express the kinematics of the interface element. The fragmentation of the standard finite element mesh in order to introduce elements with a high aspect ratio, allows the analysis of the jump in the displacement field through a continuum constitutive model, consistent with the strong discontinuity mode. The implementation was performed in the INSANE computer system (*INteractive Structural ANalysis Environment*), developed in UFMG's Department of Structural Engineering, which has a wide range of constitutive models that can be used for the described modeling. In the current work, a smeared cracking model and an isotropic damage model were chosen for the description of the media. The use of interface elements, enables the treatment of the crack propagation problem without the necessity of prior definition of its path or the redefinition of the mesh during the analysis, as also the possibility of the description of multiple simultaneous cracks. Numerical simulations were carried out to validate the implemented model.

Keywords: Interface Element, Strong Discontinuity, Computational Implementation, Finite Element Method, Physically non-linear analysis.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e inúmeras bênçãos que sempre recebi, por me dar forças para superar as adversidades.

Aos meus pais Kátia e Nalvo, pela educação que me deram e incentivo incondicional. E aos meus familiares que sempre estiveram do meu lado.

Ao meu namorado Rafael, pela amizade, suporte, compreensão e incentivo em todos os momentos.

Aos amigos que dividiram comigo bons momentos, fornecendo energia para encarar os dias de trabalho.

Ao meu orientador e professor Samuel Silva Penna, que me guiou e orientou em todas as dúvidas que tive com muita paciência e sabedoria.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG pela atenção e por viabilizarem a conclusão deste trabalho.

Aos colegas do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas pelo apoio e convivência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Capítulo 1

## Introdução

As estruturas de concreto constituem grande parte da construção civil no Brasil. O dimensionamento deste tipo de estrutura é feito baseado em hipóteses simplificadoras, uma vez que o desenvolvimento de modelos analíticos que avaliem o comportamento do concreto é de elevado grau de complexidade.

A Análise Estrutural é a parte da Mecânica responsável por estudar o comportamento de estruturas quando submetidas a solicitações externas. Hipóteses simplificadoras são também comumente usadas para gerar resultados com boa aproximação sem que sejam necessários cálculos complexos, dispensando a utilização de modelos mais sofisticados. A Mecânica dos Sólidos e a Teoria da Elasticidade constituem as bases teóricas que tornam possíveis formulações matemáticas capazes de descrever o comportamento mecânico das estruturas. Para isso, o meio é tratado como contínuo, homogêneo e isotrópico com comportamento elástico-linear ao longo do domínio. Tal abordagem gera resultados aceitáveis de acordo com uma margem de aproximação, a qual não considera o comportamento não linear do meio.

Para aprimorar a análise estrutural, adotam-se modelos que permitem uma análise baseada no estado de deformação ou de tensão corrente ao qual o meio material está submetido, tornando possível, por exemplo, a consideração do fenômeno de plastificação de materiais elastoplásticos ou de fissuração de meios parcialmente frágeis, como é o caso do concreto. Sabe-se que o processo de fissuração de materiais parcialmente frágeis define o comportamento não linear do meio, sendo imperativo

a adoção de modelos capazes de descrever o processo de surgimento e propagação de fissuras.

A solução dos problemas fisicamente não lineares através de métodos analíticos é um processo trabalhoso e muitas vezes impossível. Uma maneira eficaz de modelagem e solução destes problemas é através de métodos numéricos computacionais. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um destes, o qual permite a formulação de modelos fisicamente não lineares apropriados para modelagem do comportamento do concreto.

A Mecânica da Fratura descreve o comportamento de materiais em que o processo de degradação se manifesta na presença de trincas quando sujeitos a carregamentos. Materiais parcialmente frágeis são classificados dessa forma devido à natureza do seu processo de degradação. De acordo com Karihaloo (1995), estes materiais exibem na sua lei tensão-deformação um endurecimento moderado antes de alcançarem a resistência à tração, em seguida apresentam um ramo descendente caracterizado pelo decréscimo gradual das tensões.

Devido a este comportamento, busca-se analisar o concreto sob dois enfoques: degradação distribuída e abertura de trincas.

O fenômeno da degradação distribuída é simulado por meio de modelos constitutivos contínuos, os quais consideram que as propriedades do meio se modificam nas regiões em que as solicitações conduzem a estados de tensão e deformação superiores aos parâmetros de resistência do material. A referida mudança nas propriedades do material serve para considerar a ocorrência de fissuras nas regiões onde os limites do material foram alcançados, saindo de um meio íntegro para um meio degradado. Há na literatura um grande número de modelos que descrevem o processo de fissuração em meios parcialmente frágeis, apesar disso, esse tópico continua sendo um desafio, uma vez que problemas recorrentes como dependência de malha e fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas são recorrentes nesta forma de retratar o processo de fissuração.

O processo de abertura de fissuras sob o enfoque de modelos discretos, em materiais frágeis ou parcialmente frágeis, consiste na localização de deformações caracterizada pela presença de elevados valores de deformação restritos a pequenas regiões do sólido, resultando no surgimento de trincas no meio material (numericamente representados por “saltos” no campo de deslocamentos). Os modelos discretos tratam este problema através de equações constitutivas que relacionam forças de superfície com a separação das faces do sólido, num dado ponto da superfície de descontinuidade. Desta forma, em um modelo de elementos finitos é necessária a redefinição da malha para representar a descontinuidade geométrica introduzida pela trinca. Tem-se ainda modelos com descontinuidade forte embutida, os quais são uma alternativa que superam as dificuldades impostas pela redefinição da malha, e ainda incorporam a modelagem constitutiva em sua formulação.

A análise e modelagem de descontinuidades de deslocamento na mecânica dos sólidos é um problema singular, que pode ser analisado sob diferentes pontos de vista. Nos recentes anos, desenvolveu-se uma nova metodologia para focar o problema, baseado no conceito de cinemática com descontinuidade forte. Neste contexto, vale destacar os trabalhos de Simo (1993) e Oliver (2000), nos quais os autores analisam o surgimento e desenvolvimento de descontinuidades de deslocamentos em meios governados por equações constitutivas contínuas.

Assim, através do Método dos Elementos Finitos, é possível analisar numericamente o comportamento não linear de estruturas compostas por materiais parcialmente frágeis, e conseqüente abertura de fissuras, utilizando os parâmetros da mecânica da fratura no modelo constitutivo contínuo (responsável por caracterizar a relação entre tensões e deformações do material) e os conceitos da cinemática de descontinuidade forte (para representar o comportamento descontínuo da trinca).

Uma forma de abordar o problema de modo a considerar modelos distribuídos (contínuos) e modelos discretos (descontínuos) é a partir de elementos de interface. Tais elementos devem ser capazes de tratar o processo de degradação do material



com um modelo constitutivo contínuo e contabilizar os efeitos causados pela descontinuidade da trinca. Para tanto, o campo de deformações do elemento de interface é definido a partir de uma abordagem cinemática com descontinuidade forte, de forma que o “salto” no campo de deslocamentos pode ser obtido a partir da deformação relativa na direção da menor dimensão do elemento.

A introdução de elementos de interface na malha de elementos finitos pode superar os desafios de redefinição da malha em função do surgimento de trincas, uma vez que os elementos de interface são inseridos por toda a malha, definindo todos os potenciais focos de degradação.

No decorrer da análise, os elementos de interface, por apresentarem comportamento mais frágil do que os elementos regulares da malha, apresentarão grandes deformações, compatíveis com aquelas da cinemática de descontinuidade forte, o que faz com que representem a descontinuidade decorrente da trinca.

Esta dissertação propõe uma alternativa de abordagem contínua baseada no uso de elementos de interface, com seu comportamento descrito por uma lei constitutiva contínua qualquer, desde que atenda às condições necessárias, para investigar o comportamento discreto de meios parcialmente frágeis. Destaca-se a utilização de um modelo de fissuração distribuída e um modelo de dano isotrópico clássico na modelagem.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo a implementação computacional, no núcleo numérico do sistema INSANE, de um método para análise fisicamente não linear de materiais parcialmente frágeis, utilizando-se elementos de interface, cujo comportamento é descrito por meio de modelos constitutivos contínuos.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Esta dissertação está inserida no campo da Mecânica da Fratura, por tratar de problemas envolvendo o processo de propagação de trincas em materiais parcialmente frágeis. No âmbito dos Métodos Numéricos, trabalha-se com o Método dos Elementos Finitos, dispondo-se dos recursos necessários para a resolução de análises fisicamente não lineares: modelos constitutivos e métodos iterativos de solução de sistemas não lineares. Do ponto de vista computacional, este trabalho amplia o arcabouço do programa INSANE, utilizando da sua estruturação orientada a objetos e da estrutura de dados topológicos de semi-arestas para a fragmentação da malha, necessária à estratégia de solução de problemas não lineares desenvolvida.

A fim de se alcançar o objetivo geral, realizou-se o trabalho de acordo com os seguintes objetivos específicos:

1. Aprender em termos teóricos a formulação do elemento finito de interface proposta por Manzoli et al. (2012);
2. Implementar a formulação do elemento de interface no sistema INSANE;
3. Implementar novas classes no código do INSANE para adequar os modelos constitutivos empregados na avaliação do processo de fissuração;
4. Utilizar a estrutura de dados de semi-arestas (*Half-Edge Data Structure* - HEDS) para a implementação da quebra da malha, visando inserir os elementos de interface na malha de elementos finitos padrão;
5. Modelagem computacional e simulações numéricas para validação do modelo.

## 1.2 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e 1 apêndice.

No capítulo 1, o tema escolhido é apresentado, introduzindo-se o assunto que será abordado ao longo deste trabalho. Os objetivos e organização do texto são elucidados.

O capítulo 2 aborda o comportamento não linear de materiais parcialmente frágeis, em especial o concreto. Uma revisão teórica sobre o assunto é apresentada.

No capítulo 3, os conceitos do modelo de elementos de interface e da cinemática de descontinuidade forte são descritos. Descreve-se também a formulação matemática utilizada.

O capítulo 4 refere-se à implementação computacional, abordando a forma como foi realizada a ampliação do núcleo numérico para que o modelo apresentado no capítulo 3 fosse implementado.

No capítulo 5, apresentam-se as simulações numéricas para avaliar o desempenho do modelo numérico implementado e discutem-se as aplicações e limitações deste modelo.

No capítulo 6, são apresentadas as considerações finais acerca do trabalho e sugestões para futuros trabalhos.

O apêndice A aborda os conceitos gerais da estrutura de dados HEDS, para registrar a implementação da quebra da malha.

# Capítulo 2

## Modelagem do Concreto

### Estrutural

Fisicamente o concreto é um material de três fases, a saber: matriz cimentícia, agregados e região de transição. A última é uma região fraca devido às tensões geradas pelos processos que precedem a cura do concreto - vazios gerados pela perda de água, segregação do agregado e formação de pequenas bolhas de ar durante o lançamento do mesmo. Por estas razões, antes mesmo de submetê-lo ao carregamento, o concreto já apresenta microdefeitos em sua constituição, os quais estão diretamente relacionados ao surgimento de tensões localizadas.

A fim de se avaliar o surgimento destas tensões e sua relação com o aparecimento de trincas em estruturas de concreto, deve-se estudar o comportamento não linear do material. Devido à ocorrência de diferentes fenômenos relacionados à não linearidade, o comportamento mecânico do concreto é de difícil solução analítica.

O campo de estudos responsável por analisar e equacionar os fenômenos físicos envolvidos no processo de fissuração, levando em consideração a presença de defeitos pré-existentes, é a mecânica da fratura do concreto.

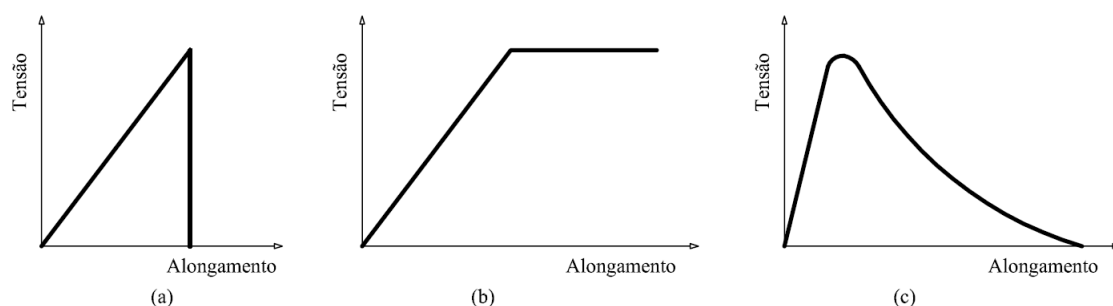
Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns aspectos teóricos relevantes na realização deste trabalho. Na seção 2.2, é realizado um breve histórico acerca das

teorias e evolução da mecânica da fratura; na seção seguinte, 2.1, disserta-se sobre a não linearidade do concreto e os parâmetros necessários para se avaliar abertura de trinca e, por fim, na seção 2.3, apresentam-se os modelos constitutivos usados para descrever o concreto.

## 2.1 Caracterização do Comportamento do Concreto Fissurado

Os materiais podem ser classificados de acordo com a resposta estrutural que apresentam em: materiais frágeis, dúcteis ou parcialmente frágeis. A Figura 2.1 apresenta a relação tensão-alongamento observada para a cada um desses materiais quando solicitados.

Nos materiais frágeis, a tensão cai de forma abrupta para zero quando o valor máximo de tensão é atingido. Os materiais dúcteis apresentam um patamar de escoamento na ruptura, caracterizado por um aumento de deformações sem variação de tensão. Por fim, materiais parcialmente frágeis apresentam um ramo descendente após atingirem o valor limite de tensão.



**Figura 2.1:** Diagrama da resposta estrutural dos diferentes tipos de materiais: a) Materiais frágeis, b) Materiais dúcteis, c) Materiais parcialmente frágeis. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996).

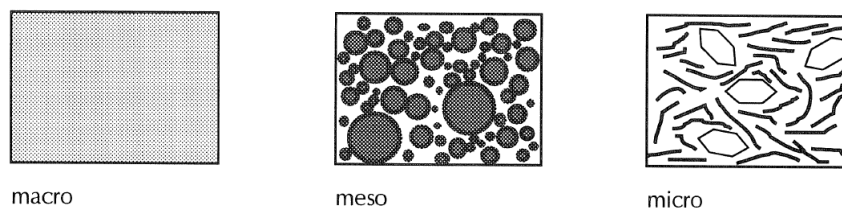
No caso do concreto, na sua lei tensão-deformação, nota-se um endurecimento

moderado antes de atingir o valor máximo da tensão, assim como ocorre com materiais metálicos. Porém, diferentemente destes, após a tensão limite, ocorre um aumento de deformações com decréscimo de capacidade de tensão. Fisicamente, esse fenômeno é devido à formação da zona de processo de fratura à frente de uma trinca pré-existente, o material nesta zona entra em regime de amolecimento. Materiais que apresentam comportamento semelhante ao descrito são classificados materiais parcialmente frágeis.

A determinação do ramo descendente da curva do material, também conhecido por *softening*, é um processo complicado, que consiste em determinar os parâmetros do material a partir do momento em que se dá o início da degradação do meio. Sendo assim, o tamanho e as condições de apoio se tornam parte essencial do resultado da análise.

As propriedades do concreto são influenciadas por seus constituintes em escala micro, meso e macroestrutural que são caracterizadas de acordo com porções da mistura e com a distribuição dos vazios e trincas internas (Figura 2.2). Apesar do concreto apresentar comportamento anisotrópico e heterogêneo, a forma mais comum de se modelá-lo é em escala macroestrutural, onde o material pode ser considerado inicialmente isotrópico e o meio contínuo no nível da própria estrutura. De acordo com Shah (1996), é usualmente aceito que o material seja tratado como homogêneo até a abertura da trinca, com a condição de que a menor dimensão da estrutura seja cinco vezes maior do que o tamanho máximo do agregado usado. Dessa forma, nenhuma parcela da microestrutura do material é diferenciada e a resposta não linear é tratada a partir de uma lei constitutiva. Do ponto de vista numérico-computacional, tem-se a vantagem de que a estrutura pode ser discretizada com poucos elementos finitos, o que tende a reduzir o esforço computacional, porém, faz com que a análise seja dependente da malha. Em escala meso-estrutural, as partículas de agregado são consideradas separadamente da matriz cimentícia e da região de

interface (*Intefacial Transition Zone - ITZ*) entre agregado e matriz cimentícia, região cuja ligação é relativamente mais fraca. Cada um destes constituintes é tratado como meio isotrópico contínuo, separadamente.



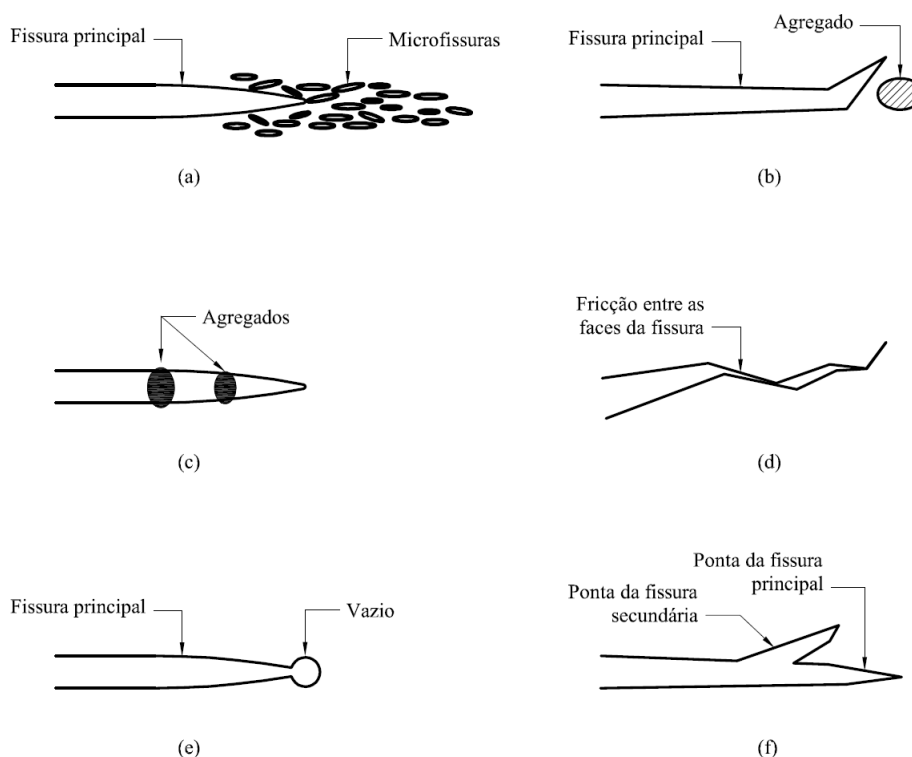
**Figura 2.2:** Constituintes do concreto nos três níveis de observação (van Mier et al., 1994).

Dessa forma, a análise do comportamento estrutural requer parâmetros diferentes para cada uma das escalas de observação. Assim, é importante definir a ordem de grandeza da escala de modelagem para que o material possa ser considerado com comportamento contínuo.

O concreto, por ser um material parcialmente frágil, apresenta um mecanismo de ruptura caracterizado pela presença de uma zona inelástica na frente da trinca, de acordo com Wolff (2010). Teoricamente, as tensões tendem ao infinito nessa zona, porém, o material não é capaz de suportar tais tensões. Na realidade ocorre que, à medida que as tensões aumentam, forma-se uma região danificada, denominada zona de processo de fratura (ZPF), onde os mecanismos responsáveis pela resposta característica do *softening* se desenvolvem.

Os mecanismos que ocorrem na ZPF estão relacionados na Figura 2.3. A microfissuração (Figura 2.3(a)) ocorre no momento em que a trinca se propaga, adiante à ZPF. As microfissuras aparecem devido aos elevados valores de tensão que surgem na ponta da trinca e são resultado dos vazios deixados pela água durante a cura, ou então da formação de bolhas de ar no momento do lançamento do concreto. O desvio da fissura (Figura 2.3(b)) ocorre quando a trinca encontra um obstáculo mais resistente ao longo da propagação. Outro mecanismo que ocorre na ZPF é a costura

dos grãos (Figura 2.3(c)), em que a trinca propaga além de um agregado, porém, o contato entre as faces é mantido devido a forças de coesão; as forças continuam a ser transmitidas entre as faces da trinca até que o agregado se solte. Quando o grão se solta, há fricção entre as faces da fissura (Figura 2.3(d)), e devido à rugosidade das interfaces, pode haver dissipação de energia. Além disso, a fissura pode encontrar um vazio no caminho ou se ramificar (Figuras 2.3(e) e (f)). Os mecanismos descritos dificultam a propagação livre da fissura na ZPF, e gastam parte da energia total envolvida no processo de fissuração.



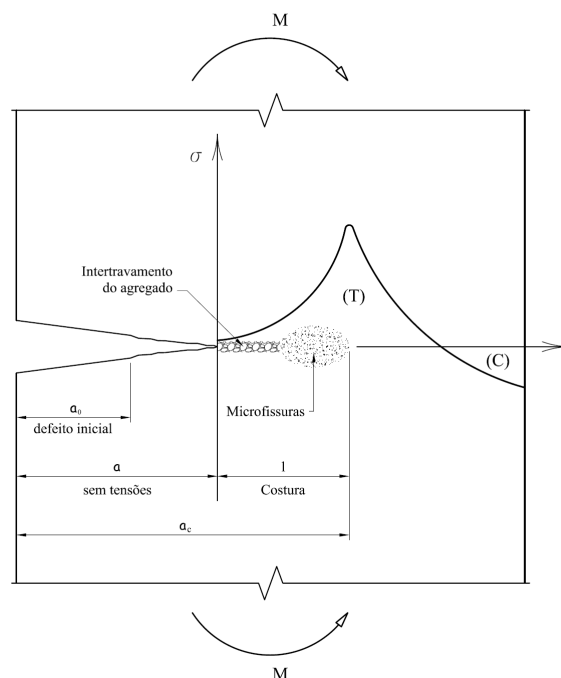
**Figura 2.3:** Mecanismos da zona de processo de fratura. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996).

As dimensões da ZPF são diferentes em cada tipo de material. Nas estruturas de concreto de pequeno e médio porte, elas têm papel determinante na resposta não linear. Em estruturas de grande porte, como barragens, o papel da ZPF costuma



ser desprezado, pois o tamanho da região de fissuração em relação às dimensões das seções avaliadas é muito inferior, deixando de exercer influência na resposta não linear. Neste caso, utilizam-se os conceitos da mecânica da fratura elástica linear (MFEL).

Para que se tenha um melhor entendimento da influência da ZPF e dos mecanismos que ocorrem nela, na resposta estrutural, considere uma estrutura plana de concreto com uma trinca pré-existente, submetida a um carregamento (Figura 2.4). Admite-se que a trinca se propaga a partir de um defeito inicial. Neste caso, é possível observar que existe uma região livre de tensões (trecho a), uma região com tensões (trecho l), onde se encontra a ZPF, e a região íntegra, onde as tensões de tração ainda não desenvolveram os mecanismos de tenacidade à fratura. O trecho l é regido pelos mecanismos da ZPF e é o responsável pela formação da região de localização de tensões.

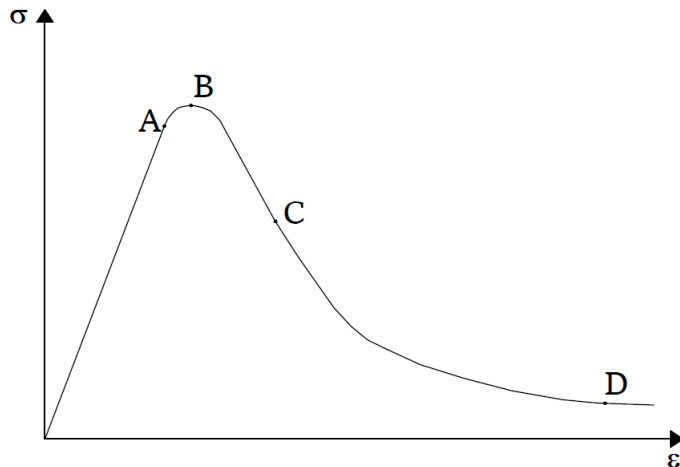


**Figura 2.4:** Propagação de fissura. Adaptado por Wolff (2010) de Shah (1996).

O comportamento do concreto em nível macroscópico é representado na Figura

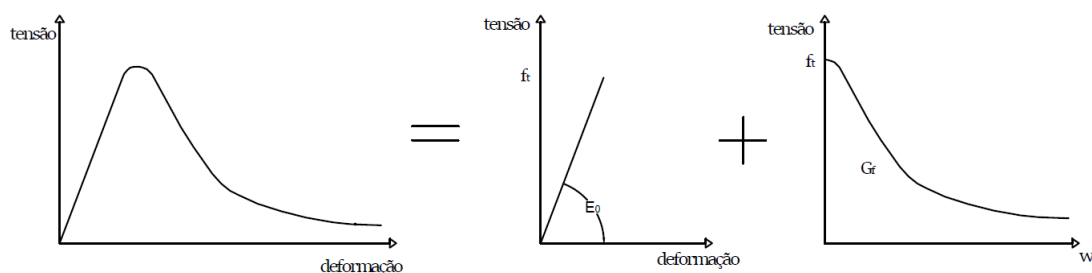
2.5. O ramo linear ascendente corresponde à resposta linear do material ao longo do processo de carregamento, em seguida, o diagrama apresenta uma curvatura suave prévia ao pico de tensão (ponto A até B), correspondente ao endurecimento do material.

Após o valor limite de tensão, a curva se torna fortemente não linear, o *softening* ocorre quando há descarregamento do material (Ponto B até C), com acréscimo de deformações. Como há localização de deformações após o pico, a medida de deformação passa a ser representada pela composição de duas parcelas: a primeira parcela contém a contribuição das deformações elásticas, e a segunda parcela é dada pela abertura da trinca, que é resultante da abertura de múltiplas microtrincas por todo o material (Figura 2.6). Os ramos AB e BC são resultado do processo de microfissuração, já o ramo CD é decorrente da tensão entre agregados e efeitos de atrito entre eles.



**Figura 2.5:** Diagrama tensão-deformação do concreto Adaptado de Shah (1996).

O fenômeno de localização de deformações e o comprimento crítico da trinca são determinantes no processo de fissuração do concreto e a zona de processo de fratura é a responsável pelo amolecimento, como mencionado anteriormente, devido aos mecanismos de tenacidade.



**Figura 2.6:** Separação do diagrama tensão-deformação total para o concreto em um diagrama tensão-deformação e outro tensão-abertura de trinca.

Uma parcela considerável da energia aplicada pelas cargas externas é absorvida na ZPF, e por isso uma fissura pode se propagar de maneira estável antes do limite de carregamento. Após o limite de carga, o colapso da estrutura é evitado uma vez que as superfícies da fissura ainda estão em contato, sendo capazes de transmitir tensões. Tensões estas que vão decrescendo à medida que as superfícies vão perdendo contato. O resultado na resposta do material é o decréscimo gradual do valor da carga após o limite de carregamento.

Em termos de energia de fratura, o ramo AB, pré pico (Figura 2.5), tem pequena influência na dissipação de energia. A maior influência decorre do ramo de *softening*, pois este reduz o fluxo de energia que é consumida na ponta da trinca enquanto aumenta a superfície de fratura e conseqüentemente a dissipação de energia. O estudo do comportamento pós pico, no entanto, não é simples, e muitos autores consideram funções aproximadoras com parâmetros ajustados experimentalmente. Tais observações são relatadas por Carpinteri (1976).

Em ensaios realizados por van Mier et al. (1994), concluiu-se que o diagrama de *softening* sofre influência do tamanho da estrutura e das condições de apoio adotadas. Em seus experimentos, van Mier et al. (1994) mostra que para a condição de apoio com rotação livre, a energia de fratura tem um decréscimo de aproximadamente 40% quando comparada a condições de apoio de rotação fixa. Observa-se também que a tensão de pico diminui quando condições de apoio livre são usadas. Em síntese, do

ponto de vista experimental, tamanho e condições de apoio têm grande influência no diagrama de amolecimento, fazendo com que se possa ter mais de um diagrama para uma mesma estrutura. Do ponto de vista numérico, utilizam-se aproximações para o ramo descendente, como, por exemplo o diagrama bilinear ou diagramas exponenciais e polinomiais, e modelagens são realizadas a fim de se encontrar o melhor ajuste da curva.

## 2.2 Breve Histórico

Os primeiros estudos que tratam o comportamento mecânico do concreto datam do século XX, quando aproximações empíricas eram estabelecidas com base em simplificações matemáticas.

Griffith (1921) é o precursor de estudos no campo da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), baseados na falha dos materiais. Seus trabalhos se limitam a materiais frágeis, homogêneos e elásticos, como o vidro. Apesar das modificações na teoria inicial, feitas por Orowan (1949) e Irwin (1957) apud Karihaloo (1995), os estudos ainda só se aplicavam à análise de materiais com comportamento elastoplástico e homogêneo. A partir dos anos 50, Breslar e Wollack (1952) apud Karihaloo (1995), Kaplan (1961) apud Karihaloo (1995) e outros realizaram tentativas para aplicar as teorias da mecânica da fratura clássica ao concreto, ainda considerado por eles como material frágil, porém não obtiveram respostas satisfatórias (Kesler et al. (1972) apud Karihaloo (1995)).

A falta de sucesso da MFEL se dá devido à heterogeneidade do material e à resposta deste ser diferente da resposta estrutural apresentada por materiais homogêneos como o vidro ou metais.

Desde a consolidação do Método dos Elementos Finitos (MEF), foi possível elaborar modelos mais sofisticados, que pudessem descrever o comportamento de forma mais realista. Neste sentido, utilizando uma abordagem discreta para a inserção de

trincas na malha, e considerando um meio contínuo intacto até o final da análise, Ngo e Scordelis (1967) e Nilson (1968) foram os primeiros autores a estudar o comportamento do concreto como material parcialmente frágil.

Ainda nos anos 60, em seu trabalho, Rashid (1968) apresentou a hipótese principal dos modelos de fissuração distribuída: a representação de um meio contínuo, onde as propriedades mecânicas possam representar uma região com fissuras uniformemente distribuídas.

Na década de 70, muitos avanços foram feitos no que diz respeito à análise não linear do concreto. Monnier (1970) e Blaauwendraad (1972) utilizaram modelos unidimensionais e desenvolveram leis não lineares para a relação momento-curvatura, Blaauwendraad (1972) apresentou uma abordagem computacional para os conceitos adotados até aquele momento.

Suidan e Schnobrich (1968) introduziram o conceito do fator de retenção ao cisalhamento. Assim, a rigidez do modelo não é considerada mais intacta ao longo de toda a análise.

A mecânica da fratura não linear tem início a partir da introdução do conceito de trinca fictícia por Hillerborg et al. (1976). Em seu trabalho, o concreto é tratado apresentando um regime de amolecimento – aumento de deformações acompanhado de decréscimo de tensões – após atingir o limite resistente. Os autores assumem uma zona não linear na ponta da trinca, capaz de propagar. Para estimar a transferência de tensões na zona livre de tensões (na ponta da trinca) era aplicada uma tensão uniaxial e, a partir daí, media-se o ramo de amolecimento (*softening*). A partir do experimento, foi possível constatar também que a zona de *softening* coincidiria exatamente à transferência de tensão na zona de processo de fratura (ZPF), que será detalhada mais a frente.

A partir de Bazant (1976) e Swartz et al. (1978), os modelos de fissuração distribuída baseados na flexibilidade foram desenvolvidos.

Até então, considerava-se apenas degradação por tração em concreto. Darwin e

Pecknold (1976) utilizaram leis tensão-deformação biaxiais que admitiam a degradação tanto em tração como em compressão.

A consideração de uma zona de processamento de fissuras ou banda de fissuração foi de grande relevância e teve espaço em muitos trabalhos (Bazant e Cedolin, 1979, 1980, 1983). Em 1983, Bazant e Oh (1983) admitiram um amolecimento gradual, associando a relação constitutiva de amolecimento de Hillerborg et al. (1976) a um certo comprimento de ZPF, tratado como propriedade do material.

A mecânica do dano contínuo ganha espaço no tratamento de materiais parcialmente frágeis mais recentemente, com os trabalhos de Lemaitre e Dufailly (1987), Lemaitre (1992) e Lemaitre e Desmorat (2005).

Desde então, muitos modelos baseados em fissuração distribuída e dano foram sendo desenvolvidos, cada um com aplicabilidades e limitações diferentes. Além destes, ainda podem-se citar os modelos unidimensionais, modelos de microplanos e modelos de plasticidade clássica. Estes modelos são amplamente utilizados na análise não linear de meios parcialmente frágeis.

## 2.3 Modelos Constitutivos para o Concreto

Modelos constitutivos são usados para representar numericamente o comportamento não linear dos materiais através de relações entre as propriedades do meio. Os modelos empregados para tratar problemas envolvendo fissuração do concreto são inúmeros, como descrito no início deste capítulo. Nesta seção, dois deles serão apresentados: o modelo de fissuração distribuída e o modelo de dano isotrópico. Estes modelos tiveram alguns de seus parâmetros adaptados, para incorporar a formulação do modelo de elementos de interface, essa consideração será devidamente tratada, quando se fizer necessário.

### 2.3.1 Modelo de Fissuração Distribuída

O modelo de fissuração distribuída é um modelo constitutivo que, por hipótese, assume que o processo de fissuração ocorre uniformemente distribuído no material, tendo essas suas propriedades alteradas para representar um meio fissurado. Portanto, o material é modelado como contínuo e homogêneo mesmo estando fissurado.

No modelo, a região de fissuração é representada numericamente pelo comprimento característico, uma dimensão em que é possível tratar o material como homogêneo.

Em síntese, o modelo baseia-se no monitoramento das propriedades físicas do material, sendo o processo de evolução das fissuras descrito pelo decaimento gradual das tensões, com o aumento das deformações. Considera-se que o material torna-se ortotrópico na região fissurada, modificando sua relação constitutiva no sistema local, posicionado no plano de fissuração. Nesta seção será apresentada uma generalização dos modelos de fissuração baseados na inversão da flexibilidade descrita por Pitangueira (1998).

O modelo de Fissuração Distribuída, em seu primeiro formato, foi proposto por Rashid (1968). O autor considerava nulos o módulo de elasticidade na direção perpendicular ao plano de abertura de fissura ( $E$ ) e o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ). A utilização deste modelo mostrou-se numericamente instável.

Ao manter o módulo de elasticidade transversal, com um fator de retenção ao cisalhamento, no tensor constitutivo local, Suidan e Schnobrich (1968) e O. Yuzugullu (1972) conseguiram uma maior estabilidade numérica, promovendo uma melhora na representação do fenômeno físico da fissuração.

Além da consideração do módulo de elasticidade transversal com um fator de retenção ao cisalhamento, Rots et al. (1985) passaram a considerar uma redução também no módulo de elasticidade, na direção normal ao plano de abertura de fissura, fazendo com que a redução no módulo fosse gradual.

Com a evolução dos modelos distribuídos, surgiu a chamada Teoria do Dano, com

a qual é possível considerar uma degradação gradativa da rigidez, ao contrário da redução brusca feita pelos modelos iniciais, além de considerar a ocorrência de dano em compressão e o acoplamento entre as deformações devido ao efeito de Poisson.

Considera-se que a idealização do meio contínuo e homogêneo, com o comportamento ortotrópico nas regiões com dano distribuído, só é válida se a análise é realizada em um volume representativo, ou seja, se a análise é realizada em escala macroestrutural. A partir desta limitação, Bazant e Oh (1983) utilizaram uma relação de compliância entre deformações e tensões para representar o comportamento constitutivo local da zona danificada. Partido-se da relação constitutiva, pode-se inverter a equação 2.1, obtendo-se a relação de compliância 2.2

$$\boldsymbol{\sigma}_\lambda = {}^s\mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_\lambda \quad (2.2)$$

sendo  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva secante local ;  $\boldsymbol{\sigma}_\lambda$  e  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  os vetores de tensão e deformação, respectivamente; e  $\mathbf{C}$  a matriz de compliância; todos os parâmetros são referidos ao sistema local, posicionado na direção da fissura.

Considerando material ortotrópico nas direções principais, para o caso de estado plano de tensões, as relações deformação-tensão são:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} \quad (2.4)$$

e

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12} \quad (2.5)$$

onde

$$\frac{1}{G_{12}} \approx \frac{1 + \nu_{21}}{E_1} + \frac{1 + \nu_{12}}{E_2} \quad (2.6)$$

e  $\nu_{ij}$  representa a deformação na direção  $i$  relativa à deformação na direção  $j$ .



Para que a matriz de compliância seja simétrica, adota-se uma hipótese simplificadora que considera o acoplamento devido ao efeito de poisson, tomando as componentes do acoplamento como um único valor. Este passa a ser uma função do módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ) e de um coeficiente de Poisson igual para todas as direções do material ( $\nu$ ). Assim, tem-se:

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu}{E_0} \quad (2.7)$$

e a matriz ( $\mathbf{C}$ ) da equação 2.2 torna-se

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu}{E_0} & 0 \\ \frac{-\nu}{E_0} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ao inverter  $\mathbf{C}$  simetrizada, pode-se obter a matriz constitutiva secante local para o modelo de dano distribuído na forma dada na equação 2.1 para estado plano de tensões, resultando

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0} \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0} \nu^2\right) G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Para o caso de estado plano de deformações, têm-se as seguintes relações:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E_3} \sigma_{33} - \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{22} = 0 \quad (2.12)$$

Ao substituir  $\sigma_{33}$  de 2.12 em 2.10 e 2.11 tem-se

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (1 - \nu_{13} \nu_{31}) \sigma_{11} - \frac{1}{E_2} (\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) \sigma_{22} \quad (2.13)$$

e

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E_2} (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \sigma_{22} - \frac{1}{E_1} (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) \sigma_{11} \quad (2.14)$$

Simplificando:

$$a = (1 - \nu_{23}\nu_{32}), \quad (2.15)$$

$$b = (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}), \quad (2.16)$$

$$c = (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) \quad (2.17)$$

e

$$d = (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \quad (2.18)$$

Da simetrização resulta

$$\frac{b}{E_2} = \frac{c}{E_1} = \frac{b}{E_0} \quad (2.19)$$

Assim, a matriz de compliância da equação 2.2 torna-se

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{d}{E_1} & \frac{-b}{E_0} & 0 \\ \frac{-b}{E_0} & \frac{a}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ao inverter  $\mathbf{C}$  em 2.20, obtem-se a matriz constitutiva secante local para o modelo de dano distribuído na forma dada na equação 2.1 para estado plano de deformações, tem-se

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \frac{b^2}{ad}} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{d} & \frac{b}{da} \frac{E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{b}{da} \frac{E_1 E_2}{E_0} & \frac{E_2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \frac{b^2}{ad}\right) G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde

$$a = \left(1 - \left(\frac{E_2}{E_0}\right) \nu^2\right) \quad (2.22)$$

$$b = c = (\nu + \nu^2) \quad (2.23)$$

$$d = \left( 1 - \left( \frac{E_1}{E_0} \right) \nu^2 \right) \quad (2.24)$$

As relações constitutivas acima descritas, são referidas ao sistema local de fissuração, sendo necessário transformá-las para o sistema global.

A transformação das tensões obtidas em um sistema de coordenadas local para o sistema global é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}_\lambda = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_g \quad (2.25)$$

E a relação de transformação de deformações é

$$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda = \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}_g \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{T}_\sigma$  e  $\mathbf{T}_\epsilon$  são obtidas por equilíbrio em função do ângulo  $\theta$  entre os sistemas. Para o caso bidimensional são dadas por:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e

$$\mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{T}_\epsilon = \mathbf{T}_\sigma^{-T} \quad (2.29)$$

A fim de se obter a relação entre tensões e deformações no sistema global de coordenadas, deve-se substituir na relação tensão-deformação do sistema local dada pela equação 2.1 a relação de transformação entre sistemas para tensões e para

deformações, dadas pelas equações 2.25 e 2.26, respectivamente, e pré-multiplicar ambos os lados por  $\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\epsilon^T$ , assim

$$\boldsymbol{\sigma}_g = {}^S_g \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_g \quad (2.30)$$

onde

$${}^S_g \mathbf{D} = \mathbf{T}_\epsilon^T {}^S_\lambda \mathbf{D} \mathbf{T}_\epsilon \quad (2.31)$$

Para a análise não linear, tem-se um processo incremental-iterativo para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, se neste processo só se utilizam relações secantes, as equações descritas são suficientes, porém, se o processo necessita da rigidez tangente, a relação incremental entre tensões e deformações deve ser obtida. Essa relação é apresentada pela equação 2.32, e sua obtenção é descrita por Pitangueira (1998).

$$d\boldsymbol{\sigma}_g = \left( \mathbf{T}_\epsilon^T {}^t_\lambda \mathbf{D} \mathbf{T}_\epsilon + \frac{\partial \mathbf{T}_\epsilon^T}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_g} \boldsymbol{\sigma}_\lambda \right) d\boldsymbol{\epsilon}_g \quad (2.32)$$

onde

$${}^t_\lambda \mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\lambda}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_\lambda} \quad (2.33)$$

representa a matriz constitutiva tangente referida ao sistema local de coordenadas.

A utilização do modelo descrito é condicionada à observação de algumas hipóteses, descritas por Pitangueira (1998). A matriz constitutiva secante local é obtida a partir da suposição de uma relação de compliância. A modificação dos módulos de elasticidade gradualmente define as leis de evolução da degradação. A matriz constitutiva tangente local representa a influência de possíveis mudanças na matriz de transformação durante o processo incremental-iterativo.

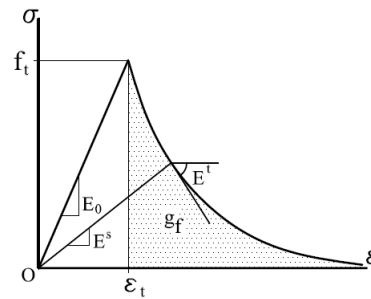
Os modelos de fissuração baseiam-se nas leis que relacionam tensão e deformação para quantificar a degradação das propriedades físicas do material. Além da descrição do processo de degradação, as leis também são responsáveis pela intensidade do crescimento ou decréscimo do regime pós crítico do material. As relações tensão-deformação são propostas a partir da aproximação de relações matemáticas

ajustadas, baseadas em experimentos laboratoriais, correlacionando as propriedades do material e os parâmetros das equações. Neste trabalho, utiliza-se uma combinação entre as propostas de Boone e Ingraffea (1987), para representar o concreto em tração, e Carreira e Chu (1985), para representar o concreto comprimido.

A proposta de Boone e Ingraffea (1987) aproxima o comportamento do concreto à tração por uma lei exponencial, baseada em energia de fratura e nos limites de tensão e deformação admitidos, a lei é dada por

$$\sigma = f_t e^{-k(\epsilon - \epsilon_t)} \quad \text{sendo} \quad k = \frac{hf_t}{G_f} \quad \text{ou} \quad k = \frac{f_t}{g_f} \quad (2.34)$$

onde  $\sigma$  é a tensão,  $f_t$  é a tensão limite de resistência à tração,  $\epsilon$  é a deformação corrente,  $\epsilon_t$  é a deformação relativa ao limite elástico na tração,  $h$  é o comprimento característico,  $G_f$  é a energia de fratura por comprimento de trinca e  $g_f$  é a energia de fratura específica. A Figura 2.7 ilustra de forma esquemática os parâmetros da equação.



**Figura 2.7:** Lei de Boone e Ingraffea (Penna, 2011).

O comportamento à compressão é expresso por uma lei polinomial escrita por Carreira e Chu (1985), e equacionada da seguinte forma

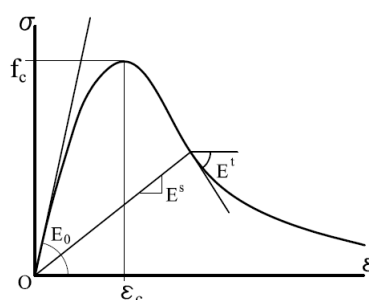
$$\sigma_c = f_c \frac{k \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)}{k - 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^k} \quad \text{sendo} \quad k = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c}{\epsilon_c E_0} \right)} \quad (2.35)$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão,  $f_c$  é a tensão limite de resistência à compressão,  $\epsilon$  é a deformação corrente,  $\epsilon_c$  é a deformação relativa ao limite elástico na compressão,  $E_0$  é o módulo

de elasticidade para o domínio elástico. A Figura 2.8 ilustra de forma esquemática os parâmetros da equação.

Com a combinação das duas propostas é possível avaliar o comportamento de estruturas de concreto que apresentem ou não abertura de fissuras.

A energia de fratura,  $G_f$ , definida como a energia necessária para criar uma unidade de área de uma fissura contínua (Hillerborg et al., 1976), tem um papel importante na descrição do ramo de *softening*.



**Figura 2.8:** Lei de Carreira e Chu (Penna, 2011).

### 2.3.2 Modelo Baseado na Mecânica do Dano Contínuo

O processo de fissuração pode ser descrito a partir de variáveis capazes de representar de forma mais abrangente o processo de degradação do meio. Para tanto, modelos assim definidos adotam a Mecânica do Dano Contínuo como base teórica para a formulação.

Um dado material, quando submetido a solicitações, evolui para um estado de microfissuras até a falha macroscópica. Este processo de surgimento e avanço de microfissuras e microvazios até a falha do material define o dano (Penna, 2011). O processo de degradação do material é tratado a partir da redução da área efetiva resistente. Assim, a mecânica do dano contínuo trata o meio material como homogêneo, através da consideração de um “*Elemento Volumétrico Representativo*” (EVR), que é definido com base em uma dimensão na qual o meio pode ser tratado como

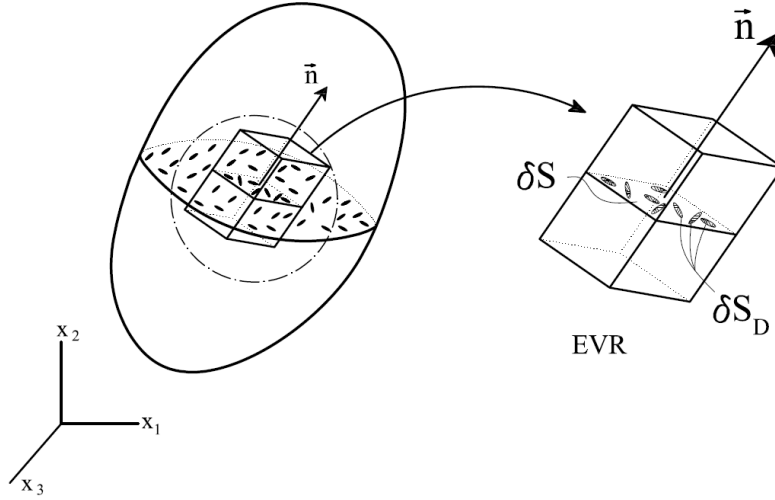
homogêneo.

Os modelos de dano podem ser classificados em duas categorias. A primeira engloba os modelos micromecânicos, nos quais as variáveis de dano devem ser capazes de representar a média dos defeitos microscópicos que caracterizam o estado interno de dano. Porém, estes modelos apresentam dificuldades experimentais no que diz respeito à identificação das leis de evolução do dano, tornando-os de difícil utilização.

Na segunda categoria encontram-se os modelos fenomenológicos, os quais consideram que o comportamento macroscópico do meio é representado pelas variáveis de dano fenomenológicas, que constituem a base da degradação interna do material. As propriedades físicas sofrem alterações ao longo do processo de fissuração. De acordo com Penna (2011), pode-se dizer que medir estas propriedades é mais simples do que determinar a distribuição geométrica de microdefeitos que possam surgir ao longo do processo de solitação.

Desde o trabalho de Kachanov (1999), muitos estudos acerca de modelos de dano contínuo foram desenvolvidos. Inicialmente, a microfissuração era tratada através da redução da área da seção transversal, usando modelos uniaxiais. As microfissuras eram consideradas a variável interna de dano.

Uma vez que o meio material pode exibir defeitos pré existentes, pode-se definir a variável de dano ( $D$ ), de forma genérica, como sendo a densidade de microfissuras presentes na interseção do EVR com uma determinada seção transversal, de acordo com a Figura 2.9.



**Figura 2.9:** Caracterização do dano (Penna, 2011).

Assim, tem-se

$$D(\vec{n}) = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (2.36)$$

onde  $\delta S$  é a área da seção de interseção do EVR com uma dada seção transversal,  $\delta S_D$  é a área de microfissuras e microvazios contidos em  $\delta S$  e  $\vec{n}$  é uma direção de propagação do dano (Lemaitre e Desmorat, 2005).

Sabe-se que o dano, fenomenologicamente, pode ser tratado a partir da degradação das propriedades elásticas do material, como nos trabalhos de Scotta et al. (2002), Jirásek e Patzák (2002) e Xiang et al. (2002), que buscaram representar a degradação progressiva no módulo de elasticidade através da consideração de degradação nas propriedades elásticas do material, em regime de pequenas deformações, quando o material é submetido a um estado de tensões ou deformações acima do limite resistente. Portanto, tem-se

$$D = 1 - \frac{E^D}{E^0} \quad (2.37)$$

ou então

$$E^D = (1 - D)E^0 \quad (2.38)$$



em que  $E^0$  é o módulo de elasticidade do material intacto e  $E^D$  é o módulo de elasticidade do material danificado.

Grande parte dos modelos fenomenológicos tratam o comportamento do material exposto ao dano através da equivalência de tensões ou deformações. Neste contexto, assume-se, na lei constitutiva, que as tensões ou deformações reais são substituídas por tensões ou deformações efetivas. Ou seja,

$$\sigma = E^0 \epsilon \quad (2.39)$$

para o material íntegro, e

$$\bar{\sigma} = E^0 \bar{\epsilon} \quad (2.40)$$

para o material danificado. Onde  $E^0$  é o módulo de elasticidade do material íntegro,  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\epsilon}$  são as tensões e deformações efetivas, respectivamente, definidas como sendo as tensões e deformações do material descontando-se as microfissuras.

As tensões e deformações nominais se relacionam com as efetivas da seguinte forma

$$\sigma = \bar{\alpha} \bar{\sigma} \quad e \quad \epsilon = \alpha \bar{\epsilon} \quad (2.41)$$

onde  $\bar{\alpha}$  e  $\alpha$  consideram o efeito do dano sobre as tensões e sobre as deformações, respectivamente.

Desta forma, pode-se escrever a relação constitutiva de um modelo de dano, para o caso unidimensional, onde

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (2.42)$$

assim,

$$\sigma = (1 - D) E^0 \epsilon \quad (2.43)$$

e

$$\bar{\sigma} = E^0 \epsilon \quad (2.44)$$

Para a formulação de um modelo constitutivo de dano, é necessário estabelecer os seguintes itens: critério de degradação, lei de evolução da variável de dano, lei de amolecimento/endurecimento e condições de carga e descarga. Os modelos de dano isotrópicos padrão (assim denominados por de Borst e Gutiérrez (1999)) compreendem estes critérios. Diversos modelos desenvolvidos, dentro desta proposta, podem ser citados: Mazars e Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987), Ju (1989), Lemaitre e Chaboche (1990), de Vree et al. (1995) e Mazars (1984), conforme apresentados por Penna (2011).

De uma forma geral, define-se uma função de carregamento na forma

$$F = f(\chi) - g(\kappa) \quad (2.45)$$

em que  $f(\chi)$  é uma função que pode ser escrita em termos de tensão, deformação, forças termodinâmicas, dano ou outra variável denotada por  $\chi$ , de acordo com o modelo adotado. A função  $g(\kappa)$  tem o mesmo sentido da medida especificada pela função  $f(\chi)$ , sendo responsável pelas variáveis históricas do modelo. Tal função, por simplicidade, pode assumir o maior valor de  $\chi$  já atingido ao longo da análise.

Por exemplo, para uma formulação baseada em deformações,  $f(\chi) = \tilde{\epsilon}$ , com  $\tilde{\epsilon}$  sendo uma deformação equivalente e  $g(\kappa) = \kappa(D)$ , em que  $\kappa(D)$  é o valor histórico da deformação equivalente em função do dano.

O módulo  $\mathcal{H}$  controla o *softening*, e pode ser dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial g(\kappa)}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa(D)}{\partial D} \quad (2.46)$$

Nem sempre uma relação explícita entre o dano e a variável histórica é prescrita pelo modelo, muitas vezes tem-se uma função para avaliar o dano escrita em termos da própria variável histórica. No modelo de dano isotrópico padrão apresentado por de Borst e Gutiérrez (1999), a função de dano é dada por

$$D(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\epsilon}} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\epsilon} - \kappa_0)}] \quad (2.47)$$

e sua derivada

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\epsilon}} = \frac{\kappa_0}{\tilde{\epsilon}^2} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\epsilon} - \kappa_0)}] + \frac{\kappa_0}{\tilde{\epsilon}} [\alpha \beta e^{-\beta(\tilde{\epsilon} - \kappa_0)}] \quad (2.48)$$

onde  $\kappa_0$  é o valor de deformação equivalente a partir do qual o dano tem início,  $\alpha$  é o máximo valor admissível para a variável de dano ( $0 < \alpha < 1$ ) e  $\beta$  é a intensidade de evolução do dano, este parâmetro controla a inclinação do ramo de amolecimento.

Dentre as possíveis medidas de deformação presentes na literatura, destaca-se a apresentada por Mazars (1984), adotada neste trabalho, dada por

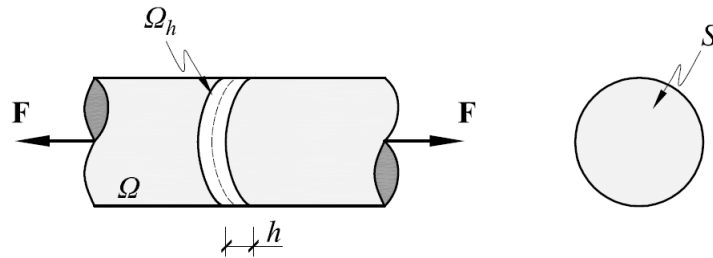
$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \epsilon_{(i)} \rangle_+)^2} \quad (2.49)$$

com  $\langle x \rangle_+ = \frac{|x|+x}{2}$ , sendo  $\epsilon_{(i)}$  as deformações principais dadas por

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

## 2.4 Energia de Fratura

Como discutido anteriormente, a energia de fratura é a energia necessária para criar uma unidade de área de fissura. A partir dos parâmetros da mecânica da fratura, é possível analisar o comportamento do material após o processo de dano.



**Figura 2.10:** Sólido submetido à tração crescente (Maedo, 2015).

Considere o corpo sólido submetido a uma carga de tração crescente em regime inelástico, como ilustrado na Figura 2.10. Em uma seção  $S$  deste corpo há uma

região onde se encontra uma maior concentração de deformações  $\Omega_h$ , com largura  $h$ , como se observa na Figura 2.10. Dessa forma, pode-se escrever:

$$d\Omega_h = h dS \quad (2.51)$$

Seja  $q(r)$  uma função qualquer que rege o comportamento inelástico do material, cuja evolução pode ser linear, exponencial ou polinomial e  $r$  uma variável qualquer que sirva para quantificar o dano. A derivada da função  $q$  em relação a  $r$  caracteriza o parâmetro  $\mathcal{H}$ , que representa o módulo de *softening* do material, sendo:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial q(r)}{\partial r} \quad (2.52)$$

O equacionamento a seguir foi apresentado no trabalho de Maedo (2015) e é abordado para ilustrar a equivalência energética de um corpo sólido em que há abertura de fissuras. Sabe-se que

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (2.53)$$

Conforme apresentado por Maedo (2015) a variável  $r$  assume sentido de tensão, assim:  $\dot{r} = E\dot{\epsilon}$

Considerando uma lei exponencial para  $q(r)$  na forma

$$q(r) = q_0 e^{\mathcal{A}\left(1-\frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.54)$$

sendo  $\mathcal{A}$  um parâmetro que controla a intensidade do ramo descendente da lei do material e depende da energia de fratura do material. A derivada da função é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{\partial q}{\partial r} = -\mathcal{A} e^{\mathcal{A}\left(1-\frac{r}{q_0}\right)} \quad (2.55)$$

e

$$\dot{q} = -\mathcal{A} e^{\mathcal{A}\left(1-\frac{r}{q_0}\right)} \dot{r} \quad \therefore \quad \dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} \quad (2.56)$$

Fazendo-se o equilíbrio energético do sistema, tem-se que a potência externa introduzida devido à fratura é igual à potência tensional no corpo, assim, para problemas unidimensionais, tem-se:

$$\begin{aligned} \underbrace{P_{ext}^{\Omega}}_{\text{Potência introduzida}} &= \int_{\Omega} \sigma \dot{\epsilon} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (1-D) \underbrace{E\epsilon}_{\bar{\sigma}=r} \underbrace{\dot{\epsilon}}_{\dot{r}/E} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} q \frac{\dot{r}}{E} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{\mathcal{H}E} d\Omega \end{aligned} \quad (2.57)$$

Substituindo na equação 2.57 o parâmetro de *softening*, dado pela equação 2.55, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}^{\Omega} &= \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{-\mathcal{A} e^{\mathcal{A}\left(1-\frac{r}{q_0}\right)} E} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{q\dot{q}}{\mathcal{A} \frac{q}{q_0} E} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{q_0 \dot{q}}{\mathcal{A} E} d\Omega \end{aligned} \quad (2.58)$$

No entanto, a fissura se desenvolve na região de localização de deformações, portanto, deseja-se calcular a potência na região delimitada por  $h$ , ou seja

$$\mathcal{P}_{ext}^{\Omega_h} = - \int_{\Omega_h} \frac{q_0 \dot{q}}{\mathcal{A} E} d\Omega_h = - \frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_S \dot{q} dS \quad (2.59)$$

O processo de degradação do material ocorre em um intervalo de tempo  $t \in [0, t_{\infty}]$ , onde  $t_{\infty}$  é o tempo no qual o material encontra-se totalmente degradado. O trabalho total,  $\mathcal{W}^{\Omega_h}$ , realizado pelo sistema é calculado integrando a potência  $\mathcal{P}_{ext}^{\Omega_h}$  ao longo do tempo

$$\mathcal{W}^{\Omega_h} = \int_0^{t_\infty} \mathcal{P}_{ext}^{\Omega_h} dt = \int_0^{t_\infty} \left[ -\frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_S \dot{q} dS \right] dt \quad (2.60)$$

Invertendo-se a ordem da integração, tem-se:

$$\mathcal{W}^{\Omega_h} = \int_S \left[ -\frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_0^{t_\infty} \dot{q} dt \right] dS = \int_S \left[ -\frac{h q_0}{\mathcal{A} E} \int_{q_0}^0 dq \right] dS = \int_S h \frac{q_0^2}{\mathcal{A} E} dS \quad (2.61)$$

Neste cenário, o trabalho externo realizado na região de ocorrência da trinca é a energia necessária para criar uma unidade de fissura, sendo, portanto, a energia de fratura, que é dada por:

$$G_f = h \frac{q_0^2}{\mathcal{A} E} \quad (2.62)$$

De maneira similar, demonstra-se a seguir que é possível obter, através de manipulações algébricas, a mesma expressão para o parâmetro  $\mathcal{A}$ , para a lei de Boone e Ingraffea (1987). Assim, da equação 2.34, tem-se:

$$\sigma = f_t e^\varphi \quad (2.63)$$

sendo

$$\varphi = -\frac{h f_t}{G_f} (\epsilon - \epsilon_t) \quad (2.64)$$

pré-multiplicando  $\varphi$  por  $\frac{f_t}{f_t}$ , tem-se

$$\varphi = -\frac{h f_t f_t}{G_f} \left( \frac{\epsilon}{f_t} - \frac{\epsilon_t}{f_t} \right) \quad (2.65)$$

como  $f_t = E \epsilon_t$ , a equação fica:

$$\varphi = -\frac{h f_t^2}{G_f} \left( \frac{\epsilon}{f_t} - \frac{1}{E} \right) \quad (2.66)$$

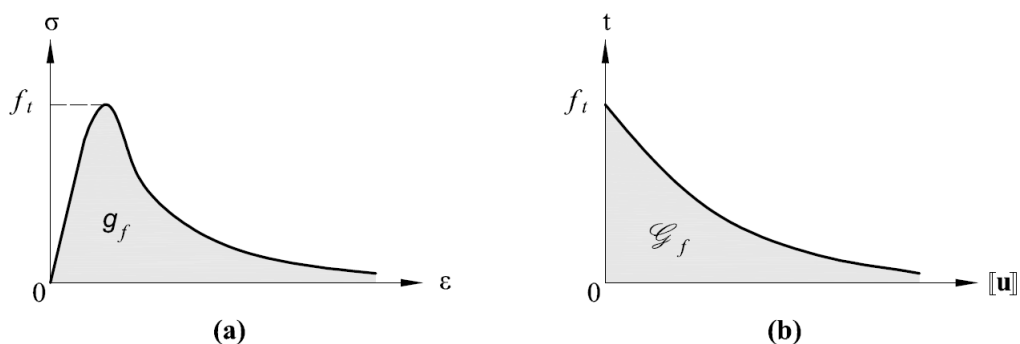
Por fim, pré-multiplicando a expressão por  $-\frac{E}{E}$ , tem-se

$$\varphi = \frac{h f_t^2}{G_f E} \left( 1 - \frac{\sigma}{f_t} \right) \quad (2.67)$$

onde  $\mathcal{A} = \frac{h f_t^2}{G_f E}$

Para o modelo de dano isotrópico de de Borst e Gutiérrez (1999) o parâmetro  $\mathcal{A}$  é equivalente ao parâmetro  $\beta$  na lei de dano.

Quando um sólido é deformado por completo, a integral do diagrama tensão-deformação resulta em uma energia volumétrica dissipada  $g_f$  (Figura 2.11(a)). Multiplicando este valor pela largura da região onde há concentração de fissuras distribuídas  $h$ , obtém-se a energia de fratura  $G_f$ . Observa-se, a partir da equação 2.62, que  $G_f$  é uma propriedade intrínseca do material, caracterizada a partir das suas propriedades mecânicas  $q_0$ ,  $\mathcal{A}$  e  $E$ . A energia de fratura também pode ser obtida a partir da integral da curva entre força de tração e salto no campo dos deslocamentos, como se vê na Figura 2.11(b).



**Figura 2.11:** Modelos de fissuração a) contínuo, b) discreto (Maedo, 2015).

# Capítulo 3

## Elemento de Interface Baseado na Cinemática de Descontinuidade Forte

Este capítulo tem como objetivo apresentar os aspectos teóricos e formulações relevantes para o modelo com elementos de interface. Na seção 3.1, a Cinemática de Forte Descontinuidade (*Continuum Strong Discontinuity Approach* - CSDA) é retratada, uma vez que ela é a base da formulação do elemento finito de interface apresentado na seção seguinte. Na seção 3.2, mostra-se como os conceitos da CSDA são utilizados para desenvolver a formulação do elemento de interface.

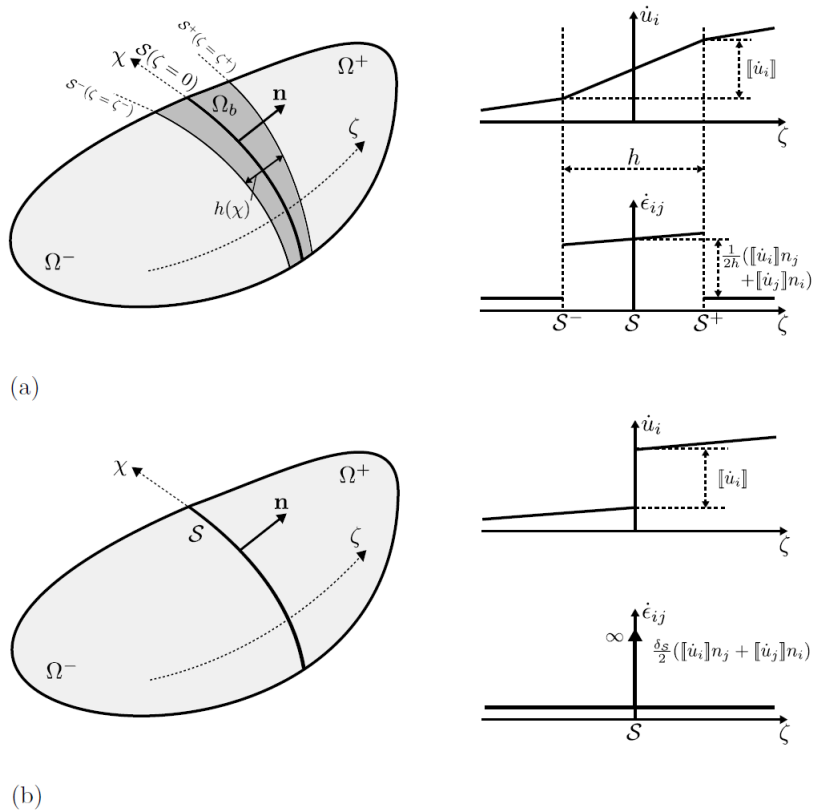
### 3.1 Cinemática de Descontinuidade Forte

De acordo com Peixoto (2016), durante o carregamento inelástico com *softening*, há uma etapa de transição entre as descontinuidades ditas fracas e o aparecimento de saltos no campo de deslocamentos, conhecidos como descontinuidades fortes. Neste trabalho, a cinemática de descontinuidade forte é tratada a partir de elementos de interface, relacionando suas particularidades geométricas com sua correspondência



física quanto ao surgimento de fissuras nos materiais parcialmente frágeis.

Para tanto, considere o domínio sólido  $\Omega$  da Figura 3.1, com uma superfície de descontinuidade  $S$  que separa o domínio em duas partes  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ . Considere também, um sistema de coordenadas curvilíneas,  $\{\chi, \zeta\}$ , de forma que  $\zeta = 0$  define  $S$ , que está contida em uma região de localização de deformações  $\Omega_b$ . A espessura da região de localização é função apenas da coordenada  $\chi$ .



**Figura 3.1:** Cinemática com descontinuidades a) Descontinuidade fraca b) Descontinuidade forte. Adaptado de Peixoto (2016).

A Figura 3.1 mostra o domínio  $\Omega$  em duas situações distintas, uma na qual a região de localização de deformações existe e é delimitada pelas linhas  $S^-$  e  $S^+$  e corresponde à descontinuidade fraca, e a outra onde a região de localização tende a zero, correspondendo à descontinuidade forte.

A cinemática de descontinuidade forte pode ser definida como um caso limite da cinemática com descontinuidade fraca, quando a região de localização de deformações tende para a linha  $S$ . O campo de deslocamento total para cada ponto material  $\mathbf{X}$  em  $\Omega$  pode ser expresso como a soma do campo de deslocamento regular  $\tilde{\mathbf{u}}$  com campo de deslocamento descontínuo  $[[\mathbf{u}]]$  ao longo de  $S$ . Desse modo:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + H_S [[\mathbf{u}]] \quad (3.1)$$

onde  $H_S$  é a função de Heaviside localizada na superfície  $S$ . O campo é descontínuo em  $S$ , uma vez que a função de Heaviside é dada por:

$$H_S = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1, & \text{para } \mathbf{X} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (3.2)$$

O campo de deformações pode ser expresso pela equação:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \nabla^S \mathbf{u} \\ &= \underbrace{\nabla^S \tilde{\mathbf{u}} + H_S \nabla^S [[\mathbf{u}]]}_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}} + \frac{\mu_S(\zeta)}{h} ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $h$  é a espessura da região de localização,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a  $S$ ,  $\otimes$  é o operador diádico (indicador de um produto tensorial) e  $\mu_S$  é a função de colocação na região de localização de deformações, dada por

$$\mu_S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{h}{2} < \zeta \leq \frac{h}{2} \\ 0, & \text{se } \zeta < -\frac{h}{2} \text{ ou } \zeta > \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Reorganizando a equação 3.3 tem-se:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\mu_S(\zeta)}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^S \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \delta_S (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^S \quad (3.6)$$

onde  $\delta_S$  é o delta de Dirac, definido como:

$$\delta_S = \begin{cases} 0, & \text{se } \zeta \neq 0 \\ \infty, & \text{se } \zeta = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

e

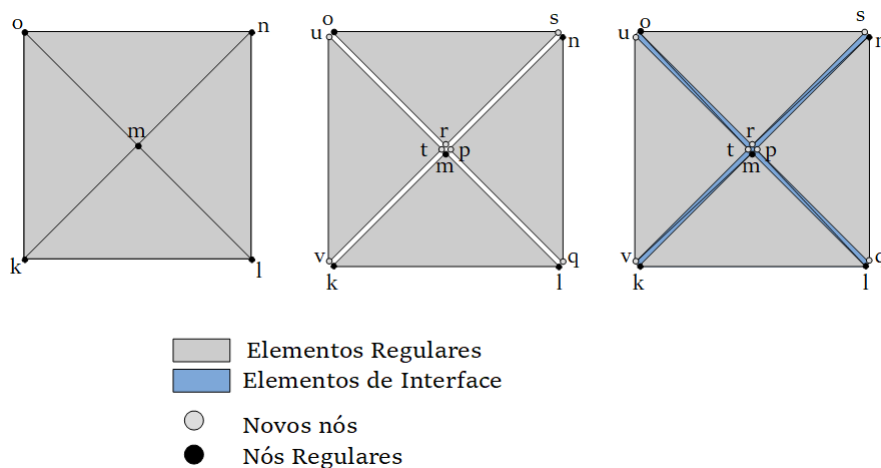
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_S d\zeta = 1 \quad (3.8)$$

A equação 3.3 e suas derivações são as equações cinemáticas que descrevem o campo de deformações na ocorrência de forte descontinuidade.

## 3.2 Formulação do Elemento de Interface

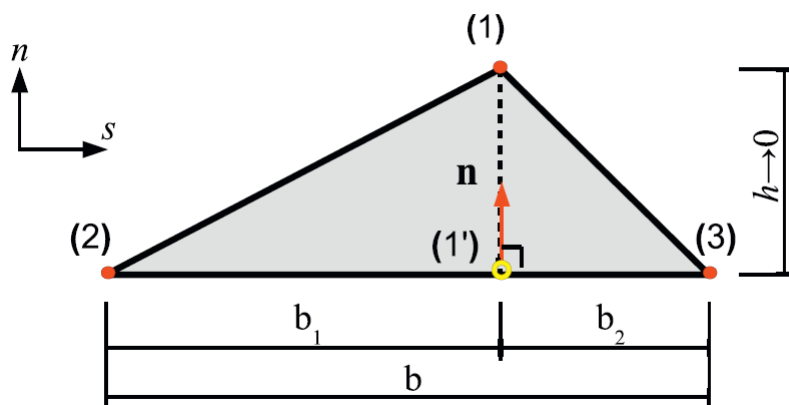
O modelo de elementos de interface, utilizado para avaliar o processo de fissuração, foi inicialmente proposto por Manzoli et al. (2012) e baseia-se nos conceitos da CSDA. Para que a cinemática do campo de deslocamentos seja semelhante ao campo da cinemática de descontinuidade forte, os elementos de interface devem possuir elevada razão de aspecto, ou seja, razão alta entre a menor e maior dimensão, respectivamente; sendo a menor dimensão correspondente à espessura do elemento de interface. Conforme a razão de aspecto aumenta, as deformações do elemento de interface se aproximam das deformações calculadas pela cinemática de descontinuidade forte. Desse modo, baseado no mesmo princípio da CSDA, tensões limitadas serão obtidas a partir de deformações ilimitadas, utilizando relações constitutivas contínuas, as quais tendem a relações constitutivas discretas conforme a razão de aspecto aumenta (Manzoli et al., 2012).

O modelo requer a fragmentação da malha de elementos finitos padrão, inserindo entre cada par de elementos finitos regulares, dois novos elementos, denominados elementos de interface. A fragmentação, ou quebra da malha, consiste em gerar a malha de elementos finitos a ser fragmentada, separar os elementos finitos pela introdução de vazios entre eles e, por fim, inserir os elementos de interface entre os elementos finitos, como se vê na Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Fragmentação da malha de elementos finitos (Manzoli et al., 2012).

A geometria do elemento de interface é apresentada na Figura 3.3. Considera-se um elemento finito de três nós com base  $b$ , formada pelos segmentos entre os nós (2) e (3) e altura  $h$ , dada pela distância entre o nó (1) e a sua projeção na base do elemento (1').



**Figura 3.3:** Modelo do elemento finito de interface (Rodrigues et al., 2016).

Para que a relação cinemática do elemento finito seja equivalente à equação da CSDA, apresentada na seção anterior, do Método dos Elementos Finitos, tem-se a seguinte relação a ser satisfeita:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (3.9)$$

onde,  $\boldsymbol{\epsilon}$  é o vetor que contém as deformações do elemento;  $\mathbf{d}$  são os deslocamentos nodais e  $\mathbf{B}$  é a matriz que contém as derivadas das funções de forma.

A equação 3.10 fornece as deformações do elemento de interface a partir dos deslocamentos e das coordenadas nodais.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_s^{32} & 0 & -X_s^{31} & 0 & X_s^{21} & 0 \\ 0 & -X_n^{32} & 0 & X_n^{31} & 0 & -X_n^{21} \\ -X_n^{32} & X_s^{32} & X_n^{31} & X_s^{31} & -X_n^{21} & X_s^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_s^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

A é a área do elemento finito triangular,  $u_n^{(i)}$  e  $u_s^{(i)}$  são as componentes de deslocamento do nó  $i$ , nas direções  $n$  e  $s$ , respectivamente. Tem-se  $X_s^{32} = X_s^3 - X_s^2$ , portanto  $X_s^{32} = b$ , dessa forma observa-se  $-X_s^{31} = -b_3$ ,  $X_n^{31} = -b_2$ ,  $-X_n^{32} = 0$ ,  $-X_n^{31} = -h$  e  $-X_n^{21} = h$ . Assim reescreve-se a equação 3.10:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{bh} \begin{bmatrix} b & 0 & -b_3 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h & 0 & h \\ 0 & b & -h & -b_3 & h & -b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_s^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Fazendo-se a multiplicação vetorial, obtém-se as componentes do tensor de deformações do elemento

$$\epsilon_{nn} = \frac{1}{h} \left[ u_n^{(1)} - \frac{b_3}{b} u_n^{(2)} - \frac{b_2}{b} u_n^{(3)} \right] \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{ss} = \frac{1}{b} [u_s^{(3)} - u_s^{(2)}] \quad (3.13)$$

$$\gamma_{ns} = \frac{1}{b} [u_n^{(3)} - u_n^{(2)}] + \frac{1}{h} \left[ u_s^{(1)} - \frac{b_3}{b} u_s^{(2)} - \frac{b_2}{b} u_s^{(3)} \right] \quad (3.14)$$

Dado que a projeção 1' está sob a base b, então pode-se obter os deslocamentos da projeção a partir da interpolação dos deslocamentos dos nós 2 e 3, dados por:

$$[[u]]_n = u_n^{(1)} - \left[ \frac{b_3}{b} u_n^{(2)} + \frac{b_2}{b} u_n^{(3)} \right] = u_n^{(1)} - u_n^{(1')} \quad (3.15)$$

$$[[u]]_s = u_s^{(1)} - \left[ \frac{b_3}{b} u_s^{(2)} + \frac{b_2}{b} u_s^{(3)} \right] = u_s^{(1)} - u_s^{(1')} \quad (3.16)$$

onde  $[[u]]_n$  e  $[[u]]_s$  são as componentes do campo de deslocamentos que contêm o deslocamento relativo entre o nó 1 e sua projeção 1'. Portanto, de acordo com as coordenadas cartesianas locais (n, s), o tensor de deformações para o elemento de interface é:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} & \frac{\gamma_{ns}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{sn}}{2} & \epsilon_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} [[u]]_n & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h} [[u]]_s + \frac{1}{b} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h} [[u]]_s + \frac{1}{b} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \right] & \frac{1}{b} (u_s^{(3)} - u_s^{(2)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Decompõe-se o tensor de deformações em duas parcelas, uma responsável por armazenar os termos que dependem de b, parcela de deformação contínua, e a outra contendo os termos dependentes de h, sendo responsável pelos termos referentes ao salto no campo de deslocamentos, a saber:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \hat{\epsilon} \quad (3.18)$$

a componente do tensor de deformações que contém as parcelas relacionadas a b fica:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) \\ \frac{1}{2} (u_n^{(3)} - u_n^{(2)}) & \frac{1}{2} (u_s^{(3)} - u_s^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

e a componente relacionada ao movimento de corpo rígido, dado pelo salto no campo de deslocamentos é dada por:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} [[u]]_n & \frac{1}{2} [[u]]_s \\ \frac{1}{2} [[u]]_s & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para melhor relacionar o campo de deformações e a CSDA, pode-se escrever o tensor de deformações relacionado a  $h$ , em uma notação que se faz semelhante à cinemática de descontinuidade forte

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^s \quad (3.21)$$

onde,  $[[\mathbf{u}]]$  é o vetor das componentes do deslocamento relativo entre o nó (1) e sua projeção (1'), por fim  $s$  significa apenas a parte simétrica do tensor.

Assim, o vetor de deformações total pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \underbrace{\frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^s}_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (3.22)$$

Quando  $h$  tende à zero, o vetor de deformações que não depende de  $h$  permanece limitado, porém o vetor  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  não está mais limitado, como consequência, as deformações estão relacionadas quase que exclusivamente ao deslocamento relativo entre o nó (1) e sua projeção (1'), tornando-se a medida de descontinuidade de deslocamento.

Essa estratégia é suportada pelo fato de que os elementos de interface são capazes de descrever a cinemática de descontinuidade forte, quando a altura do elemento tende a zero. No limite, ou seja, quando há grande descontinuidade, a razão de aspecto tende a infinito, o modelo de dano contínuo equivale ao modelo discreto.

### 3.3 Relação Constitutiva Discreta do Elemento de Interface

Quando  $h$  se aproxima de zero, a deformação do elemento de interface, dada pela equação 3.22, é similar à expressão de deformação no regime de descontinuidade forte, dada pela equação 3.5, para pontos materiais dentro da região de localização. Assim, o correspondente campo de tensões pode ser obtido por meio de uma relação constitutiva contínua, desde que a lei constitutiva trabalhe com as deformações

calculadas no sistema local do elemento de interface. De acordo com Maedo (2015), essa relação constitutiva é obtida a partir da relação discreta entre as tensões na interface e os componentes do salto no campo de deslocamentos quando  $h$  tende a zero. Assim, partindo-se da equação constitutiva e da equação 3.22

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (1 - D) \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \\ &= (1 - D) \mathbf{C} : \left[ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]]^s) \right] \\ &= \frac{(1 - D)}{h} \mathbf{C} : [h\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]]^s)]\end{aligned}\quad (3.23)$$

Na condição limite de descontinuidade forte, a equação constitutiva fica:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \frac{(1 - D)}{h} (\mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n}) [[\mathbf{u}]] \quad (3.24)$$

Para manter a tensão limitada quando  $h \rightarrow 0$ , os componentes do salto de deslocamentos devem tender também a zero, quando o sistema encontrar-se no regime linear elástico. No entanto, quando se estiver no regime inelástico, o elemento de interface apresentará um comportamento de dano rígido. Mais detalhes acerca da teoria de descontinuidade forte foram discutidos nos trabalhos de Simo et al. (1993), Oliver (1996), Oliver et al. (1999), Peixoto (2016), entre outros.

Em condições de abertura de fissura em modo I ( $[[\mathbf{u}]] > 0$ ,  $[[\mathbf{u}]]_{\mathbf{n}}|_{t=0} = 0$ ,  $[[\mathbf{u}]]_{\mathbf{s}} = 0$ ,  $[[\mathbf{u}]]_{\mathbf{t}} = 0$ ), a evolução da tensão normal torna-se:

$$\sigma_{nn}([[u]]_n) = \frac{1}{h} E [[u]]_n = \begin{cases} \frac{1}{h} E [[u]]_n & \text{se } [[u]]_n \leq [[u_0]]_n \\ \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \frac{1}{h} E [[u]]_n = \sigma(\bar{\sigma}) & \text{se } [[u]]_n > [[u_0]]_n \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $[[u_0]]_n = (h_0)/E$ .

Admitindo a lei de *softening* exponencial e fazendo  $q_0 = f_t$ , tem-se:

$$q(r) = f_t e^{\mathcal{A}h(1-\frac{r}{f_t})} \quad (3.26)$$

onde  $f_t$  é o limite de resistência à tração do material e  $\mathcal{A}$  o parâmetro que controla a curvatura da lei exponencial. No momento em que o elemento de interface se



encontra totalmente degradado, a energia  $G_f$  dissipada em modo I pode ser calculada de acordo com a equação

$$\begin{aligned}
G_f &= \int_0^\infty \sigma_{nn} ([u])_n d[u]_n \\
&= \int_0^{[u_0]_n} \sigma_{nn} ([u])_n d[u]_n + \int_{[u_0]_n}^\infty \sigma_{nn} ([u])_n d[u]_n \\
&= \int_0^{[u_0]_n} \frac{1}{h} E [u]_n d[u]_n + \int_{[u_0]_n}^\infty f_t e^{\mathcal{A}h(1-\frac{1}{h}\frac{E[u]_n}{f_t})} d[u]_n \quad (3.27) \\
&= \frac{1}{h} E \frac{([u]_n)^2}{2} \Big|_0^{[u_0]_n} - \frac{f_t^2}{\mathcal{A}E} e^{\mathcal{A}h(1-\frac{1}{h}\frac{E[u]_n}{f_t})} \Big|_{[u_0]_n}^\infty \\
&= \frac{1}{E} \left( \frac{f_t^2 h}{2} + \frac{f_t^2}{\mathcal{A}} \right)
\end{aligned}$$

Como a espessura do elemento de interface ( $h$ ) tende a zero,

$$G_f = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{f_t^2 h}{2} + \frac{f_t^2}{\mathcal{A}} \right) \right] = \frac{f_t^2}{\mathcal{A}E} \quad (3.28)$$

Pode-se expressar o parâmetro  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \frac{f_t^2}{G_f E} \quad (3.29)$$

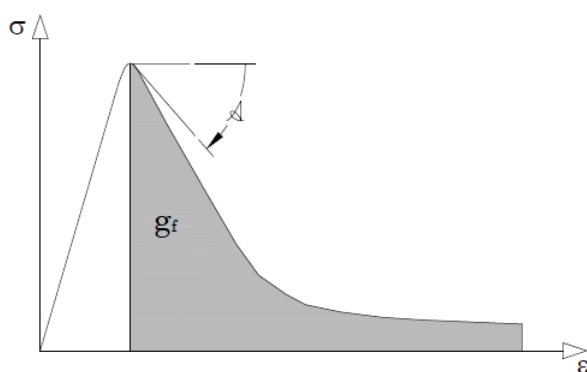
Assim, recuperando-se a equação obtida para energia de fratura (equação 2.62), tem-se que esta deve ser ajustada, com base na espessura do elemento de interface, através da equação

$$\mathcal{A}' = h \mathcal{A} \quad (3.30)$$

onde  $\mathcal{A}'$  é o parâmetro de *softening* do modelo discreto, ilustrado na Figura 3.4, e  $h$  é uma reinterpretação da região de localização, ilustrada na Figura 2.10, representando agora a região onde ocorrerá uma descontinuidade.

Como a energia de fratura está diretamente relacionada ao *softening*, os parâmetros das equações, tanto de Boone e Ingraffea (1987) quanto de de Borst e Gutiérrez (1999), descritas no capítulo 2, que estabelecem a inclinação do ramo descendente

na lei constitutiva, devem ser ajustados com base na relação da equação 3.30. Ou seja, na equação 2.34, a variável  $h$  da lei passa a ser a espessura do elemento de interface, enquanto que na lei exponencial de dano de de Borst e Gutiérrez (1999), o parâmetro  $\beta$  deve ser multiplicado pela espessura do elemento de interface  $h$ . Assim, garante-se a equivalência energética entre uma lei tensão-deformação (ou lei de dano) e uma lei tensão-abertura de trinca, que é representativa da descontinuidade forte.



**Figura 3.4:** Relação entre  $g_f$  e  $\mathcal{A}$ .

# Capítulo 4

## Implementação Computacional

O INSANE (*INterative Structural ANalysis Environment*) é um ambiente computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais, implementado em linguagem de programação Java, usando o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). Segundo Fonseca (2008), programas desenvolvidos sob esse paradigma geram um código segmentado como consequência das generalizações proporcionadas por abstrações, heranças de classe e polimorfismos. Já a linguagem Java, de acordo com Fonseca (2008), além de ser uma linguagem orientada a objetos, tem a característica de ter portabilidade, por ser desenvolvida de forma a ser independente de plataforma, podendo ser compilado em um sistema operacional e executado em outro sem qualquer prejuízo. Com isso, a plataforma INSANE tem como princípio ser um ambiente segmentado, amigável a mudanças e, assim, ser melhorado e ampliado de forma progressiva, sem necessidade de muitas modificações.

Compõem o INSANE três aplicações básicas para seu funcionamento: o pré-processador, que consiste na aplicação gráfica interativa oferecendo recursos para a entrada de dados do programa; o pós-processador, que permite ao usuário a visualização dos resultados no final da sua análise; e um núcleo numérico (processador),

responsável pela leitura dos dados e obtenção dos resultados das análises dos modelos. As implementações resultantes dessa dissertação concentram-se em grande parte no núcleo numérico, mais especificamente na segmentação relativa ao modelo de elementos finitos, onde foi implementado o elemento de interface com elevada razão de aspecto, e na relativa aos modelos constitutivos, e no pré-processador, relativo à quebra da malha.

Este capítulo tem como objetivo apresentar o projeto orientado a objetos da implementação realizada, que consiste na incorporação de classes adicionais ao código, que permitiram a solução de um modelo contínuo, discretizado em elementos finitos e de interface para tratar o problema de propagação de fissuras. Destaca-se que a plataforma de implementação promovida pelo sistema computacional INSANE mostrou-se muito eficiente, por permitir que novas características fossem incorporadas ao ambiente sem a necessidade de modificação do código existente.

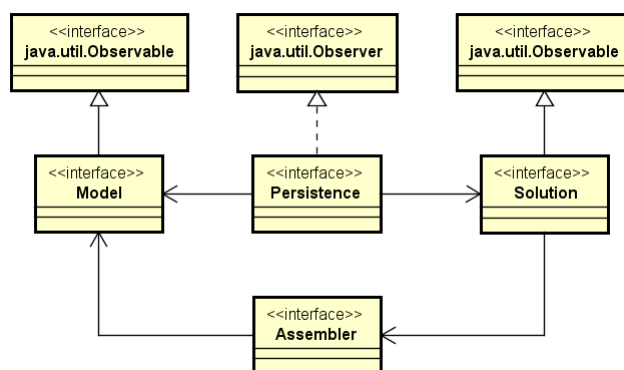
## 4.1 Organização do Núcleo Numérico

A obtenção dos resultados de uma análise estrutural de diferentes modelos é feita no núcleo numérico, formado por um conjunto de interfaces e classes abstratas que representam as diferentes abstrações de uma solução numérica de modelos discretos, cada um com uma adequada hierarquia de classes, responsável por cumprir o seu papel no processamento. As interfaces `Assembler`, `Model`, `Solution` e `Persistence` concentram a organização do processamento. A Figura 4.1 representa a organização dessas classes dentro do núcleo numérico do programa.

A interface `Assembler` compõe a abstração do modelo discreto adotado, ela é responsável por montar as matrizes necessárias à equação de equilíbrio apresentada na equação 4.1. Esta interface é implementada pela classe `FemAssembler`, que possui como atributo um objeto do tipo `Model`, que é o modelo para o qual se deve montar a equação.

$$\mathbf{A}\ddot{X} + \mathbf{B}\dot{X} + \mathbf{C}X = \mathbf{D} \quad (4.1)$$

onde  $X$  é o vetor de variáveis de estado do problema;  $\dot{X}$  e  $\ddot{X}$  são vetores com a primeira e segunda variações das grandezas de estado, respectivamente;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  são matrizes dos coeficientes e  $\mathbf{D}$  é o vetor de termos independentes.



**Figura 4.1:** Organização do núcleo numérico do INSANE (Fonseca, 2008).

Uma vez montada a equação que descreve o problema, a classe abstrata `Solution` fica responsável por desencadear o processo de solução; derivam, portanto, desta classe diversas subclasses que representam o tipo de problema para o qual se deve aplicar a solução.

A interface `Model` contém os dados do modelo discreto a ser analisado. Essa classe possui listas de objetos inerentes ao modelo, a fim de representar o mesmo da forma mais geral possível. Os dados são passados para `Assembler` que monta a equação de equilíbrio, que será solucionada por `Solution`.

`Model` e `Solution` se comunicam através da persistência de dados `Persistence`, que trata os dados de entrada e de saída, e os fornece às demais aplicações sempre que há mudanças nas variáveis do modelo. Este processo de observação de mudanças é feito através do padrão de projeto *Observer-Observable*, que é um mecanismo de propagação de mudanças.

## 4.2 Quebra da Malha de Elementos Finitos

Esta seção explana a análise e implementação da quebra da malha padrão de elementos finitos, através da estrutura de dados de semi-arestas (que está apresentada no Apêndice A), para que o processo de inserção de elementos de interface seja automatizado. Para tanto, foi necessário acrescentar uma nova classe ao pré-processador do programa INSANE.

A classe `BreakMeshInInterfaceElementsCommand` é responsável por consultar a estrutura de dados da malha de elementos finitos padrão, alterá-la, reestruturando a incidência de nós e arestas de cada face, criar elementos de alta razão de aspecto e inseri-los entre os elementos da malha original.

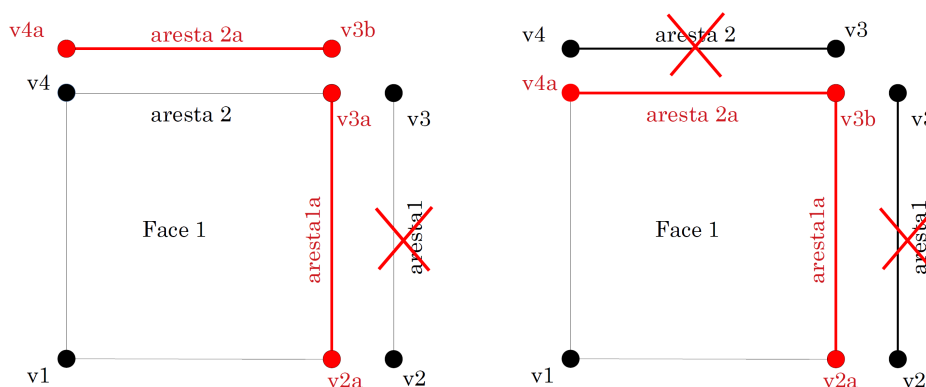
O método `execute()` da classe `BreakMeshInInterfaceElementsCommand` desencadeia o passo-a-passo descrito a seguir, necessário para a fragmentação da malha:

- (a) consulta da vizinhança: inicialmente, percorre-se o modelo de elementos finitos face a face, através da estrutura de dados de semi-arestas, identificando a vizinhança, e armazenando essas informações. Para cada face do modelo tem-se três listas de dados: uma lista de faces vizinhas, e duas listas, que contêm as arestas pelas quais a face corrente possui uma vizinha, tais listas são necessárias à troca de arestas durante a quebra da malha. A Tabela 4.1 relaciona as listas de dados referentes ao exemplo da Figura 4.2. Ainda nesta etapa, para cada vizinhança identificada, novos nós são criados e as arestas vizinhas são duplicadas (ver Figura 4.2), ou seja, criam-se novas arestas com as mesmas características, e estas são adicionadas ao modelo topológico e à lista de novas arestas. Estas informações são importantes até a completa quebra da malha, pois a vizinhança sempre é consultada ao longo do processo.



responsável por essa tarefa é o *replaceEdge()*, implementado na classe *HalfEdgeDataStructure*. São passados como parâmetro: a face corrente, a nova aresta, os vértices inicial e final da aresta que será substituída, a lista com as arestas que serão substituídas da face corrente e uma lista com os vértices da face corrente que serão substituídos. Com estes parâmetros, pode-se percorrer a lista de loops de cada face e substituir no loop, a nova lista de vértices, a Figura 4.3 exemplifica a troca de vértices para a face 1 do modelo.

- (c) remoção de arestas e nós: percorre-se as listas de informações guardadas no primeiro passo, para que as arestas e os nós que foram substituídos sejam removidos do modelo.



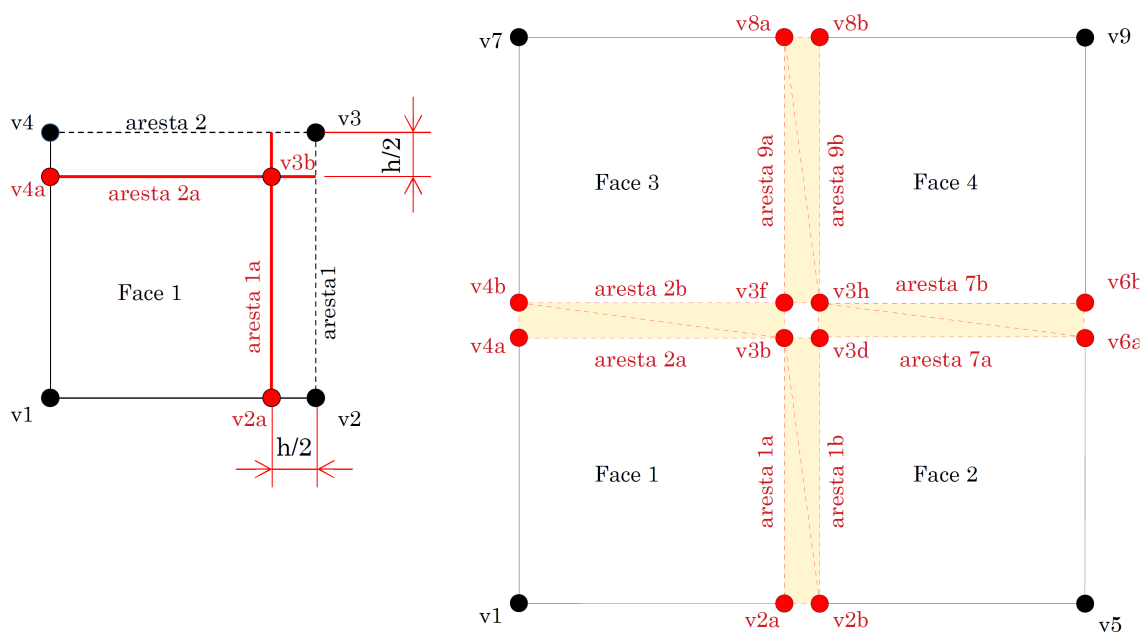
**Figura 4.3:** Fragmentação da malha padrão de elementos finitos - troca da incidência e exclusão das arestas antigas.

- (d) recuo das arestas: para que os elementos de interface sejam inseridos entre os elementos regulares, as arestas criadas são recuadas no sistema local em  $h/2$  (Figura 4.4). É importante ressaltar que a operação de recuo é realizada em termos de coordenadas locais e, no final desta etapa, são transformadas de volta em coordenadas globais e atribuídas aos nós da aresta. Outro ponto relevante é que na transformação de coordenadas deve-se realizar uma translação de coordenadas ao ponto  $(0, 0)$  e, em seguida, uma rotação, para que as



coordenadas sejam referenciadas corretamente ao sistema global.

- (e) criação dos elementos de interface: a partir das informações de vizinhança, obtidas na primeira etapa, e com a atualização dos dados ao longo do processo descrito, é possível criar os elementos de interface, passando como parâmetro os nós das arestas que possuem vizinhança e inicializando no modelo os novos elementos.



**Figura 4.4:** Fragmentação da malha padrão de elementos finitos - recuo das arestas e criação dos elementos de interface.

Como os vértices das faces são trocados seguindo uma sequência, ao longo do código, é necessário que as listas com informação da vizinhança sejam constantemente atualizadas. A Tabela 4.2 relaciona a estrutura de dados para o exemplo da Figura 4.2 ao final do processo.

**Tabela 4.2:** Dados atualizados da vizinhança ao final do processo de fragmentação.

Face corrente	Novas arestas vizinhas	Novo vértice inicial	Novo vértice final
Face1	aresta 1a	v2a	v3b
	aresta 2a	v3b	v4a
Face 2	aresta 1b	v3d	v2b
	aresta 7a	v6a	v3d
Face 3	aresta 2b	v4b	v3f
	aresta 9a	v3f	v8a
Face 4	aresta 9b	v8b	v3h
	aresta 7b	v3h	v6b

### 4.3 Implementação do Elemento de Interface

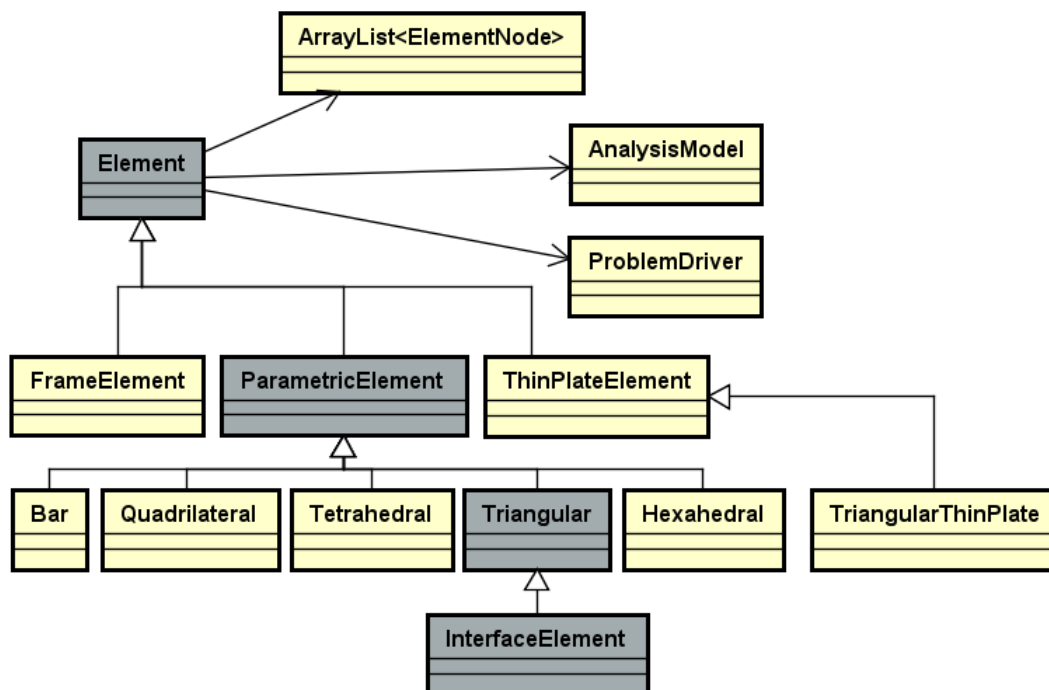
O projeto orientado a objetos traz inúmeras vantagens, como já descrito anteriormente. Diferentes entidades, como a geometria do elemento finito, podem ser obtidas diretamente das superclasses estabelecidas pela herança existente. Tal recurso foi amplamente explorado neste trabalho.

O elemento finito é representado através da classe abstrata `Element`, que é estendida pelas classes herdeiras, as quais representam os diversos tipos possíveis de elementos finitos. A classe `Element` é especialmente importante para a implementação do modelo de elemento de interface proposto neste trabalho.

Um objeto `Element` tem como atributos uma lista de `ElementNode`, que caracteriza os nós do elemento finito; de `Degeneration`, para representar os pontos internos dos elementos, representar a degeneração da geometria do elemento e onde são avaliadas as grandezas internas dos elementos, tais como tensão e deformação; um objeto `AnalysisModel`, que representa os modelos de análise; um objeto `Shape`,

que representa as funções de aproximação do elemento; um objeto `ConstitutiveModel`, que representam os diferentes modelos constitutivos do problema, e um objeto `ProblemDriver`, que armazena informações relativas ao tipo de problema modelado pelo elemento.

A implementação da formulação abordada neste trabalho se dá através da extensão da classe `TriangularElement`, como se vê na Figura 4.5, incorporando uma nova classe, denominada `TriangularInterfaceElement`, que herdará os métodos e atributos da superclasse, com exceção do método que calcula as deformações nos pontos de integração, que foi sobrescrito na classe criada, pois o elemento com elevada razão de aspecto, visando representar a cinemática de forte descontinuidade, apresenta particularidades no cálculo das deformações que se diferenciam de um elemento finito padrão.



**Figura 4.5:** Diagrama de classe simplificado para `Element`.

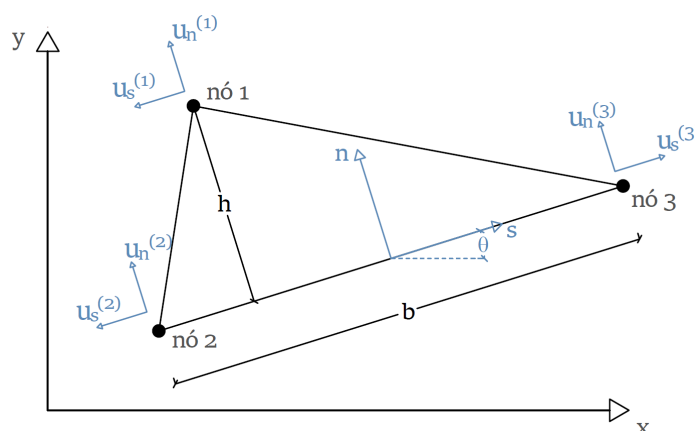
A partir da quebra da malha padrão de elementos finitos, os novos elementos

com elevada razão de aspecto que foram criados recebem um marcador “TRIANGULAR\_INTERFACE\_ELEMENT”. Este marcador tem a função de guardar a informação de que o elemento é do tipo elemento de interface.

Assim, durante o processamento da estrutura, toda vez que for encontrado um Elemento de Interface, o método para o cálculo de deformações da classe `TriangularInterfaceElement`, descrito a seguir, irá substituir o método da classe `Element`, de forma que as deformações sejam obtidas a partir das equações descritas no Capítulo 3. Alguns aspectos relevantes a serem considerados no cálculo são tratados adiante.

O método `getPointInternalVariables(Dg)` é responsável por montar o vetor de deformações do elemento finito. Portanto, a formulação para o cálculo de deformações do elemento de interface irá sobrescrever este método na classe `TriangularInterfaceElement`.

Inicialmente, reorganizam-se os nós do elemento finito de interface, para que as operações de transformação e rotação de eixos sejam adequadas. De acordo com as características geométricas apresentadas no Capítulo 3, calculam-se as distâncias entre os nós do elemento e denomina-se nó 1 aquele nó que está oposto à maior distância, a partir daí, os outros nós são definidos em numeração crescente no sentido anti-horário, de acordo com a Figura 4.6



**Figura 4.6:** Representação da nomenclatura do elemento triangular de interface.

Desta forma, é possível obter os ângulos de rotação das coordenadas locais em relação aos eixos globais:

$$\cos \theta = \frac{x^{(3)} - x^{(2)}}{b} \quad (4.2)$$

e

$$\text{sen } \theta = \frac{y^{(3)} - y^{(2)}}{b} \quad (4.3)$$

os parâmetros geométricos utilizados no cálculo da base  $b$  e da altura  $h$  são

$$b = \sqrt{(x^{(3)} - x^{(2)})^2 + (y^{(3)} - y^{(2)})^2} \quad (4.4)$$

e

$$h = \frac{1}{b} \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} \\ x^{(3)} & y^{(3)} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $|\cdot|$  é o determinante da matriz de coordenadas nodais.

A equação 4.6 apresenta a mudança de eixos dos deslocamentos globais, que são calculados pelo equilíbrio de forças através da análise não linear, em deslocamentos locais, no sistema do elemento, que serão utilizados no cálculo das deformações.

$$\begin{Bmatrix} u_s^{(1)} \\ u_n^{(1)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(3)} \\ u_n^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x^{(1)} \\ d_y^{(1)} \\ d_x^{(2)} \\ d_y^{(2)} \\ d_x^{(3)} \\ d_y^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Com os deslocamentos locais, é possível calcular as deformações locais nos nós de acordo com a equação 3.17. É importante ressaltar que os eixos  $s$  e  $n$ , após a rotação do elemento, devem coincidir com os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Assim, tem-se o vetor de deformações contínuas, dado por:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{ss} \\ \tilde{\epsilon}_{nn} \\ \tilde{\gamma}_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{Bmatrix} u_s^{(3)} - u_s^{(2)} \\ 0 \\ u_n^{(3)} - u_n^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

e o vetor de deformações descontínuas, dado por

$$\hat{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_{ss} \\ \hat{\epsilon}_{nn} \\ \hat{\gamma}_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ [[u]]_n \\ [[u]]_s \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

e, por fim, o vetor de deformações locais total, dado por

$$\epsilon = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ [[u]]_n \\ [[u]]_s \end{Bmatrix} + \frac{1}{b} \begin{Bmatrix} u_s^{(3)} - u_s^{(2)} \\ 0 \\ u_n^{(3)} - u_n^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

O método retorna o vetor de deformações no sistema global, contudo, as deformações no sistema local de abertura de fissuras também são armazenadas, para que sejam posteriormente usadas pelo modelo constitutivo.

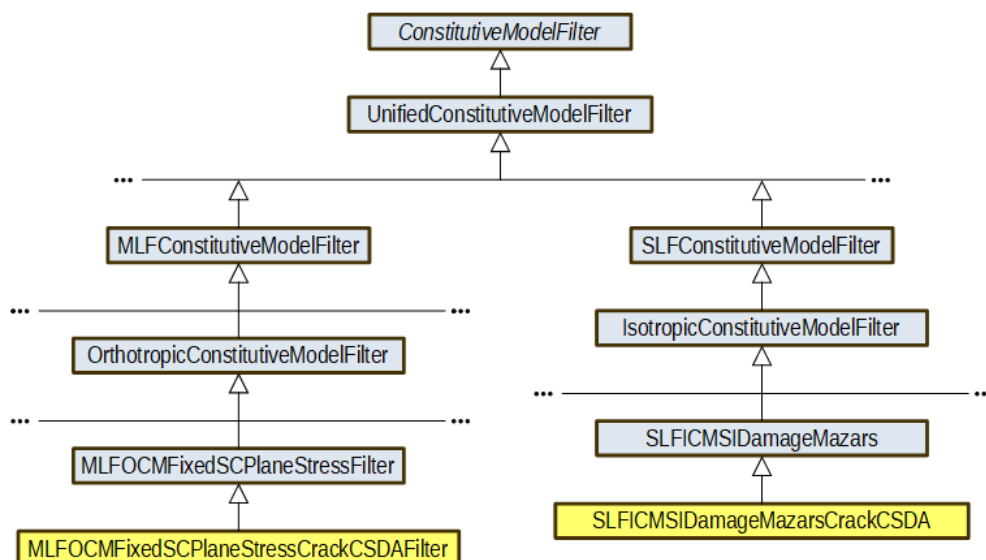
## 4.4 Adaptação do Modelo Constitutivo

Dois modelos constitutivos foram adaptados para incorporar as particularidades presentes no modelo de elementos de interface: o modelo de dano isotrópico padrão de de Borst e Gutiérrez (1999) com deformação equivalente de Mazars (1984) e o modelo de fissuração distribuída com direção de fissuração fixa.

A classe `ConstitutiveModel` é responsável por encapsular as atividades do modelo constitutivo. Esta classe é formada por um conjunto de operações tensoriais capazes de lidar com os tensores secantes, os operadores tangentes, os gradientes das funções e as condições de carregamento e descarregamento. As operações relativas às particularidades de cada modelo constitutivo fica a cargo das classes denominadas “*Filters*”. Cada classe “*Filter*” trata o modelo constitutivo no formato tensorial, de

modo que o modelo de análise forneça as componentes de cada tensor (de rigidez, de flexibilidade, de tensão e de deformação) necessárias ao processo de solução.

As adaptações no modelo constitutivo consistiram na criação de duas novas classes do tipo “*Filter*”, indicadas em amarelo na Figura 4.7. Uma delas herdeira de `MlfoCmFixedScPlaneStress`, que implementa as particularidades do modelo constitutivo de fissuração distribuída com direção fixa, em estado plano de tensão, denominada `MlfoCmFixedScPlaneStressCrackCSDA`; a outra classe, `SlfiCmSiDamageMazarsCrackCSDA`, herdeira de `SlfiCmSiDamageMazars` implementa as particularidades do modelo de dano, de de Borst e Gutiérrez (1999).



**Figura 4.7:** Hierarquia de classes de `ConstitutiveModelFilter`.

Tanto `MlfoCmFixedScPlaneStressCrackCSDA` quanto `SlfiSiCmDamageMazarsCrackCSDA` possuem todas as operações das superclasses, com sobreposição do método `updateConstitutiveVariables()`. Esta operação é responsável por atualizar as variáveis constitutivas do modelo ao longo do processo de análise, a partir das variáveis do passo anterior. Como é particularidade do modelo de elemento de interface que seus parâmetros sejam calculados no sistema local do elemento, então, onde o

método *updateConstitutiveVariables()* recebia deformações globais, ele passa a receber as deformações locais calculadas pelo elemento de interface.

Além disso, na classe `UCmSingleLoadFunction`, quando se calculam os tensores constitutivos, deve-se fornecer também a matriz de transformação de coordenadas entre o sistema do elemento de interface e o sistema global, para que após o cálculo dos parâmetros constitutivos, a partir de variáveis de estado locais, o método retorne estas variáveis no sistema global.



# Capítulo 5

## Simulações Numéricas

Neste capítulo serão apresentadas simulações numéricas processadas no INSANE, para avaliar o desempenho e a generalidade do modelo implementado. Nas simulações utilizaram-se elementos finitos de interface, considerando problemas em estado plano de tensões. Os exemplos foram extraídos de artigos científicos, dissertações e teses, e os resultados foram confrontados com resultados experimentais também presentes na literatura.

Na seção 5.1, demonstra-se o emprego dos elementos de interface para determinar a abertura de trincas em estruturas submetidas a esforços uniaxiais de tração, sendo apresentadas três simulações. Na primeira, tem-se um estudo qualitativo da resposta do elemento de interface e suas particularidades na representação da abertura de trinca. Na segunda simulação, tem-se um ensaio de tração uniforme com concentradores de tensão simétricos, resultando também numa condição de tração uniforme. Por fim, na terceira simulação, têm-se concentradores assimétricos, provocando um estado de sollicitação não uniforme na região das trincas.

Em seguida, na seção 5.2, objetivou-se demonstrar o emprego do modelo para análise da propagação de trincas na flexão em três pontos e avaliar a influência da discretização da malha na resposta estrutural da viga, para tanto, a simulação foi baseada nos estudos apresentados por Petersson (1981).

Na seção 5.3, avalia-se o comportamento do modelo na simulação do efeito de tamanho, novamente em vigas sob flexão em três pontos. Nesta simulação, avaliou-se também o desempenho dos modelos constitutivos usados na representação do efeito de tamanho.

Finalmente, na seção 5.4 avaliou-se o emprego do modelo para analisar a propagação de trincas com o modelo de dano de de Borst e Gutiérrez (1999) isotrópico implementado em um painel em “L”. Avaliou-se, também, a influência da dimensão do elemento de interface e a necessidade de correlação energética entre modelos contínuos e modelos de trinca discreta na resposta estrutural.

Ressalta-se que, nas simulações, o tensor constitutivo da análise não linear é aproximado apenas pela parcela secante.

## 5.1 Simulações na Tração Direta

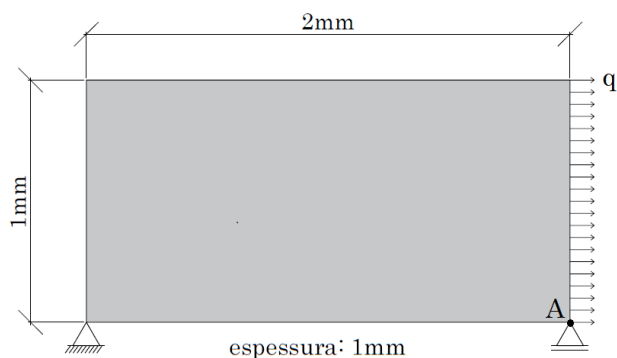
### 5.1.1 Tração simples

Neste exemplo inicial, é apresentada uma chapa retangular tracionada uniformemente. Considera-se material com módulo de elasticidade  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e resistência à tração  $f_t = 2,0 \text{ N/mm}^2$ . A malha é composta por dois elementos finitos quadrados, interligados com dois elementos triangulares de interface, com espessura  $h = 0,001 \text{ mm}$  entre eles. A descrição da geometria, condições de apoio e carregamento são apresentadas na Figura 5.1.

Para controle do processo de solução adotou-se o método de controle de deslocamentos generalizados com incremento de 0,05 no fator de carga, sendo a carga de referência  $q = 1,0 \text{ N/mm}$ . A análise foi realizada em um total de 200 passos, utilizou-se tolerância para convergência de  $1,0 \times 10^{-4}$ .

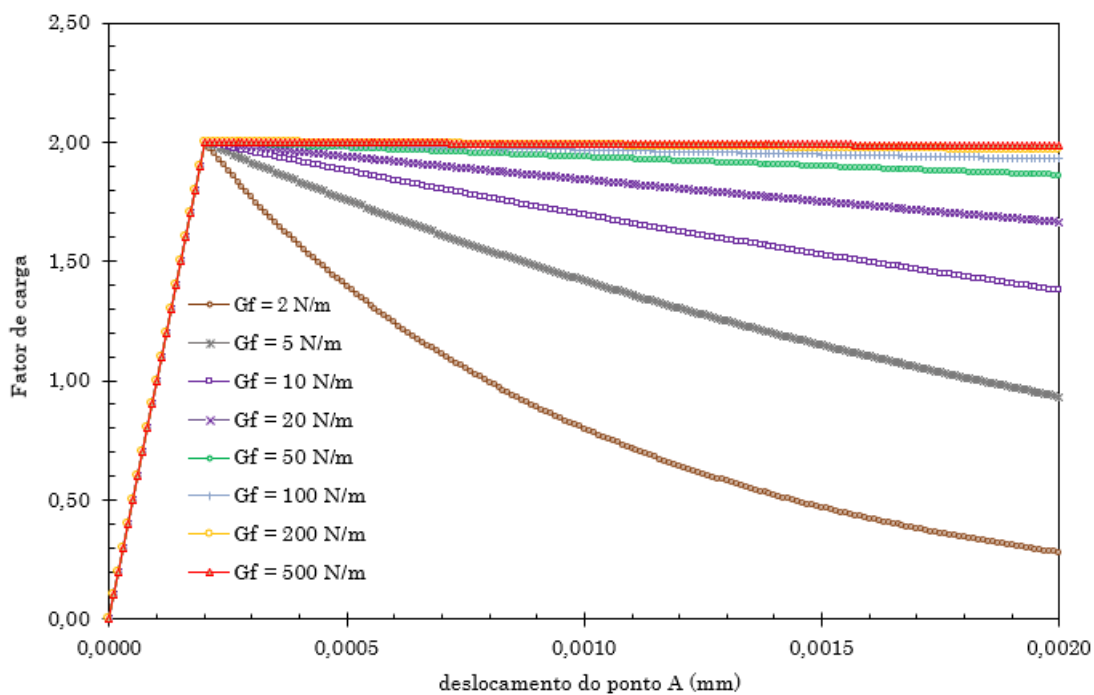
Adotou-se o modelo de fissuração distribuída, e variou-se a energia de fratura  $G_f$  de forma que fosse possível observar a influência do valor da mesma na análise. As trajetórias de equilíbrio do deslocamento horizontal do ponto A, para diferentes

valores de  $G_f$  são apresentadas na Figura 5.2.



**Figura 5.1:** Configuração geométrica, condições de apoio e de carregamento.

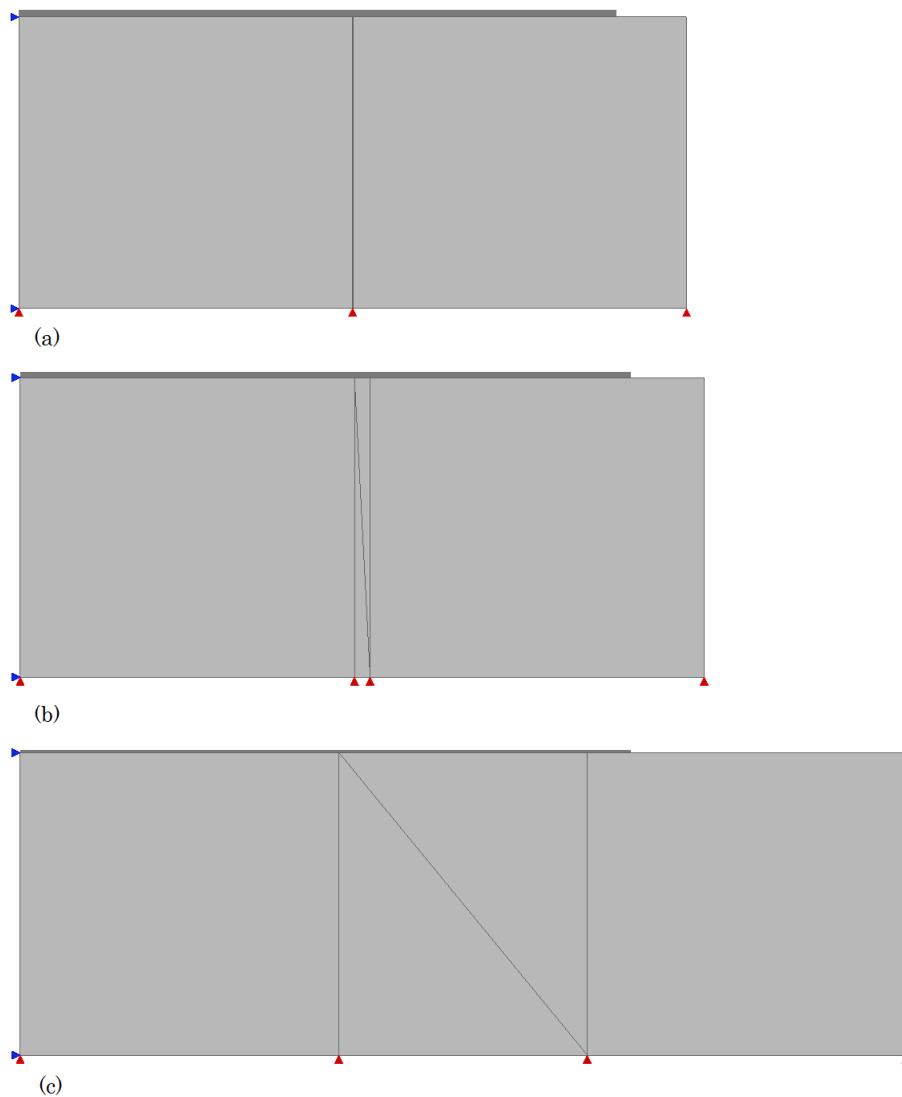
A partir dos resultados observa-se que, devido às condições de tensão uniforme, a trinca abre de forma abrupta atravessando toda a seção da chapa (Figura 5.4).



**Figura 5.2:** Influência da energia de fratura na trajetória de equilíbrio

A Figura 5.3 ilustra o salto no campo de deslocamentos que ocorre após o limite de tensão do material ser atingido. No momento prévio ao limite, as deformações

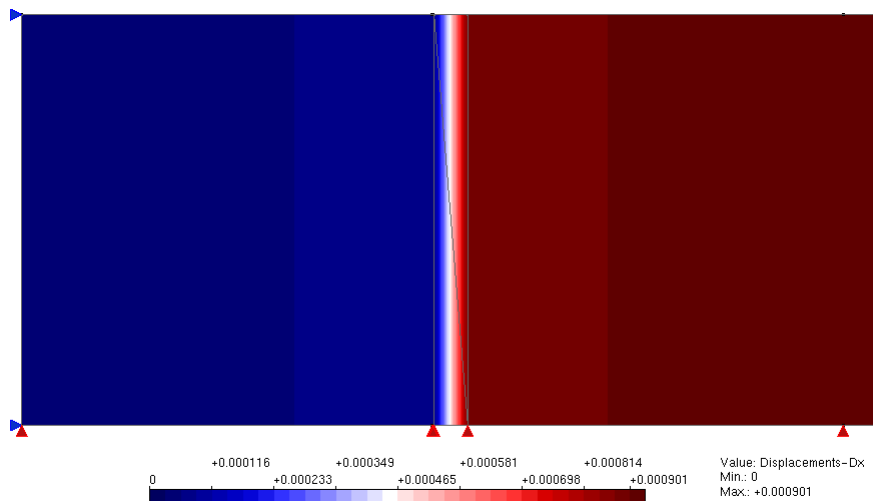
dos elementos de interface ainda são pequenas e da mesma ordem de magnitude das deformações dos outros elementos da malha. Quando a estrutura atinge o pico de tensão, os elementos de interface têm seus estados de deformações intensificados enquanto os demais elementos sofrem descarregamento.



**Figura 5.3:** Deformada nos passos (a) prévio ao limite de tensão, (b) no limite de tensão e (c) posterior ao limite de tensão

Na Figura 5.4, é possível observar a variação da intensidade de deslocamentos que ocorre na interface; nota-se que o elemento de interface concentra os deslocamentos

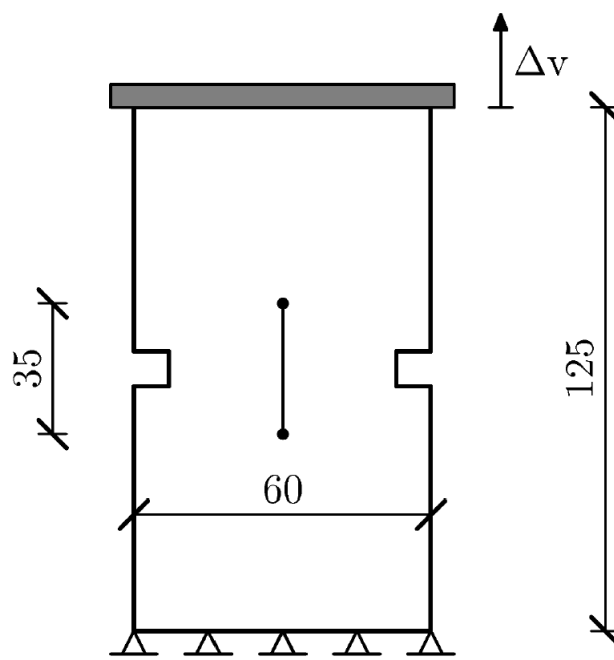
em comparação com os outros elementos da discretização, evidenciando o movimento de corpo rígido da parte da estrutura localizada após a trinca.



**Figura 5.4:** Variação de deslocamentos.

### 5.1.2 Ensaio de Tração Direta com Entalhe Simétrico de Hordijk (1991)

Uma chapa retangular, de espessura  $t = 50 \text{ mm}$ , submetida a um carregamento uniformemente distribuído na parte superior é avaliada. A descrição da geometria e das condições de apoio estão indicadas na Figura 5.5. O ensaio é controlado pelo deslocamento vertical de todos os nós da face superior e a deformação é medida por extensômetros distantes  $35 \text{ mm}$  entre si. A fissura propaga-se ao longo de toda a seção da chapa. No ensaio, Hordijk (1991) adotou um concreto com módulo de elasticidade  $E = 18000 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $f_t = 3,4 \text{ N/mm}^2$  e energia de fratura  $G_f = 0,0593 \text{ N/mm}$ . O carregamento de referência  $q = 1 \text{ N/mm}$  foi aplicado uniformemente sobre a face superior.

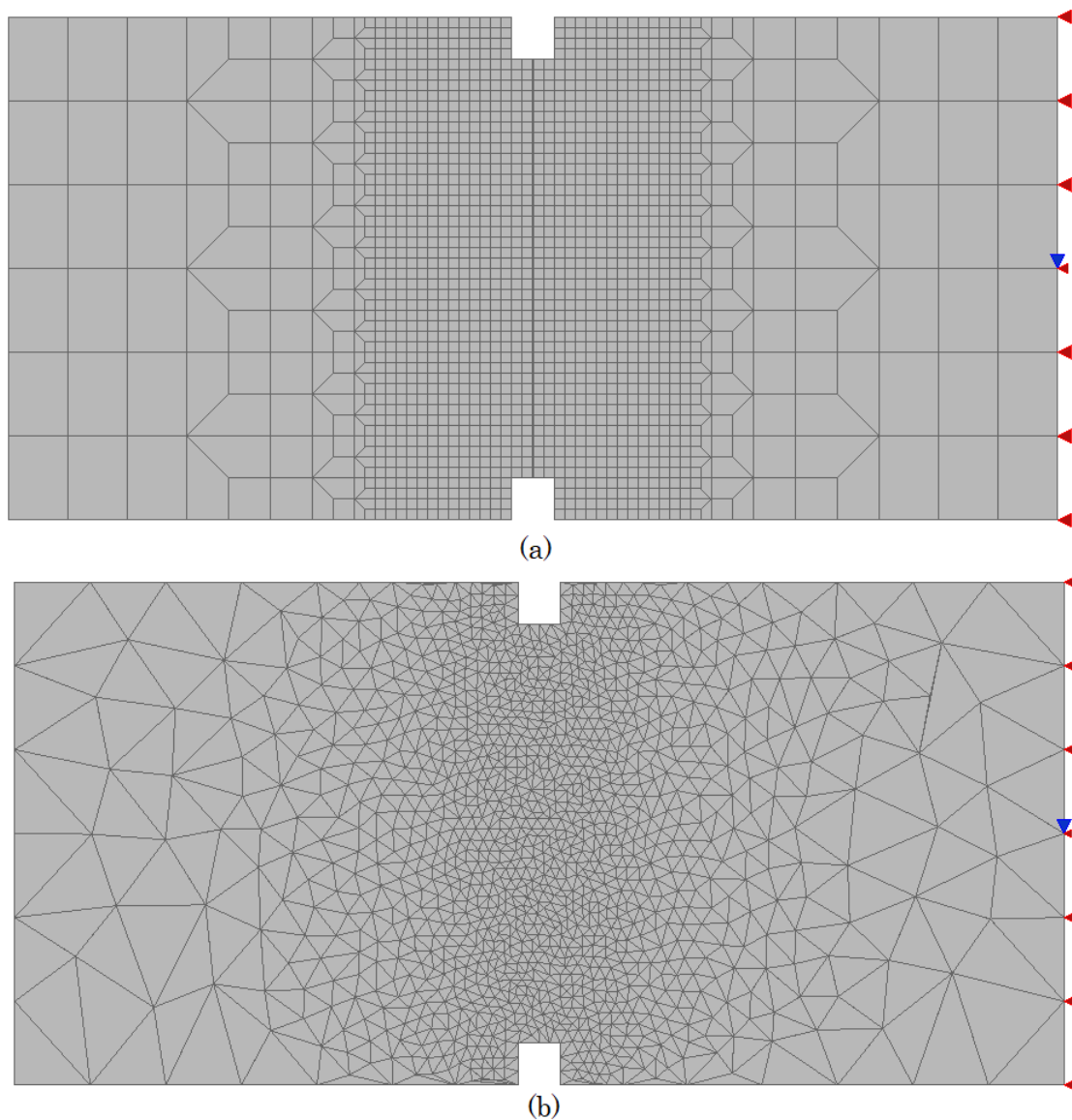


**Figura 5.5:** Geometria (medidas em mm) e condições de apoio (Hordijk, 1991).

O ensaio foi simulado com duas malhas de elementos finitos distintas. Na primeira malha (Figura 5.6(a)), adotaram-se elementos quadrilaterais de 4 nós, preservando uma regularidade da malha na região central. Para a segunda malha (Figura 5.6(b)), adotou-se uma discretização irregular de elementos triangulares de três nós. Em ambas as discretizações, elementos de interface foram introduzidos entre todos os elementos finitos da malha padrão.

Para a solução do processo numérico, utilizou-se o método de controle dos deslocamentos, controlando simultaneamente o deslocamento de todos os nós da face superior da chapa, incrementando o deslocamento em  $1,0 \times 10^{-4}$  ao longo de 260 passos.

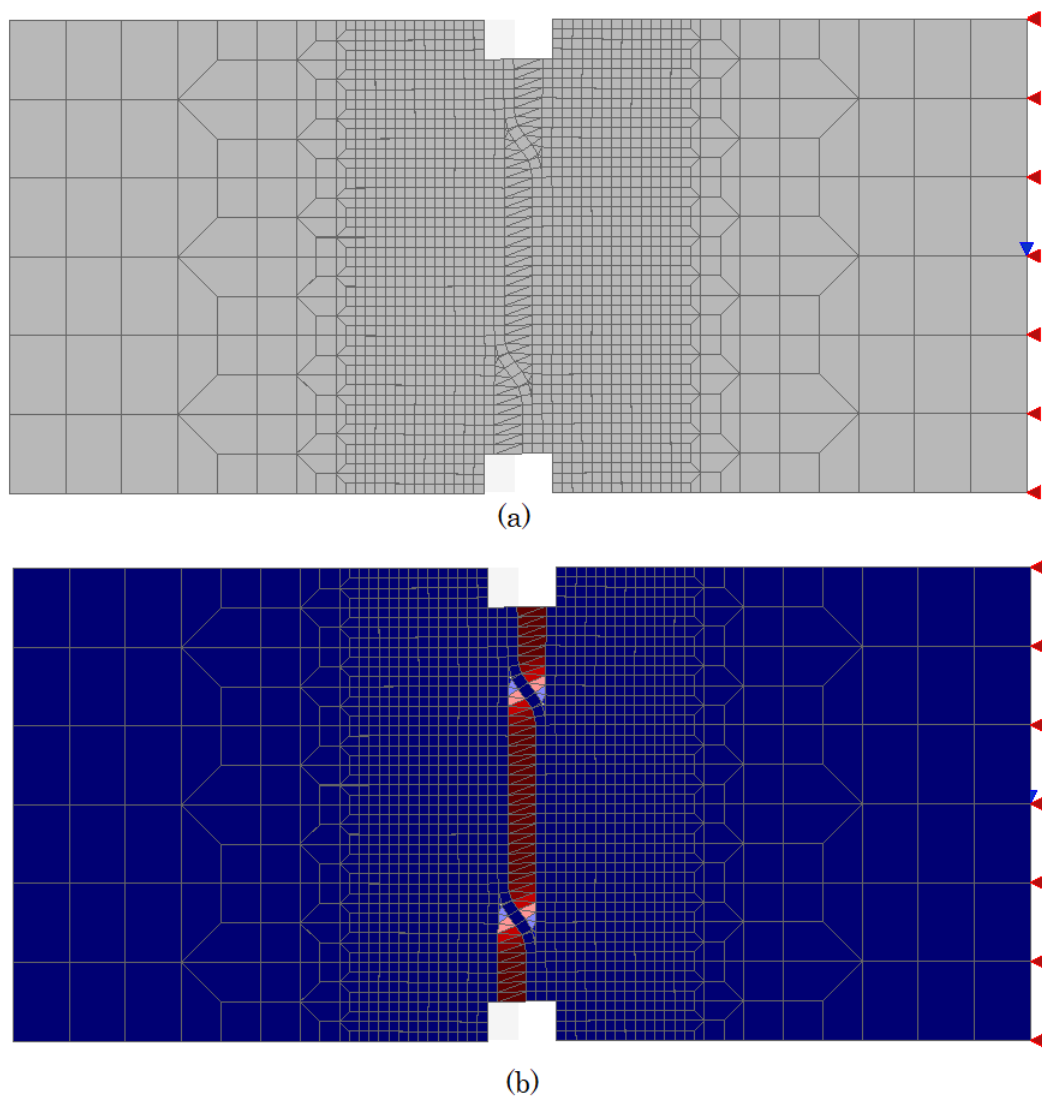
Utilizou-se o modelo de fissuração distribuída e tolerância para convergência de  $1,0 \times 10^{-4}$ .



**Figura 5.6:** Malha de elementos finitos (a) quadrilaterais (b) triangulares

A Figura 5.7(a) apresenta a configuração deformada e a Figura 5.7(b), a variação de deformação para a malha de elementos quadrilaterais.

Na Figura 5.8(a), apresenta-se a configuração deformada e na Figura 5.8(b), a variação de deslocamentos resultantes da análise da malha de elementos triangulares.

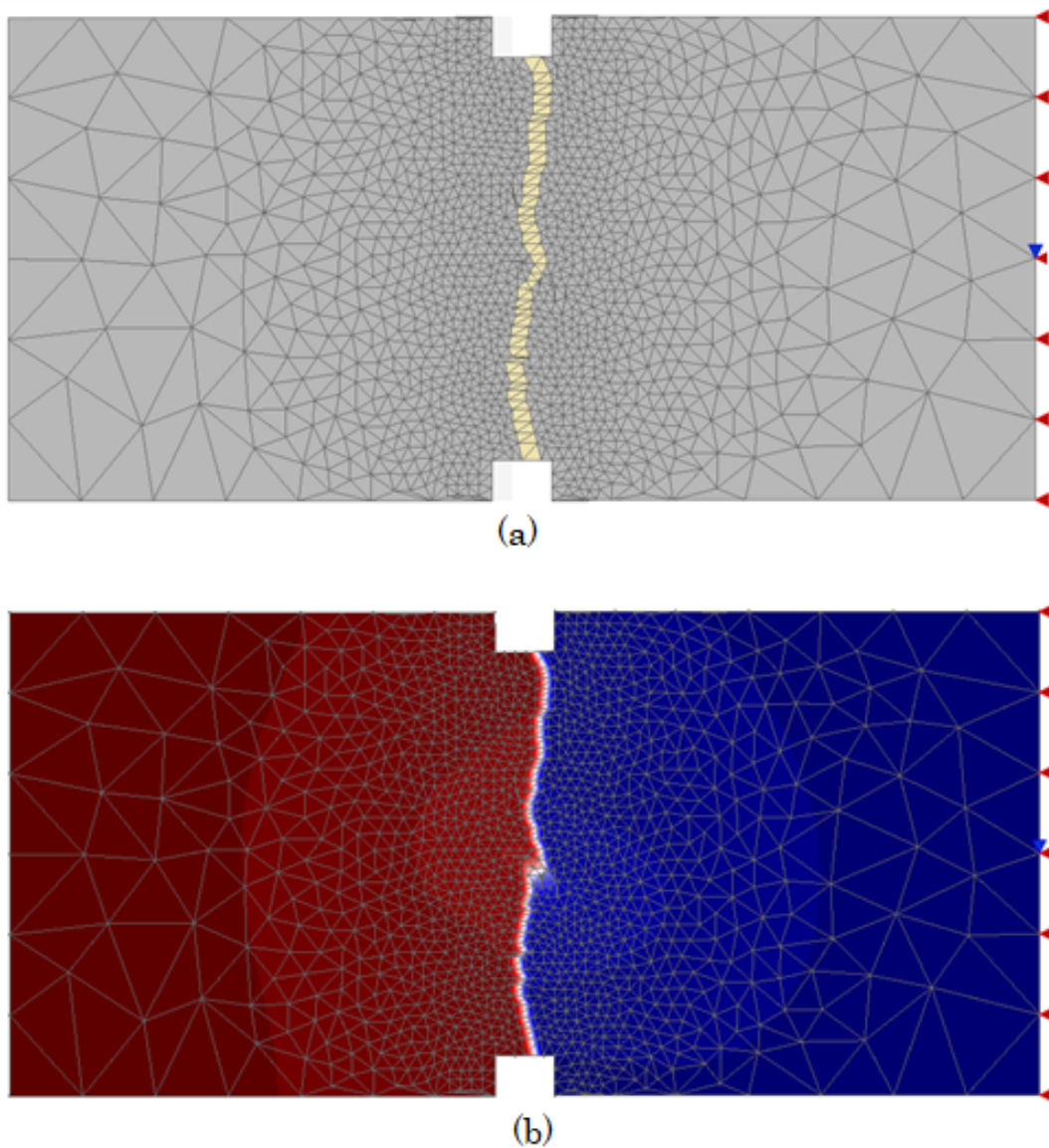


**Figura 5.7:** Malha quadrilateral (a) configuração deformada (b) variação de deformação.

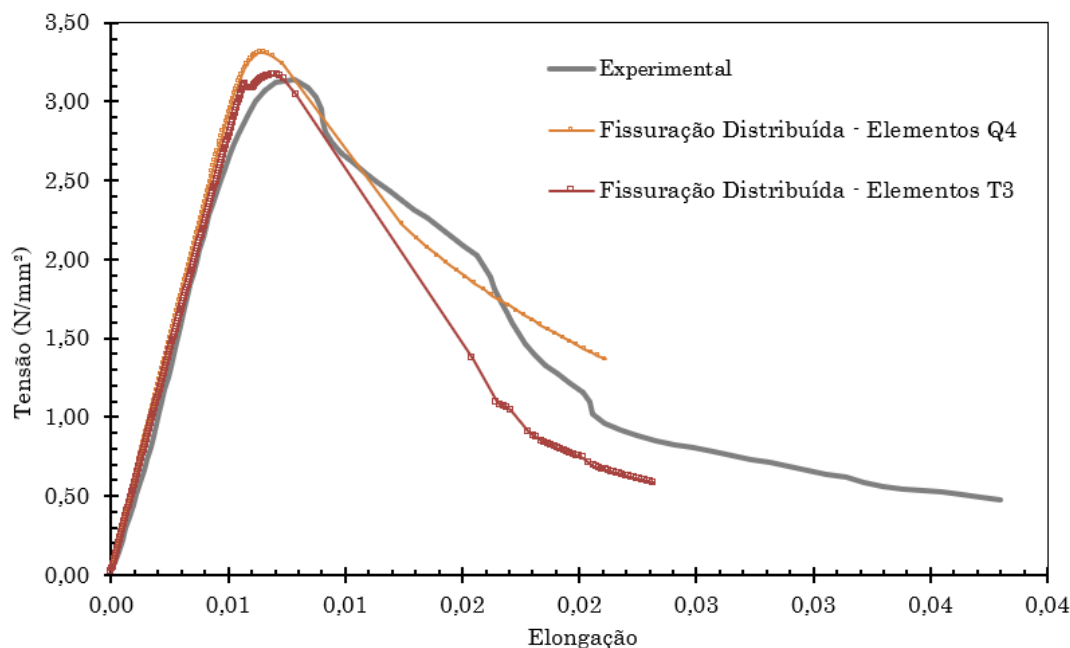
Observa-se que, conforme esperado, a trinca surge no passo em que a chapa se encontra em um estado de tensão igual à sua resistência à tração, atravessando simultaneamente todos os elementos pertencentes à linha de elementos de interface situados na região de localização. Neste ponto, os elementos de interface regem o comportamento da simulação, influenciando diretamente na resposta do modelo.



Na Figura 5.9, apresenta-se a relação tensão-elongação, onde elongação é a medida de deformação em  $y$  calculada entre os pontos distanciados igualmente do centro, como representado na Figura 5.5. Os resultados obtidos com as diferentes discretizações são comparados com os resultados experimentais de Hordijk (1991).



**Figura 5.8:** Malha triangular (a) configuração deformada (b) variação de deslocamentos



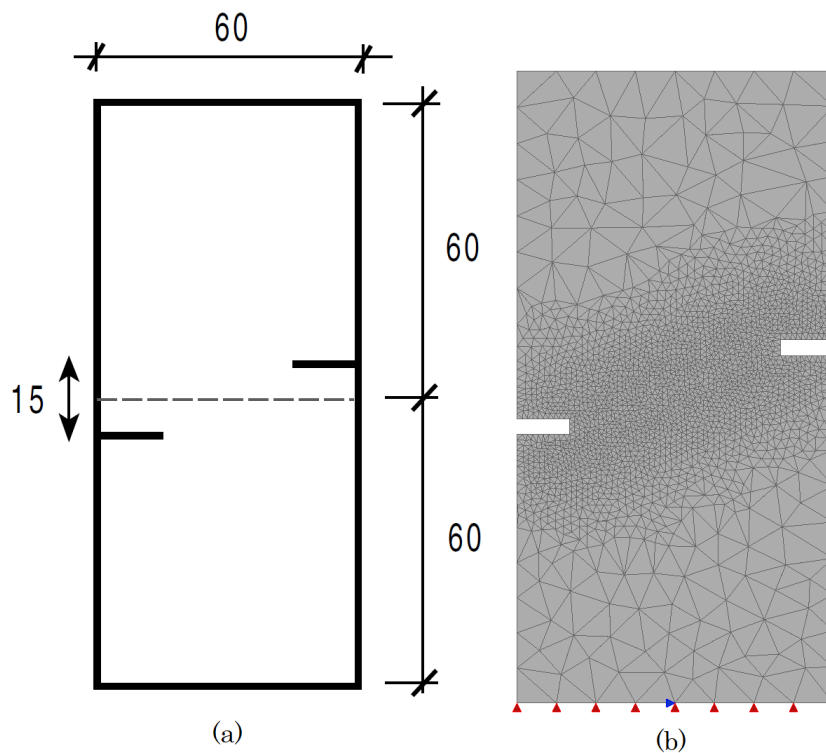
**Figura 5.9:** Comparação das trajetórias de equilíbrio.

Observa-se que, após a tensão limite ser alcançada, há um alongamento abrupto da chapa com conseqüente redução de tensão. Este salto está relacionado com o estado uniforme de tensão que ocorre em condições de tração direta, o mesmo comportamento foi observado no exemplo da seção 5.1.1.

### 5.1.3 Ensaio de Tração com Entalhes Assimétricos de Shi et al. (2005)

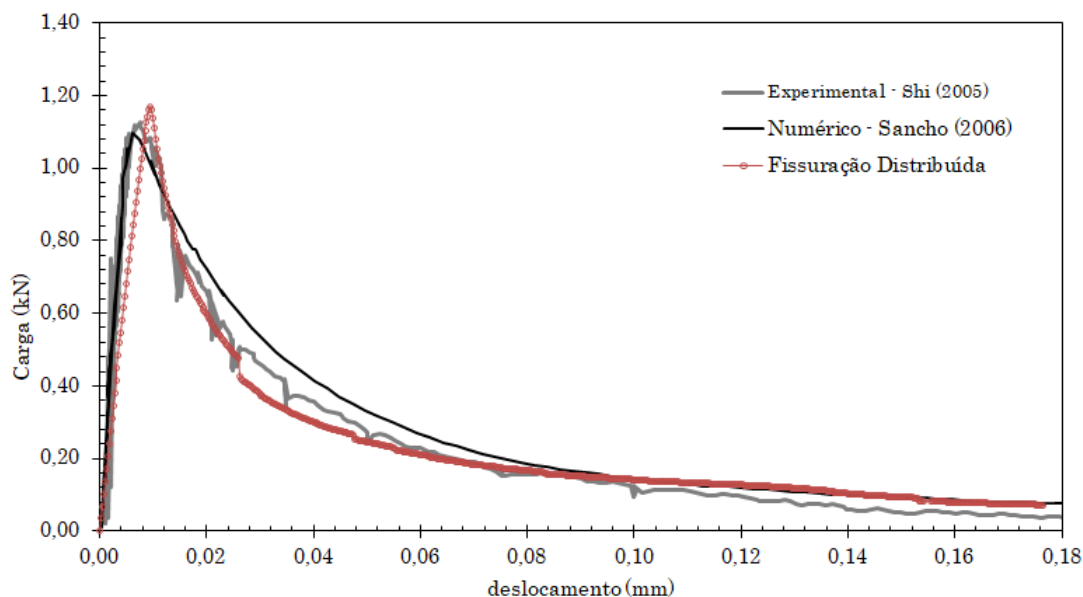
Neste exemplo, tem-se uma chapa retangular de espessura  $t = 10 \text{ mm}$ , submetida a um carregamento uniformemente distribuído na face superior, e com entalhes assimétricos de abertura igual a  $3 \text{ mm}$  espaçados verticalmente de  $15 \text{ mm}$ . A chapa é solicitada por uma carga  $q = 1,0 \text{ N/mm}$  distribuída uniformemente na face superior. As informações da geometria, da malha e das condições de apoio estão indicadas na Figura 5.10. O ensaio é também controlado pelo deslocamento vertical de todos os pontos da face superior, conforme apresentado por Shi et al. (2005).

Para o material adotou-se módulo de elasticidade  $E = 31000 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $f_t = 3,0 \text{ N/mm}^2$  e energia de fratura  $G_f = 0,050 \text{ N/mm}$ .



**Figura 5.10:** (a) configuração geométrica (medidas em mm) (Sancho et al., 2006) (b) malha e condições de apoio.

Na modelagem foram usados elementos de interface de espessura  $h = 0,001 \text{ mm}$ , e adotou-se o modelo de fissuração distribuída. O processamento foi conduzido com o método de controle de deslocamentos, foram adotados incrementos de  $0,00025 \text{ mm}$  em 700 passos e tolerância para convergência de  $1,0 \times 10^{-4}$ . A trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical da face superior da chapa é apresentada na Figura 5.11. Também é apresentada a trajetória obtida por Shi et al. (2005) em seus experimentos e o resultado numérico obtido por Sancho et al. (2006).



**Figura 5.11:** Trajetórias de equilíbrio.

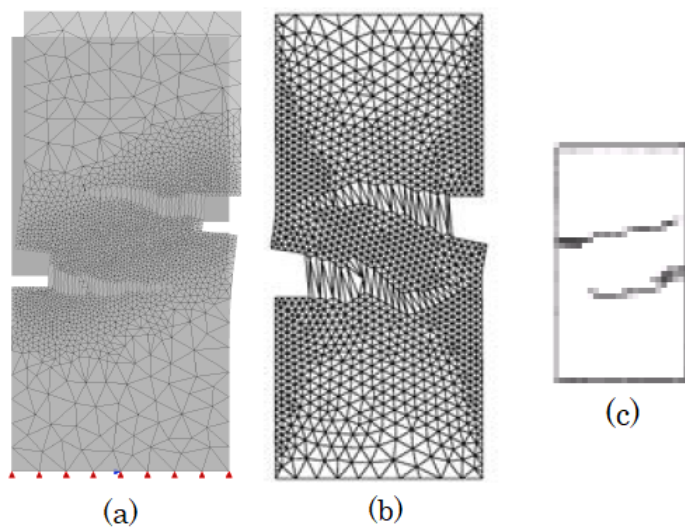
Observa-se que a trajetória obtida com o modelo de elementos de interface retrata com boa aproximação os resultados experimentais.

Na Figura 5.12(a), apresenta-se a chapa deformada ao final da análise com o modelo de elementos finitos de interface, em 5.12(b) e (c) a deformada obtida por Sancho et al. (2006) numericamente, em seus estudos com um modelo de trinca embutida, e a trajetória da trinca obtida experimentalmente por Shi et al. (2005), respectivamente.

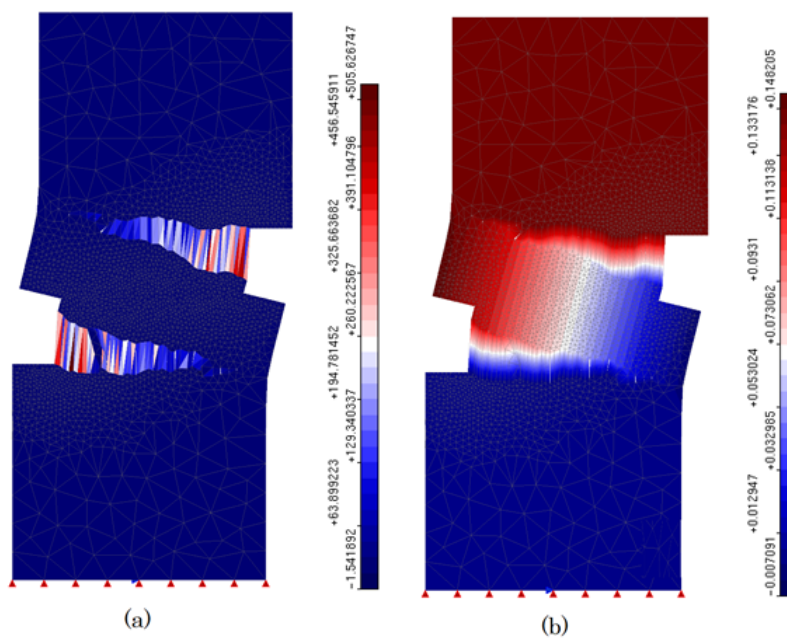
Nas Figuras 5.13(a) e (b), pode-se observar também a variação de deformações e deslocamentos nos elementos de interface, respectivamente.

Observa-se que a configuração geométrica dos entalhes da chapa promoveu um estado não uniforme de tensões, fazendo com que a abertura da trinca ocorresse de forma gradual, possibilitando a obtenção de uma trajetória de equilíbrio mais estável. Observa-se também que, tanto a trajetória de equilíbrio, como a configuração deformada da chapa, se assemelham aos resultados encontrados na literatura. Vale ressaltar ainda que, na Figura 5.13(a), ilustra-se a localização de deformações – característica do elemento de interface, enquanto a Figura 5.13(b) ilustra, a partir do

campo de deslocamentos, o movimento de corpo rígido que acontece em decorrência da abertura da trinca.



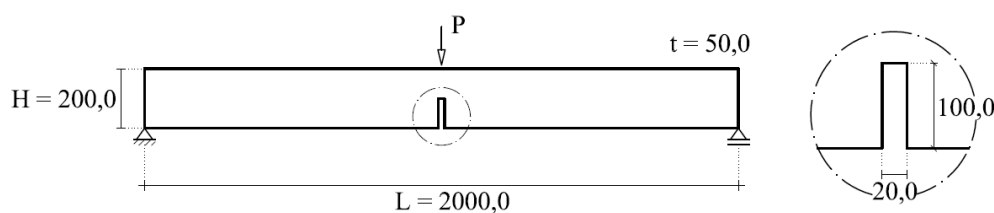
**Figura 5.12:** Configuração deformada (a) numérico - elementos de interface, (b) numérico - por Sancho et al. (2006), (c) experimental - por Shi et al. (2005).



**Figura 5.13:** (a) variação de deformações e (b) variação de deslocamentos

## 5.2 Flexão em Três Pontos de Petersson (1981)

A viga sob flexão em 3 pontos, cuja configuração é apresentada na Figura 5.14, é avaliada nesta seção. Petersson (1981) estudou experimentalmente esta viga e obteve parâmetros para a resistência à tração ( $f_t$ ) com valores entre  $2,5 N/mm^2$  a  $3,9 N/mm^2$ , e de energia de fratura ( $G_f$ ) de  $115 N/m$  a  $137 N/m$ .



**Figura 5.14:** Geometria (medidas em mm) e condições de apoio (Penna, 2011).

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo de dano isotrópico padrão de de Borst e Gutiérrez (1999), com medida de deformação de Mazars (1984), cujos parâmetros da função de dano são listados na Tabela 5.1. Tais parâmetros foram obtidos a partir do ajuste da curva baseada nos parâmetros materiais do experimento de Petersson (1981).

**Tabela 5.1:** Parâmetros da lei de Dano.

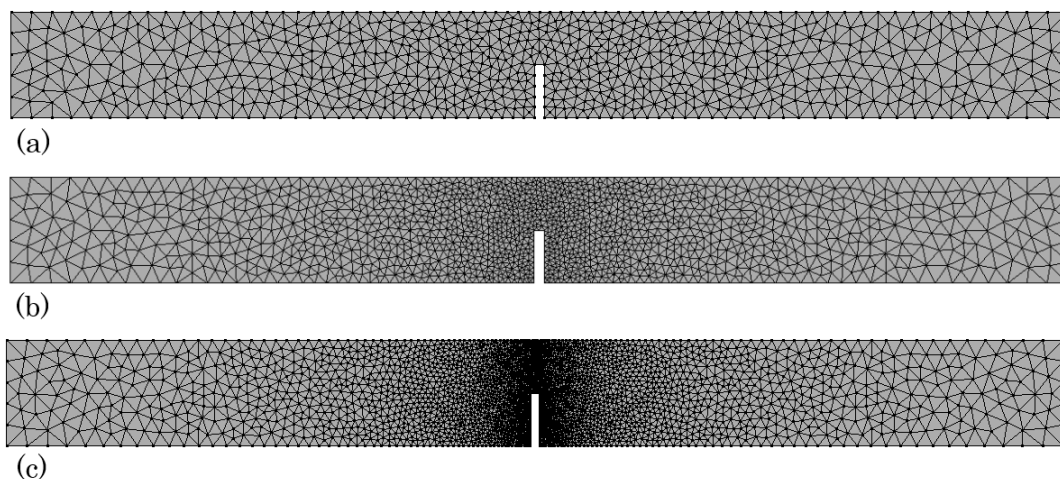
Parâmetros da função de dano exponencial (Equação 2.47)	
$\alpha$	0,90
$\beta$	20,0
$\kappa_0$	0,0001015

Para que o modelo seja compatível a uma abertura de trinca discreta, deve-se ajustar o valor do parâmetro  $\beta$ , multiplicando-o pela dimensão  $h = 0,001 mm$  do elemento de interface, portanto  $\beta' = 0,02$ , e no modelo de fissuração distribuída,

a partir da reinterpretação de  $h$ , o comprimento característico  $l_c$  é tomado como a própria espessura do elemento de interface, segundo a reinterpretação discutida na seção 3.3, portanto  $l_c = 0,001 \text{ mm}$

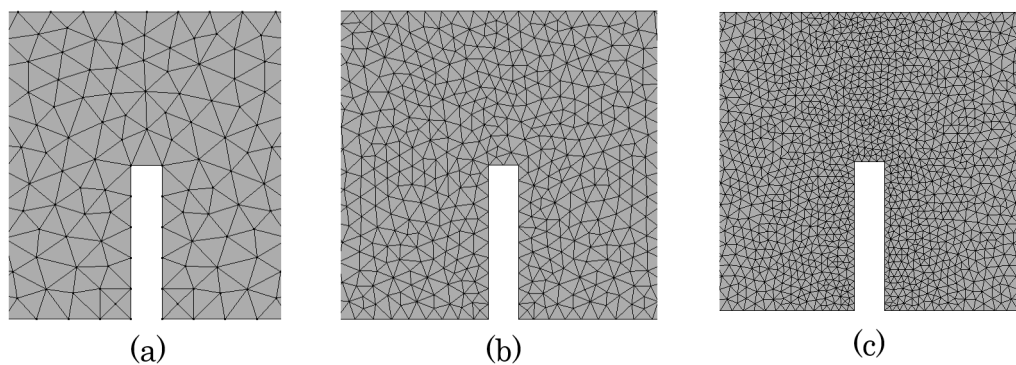
Adotou-se módulo de elasticidade  $E = 30000,0 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ . A viga foi modelada com elementos triangulares de três nós em estado plano de tensão.

A resposta estrutural da viga é obtida para três discretizações diferentes, mostradas na Figura 5.15. A ordem de refinamento aumenta no sentido de (a) para (c), em que (a) é a malha menos refinada e (c) a mais refinada. Na Figura 5.16 é possível avaliar com mais detalhe o refinamento na região da trinca.



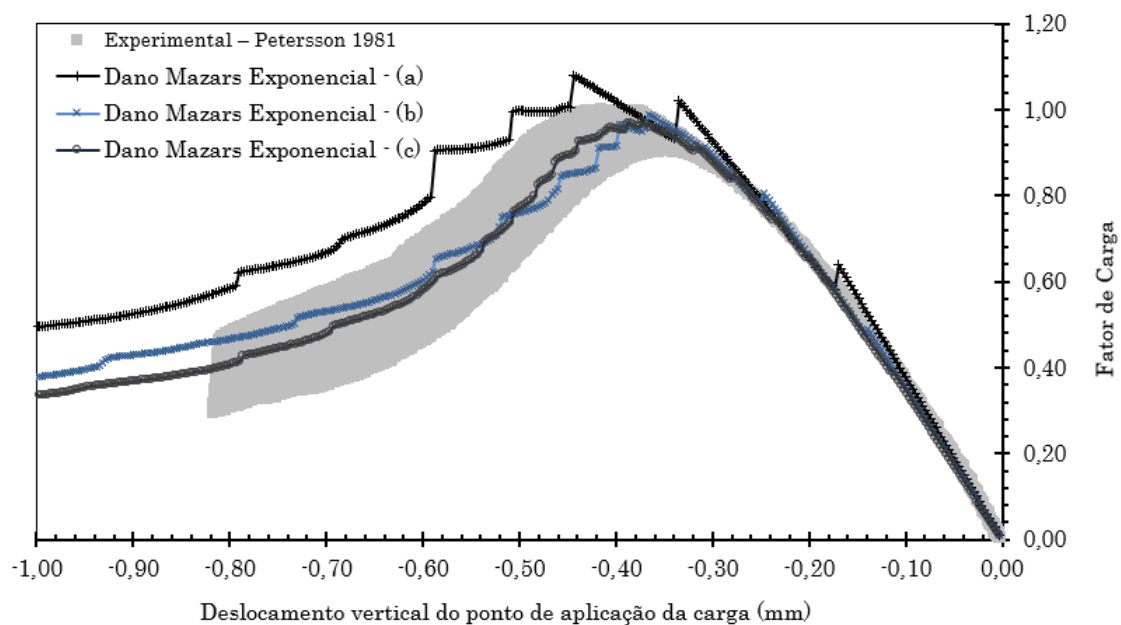
**Figura 5.15:** Malha de elementos finitos.

Para solução do modelo, empregou-se método de controle de deslocamentos generalizados, com fator de carga de  $0,02$ , ao longo de  $400$  passos, tolerância para convergência de  $1,0 \times 10^{-4}$ , e carga de referência  $P = 800,0 \text{ N}$ .



**Figura 5.16:** Detalhe do refinamento da malha na região da trinca.

As trajetórias de equilíbrio das três malhas, para o deslocamento vertical no ponto de aplicação do carregamento, são apresentadas no gráfico da Figura 5.17, juntamente com os resultados experimentais obtidos por Petersson (1981).



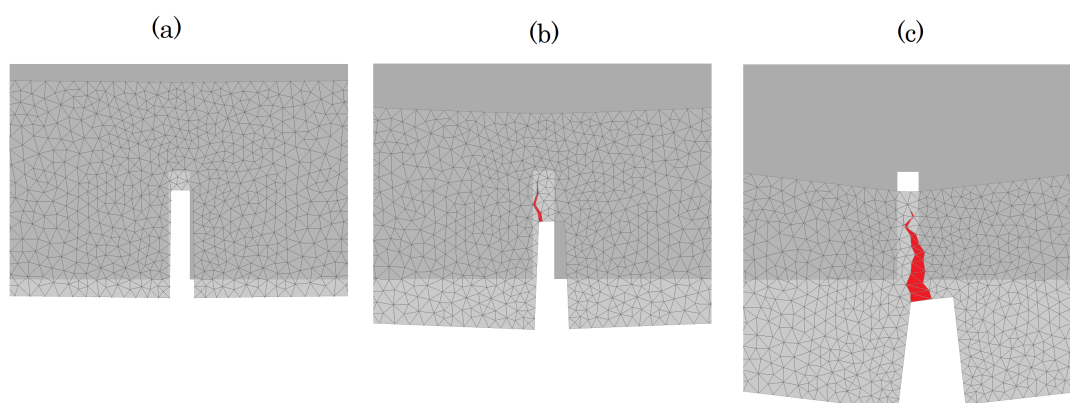
**Figura 5.17:** Trajetórias de equilíbrio - influência da malha.

Na Figura 5.17, observam-se descontinuidades na trajetória de equilíbrio. Isso ocorre devido aos saltos no campo de deslocamentos, e estes são mais significativos em malhas menos refinadas, isto mostra que os resultados são dependentes da malha.

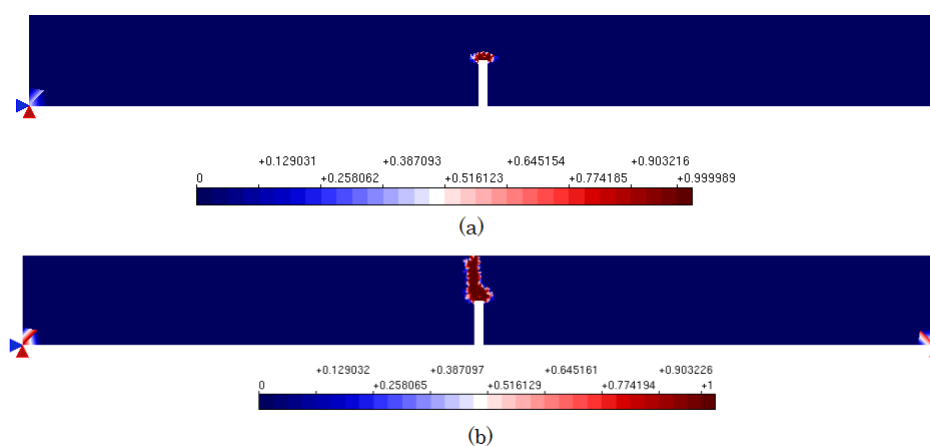


Os saltos são reduzidos à medida em que se aumenta o refinamento da malha. Malhas pouco refinadas podem provocar uma fragilidade abrupta ao sistema estrutural. Verifica-se boa concordância entre os resultados do modelo de dano e os resultados experimentais, tanto na estimativa da carga máxima, como na descrição do regime pós crítico.

A partir da Figura 5.18, é possível observar a trajetória da trinca ao longo do processo de solitação, para a malha (b) da Figura 5.15. Na Figura 5.19, é apresentado o padrão de dano ao longo do processo de carregamento.



**Figura 5.18:** Configuração deformada (a) passo 60, (b) passo 200, (c) passo 400.

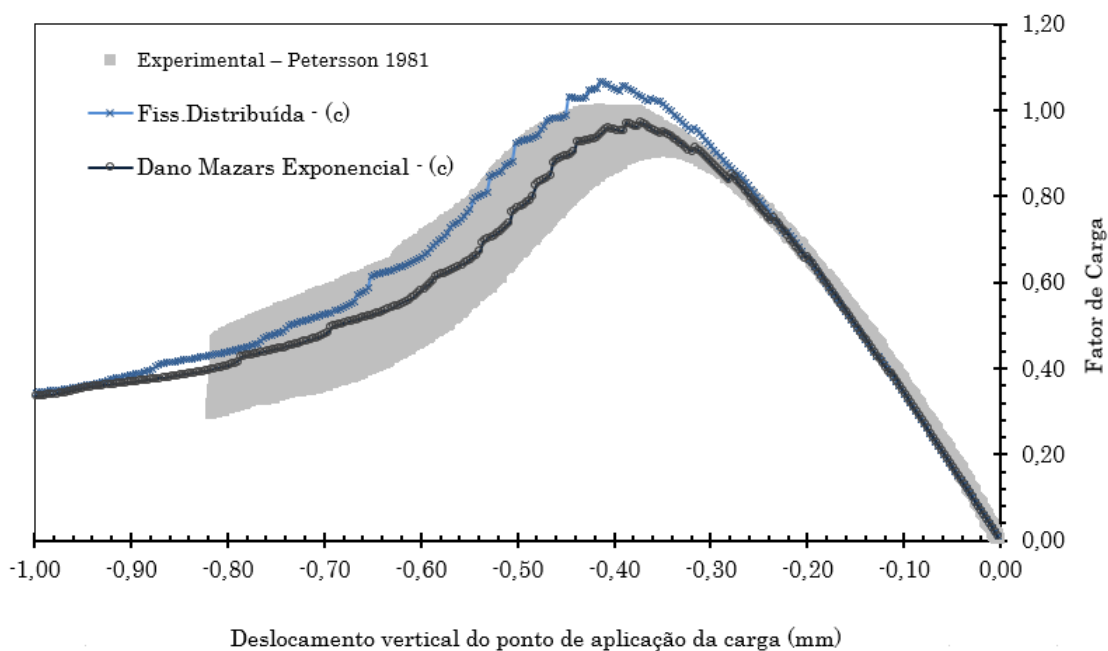


**Figura 5.19:** Padrão de dano (a) passo 60, (b) passo 400.

Verifica-se que o comportamento do modelo de análise é semelhante ao comportamento evidenciado experimentalmente.

Para a malha (c) da Figura 5.15, realizou-se também a análise com o modelo de fissuração distribuída com lei de Carreira e Chu (1985) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para a tração.

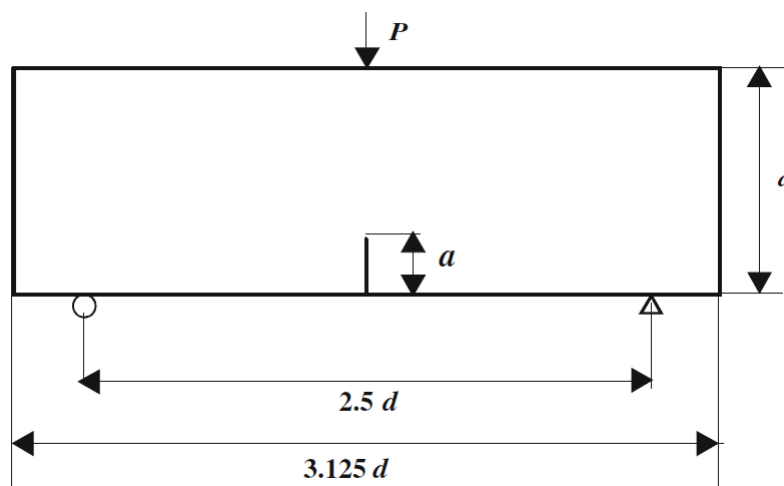
A partir da Figura 5.20, observa-se que o modelo de fissuração distribuída, por possibilitar degradação em qualquer direção, se mostra mais instável, e mais dependente do tamanho dos elementos da malha, enquanto que com o modelo de dano isotrópico, por considerar degradação apenas em tração, foi possível obter uma trajetória mais suave. No entanto, os dois modelos apresentam trajetórias que se aproximam daquelas obtidas experimentalmente.



**Figura 5.20:** Trajetórias de equilíbrio para a malha (c) com modelo de dano isotrópico e fissuração distribuída.

### 5.3 Efeito de Tamanho na Flexão em Três Pontos de García-Álvarez et al. (2012)

Neste exemplo, o efeito de tamanho em vigas submetidas à flexão em três pontos é modelado. A simulação é baseada nos estudos experimentais apresentados por García-Álvarez et al. (2012). Assim, no modelo experimental de flexão em três pontos, ensaiado por García-Álvarez et al. (2012), o tamanho da viga é alterado sendo mantida constante a relação vão/altura. A Figura 5.21 ilustra a geometria da viga, sendo  $d = 80, 160$  e  $320 \text{ mm}$  e espessura  $t = 50 \text{ mm}$ . As vigas com diferentes tamanhos foram modeladas com elementos triangulares de três nós e o tamanho da trinca inicial é  $a = \frac{d}{4}$ .



**Figura 5.21:** Configuração geométrica.

Na simulação foram adotados os modelos de fissuração distribuída e o modelo de dano isotrópico padrão. Para o modelo de fissuração distribuída, foram adotadas as leis de Carreira e Chu (1985) para compressão e Boone e Ingraffea (1987) para a tração, com parâmetros do material dados por:  $E_0 = 33800,0 \text{ N/mm}^2$ ;  $\nu = 0,2$ ;  $f_c = 35,0 \text{ N/mm}^2$ ;  $f_t = 3,5 \text{ N/mm}^2$ ;  $\epsilon_c = 0,002$ ;  $\beta_r = 0,0$ ; e energia de fratura  $G_f = 0,070 \text{ N/mm}$ .

Os parâmetros utilizados pelo modelo constitutivo de dano isotrópico de de Borst e Gutiérrez (1999) foram obtidos através de modelagens numéricas, e são apresentados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2:** Parâmetros da lei de dano.

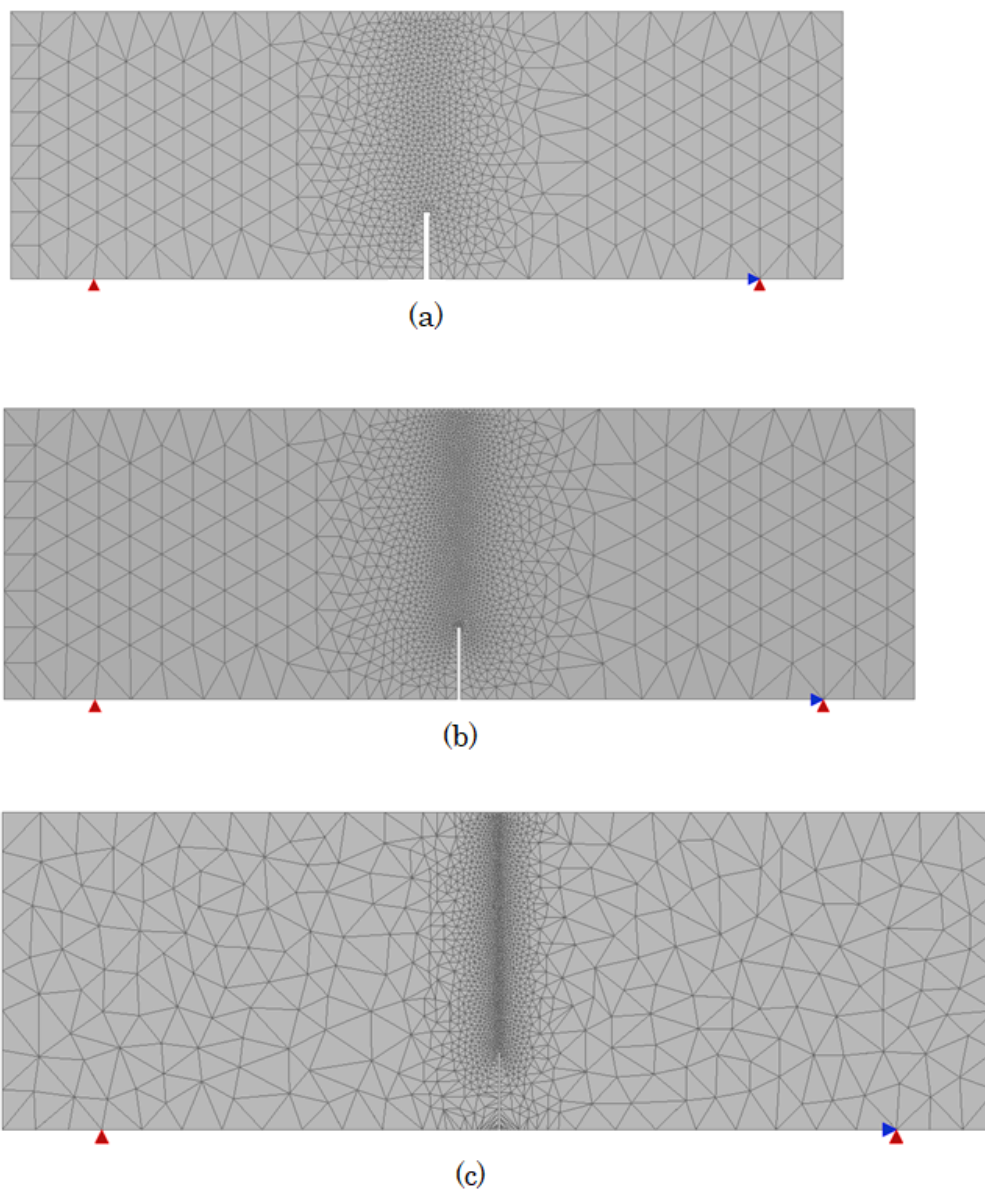
Parâmetros da função de dano exponencial (equação 2.47)	
$\alpha$	0,90
$\beta$	77
$\kappa_0$	0,00017

Para que o modelo seja compatível a uma abertura de trinca discreta, no modelo de dano isotrópico padrão deve-se ajustar o valor do parâmetro  $\beta$ , multiplicando-o pela dimensão  $h = 0,001 \text{ mm}$  do elemento de interface, portanto  $\beta' = 0,077$ , e no modelo de fissuração distribuída, o comprimento característico  $l_c$  é tomado como a dimensão do elemento de interface, portanto  $l_c = 0,001 \text{ mm}$

Na análise não linear foi adotado método de controle de deslocamentos, com incremento do deslocamento vertical do nó na extremidade da trinca em 0,001, tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-4}$  e carga de referência  $P = 1,0N$ .

Para os diferentes tamanhos foram utilizadas malhas distintas, baseadas em triangulação randômica, exibidas na Figura 5.22 fora da escala, preservando o tamanho médio dos elementos, para que seja possível avaliar melhor a composição das mesmas.

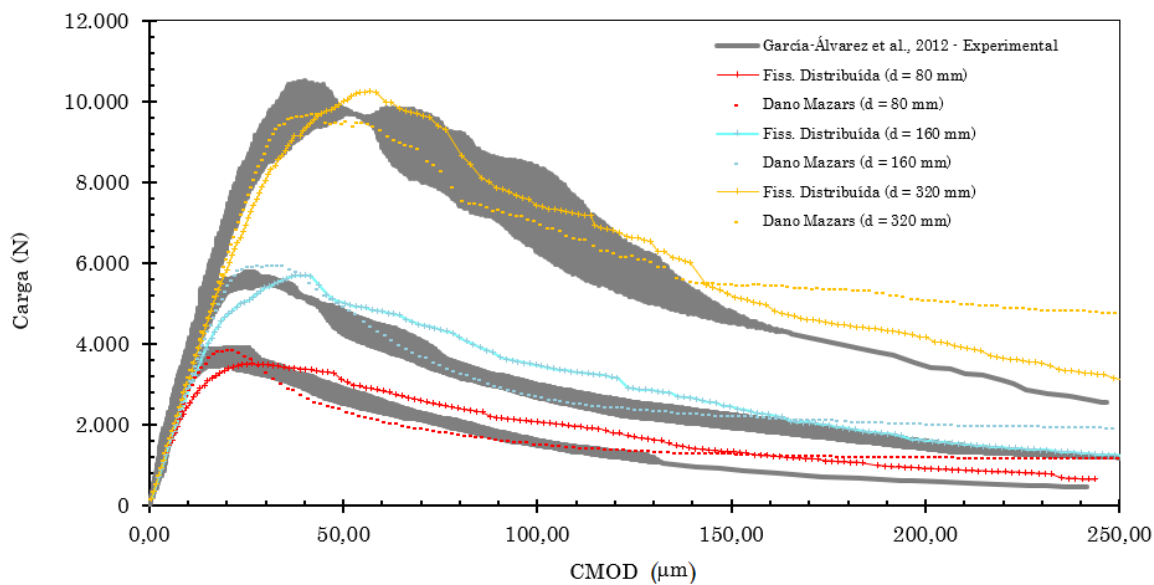
As trajetórias de equilíbrio referentes à abertura da trinca (CMOD), para as três vigas, são mostradas na Figura 5.23.



**Figura 5.22:** Discretizações (a)  $d = 80$  mm, (b)  $d = 160$  mm, (c)  $d = 320$  mm.

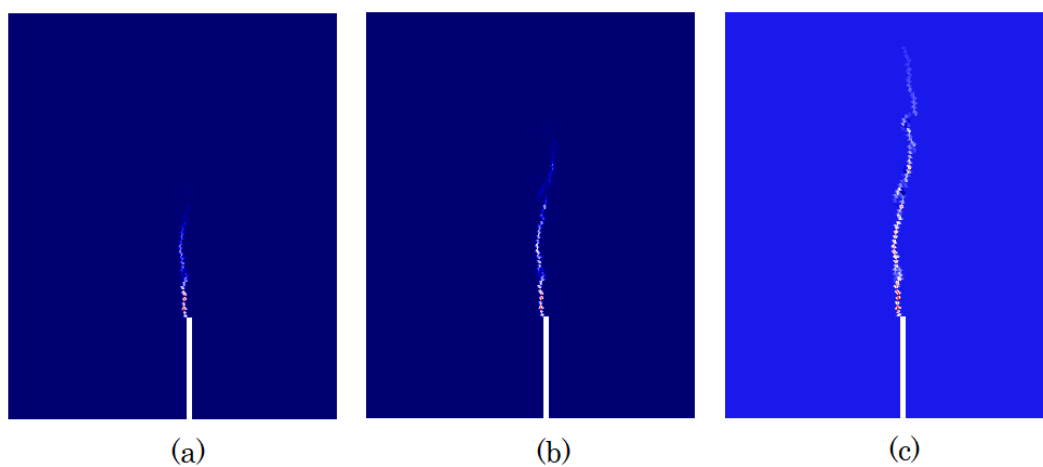
Observa-se que quanto maior a viga, mais frágil é o comportamento da estrutura, ou seja, mais acentuada é a inclinação do ramo descendente da trajetória, que é, sabidamente, uma consequência direta do efeito de escala. Nota-se ainda que o modelo de elementos de interface foi capaz de reproduzir o comportamento aproximado da estrutura para os três casos simulados, quando comparado com os resultados do

experimento de García-Álvarez et al. (2012). Por fim, destaca-se que o modelo de dano se mostrou mais estável do que o modelo de fissuração distribuída.



**Figura 5.23:** Trajetórias de Equilíbrio.

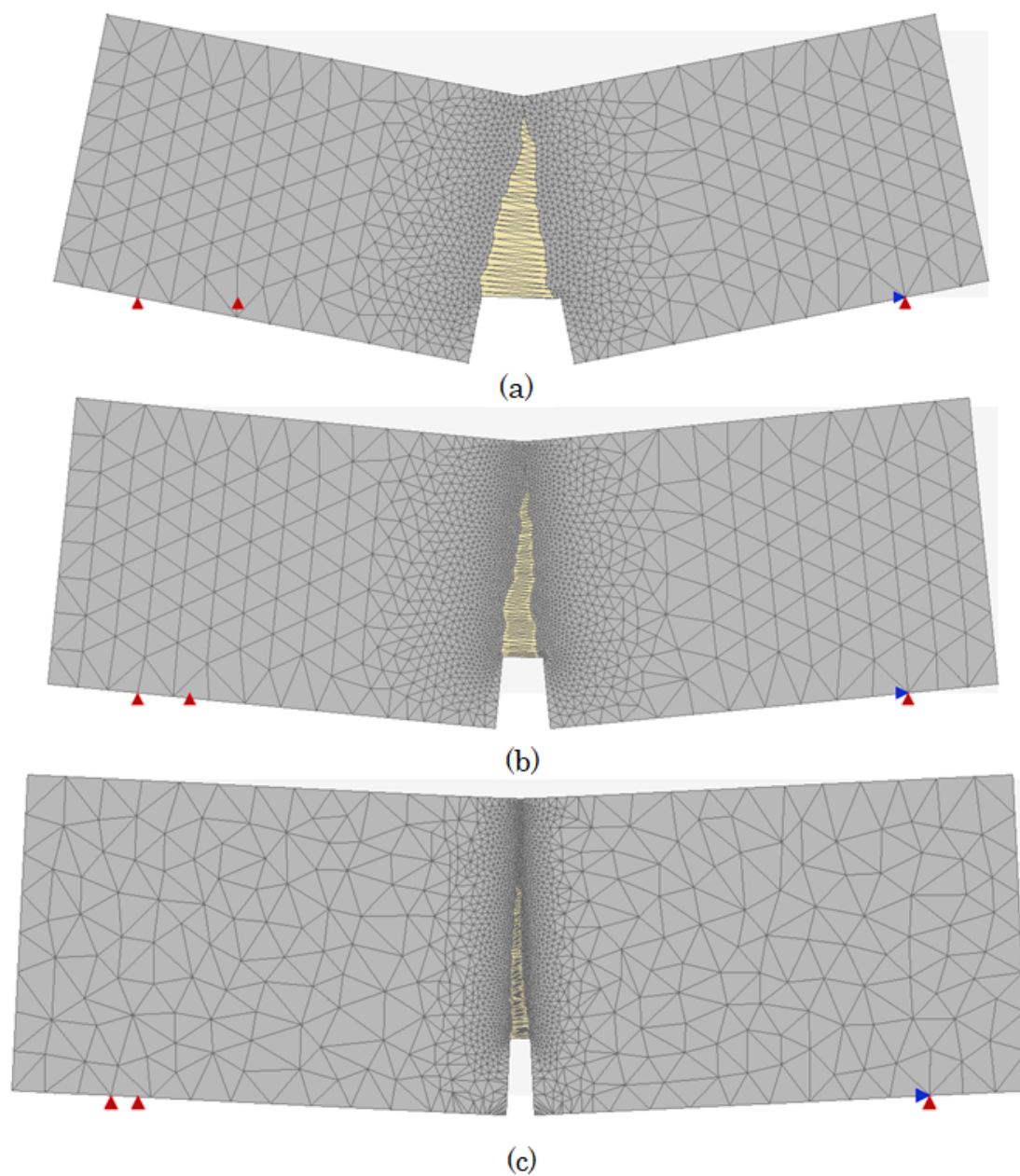
A Figura 5.24 exibe, em detalhe, a evolução das deformações  $\epsilon_{xx}$  na ponta da trinca para a viga de tamanho  $d = 160\text{mm}$ , com o modelo de fissuração distribuída, nos passos 30, 70 e 100, respectivamente (a), (b) e (c), evidenciando a trajetória da trinca.



**Figura 5.24:** Evolução das deformações com (a) 30 passos, (b) 70 passos, (c) 100 passos.

A Figura 5.25 exibe a configuração deformada para os três tamanhos de viga, com o modelo de dano isotrópico, ao final da análise.

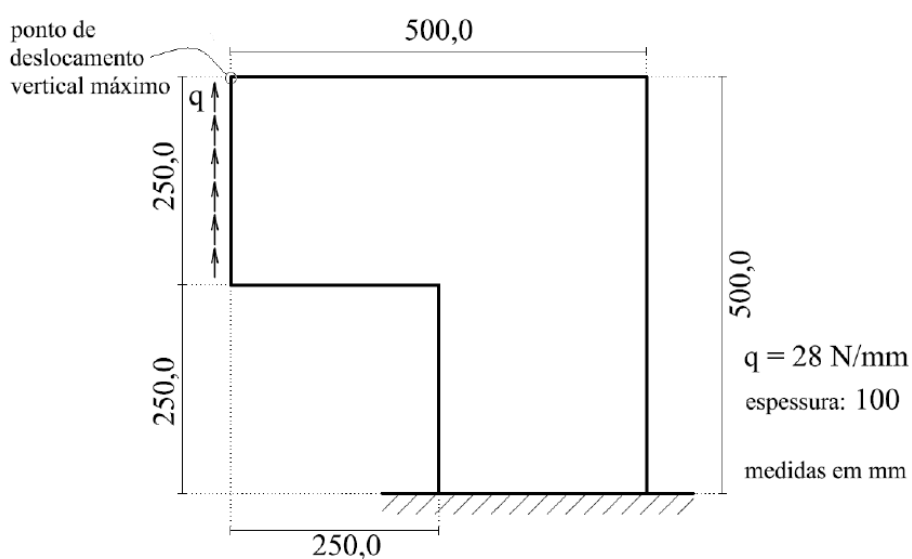
É possível observar que o comportamento da viga de maior tamanho exibe uma fragilidade mais acentuada que os demais tamanhos, como observado nos ramos descendentes dos gráficos da Figura 5.23, destacando-se a propagação da trinca ao longo da altura, representada pela abertura gradual dos elementos de interface.



**Figura 5.25:** Configuração deformada (a)  $d = 80 \text{ mm}$ , (b)  $d = 160 \text{ mm}$ , (c)  $d = 320 \text{ mm}$

## 5.4 Painel em L de Winkler et al. (2004)

O painel em “L”, cuja configuração é apresentada na Figura 5.26, foi experimentalmente estudado por Winkler et al. (2004), no qual o autor obteve os seguintes valores para as propriedades do concreto:  $E_0 = 25850,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_t = 2,7 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_c = 31,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_f = 0,065 \text{ N/mm}$  e assumiu-se  $\nu = 0,18$ . O painel foi aqui modelado utilizando-se elementos triangulares de três nós em estado plano de tensão.



**Figura 5.26:** Painel em “L” de Winkler et al. (2004).

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo de dano isotrópico padrão de de Borst e Gutiérrez (1999), com lei de dano exponencial, cujos parâmetros, obtidos através de modelagens numéricas, são apresentados na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3:** Parâmetros da lei de dano.

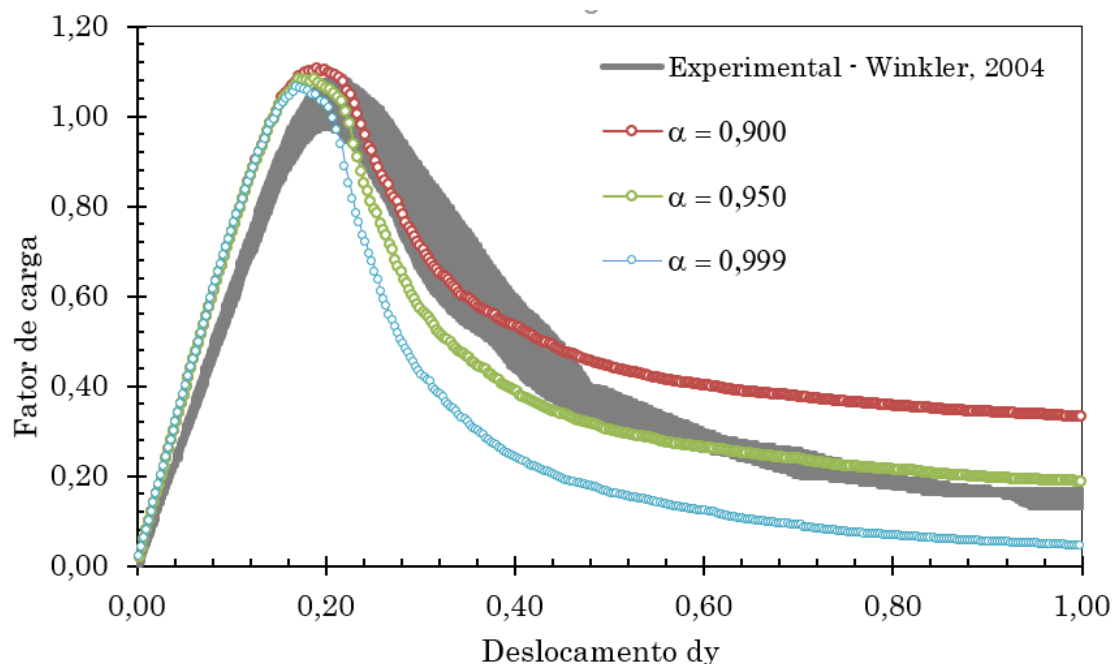
Parâmetros da função de dano exponencial (equação 2.47)	
$\alpha$	0,90 a 0,990
$\beta$	20
$\kappa_0$	0,000115



Vale ressaltar que, de acordo com a consideração feita no capítulo 3, o valor de  $\beta$  deve ser multiplicado pela espessura do elemento de interface  $h = 0,001 \text{ mm}$  para corresponder à equivalência energética do modelo contínuo, sendo assim  $\beta = 0,001 \times 20 = 0,02$ .

No processo incremental-iterativo, adotou-se controle de deslocamentos generalizados, com um incremento inicial do fator de carga de 0,02, tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-4}$  e carga de referência  $q = 28,0 \text{ N/mm}$ .

Na Figura 5.27, estão apresentadas as trajetórias de equilíbrio do ponto de deslocamento vertical máximo, destacado na Figura 5.26. Os resultados foram obtidos a partir da modelagem com elementos de interface com  $h = 0,001 \text{ mm}$ , para diferentes valores de  $\alpha$ . Apresenta-se também o resultado experimental obtido por Winkler et al. (2004).

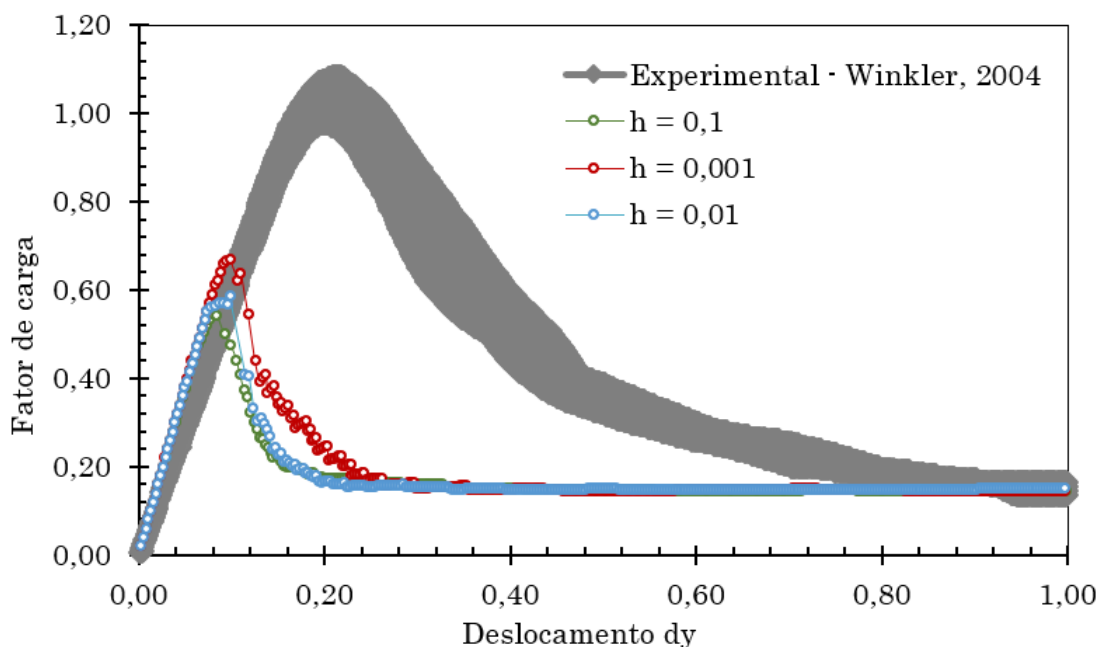


**Figura 5.27:** Trajetórias de equilíbrio obtidas com o modelo de dano de Mazars (1984).

A partir da análise dos resultados da Figura 5.27, observou-se que o parâmetro  $\alpha = 0,95$  foi o mais representativo para o ensaio, sendo este valor adotado nas demais modelagens. Tal parâmetro representa o máximo de dano que pode ocorrer no

material, provocando uma limitação de tensões e sendo responsável pela estabilização da trajetória de equilíbrio.

Para aferir a influência do parâmetro  $\beta$  e a necessidade de equivalência energética, o painel “L” foi processado novamente considerando diferentes valores de  $h$  e sem o ajuste adequado da curva de dano. Assim, tem-se na Figura 5.28 as trajetórias de equilíbrio obtidas para  $h$  de 0,1, 0,01 e 0,001 mm e  $\beta = 20,0$ . Observa-se que as trajetórias, além de irregulares, não representam adequadamente os resultados experimentais. Tais irregularidades são em decorrência de uma energia de fratura atribuída ao modelo, via parâmetro  $\beta$ , que não condiz com a do material.



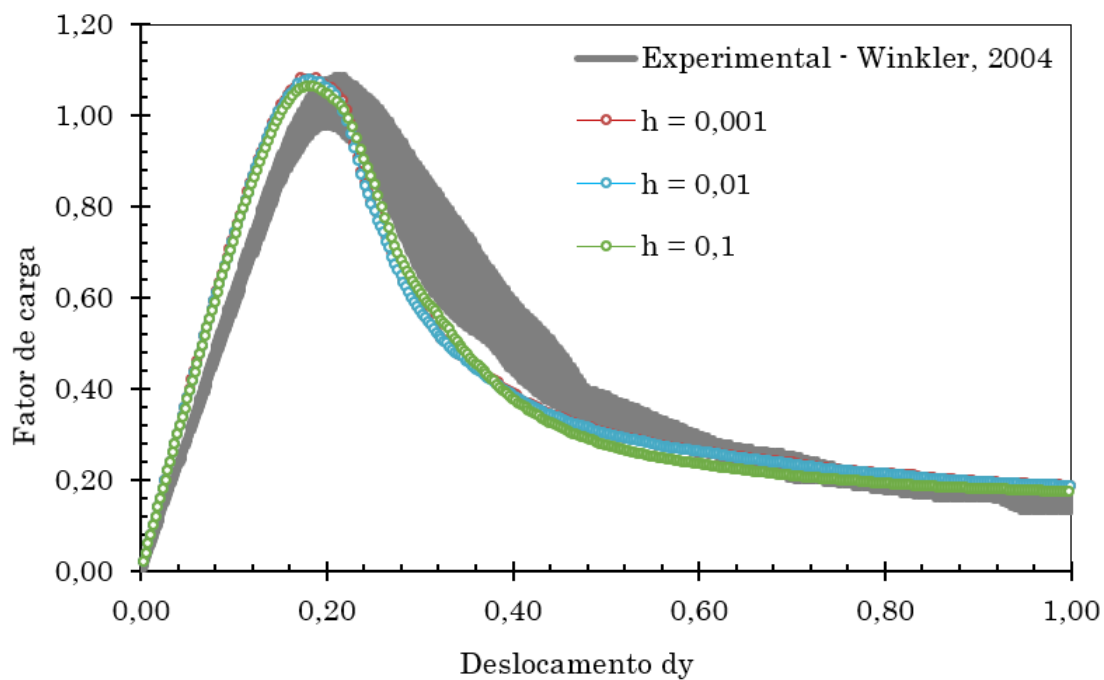
**Figura 5.28:** Trajetórias de equilíbrio com  $\beta = 20$  - influência de  $h$ .

A equivalência energética discutida na seção 3.3 deve ser, portanto, adotada para que o parâmetro  $\beta$  seja adequado à energia de fratura do material. Para tanto, tem-se que  $\beta' = h\beta$  (como estabelecido na seção 3.3), de modo que se tenha a correta parametrização do material em função da interface considerada. Os valores dos parâmetros  $h$  e  $\beta'$  correspondentes são descritos na tabela 5.4.

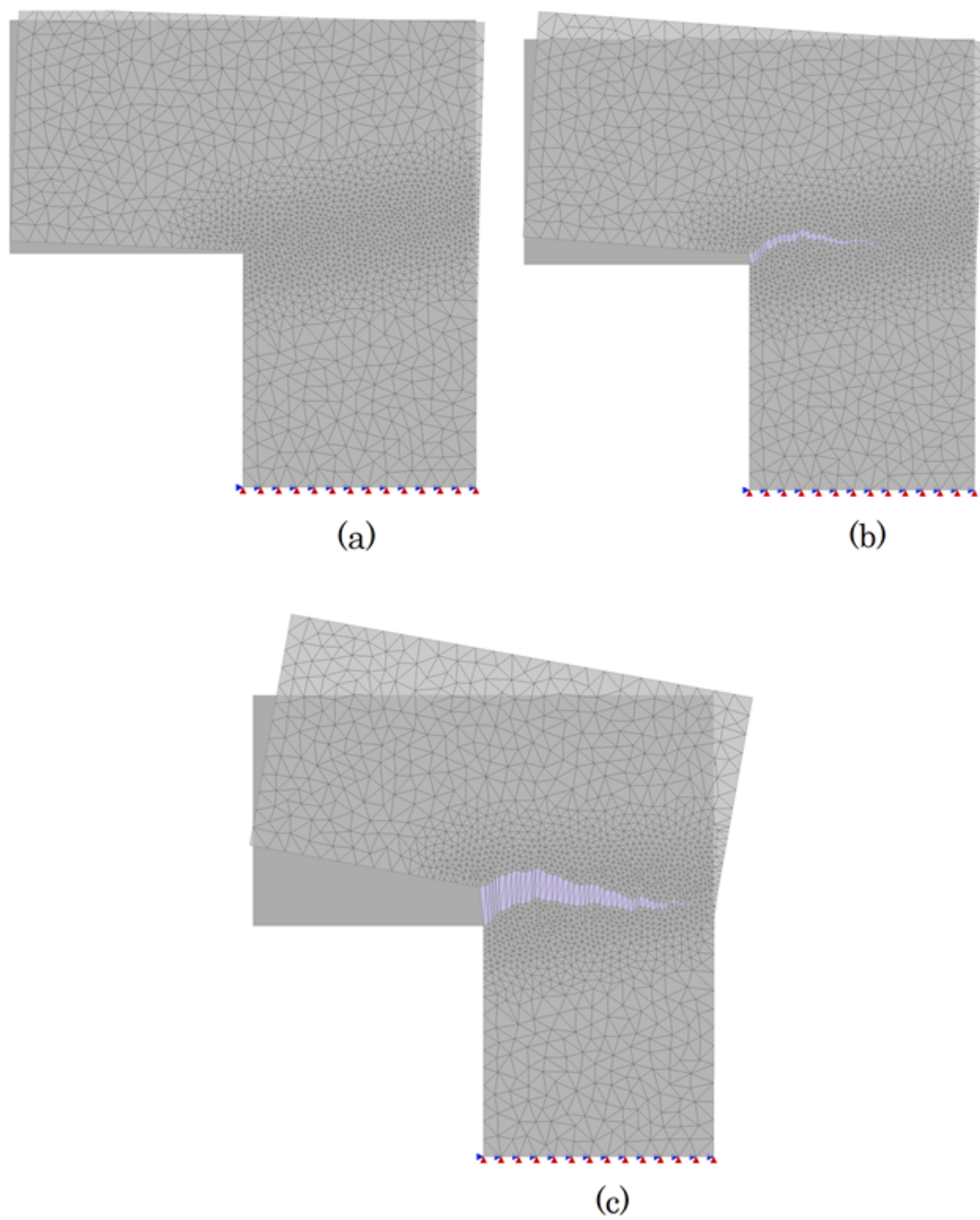
**Tabela 5.4:** Relação entre  $h$  e  $\beta'$ .

$h$	$\beta'$
0,001	0,02
0,01	0,2
0,1	2,0

Portanto, com o parâmetro  $\beta$  adequado, observa-se na Figura 5.28 que o modelo de elementos de interface foi capaz de representar com boa aproximação o comportamento do painel visto nos experimentos de Winkler et al. (2004).

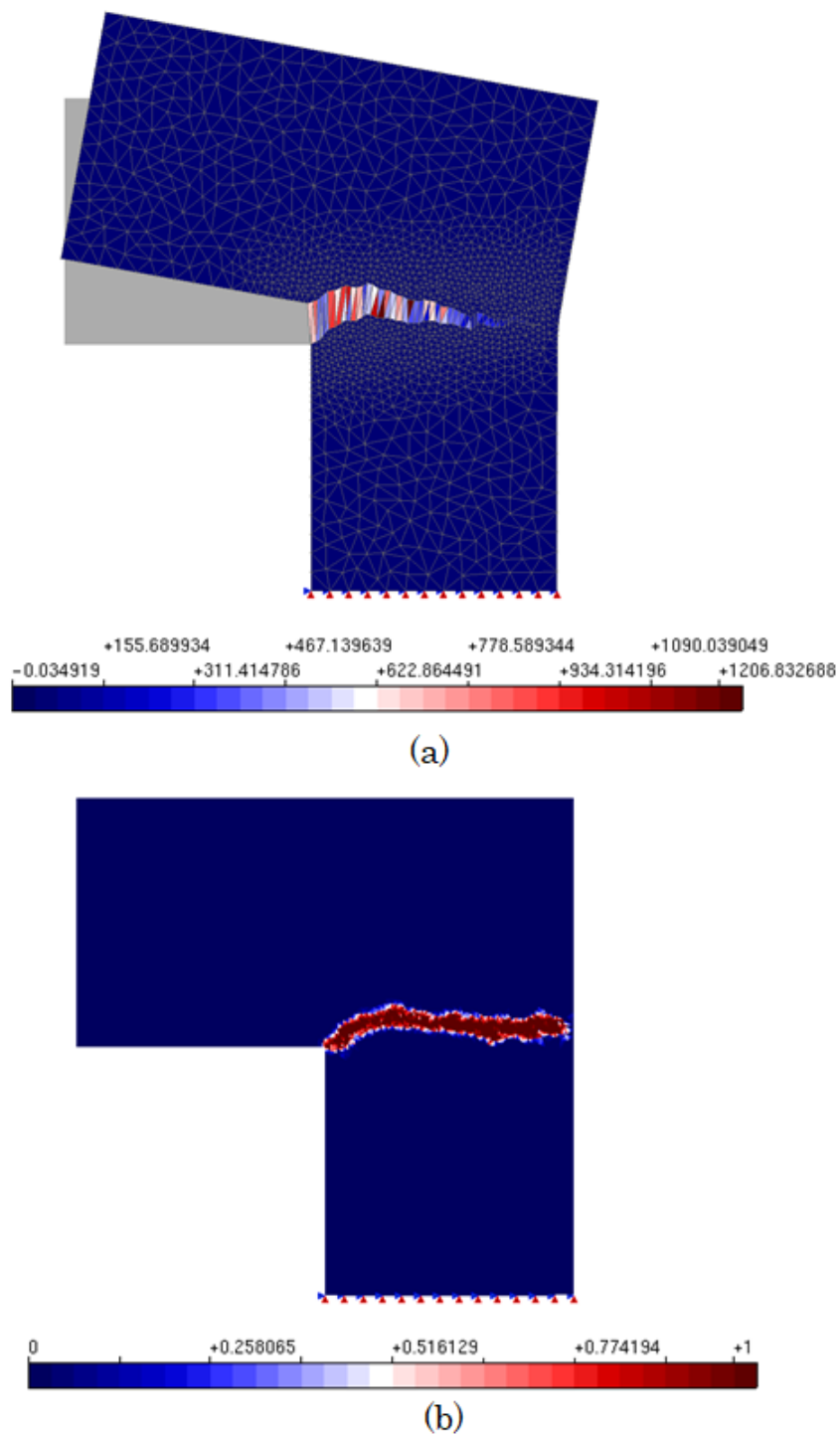
**Figura 5.29:** Trajetórias de equilíbrio com ajuste de  $\beta$  - influência de  $h$ .

O padrão de evolução da trinca pode ser visto nas Figuras 5.30 (a), (b) e (c) para os passos 50, 100 e 300, respectivamente, com escala ampliada em 100 vezes, utilizando  $h = 0,001 \text{ mm}$



**Figura 5.30:** Deformada: (a) passo 50, (b) passo 100, (c) passo 300.

A Figura 5.31(a) exhibe a variação de deformações e 5.31(b) o dano.

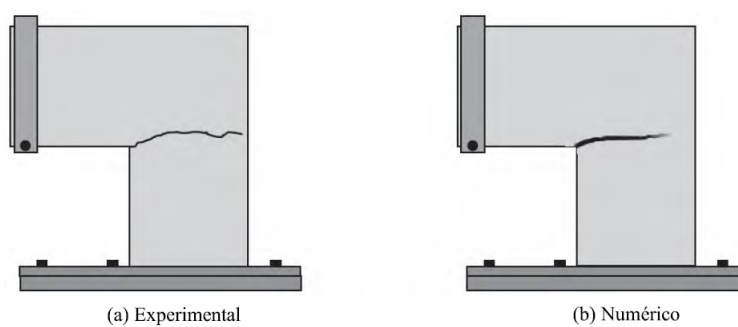


**Figura 5.31:** Padrão de dano obtido com elementos de interface.

Observa-se que as deformações localizam-se nos elementos de interface, provocando o salto no campo de deslocamentos e consequente abertura da trinca. O dano

é máximo na região em que a fissura se desenvolve e nulo em todo o restante do painel.

Verifica-se que a trinca se inicia na junção angular do painel e propaga-se horizontalmente por quase todo o painel. Um comportamento semelhante foi observado experimentalmente por Winkler et al. (2004), como ilustrado na Figura 5.32.



**Figura 5.32:** Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004).

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho, um modelo de elementos de interface baseado na cinemática de descontinuidade forte é apresentado. O modelo é implementado no sistema INSANE através de uma única classe para representar o referido elemento, fazendo uso do projeto de *software* e do paradigma de Programação Orientada a Objetos, foram utilizados todos os recursos do sistema sem grandes modificações no código existente.

Nos exemplos de tração em que um estado uniforme de tensões, os resultados obtidos não conseguiram representar adequadamente a resposta esperada. A trinca se forma abruptamente, atravessando de uma só vez todos os elementos posicionados na região de localização. Quando se alterou a condição de estado uniforme, para um estado não uniforme, no caso da chapa com entalhes assimétricos de Shi et al. (2005), a resposta obtida se mostrou satisfatória e condizente com os resultados experimentais.

Ao longo das análises de flexão em três pontos, verificou-se que o modelo com elementos de interface requer um alto grau de refinamento das malhas de elementos finitos, e essa exigência ainda é mais evidente quando a análise é realizada com o modelo de fissuras distribuídas. Além disso, avaliou-se que os dois modelos constitutivos geraram resultados dentro da faixa experimental.

O modelo com elementos de interface também se mostrou eficiente ao avaliar o

efeito de tamanho na flexão em três pontos. Notou-se que as respostas são mais estáveis com o modelo de dano isotrópico padrão, embora o modelo de fissuração distribuída, de natureza ortotrópica, também foi capaz de representar o experimento.

Uma vantagem observada do modelo é a representação do caminho da trinca, o qual foi reproduzido de forma muito eficiente em todos os exemplos em que se comparou com os resultados experimentais, inclusive no painel em “L”.

Conforme destacado, o modelo de elementos de interface integrado com a cinemática de descontinuidade forte permite avaliar o processo de fissuração em materiais parcialmente frágeis a partir de modelos constitutivos contínuos, sendo necessário alguns ajustes no valor da energia de fratura do elemento de interface.

Os recursos implementados permitem uma aproximação com boa precisão da resposta de fissuração, sendo capaz de modelar fissuras discretas que atravessam a malha independentemente de sua geometria e topologia.

Os resultados numéricos apresentados neste trabalho permitem concluir que o modelo aqui implementado apresenta similitude com os modelos experimentais.

Este modelo tem como principal vantagem a não necessidade de definição prévia do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento.

Desta forma, este trabalho contribuiu com o aperfeiçoamento do núcleo numérico do sistema INSANE, bem como com o desenvolvimento de um arcabouço para análise de fissuração via elementos de interface.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Com base neste trabalho, sugerem-se alguns tópicos para trabalhos futuros:

1. Implementação de novos recursos para a quebra da malha de elementos finitos, e formulação do elemento de interface, tornando possível a análise de meios tridimensionais;



2. Expansão do arcabouço de modelos constitutivos, adequando-os às exigências do modelo com elementos de interface;
3. Estudos mais detalhados a respeito da influência da energia de fratura na análise.
4. Desenvolvimento de métodos para otimização do tempo de processamento, por exemplo a limitação da quebra da malha apenas na região de interesse.

# Apêndice A

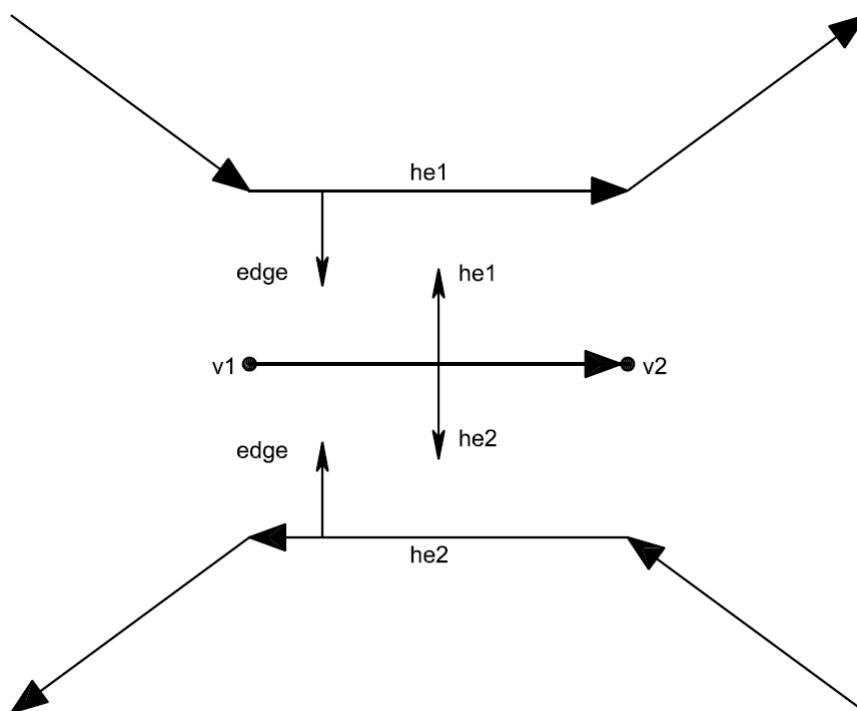
## Estruturas de Dados para Subdivisão Planar

A manipulação de dados armazenados no modelo geométrico, através de operações e construções geométricas, de forma estruturada e acessível é feita através da utilização de estruturas de adjacências no que diz respeito ao tratamento de modelos computacionais.

A fim de sistematizar os dados dos modelos analisados, as estruturas de dados para subdivisões planares, ou estruturas de adjacências, armazenam os dados geométricos do modelo, tornando possível que estes sejam acessados no futuro.

Dois tipos de estruturas de adjacências são amplamente utilizados. As Estruturas de Dados de “Arestas Aladas” ou “*Winged-Edge*”, possuem como principal informação do modelo geométrico as arestas. Nestas, os vértices, as faces e as arestas são colocados em listas, sendo cada lista preenchida de acordo com o tipo de elemento a ser representado.

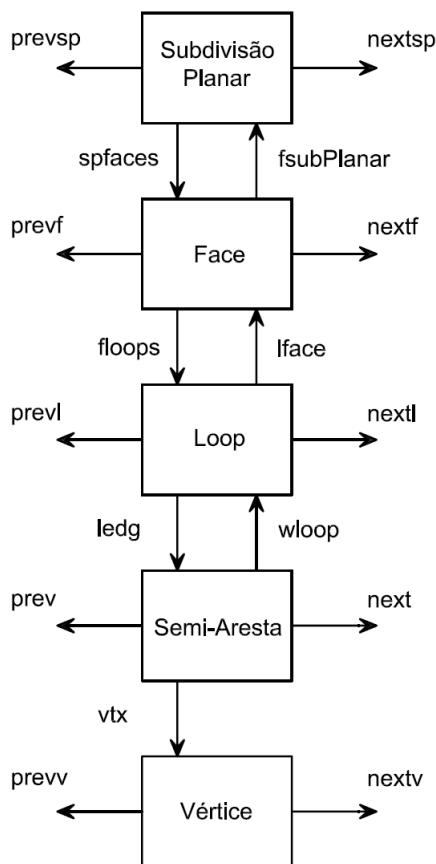
A Estrutura de dados de “Semi-Arestas” ou “*Half-Edge*” também possibilita o armazenamento de informações do modelo, porém, possuem como principal diferencial em relação à estrutura “*winged-edge*” a consideração de que uma aresta é transformada em duas semi-arestas, ilustrada na Figura A.1.



**Figura A.1:** Estrutura “Half-Edge” (Penna, 2007).

Na implementação da fragmentação da malha de elementos finitos foi adotada a estrutura de dados de semi-arestas, detalhada por Penna (2007). Esta estrutura de dados é desenvolvida a partir de uma hierarquia, composta por cinco níveis de elementos que compõem a geometria, conforme ilustra a Figura A.2.

Os níveis de hierarquia são descritos a seguir. A *Subdivisão Planar* possui uma lista duplamente encadeada de modelos geométricos e permite acesso ao nível *Face*, que também possui uma lista duplamente encadeada que representa as faces da subdivisão, as quais são compostas por “loops” que compõem seu contorno. A face pode ser composta por “loops” tanto externos, quanto internos (representando furos na face). Cada face possui uma referência para sua respectiva *Subdivisão Planar*.



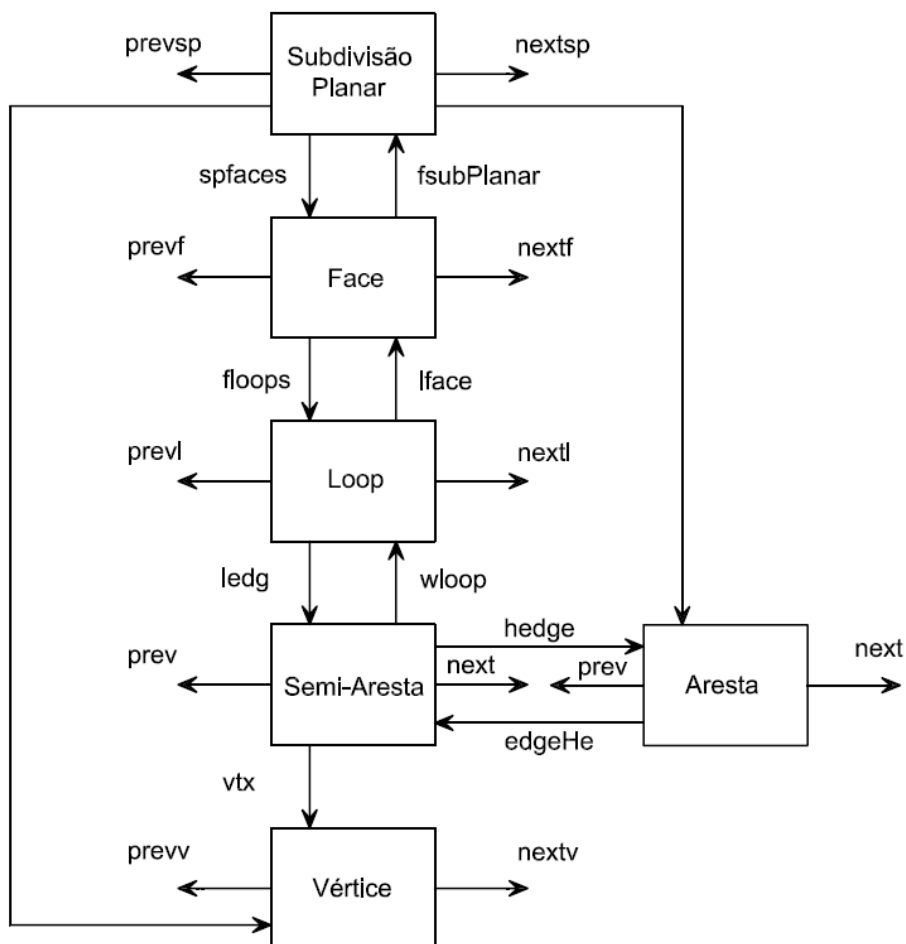
**Figura A.2:** Hierarquia de “*Half-Edge*” (Penna, 2007).

O **Loop** possui uma referência para **Face** e uma lista duplamente encadeada de “*loops*”, é composto por semi-arestas e, portanto, possui referência para **Semi-Aresta**. O nível **Semi-Aresta** possui uma referência para **Loop** com uma lista duplamente encadeada, respectiva às semi-arestas do modelo. Este nível também possui uma referência direta para **Vértice**, que representa o vértice de início da respectiva semi-aresta. O **Vértice** possui uma lista duplamente encadeada para os vértices do modelo.

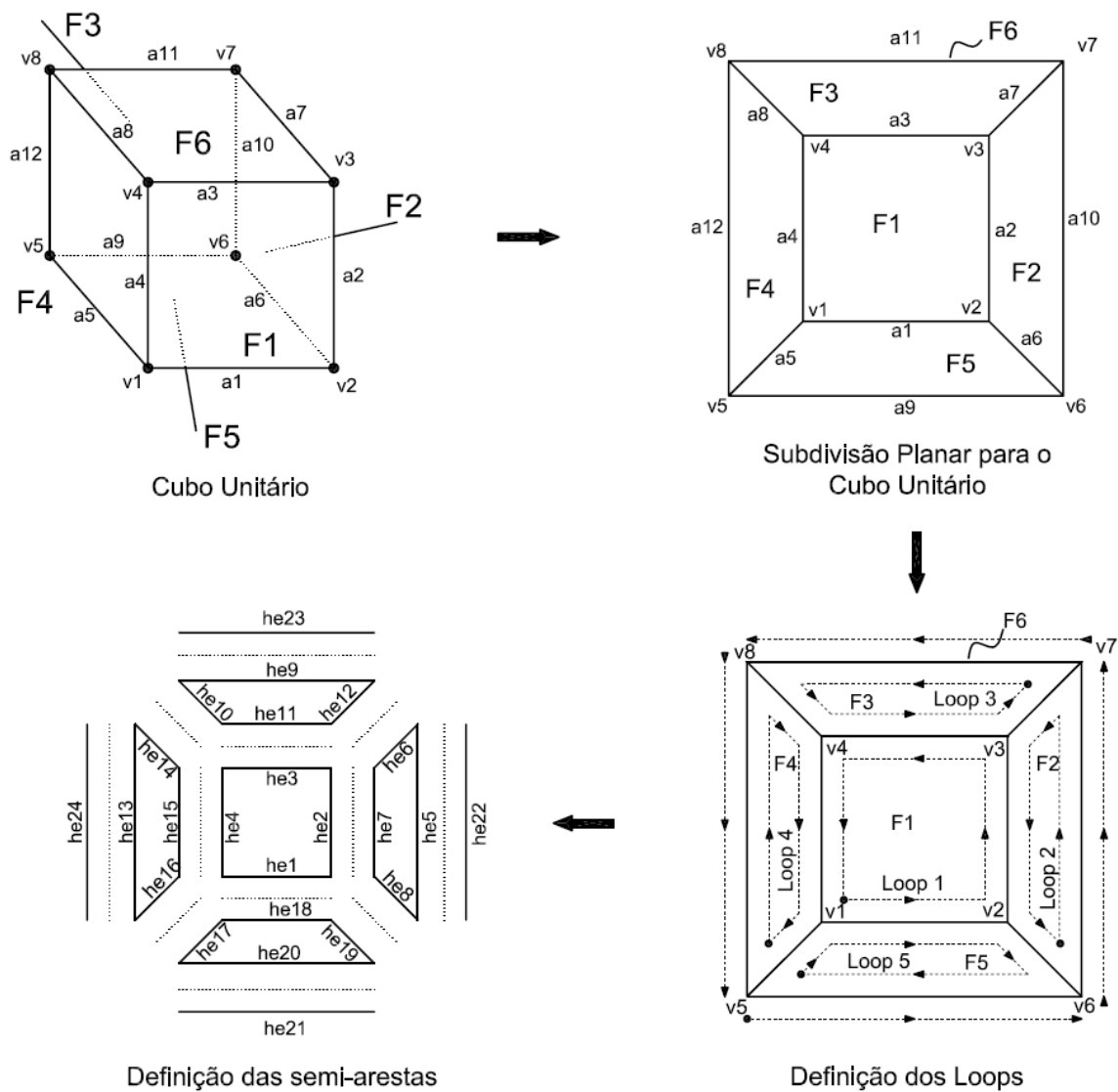
Para se cumprir com a finalidade de compor o modelo geométrico, a conexão entre as faces do modelo ainda não estão estabelecidas, para tanto, basta adicionar um nível intermediário, a **Aresta**, que possui uma referência para **Semi-Aresta**, sendo a aresta composta por duas semi-arestas, uma à esquerda e outra à direita,

incidentes nos mesmos vértices. As arestas também são guardadas em uma lista duplamente encadeada. Assim, a Subdivisão Planar passa a ter uma referência para *Aresta* e *Vértice*, e a *Semi-Aresta* uma referência para a sua respectiva aresta, como se vê na Figura A.3.

O armazenamento dos dados de um modelo geométrico na estrutura acima discutida permite o acesso aos elementos do modelo, através de consulta, seguindo a ordem da hierarquia. Para a subdivisão planar do cubo, detalhada na Figura A.4 a estrutura de semi-arestas correspondente está mostrada na Figura A.5.



**Figura A.3:** Estrutura de dados de “Half-Edge” (Penna, 2007).



**Figura A.4:** Detalhamento de uma Subdivisão Planar para um cubo unitário (Penna, 2007).

Faces	Arestas	Vértices
$F_1$	$a_1$	$v_1$
$F_2$	$a_2$	$v_2$
$F_3$	$a_3$	$v_3$
$F_4$	$a_4$	$v_4$
$F_5$	$a_5$	$v_5$
$F_6$	$a_6$	$v_6$
	$a_7$	$v_7$
	$a_8$	$v_8$
	$a_9$	
	$a_{10}$	
	$a_{11}$	
	$a_{12}$	

Face	Loop	Semi-Aresta
1	$Loop_1$	$he_1, he_2, he_3, he_4$
2	$Loop_2$	$he_5, he_6, he_7, he_8$
3	$Loop_3$	$he_9, he_{10}, he_{11}, he_{12}$
4	$Loop_4$	$he_{13}, he_{14}, he_{15}, he_{16}$
5	$Loop_5$	$he_{17}, he_{18}, he_{19}, he_{20}$
6	$Loop_6$	$he_{21}, he_{22}, he_{23}, he_{24}$

(b)

(a)

HE	Loop	$v_{inicial}$	HE	Loop	$v_{inicial}$	HE	Loop	$v_{inicial}$
1	1	$v_1$	9	3	$v_7$	17	5	$v_5$
2	1	$v_2$	10	3	$v_8$	18	5	$v_1$
3	1	$v_3$	11	3	$v_4$	19	5	$v_2$
4	1	$v_4$	12	3	$v_3$	20	5	$v_6$
5	2	$v_6$	13	4	$v_5$	21	6	$v_5$
6	2	$v_7$	14	4	$v_8$	22	6	$v_6$
7	2	$v_3$	15	4	$v_4$	23	6	$v_7$
8	2	$v_2$	16	4	$v_1$	24	6	$v_8$

(c)

Aresta	$v_i$	$v_j$	$HE_s$	Aresta	$v_i$	$v_j$	$HE_s$
$a_1$	$v_1$	$v_2$	$he_1, he_{18}$	$a_7$	$v_3$	$v_7$	$he_6, he_{12}$
$a_2$	$v_2$	$v_3$	$he_2, he_7$	$a_8$	$v_4$	$v_8$	$he_{10}, he_{14}$
$a_3$	$v_3$	$v_4$	$he_3, he_{11}$	$a_9$	$v_5$	$v_6$	$he_{20}, he_{21}$
$a_4$	$v_4$	$v_1$	$he_4, he_{15}$	$a_{10}$	$v_6$	$v_7$	$he_5, he_{22}$
$a_5$	$v_1$	$v_5$	$he_{16}, he_{17}$	$a_{11}$	$v_7$	$v_8$	$he_9, he_{23}$
$a_6$	$v_2$	$v_6$	$he_8, he_9$	$a_{12}$	$v_8$	$v_5$	$he_{13}, he_{24}$

(d)

**Figura A.5:** a) Subdivisão Planar; b) Faces e Loops; c) Semi-Arestas; d) Arestas (Penna, 2007).

# Referências Bibliográficas

- Bazant, Z. P., 1976. ‘Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete’. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 102, pp. 331–344.
- Bazant, Z. P. e Cedolin, L., 1979. ‘Blunt crack band propagation in finite element analysis’. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 105, pp. 297–315.
- Bazant, Z. P. e Cedolin, L., 1980. ‘Fracture mechanics of reinforced concrete’. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 106, pp. 1287–1306.
- Bazant, Z. P. e Cedolin, L., 1983. ‘Finite element modeling of crack band propagation’. *Journal of structural engineering*, vol. 109(1), pp. 69–92.
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16(93), pp. 155–177.
- Blaauwendraad, J., 1972. ‘Realistic analysis of reinforced concrete framed structures’. *HERON*, vol. 18(4), pp. 1–23.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. ‘Simulation of the fracture process at rock interfaces’. *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, pp. 519–531.
- Breslar, B. e Wollack, E., (1952), Shear strength of concrete, Technical report, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
- Carpinteri, A., 1976. ‘Applications of fracture mechanics to reinforced concrete’. *Elsevier Applied Science*, .
- Carreira, D. e Chu, K. H., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82.



- Darwin, D. e Pecknold, D. A., 1976. ‘Analysis of rc shear panels under cyclic loading’. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. ASCE, pp. 355–369.
- de Borst, R. e Gutiérrez, M. A., 1999. ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects’. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 261–277.
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J., 1995. ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’. *Computers e Structures* 55 (4), pp. 581–588.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- García-Álvarez, V. O., Gettu, R. e Carol, I., 2012. ‘Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model’. *Sādhanā*, vol. 37, pp. 187–205.
- Griffith, A. A., 1921. ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 221, pp. 163–198.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773–782.
- Hordijk, D. A., 1991. Local approach to fatigue of concrete. Tese de Doutorado, Technische University Delft.
- Irwin, G. R., 1957. ‘Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate’. *J Appl Mech*, vol. 24, pp. 361–364.
- Jirásek, M. e Patzák, B., 2002. ‘Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models’. *Computers & Structures*, vol. 80, pp. 1279–1293.

- Ju, J. W., 1989. 'On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects'. *International Journal of Solids and Structures* 25 (7), pp. 803–833.
- Kachanov, L. M., 1999. 'Rupture time under creep conditions'. *International Journal of Fracture*, vol. 97(1-4), pp. 11–18.
- Kaplan, M. E., 1961. 'Crack propagation and fracture of concrete'. *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 58, pp. 591–610.
- Karihaloo, B. L., 1995. *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Concrete design and construction series, Longman Scientific & Technical, New York.
- Kesler, C. E., Naus, D. J. e Lott, J., 1972, *The Society of Materials Science*, âç.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer.
- Lemaitre, J. e Dufailly, J., 1987. 'Damage measurements'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 28(5/6), pp. 643–661.
- Maedo, M. A., 2015. Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil.
- Manzoli, O. L., Gamino, A. L., Rodrigues, E. e Claro, G., 2012. 'Modeling of interfaces in two dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio'. *Computer and Structures*, vol. 94-95, pp. 70–82.
- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et á la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris.

- Mazars, J. e Lemaitre, J., 1984. 'Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete'. *Shah, S. P. (Ed.), Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro. Northwestern University*, pp. 375–378.
- Monnier, T., 1970. 'The moment-curvature relation of reinforced concrete'. *HERON*, vol. 18(2), pp. 1–101.
- Ngo, D. e Scordelis, A. C., 1967. 'Finite element analysis of reinforced concrete beams'. *American Concrete Institute Journal*, vol. 67, pp. 152–17763.
- Nilson, A. H., 1968. 'Nonlinear analysis of concrete by the finite element method'. *American Concrete Institute Journal*, vol. 65, pp. 757–766.
- O. Yuzugullu, W. S., 1972. *Finite element approach for the prediction of inelastic behaviour of shear wall-frame systems (2nd ed)*. Struct. Res. Series, Civil Eng. Studies, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign.
- Oliver, J., 1996. 'Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals.'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(21), pp. 3575–3600.
- Oliver, J., 2000. 'On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207–7229.
- Oliver, J., Cervera, M. e Manzoli, O., 1999. 'Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach'. *International journal of plasticity, Elsevier*, vol. 15(3), pp. 319–351.
- Orowan, E., 1949. 'Fracture and strength of solids'. *Reports on Progress in Physics*, vol. 12(1), pp. 185–232.
- Peixoto, R. G., 2016. Análise de degradação material, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes através do método dos elementos de contorno. Tese de Doutorado, UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais.

- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Petersson, P.-E., (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Technical report, TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Rashid, Y. R., 1968. 'Ultimate strenght analysis of prestressed concrete pressure vessels'. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334-344.
- Rodrigues, E. A., Manzoli, O. L., Bitencourt Jr., L. A. G. e Bittencourt, T. N., 2016. '2d mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94-95, pp. 112-124.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. e Blaauwendrra, J., 1985. 'Smearred crack approach and fracture localization in concrete'. *HERON*, vol. 30(1), pp. 1-48.
- Sancho, J. M., Planas, J., Gálvez, J. C., Reyes, E. e Cendón, D. A., 2006. 'An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete'. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 29, pp. 1056-1065.
- Scotta, R., Vitaliani, R., Saetta, A., Onate, E. e Hanganu, A., 2002. 'A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation'. *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 737-755.

- Shah, S. P., S. S. E. e. O. C., 1996. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials*. Prentice-Hall civil engineering and engineering mechanics series, Upper Saddle River, N. J.
- Shi, C., van Dam, Jan, G., A., van Mier, M, J. G. e Sluys, B., 2005. ‘Crack interaction in concrete’. *Materials for Buildings and Structures EUROMAT*, vol. 6(93), pp. 125–131.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models - i. formulation’. *International Journal of Solids and Structures* 23 (7), pp. 821–840.
- Simo, J. C., Oliver, J. e Armero, F., 1993. ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids’. *Computational mechanics, Springer*, vol. 12(5), pp. 277–296.
- Simo, J., O. J. A. F., 1993. ‘An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids’. *Computat*, vol. 12, pp. 277–296.
- Suidan, M. e Schnobrich, W. C., 1968. ‘Finite element analysis of reinforced concrete’. *Journal of the structural division, ASCE*, pp. 2109–2121.
- Swartz, S. E., Hu, K. K. e Jones, G. L., 1978. ‘Compliance monitoring of crack growth in concrete’. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. ASCE, pp. 789–800.
- van Mier, J. G. M., Vervuurt, A. e Schlangen, E., 1994. ‘Boundary and size effects in uniaxial tensile tests: A numerical and experimental study’. *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, pp. 289–302.
- Winkler, B., G., H. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.
- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Xiang, Z., Swoboda, G. e Cen, Z., 2002. 'Identification of damage parameters for jointed rock'. *Computers & Structures*, vol. 80, pp. 1429–1440.