

---

---

# Tese Doutoral

*Uma análise robusta de benchmarking utilizando o método de fronteira estocástica Bayesiano aplicado às empresas brasileiras de distribuição de energia*

---

---

Por

MAGNO SILVÉRIO CAMPOS



Orientador: Prof. Dr. Marcelo Azevedo Costa

Departamento de Engenharia de Produção  
ESCOLA DE ENGENHARIA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, em conformidade com os requisitos para obtenção do grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais.

NOVEMBRO DE 2018





## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Uma análise robusta de benchmarking utilizando o método de fronteira estocástico bayesiano aplicado às empresas brasileiras de distribuição de energia**

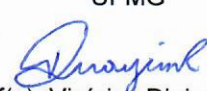
### MAGNO SILVÉRIO CAMPOS

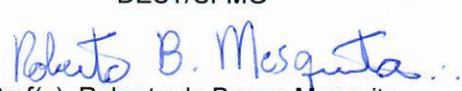
Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Doutor em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E INTERVENÇÃO EM SISTEMAS SOCIOTÉCNICOS, linha de pesquisa Modelagem Estocástica e Simulação.


Aprovada em 21 de novembro de 2018, pela banca constituída pelos membros:

  
Prof(a). Marcelo Azevedo Costa - Orientador  
UFMG

  
Prof(a). Tiago Alves Schieber de Jesus  
UFMG

  
Prof(a). Vinicius Diniz Mayrink  
DEST/UFMG

  
Prof(a). Roberto de Barros Mesquita  
Universidade do Estado de Mato Grosso

  
Prof(a). José Francisco Moreira Pessanha  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Belo Horizonte, 21 de novembro de 2018.

C198a

Campos, Magno Silvério.

Uma análise robusta de benchmarking utilizando o método de fronteira estocástica bayesiano aplicado às empresas brasileiras de distribuição de energia [manuscrito] / Magno Silvério Campos. – 2018. xxviii, 125 f., enc.: il.

Orientador: Marcelo Azevedo Costa.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 91-108.

Bibliografia: f. 109-121.

1. Engenharia de produção - Teses. 2. Análise envoltória de dados - Teses. I. Costa, Marcelo Azevedo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 658.5(043)

## Resumo

Um modelo de *Análise Envoltória de Dados* (DEA) é aplicado pelo regulador brasileiro para definir os custos operacionais regulatórios para 61 concessionárias de distribuição de eletricidade ou DSOs, desde 2015. O modelo atual DEA compreende retornos não decrescentes de escala, um insumo, sete produtos e restrições aos pesos. Os custos regulatórios foram estimados utilizando valores médios de 2011 a 2013. Em 2017, novos custos regulatórios foram estimados utilizando um conjunto de dados atualizado e o modelo DEA anterior. Resultados recentes são semelhantes aos resultados obtidos em 2015 e mostram evidências de que o atual modelo de *benchmarking* ainda requer melhorias. Em suma, algumas DSOs têm baixíssimas eficiências, perto de 25%, e as análises estatísticas mostram a presença de *outliers* na base de dados. Além disso, o modelo ainda carece de ajustes ambientais. Esse estudo avalia o uso da *Análise de Fronteira Estocástica* (SFA) como um modelo alternativo para definir custos operacionais regulatórios. Prós e contras do modelo SFA são destacados. Os resultados mostram que o SFA é mais flexível para lidar com *outliers*. No entanto, o SFA tem grandes problemas de convergência se aplicado a amostras limitadas. Os problemas de convergência podem ser superados utilizando métodos de computação Bayesiana ou de verossimilhança penalizada. Em particular, é proposto um modelo SFA Bayesiano que é robusto a problemas de convergência. Esse estudo defende o uso do DEA e do SFA como as melhores alternativas para definir os custos operacionais regulatórios para as empresas brasileiras de distribuição de eletricidade, conforme indicado pelos reguladores europeus.

**Palavras-chave:** Análise Envoltória de Dados, Análise de Fronteira Estocástica, Análise Bayesiana.



## Abstract

**A** *Data Envelopment Analysis* (DEA) model is applied by the Brazilian regulator to set regulatory operational costs for 61 electricity distribution utilities or DSOs, since 2015. The current DEA model comprises non-decreasing returns to scale, one input, seven outputs and weight restrictions. Regulatory costs were estimated using average values from 2011 to 2013. In 2017, new regulatory costs were estimated using an updated data set and the previous DEA model. Recent results are similar to results achieved in 2015 and show evidence that the current benchmarking model still requires improvements. In short, some DSOs have inconsistent low efficiencies, close to 25%, and standard statistical analysis shows the presence of outliers in the data base. Furthermore, the model still lacks environmental adjustments. This study evaluates the use of *Stochastic Frontier Analysis* (SFA) as an alternative model to set regulatory operational costs. Pros and cons of the SFA model are highlighted. Results show that the SFA is more flexible to deal with outliers. However, the SFA has major convergence problems if applied to limited samples. Convergence issues can be overcome using Bayesian computation or penalized likelihood methods. In particular, a Bayesian SFA model is proposed that is robust to convergence problems. This study advocates the use of both DEA and SFA as the best alternatives to set regulatory operational costs for Brazilian electricity distribution companies, as indicated by European regulators.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis, Stochastic Frontier Analysis, Bayesian Analysis.





## Dedicatória e Agradecimentos

**D**edico esse trabalho aos meus pais, Mozart e Floripes, doutores *honoris causa* em minha vida.

**A**gradeço àqueles que, cada qual à sua maneira, foram de extrema importância para que tudo acontecesse:

- Pais, irmãos, cunhados e sobrinhos, sempre alegres e presentes;
- Marcelle, sempre amorosa, entusiasta e compreensiva;
- Professores, sempre apontando para frente e para o alto;
- Alunos, sempre inspirando crescimento;
- Colegas de estudo e de trabalho, sempre parceiros;
- Marcelo, um gigante que me apoiou nos ombros para eu poder ver mais longe.

*Ao Deus de bondade infinita,  
criador e protetor de toda minha  
vida, muito obrigado!*

---

*Magno*



*“Não sei o que posso parecer aos olhos do mundo, mas aos meus, pareço apenas ter sido como um menino brincando à beira-mar, divertindo-me em encontrar de vez em quando um seixo mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto o grande oceano da verdade permanece completamente desconhecido à minha frente.”*

---

*Sir Isaac Newton*



## Declaração

**D**eclaro que o trabalho dessa tese doutoral foi realizado de acordo com as exigências do Regulamento do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais e que o mesmo não foi submetido a nenhum outro prêmio acadêmico. Exceto quando indicado por referência específica, esse texto é próprio do autor. O trabalho feito em colaboração ou com a assistência de outros é indicado como tal. Quaisquer opiniões expressas na tese são de responsabilidade do autor.

ASSINATURA:



DATA: NOVEMBRO DE 2018



# Sumário

	Página
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Figuras	xix
<b>1 Contextualização do Estudo</b>	<b>1</b>
1.1 Monopólio Natural Regulado . . . . .	1
1.2 O Setor Brasileiro de Distribuição de Energia Elétrica . . . . .	2
1.3 Regulação Tarifária no SBDEE . . . . .	2
1.4 Métodos de <i>Benchmarking</i> para Avaliação de Eficiência . . . . .	8
1.5 Métodos de <i>Benchmarking</i> no Setor Distribuição de Energia Elétrica . . .	10
1.5.1 DEA . . . . .	11
1.5.2 COLS . . . . .	12
1.5.3 SFA . . . . .	12
1.5.4 StoNED . . . . .	13
1.5.5 Empresa de Referência . . . . .	13
1.6 Modelo de <i>Benchmarking</i> Vigente no SBDEE . . . . .	14
1.7 O Problema . . . . .	18
1.8 Motivações para o Estudo do Problema . . . . .	19
1.9 Objetivo . . . . .	22
1.10 Organização do Texto . . . . .	22
<b>2 Análise de Fronteira Estocástica (SFA)</b>	<b>25</b>
2.1 Preliminares . . . . .	25
2.2 Fronteira de Produção e Eficiência Técnica . . . . .	27
2.2.1 Algumas Formas Funcionais para a Função de Produção . . . . .	31
2.2.1.1 Função de Produção Cobb-Douglas . . . . .	31
2.2.1.2 Função de Produção Translog . . . . .	32

2.3	Eficiência Técnica <i>versus</i> Eficiência Alocativa . . . . .	32
2.4	Fronteira de Custo e Eficiência Econômica . . . . .	33
2.4.1	Algumas Formas Funcionais para a Função de Custo . . . . .	35
2.4.1.1	Função de Custo Cobb-Douglas . . . . .	35
2.4.1.2	Função de Custo Translog . . . . .	36
2.4.1.3	Comentário Sobre Essas Formas Funcionais . . . . .	36
2.5	Estimação da Fronteira Estocástica de Custo . . . . .	37
2.5.1	Modelo de Custo com Fronteira Estocástica . . . . .	38
2.5.2	Métodos Estatísticos Estocásticos de Estimação Paramétrica para a Eficiência Econômica . . . . .	39
2.5.2.1	Considerações Iniciais . . . . .	39
2.5.2.2	Verificação Inicial da Assimetria de $\epsilon_i$ . . . . .	41
2.5.2.3	Possíveis Comportamentos Probabilísticos Associados a $u_i$ . . . . .	41
2.5.2.4	Enfoque Frequentista para a Estimação de $e^{-u_i}$ . . . . .	47
2.5.2.5	Enfoque Bayesiano para a Estimação de $e^{-u_i}$ . . . . .	52
2.6	Incorporação de Variáveis Exógenas ao SFA . . . . .	56
2.6.1	Contextualização para o SBDEE . . . . .	57
2.6.2	Modelo Proposto por Kumbhakar <i>et al.</i> (1991) . . . . .	58
2.6.3	Modelo Proposto por Reifschneider e Stevenson (1991) . . . . .	59
2.6.4	Lidando com Produtos Indesejados . . . . .	60
2.6.5	Considerações Gerais . . . . .	60
2.7	Síntese da Especificação de um Modelo de SFA . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Parametrizações e Modelagens Propostas para o SFA</b>	<b>65</b>
3.1	Preliminares . . . . .	65
3.2	Proposta de Parametrizações para o SFA . . . . .	66
3.3	Base de Dados . . . . .	69
3.4	Proposta de Modelos para o SFA . . . . .	71
3.4.1	Modelo 1 . . . . .	71
3.4.2	Modelo 2 . . . . .	72
3.4.3	Modelo 3 . . . . .	72
3.4.4	Modelo 4 . . . . .	73
3.4.5	Modelo 5 . . . . .	73
3.4.6	Modelo 6 . . . . .	74
3.4.7	Modelo 7 . . . . .	74



3.5	Implementação Computacional . . . . .	74
3.6	CrITÉrios de Seleção de Modelos . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>77</b>
4.1	Verificação Inicial da Assimetria de $\epsilon_i$ . . . . .	77
4.2	Parâmetros Estimados . . . . .	78
4.3	Eficiências Estimadas . . . . .	80
4.4	CrITÉrio de Convergência . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusão e Considerações de Prosseguimento</b>	<b>87</b>
5.1	Histórico Contextual . . . . .	87
5.2	Validação das Hipóteses sob Estudo . . . . .	88
5.3	Resultados Obtidos . . . . .	89
5.4	Metodologias Complementares . . . . .	90
5.5	Considerações de Prosseguimento . . . . .	91
5.6	Considerações Finais . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Apêndice A</b>	<b>93</b>
A.1	Obtenção da Expressão para o Cálculo de $f(\epsilon)$ . . . . .	93
A.2	Obtenção da Expressão para o Cálculo de $E(u \epsilon)$ . . . . .	96
A.3	Obtenção da Expressão para o Cálculo de $E(e^{-u} \epsilon)$ . . . . .	97
<b>B</b>	<b>Apêndice B</b>	<b>99</b>
B.1	Procedimento Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) . . . . .	99
B.1.1	Cadeias de Markov . . . . .	100
B.1.1.1	Propriedade Markoviana . . . . .	101
B.1.1.2	Probabilidades de Transição . . . . .	101
B.1.1.3	Notação . . . . .	101
B.1.1.4	Equações de Chapman-Kolmogorov . . . . .	102
B.1.1.5	Classificação dos Estados em uma Cadeia de Markov . . . . .	103
B.1.1.6	Probabilidade de Estado Estável . . . . .	103
B.1.2	Lógica do MCMC . . . . .	104
B.1.3	Algoritmo Amostrador de Gibbs . . . . .	105
B.1.4	CrITÉrio de Convergência . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Apêndice C</b>	<b>109</b>
C.1	CrITÉrios de Seleção de Modelos . . . . .	109

---

C.1.1	<i>Log-Pseudo Marginal Likelihood</i> (LPML) . . . . .	109
C.1.2	<i>Deviance Information Criterion</i> (DIC) . . . . .	110
C.1.3	<i>Watanabe-Akaike Information Criterion</i> (WAIC) . . . . .	110
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>111</b>
<b>Índice Remissivo</b>		<b>125</b>

## Lista de Tabelas

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
3.1 Variáveis de entrada e saída disponíveis para as 61 DSOs brasileiras. . . . .	70
4.1 Estimativas dos parâmetros médios <i>a posteriori</i> . . . . .	79
4.2 Escores de eficiência estimados utilizando os modelos de SFA propostos. . . . .	82
4.3 Eficiências estimadas e custos eficientes utilizando DEA e SFA (Modelo 6), e diferenças entre custos eficientes utilizando DEA e o SFA proposto. . . . .	85



## Lista de Figuras

Figura	Página
1.1 Distribuição geográfica das concessionárias distribuidoras de energia. . . . .	3
1.2 Regulação por incentivo no SBDEE. . . . .	6
1.3 Escores de eficiência das DSOs brasileiras no 4CPTR. . . . .	7
1.4 Principais métodos de <i>benchmarking</i> para avaliação de eficiência. . . . .	9
2.1 Representação genérica de um processo produtivo. . . . .	27
2.2 Conjunto de Possibilidades de Produção (CPP) e fronteira de produção. . . . .	28
2.3 Exemplo de uma função de produção e de isoquantas. . . . .	29
2.4 Fronteira de custo. . . . .	33
2.5 Diferenças entre as funções de custo Cobb-Douglas e translog no SFA. . . . .	37
2.6 Exemplos de densidades de probabilidades para a Normal-Truncada. . . . .	42
2.7 Densidades de probabilidades para o exemplo. . . . .	44
2.8 Fronteira estocástica de custo e desvios para o exemplo. . . . .	45
2.9 Fronteiras de custo estimadas para o exemplo: OLS, COLS, DEA e SFA. . . . .	46
3.1 Gráfico de correlação de Spearman para as variáveis de entrada, saída, qualidade e ambientais. . . . .	70
4.1 Boxplots comparando eficiências originais de DEA e eficiências propostas de SFA. . . . .	81
4.2 Matriz de correlação comparando eficiências originais de DEA e eficiências propostas de SFA. . . . .	81
4.3 Eficiências estimadas DEA e SFA em todo o território brasileiro. . . . .	83
4.4 Similaridades e dissimilaridades entre DEA e SFA após ajustes de escala. . . . .	84
4.5 Gráficos de ACF para os parâmetros $\lambda$ dos modelos propostos. . . . .	86
B.1 Algoritmo Amostrador de Gibbs. . . . .	106
B.2 Exemplo de um gráfico ACF para $\psi_t E$ . . . . .	106



## Lista de Nomenclaturas

- $\alpha_r$  Limite inferior atribuído ao peso  $\omega_j$  relativamente ao peso  $\kappa_i$  para o modelo DEA (1.1).
- $\beta_t$  Limite superior atribuído ao peso  $\omega_j$  relativamente ao peso  $\kappa_i$  para o modelo DEA (1.1).
- $\delta$  =  $\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ , isto é, uma reparametrização em função do parâmetro  $\lambda$ .
- $\delta_1$  Coeficiente associado à variável ambiental que exerce influência sobre a  $i$ -ésima DSO.
- iid* Independentes e identicamente distribuídos.
- $\epsilon_i$  Erro composto sobre  $i$ -ésimo produtor ( $\epsilon_i = \nu_i \pm u_i$ ).
- $\gamma$  Estatística de teste para verificação de assimetria.
- $\Gamma(\cdot)$  Função gama.
- $\Gamma(a,b)$  Distribuição de probabilidades Gama com parâmetros  $a$  e  $b$ .
- $\hat{\lambda}$  Estimador do parâmetro de forma (assimetria) da função densidade de probabilidades  $f(\epsilon)$ .
- $\hat{\beta}$  Estimador do vetor de parâmetros de tecnologia (coeficientes) da função estocástica de custo.
- $\hat{\psi}$  Estimador Bayesiano para o vetor de parâmetros  $\psi$ .
- $\hat{\Theta}$  =  $[\hat{\lambda}, \hat{\sigma}^2, \hat{\beta}]$ , isto é, vetor de estimadores frequentistas para os parâmetros do SFA.
- $\hat{\sigma}_u^2$  Estimador do parâmetro de variância incondicional associada à distribuição das ineficiências econômicas dos produtores.

- $\hat{\sigma}_v^2$  Estimador do parâmetro de variância incondicional associada à distribuição dos ruídos aleatórios.
- $\hat{\sigma}$  Estimador do parâmetro de escala da função densidade de probabilidades  $f(\epsilon)$ .
- $\hat{u}_i$  Estimador para o componente de erro que objetiva capturar os efeitos da ineficiência sobre o  $i$ -ésimo produtor.
- $\kappa_i$  Parâmetros de peso de entrada para o modelo DEA (1.1).
- $\lambda$  Parâmetro de forma (assimetria) da função densidade de probabilidades  $f(\epsilon)$ .
- $\ln L$  Função de log-verossimilhança.
- $\beta$  Vetor de parâmetros de tecnologia.
- $\delta$  Vetor de coeficientes para as variáveis exógenas associadas ao  $i$ -ésimo produtor.
- $\psi$  Vetor de parâmetros a serem estimados a partir da abordagem Bayesiana.
- $\Theta$   $= [\lambda, \sigma^2, \beta]$ , isto é, vetor de parâmetros do SFA a serem estimados.
- $E$  Vetor de custos atuais para os produtores abordagem Bayesiana.
- $w$  Vetor de preços dos *inputs*.
- $w_i$  Vetor de preços dos *inputs* associado ao  $i$ -ésimo produtor.
- $x$  Vetor de entradas.
- $x_i$  Vetor de entradas associado ao  $i$ -ésimo produtor.
- $x_{(-i)}$  Conjunto de  $n$  dados sem a observação  $x_i$
- $y_i$  Vetor de saídas associado ao  $i$ -ésimo produtor
- $z_i$  Vetor de variáveis exógenas para o  $i$ -ésimo produtor.
- $\mu$  Média incondicional associada à distribuição das ineficiências econômicas dos produtores.
- $\mu_*$   $= \epsilon \frac{\sigma_u^2}{\sigma^2}$ .
- $\nu_i$  Componente de erro que objetiva capturar os efeitos do ruído aleatório sobre o  $i$ -ésimo produtor.



- $\omega_j$  Parâmetros de peso de saída ordinária para o modelo DEA (1.1).
- $\omega_l$  Parâmetros de peso de saída indesejada para o modelo DEA (1.1).
- $\Phi(\cdot)$  Função distribuição de probabilidades acumuladas normal padrão.
- $\phi(\cdot)$  Função densidade de probabilidades normal padrão.
- $\pi_j$  Probabilidade de estado estável.
- $\propto$  Representa proporcionalidade na expressão (2.57).
- $\propto$  Representa um valor constante na equação (2.45).
- $\mathfrak{R}_+$  Conjunto dos números reais não-negativos.
- $\mathfrak{R}_+^m$  Conjunto dos números reais não-negativos associados ao espaço  $m$ -dimensional (saídas)
- $\mathfrak{R}_+^n$  Conjunto dos números reais não-negativos associados aos espaço  $n$ -dimensional (entradas).
- $\sigma$  Parâmetro de escala da função densidade de probabilidades  $f(\epsilon)$ .
- $\sigma_{u_i}^2$  Variância associada à distribuição das ineficiências econômicas do  $i$ -ésimo produtor.
- $\sigma_*^2 = \frac{\sigma_v^2 \sigma_u^2}{\sigma^2}$ .
- $\sigma_v^2$  Variância incondicional associada à distribuição dos ruídos aleatórios.
- $\sigma_u^2$  Variância incondicional associada à distribuição das ineficiências econômicas dos produtores.
- $\mathbf{P}^{(n)}$  Matriz de transição a  $n$  etapas em uma Cadeia de Markov.
- $\varphi$  Parâmetro de retornos não-decrescentes à escala no modelo DEA (1.1).
- $\xi$  Parâmetro de localização da *Skew-Normal*.
- $\xi(\mathbf{y}_i)$  Função de custo reparametrizada.
- $\zeta_i$  Componente de erro aleatório associado a  $u_i$ .
- $a$  Parâmetro grau de liberdade da distribuição *t-Student*.

$C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) \cdot e^{\nu+u}$  Fronteira estocástica de custo.

$C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta})$  Fronteira determinística de custo.

$D(\mathbf{x} \text{ cond } \boldsymbol{\Theta})$  *Deviance*

$e^{-u_i}$  Eficiência técnica e/ou alocativa do  $i$ -ésimo produtor.

$E_i$  Custo atual do  $i$ -ésimo produtor.

$EE_i$  Eficiência Econômica do  $i$ -ésimo produtor.

$EI_i$  Ineficiência Econômica do  $i$ -ésimo produtor.

$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$  Fronteira determinística de produção.

$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) \cdot e^{\nu-u}$  Fronteira estocástica de produção.

$f(\epsilon_i)$  Função densidade de probabilidades do termo de erro composto do  $i$ -ésimo produtor.

$f(\boldsymbol{\psi})$  Distribuição de probabilidades *a priori* para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\psi}$ .

$f(\boldsymbol{\psi} \text{ cond } \mathbf{E})$  Distribuição de probabilidades *a posteriori* para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\psi}$ .

$f(\mathbf{E} \text{ cond } \boldsymbol{\psi})$  Distribuição de probabilidades conjuntas da amostra (distribuição amostral ou função de verossimilhança) para o vetor de parâmetro  $\boldsymbol{\psi}$ .

$f(\nu_i)$  Função densidade de probabilidades do termo de ruído aleatório do  $i$ -ésimo produtor.

$f(u \text{ cond } \epsilon)$  Função densidade de probabilidades da ineficiência condicional ao erro composto.

$f(u, \epsilon)$  Função densidade de probabilidades conjunta da ineficiência e do erro composto.

$f(u_i)$  Função densidade de probabilidades do termo de ineficiência do  $i$ -ésimo produtor.

$f_X(x)$  Função densidade de probabilidades *Skew-Normal* de três parâmetros.

$f_Z(z)$  Função densidade de probabilidades *Skew-Normal*.

$f_\epsilon(\epsilon)$  Função densidade de probabilidades do erro composto para distribuição *t-Student*.

- $g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta})$  Componente de erro da ineficiência que captura os efeitos do ambiente sobre o  $i$ -ésimo produtor.
- $h_k$  Eficiência DEA estimada para a DSO  $k$  em questão no modelo (1.1).
- $L$  Função de verossimilhança.
- $L(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})$  Distribuição amostral (ou verossimilhança) para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\psi}$ .
- $M$  Número de estados em uma Cadeia de Markov.
- $M3T$  Estatística de teste para verificação de assimetria.
- $m_i$   $I$ -ésimo momento dos resíduos OLS.
- $n$  Tamanho amostral
- $N(\mu; \sigma^2)$  Distribuição de probabilidades Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .
- $N^+(0; \sigma^2)$  Distribuição de probabilidades *Half*-Normal truncada à esquerda de 0 com variância  $\sigma^2$ .
- $N^+(\mu; \sigma^2)$  Distribuição de probabilidades Normal-Truncada à esquerda com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .
- $p_{ij}^{(n)}$  Probabilidade de se passar de um estado inicial  $i$  a um estado final  $j$ , após  $n$  etapas em uma Cadeia de Markov.
- $SN(\xi, \sigma^2, \lambda)$  Distribuição de probabilidades *Skew*-Normal com parâmetros de localização  $\xi$ , de escala  $\sigma$  e de assimetria  $\lambda$ .
- $TE_i$  Eficiência Técnica do  $i$ -ésimo produtor.
- $TI_i$  Ineficiência Técnica do  $i$ -ésimo produtor.
- $U(0, 1)$  Função densidade de probabilidades Uniforme no intervalo  $[0, 1]$ .
- $u_i$  Componente de erro que objetiva capturar os efeitos da ineficiência sobre o  $i$ -ésimo produtor.
- $x_i$  Custo operacional associado à  $i$ -ésima DSO nos modelos propostos para o SFA de custos.
- $x_i$  Entradas ( $i = 1, \dots, m$ ) para o modelo DEA (1.1).

- $X_t$  Estado do sistema no instante  $t$ .
- $y_i$  Saída ( $i = 1, \dots, n$ ) associada ao  $i$ -ésimo produtor.
- $y_j$  Saídas ( $j = 1, \dots, s$ ) para o modelo DEA (1.1).
- $y_{ij}$   $j$ -ésima saída associada à  $i$ -ésima DSO nos modelos propostos para o SFA de custos.
- $Z$  Variável aleatória *Skew*-Normal.
- $z_i$  Variável Exógena que exerce influência sobre o  $i$ -ésimo produtor.
- e.variable* Índice Ambiental.

## Lista de Siglas

ACF	<i>Autocorrelation Function</i>
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
BFGS	Algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BSFA	<i>Bayesian Stochastic Frontier Analysis</i>
CAPEX	<i>Capital Expenditure</i>
CEPA	Cambridge Economic Policy Associates
CMAD	<i>Corrected Median Absolute Deviation</i>
COLS	<i>Corrected Ordinary Least Square</i>
CPP	Conjunto de Possibilidades de Produção
CRTP	Ciclo de Revisão Tarifária Periódica
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i>
DIC	<i>Deviance Information Criterion</i>
DIE	Duração da Interrupção de Energia
DMU	<i>Decision Making Unit</i>
DSO	<i>Distribution Service Operator</i>
FIE	Frequência da Interrupção de Energia
LPML	<i>Log-Pseudo Marginal Likelihood</i>
OLS	<i>Ordinary Least Square</i>

---

MOLS	<i>Modified Ordinary Least Square</i>
NDRS	<i>Non-Decreasing Returns to Scale</i>
OPEX	<i>Operational Expenditure</i>
PMSO	Pessoal, Material, Serviços e Outros
RC	<i>Reference Companies</i>
REA	<i>Ratio-based Efficiency Analysis</i>
SBDEE	Setor Brasileiro de Distribuição de Energia Elétrica
SDEA	<i>Stochastic Data Envelopment Analysis</i>
SEB	Setor Elétrico Brasileiro
SFA	<i>Stochastic Frontier Analysis</i>
SRD	Superintendência de Regulação dos Serviços de Distribuição
TFA	<i>Thick Frontier Approach</i>
TOTEX	<i>Total Expenditure</i>
WAIC	<i>Watanabe-Akaike Information Criterion</i>

## Contextualização do Estudo

Nesse capítulo de contextualização do estudo, são apresentados, em caráter introdutório, aspectos gerais do problema sob estudo, alguns tratamentos encontrados na literatura, bem como as motivações e justificativas para a concepção e execução do trabalho, além dos objetivos e das respectivas contribuições do mesmo.

### 1.1 Monopólio Natural Regulado

O Setor Elétrico Brasileiro (SEB) é um dos setores mais importantes da economia nacional, englobando as atividades de geração, transmissão, distribuição e comercialização de energia elétrica. Nesse trabalho, será tomado por base, o segmento de distribuição, responsável pela entrega aos consumidores finais, da energia recebida do segmento de transmissão. Geralmente, esse segmento constitui um monopólio natural, termo da economia utilizado para referenciar situações de mercado que lidam com bens exclusivos, com pouca ou nenhuma concorrência e com demanda inelástica. Além disso, são requeridos investimentos elevados, porém com custos marginais baixos. Assim, seria normal se pensar que esse segmento teria conforto em produzir menos que a demanda, impondo injustamente, tarifas mais altas aos seus produtos e serviços prestados.

Entretanto, para se evitar esse viés, alguns governos, como é o caso do Brasil, passaram a regular tal setor, criando uma *proxy* de mercados competitivos, com restrições às tarifas e modalidades de produção. Tal regulação funciona como uma espécie de força

disciplinadora. Daí, advém o fato da regulação desse monopólio natural ser necessária, sendo que nesse contexto é que surgiram as agências reguladoras . Como bônus dessa atividade reguladora, destacam-se uma maior estabilidade do setor, resguardando os produtores e consumidores dos oportunismos políticos e de mercado, além de incentivar aumentos de eficiência técnica e alocativa, com investimentos adequados.

## 1.2 O Setor Brasileiro de Distribuição de Energia Elétrica

Segundo dados da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), disponíveis em seu *site*<sup>1</sup>, o Setor Brasileiro de Distribuição de Energia Elétrica (SBDEE) é o responsável pelas operações de rebaixamento da tensão proveniente do sistema de transmissão, para uma tensão que possa ser distribuída aos consumidores finais, sem maiores riscos e danos. Atualmente, esse setor é composto por 63 empresas concessionárias, 38 permissionárias e 13 autorizadas, totalizando 114 empresas, entre públicas, privadas e de economia mista. A diferença entre elas reside no fato de as concessionárias receberem uma concessão do governo brasileiro para prestar serviços ao cidadão, com direitos e obrigações resguardados. Já as permissionárias recebem permissões para usufruírem dos serviços de distribuição em benefício próprio. Ainda existem as cooperativas de eletrificação rural, que atuam sob autorizações precárias e aguardam os processos de regularização para serem promovidas a concessionárias ou permissionárias. A Figura 1.1 representa a distribuição geográfica das concessionárias pelo território brasileiro.

O SBDEE é composto pela rede elétrica e pelo conjunto de instalações e equipamentos elétricos que operam em níveis de alta tensão (superior a 69 kV e inferior a 230 kV), média tensão (superior a 1 kV e inferior a 69 kV) e baixa tensão (inferior a 1 kV).

A regulação técnica da distribuição é conduzida pela Superintendência de Regulação dos Serviços de Distribuição (SRD), vinculada à ANEEL.

## 1.3 Regulação Tarifária no SBDEE

Como já introduzido, a produção, a transmissão, a distribuição e a comercialização de energia elétrica, na grande maioria dos países, são reguladas e fiscalizadas por agências ditas reguladoras. No Brasil, esse papel é desempenhado pela ANEEL, que é uma

---

<sup>1</sup><http://www.aneel.gov.br>



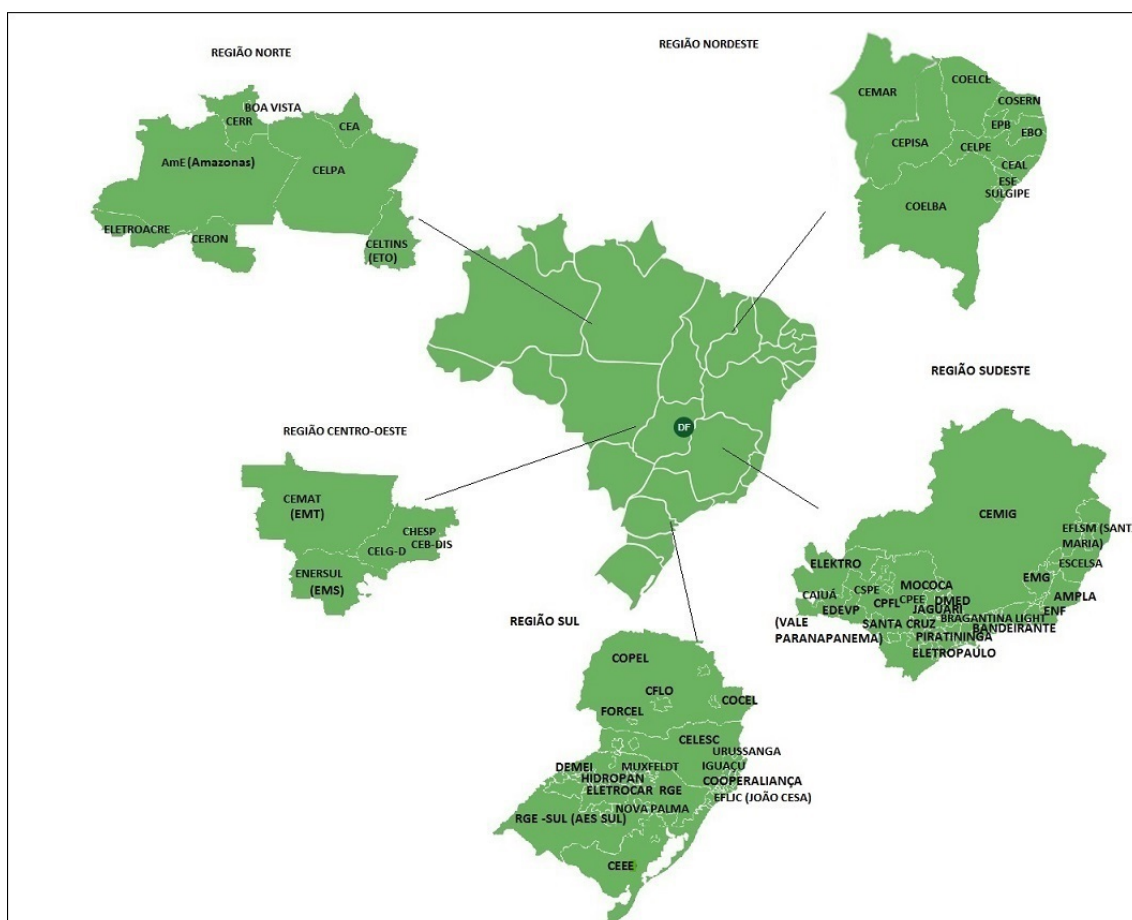


Figura 1.1: Distribuição geográfica das concessionárias distribuidoras de energia.

Fonte: adaptado de ANEEL (2017).

autarquia vinculada ao Ministério de Minas e Energia, fundada em 1996. Entre suas competências, de acordo com a Lei Federal nº 9.427/96, destacam-se: implementar as diretrizes para a exploração da energia elétrica; licitar concessões de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica; cumprir e fazer cumprir as disposições regulamentares do serviço de concessão; definir os valores das tarifas dos sistemas elétricos de transmissão e distribuição; homologar reajustes e proceder à revisão das tarifas, normas e concessões; estimular a qualidade, produtividade e preservação do meio ambiente.

Nesse tocante, ainda segundo dados da ANEEL em seu *site*, até 1993, os consumidores dos diversos estados brasileiros pagavam a mesma tarifa pela energia. Esse valor garantia a remuneração das empresas concessionárias, independentemente de sua eficiência, e aquelas não lucrativas eram mantidas por subsídios do governo federal, onerando

todo o sistema. Para corrigir essa falha, a partir de 1994, a tarifa passou a ser fixada por concessionária, conforme características específicas da área de concessão de cada empresa, refletindo peculiaridades de cada região, tais como o número de consumidores, tamanho da rede de distribuição, custo da energia e tributos, entre outros.

No que diz respeito ao valor da energia gerada, vendida para as concessionárias distribuidoras, para posteriormente ser revendida aos consumidores, a regulação passou a contar com leilões públicos, aumentando assim, a transparência nos custos, a competição e a oferta de melhores preços. Já a transmissão da energia, do ponto de geração às subestações de tratamento, configura-se num monopólio natural, pois a competição nesse segmento, segundo a Agência Nacional, não traz benefícios econômicos. Por outro lado, a distribuição da energia para os consumidores finais possui características que tornam necessária uma maior regulação das concessionárias em questão, uma vez que são essas as que tem maiores reflexos e impactos na economia da população.

Para cumprir o compromisso de levar energia elétrica aos seus consumidores, as concessionárias distribuidoras, daqui em diante denominadas DSOs (Operadoras do Serviço de Distribuição), têm custos que devem ser cobertos pela tarifa de energia. Por essa razão, a Agência Nacional atua para que as tarifas sejam compostas apenas pelos custos que efetivamente se relacionam com os serviços prestados, de forma a torná-las justas, blindando os consumidores das voracidades do mercado.

E é nesse contexto, que a partir de 2010, a ANEEL iniciou debates com a sociedade sobre as regras e metodologias para definir as receitas das DSOs, através de audiências públicas. A partir disso, o regulador propôs uma revisão completa do modelo que calcula os custos operacionais destas DSOs, convergindo para a prática de custos eficientes.

A regulação passou a requerer a definição de níveis de receitas ou taxas por um período de tempo pré-fixado em contrato formal. A partir desses níveis de receitas ou taxas reguladas pela ANEEL, as DSOs passaram a ser encorajadas a reduzirem seus custos, visando incrementar seus retornos financeiros. Após o término do contrato, os custos são revistos e se necessário, a agência define novos níveis de receitas ou taxas, pautando sempre pelo equilíbrio econômico e financeiro do setor.

De acordo com informações da ANEEL, também disponíveis em seu *site*, até 2014, as revisões tarifárias eram delimitadas temporalmente por ciclos, que ocorriam a cada quatro ou cinco anos, nos quais havia uniformidade de regras. Além dessas revisões periódicas, também ocorriam ajustes anuais. O primeiro ciclo de revisões tarifárias periódicas (1CRTP) aconteceu entre 2003 e 2006, o segundo (2CRTP) entre 2007 e 2010 e o terceiro

(3CRTP) entre 2011 e 2014. O quarto ciclo (4CRTP) iniciou-se em 2015 e se estenderá até o final de 2018. Todas as metodologias de definição dos custos gerenciáveis eram revistas conjuntamente para serem aplicadas, uniformemente, nas revisões de todas as DSOs. Porém, a partir de 2015, de acordo com orientações da ANEEL, decidiu-se modificar esse procedimento, uma vez que a duração do ciclo tarifário varia de concessionária para concessionária. Atualmente, a metodologia para cada componente dos custos gerenciáveis pode ser revisada separadamente, visando maior efetividade. Também, a partir do 4CRTP, decidiu-se que os índices de eficiência das DSOs serão calculados de dois em dois anos, e a metodologia será revista a cada quatro anos.

No que diz respeito ao modelo de regulação adotado pelo SBDEE, destaca-se que, a partir de 1996, optou-se pelo regime por preço máximo (*price cap*), no qual é imposto um preço limite máximo que uma DSO pode cobrar dos consumidores pela energia, sendo passível de revisões periódicas, levando-se em consideração a inflação do período, a produtividade, a eficiência e a eficácia dessa DSO<sup>2</sup>. Nesse tipo de regime, uma alteração nos custos operacionais não necessariamente resultará em alterações das tarifas cobradas. Assim, devido à fixação da tarifa para um dado período de tempo, as DSOs são incentivadas (regulação por incentivo) a reduzirem seus custos, uma vez que, lucros adicionais podem resultar das reduções de custos alcançadas até a próxima revisão.

A Figura 1.2 ilustra, em linhas gerais, a ideia desse processo de revisão e reajuste tarifário no SBDEE, a partir da revisão ocorrida entre dois ciclos de revisão tarifária periódica. Segundo esse processo, para fins de cálculo tarifário, os custos das DSOs são compostos por duas parcelas: a *parcela A*, que engloba os custos não-gerenciáveis (compra de energia e encargos setoriais), e a *parcela B*, que engloba os custos gerenciáveis (mão-de-obra, material, depreciação e remuneração aos investidores).

---

<sup>2</sup>Embora seja comum a permutação entre produtividade, eficácia e eficiência, há de se tomar cuidado com o uso indiscriminado destes termos. A produtividade está relacionada à razão entre o que foi produzido e o que foi utilizado para se produzir. A eficácia diz respeito ao que é produzido, não levando em conta os recursos utilizados. Já a eficiência compara o que foi produzido, dados os recursos disponíveis, com o máximo que poderia ter sido produzido com os mesmos recursos, ou *vice-versa*: compara o custo atual de produção com o mínimo custo possível. Além disso, de acordo com Ray (2004), produtividade é uma medida descritiva de desempenho, enquanto eficiência é uma medida normativa (ou relativa) de desempenho.

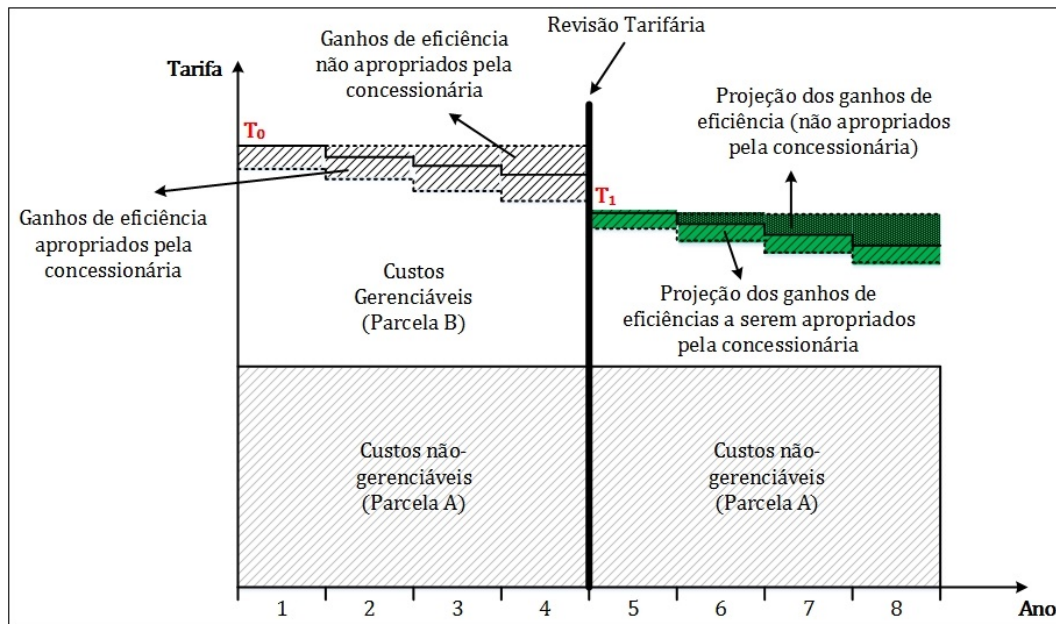


Figura 1.2: Regulação por incentivo no SBDEE.

Fonte: adaptado de ANEEL (2015).

Como dito anteriormente e exemplificado na Figura 1.2, as tarifas são corrigidas anualmente e revisadas a cada ciclo de quatro ou cinco anos, com a finalidade de garantir o equilíbrio econômico-financeiro do sistema. Inicialmente, a tarifa foi fixada em  $T_0$  pelo contrato de concessão, cobrindo os custos gerenciáveis e não-gerenciáveis de uma dada DSO. Até o quarto ano, os ganhos de eficiência foram compartilhados entre os usuários e a DSO, aumentando assim, sua remuneração. No quinto ano, iniciou-se o CRTP e o regulador reposicionou a tarifa em um novo nível compatível,  $T_1$ . Também houve uma projeção de metas de eficiência a serem perseguidas pela DSO. Novamente, essas metas incidem apenas sobre os custos gerenciáveis e permitem compartilhar com os consumidores os possíveis ganhos a serem obtidos (projeção de ganhos não apropriados pela concessionária). Caso a DSO consiga ultrapassar a meta estabelecida pelo regulador, é possível ocorrer a apropriação dos resultados extras obtidos (projeção de ganhos de eficiência apropriados pela concessionária). Com isso, as DSOs são incentivadas a melhorar seu níveis de eficiência, pois quanto maior for a diferença entre a meta estabelecida e os custos realmente praticados, maiores serão os benefícios econômicos alcançados.

Como ilustração e exemplificação, na Figura 1.3, são apresentados os escores de eficiência de 61 DSOs brasileiras, calculados no 4CRTP.

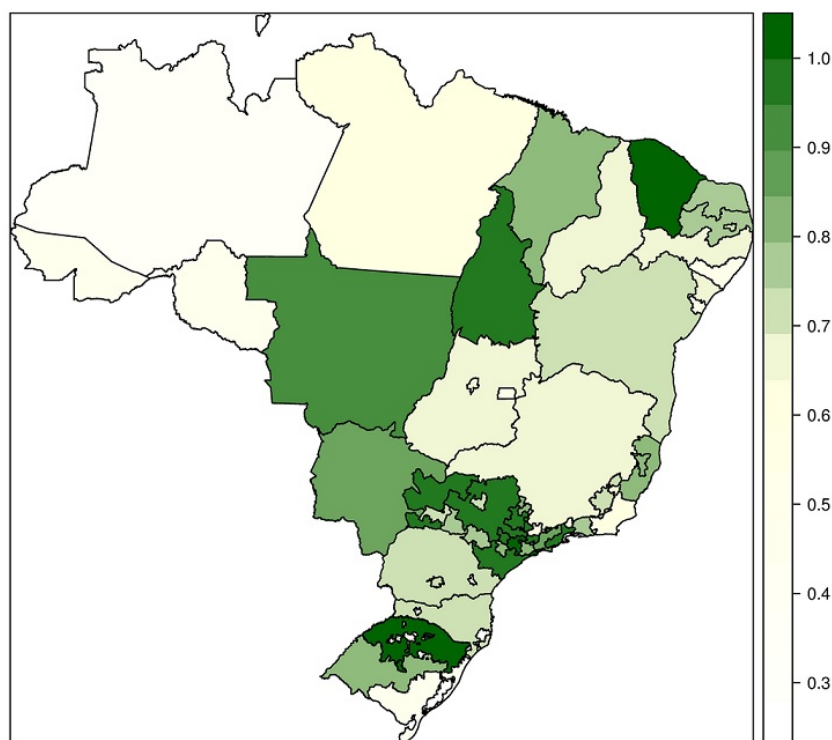


Figura 1.3: Escores de eficiência das DSOs brasileiras no 4CPTR.

Fonte: adaptado de ANEEL (2017).

Conforme pode-se desprender da Figura 1.3, se por um lado, existem DSOs que são consideradas *full*-eficientes, com escores de eficiência iguais a 100%, por outro lado, existem tantas outras com escores bem aquém dos padrões mínimos desejados. Aquelas mais eficientes passam a ser referenciadas como *benchmarks* para as demais. Assim, as menos eficientes são incentivadas a melhorarem seus níveis de eficiência, visando incremento nos benefícios econômicos e financeiros.

Partindo do pressuposto de que os escores de eficiência devem ser suficientemente precisos e efetivos, a fim de balizar políticas gerenciais e tomadas de decisão mais acertadas, tornam-se cruciais o desenvolvimento e o emprego, pelo regulador, de metodologias que se mostrem consistentes na definição de custos operacionais eficientes, como por exemplo, o emprego dos denominados métodos de *benchmarking* (ou de fronteira) (Jamasp e Pollitt, 2001), favorecendo assim, tanto as DSOs quanto os próprios consumidores. Em muitos países, tem sido aplicado o *state-of-the-art benchmarking*, que segundo Bogetoft e Otto (2011), já é responsável por um considerável impacto econômico positivo em países europeus. Assim sendo, esses métodos são melhor apresentados a seguir.

## 1.4 Métodos de *Benchmarking* para Avaliação de Eficiência

Os chamados métodos de *benchmarking* (ou de fronteira) para avaliação de eficiência são métodos que têm proporcionado aos analistas de diferentes setores da economia moderna, em especial àqueles do setor de regulação tarifária de energia elétrica, a identificação do nível máximo de produto, dada a quantidade de recursos produtivos empregados, ou a identificação do custo mínimo de produção, dada a quantidade de produtos esperados, bem como a avaliação do desvio de um determinado grupo de observações em relação aos padrões de referência (*benchmarks*).

Existem razões para que tais métodos venham sendo utilizados com mais frequência. Segundo Bauer (1990), algumas delas são: a ideia de fronteira condiz com a teoria econômica do comportamento otimizador; os desvios da fronteira são interpretados como ineficiências do produtor; além de existir uma relação forte entre a informação passível de se obter pelos modelos de *benchmarking* e as políticas econômicas exequíveis.

Tais métodos de *benchmarking* são divididos, de acordo com Franco e Fortuna (2003), em cinco grandes grupos:

- (i) Métodos de Programação Matemática Não-Paramétrica;
- (ii) Métodos de Programação Matemática Paramétrica;
- (iii) Métodos Estatísticos Deterministas;
- (iv) Métodos Estatísticos Estocásticos; e,
- (v) Métodos de Engenharia.

Os métodos baseados em programação matemática utilizam uma sequência de programas lineares ou quadráticos, distinguindo-se pelo fato de os paramétricos adotarem uma forma funcional na estimação da função objetivo do modelo matemático. O método não-paramétrico mais conhecido na literatura é o *Data Envelopment Analysis* (DEA), contando com algumas variantes mais recentes, como é o caso do *Stochastic Data Envelopment Analysis* (SDEA) e do *Ratio-based Efficiency Analysis* (REA). O *Goal Programming* é o método paramétrico mais usual.

Já a diferença entre os métodos estatísticos reside na forma como o método trata os desvios das posições observadas em relação à fronteira eficiente. O determinista considera

tais desvios como resultado exclusivo de ineficiência operacional. Por outro lado, o método estatístico estocástico admite a influência de ruídos e eventos aleatórios, aos quais, a organização produtiva está sujeita e não tem controle. Dentre os deterministas, os métodos mais empregados são: *Ordinary Least Square* (OLS), *Corrected Ordinary Least Square* (COLS), *Corrected Median Absolute Deviation* (CMAD), *Modified Ordinary Least Square* (MOLS) e o *Thick Frontier Approach* (TFA). Dentre os métodos estocásticos, o mais usual é o *Stochastic Frontier Analysis* (SFA). Também existe um método denominado *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data* (StoNED), que combina em sua estrutura, tanto a abordagem determinista quanto a estocástica.

Por fim, existem os denominados Métodos de Engenharia, que criam um *proxy* virtual do mercado real de operação do produtor, sendo o mais utilizado aquele que se baseia na metodologia das *Reference Companies* (RC).

A Figura 1.4 apresenta um síntese estrutural desses métodos.

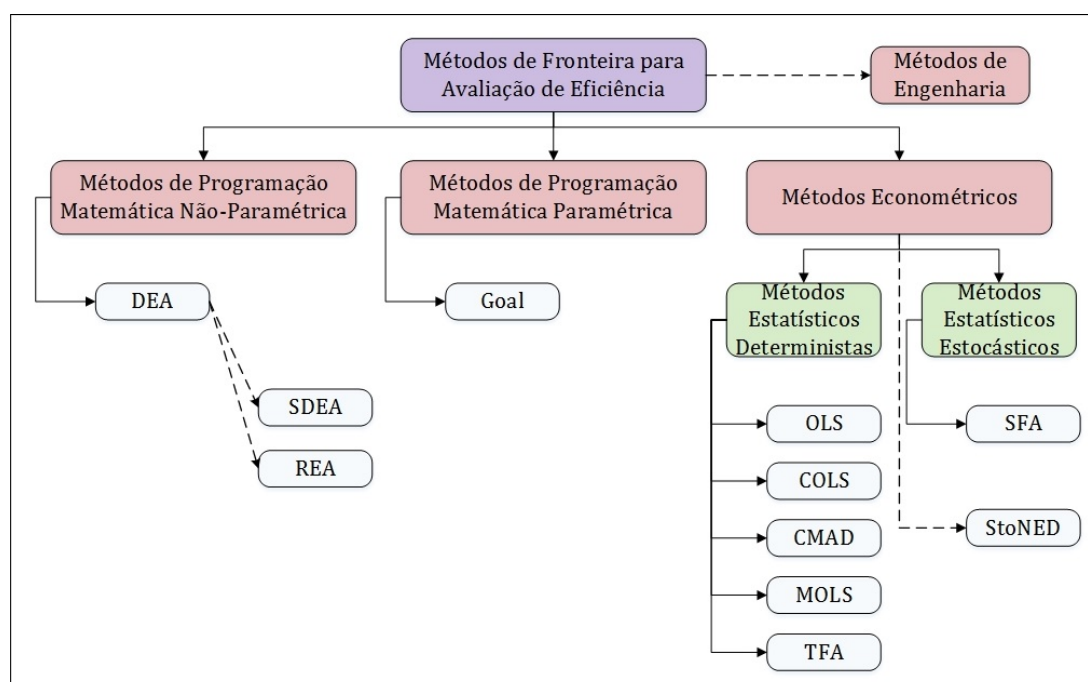


Figura 1.4: Principais métodos de *benchmarking* para avaliação de eficiência.

Na seção seguinte, serão apresentadas as características dos principais métodos de *benchmarking* para avaliação de eficiência aplicados ao setor de regulação tarifária elétrica, bem como a indicação de alguns estudos já realizados nesse contexto.

## 1.5 Métodos de *Benchmarking* no Setor Distribuição de Energia Elétrica

A estimação de práticas de custos eficientes na distribuição de energia elétrica tem sido um grande desafio para empresas, reguladores e pesquisadores (Haney e Pollit, 2011, 2009). Os custos eficientes devem representar um equilíbrio adequado entre os lucros da DSO, a qualidade dos serviços e tarifas de eletricidade justas. Assim, os métodos de *benchmarking* podem ser aplicados para estimar tais custos ou eficiências de custo.

Os métodos de *benchmarking* fornecem aos analistas, em particular aos do setor de regulação de tarifas de eletricidade, ferramentas matemáticas e estatísticas para estimar o custo mínimo de produção, dada uma quantidade observada de produtos ou *outputs*. Além disso, para DSOs ineficientes, modelos de *benchmarking* podem identificar as melhores práticas, ou seja, DSOs observadas identificadas como *full*-eficientes. Agrell e Bogetoft (2017) alegam que as aplicações mais proeminentes das técnicas de *benchmarking* estão relacionadas à regulação tarifária no setor elétrico. Não é à toa que a utilização de tais métodos vem crescendo significativamente nesse setor.

Um estudo internacional realizado por Haney e Pollit (2009) em 40 países, mostra que entre os reguladores de energia, 51% aplicavam métodos de *benchmarking*. Outros estudos mais recentes também detectam e descrevem esse crescimento, tais como: Haney e Pollit (2011) exploram os determinantes da melhor prática de *benchmarking* nesse setor, chamando a atenção para o fato de a distribuição de energia ter muitas perdas, especialmente nos países latino-americanos, como é o caso do Brasil, indicando enorme potencial para melhoria de eficiência; Kuosmanen *et al.* (2013) apresentam um estudo onde chamam a atenção para o fato de muitos países europeus já utilizarem tais métodos; Zaja *et al.* (2017) e Agrell e Bogetoft (2017) elencam pesquisas e descrevem análises relacionadas sobre os impactos da regulação no setor elétrico de diversos países; Mesquita (2017) apresenta um estudo sobre uma análise comparativa das abordagens de *benchmarking* utilizadas em países europeus e latino-americanos; entre outros importantes trabalhos que referendam a afirmação desse crescimento.

De acordo com Haney e Pollit (2009), 34,8% dos reguladores de distribuição de energia elétrica aplicavam DEA, 13% aplicavam modelos de regressão estatísticos adaptados (deterministas), como o método COLS e 8,7% aplicavam métodos de fronteira estocástica (estocásticos), como o SFA. No Brasil, o DEA e o COLS foram utilizados pelo regulador para estimar eficiências de custo em 2011 (Costa *et al.*, 2015a). Estudos



recentes de Agrell e Bogetoft (2017) e Mesquita (2017) mostram que, entre os países europeus e latino-americanos, 30% dos reguladores de distribuição de energia elétrica aplicam DEA, 15% aplicam COLS e 10 % aplicam SFA. O restante se divide entre outros métodos, como o emprego de empresas de referência, ou ausência de métodos de *benchmarking*. A seguir, são apresentadas algumas das principais características desses métodos de fronteira, bem como alguns estudos no setor elétrico sobre regulação tarifária.

### 1.5.1 DEA

O método *Data Envelopment Analysis* (DEA) foi primeiramente introduzido por Charnes *et al.* (1978) e posteriormente estendido por Banker *et al.* (1984). Uma interessante revisão sucinta sobre DEA, inclusive com críticas, pode ser encontrada nos trabalhos de Altoé *et al.* (2017) e de Emrouznejad e Yang (2017). Em linhas gerais, o DEA avalia problemas com múltiplos recursos (necessários para gerar produtos e/ou serviços) e múltiplas saídas (os produtos ou serviços gerados) para cada unidade produtiva, denominadas *Decision Making Units* (DMUs). A capacidade com que as DMUs conseguem gerar saídas para determinadas entradas define sua eficiência operacional. As eficiências DEA dessas DMUs são estimadas pela avaliação da razão entre uma soma ponderada das saídas (produtos gerados) e uma soma ponderada das entradas (recursos necessários para gerar produtos e/ou serviços). Os pesos de entrada e saída são estimados por meio de um problema de programação linear não-paramétrica. As DMUs eficientes têm razão estimada, ou eficiência, igual a um. Os pesos estimados podem ser utilizados para definir metas eficientes. Dados os insumos fixos, uma DMU pode aumentar sua produção para atingir a eficiência técnica, ao passo que, dadas as saídas fixas, uma DMU pode diminuir sua entrada para obter a máxima eficiência alocativa. Logo, supõe-se que as DMUs menos eficientes possam melhorar sua eficiência até o limite das melhores DMUs. Mais especificamente, segundo Colin (2018), o DEA pode determinar:

- (i) O grupo de DMUs mais eficientes, isto é, as melhores práticas (*benchmarks*);
- (ii) O grupo de DMUs menos eficientes;
- (iii) A quantidade de recursos desperdiçados pelas DMUs menos eficientes;

Alguns estudos começaram a indicar um maior emprego dos modelos de DEA na análise de eficiência do setor de distribuição de energia. Segundo Zhou *et al.* (2008), o DEA é o mais popular dos modelos de *benchmarking* utilizados pelos reguladores do

setor elétrico. De acordo com Lampe e Hilgers (2015), 11% de todas as aplicações globais da DEA, entre 1978 e 2012, estavam no setor elétrico. Por exemplo, Edvardsen (2006) descreve o modelo de regulação utilizado pela Agência Reguladora Norueguesa, que foi uma das primeiras agências européias a utilizar DEA. Vaninsky (2006) utilizou o DEA para medir a eficiência da geração de energia elétrica nos Estados Unidos. Hu e Wang (2006) analisam a eficiência energética de 19 regiões administrativas da China, no período de 1995 a 2002, utilizando DEA. Bogetoft e Otto (2011) descrevem um modelo baseado em DEA aplicado ao setor de regulação energética na Alemanha. Mais recentemente, Lopes (2015), Paradi (2015), Ray (2015), Lopes *et al.* (2016) e Banker e Zhang (2016) descrevem o modelo DEA no qual se baseia a regulação do setor de distribuição brasileiro. Mesquita (2017) aponta que metade dos países europeus pesquisados utilizam DEA, contra 30% no caso dos países latino-americanos pesquisados. Sueyoshi *et al.* (2017) apresentam um levantamento global de aplicações de DEA nos setores energético e ambiental.

### 1.5.2 COLS

Outra metodologia utilizada por algumas agências reguladoras é o *Corrected Ordinary Least Square* (COLS). Esse método estima os parâmetros de uma equação de regressão, utilizando mínimos quadrados ordinários (Draper *et al.*, 1966; Seber e Lee, 2012). Na sequência, para o caso da fronteira de custo, o modelo de regressão é deslocado para o menor valor observado entre os resíduos. Assim, o limite inferior ou a fronteira de eficiência do custo operacional é determinado. Nesse método, a equação do modelo de regressão utilizado é a função de Cobb-Douglas, apresentada primeiramente por Cobb e Douglas (1928) e aperfeiçoada por Douglas (1976). A metodologia COLS, segundo estudos de Costa *et al.* (2015a), é frequentemente utilizada por agências reguladoras da Dinamarca e da Grã-Bretanha. Vale citar também, os levantamentos de Agrell e Bogetoft (2017) e de Mesquita (2017), que indicam o uso do COLS, respectivamente, por 17% e 12% dos países europeus e latino-americanos pesquisados. Especificamente no caso brasileiro, segundo Costa *et al.* (2015b), o uso dessa metodologia se deu durante o 3CRTP, sendo preterida depois pelo emprego do DEA no 4CRTP.

### 1.5.3 SFA

Na estimação da fronteira de eficiência pelos modelos DEA e COLS, as ineficiências são estimadas como desvios dessa fronteira. Um modelo de *benchmarking* alternativo, conhecido como *Stochastic Frontier Analysis* (SFA) (Meeusen e van den Broeck, 1977;

Aigner *et al.*, 1977), decompõe os desvios da fronteira em duas componentes: ruído aleatório e ineficiência técnica e/ou alocativa. O SFA assume que os desvios da fronteira podem estar além da ineficiência puramente técnica e/ou alocativa. Distúrbios causados por fatores não gerenciáveis, como fatores contextuais, são incorporados ao componente de ruído. De acordo com Kumbhakar e Lovell (2003), na reformulação com modelos de fronteiras estocásticas, as fronteiras de produção, custo, receita e lucro são estocásticas devido à variação aleatória no ambiente operacional. Os desvios dessas fronteiras estocásticas são unilaterais, devido a vários tipos de ineficiência. Assim, haverá componentes de erro simétrico, com a finalidade de capturar os efeitos da variação aleatória no ambiente operacional, e componentes de erro unilaterais, com a finalidade de modelar os efeitos das possíveis ineficiências técnicas e/ou alocativas.

Os estudos de Kuosmanen *et al.* (2013) descrevem aplicações do SFA no contexto global de regulação elétrica. Alguns estudos abordaram o uso de SFA no SBDEE: Zanini (2004) aplicou DEA e SFA com dados do 1CRTP e relatou grandes discrepâncias entre as eficiências estimadas por cada método; Arcoverde *et al.* (2005) e Tannuri-Pianto *et al.* (2009) aplicaram a metodologia SFA para 22 distribuidoras, de 1993 a 2001. Informações socioeconômicas para cada distribuidora foram incluídas no modelo. Souza *et al.* (2010b) aplicaram DEA e SFA a dados de 40 distribuidoras brasileiras, referentes ao ano de 2001, fazendo comparações entre os resultados obtidos.

#### 1.5.4 StoNED

Kuosmanen e Kortelainen (2012) desenvolveram uma técnica, intitulada *Stochastic Non-smooth Envelopment of Data* (StoNED), cujo objetivo é combinar uma fronteira não-paramétrica do tipo DEA com um erro composto como o apresentado no SFA. Os trabalhos de Kuosmanen (2012), Kuosmanen *et al.* (2013) e Saastamoinen e Kuosmanen (2016) apresentam aplicações dessa metodologia no setor elétrico. Entretanto, de acordo com Chen *et al.* (2015), apesar de promissora, essa é uma técnica que possui limitações, necessitando investigações mais aprofundadas em suas bases axiomáticas, nas propriedades estatísticas e no seu desempenho.

#### 1.5.5 Empresa de Referência

Além dos métodos listados acima, baseados em fronteiras de eficiência, existe também o método da empresa de referência, onde se simula uma empresa virtual, operando nas mesmas condições que uma empresa real. De acordo com Souza *et al.*

(2007), para uma dada faixa de qualidade exigida pelo regulador, a empresa de referência procura utilizar eficientemente os recursos, permitindo a obtenção de estimativas dos custos operacionais eficientes, tornando-se *benchmark* para as empresas reais.

Alguns estudos apontam o emprego dessa metodologia em alguns poucos países, tais como Chile, Espanha e Suécia (Banker *et al.*, 2017). No Brasil, de acordo com Souza *et al.* (2007), essa metodologia foi utilizada durante o 1CRTP. Porém, por ser um metodologia complexa, que consome recursos e tempo na coleta de informações detalhadas sobre todo o processo de distribuição, geralmente é uma metodologia preterida por outras. Além disso, segundo a ANEEL (2006), é uma metodologia que “abre a possibilidade de imiscuir o regulador em uma espécie de micro-gestão da empresa, justamente o oposto do que recomenda boas práticas de ações reguladoras”.

Além dos estudos apresentados nessa seção, existem também, outros que comparam a utilização de diferentes metodologias para obtenção de fronteiras de eficiência no setor de regulação de energia elétrica. Por exemplo, o estudo de Souza *et al.* (2010b) compara métodos baseados em DEA a métodos estocásticos para medir a eficiência de 40 concessionárias de distribuição de energia elétrica no Brasil. Costa *et al.* (2015a) apresentam um estudo onde fazem uma avaliação estatística da utilização do DEA versus a utilização do modelo COLS Cobb-Douglas para a revisão tarifária no Brasil em 2011.

Por fim, como mencionado anteriormente, DEA, SFA e COLS são os métodos de *benchmarking* mais comuns na regulação de energia. Cada método baseia-se em algumas suposições estatísticas, paramétricas ou não-paramétricas e pode alcançar diferentes eficiências. Consequentemente, os reguladores podem usar dois ou mais métodos e estimar a eficiência de custo final, combinando as eficiências de cada método. O regulador brasileiro propôs uma eficiência média DEA e COLS Cobb-Douglas durante o 3CRTP. O regulador alemão usa as eficiências *best of* DEA e SFA, ou seja, a eficiência final é estimada usando o valor máximo entre DEA e SFA (Agrell e Bogetoft, 2017).

Na próxima seção, serão apresentadas algumas características do modelo de *benchmarking* vigente no SBDEE, bem como alguns estudos que discutem tal modelo.

## 1.6 Modelo de *Benchmarking* Vigente no SBDEE

Desde o 1CRTP, a ANEEL utiliza métodos matemáticos e estatísticos para estimar custos operacionais eficientes. De acordo com Mesquita (2017), durante o 1CRTP e o 2CRTP, que se deram entre 2003-2006 e 2007-2011, respectivamente, a ANEEL optou

por fazer uso da metodologia baseada em empresa de referência para os estabelecimento dos custos eficientes para as DSOs.

Em seguida, no 3CRTP (2011-2014), a ANEEL passou a utilizar metodologias julgadas capazes de definir fronteiras de eficiência para as DSOs. Na época, optou-se pela utilização das metodologias DEA e COLS, por serem técnicas que apresentavam casos de aplicações de sucesso em agências reguladoras de outros países, tais como Áustria, Inglaterra e Finlândia, entre outros. DEA também já havia sido utilizado pela ANEEL em 2007, porém para a regulação de empresas de transmissão de energia elétrica.

O modelo DEA utilizado no 3CRTP foi o de retornos não-decrescentes à escala (NDRS), enquanto o modelo COLS se baseou em uma função de produção do tipo Cobb-Douglas. Os escores de eficiência para cada DSO foram obtidos com as duas metodologias, calculados usando como *input* o custo operacional (OPEX)<sup>3</sup> e como *outputs*, o número de consumidores, a extensão da rede e o mercado ponderado de tensão atendido por cada DSO. Ambas as metodologias se basearam em dados de painel do período compreendido entre 2003 e 2009. Segundo o regulador, outras variáveis foram analisadas, porém foram descartadas por não possuírem significância estatística, tais como as porcentagens de linhas subterrâneas, de mercado industrial, de estradas pavimentadas e de clientes rurais, entre outras. Em um primeiro estágio, o regulador aplicava o valor médio dos escores de eficiência obtidos pelas duas metodologias (DEA e COLS). Num segundo estágio, esses escores obtidos eram corrigidos por variáveis ambientais que impactavam a operação das DSOs, tais como índice pluviométrico, unidades consumidoras por quilômetro de rede e salário médio. Três metodologias distintas eram utilizadas para compor essa correção: uma proposta por Simar e Wilson (2007), outra proposta por Banker e Natarajan (2008) e uma que se baseia na regressão Tobit (Tobin, 1958).

No 4CRTP, de 2015 a 2018, apenas o modelo de *benchmarking* DEA foi aplicado sem qualquer análise de segundo estágio. O atual modelo de *benchmarking* é apresentado na Nota Técnica 66/2015 (ANEEL, 2015) e reproduzido a seguir. A eficiência com retornos não-decrescentes na escala (NDRS), orientada à entrada de uma dada DSO, é calculada utilizando o seguinte problema de programação linear:

1. *Dados:*

- $x_i^k$ : quantidade consumida do *input*  $i$  pela concessionária  $k$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, I$   
e  $k = 1, 2, \dots, K$ ;

---

<sup>3</sup>O OPEX (*Operational Expenditure*) refere-se às despesas operacionais da DSO. Já o CAPEX (*Capital Expenditure*) diz respeito às despesas com capital ou investimentos em bens de capital pela DSO. A soma do OPEX com o CAPEX resulta no TOTEX (*Total Expenditure*).

- $y_j^k$ : quantidade produzida do *output*  $j$  pela concessionária  $k$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, J$ ;
- $y_l^k$ : quantidade produzida do *output* indesejado  $l$  pela concessionária  $k$ ,  $\forall l = 1, 2, \dots, L$ ;
- $R$ : total de restrições de limite inferior aos pesos do modelo;
- $T$ : total de restrições de limite superior aos pesos dos modelos;
- $\alpha_r$ : limite inferior atribuído ao peso  $\omega_j$  relativamente ao peso  $\kappa_i$ ,  $\forall r = 1, 2, \dots, R$ ;
- $\beta_t$ : limite superior atribuído ao peso  $\omega_j$  relativamente ao peso  $\kappa_i$ ,  $\forall t = 1, 2, \dots, T$ ;

## 2. Variáveis:

- $\kappa_i$ : peso atribuído ao *input*  $i$ ,
- $\omega_j$ : peso atribuído ao *output* ordinário  $j$  ;
- $\omega_l$ : peso atribuído ao *output* indesejado  $l$ ;
- $\varphi$ : fator para retornos não-decrescentes de escala econômica.

## 3. Função objetivo:

$h_k$ : escore de eficiência da concessionária  $k$  sob análise.

## 4. Modelo:

$$\begin{aligned}
 h_k = \quad & \max \left\{ \sum_{j=1}^J \omega_j y_j^k + \sum_{l=1}^L \omega_l (-y_l^k) + \varphi \right\} \\
 \text{sujeito à} \quad & \sum_{i=1}^I \kappa_i x_i^k \leq 1 \\
 & \sum_{j=1}^J \omega_j y_j^k + \sum_{l=1}^L \omega_l (-y_l^k) - \sum_{i=1}^I \kappa_i x_i^k + \varphi \leq 0 \\
 & -\omega_r + \alpha_r \kappa_i \leq 0 \quad \forall r = 1, 2, \dots, R \\
 & \omega_t - \beta_t \kappa_i \leq 0 \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \\
 & \kappa_i, \omega_j, \omega_l, \varphi \geq 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

A função objetivo do modelo expresso em (1.1) maximiza o escore de eficiência da concessionária  $k$  sob análise, levando-se em consideração os *inputs* envolvidos ( $x_i^k$ ), a quantidade produzida dos *outputs ordinários* ( $y_j^k$ ), a incorporação de *outputs indesejados*

( $y_i^k$ ) que impactam os custos eficientes, e o fator para retornos não-decrescentes de escala econômica ( $\varphi$ ). O sinal negativo de  $y_i^k$  se justifica pela necessidade de se validar uma hipótese básica do modelo, que é a de se assumir uma relação positiva entre *inputs* e *outputs*, e como os *outputs indesejados* se relacionam de maneira negativa com os custos, a solução foi multiplicar essa variável por (-1).

A primeira restrição do modelo (1.1) é a condição necessária para que o problema possa ser resolvido por programação linear, em substituição à alternativa não-linear fracionária (mais complicada). Ela assume, arbitrariamente, que o somatório do valor de mercado dos *inputs* consumidos seja no máximo, igual a 1. A segunda restrição garante que a concessionária  $k$  deverá ter eficiência de no máximo 100%, isto é,  $\frac{\sum_{j=1}^J \omega_j y_j^k + \sum_{l=1}^L \omega_l (-y_l^k) + \varphi}{\sum_{i=1}^I \kappa_i x_i^k} \leq 1$ . Os conjuntos de restrições que vêm na sequência do modelo (1.1) trazem restrições de limites inferiores e superiores para os pesos no modelo, que segundo o regulador, minimizam os efeitos de vieses nas estimativas em decorrência das limitações do método DEA. As condições de não-negatividade para as variáveis são expressas na última restrição.

O modelo DEA vigente proposto pela ANEEL utiliza custos operacionais (OPEX) como entrada e número de consumidores, consumo ponderado de energia, extensão de rede de alta tensão, extensão de rede de baixa tensão, extensão de rede subterrânea, perdas não-técnicas e duração de interrupção de energia como variáveis de saída. As perdas não-técnicas e a duração da interrupção de energia são incluídas como saídas negativas, o que é uma representação alternativa para insumos não desejados no modelo DEA (Cook e Zhu, 2013). As variáveis de entrada e saída estão disponíveis como valores médios de 2011 a 2013 e de 2014 a 2016 para 61 DSOs. Além disso, restrições de peso também são incluídas no modelo de programação linear.

Utilizando o DEA, os custos operacionais de cada DSO são comparados com os custos e as saídas das DSOs restantes por meio de um sistema de equações lineares. Portanto, uma fronteira eficiente é estimada. O resultado final do DEA são os escores de eficiência, ou simplesmente eficiências, que indicam a capacidade de cada DSO transformar recursos (custo) em produtos (serviços prestados). As DSOs mais eficientes são nomeadas como *benchmarks*. As eficiências estimadas no último período variam de 27,8% a 100% e têm uma média de 70,6%. Mais detalhes sobre o modelo brasileiro de *benchmarking* DEA são encontrados em ANEEL (2015) e Lopes *et al.* (2016).

Embora o modelo proposto pela ANEEL no 4CRTP esteja sendo utilizado atualmente, o modelo ainda requer melhorias, conforme se descreve na próxima seção.

## 1.7 O Problema

Após 2010, quando a ANEEL iniciou debates com a sociedade sobre as regras e metodologias para definir as receitas das DSOs através de audiências públicas, além do DEA, também foi indicado o uso de outra metodologia: o COLS Cobb-Douglas. Tal metodologia, baseada em modelos de regressão, determina a fronteira de eficiência do custo operacional das DSOs. Porém, esse modelo impõe uma estrutura de variância que é mais complexa que a estrutura de variância observada nos dados, além de apresentar a desvantagem da subdispersão, como descrito em Dey *et al.* (1997). Costa *et al.* (2015a) demonstraram que quanto maior a amostra de dados utilizados, menores os escores de eficiência são, o que se tornou uma importante deficiência do modelo para a ANEEL. Além disso, de acordo com Bogetoft e Otto (2011), essa metodologia é mais restritiva, isto é, penaliza as DSOs que não estão na fronteira. Também, vale ressaltar que, por se basear em modelos de regressão para a média, a metodologia apresenta desvantagem quando se quer estudar outros parâmetros diferentes da média.

Por outro lado, a opção baseada em DEA utiliza programação matemática para obter avaliações da eficiência relativa dos resultados, sendo por isso, uma avaliação *ex post facto*, posterior aos resultados já obtidos. Pressupõe conhecidos os valores dos insumos e dos produtos gerados e busca, para cada DSO em questão, pesos relativos entre os insumos e entre os produtos gerados que maximizem a sua eficiência relativa. Ainda, por ser uma técnica não-paramétrica, o DEA não permite a extrapolação de suas conclusões, que estão restritas às DSOs e às variáveis em análise.

De acordo com Costa *et al.* (2015a), para superar as limitações dos dois métodos (DEA e COLS Cobb-Douglas), a ANEEL aplicava o valor médio das pontuações de eficiência obtidos nos dois casos, não sendo por isso, garantia de melhores resultados. Outro estudo iniciado em Costa *et al.* (2015a) aponta discrepâncias entre as duas metodologias. *A priori*, os modelos baseados em DEA se mostraram mais consistentes em relação aos modelos estatísticos deterministas, porém, ainda com algumas deficiências.

Até os dias atuais (vigência do 4CRTP), a ANEEL ainda não possui uma metodologia livre de distorções, capaz de apresentar resultados e análises mais verossímeis da realidade. Se por um lado, o método baseado em DEA apresenta algumas incoerências, a metodologia alternativa considerada anteriormente pela agência, o COLS Cobb-Douglas, também apresentava discrepâncias danosas à análise de resultados.

Algumas inconsistências ainda permanecem na metodologia atualmente empregada.



Por exemplo, de acordo com Banker (2011), uma das maiores preocupações é o uso de um modelo DEA - NDRS como um substituto para um modelo mais frequentemente utilizado, com retornos variáveis à escala. Em congruência, Bogetoft (2014), Bogetoft e Lopes (2015) e Lopes *et al.* (2016) dissertam e sugerem que as medidas utilizadas pela ANEEL podem ser refinadas por meio de: inclusão de variáveis ambientais no modelo DEA, visando corrigir os escores de eficiência; não utilização de restrições aos pesos do modelo; remoção de variáveis com dados zerados; tratamento de *outliers*; estudo de consistência das variáveis; e, correção das distorções entre as premissas do DEA e o modelo implementado. Veronese (2015), Gil *et al.* (2017) e Veronese *et al.* (2018) apontam que as eficiências das DSOs brasileiras mudam significativamente se uma análise de segundo estágio for conduzida. Além destes, Semolini (2014), Ray (2015), Paradi (2015), Banker e Zhang (2016) e Banker *et al.* (2017) também apontam algumas inconsistências consideradas graves na metodologia atual do regulador brasileiro. Vale ressaltar também que, de acordo com Tsionas (2002), é inapropriada a utilização de um modelo de *benchmarking* isolado, sugerindo o emprego de múltiplos modelos para uma análise mais consistente.

Apesar das grandes melhorias do modelo de *benchmarking* de distribuição de eletricidade no Brasil nos últimos ciclos periódicos de revisão tarifária, as eficiências de custo estimadas apresentaram grande variabilidade de um ciclo de revisão anterior para o seguinte. Infelizmente, mesmo com preciosas e fundadas sugestões ofertadas à ANEEL, a problemática da ausência de implementação de uma metodologia acurada ainda persiste! Com isso, a definição dos escores de eficiência das DSOs fica prejudicada, e conseqüentemente, tomadas de decisão se mantêm deficientes. Logo, existe uma lacuna a ser preenchida pela ANEEL: **qual metodologia utilizar e/ou ser desenvolvida, de maneira que se possa definir satisfatoriamente, uma fronteira de custos eficientes para as DSOs brasileiras?**

## 1.8 Motivações para o Estudo do Problema

De acordo com Haney e Pollit (2009), o problema de definição de fronteiras de *benchmark* é um problema importante e desafiador tanto para os profissionais responsáveis pela gestão dos custos e tarifas de vários setores da economia, quanto para os pesquisadores de áreas afins. Uma das razões de sua importância é por este ser um problema comum a um grande número de situações reais de tomada de decisão, tais como os problemas de tarifação que surgem na maioria das agências reguladoras do setor elétrico, espalhadas pelo mundo. Tão importante quanto, o problema também diz respeito aos custos da

energia, que serão repassados ao mercado, acarretando em possíveis benefícios ou prejuízos para os produtores e consumidores finais.

Do ponto de vista teórico, o problema é desafiador por pertencer à classe dos problemas de *benchmarking* para avaliação de eficiência, discutidos com mais detalhes em Jamasb e Pollitt (2001) e em Franco e Fortuna (2003), os quais vêm sendo utilizados em ascendência nos últimos anos, por agências reguladoras do setor de energia elétrica, conforme destacado por Costa *et al.* (2015a).

Devido à complexidade do problema de tarifação de energia pelas agências reguladoras, segundo Zhou *et al.* (2008), trabalhos foram desenvolvidos baseando-se em procedimentos diversos para solucioná-lo, especialmente no que tange aos métodos não-paramétricos para definição de *benchmarks*, como é o caso do DEA. Porém, esses métodos podem apresentar inconsistências, e não conseguem garantir análises mais verossímeis da realidade, como já apontado anteriormente.

No entanto, apesar dessa alta complexidade, é motivador o estudo de situações em que se possa investigar métodos alternativos ou aprofundar os atualmente empregados, com a finalidade de se esclarecer dados, variáveis e modelos, para que as barreiras encontradas até o momento possam ser transpostas. A ANEEL vem implementando metodologias, sem contudo, resultar numa solução refinada do problema de definição de custos eficientes para a tarifação energética. Logo, existem possibilidades de melhorias e proposições de novas metodologias.

É sabido que o DEA é uma metodologia determinista descritiva, isto é, as DSOs observadas são comparadas com *benchmarks* determinados como combinações lineares dessas DSOs. Caso se queira fazer especulações e inferências sobre DSOs não observadas, o método determinista falha. Uma boa alternativa seria considerar o *Stochastic Data Envelopment Analysis* (SDEA), introduzido inicialmente por Land *et al.* (1993), cuja ideia básica reside no fato de que seria mais provável encontrar mais *benchmarks*, se mais DSOs fossem observadas. Logo, a partir de técnicas de reamostragem, como é o caso do *bootstrap* de Efron (1979), e de inferências estatísticas, o SDEA amplia estocasticamente o número de DSOs consideradas. Uma boa revisão sobre esse método, considerado recente, pode ser encontrada em Olesen e Petersen (2016).

Também vale a pena destacar que, nos modelos de *benchmarking* determinísticos, como é o caso do DEA utilizado pela ANEEL, os desvios em relação às fronteiras de custo são atribuídos única e exclusivamente à ineficiência técnica e/ou alocativa da DSO em questão. Porém, sabe-se que perturbações aleatórias que estão fora do controle da DSO,

tais como intempéries climáticas, greves e crises políticas, têm influência significativa no cenário produtivo. Uma proposta alternativa consiste na implementação de modelos de *benchmarking* estocásticos, tal como o *Stochastic Frontier Analysis* (SFA), nos moldes daqueles introduzidos por Meeusen e van den Broeck (1977) e Aigner, Lovell, e Schmidt (1977), cujas vantagens residem justamente no fato destes reconhecerem que os desvios das fronteiras podem ser de ordem técnica, alocativa ou também aleatória.

De acordo com Kumbhakar e Lovell (2003), na reformulação com modelos de *benchmarking* estocásticos, as fronteiras de custo são estocásticas devido à variação aleatória no ambiente operacional. Os desvios dessas fronteiras estocásticas são unilaterais, devido a vários tipos de ineficiência. Assim, haverá componentes de erro simétrico, com a finalidade de capturar os efeitos da variação aleatória no ambiente operacional, e componentes de erro unilaterais, com a finalidade de modelar os efeitos das possíveis ineficiências técnicas e/ou alocativas. Na literatura, existem alguns trabalhos que abordaram a temática do SFA no setor de regulação elétrica brasileira, podendo-se citar: Zanini (2004) aplicou o DEA e o SFA conjuntamente a dados disponibilizados no 1CRTP, tendo encontrado discrepâncias entre os escores medidos pelas duas metodologias, apontando como justificativa que mais testes, formas funcionais diferentes para as funções de custo e outras suposições probabilísticas deveriam ser investigadas no futuro; Arcoverde *et al.* (2005) e Tannuri-Pianto *et al.* (2009) aplicaram a metodologia SFA para dados de 22 distribuidoras, do período compreendido entre 1993 e 2001, levando-se em consideração indicadores sócio-econômicos da área de atuação de cada empresa; Souza *et al.* (2010b) aplicaram tanto o DEA quanto o SFA a dados de 40 distribuidoras brasileiras, referentes ao ano de 2001, fazendo comparações entre os resultados obtidos. Porém apontam para a necessidade de uma melhor especificação dos modelos de SFA e do próprio DEA.

Apesar de significativas contribuições, de acordo com Arcoverde *et al.* (2005), os desdobramentos e as possibilidades ofertadas pelo SFA ainda são pouco explorados e pouco empregados no setor de regulação energética brasileira, quase sempre configurando-se em estudos pontuais, desprovidos de aprofundamentos e visão sistêmica. Tal fato também contribui para a motivação desse estudo.

Por fim, uma motivação a mais diz respeito ao fato de que, muito embora os incentivos à regulação no setor energético estejam bem disseminados no contexto global, por outro lado, de acordo com Haney e Pollit (2011, 2009), o mesmo não se pode dizer sobre as boas práticas na aplicação de métodos de *benchmarking*. Apenas alguns poucos países seguem os princípios dessas melhores práticas, e muitos parecem ser influenciados

por práticas regionais, independentemente destas serem as melhores, ou se deparam com complicações na escolha do método mais adequado para o contexto em que estão inseridos. Prova disso pode ser encontrada no trabalho de Haney e Pollit (2011), que apresentam uma espécie de índice capaz de traduzir o grau de utilização de boas práticas de *benchmarking* dos reguladores de 40 países amostrados. Desses, 30 países (75% da amostra) apresentam tal índice abaixo de 3, numa escala que varia de 0 a 8, em ordem crescente de boas práticas. Tristemente, o Brasil apresenta índice igual a 2,25. Também não há uma conclusão clara sobre qual método é melhor ou superior. Fato este que, segundo Kuosmanen *et al.* (2013), levanta preocupações sobre a adequação do emprego de qualquer método único. Além disso, estes autores observam que, apesar dos escores de eficiência de diferentes métodos serem usualmente altamente correlacionados, as implicações econômicas dos resultados são substanciais.

## 1.9 Objetivo

Partindo da questão-problema sob estudo<sup>4</sup>, objetiva-se validar a aceitação das seguintes hipóteses associadas:

*H<sub>1</sub>: pode-se replicar, o mais próximo possível, as eficiências estimadas das DSOs brasileiras, utilizando uma abordagem robusta de SFA para as mesmas entradas e saídas do modelo empregado atualmente pelo regulador.*

*H<sub>2</sub>: é possível propor uma abordagem alternativa e robusta de SFA, utilizando a informação disponível, incluindo uma componente ambiental.*

## 1.10 Organização do Texto

Além desse capítulo introdutório de contextualização do estudo, esse texto foi dividido em capítulos temáticos com a finalidade de facilitar o entendimento do trabalho por parte do leitor. São apresentados, nessa ordem: no Capítulo 2, conceituam-se e discutem-se as chamadas fronteiras de produção e de custo, as eficiências técnicas e alocativas, apresentando métodos de estimação frequentista e Bayesiana para a estimação da fronteira estocástica de custo, discutindo-se também a possibilidade da inserção de variáveis exógenas ao SFA. No Capítulo 3, são apresentadas as parametrizações e

---

<sup>4</sup>“Qual metodologia utilizar e/ou ser desenvolvida, de maneira que se possa definir satisfatoriamente, uma fronteira de custos eficientes para as DSOs brasileiras?”

modelagens propostas por esse trabalho. As discussões e comentários sobre os resultados estão presentes no Capítulo 4. Por fim, o Capítulo 5 traz as considerações finais.



## Análise de Fronteira Estocástica (SFA)

Nesse segundo capítulo, são apresentadas as principais características do SFA, um poderoso e promissor método de *benchmarking* estocástico, bem como uma revisão da literatura sobre o mesmo, abrindo caminho para um maior e melhor entendimento da metodologia proposta por esse trabalho, a fim de se obter possíveis respostas e validações para o questionamento e hipóteses levantadas no capítulo anterior.

### 2.1 Preliminares

Kumbhakar e Lovell (2003) apresentam um rico detalhamento dos antecedentes intelectuais dos modelos de análise da fronteira estocástica, com destaque aqui, para o fato de a literatura teórica sobre eficiência produtiva, que começou na década de 1950 com os trabalhos de Koopmans (1951), Debreu (1951), Sherphard (1953) e Farrel (1957), ser a que mais influenciou diretamente no desenvolvimento do SFA.

As origens do SFA remetem aos trabalhos de Meeusen e van den Broeck (1977) e Aigner, Lovell, e Schmidt (1977), publicados com diferença de um mês entre si. Pouco tempo depois, também surgiu um terceiro artigo, publicado por Battese e Corra (1977), autores estes que foram revisores dos dois trabalhos anteriores. Estes três modelos de SFA originais, segundo Kumbhakar e Lovell (2003), compartilham uma estrutura de erros aleatórios e erros causados por ineficiências. De maneira geral, em ambos trabalhos, o modelo pode ser expresso como:

$$y = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) \cdot e^{\nu-u}, \quad (2.1)$$

onde  $y$  é saída escalar da produção,  $\mathbf{x}$  é um vetor de entradas e  $\boldsymbol{\beta}$  é um vetor de parâmetros de tecnologia. O primeiro componente de erro  $\nu \sim N(0, \sigma_\nu^2)$  objetiva capturar os efeitos do ruído aleatório, enquanto o segundo componente de erro  $u \geq 0$  destina-se a capturar os efeitos da ineficiência técnica, tendo seu comportamento descrito por distribuições de probabilidades distintas em cada um dos três trabalhos acima. Com isso, os produtores operam sobre ou abaixo da sua fronteira de produção estocástica  $y = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}) \cdot e^\nu$  de acordo com  $u = 0$  ou  $u > 0$ .

Desde a publicação destes três trabalhos iniciais até os dias atuais, muitas tem sido as contribuições de pesquisadores de várias partes do mundo. Podem-se destacar, entre outros: (i) - Forsund *et al.* (1980) e Jondrow *et al.* (1982) que atuaram para obter estimativas de eficiência específicas para os produtores considerados no estudo em questão; (ii) - Greene (1980a,b), Stevenson (1980) e Lee (1983) dedicaram-se ao desenvolvimento de distribuições de dois parâmetros mais flexíveis para o componente de erro de ineficiência; (iii) - Schmidt e Lovell (1979) e Kopp e Diewert (1982) procuraram decompor a estimativa de  $v$  em estimativas dos custos separados de ineficiência técnica e alocativa, com êxitos parciais; (iv) - Pitt e Lee (1981) e Schmidt e Sickles (1984) estenderam as técnicas de estimativa da máxima verossimilhança aos dados de painel, tendo posteriormente, relaxamentos propostos por Cornwell *et al.* (1990), Kumbhakar (1990) e por Battese e Coelli (1992); (v) - Kumbhakar *et al.* (1991), Reifschneider e Stevenson (1991), Huang e Liu (1994) e Battese e Coelli (1995) propuseram abordagens onde as variáveis exógenas são incorporadas ao erro de ineficiência; (vi) - Wang (2002) apresenta modelos com heterocedasticidade e causas exógenas da ineficiência; (vii) - Kumbhakar e Wang (2005) discutem os modelos de crescimento econômico; (viii) - Greene (2005), Wang e Ho (2010), Kumbhakar *et al.* (2014) e Chen *et al.* (2014) apresentam avanços em modelos com dados em painel.

Contudo, desses 40 anos de evolução no entendimento do SFA, despreendem-se algumas lacunas ainda não preenchidas ou até mesmo não exploradas a fundo, como é o caso da dificuldade de decomposição da estimativa de  $u$  em estimativas dos custos separados de ineficiência técnica e alocativa, ou como a maior parte dos estudos terem se concentrado sobre funções de produção, sendo timidamente estendido às funções de custos, receitas e lucros (Kumbhakar *et al.*, 2015).

Como já dito anteriormente, o objetivo desse capítulo perpassa pelo estudo, apro-



fundamento e melhor entendimento das metodologias de análise de fronteiras estocásticas, com possibilidade de sugerir melhorias para estas ou apresentar novas metodologias para o SBDEE. Sendo assim, as subseções que se seguem, trazem considerações gerais, julgadas importantes, para um melhor entendimento do método de SFA e futuro embasamento teórico para as proposições que advirem.

## 2.2 Fronteira de Produção e Eficiência Técnica

De maneira geral, um processo produtivo é composto por um processo de transformação (*throughput*), tendo insumos como entradas (*inputs*) e, produtos ou serviços como saídas (*outputs*) desse processamento, conforme se representa na Figura 2.1.

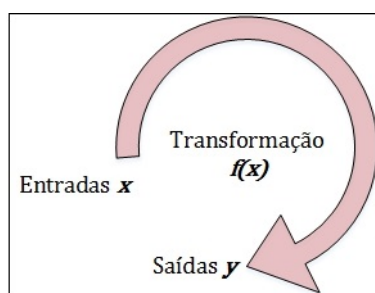


Figura 2.1: Representação genérica de um processo produtivo.

A transformação produtiva pode ser feita de diferentes maneiras, de acordo com o conjunto de possibilidades de produção (CPP), indicando todas as maneiras tecnologicamente viáveis de se transformar os *inputs*  $x$  nos *outputs*  $y$ .

De acordo com os princípios econômicos, há restrições tecnológicas que limitam o CPP. Nesse contexto, para uma certa tecnologia dada, a função fronteira de produção  $y = f(\mathbf{x})$ , ou simplesmente função de produção, é uma função que indica a máxima quantidade de produto  $y$  que pode ser obtida a partir dos *inputs*  $\mathbf{x}$  (orientação segundo *outputs*). Ou analogamente,  $y = f(\mathbf{x})$  indica o mínimo conjunto de *inputs*  $\mathbf{x}$  necessários para produzir uma certa quantidade de *outputs*  $y$  (orientação segundo *inputs*). A Figura 2.2 ilustra essas noções.

Baseando-se na observação da Figura 2.2, destaca-se que aqueles produtores que podem ser localizados sobre a função de produção  $y = f(\mathbf{x})$  possuem eficiência técnica, pois alcançaram a máxima produção para os recursos utilizados. Por outro lado, produtores que por ventura sejam localizados abaixo de  $y = f(\mathbf{x})$  apresentam ineficiência

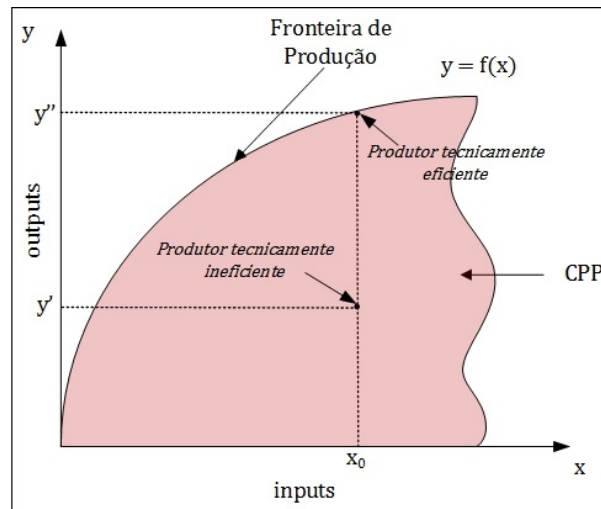


Figura 2.2: Conjunto de Possibilidades de Produção (CPP) e fronteira de produção.

técnica, uma vez que não atingiram o máximo de produção possível para aqueles recursos utilizados, ou não conseguiram produzir o mesmo nível atual, utilizando-se menos recursos. Esses conceitos de eficiência e ineficiência técnica condizem com a definição de eficiência de Pareto-Koopmans (Koopmans, 1951). Matematicamente, a função de produção pode ser expressa como:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_J) \equiv f(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

Sendo  $\mathbf{x}$  um vetor  $J$ -dimensional não-negativo de *inputs* (escalares) e  $y$  representa o *output* (escalar) obtido a partir de  $f(\cdot)$ , isto é, a partir da tecnologia empregada. De acordo com Chambers (1988), uma função de produção bem definida deve satisfazer às seguintes condições:

- (i)  $f(\mathbf{x})$  deve ser monótona, isto é,  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{x}'$ ;
- (ii)  $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}_+$ , finita e única  $\forall \mathbf{x}_+$ ;
- (iii)  $f(\mathbf{x})$  deve ser contínua e duas vezes diferenciável;
- (iv)  $f(0) = 0$ , ou seja, sem *inputs* não há *outputs*;
- (v) O conjunto de possibilidades de produção (CPP) deve ser fechado e não-vazio  $\forall y > 0$ ;

(vi) O CPP deve ser convexo, o que implica na quasi-concavidade de  $f(\mathbf{x})$ .

A Figura 2.3 a seguir, apresenta um exemplo de tecnologia de produção composto por dois *inputs* ( $x_1$  e  $x_2$ ) e um único *output* ( $y$ ). A função de produção também está representada na parte (a) dessa figura.

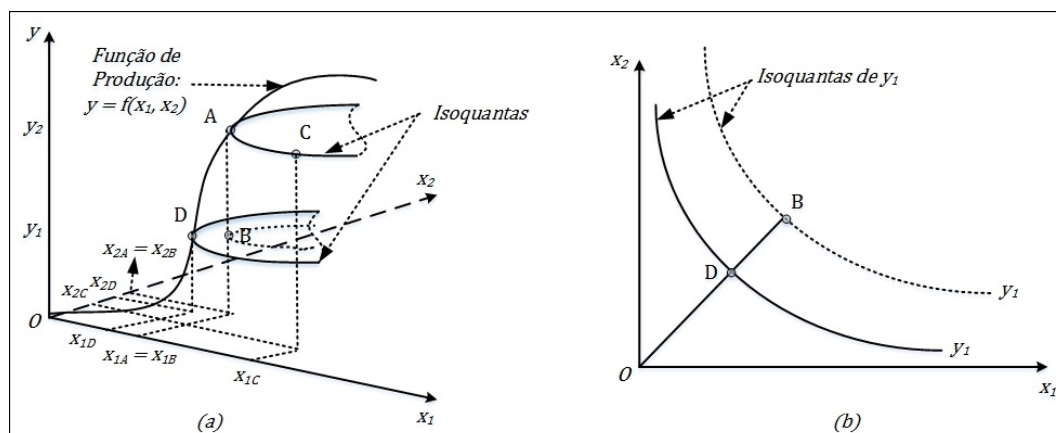


Figura 2.3: Exemplo de uma função de produção e de isoquantas.

Segundo a orientação a *outputs*, a função de produção  $y = f(x_1, x_2)$ , na Figura 2.3(a), representa a produção máxima para uma determinada combinação de *inputs* ( $x_1, x_2$ ). Os produtores que estiverem situados sobre essa função (no caso, sobre a superfície do sólido) serão tecnicamente eficientes, como é o caso dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$ . Entretanto, pode haver desvios em relação à função de fronteira de produção, como representado pelo ponto  $B$ . Observe que utilizando os mesmos recursos do plano de produção dado em  $B$ , poder-se-ia alcançar um nível de produção maior,  $y_2 > y_1$ , dado em  $A$ , caracterizando com isso, a falta de eficiência do produtor em  $B$ .

Debreu (1951) e Farrell (1957) propuseram uma métrica para quantificar a eficiência técnica de um produtor, denominada Métrica Radial de Debreu-Farrel. Segundo esta, a eficiência técnica com orientação a *output* é dada por:

$$TE = \frac{y}{f(\mathbf{x})}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \text{ e } y \in \mathfrak{R}_+, \quad (2.3)$$

sendo  $y$  a produção observada e  $f(\mathbf{x})$  a máxima quantidade de produto que pode ser obtida a partir do vetor de *inputs*  $\mathbf{x}$ . Assim, observa-se que  $0 < TE < 1$  e que, a ineficiência técnica pode ser obtida através de  $TI = 1 - TE$ . Além disso, estes autores

propuseram que o nível de produção  $y$  observado, sob a ótica da orientação a *output*, pode ser formulado matematicamente como:

$$y = f(\mathbf{x}) \cdot TE, \quad (2.4)$$

isto é, o nível máximo de produção  $y$  sofre influência da eficiência técnica. Considerando valores pequenos de TI, pode-se fazer a aproximação  $TE = 1 - TI \approx e^{-TI}$  (Kumbhakar *et al.*, 2015). Assim,

$$y = f(\mathbf{x}) \cdot e^{-TI}. \quad (2.5)$$

A fim de simplificar um pouco mais a notação, seja considerar  $TI = u$ , o que leva ao seguinte resultado:

$$y = f(\mathbf{x}) \cdot e^{-u}, \quad \text{com } u \geq 0. \quad (2.6)$$

Observando a equação (2.6), conclui-se que a presença de ineficiência técnica (isto é, quando  $u > 0$ ) acarreta uma produção aquém da máxima permitida pela função de produção  $f(\mathbf{x})$ .

Por outro lado, segundo a orientação a *inputs*, a função de produção  $y = f(x_1, x_2)$ , na Figura 2.3(a), representa o mínimo conjunto de *inputs* necessários para produzir quantidades fixas do *output*  $y$ . Novamente, os produtores que estiverem situados sobre essa função serão tecnicamente eficientes, como é o caso dos produtores situados em  $A$ ,  $C$  e  $D$ . Desvios também podem acontecer em relação à função de produção, caracterizando a presença de ineficiência técnica, como representado por  $B$ . Observa-se que o mesmo nível de produção alcançado por  $B$ ,  $y_1$ , poderia ser alcançado utilizando-se menos recursos, tal como em  $D$ . A Figura 2.3(b) apresenta o gráfico das isoquantas de produção. Observa-se que o mesmo nível de produção  $y_1$  pode ser alcançado ao deslocar-se de  $B$  para  $D$ , porém com redução de insumos.

Nesse contexto de orientação a *inputs*, Debreu (1951) e Farrell (1957) propuseram que o nível de produção  $y$  observado, pode ser determinado como:

$$y = f(\mathbf{x} \cdot TE), \quad (2.7)$$

isto é, a utilização dos insumos sofre influência da eficiência técnica.

Novamente, considerando valores pequenos de  $TI$ , pode-se fazer a aproximação  $TE = 1 - TI \approx e^{-TI}$  (Kumbhakar *et al.*, 2015), o que leva a:

$$y = f(\mathbf{x} \cdot e^{-TI}). \quad (2.8)$$

Simplificando a notação, pode-se escrever  $TI = u$ , gerando o seguinte resultado:

$$y = f(\mathbf{x} \cdot e^{-u}), \quad \text{com } u \geq 0. \quad (2.9)$$

Assim, verifica-se na equação (2.9) que, na ausência de ineficiência técnica, o nível de produção alcançado é aquele máximo dado pela função de produção  $f(\mathbf{x})$ .

## 2.2.1 Algumas Formas Funcionais para a Função de Produção

Existem várias formas funcionais para a função de produção apontadas pela literatura micro e macroeconômica. Dentre elas, duas têm uso destacado no SFA: Função Cobb-Douglas e Função Logarítmica Transcendental (Translog).

### 2.2.1.1 Função de Produção Cobb-Douglas

A função de produção de *Cobb-Douglas* é talvez, a mais proeminente na literatura, e teve sua estrutura atribuída ao trabalho de Cobb e Douglas (1928). Considerando  $x_j$  como sendo os *inputs*,  $y$  o *output* e,  $\beta_j$  os coeficientes, sua forma funcional é:

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_J) \\ &= \beta_0 \prod_{j=1}^J x_j^{\beta_j}, \quad \text{onde} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\beta_0 > 0, \quad 0 < \beta_{j, j \neq 0} < 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^J \beta_j = 1.$$

Essa função é facilmente linearizável. Basta para isso, aplicar logaritmos a ambos os lados da igualdade, isto é:

$$\ln y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \dots + \beta_J \ln x_J. \quad (2.11)$$

### 2.2.1.2 Função de Produção Translog

Uma alternativa à função de Cobb-Douglas é a função *Logarítmica Transcendental* de produção, ou mais comumente conhecida como função *translog*. Foi apresentada primeiramente por Christensen *et al.* (1971). Pode ser interpretada como a aproximação de uma função de produção arbitrária,  $y = f(\mathbf{x})$ , por uma expansão de segunda ordem em série de Taylor de  $\ln y$ , em potências de  $\ln x_j$ . Sua forma funcional é dada por:

$$\ln y = \beta_0 + \sum_{j=1}^J \beta_j \ln x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \beta_{jk} \ln x_j \ln x_k, \quad (2.12)$$

onde:  $\beta_0$  é igual ao valor do logaritmo de  $f(\mathbf{x})$ , no ponto de expansão  $a$ , isto é,  $\beta_0 = \ln f(a)$ ;  $\beta_j$  ( $j \neq 0$ ) são as primeiras derivadas parciais de  $\ln f(\mathbf{x})$  com relação à variável  $x_j$ ; e,  $\beta_{jk}$  são as segundas derivadas parciais de  $\ln f(\mathbf{x})$ , medidas no ponto de expansão  $a$ . Pode-se observar também que, quando os produtos cruzados são nulos, a função *translog* se reduz à função *Cobb-Douglas*. Para que se possa testar hipóteses da teoria de produção, tais como homogeneidade, separabilidade e mudanças tecnológicas, devem-se impor as seguintes restrições aos parâmetros:

$$\beta_{jk} = \beta_{kj}, \quad \sum_{j=1}^J \beta_j = 1, \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \beta_{jk} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_{jk} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, J, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^J \beta_{jk} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, J.$$

Segundo Behr (2015), essa função apresenta uma flexibilidade maior quando comparada com a função Cobb-Douglas descrita acima. Isso porquê, usando dualidade, pode-se mostrar que a função *translog* de produção é idêntica à função *translog* de custo, permitindo assim, análises simultâneas tanto do volume produzido quanto dos custos envolvidos (Albuquerque, 1987). Outra observação interessante diz respeito ao fato da função *translog* possuir mais variáveis que a função Cobb-Douglas.

## 2.3 Eficiência Técnica *versus* Eficiência Alocativa

Do ponto de vista econômico, nem sempre um produtor que é tecnicamente eficiente também apresentará eficiência econômica, pois ele pode utilizar um conjunto de *inputs* que não é o de menor custo. Assim, para ser economicamente eficiente, o produtor além de

ser tecnicamente eficiente, deve possuir eficiência alocativa, isto é, empregar os insumos de menor custo.

Portanto, supondo que são conhecidos os preços  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$  do vetor de *inputs*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ , um produtor procurará, racionalmente, produzir o conjunto de *outputs*  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m$  com o menor custo possível. Logo, segundo Kumbhakar e Lovell (2003) e Kumbhakar *et al.* (2015), o padrão contra o qual a performance do  $i$ -ésimo produtor passa a ser avaliado, migra da fronteira de produção para a denominada *fronteira de custo* e a eficiência passa a ter duas componentes: uma técnica e outra alocativa. Juntas, essas componentes constituem a eficiência econômica do produtor. Maiores detalhes são apresentados na seção que se segue.

## 2.4 Fronteira de Custo e Eficiência Econômica

A fronteira de custo indica o mínimo custo necessário para produzir um conjunto de *outputs*, a partir do preço dos *inputs* e da tecnologia de produção empregada. A Figura 2.4 representa essa noção. Como pode se observar, os produtores eficientes estão localizados sobre a fronteira de custo, enquanto que os produtores ineficientes estão localizados acima dela, pois seus custos são maiores que o mínimo definido pela fronteira.

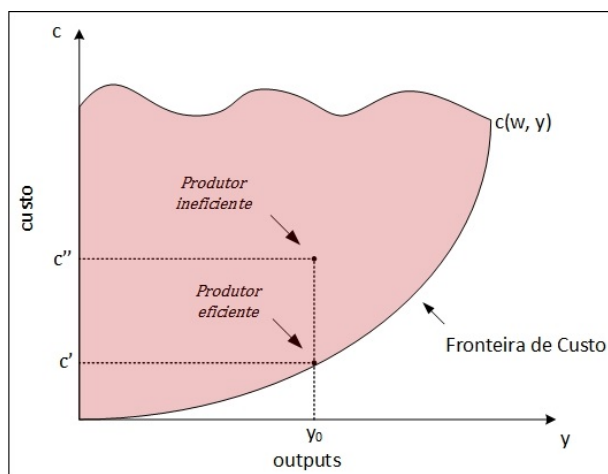


Figura 2.4: Fronteira de custo.

Assim como ocorre com a fronteira de produção, a fronteira de custo também funciona como *benchmark*, contra a qual podem ser comparados os desempenhos de

todos os produtores (ou DMUs). Matematicamente, a função fronteira de custo pode ser expressa como:

$$C(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}\mathbf{x} \cdot e^u, \quad \text{com } u \geq 0. \quad (2.13)$$

Nessa expressão,  $\mathbf{w}$  é o vetor de preços dos *inputs*  $\mathbf{x}$ ,  $y$  é o nível observado de *output* e  $u$  representa uma eventual ineficiência do produtor.

Observa-se em (2.13) que, a função de custo mede o custo de produzir  $y$  quando os *inputs* são ajustados pela sua eficiência. Assim, na presença de ineficiências ( $u > 0$ ), o custo atual (*expenditure*),  $E = \mathbf{w}\mathbf{x}e^u$ , pode ser maior que o custo mínimo,  $\mathbf{w}\mathbf{x}$ .

De acordo com Chambers (1988), uma função de custo bem definida deve satisfazer às seguintes condições:

- (i)  $C(\mathbf{w}, y)$  deve ser não decrescente em  $y$ , isto é,  $C(\mathbf{w}, y) \geq C(\mathbf{w}, y')$   $\forall y \geq y'$ ;
- (ii)  $C(\mathbf{w}, y)$  deve ser não decrescente em  $\mathbf{w}$ , isto é,  $C(\mathbf{w}', y) \geq C(\mathbf{w}, y)$   $\forall \mathbf{w}' \geq \mathbf{w}$ ;
- (iii)  $C(\mathbf{w}, y)$  deve ser não-negativa, isto é,  $C(\mathbf{w}, y) > 0$   $\forall \mathbf{w} > 0$  e  $y > 0$ ;
- (iv)  $C(\mathbf{w}, y)$  deve ser convexa e contínua em  $\mathbf{w}$ ;
- (v)  $C(\mathbf{w}, 0) = 0$ , isto é, não há custos fixos;
- (vi)  $C(t\mathbf{w}, y) = tC(\mathbf{w}, y)$ , com  $t > 0$ , isto é, se todos os custos forem multiplicados por uma constante  $t > 0$ , é equivalente a ter o custo mínimo multiplicado por  $t$ ;
- (vii)  $x_i(\mathbf{w}, y) = \frac{\partial C(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i}$ , isto é, o único vetor de minimização dos custos da demanda é igual ao gradiente de  $C(\mathbf{w}, y)$  em  $w$ , desde que a função de custo seja diferenciável em  $w_i$ .

Também, pode-se escrever a seguinte expressão para o cálculo da eficiência econômica do  $i$ -ésimo produtor:

$$\begin{aligned} EE_i &= \frac{Custo^{min}}{Custo_i^{atual}} = \frac{Custo^{min}}{E_i}, \\ &= \frac{\mathbf{w}\mathbf{x}}{\mathbf{w}\mathbf{x}e^{u_i}} = e^{-u_i} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \quad \text{e } y \in \mathfrak{R}_+. \end{aligned} \quad (2.14)$$



Assim, observa-se que  $0 < EE_i < 1$  e que, a ineficiência econômica pode ser obtida através de  $EI_i = 1 - EE_i$ .

### 2.4.1 Algumas Formas Funcionais para a Função de Custo

Tal como visto para a função de produção, existem na literatura, algumas formas funcionais para a função de custo  $C(\mathbf{w}, y)$ . Dentre elas, destacam-se a função de custo *Cobb-Douglas* e a função de custo *Translog*.

#### 2.4.1.1 Função de Custo Cobb-Douglas

Considerando  $\mathbf{x}$  como sendo o vetor de *inputs*,  $\mathbf{y}_i = (y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{Mi})$ , com todas as componentes não-negativas, como sendo o vetor de *outputs* gerados pelo produtor  $i$ ,  $\mathbf{w}_i = (w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{Ni}) > 0$  é o vetor de preços dos *inputs* utilizados pelo produto  $i$ ,  $\beta$  é o vetor de parâmetros de tecnologia (coeficientes) a serem estimados e,  $E_i$  como sendo a despesa (*expenditure*) incorrida pelo produtor  $i$ , a forma funcional da função de custos Cobb-Douglas para o caso de *output* único é definida como:

$$\begin{aligned} E_i &= C(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}_i, \beta) \cdot e^{u_i} \\ &= \beta_0 y_i^{\beta_y} \prod_{j=1}^J w_{ji}^{\beta_j} e^{\epsilon_i}, \quad \text{onde} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1 \quad \implies \quad \beta_l = 1 - \sum_{j=1; j \neq l}^J \beta_j, \quad \text{e}$$

$\epsilon_i = \nu_i + u_i$  é um termo de erro composto pelos ruídos aleatórios ( $\nu_i$ ) e pela ineficiência econômica ( $u_i$ ), associado ao produtor  $i$ . Essa função é facilmente linearizável. Basta para isso, aplicar logaritmos a ambos os lados da igualdade, isto é:

$$\ln E_i = \ln \beta_0 + \beta_y \ln y_i + \sum_{j=1}^J \beta_j \ln w_{ji} + \nu_i + u_i \quad (2.16)$$

De acordo com Zanini (2004), a simplicidade é o maior trunfo dessa função. Porém, apresenta os inconvenientes de não acomodar multi-*outputs* sem violar as propriedades de convexidade do espaço de produtos e, quando se trata de estruturas de produção mais complexas, resulta em estimativas tendenciosas para as ineficiências de custo.

### 2.4.1.2 Função de Custo Translog

Uma alternativa à função de Cobb-Douglas, e que permite acomodar múltiplos produtos sem incorrer em violações de convexidade, é a função *translog* de custo. Sua forma funcional é dada por:

$$\begin{aligned} \ln E_i = & \beta_0 + \sum_{m=1}^M \alpha_m \ln y_{mi} + \sum_{j=1}^J \beta_j \ln w_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{h=1}^M \alpha_{mh} \ln y_{mi} \ln y_{hi} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{h=1}^J \beta_{jh} \ln w_{ji} \ln w_{hi} + \sum_{j=1}^J \sum_{h=1}^M \gamma_{jh} \ln w_{ji} \ln y_{hi} + \nu_i + u_i, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde,

$$\beta_{jh} = \beta_{hj}, \quad \alpha_{mh} = \alpha_{hm}, \quad \sum_{j=1}^J \beta_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_{jh} = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, J \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^J \gamma_{jh} = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, J.$$

Assim como no caso da produção, a função translog de custo apresenta mais variáveis que a função de Cobb-Douglas. Por isso, de acordo com Zanini (2004), a função translog, apesar de sua maior flexibilidade para acomodar múltiplos produtos, pode apresentar problemas de multicolinearidade, quando muitos regressores forem considerados.

### 2.4.1.3 Comentário Sobre Essas Formas Funcionais

Como já dito, as funções paramétricas de Cobb-Douglas e translog são as mais comumente utilizadas no SFA. No entanto, a convexidade de custo é obtida com uma função translog. Isto é ilustrado na Figura 2.5, onde um SFA paramétrico que utiliza uma função translog possui uma convexidade mais suave em comparação com a função Cobb-Douglas e o atual modelo DEA-NDRS utilizado pela ANEEL.

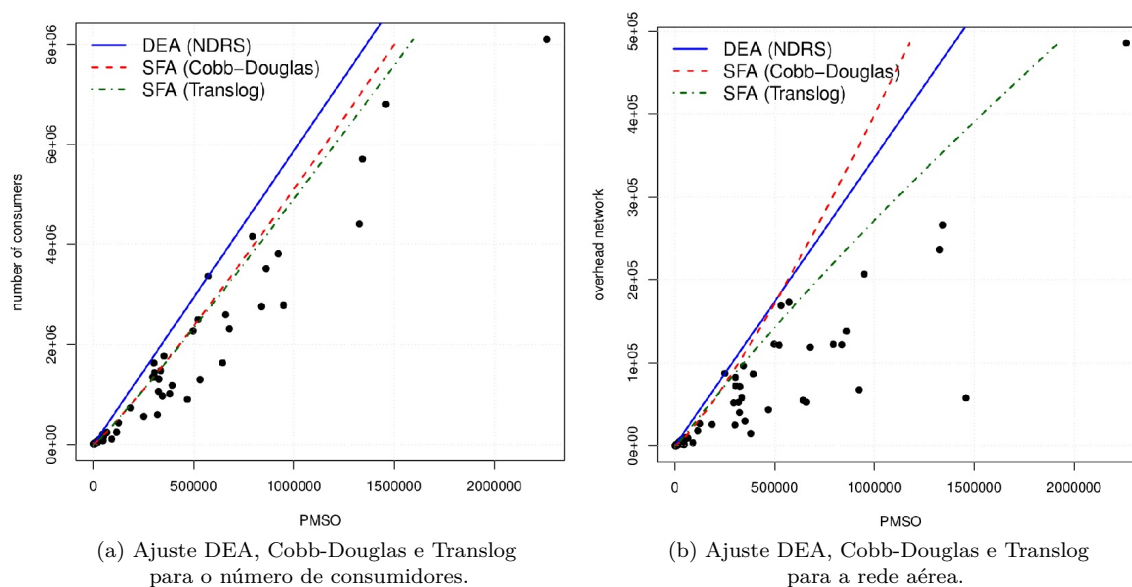


Figura 2.5: Diferenças entre as funções de custo Cobb-Douglas e translog no SFA.

Uma vez tendo sido apresentadas algumas definições iniciais sobre fronteiras de produção e de custo, passa-se para as próximas seções, onde discutem-se algumas questões sobre os métodos de estimação das fronteiras de custo, já que estas fazem parte do objeto de estudo desse trabalho.

## 2.5 Estimação da Fronteira Estocástica de Custo

De acordo com Zanini (2004), na prática não se conhece plenamente o CPP, dificultando também, o conhecimento da fronteira de custo. Logo, a eficiência de cada produtor não pode ser determinada. Todavia, métodos de estimação podem ser empregados a fim de contornar essa dificuldade.

Segundo Kumbhakar e Lovell (2003) e Kumbhakar *et al.* (2015), esses métodos de estimação da fronteira de custo se baseiam em modelos estatísticos, que podem ser classificados como modelos estatísticos deterministas ou modelos estatísticos estocásticos, conforme classificação apresentada na seção 1.4.

Nessa seção, será discutido o modelo de custo com fronteira estocástica, bem como as referidas possibilidades de estimação da eficiência econômica do produtor. Visando facilitar a exposição do tema, nas subseções que se seguem, serão abordados os seguintes assuntos: (i) - o modelo de custo com fronteira estocástica; (ii) - alguns

métodos estatísticos estocásticos de estimação paramétrica para a eficiência econômica; (iii) - síntese da especificação de um modelo SFA de custo; e, (iv) - considerações gerais.

### 2.5.1 Modelo de Custo com Fronteira Estocástica

Como discutido na seção 2.4, o custo  $E_i$  observado para o produtor  $i$ , sob a ótica da orientação a *inputs*<sup>1</sup>, cuja eficiência econômica é dada por  $e^{-u_i}$ , pode ser formulado matematicamente como:

$$E_i = C(\mathbf{w}_i, y_i) \cdot e^{u_i} \quad \text{com } u_i \geq 0. \quad (2.18)$$

De acordo com Kumbhakar *et al.* (2015), na equação (2.18), pode-se associar um vetor de parâmetros  $J$ -dimensional  $\beta$  que representa os parâmetros da tecnologia de produção, bem como acrescentar um termo de erro aleatório  $e^{\nu_i}$ , irrestrito em sinal e com média zero, obtendo-se a seguinte expressão:

$$E_i = [C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta) \cdot e^{\nu_i}] \cdot e^{u_i}, \quad \text{com } u_i \geq 0 \text{ e } \nu_i \in \Re. \quad (2.19)$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros, vem:

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta) + \nu_i + u_i, \quad \text{com } u_i \geq 0 \text{ e } \nu_i \in \Re. \quad (2.20)$$

Por sua vez, admitindo que a função de custo seja linear nos logaritmos dos parâmetros  $\beta$  e, escrevendo  $\epsilon_i = \nu_i + u_i$ , chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \ln E_i &= \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta) + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \nu_i + u_i, \quad \text{com } -\infty < \nu_i < +\infty \text{ e } u_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esse resultado é conhecido na literatura como *Modelo de Custo com Fronteira Estocástica*. Nele, destacam-se: (i) - o termo  $y_i$ , que representa o nível de produção observado para o produtor  $i$ ; (ii) - a função  $C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta)$ , que representa a fronteira determinística de custo, comum a todos produtores, e define o mínimo custo de produção possível através da tecnologia em uso; e, (iii) - o termo  $\epsilon_i$ , que representa o *erro composto*.

<sup>1</sup>A orientação a *inputs* é mais indicada para a função de custo pois, de acordo com Altoé *et al.* (2017), nessa função, o principal objetivo não é decrescer o nível de *outputs*, mas sim decrescer os custos de operação.

O termo de erro composto ( $\epsilon_i$ ) caracteriza conjuntamente, o termo  $\nu_i$ , cuja finalidade é capturar o efeito dos choques aleatórios que afetam especificamente o  $i$ -ésimo produtor, e o termo  $u_i$ , que descreve a ineficiência econômica apresentada por este. Além disso, pode-se rearranjar a equação (2.19) da seguinte maneira:

$$e^{-u_i} = \frac{C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) \cdot e^{\nu_i}}{E_i}. \quad (2.22)$$

Assim sendo, como a equação (2.22) traz a razão entre o custo mínimo  $C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) \cdot e^{\nu_i}$  de produção possível e o custo de produção observado, deduz-se que a eficiência econômica do  $i$ -ésimo produtor pode ser mensurada através da expressão  $e^{-u_i}$ , tal qual proposto por Debreu (1951) e Farrell (1957).

Se no modelo (2.21), a eficiência alocativa for assumida como total, então o termo  $u_i$  será associado única e exclusivamente à ineficiência técnica do produtor. Porém se esta suposição não puder ser considerada, a interpretação de  $u_i$  refletirá simultaneamente, os dois tipos de ineficiência: técnica e alocativa. Caso seja do interesse decompor o termo  $u_i$  em suas componentes, torna-se necessário o emprego de equações simultâneas, como pode ser visto em Kumbhakar e Lovell (2003) e em Kumbhakar *et al.* (2015).

## 2.5.2 Métodos Estatísticos Estocásticos de Estimação Paramétrica para a Eficiência Econômica

A estimação da eficiência econômica do produtor requer a estimação dos parâmetros da função de custo  $C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta})$ . Uma abordagem possível consiste em considerar os desvios das posições observadas em relação à fronteira eficiente como resultado de uma possível ineficiência econômica do produtor e também, admite a influência de ruídos e eventos aleatórios, aos quais, tal produtor está sujeito. Além disso, se especifica suposições distributivas para os componentes de erros. Por isso, denomina-se tal abordagem como *Métodos Estatísticos Estocásticos de Estimação Paramétrica*. Dentre esses métodos, destaca-se o SFA, descrito a seguir.

### 2.5.2.1 Considerações Iniciais

Com já descrito na subseção 2.5.1, o *Modelo de Custo com Fronteira Estocástica* possui a seguinte formulação matemática:

$$\begin{aligned}\ln E_i &= \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon_i, \\ \epsilon_i &= \nu_i + u_i, \quad \text{com} \quad -\infty < \nu_i < +\infty \quad \text{e} \quad u_i \geq 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Os métodos de estimação paramétrica objetivam estimar os parâmetros deste modelo, partindo da suposição de comportamentos probabilísticos para os erros  $\nu_i$  e  $u_i$ , culminando na obtenção dos respectivos estimadores, como por exemplo, os de máxima verossimilhança. Logo, as suposições sobre esses comportamentos probabilísticos constituem o cerne desse processo de estimação. Vale então, ressaltar aqui, algumas premissas básicas que nortearão o entendimento das exposições feitas nas próximas seções.

Primeiramente, seja considerar o erro aleatório  $\nu_i$ . Este é tido como simétrico, a fim de capturar todo e qualquer choque aleatório ao qual o produtor esteja exposto. De acordo com Kumbhakar e Lovell (2003), a ideia de simetria é bem aceita pois, as condições externas favoráveis e desfavoráveis são igualmente prováveis. Assim, a suposição de uma distribuição simétrica, tal como a Normal, é uma boa indicação.

Com relação ao erro  $u_i$ , sabe-se que este objetiva capturar os efeitos da ineficiência econômica e, portanto, deve assumir valores não-negativos. Logo, devem-se considerar distribuições positivas como por exemplo, a Normal Truncada ou a *Half*-Normal.

Já para o *erro composto*  $\epsilon_i$ , distribuições assimétricas são as mais indicadas, uma vez que, esse erro mede a soma entre um erro simétrico e um erro positivamente assimétrico. Por isso, modelos de regressão onde os erros sejam simetricamente distribuídos não são indicados para estimar a fronteira estocástica de custo.

Outra questão diz respeito à independência entre  $\nu_i$  e  $u_i$ . Na maioria das vezes, esses erros são considerados independentes, uma vez que, choques aleatórios externos que estão fora do controle do produtor dificilmente são relacionados com a ineficiência econômica. Contudo, existem casos raros onde o contrário acontece, como por exemplo, flutuações sazonais influenciando a produção. Bandyopadhyay e Das (2006), Lai e Huang (2013) e Amsler *et al.* (2014) são alguns dos autores que trabalharam com essa problemática e apresentaram métodos de solução, baseados no emprego das funções *Cópula*, isto é, baseados em um método geral para formular distribuições multivariadas de maneira que diversos tipos de dependências possam ser representados.

### 2.5.2.2 Verificação Inicial da Assimetria de $\epsilon_i$

Antes de se implementar o modelo de custo com fronteira estocástica para um determinado problema, vale a pena verificar se o contexto desse problema suporta a presença de ineficiência econômica ( $u_i > 0$ ). Caso não suporte, é desnecessário investir em técnicas mais caras de estimação.

Pensando nisso, vários testes iniciais são apresentados na literatura. Basicamente, consistem em testar as seguintes hipóteses sobre o *erro composto*  $\epsilon_i = \nu_i + u_i$ :

$$\begin{aligned} H_0 & : \epsilon \text{ é simétrico,} \\ H_1 & : \epsilon \text{ é assimétrico à direita.} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Não rejeitar a hipótese nula implica assumir que o modelo não suporta a ineficiência econômica, isto é,  $u_i = 0$ . Assim,  $\epsilon_i = \nu_i$  passa a ser simétrico e o modelo se reduz a um modelo de regressão padrão, no qual a estimação por OLS é suficiente.

Pensado nisso, algumas estatísticas de teste foram propostas na literatura, sendo a apresentada por Coelli (1995) a mais simples e também a mais utilizada. Nesta, após se calcular os resíduos OLS, obtém-se a seguinte estatística:

$$M3T = \frac{m_3}{\sqrt{\frac{6m_2^3}{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0, 1^2), \quad (2.25)$$

onde  $m_i$  e  $n$  representam respectivamente, o  $i$ -ésimo momento dos resíduos e o tamanho amostral. Outras estatísticas também presentes na literatura são a  $\sqrt{b_1}$  de Schmidt e Sickles (1984) e o teste  $LR$  (razão da verossimilhança da ineficiência), descrito em Kumbhakar *et al.* (2015). Após verificada a presença de ineficiência econômica, pode-se seguir com o processo de estimação dos parâmetros do modelo de SFA.

### 2.5.2.3 Possíveis Comportamentos Probabilísticos Associados a $u_i$

Como dito anteriormente, uma vez sendo a ineficiência econômica positiva ( $u_i > 0$ ), devem-se considerar distribuições positivas. Na literatura, são apresentadas algumas opções, tais como *Half-Normal* (Aigner *et al.*, 1977), *Normal-Truncada* (Stevenson, 1980), *Gamma* (Greene, 1990), *Exponencial* (Meeusen e van den Broeck, 1977), entre outras. Destas, por parcimônia, a *Normal-Truncada* e seu subcaso, *Half-Normal*, são as mais utilizadas.

A formulação para o modelo de custo com fronteira estocástica, baseada na suposição de que os erros  $u_i$  seguem uma distribuição *Normal-Truncada*, se apresenta como:

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon_i, \quad (2.26)$$

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i, \quad (2.27)$$

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), \quad (2.28)$$

$$u_i \underset{iid}{\sim} N^+(\mu, \sigma_u^2), \quad (2.29)$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes entre si,} \quad (2.30)$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes de } x_i. \quad (2.31)$$

A notação  $N^+(\mu, \sigma_u^2)$  representa o truncamento de uma distribuição normal  $N(\mu, \sigma_u^2)$  com a seleção de valores acima de zero. Se  $\mu = 0$ , reduz-se ao caso da distribuição *Half-Normal*. A Figura 2.6 ilustra algumas formas da distribuição *Normal-Truncada* para alguns valores selecionados de  $\mu$  e  $\sigma_u^2$ .

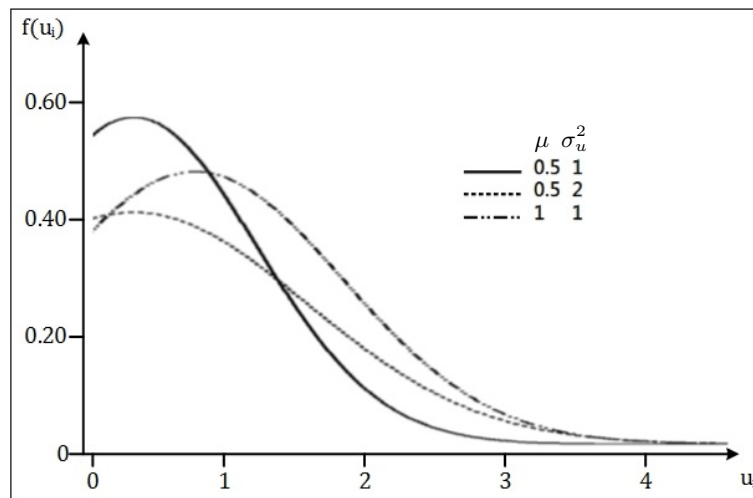


Figura 2.6: Exemplos de densidades de probabilidades para a Normal-Truncada.

Fonte: adaptado de Kumbhakar *et al.* (2015).

Quanto maior for a média  $\mu$  da distribuição Normal-Truncada, mais  $u_i$  se afasta de zero, ou seja, maior será o percentual de produtores com ineficiência econômica. Por outro lado, quando se optar por utilizar a distribuição *Half-Normal* ( $\mu = 0$ ), a moda será igual a zero e conseqüentemente, maior será o número de produtores totalmente



eficientes. A partir desse raciocínio, Kumbhakar *et al.* (2015) indicam o emprego da Normal-Truncada para produtores do setor público ou recém-privatizados, historicamente menos eficientes, e o emprego da *Half*-Normal para produtores pertencentes há mais tempo ao setor privado, geralmente mais eficientes por pertencerem a mercados mais competitivos.

A fim de exemplificar a aplicação do modelo de custo com fronteira estocástica definido no conjunto de equações (2.26)-(2.31), seja considerar o caso simples de uma função de custo translog com *inputs* e *outputs* únicos, como segue:

$$\ln x_i = \beta_0 + \beta_1 \ln y_i + \beta_{11} \ln y_i \times \ln y_i + \nu_i + u_i. \quad (2.32)$$

Seja também, considerar os seguintes parâmetros de entrada para esse exemplo:

$$n = 30 \quad \beta_0 = 0,40 \quad \beta_1 = 0,30 \quad \beta_{11} = 0,20 \quad \ln y_i = \{0,05; 0,10; 0,15; \dots; 2,00\}$$

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0; 0,15^2) \quad u_i \underset{iid}{\sim} N^+(0; 0,30^2)$$

Os resultados obtidos para esta modelagem podem ser visualizados nas Figuras 2.7 e 2.8, apresentadas a seguir.

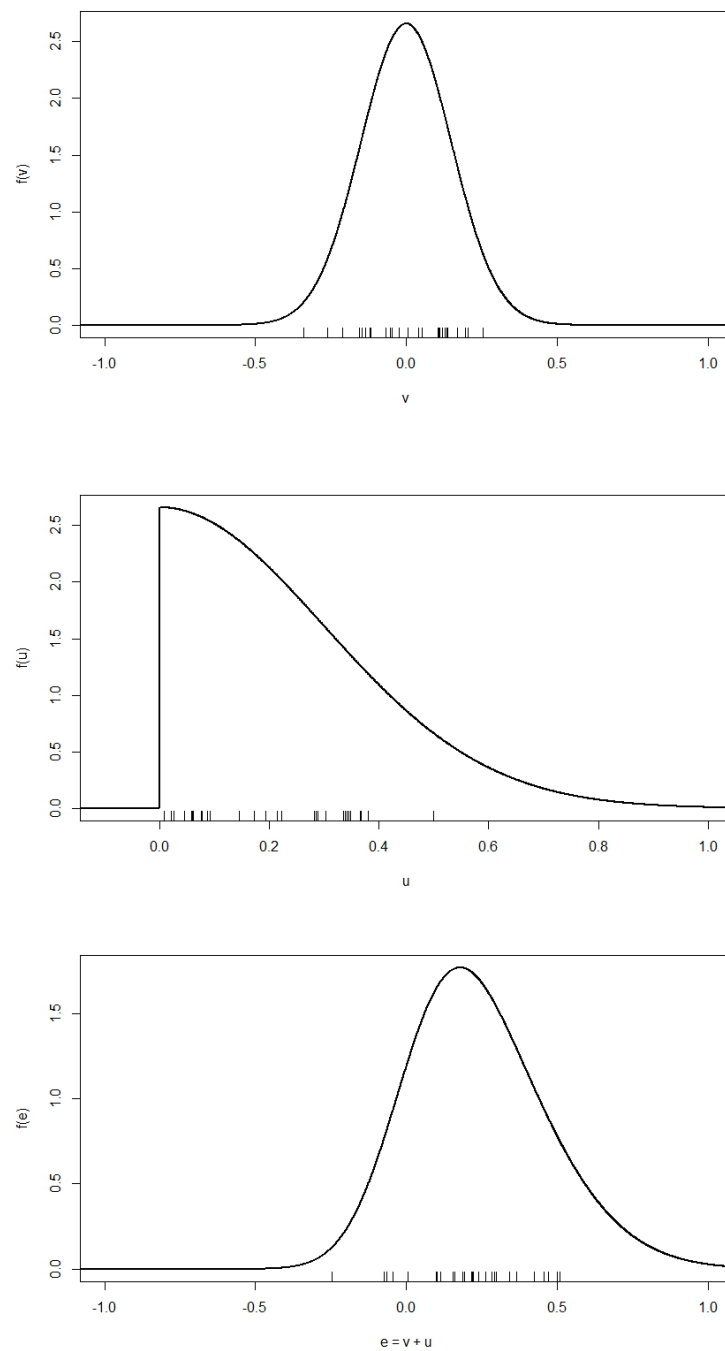


Figura 2.7: Densidades de probabilidades para o exemplo.

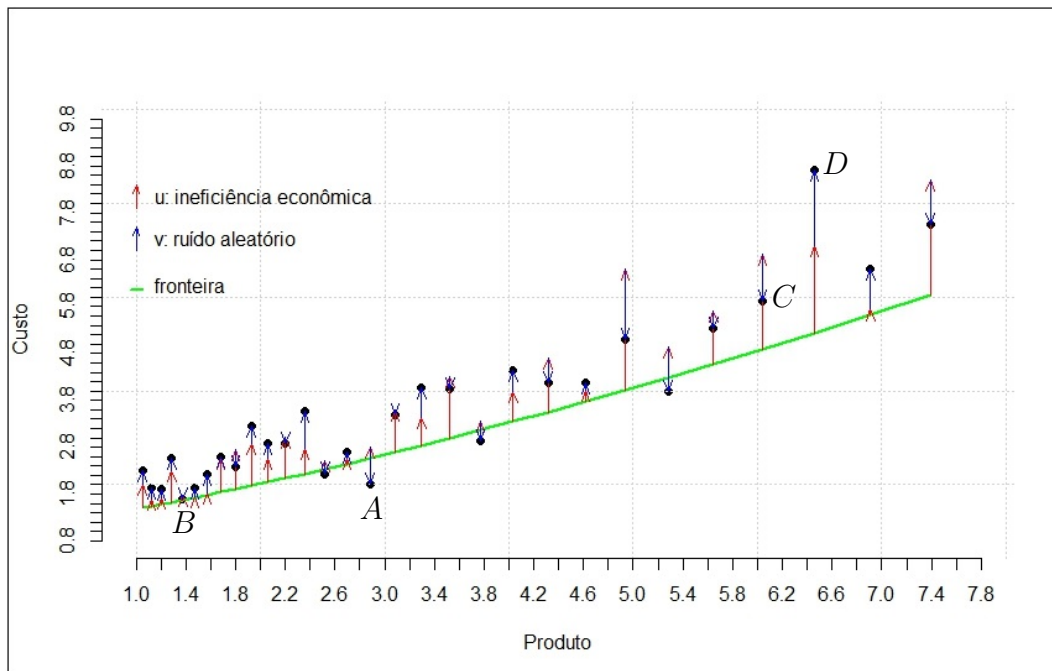


Figura 2.8: Fronteira estocástica de custo e desvios para o exemplo.

Como pode ser observado nos resultados apresentados na Figura 2.7, o erro aleatório  $\nu_i$  é simétrico em torno de zero e, o erro associado à ineficiência econômica,  $u_i$ , é positivamente assimétrico. Conseqüentemente, o termo de erro composto  $\epsilon_i = \nu_i + u_i$  possuirá assimetria à direita, seguindo uma distribuição *Skew-Normal* (Azzalini, 1985, 2013). A Figura 2.8 apresenta o resultado gráfico da fronteira estocástica de custo para os 30 produtores em questão. Observa-se que os desvios em relação à fronteira são causados tanto pela aleatoriedade quanto pela ineficiência econômica. Existem alguns produtores que apresentam um grau de eficiência maior (mais próximos da fronteira), mas também, existem outros tantos menos eficientes (mais afastados da fronteira). Também é interessante ser observado que, “teoricamente” alguns produtores ultrapassaram a fronteira, caracterizando-os como “mais do que eficientes”, o que não faz sentido na prática. Isso se deveu única e exclusivamente à conjugação do ruído aleatório, ao qual estão expostos e sobre o qual não tem controle, com a ineficiência econômica.

Seja, por exemplo, considerar no gráfico da Figura 2.8, os produtores representados pelos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . O produtor situado em  $A$  apresenta ineficiência econômica ( $u_A > 0$ ) e encontra-se sob a influência de um ruído aleatório negativo ( $\nu_A < 0$ ). Logo, o produtor  $A$  situa-se abaixo da fronteira de custo  $C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta)$ , uma vez que  $\nu_A + u_A < 0$ .

O produtor  $B$ , mesmo apresentando ineficiência econômica ( $u_B > 0$ ), situa-se sobre a fronteira de custo, pois sofre a influência do ruído aleatório negativo ( $\nu_B < 0$ ) e nesse caso, como  $\nu_B = -u_B$ , então  $\nu_B + u_B = 0$ . O produtor  $C$  apresenta ineficiência econômica ( $u_C > 0$ ) e está sob a influência de um ruído aleatório negativo menor que  $u_C$  ( $u_C > \nu_C$ ). Logo, este produtor está acima da fronteira de custo, uma vez que  $\nu_C + u_C > 0$ , porém foi beneficiado pelo ruído aleatório negativo. Já o produtor  $D$  apresenta ineficiência econômica ( $u_D > 0$ ) e está sob influência de um ruído aleatório positivo ( $\nu_D > 0$ ). Assim, como  $\nu_D + u_D > 0$ , este produtor situa-se acima da fronteira de custo e é penalizado um pouco mais pela influência positiva do ruído aleatório.

A partir deste exemplo, pode-se concluir que diferentemente do que acontece no DEA, no SFA não se pode medir a ineficiência econômica diretamente a partir da distância do ponto à fronteira, uma vez que a componente aleatória  $\nu_i$  pode exercer influência também.

Como forma de ilustração, a Figura 2.9 a seguir, apresenta um resumo das fronteiras de custo estimadas para os dados do exemplo, utilizando as técnicas OLS, COLS, DEA e SFA.

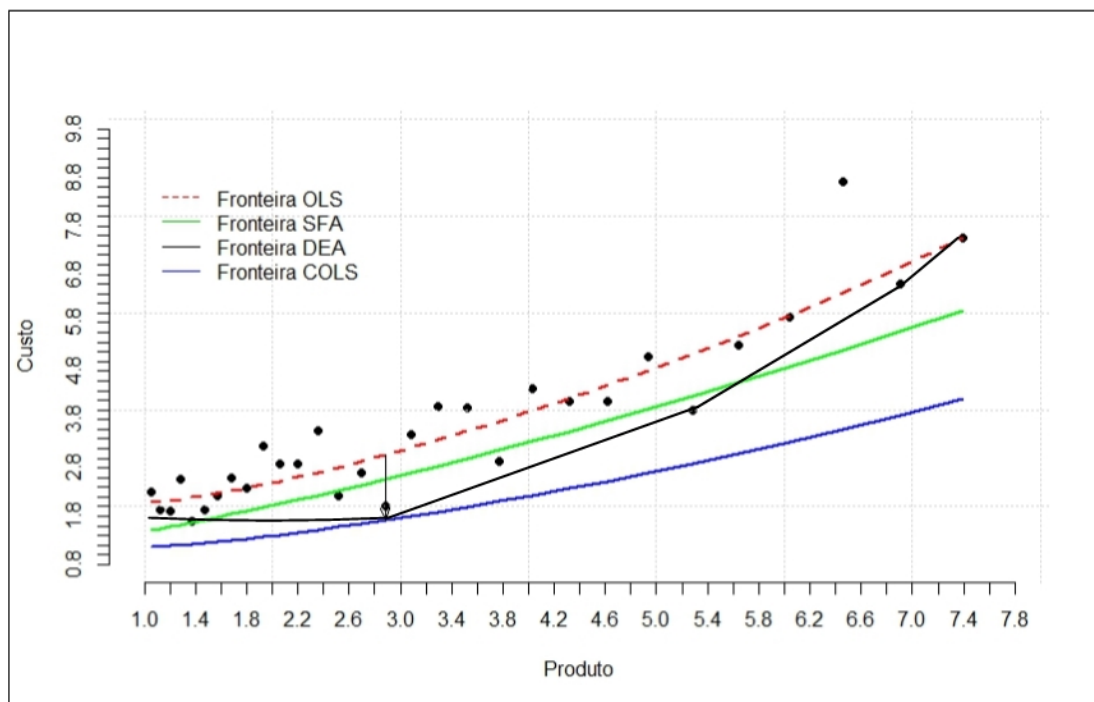


Figura 2.9: Fronteiras de custo estimadas para o exemplo: OLS, COLS, DEA e SFA.

### 2.5.2.4 Enfoque Frequentista para a Estimação de $e^{-u_i}$

Seja agora, considerar um modelo de custo com fronteira estocástica baseado em Aigner *et al.* (1977), onde a ineficiência econômica  $u_i$  é modelada através de uma distribuição de probabilidades *Half-Normal*, isto é,

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon_i, \quad (2.33)$$

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i, \quad (2.34)$$

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), \quad (2.35)$$

$$u_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_u^2), \quad (2.36)$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes entre si,} \quad (2.37)$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes de } x_i. \quad (2.38)$$

As funções densidade de probabilidade em questão são dadas por (o subscrito  $i$  será omitido):

$$f(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma_\nu^2}\right), \quad \text{para } -\infty < \nu < \infty, \quad (2.39)$$

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right), \quad \text{para } u > 0. \quad (2.40)$$

Considerando a suposição de independência entre  $\nu_i$  e  $u_i$ , dada em (2.37), pode-se determinar a função densidade de probabilidade conjunta  $f(\nu, u)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(\nu, u) &= f(\nu) \cdot f(u), \\ &= \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma_\nu^2} - \frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right), \quad \text{para } -\infty < \nu < \infty \text{ e } u > 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Uma vez que  $\epsilon = \nu + u$ , a função densidade de probabilidade conjunta  $f(\epsilon, u)$  pode ser obtida da equação anterior, resultando em:

$$f(\epsilon, u) = \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{(\epsilon - u)^2}{2\sigma_\nu^2} - \frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right], \quad \text{para } -\infty < \epsilon < \infty \text{ e } u > 0. \quad (2.42)$$

A função densidade de probabilidade marginal  $f(\epsilon)$  pode ser obtida, integrando-se a função  $f(\epsilon, u)$  dada em (2.42), isto é:

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= \int_0^\infty f(\epsilon, u) du = \int_0^\infty f_\nu(\epsilon - u) \cdot f_u(u) du \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{(\epsilon - u)^2}{2\sigma_\nu^2} - \frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right] du \\ &= \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon}{\sigma}\right), \quad \text{para } -\infty < \epsilon < \infty, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde  $\sigma = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_\nu^2}$  é conhecido como parâmetro de escala,  $\lambda = \frac{\sigma_u}{\sigma_\nu}$  representa o parâmetro de forma,  $\phi(\cdot)$  é a função densidade de probabilidades normal padrão e,  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição de probabilidades acumuladas normal padrão. Maiores detalhes desse cálculo podem ser encontrados na seção A.1 do Apêndice A.

De acordo com Kumbhakar e Lovell (2003), essa reparametrização para  $\sigma$  e  $\lambda$ , proposta por Battese e Corra (1977), é interessante pois, pode-se obter uma indicação das contribuições individuais de  $u$  e  $\nu$  para  $\epsilon$ . Se  $\lambda \rightarrow +\infty$ , ou  $\sigma_u^2 \rightarrow +\infty$  ou  $\sigma_\nu^2 \rightarrow 0$ , e com isso, o *erro composto*  $\epsilon$  é dominado pelo componente de erro assimétrico  $u$ . Caso contrário, se  $\lambda \rightarrow 0$ , ou  $\sigma_u^2 \rightarrow 0$  ou  $\sigma_\nu^2 \rightarrow +\infty$ , o que faz o *erro composto*  $\epsilon$  ser dominado pelo componente de erro simétrico  $\nu$ .

A função densidade de probabilidade  $f(\epsilon)$  dada em 2.43 é assimétrica, sendo um caso particular da distribuição *Skew-Normal* (Azzalini, 1985, 2013). Sua média e variância são dadas por:

$$\begin{aligned} E(\epsilon) &= E(\nu + u) = E(\nu) + E(u) = \sigma_u \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ V(\epsilon) &= V(\nu + u) = V(\nu) + V(u) = \frac{\pi - 2}{\pi} \sigma_u^2 + \sigma_\nu^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Sabendo-se que  $\epsilon_i = E_i - C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta})$ , que os  $\epsilon_i$  são independentes entre si e, utilizando a função densidade de probabilidade  $f(\epsilon)$  dada na equação (2.43), obtém-se a seguinte função de log-verossimilhança para uma amostra com  $I$  produtores independentes entre si:

$$\begin{aligned}
\ln L(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_I; \beta, \lambda, \sigma^2) &= \ln[f(\epsilon_1; \beta, \lambda, \sigma^2) \cdot f(\epsilon_2; \beta, \lambda, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(\epsilon_I; \beta, \lambda, \sigma^2)] \\
&= \ln \prod_i f(\epsilon_i; \beta, \lambda, \sigma^2) \\
&= \ln \prod_i \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \\
&= \sum_i \ln \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \\
&= \sum_i \left\{ \ln 2 - \ln \sigma + \ln \left[ \phi\left(\frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \right] + \ln \left[ \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \right] \right\} \\
&= \alpha - I \ln \sigma + \sum_i \ln \left[ \phi\left(\frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \right] + \sum_i \ln \left[ \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon_i}{\sigma}\right) \right]. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Derivando essa expressão e igualando as derivadas parciais a zero, obtém-se os estimadores de máxima verossimilhança para  $\sigma^2$ ,  $\lambda$  e  $\beta$ , isto é,  $\hat{\sigma}^2$ ,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\beta}$ .

As estimativas para  $\sigma_u^2$  e  $\sigma_v^2$  podem ser obtidas a partir da resolução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2} \\ \hat{\lambda} = \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\sigma}_v}. \end{cases} \quad (2.46)$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_u^2 &= \frac{\hat{\lambda}^2}{(1 + \hat{\lambda}^2)} \hat{\sigma}^2, \\
\hat{\sigma}_v^2 &= \frac{1}{(1 + \hat{\lambda}^2)} \hat{\sigma}^2. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

O estimador  $\hat{\sigma}_u^2$  pode ser interpretado como a ineficiência econômica média dos produtores, sendo denominado *média incondicional* de  $u_i$ . Observe que  $\hat{\sigma}_u^2 \neq \hat{\sigma}_{u_i}^2$ . Uma outra estatística de teste para a hipótese de ausência de ineficiência econômica nos dados é proposta por Llorca *et al.* (2014):

$$\gamma = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\nu^2} = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}. \quad (2.48)$$

No entanto, apesar da semelhança desta expressão com a do coeficiente de determinação  $R^2$  de um modelo de regressão, Kumbhakar *et al.* (2015) alertam que são conceitos bem diferentes. Logo,  $\gamma$  não deve ser interpretada como a proporção de variação atribuída à ineficiência econômica, uma vez que  $\hat{\sigma}_u^2 \neq \hat{\sigma}_{u_i}^2$ .

Como o principal objetivo do modelo de custo com fronteira estocástica dado em (2.33)-(2.38) é permitir o cálculo das (in)eficiências individuais, torna-se necessário calcular os valores de  $\hat{u}_i$  e  $e^{-\hat{u}_i}$ .

A solução, proposta por Jondrow *et al.* (1982), consiste em estimar  $u_i$  a partir do valor esperado de  $u_i$  condicional ao erro composto do modelo,  $\epsilon_i = \nu_i + u_i$ . Para isso, primeiro torna-se necessária a definição da função de probabilidade condicional  $f(u|\epsilon)$ , conforme se segue (o subscrito  $i$  será omitido):

$$\begin{aligned} f(u|\epsilon) &= \frac{f(u, \epsilon)}{f(\epsilon)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \cdot \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right], \quad \text{para } u > 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde  $u|\epsilon \sim N^+(\mu_*, \sigma_*^2)$ , com  $\mu_* = \epsilon \frac{\sigma_u^2}{\sigma^2}$  e  $\sigma_*^2 = \frac{\sigma_\nu^2 \sigma_u^2}{\sigma^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= E(u_i|\epsilon_i) \\ &= \int_0^\infty u \cdot f(u|\epsilon) du \\ &= \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \cdot \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] du \\ &= \mu_{*i} + \frac{\phi\left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)} \sigma_*. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Os detalhes desse cálculo estão disponíveis na seção A.2 do Apêndice A. Outra alternativa também sugerida por Jondrow *et al.* (1982) diz que o estimador  $\hat{u}_i$  pode ser obtido a partir da moda de  $f(u|\epsilon)$ , isto é,



$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= M(u_i|\epsilon_i) \\ &= \begin{cases} \mu_{*i}, & \text{se } \epsilon_i \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}\quad (2.51)$$

Por fim, a estimativa pontual para a eficiência econômica do  $i$ -ésimo produtor pode ser mensurada a partir de:

$$EE_i = e^{-\hat{u}_i}. \quad (2.52)$$

Battese e Coelli (1988) propuseram outra alternativa para estimar a eficiência econômica do  $i$ -ésimo produtor:

$$\begin{aligned}EE_i &= E(e^{-u_i}|\epsilon_i) \\ &= \exp\left(-\mu_* + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right) \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*} - \sigma_*\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)}.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Os detalhes desse cálculo também estão disponíveis na seção A.3 do Apêndice A.

Uma vez que  $E[e^{-u_i}|\epsilon_i] \neq e^{-E(u_i|\epsilon_i)}$ , observa-se que as estimativas dadas pelas equações (2.52) e (2.53) podem dar resultados diferentes. Entretanto, de acordo com Kumbhakar e Lovell (2003), o uso do estimador  $\hat{u}_i$  produz estimativas não tendenciosas ( $E(\hat{u}_i) = u_i$ ) para a eficiência econômica, porém inconsistentes em ambos casos, isto é, mesmo se aumentando o tamanho da amostra de produtores, a probabilidade de a estimativa estar próxima do valor verdadeiro do parâmetro da população é pequena.

Do ponto de vista computacional, segundo Veronese (2015), para estimar os parâmetros do modelo de custo com fronteira estocástica, é comum a utilização de algoritmos recursivos que tenham como objetivo maximizar a log-verossimilhança dessas funções. Assim, o algoritmo de Newton-Raphson e suas variantes, como é o caso do método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) (ver Nocedal e Wright (2006)), são os mais empregados para estimação em modelos de erro composto, a partir da máxima verossimilhança, como é o caso do modelo SFA. Considerando um vetor  $\Theta = [\lambda, \sigma^2, \beta]$  de

parâmetros do SFA a serem estimados, a equação (2.54) a seguir, representa o conjunto de iterações  $s$  desse algoritmo:

$$\Theta^{s+1} = \Theta^s - \left[ \frac{\partial^2 l(\Theta^s)}{\partial \Theta^2} \right]^{-1} \frac{\partial l(\Theta^s)}{\partial \Theta}, \quad (2.54)$$

onde  $l(\Theta)$  é a função log-verossimilhança de erro composto. Porém, o algoritmo requer condições de inicialização, isto é, requer um vetor  $\Theta^0 = [\lambda^0, (\sigma^2)^0, \beta^0]$  de valores iniciais para ser executado. Geralmente, essa situação é resolvida, considerando-se que  $(\sigma^2)^0$  e  $\beta^0$  são aqueles resultantes da regressão OLS, fixando  $\lambda = 0$ . Já para  $\lambda^0$ , Bogetoft e Otto (2011) propõem considerar  $\lambda^0 = 1$ .

Apesar das boas propriedades da distribuição *Skew-Normal*, Sartori (2006) e Azzalini (2013) chamam a atenção para o fato de a estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro  $\lambda$  poder se tornar infinita, com probabilidade positiva. E isso não é bom, uma vez que  $\lambda$  é um parâmetro crítico para estimar a (in)eficiência econômica dos produtores. Se  $\lambda \rightarrow \infty$ , então  $u$  domina o erro composto e as ineficiências estimadas tendem a 100%. Veronese (2015) identificou esse problema utilizando o banco de dados do SBDEE.

Uma segunda preocupação diz respeito à possibilidade de existência de *heterocedasticidade* nos erros  $\nu_i$  e  $u_i$ , isto é, estes podem possuir variâncias  $\sigma_\nu^2$  e  $\sigma_u^2$  não constantes. Isso compromete a estimativa das (in)eficiências econômicas do produtor. Exemplos de situações onde esse fato acontece, bem como métodos de solução para o problema podem ser encontrados nos trabalhos de Caudill e Ford (1993) e Hadri (1999).

### 2.5.2.5 Enfoque Bayesiano para a Estimação de $e^{-u_i}$

Como dito anteriormente, as metodologias mais usuais de *benchmarking* (DEA, COLS, SFA e StoNED) apresentam dificuldades quando lidam com amostras consideradas pequenas, ou quando *outliers* se fazem presentes na base de dados, ou ainda quando os produtores sob análise não operam sob as mesmas condições tecnológicas de produção e de custo. Especificamente no caso do SFA, ainda existem os já relatados problemas de convergência de estimação.

Frente a esses agravantes, uma metodologia baseada no método Bayesiano vem se mostrando eficaz para a estimação de fronteiras de eficiência, sem incorrer nos problemas das outras técnicas. Trata-se do *Bayesian Stochastic Frontier Analysis* (BSFA), cujo trabalho seminal foi proposto por van den Broeck *et al.* (1994).

O BSFA apresenta a vantagem de incorporar informações existentes *a priori*, isto é, conhecimentos, resultados ou particularidades prévias dos produtores podem ser incorporadas aos parâmetros do modelo atual (*prioris* informativas). Todas as inferências seguem o princípio de Bayes, e são combinadas com a informação oriunda dos dados (função de verossimilhança), tornando o método altamente confiável. Qualquer tamanho amostral pode ser considerado, independentemente deste ser pequeno ou grande, isto é, as estimações são imparciais em relação ao tamanho amostral (Chen *et al.*, 2015). Fato esse que pode ser considerado um contraste em relação à inferência frequentista, que se torna mais tendenciosa à medida que o tamanho da amostra diminui do infinito. Além disso, o BSFA atende bem às situações que envolvem heterogeneidade e está mais próximo da realidade, garantindo assim que a eficiência seja corretamente estimada (Chen *et al.*, 2015). E por fim, segundo Souza *et al.* (2007), a incerteza na distribuição de  $u_i$  associado à ineficiência dos produtores e a incerteza sobre qual função de custo  $C(\mathbf{w}_i, y_i, \beta)$  utilizar suportam o emprego de técnicas Bayesianas.

A abordagem Bayesiana para estimação de um vetor  $\boldsymbol{\psi}$  de parâmetros utiliza uma distribuição *a priori* para  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $f(\boldsymbol{\psi})$ , e uma distribuição de probabilidades da amostra (distribuição amostral ou função de verossimilhança),  $f(E_1, E_2, \dots, E_I | \boldsymbol{\psi})$ , para determinar a distribuição *a posteriori* para  $\boldsymbol{\psi}$ , isto é,  $f(\boldsymbol{\psi} | E_1, E_2, \dots, E_I)$ . Assim, essa distribuição *a posteriori* de  $\boldsymbol{\psi}$  contém informações provenientes tanto da amostra como dos conhecimentos prévios (*priori*). Para realizar inferência sobre  $\boldsymbol{\psi}$  dado  $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_I\}$ , torna-se necessário especificar a seguinte distribuição de probabilidades conjuntas:

$$f(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi}) = f(\mathbf{E} | \boldsymbol{\psi}) \cdot f(\boldsymbol{\psi}). \quad (2.55)$$

Em seguida, após observar  $\mathbf{E}$ , faz-se uso do Teorema de Bayes para se determinar a distribuição *a posteriori*:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\psi} | \mathbf{E}) &= \frac{f(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})}{f(\mathbf{E})} \\ &= \frac{f(\mathbf{E} | \boldsymbol{\psi}) f(\boldsymbol{\psi})}{\int_{\boldsymbol{\psi}} f(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{E}) d\boldsymbol{\psi}} \\ &= \frac{f(\mathbf{E} | \boldsymbol{\psi}) f(\boldsymbol{\psi})}{\int_{\boldsymbol{\psi}} f(\mathbf{E} | \boldsymbol{\psi}) f(\boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\psi}} = \frac{L(\mathbf{E} | \boldsymbol{\psi}) \cdot f(\boldsymbol{\psi})}{f(\mathbf{E})}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

A partir desse último resultado, pode-se observar que:

$$f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}) \propto L(\mathbf{E}|\boldsymbol{\psi}) \cdot f(\boldsymbol{\psi}), \quad (2.57)$$

ou seja, a distribuição *a posteriori* é proporcional à distribuição amostral (verossimilhança) multiplicada pela distribuição *a priori*. Quando a *priori* é fracamente informativa<sup>2</sup>, essa proporcionalidade é dominada pela função de verossimilhança, principalmente nos casos de amostras grandes. Esta última associa a cada valor de  $\boldsymbol{\psi}$  o valor  $f(\mathbf{E}|\boldsymbol{\psi})$ . Portanto, ao fixar um valor para  $\mathbf{E}$  e variar os valores de  $\boldsymbol{\psi}$ , pode ser observada a plausibilidade de cada um dos valores de  $\boldsymbol{\psi}$ .

A distribuição *a posteriori* resume todas as informações disponíveis sobre o vetor  $\boldsymbol{\psi}$  de parâmetros, condicional aos dados observados. Além disso, a abordagem Bayesiana para a estimação de parâmetros permite revisar a *priori* com novas informações, aperfeiçoando o conhecimento *a posteriori*. O estimador pontual Bayesiano de  $\boldsymbol{\psi}$  pode ser definido como o valor médio da distribuição *a posteriori*, isto é,

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}] = \int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi} f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}) d\boldsymbol{\psi}. \quad (2.58)$$

Infelizmente, na maioria das vezes o cálculo desta última integral é intratável analiticamente. De acordo com Souza (2008), esse fato atrasou por muito tempo o desenvolvimento de modelos Bayesianos. Somente nas últimas três décadas, com a evolução da simulação computacional, é que este cenário se reverteu. Devido à complexidade, os modelos Bayesianos necessitam na maioria das vezes, do suporte de métodos de simulação, tais como aqueles que usam o procedimento conhecido como *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC)<sup>3</sup>. Dentre estes, van den Broeck *et al.* (1994) empregaram métodos de Monte Carlo via função de importância, e Koop *et al.* (1995) investigaram a utilização do Amostrador de Gibbs para a realização de inferências sobre a distribuição *a posteriori*, concluindo que o mesmo pode ser considerado como uma técnica numérica eficiente. Ainda segundo Souza (2008), esses dois trabalhos serviram de base para diversos outros estudos envolvendo fronteiras estocásticas e métodos de simulação. Osiewalski e Steel (1998) trazem um estudo com descrição detalhada sobre esses métodos numéricos de simulação.

<sup>2</sup>Quando o pesquisador acredita que a informação disponível *a priori* é pouca ou pobre.

<sup>3</sup>Uma síntese das principais ideias deste procedimento é apresentada no Apêndice B.

Para exemplificar a abordagem Bayesiana para um modelo de custo com fronteira estocástica (BSFA), seja considerar o seguinte modelo já apresentado anteriormente:

$$\ln E_i = C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i. \quad (2.59)$$

A formulação se inicia com a especificação das distribuições de probabilidade *a priori* para os parâmetros do modelo. Por exemplo, seja considerar as seguintes opções:

$$\beta_k \underset{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_\beta^2), \nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), u_i \underset{iid}{\sim} \Gamma(1, \tau > 0), \frac{1}{\sigma^2} \sim \Gamma(a > 0, b > 0), \tau \sim \Gamma[1, -\log(r^*)],$$

sendo  $\Gamma(\cdot)$  a função densidade de probabilidades Gama de dois parâmetros e  $r^*$  = mediana da distribuição *a priori* da eficiência, tal que  $0 < r^* < 1$ . Como há interesse em se fazer inferências sobre  $e^{-u_i}$  dos produtores, a distribuição de  $E_i$  e  $u_i$ , dado o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\beta}^T, \sigma_\nu^2, \tau)$ , é dada por:

$$f(E_i, u_i | \boldsymbol{\psi}) = N(E_i | C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + u_i, \sigma_\nu^2) \cdot \text{Exponencial}(u_i | \tau). \quad (2.60)$$

Uma vez que,

$$f(u_i | E_i, \boldsymbol{\psi}) = \frac{f(E_i, u_i | \boldsymbol{\psi})}{f(E_i | \boldsymbol{\psi})} = \frac{f(E_i, u_i | \boldsymbol{\psi})}{\int_0^\infty f(E_i, u_i | \boldsymbol{\psi}) du_i}, \quad (2.61)$$

pode-se escrever a seguinte distribuição de probabilidades *a posteriori* para  $u_i$ :

$$f(u_i | E_i, \boldsymbol{\psi}) = \left[ \Phi \left( \frac{C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) - E_i - \frac{\sigma_\nu^2}{\tau}}{\sigma_\nu} \right) \right]^{-1} \cdot N \left( u_i | C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) - E_i - \frac{\sigma_\nu^2}{\tau}, \sigma_\nu^2 \right). \quad (2.62)$$

Assim, como a distribuição condicional *a posteriori* para  $u_i$  é agora conhecida, e segundo Souza *et al.* (2007), é a mesma obtida por Jondrow *et al.* (1982), pode-se utilizar o Amostrador de Gibbs para gerar observações de  $u_i$ . Logo, as (in)eficiências econômicas dos produtores podem ser assim estimadas.

Como viés e ponto de preocupação com relação ao MCMC, é necessária uma monitoração fina da convergência dos parâmetros do modelo, isto é, após a simulação ser realizada, é crucial verificar a convergência das sequências simuladas. Cowles e Carlin (1996) apresentam alguns métodos propostos na literatura que permitem fazer essa

monitoração, sendo o mais simples e usual dentre eles, aquele que constrói um gráfico de autocorrelação amostral, onde se espera um decaimento rápido dos valores plotados à medida que se avança no eixo dos *lags*. Caso isso não aconteça, fato muito comum devido à natureza Markoviana das amostras, alternativas de correção<sup>4</sup> são apresentadas em Gilks e Roberts (1996), tais como: reparametrização, *thinning*, cadeias paralelas, aumento do número de iterações e *burn-in*.

De acordo com Dorfman e Koop (2005), os métodos econométricos que se baseiam em técnicas Bayesianas vêm sendo utilizados em maior escala ultimamente, em modelos que possuem vetores de grande dimensão, graças aos avanços do poder computacional nas últimas décadas e ao desenvolvimento de simuladores que aproveitam esse poder, como é o caso do MCMC. E devido ao fato dos modelos de SFA, muito comumente, se enquadrarem nesse contexto de grandes dimensões, há um aumento da motivação e uma crescente popularidade dos métodos Bayesianos na análise eficiência.

Apesar dessa recente popularidade, infelizmente, segundo Souza *et al.* (2010b), são poucos os estudos com enfoque Bayesiano aplicados ao setor de regulação energética brasileira. Nesse sentido, destacam-se os trabalhos de Souza *et al.* (2007), Souza (2008) e Souza *et al.* (2010b), muito embora os autores afirmarem que esses estudos têm abertura para melhorias e aprofundamentos na abordagem empregada.

## 2.6 Incorporação de Variáveis Exógenas ao SFA

Até o presente momento, foram apresentadas características dos modelos de estimação para a fronteira estocástica de custo, levando-se em consideração que a (in)eficiência econômica do produtor é determinada pelos *inputs* utilizados, pela tecnologia produtiva em questão e pelos *outputs* obtidos. Porém, em alguns cenários, existem variáveis ambientais ou exógenas ao contexto produtivo que podem exercer tanta ou até maior influência. São exemplos de variáveis exógenas: a competitividade do mercado, a estrutura gerencial, a cadeia de abastecimento e algumas variáveis ambientais. Mais especificamente, para o cenário de distribuição energética, Gil *et al.* (2017) elencam algumas possibilidades de variáveis exógenas: índice de precipitação pluviométrica, incidência de raios, altura da vegetação sob/sobre a rede elétrica, declividade do terreno, grau de pavimentação das estradas, duração média da interrupção de energia (DIE), frequência de interrupção de energia (FIE), área de concessão, entre outras.

---

<sup>4</sup>Alguns desses conceitos são apresentados no Apêndice B.

Além disso, Gil *et al.* (2017) propuseram uma nova variável, denominada *e.variable*, que é uma combinação linear das variáveis ambientais disponíveis. A variável *e.variable* é a variável mais correlacionada linearmente com as atuais eficiências das DSOs brasileiras, estimadas pelo regulador.

### 2.6.1 Contextualização para o SBDEE

Em países que possuem dimensões continentais, como é o caso do Brasil, é grande a diversidade geográfica e climática. Haja vista, por exemplo, as várias diferenças entre as cinco regiões brasileiras: uma região norte muito úmida, com índices pluviométricos altíssimos, contrastando com uma região nordeste de clima semi-árido, onde a chuva ocorre raramente ou nunca ocorre. Também, pode-se citar as diferenças na infra-estrutura econômica e social entre as várias regiões: o sul e sudeste mais bem servidos nesse quesito, enquanto muitas cidades das demais regiões são desprovidas de uma infraestrutura mínima. Pode-se citar também, os vários biomas espalhados pelo país: regiões com florestas densas ao norte, vegetação de caatinga no nordeste, pantanal mais ao centro-oeste, mata atlântica e cerrado no sudeste e pampa ao sul. Isso sem falar na grandiosidade territorial: muitos dos 27 estados brasileiros são maiores que muitos países do mundo.

Assim, ao se proceder com estudos de *benchmarking*, como é o caso do SFA, essas diferenças regionais contribuem para que o processo produtivo seja influenciado não somente por variáveis inerentes ao mesmo, mas também por variáveis exógenas. Por exemplo, considerando o SBDEE, é de se esperar que a variável exógena *índice pluviométrico* seja significativa para explicar a diferença entre os escores de eficiência de duas concessionárias situadas, respectivamente, uma em região úmida e outra em região do semi-árido nordestino.

Em congruência, os escores de eficiência também podem ser atualizados por essas variáveis exógenas, uma vez que, no geral, produtores localizados em um ambiente de variáveis exógenas favoráveis devem ter seus escores de eficiência diminuídos, pois o ambiente contribui parcialmente para um maior escore de eficiência. Enquanto que aqueles produtores, localizados em um ambiente de variáveis exógenas não tão favoráveis, devem ter seus escores de eficiência aumentados, pois esse ambiente desfavorável impede que os produtores obtenham maiores escores de eficiência. Além disso, produtores que se encontram geograficamente mais próximos podem estar sujeitos às mesmas influências exógenas, permitindo a configuração de *clusters*.

Especificamente, no caso da regulação tarifária energética brasileira, estudos recentes

de Veronese *et al.* (2018) e Gil *et al.* (2017) demonstram a significância de variáveis exógenas para a estimação dos escores de eficiência, via DEA, das várias concessionárias de distribuição, espalhadas pelo país. Utilizando conceitos de estatística espacial, os autores discorrem sobre as várias possibilidades de influência dessas variáveis exógenas e mensuram seu índice de correlação com os escores de eficiência das distribuidoras, encontrando resultados com alta significância. Também compararam os escores de eficiência calculados pelo regulador com os escores obtidos a partir da incorporação de variáveis exógenas. Os resultados demonstram diferenças paupáveis entre esses escores, além de concluírem que as DSOs localizadas no norte do Brasil podem ter suas eficiências de custo aumentadas usando informações ambientais.

No caso do SFA, existe uma variedade de estudos na literatura concebidos com o intuito de incluir variáveis exógenas ao SFA. Podem-se destacar os trabalhos pioneiros de Deprins e Simar (1989b,a), Kumbhakar *et al.* (1991), Reifschneider e Stevenson (1991), Huang e Liu (1994) e Battese e Coelli (1995), além de trabalhos mais recentes como os de Alvarez *et al.* (2006) e Llorca *et al.* (2016). Os estudos de Kumbhakar *et al.* (1991) e Reifschneider e Stevenson (1991) são os mais disseminados, sendo por isso, descritos a seguir.

### 2.6.2 Modelo Proposto por Kumbhakar *et al.* (1991)

Kumbhakar *et al.* (1991) apresentaram o seguinte modelo para a fronteira estocástica de custo, com inserção de variáveis exógenas:

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i, \quad (2.63)$$

$$u_i = \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta} + \zeta_i, \quad \text{com } u_i \geq 0 \quad (2.64)$$

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + (\mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta} + \zeta_i), \quad (2.65)$$

onde,  $E_i$  é o custo observado para o  $i$ -ésimo produtor,  $\ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i$  representa a fronteira estocástica de custo,  $\nu_i$  e  $u_i$  continuam representando os termos que visam capturar, respectivamente, os efeitos da aleatoriedade sobre o processo produtivo e da ineficiência econômica. A novidade reside na introdução do vetor  $\mathbf{z}_i$  de variáveis exógenas com seus respectivos coeficientes  $\boldsymbol{\delta}$ , que podem ter influência sobre a ineficiência econômica ( $u_i$  está parametrizado linearmente em função de  $\mathbf{z}_i$ ). Por fim, o termo  $\zeta_i$  representa um componente de erro aleatório associado a  $u_i$ , entretanto não é levado em



consideração nessa modelagem. Os comportamentos probabilísticos destes componentes de erro são dados por:

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), \quad (2.66)$$

$$u_i \sim N^+(\mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2), \quad (2.67)$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes entre si,} \quad (2.68)$$

$$(2.69)$$

Segundo Kumbhakar e Lovell (2003), pode-se observar a partir de (2.67) que: (i) - as ineficiências  $u_i$  não são identicamente distribuídas; (ii) - se  $z_{i1} = 1, z_{i2} = 0, \dots, z_{iZ} = 0$  e  $\delta_1 = \text{constante}, \delta_2 = 0, \dots, \delta_Z = 0$ , o modelo (2.64)-(2.66) reduz-se ao modelo de Stevenson (1980), dado em (2.26)-(2.31), com  $u_i$  seguindo uma distribuição *Normal-Truncada* de média  $\delta_1$ . E, se inclusive,  $\delta_1 = 0$ , o modelo de reduz ao proposto por Aigner *et al.* (1977), baseado na distribuição *Half-Normal*; e, (iii) - a suposição de que a média de  $u_i$  é  $\mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}$  faz com que cada observação  $i$  tenha uma média específica, sendo por isso, uma modelagem mais flexível que o modelo de Stevenson (1980), que considera média  $\mu$  fixa para todas as observações (Kumbhakar e Lovell, 2003). Os parâmetros do modelo dado em (2.63)-(2.65) podem ser estimados, permitindo assim, obter as estimativas para as (in)eficiências econômicas.

### 2.6.3 Modelo Proposto por Reifschneider e Stevenson (1991)

Uma alternativa ao modelo de Kumbhakar *et al.* (1991) é apresentada por Reifschneider e Stevenson (1991). Nesta, a estrutura geral para o modelo de fronteira estocástica para o custo é dada por:

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i, \quad (2.70)$$

$$u_i = g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) + \zeta_i, \quad \text{com } u_i \geq 0, \quad g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) \geq 0, \quad \zeta_i \geq 0 \quad (2.71)$$

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) + \nu_i + \zeta_i, \quad (2.72)$$

onde  $u_i = g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) + \zeta_i$ , representando a eficiência econômica ajustada. Os comportamentos probabilísticos são dados por:

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), \quad (2.73)$$

$$\zeta_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_\zeta^2). \quad (2.74)$$

Com isso, as seguintes observações podem ser feitas: (i) - os procedimentos de estimação seguem a mesma lógica do modelo de Kumbhakar *et al.* (1991), com as devidas alterações necessárias; (ii) - a vantagem desse modelo reside na consideração do termo aleatório da ineficiência econômica,  $\zeta_i$ , desprezado por Kumbhakar *et al.* (1991); e, (iii) - em (2.71), se  $\zeta_i \geq 0$ , então  $u_i \geq g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta})$ , ou seja,  $g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta})$  pode ser interpretada como uma fronteira determinística para a ineficiência econômica, em um ambiente caracterizado pela influência de variáveis exógenas  $\mathbf{z}_i$ .

#### 2.6.4 Lidando com Produtos Indesejados

De acordo com Kumbhakar *et al.* (2015), em geral, se um produtor é totalmente eficiente economicamente, então uma redução na saída de um produto indesejado só é possível se a saída de produtos desejáveis também for reduzida. Porém, essa propriedade de monotocidade não é sempre satisfeita em modelos nos quais a mesma tecnologia de produção é empregada para produzir tanto saídas boas quanto ruins em conjunto.

Segundo esses autores, não há um consenso a respeito de como lidar com a questão. A princípio, tentou-se modelar esses produtos como insumos, porém segundo Färe *et al.* (2005), essa tentativa retornaria um conjunto de resultados ilimitado, o que é fisicamente impossível, caso os insumos tradicionais fossem utilizados. Outra abordagem busca separar as saídas desejáveis das indesejáveis e, a partir disso, utilizar o modelo de fronteira estocástica para cada tecnologia. Assim, consegue-se separar a eficiência econômica da eficiência ambiental. Todavia, segundo Atkinson e Dorfman (2005), essa separação não é muito consistente com os resultados empíricos. Alguns trabalhos nessa linha podem ser encontrados em Forsund (2009) e Kumbhakar e Tsionas (2013).

#### 2.6.5 Considerações Gerais

Segundo a *Cambridge Economic Policy Associates* (CEPA (2013)), uma instituição internacional ligada à regulação econômica de serviços públicos, alguns critérios para avaliação do processo de *benchmarking* devem ser considerados. Dentre eles, destacam-se: praticidade de aplicação, robustez da metodologia, transparência e verificabilidade,

captura de fatores específicos do setor, mínima restrição ao formato da fronteira, consistência com outras abordagens e com a teoria econômica. Logo, a consideração de variáveis exógenas no processo de obtenção dos escores de eficiência vai ao encontro do critério de captura dos fatores específicos do setor. Consoante à essa ideia, Nieswand e Seifert (2018) alertam que as estimativas de fronteiras de custos precisam incorporar condições operacionais quando elas afetam as possibilidades de produção. Caso contrário, as estimativas de eficiência não têm sentido.

No entanto, apesar de muitas serem as orientações e sugestões sobre a importância de se considerar a influência de variáveis exógenas, no 4CRTP, a ANEEL decidiu não promover nenhum ajuste dos escores de eficiência nesse sentido, contrariando a prática de agentes reguladores mais maduros. Lopes *et al.* (2016) apresentam críticas construtivas quanto a essa postura e sugerem que o regulador deve repensar sua metodologia.

Ao se identificar a magnitude dos efeitos das variáveis exógenas sobre os escores de eficiência, o produtor pode tomar decisões e adotar políticas que minimizem os efeitos negativos dessas variáveis. Outro bônus apontado na literatura é a possibilidade de poder identificar variáveis faltantes no modelo.

Todavia, no caso da ANEEL, vale destacar o argumento apresentado por Lopes *et al.* (2016), afirmando que as variáveis exógenas e endógenas tem alta dispersão, ou seja, as diferenças nessas variáveis, de acordo com as várias regiões atendidas pelas DSOs, são bem significativas. Logo, pode-se perceber que, além das diferenças operacionais, essas diferenças ameaçam a premissa básica da metodologia DEA empregada pelo regulador, de que as DMUs devem ser comparáveis em relação aos seus *inputs* e *outputs*.

## 2.7 Síntese da Especificação de um Modelo de SFA

Até aqui, foram apresentadas definições e discussões sobre alguns dos mais importantes modelos de SFA. Logo, antes de dar prosseguimento às demais ideias deste trabalho, julga-se válido fazer uma síntese da especificação geral para estes modelos, conforme a seguir.

O modelo SFA deve ser capaz de explicar o comportamento estocástico das fronteiras de produção ou de custo, com conseqüente avaliação das eficiências apresentadas pelos produtores, levando-se em consideração: (i) a função determinística de produção ou de custo, comum a todos os produtores; (ii) os efeitos dos choques aleatórios que afetam especificamente o *i*-ésimo produtor; e, (iii) os efeitos gerados pelas ineficiências técnica

ou alocativa do  $i$ -ésimo produtor. Sendo assim, é de extrema importância observar como se dá a especificação de cada uma dessas considerações. Com esse propósito, a seguir, listam-se algumas premissas básicas.

Existem várias formas funcionais para as funções de produção e de custo. Algumas são mais simples, como é o caso da Cobb-Douglas, outras mais sistêmicas e flexíveis, como é o caso da Translog. A forma a ser escolhida tem impacto direto nos resultados almejados. Por isso, é aconselhável fazer um estudo prévio do problema que se pretende modelar e de quais formas funcionais melhor se adequam à situação em questão.

Deixar de considerar a influência dos choques aleatórios inerentes ao processo, sobre o desempenho do produtor, é assumir que todo e qualquer desvio em relação à fronteira de produção ou de custo, se deve única e exclusivamente às ineficiências técnicas e/ou alocativas. Premissa essa, pouco provável. Assim, ao se atribuir um termo que capture os choques aleatórios, consegue-se modelar a realidade de maneira mais verossímil. Além disso, a atribuição de um comportamento probabilístico simétrico, centrado em zero, homocedástico, permite que tanto influências favoráveis quanto desfavoráveis sejam igualmente prováveis.

Com relação aos efeitos gerados pelas ineficiências técnicas e/ou alocativas, sabe-se que estes devem assumir valores não-negativos. Logo, é aconselhável a escolha de distribuições positivas, como por exemplo, a Normal-Truncada, a *Half*-Normal ou a Exponencial. Algumas delas vão permitir um maior número de produtores com escores maiores de eficiência e, outras vão dificultar essa situação. A escolha deve-se basear sempre na premissa de maior aderência aos dados, levando-se também em conta o princípio da parcimônia. Também, deve-se garantir a homocedasticidade desses efeitos.

O termo composto pelos erros aleatórios e pelos erros de ineficiência terá comportamento com assimetria à esquerda no caso dos modelos de produção e, comportamento com assimetria à direita para os modelos de custo. Além disso, possuem, em ambos os casos, médias não-nulas. A partir deste erro composto, é possível montar toda a estrutura de estimação dos parâmetros do modelo em questão. Geralmente, opta-se pela estimação via máxima verossimilhança. Suposições erradas, podem destruir toda a estrutura de estimação e inflacionar os escores de (in)eficiência do produtor.

No entanto, o SFA tem grandes problemas de estimativa estatística, como problemas de convergência para pequenas amostras, conforme relatado por Azzalini (2013) e Sartori (2006). Os problemas de convergência podem ser superados usando uma abordagem Bayesiana (BSFA) (Bayes e Branco, 2007). No entanto, os modelos de BSFA tendem a

ser complexos, exigindo o apoio de métodos de simulação computacional, tais como o *Markov Chain Monte Carlo* (van den Broeck *et al.*, 1994).

Por fim, é perceptível na literatura de SFA, um maior avanço nos estudos de métodos paramétricos para estimação das fronteiras de produção e de custo, tanto em profundidade quanto em extensão. Isso se deve, em grande parte, à capacidade dos modelos paramétricos de se aproximarem mais da realidade dos produtores, absorvendo e incorporando elementos antes desprezados pelos métodos não-paramétricos, como é o caso, por exemplo, da influência de eventos aleatórios na produção. E um desses avanços diz respeito à incorporação de variáveis exógenas ou ambientais ao modelo de SFA. Essas variáveis são externas ao processo produtivo, mas podem exercer influência sobre a (in)eficiência técnica do produtor.

De uma maneira geral, as considerações feitas acima, constituem uma síntese estrutural para os modelos de SFA, a fim de que os mesmos sejam bem definidos e possam alcançar seus objetivos. Todavia, isso não impede que adaptações possam ser feitas ou melhorias possam ser sugeridas, como as que são propostas e expostas no próximo capítulo desse trabalho.



## Parametrizações e Modelagens Propostas para o SFA

Nesse terceiro capítulo, são apresentadas as propostas de parametrizações alternativas e sete modelagens para o SFA de custo, todas com abordagem Bayesiana. Também, são apresentadas algumas características da base de dados utilizada.

### 3.1 Preliminares

Como foi discutido nos capítulos anteriores, as metodologias mais usuais de *benchmarking* (DEA, COLS e SFA) apresentam dificuldades quando lidam com amostras consideradas pequenas, ou quando *outliers* se fazem presentes na base de dados, ou ainda quando as distribuidoras sob análise não operam sob as mesmas condições tecnológicas de produção e de custo. Especificamente no caso do SFA, ainda existem os já relatados problemas de convergência de estimação.

Entretanto, algumas alternativas às parametrizações clássicas do modelo SFA são apresentadas na literatura, visando dar robustez à metodologia. Dentre elas, podem-se citar: Sartori (2006) propõe um estimador para corrigir o viés de forma, denominado *fator M*; Liseo e Loperfido (2006) propõem um modelo de inferência Bayesiana; Bayes e Branco (2007) propõem uma aproximação para o *fator M* e um modelo alternativo de inferência Bayesiana; Griffin e Steel (2007) primeiro aplicaram um modelo de SFA robusto utilizando uma distribuição *t-Student* para o componente de ruído e, em seguida, os parâmetros

do SFA foram estimados utilizando uma abordagem Bayesiana; recentemente, Stead *et al.* (2017) aplicaram a distribuição *t-Student* para o termo de ruído no modelo SFA, a fim de aumentar a robustez do modelo para *outliers*. Nesse caso, a função densidade de probabilidades do erro composto foi escrita como:

$$f_{\epsilon}(\epsilon) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \sqrt{\pi a} \sigma_{\nu}} \left[1 + \frac{1}{a} \left(\frac{\epsilon - u}{\sigma_{\nu}}\right)^2\right]^{-\frac{a+1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sigma_u} \phi\left(\frac{u}{\sigma_u}\right) du, \quad (3.1)$$

onde  $a$  é o grau de liberdade da distribuição *t-Student* e  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama. À medida que  $a \rightarrow \infty$ , a distribuição *t-Student* aproxima-se da distribuição Normal. A equação (3.1) é intratável analiticamente. No entanto, aproximações usando métodos de simulação numérica podem ser aplicadas (Train, 2009).

Em consonância, esse trabalho apresenta algumas propostas de parametrizações alternativas e inéditas para o SFA, conforme descrito a seguir.

## 3.2 Proposta de Parametrizações para o SFA

Os modelos de SFA propostos baseiam-se na parametrização alternativa da distribuição *Skew-Normal*, descrita a seguir. Como introduzido inicialmente por Azzalini (1985), uma variável aleatória  $Z$  tem uma distribuição *Skew-Normal*<sup>1</sup> padrão com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_Z(z) = 2\phi(z) \Phi(\lambda z), \quad z \in \mathfrak{R}, \quad \lambda \in \mathfrak{R}, \quad (3.2)$$

onde  $\phi$  e  $\Phi$  são, respectivamente, a função de densidade e a função de distribuição acumulada de uma Normal Padrão, e  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria.

Uma nova variável  $X$  pode ser construída a partir de  $Z$ , acrescentando-se um parâmetro de localização ( $\xi$ ) e um parâmetro de escala ( $\sigma$ ), isto é,  $X = \xi + \sigma Z$ . Por causa da presença desses parâmetros,  $X$  se torna mais flexível que  $Z$  ( $X$  possui mais parâmetros que  $Z$ ). Observe que, a partir de  $X$ , pode-se obter  $Z$ , isto é,  $Z = \frac{X - \xi}{\sigma}$ . Vamos considerar  $Z \underset{iid}{\sim} SN(\lambda)$  e  $X \underset{iid}{\sim} SN(\xi, \sigma^2, \lambda)$ . Então,  $X$  tem uma função densidade de probabilidades dada por:

<sup>1</sup>Azzalini (1985) chegou a este resultado, somando-se uma variável Normal Padrão,  $N(0, 1^2)$ , com uma variável *Half-Normal*,  $N^+(0, 1^2)$ .



$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \xi}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{x - \xi}{\sigma}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (3.3)$$

conhecida como modelo *Skew-Normal* de três parâmetros. Observa-se que essa expressão é exatamente igual à expressão que foi obtida na equação (2.43), isto é,

$$\begin{aligned} f_\epsilon(\epsilon) &= \int_0^\infty f(u, \epsilon) du \\ &= \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

uma vez que  $\epsilon = \nu + u = X - \xi$ .

O modelo SFA de custo assume que  $\lambda \in \mathfrak{R}^+$  e  $\xi(\mathbf{y})$  é a função de custo paramétrica, isto é, uma função Cobb-Douglas ou uma função Translog. Esse modelo assume que:

$$X_i = \xi(\mathbf{y}_i) + \nu_i + u_i \quad \text{ou} \quad X_i = \xi(\mathbf{y}_i) + \sigma z_i, \quad (3.5)$$

onde  $\sigma z_i = \nu_i + u_i$ ,  $\nu_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2)$ ,  $u_i \stackrel{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_u^2)$  and  $\sigma^2 = \sigma_\nu^2 + \sigma_u^2$ . Com essa abordagem para o modelo de SFA de custo, deduz-se que  $X_i \stackrel{iid}{\sim} SN(\xi(\mathbf{y}_i), \sigma^2, \lambda)$ ,  $\sigma^2 = \sigma_\nu^2 + \sigma_u^2$ , e  $\lambda = \frac{\sigma_u}{\sigma_\nu}$ , segundo a parametrização proposta por Battese e Corra (1977). Vale lembrar que  $\xi(\mathbf{y}_i)$  é o parâmetro de localização (função de custo Translog ou Cobb-Douglas),  $\sigma$  é o parâmetro de escala e,  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria.

Conforme já foi discutido no capítulo 2, inferências sobre os parâmetros baseadas no método de máxima verossimilhança apresentam alguns problemas. Por exemplo,  $\lambda$  pode se tornar infinito com probabilidade positiva. Para resolver essa problemática, Bayes e Branco (2007), baseando-se em Henze (1986), propuseram uma nova reparametrização para uma variável aleatória *Skew-Normal* padrão:

$$Z = \sqrt{(1 - \delta^2)}V + \delta U, \quad (3.6)$$

onde  $V \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1^2)$ ,  $U \stackrel{iid}{\sim} N^+(0, 1^2)$  e  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ . Além disso, se  $\lambda > 0$  para o modelo SFA de custo,  $\delta \in ]0, 1[$ . Também pode ser mostrado que:

$$\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}. \quad (3.7)$$

Vale ressaltar aqui que, esse é um diferencial desse trabalho, uma vez que pelo princípio de Bayes-Laplace, uma escolha natural de *priori* não-informativa para  $\delta$  seria uma

distribuição uniforme, isto é,  $\delta \sim U(-1, 1)$ . Como no SFA de custo,  $u_i \geq 0$  implica em  $\lambda > 0$ , então  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in ]0,1[$ , levando a  $\delta \sim U(0, 1)$ .

Também, observa-se que:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \xi(\mathbf{y}_i) + \sigma\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \text{e} \\ V(X_i) &= \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\delta^2\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou seja,  $\sigma^2$  não é a variância de  $X_i$ , mas sim um parâmetro de escala que compõe a variância de  $X_i$ .

Além disso, como  $\nu_i + u_i = \sigma z_i$ , pode-se escrever que  $\nu_i + u_i = \sigma(\sqrt{1 - \delta^2}V_i + \delta U_i)$  ou  $\nu_i = \sigma\sqrt{1 - \delta^2}V_i$  e  $u_i = \sigma\delta U_i$ . Observa-se que  $u_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_u^2)$  mede a ineficiência econômica da  $i$ -ésima DSO e  $U_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, 1^2)$  descreve uma *Half*-Normal padrão, não tendo interpretação prática, servindo apenas para manipulação. O termo  $\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2)$  captura a aleatoriedade sobre essa DSO e  $V_i \underset{iid}{\sim} N(0, 1^2)$  descreve uma Normal padrão, também não tendo interpretação prática. Essas manipulações oferecem maneiras alternativas de se escrever  $u_i$  e  $\nu_i$ . Agora, tem-se:

$$X_i = \xi(\mathbf{y}_i) + \sigma\sqrt{1 - \delta^2}V_i + \sigma\delta U_i, \quad (3.9)$$

com  $U_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, 1^2)$ ,  $V_i \underset{iid}{\sim} N(0, 1^2)$ ,  $\sigma = \sqrt{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}$  e  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ .

Utilizando a estrutura Bayesiana e a representação estocástica para a distribuição *Skew*-Normal proposta por Henze (1986), o modelo SFA de custo proposto, pode ser escrito como<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} X_i|U_i, \xi(\mathbf{y}_i), \sigma, \delta_{(\lambda)} &\underset{iid}{\sim} N\left[\xi(\mathbf{y}_i) + \sigma\delta U_i; \sigma^2(1 - \delta^2)\right], \\ U_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, 1^2), \quad i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seguindo Gil *et al.* (2017) e Bayes e Branco (2007), as seguintes especificações *a priori* fracamente informativas foram escolhidas para os parâmetros do SFA:

<sup>2</sup>Observe que  $X_i$  está condicionado ao conhecimento prévio de  $U_i, \xi(\mathbf{y}_i), \sigma$  e  $\delta_{(\lambda)}$ . Logo esses valores passam a ser considerados como constantes e somente  $V_i$  é variável.

$$\frac{1}{\sigma^2} \sim \Gamma(0,01; 0,01), \quad (3.11)$$

$$\delta \sim U(0, 1), \quad (3.12)$$

$$\beta_j \underset{iid}{\sim} N(0; 100^2), \quad (3.13)$$

onde o segundo argumento na expressão (3.13) representa a variância de  $\beta_j$ , o que implica em uma precisão de 0,0001.

O modelo descrito na equação (3.10) pode ser implementado usando *softwares* que utilizam *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC), como por exemplo, o WinBUGS (Albert, 2009; Cowles, 2004; Spiegelhalter *et al.*, 2003) ou o JAGS (Plummer, 2017), como descrito em Bayes e Branco (2007). Esses softwares retornam os valores de  $u_i$ ,  $\sigma$  e  $\lambda$ , utilizando estimação pelo contexto Bayesiano, sem precisar recorrer a métodos de verossimilhança, escapando assim das problemáticas de estimação.

### 3.3 Base de Dados

Um resumo das variáveis de entrada e saída disponíveis para as 61 DSOs brasileiras é apresentado na Tabela 3.1 e na Figura 3.1. As variáveis compreendem os valores médios dos anos de 2014 a 2016. A variável de entrada é o *custo operacional* (OPEX ou PMSO ajustado), ajustado pela inflação, e as variáveis de saída são os seguintes *cost drivers*: (a) *número de consumidores* como *proxy* para a quantidade de serviços prestados; (b) o *mercado ponderado* (energia distribuída - MWh) como *proxy* da produção total; (c) *rede aérea*; (d) *rede de alta tensão*; e, (e) *rede subterrânea* como medidas de dispersão de consumidores dentro da área de concessão (Souza *et al.*, 2010a). Além disso, o *consumidor-hora de energia interrompida* é a variável de qualidade e a *e.variable* é a variável ambiental. Correlações positivas são representadas por elipses com declives positivos. As correlações negativas são representadas por elipses com declives negativos. Quanto maior a correlação, mais estreita é a elipse. A Figura 3.1 mostra que o número de consumidores apresenta a maior correlação com os custos operacionais (PMSO ajustado), seguido por mercado ponderado e rede aérea. Além disso, o número de consumidores e o mercado ponderado estão fortemente correlacionados. Aparentemente, a variável ambiental está fracamente correlacionada aos custos operacionais.

Tabela 3.1: Variáveis de entrada e saída disponíveis para as 61 DSOs brasileiras.

Variável	Sigla	Notação	Espécie	Unidade	Proxy
PMSO ajustado (OPEX)	PMSOa	$x$	Input	R\$	Pessoal, material, serviços e outros
Número de consumidores	Cons	$y_1$	Outputs ordinários	un	Quantidade de serviços prestados
Mercado ponderado	Wmkt	$y_2$		MWh	Produção total
Rede aérea	Over	$y_3$		Km	Disseminação dos consumidores dentro da área de concessão
Rede de alta tensão	High	$y_4$			
Rede subterrânea	Under	$y_5$			
Consumidor-hora de energia interrompida	CHI	$y_6$	Outputs indesejados	h	Qualidade dos serviços prestados
Perdas não-técnicas	NTL	$y_7$		MWh	
Variável ambiental	<i>e.variable</i>	$z$	Variável exógena	*	Informações ambientais

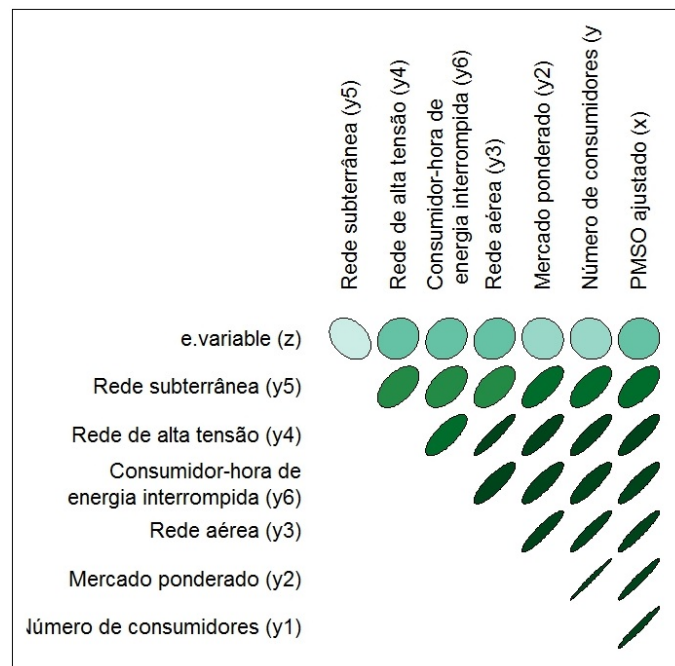


Figura 3.1: Gráfico de correlação de Spearman para as variáveis de entrada, saída, qualidade e ambientais.

Vale ressaltar que a decisão quanto ao modelo recai sobre o regulador. Portanto, com base no atual modelo DEA-NDRS, este trabalho propõe modelos de *benchmarking* SFA utilizando as mesmas entradas e saídas. Imita-se o uso de *outputs* negativos no SFA, utilizando distribuições *a priori* Half-Normal negativas para os coeficientes das variáveis

de qualidade. No entanto, propõe-se a agregação das *perdas não-técnicas* (variável de qualidade) ao *mercado ponderado*. As perdas não-técnicas são estimadas apenas para o mercado de baixa tensão, ou seja, principalmente para consumidores residenciais. Portanto, essas perdas podem ser deduzidas do mercado de baixa tensão antes de se calcular o *mercado ponderado*. Assim, apenas uma variável de qualidade, *consumidor-hora de energia interrompida*, é avaliada. Além disso, Gil *et al.* (2017) e Veronese *et al.* (2018) investigaram variáveis ambientais usando o DEA de segundo estágio e concluíram que o índice ambiental (*e.variable*) é uma *proxy* razoável para informações ambientais. Portanto, são propostos sete modelos SFA de custo, que utilizam ou não *e.variable* como a variável ambiental, conforme descrito a seguir.

## 3.4 Proposta de Modelos para o SFA

### 3.4.1 Modelo 1

Esse modelo de SFA utiliza uma função de custo translog, sendo o custo operacional a variável de entrada e número de consumidores, mercado ponderado (variável original), rede aérea, rede de alta tensão e rede subterrânea são as variáveis de saída. Esse modelo não inclui variáveis de qualidade ou ambientais. Sua estrutura é dada por:

$$\begin{aligned}
\ln x_i &= \ln \beta_0 + \sum_{j=1}^5 \beta_j \ln y_{ij} + \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \beta_{jk} \ln y_{ij} \ln y_{ik} + \epsilon_i \\
&= \beta_0 + \beta_1 \ln y_{i1} + \beta_2 \ln y_{i2} + \beta_3 \ln y_{i3} + \beta_4 \ln y_{i4} + \beta_5 \ln y_{i5} + \\
&+ \beta_{11}(\ln y_{i1})^2 + \beta_{22}(\ln y_{i2})^2 + \beta_{33}(\ln y_{i3})^2 + \beta_{44}(\ln y_{i4})^2 + \beta_{55}(\ln y_{i5})^2 + \\
&+ \beta_{12}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i2}) + \beta_{13}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i3}) + \beta_{14}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{15}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i5}) + \\
&+ \beta_{23}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i3}) + \beta_{24}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{25}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i5}) + \\
&+ \beta_{34}(\ln y_{i3} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{35}(\ln y_{i3} \cdot \ln y_{i5}) + \\
&+ \beta_{45}(\ln y_{i4} \cdot \ln y_{i5}) + \nu_i + u_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, 61.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.4.2 Modelo 2

Esse modelo de SFA utiliza uma função de custo translog, com as mesmas variáveis do Modelo 1. No entanto, o mercado ponderado é recalculado deduzindo-se as perdas técnicas. Além disso, o consumidor-hora de energia interrompida é utilizado como a variável de qualidade e, a *e.variable* é utilizada como a variável ambiental. A seguinte estrutura de função de custo é usada:

$$\ln x_i = \ln C(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\beta}) + g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) + \nu_i + u_i \quad (3.15)$$

onde  $\ln C(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\beta})$  é a função de custo Translog e  $g(\mathbf{z}_i; \boldsymbol{\delta}) = \delta_0 + \delta_1 z_i$  é a componente contextual ou ambiental. Logo, a estrutura do modelo fica assim:

$$\begin{aligned} \ln x_i &= \ln \beta_0 + \sum_{j=1}^6 \beta_j \ln y_{ij} + \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \beta_{jk} \ln y_{ij} \ln y_{ik} + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \epsilon_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 \ln y_{i1} + \beta_2 \ln y_{i2} + \beta_3 \ln y_{i3} + \beta_4 \ln y_{i4} + \beta_5 \ln y_{i5} + \beta_6 \ln y_{i6} + \\ &+ \beta_{11}(\ln y_{i1})^2 + \beta_{22}(\ln y_{i2})^2 + \beta_{33}(\ln y_{i3})^2 + \beta_{44}(\ln y_{i4})^2 + \beta_{55}(\ln y_{i5})^2 + \\ &+ \beta_{12}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i2}) + \beta_{13}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i3}) + \beta_{14}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{15}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i5}) + \\ &+ \beta_{23}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i3}) + \beta_{24}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{25}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i5}) + \\ &+ \beta_{34}(\ln y_{i3} \cdot \ln y_{i4}) + \beta_{35}(\ln y_{i3} \cdot \ln y_{i5}) + \\ &+ \beta_{45}(\ln y_{i4} \cdot \ln y_{i5}) + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \nu_i + u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, 61. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.4.3 Modelo 3

Esse é um modelo de SFA híbrido que utiliza uma estrutura de custo translog para número de consumidores e mercado ponderado, juntamente com uma estrutura de custo Cobb-Douglas para rede aérea, rede de alta tensão e rede subterrânea. Além disso, o consumidor-hora de energia interrompida é utilizado como variável de qualidade e a *e.variable* é utilizada como variável ambiental. Sua estrutura é dada por:

$$\begin{aligned}
\ln x_i &= \ln \beta_0 + \sum_{j=1}^6 \beta_j \ln y_{ij} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \beta_{jk} \ln y_{ij} \ln y_{ik} + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \epsilon_i \\
&= \beta_0 + \beta_1 \ln y_{i1} + \beta_2 \ln y_{i2} + \beta_3 \ln y_{i3} + \beta_4 \ln y_{i4} + \beta_5 \ln y_{i5} + \beta_6 \ln y_{i6} + \\
&+ \beta_{11}(\ln y_{i1})^2 + \beta_{22}(\ln y_{i2})^2 + \\
&+ \beta_{12}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i2}) + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \nu_i + u_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, 61.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

#### 3.4.4 Modelo 4

Trata-se de um modelo SFA híbrido que utiliza uma estrutura de custo translog para número de consumidores, mercado ponderado e rede aérea, juntamente com uma estrutura de custo Cobb-Douglas para rede de alta tensão e rede subterrânea. Além disso, o consumidor-hora de energia interrompida é utilizado como variável de qualidade e a *e.variable* é utilizada como variável ambiental. Sua estrutura é dada por:

$$\begin{aligned}
\ln x_i &= \ln \beta_0 + \sum_{j=1}^6 \beta_j \ln y_{ij} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \beta_{jk} \ln y_{ij} \ln y_{ik} + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \epsilon_i \\
&= \beta_0 + \beta_1 \ln y_{i1} + \beta_2 \ln y_{i2} + \beta_3 \ln y_{i3} + \beta_4 \ln y_{i4} + \beta_5 \ln y_{i5} + \beta_6 \ln y_{i6} + \\
&+ \beta_{11}(\ln y_{i1})^2 + \beta_{22}(\ln y_{i2})^2 + \beta_{33}(\ln y_{i3})^2 + \\
&+ \beta_{12}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i2}) + \beta_{13}(\ln y_{i1} \cdot \ln y_{i3}) + \\
&+ \beta_{23}(\ln y_{i2} \cdot \ln y_{i3}) + (\delta_0 + \delta_1 z_i) + \nu_i + u_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, 61.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

#### 3.4.5 Modelo 5

Esse é um modelo de SFA, semelhante ao Modelo 2, porém utiliza uma distribuição de probabilidades *t-Student* para o componente de ruído. Como indicado por Juárez e

Steel (2010), é utilizada a seguinte distribuição *a priori* Gama para o parâmetro grau de liberdade  $a$  da distribuição *t-Student*:  $a \sim \Gamma(2; 0,1)$ .

### 3.4.6 Modelo 6

Trata-se de um modelo híbrido de SFA, similar ao Modelo 3, porém utiliza uma distribuição de probabilidades *t-Student* para o componente de ruído e a distribuição *a priori* Gama para o parâmetro grau de liberdade proposta no modelo 5.

### 3.4.7 Modelo 7

Esse é um modelo híbrido de SFA, similar ao Modelo 4, porém utiliza uma distribuição de probabilidades *t-Student* para o componente de ruído e a distribuição *a priori* Gama para o parâmetro grau de liberdade proposta no modelo 5.

## 3.5 Implementação Computacional

As parametrizações e as modelagens propostas foram implementadas a partir do *software* livre JAGS (*Just Another Gibbs Sampler*) (Plummer, 2003), em conjunto com os pacotes computacionais *rjags* (Plummer, 2016) e *mcmc* (Geyer e Johnson, 2017), que são interfaces do R para a biblioteca JAGS MCMC.

Em todos os modelos BSFA propostos, inicialmente foram realizadas 40 milhões de iterações (*burn-in*). Em seguida, executaram-se outras 40 milhões de iterações, com uma defasagem (*lag*) de 20 mil iterações entre as sucessivas amostras geradas para os parâmetros do modelo. A monitoração empregada para a convergência do Amostrador de Gibbs foi a indicada por Cowles e Carlin (1996), isto é, a utilização de gráficos de *Autocorrelation Function* (ACF), construídos a partir das amostras *a posteriori*.

## 3.6 Critérios de Seleção de Modelos

Os modelos BSFA propostos foram comparados utilizando-se as estatísticas *Watanabe-Akaike Information Criterion* (WAIC), *Deviance Information Criterion* (DIC) e *Log-Pseudo Marginal Likelihood* (LPML). Os modelos com menor valor de DIC e maiores valores de WAIC e LPML alcançam melhor ajuste aos dados. No Apêndice C, é apresen-



tada uma síntese destes critérios. Entretanto, para maiores detalhes, são indicadas as obras de Gelman *et al.* (2014) e Gamerman e Lopes (2006).

Os resultados computacionais encontrados para as parametrizações e modelagens aqui descritas, são apresentados no próximo capítulo.



## Resultados e Discussões

Nesse quarto capítulo, são apresentados os resultados e as discussões a respeito das parametrizações e modelagens propostas no capítulo anterior.

### 4.1 Verificação Inicial da Assimetria de $\epsilon_i$

Antes que os modelos BSFA propostos no capítulo anterior fossem implementados, foi pertinente verificar se o contexto do SBDEE suportava a presença de ineficiência econômica ( $u_i > 0$ ). Caso não suportasse, seria desnecessário investir em técnicas mais caras de estimação. Logo, foram testadas as seguintes hipóteses sobre  $\epsilon_i = \nu_i + u_i$ :

$$\begin{aligned} H_0 & : \epsilon \text{ é simétrico,} \\ H_1 & : \epsilon \text{ é assimétrico.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Em seguida, utilizou-se a estatística de teste  $M3T$  de Coelli (1995):

$$M3T = \frac{m_3}{\sqrt{\frac{6m_2^3}{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0, 1^2), \tag{4.2}$$

onde  $m_i$  e  $n$  representam respectivamente, o  $i$ -ésimo momento dos resíduos e o tamanho amostral. Com esse propósito, implementou-se os modelos OLS para as variáveis de

todos os sete modelos propostos, obtendo-se níveis descritivos  $p\text{-values} = 0,000$  em todos os sete casos. Assim, rejeitou-se a hipótese de simetria dada em (4.1), a um nível de 5% de significância, isto é, os dados em questão suportavam a presença de ineficiência econômica, e os modelos de BSFA de custos puderam ser ajustados a partir disso.

## 4.2 Parâmetros Estimados

Além dos modelos selecionados, descritos no capítulo 3, os coeficientes estimados usando o modelo OLS Cobb-Douglas com variáveis de produção, qualidade e ambientais são apresentados na Tabela 4.1. O modelo OLS ilustra como essas variáveis afetam os custos operacionais médios. A partir desses resultados, pode-se observar que, utilizando todas as variáveis de produção, qualidade e ambientais, apenas o número de consumidores, o mercado ponderado e as variáveis ambientais são estatisticamente significantes. Provavelmente, isso se deve ao pequeno tamanho da amostra de 61 DSOs. Os resultados também corroboram com as conclusões de Veronese *et al.* (2018) e Gil *et al.* (2017), que alegam que o ambiente afeta as eficiências de custo das DSOs brasileiras. Além disso, todos os coeficientes de produção e ambientais são positivos, como esperado. Curiosamente, o modelo OLS apresenta um coeficiente negativo de qualidade (coeficiente de  $y_6$ , isto é, do *consumidor-hora de energia interrompida*), embora nenhuma restrição tenha sido imposta. Este resultado indica o efeito da multicolinearidade e fornece evidências de que um coeficiente de qualidade negativo melhora a estimativa do custo médio.

A Tabela 4.1 também mostra os coeficientes estimados para os modelos 1 a 7. Vale ressaltar que o modelo 1 possui 21 coeficientes, os modelos 2 e 5 possuem 23 coeficientes, os modelos 3 e 6 possuem 11 coeficientes e os modelos 4 e 7 tem 14 coeficientes. Vale a pena observar que, embora a propriedade de convexidade seja obtida usando a Translog, ela aumenta o número de coeficientes e compromete a análise estatística. Em conclusão, há um *trade-off* entre propriedade de convexidade e significância estatística usando SFA.

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros médios *a posteriori*.

Estimativas dos parâmetros médios <i>a posteriori</i> .				Normal - Half-Normal SFA								t-Student - Half-Normal SFA					
Variáveis	Parâmetros	OLS Cobb-Douglas*		Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 4		Modelo 5		Modelo 6		Modelo 7	
		Estimativas	SD	Média	SD	Média	SD	Média	SD	Média	SD	Média	SD	Média	SD	Média	SD
Constante	$\beta_0$	-0,1472	0,5738	5,5200	7,4887	-4,8662	6,5478	-3,5543	2,6209	-3,0444	3,4081	-5,3726	7,4029	-2,7410	2,7074	-1,8267	3,2774
lnCons	$\beta_1$	<b>0,5223</b>	0,1439	4,3133	2,5213	0,6031	2,0994	-1,4997	0,8683	-1,2721	1,3672	-2,1378	1,8600	-1,2172	0,7318	-0,8151	1,2540
lnWmkt	$\beta_2$	<b>0,3288</b>	0,1464	-3,5861	2,3781	1,6581	1,9922	<b>2,7101</b>	1,0580	2,1682	1,5471	3,9641	2,4197	<b>2,3239</b>	0,9316	1,5418	1,3449
lnOver	$\beta_3$	0,0225	0,0540	-1,1629	1,1865	-1,2917	1,2105	0,0143	0,0596	0,3838	0,6003	-0,8886	1,1089	0,0198	0,0595	0,4234	0,5527
lnHigh	$\beta_4$	0,0303	0,0226	0,8602	0,7632	0,5449	0,7300	0,0242	0,0230	0,0187	0,0257	0,7057	0,6182	0,0225	0,0231	0,0152	0,0249
lnUnder	$\beta_5$	0,0240	0,0215	0,4135	0,4491	-0,1691	0,4568	0,0461	0,0256	0,0448	0,0253	-0,3026	0,4913	0,0445	0,0255	0,0427	0,0243
(lnCons * lnCons)	$\beta_{11}$			0,0770	0,6107	0,3634	0,3177	-0,0525	0,1215	0,4233	0,3496	<b>0,4835</b>	0,2363	0,0063	0,0777	0,4521	0,2482
(lnWmkt * lnWmkt)	$\beta_{22}$			0,1860	0,3151	-0,0270	0,1682	-0,2150	0,1320	0,0592	0,2695	-0,2591	0,2702	-0,1408	0,0795	0,1395	0,1325
(lnOver * lnOver)	$\beta_{33}$			0,0379	0,0593	0,0404	0,0507			0,0774	0,0462	0,0639	0,0499			0,0788	0,0434
(lnHigh * lnHigh)	$\beta_{44}$			-0,0124	0,0194	-0,0140	0,0164					-0,0133	0,0163				
(lnUnder * lnUnder)	$\beta_{55}$			<b>0,0301</b>	0,0144	0,0152	0,0132					0,0091	0,0128				
lnCons * lnWmkt	$\beta_{12}$			-0,2604	0,9049	-0,3793	0,4258	0,2597	0,2433	-0,4176	0,5654	-0,1986	0,4565	0,1300	0,1439	-0,5220	0,3065
lnCons * lnOver	$\beta_{13}$			-0,5217	0,2983	<b>-0,5793</b>	0,2778			-0,3248	0,2462	<b>-0,8295</b>	0,2331			-0,3014	0,2591
lnCons * lnHigh	$\beta_{14}$			0,4377	0,2428	0,2553	0,1694					0,2084	0,1070				
lnCons * lnUnder	$\beta_{15}$			0,1347	0,1165	0,0552	0,0984					-0,0194	0,1000				
lnWmkt * lnOver	$\beta_{23}$			0,5271	0,2762	<b>0,5875</b>	0,2936			0,1717	0,2132	<b>0,7467</b>	0,2401			0,1463	0,2173
lnWmkt * lnHigh	$\beta_{24}$			-0,4594	0,2538	-0,2672	0,1838					<b>-0,2578</b>	0,1204				
lnWmkt * lnUnder	$\beta_{25}$			-0,1649	0,1113	-0,0294	0,0990					0,0509	0,1114				
lnOver * lnHigh	$\beta_{34}$			-0,0007	0,0712	-0,0003	0,0606					0,0303	0,0583				
lnOver * lnUnder	$\beta_{35}$			-0,0116	0,0492	-0,0213	0,0504					-0,0248	0,0455				
lnHigh * lnUnder	$\beta_{45}$			0,0153	0,0394	0,0036	0,0372					0,0116	0,0330				
lnCHI	$\beta_6$	-0,0103	0,0088			-0,0124	0,0074	-0,0120	0,0069	-0,0098	0,0066	-0,0108	0,0067	-0,0109	0,0070	-0,0089	0,0062
e,variable	$\delta_1$	<b>0,0214</b>	0,0049			<b>0,0226</b>	0,0053	<b>0,0249</b>	0,0050	<b>0,0225</b>	0,0052	<b>0,0226</b>	0,0053	<b>0,0246</b>	0,0050	<b>0,0221</b>	0,0049
a												18,9171	13,5916	21,7003	14,2939	19,7428	14,0988
$\sigma$				0,3224	0,0615	0,3226	0,0671	0,3113	0,0601	0,3277	0,0647	0,3058	0,0759	0,2928	0,0600	0,2953	0,0661
$\lambda$				0,9746	2,6313	1,8544	6,4711	1,0190	1,7999	1,4571	2,4012	1,9301	3,2776	0,9535	1,1257	1,2302	1,6212
<b>WAIC</b>						-17,87839	-14,48895	-9,145846		-9,679834		-15,00923		-8,838742		-9,716204	
<b>DIC</b>						44,75155	43,79012	22,22629		27,7508		44,69681		21,61173		25,06897	
<b>LPML</b>						-17,79408	-13,53134	-10,07233		-10,48291		-12,48827		-9,318436		-10,92601	

Nota: os parâmetros estatísticos significativos a 5% estão em negrito.

\* $R_{aj}^2 = 0,9795$

Os Modelos 3, 4, 6 e 7 aplicam a estrutura híbrida da Translog Cobb-Douglas para reduzir o número de parâmetros. Os resultados WAIC, DIC e LPML indicam os modelos 3 e 6 como os melhores modelos, ou seja, com o melhor ajuste aos dados. Os resultados também mostram que os coeficientes de produção utilizando uma estrutura de Cobb-Douglas apresentam estimativas positivas, como esperado. Além disso, os coeficientes estimados nos Modelos 3 e 6 são muito semelhantes, e resultados semelhantes para o parâmetro  $\lambda$  são encontrados. O parâmetro  $\lambda$  representa a proporção entre componentes de ineficiência e ruído. Valores estimados para  $\lambda$  utilizando os Modelos 3 e 6 estão próximos de um. O Modelo 6 alcança resultados um pouco melhores de WAIC, DIC e LPML quando comparado ao Modelo 3. Isso é esperado, já que o Modelo 6 usa uma distribuição *t-Student* para o componente de erro. De acordo com Stead *et al.* (2017), a distribuição *t-Student* leva em conta a presença *outliers* na base de dados.

### 4.3 Eficiências Estimadas

A Figura 4.1 compara as eficiências estimadas pelo DEA e pelo SFA proposto. Os resultados mostram que as eficiências estimadas do SFA são muito maiores do que as eficiências do DEA. As eficiências do DEA têm média de 70,87% e valor mínimo de 27,90%, enquanto as eficiências de SFA têm média de 86,87% e valor mínimo de 66,34%. Como descrito anteriormente, menores eficiências de DEA foram fortemente criticadas. Além disso, no último CRTP, o regulador adotou uma redução máxima de custo de 5% ao ano, o que indica uma eficiência de custo mínima de 20% em cada CRTP. Portanto, os resultados do SFA estimados apoiam a decisão do regulador brasileiro no último CRTP.

A Figura 4.2 mostra a correlação linear das eficiências estimadas. O modelo SFA 1, daqui em diante denominado SFA 1, apresenta a maior correlação com as eficiências originais do DEA ( $\rho = 0,6531$ ). Vale ressaltar que o SFA 1 não inclui variáveis de qualidade ou ambientais. Espera-se também que os modelos de SFA alcancem diferentes eficiências, pois entre outras questões técnicas, dependem de diferentes fronteiras paramétricas e as estimativas de eficiência são baseadas em máxima verossimilhança. No entanto, as eficiências do SFA estão positivamente correlacionadas com as eficiências do DEA, como esperado. Além disso, a Figura 4.2 mostra que as eficiências estimadas pelos Modelos 4 e 7 são altamente correlacionadas ( $\rho = 0.9974$ ), assim como nos Modelos 3 e 6 ( $\rho = 0.9957$ ). As eficiências estimadas para cada modelo são apresentadas na Tabela 4.2.

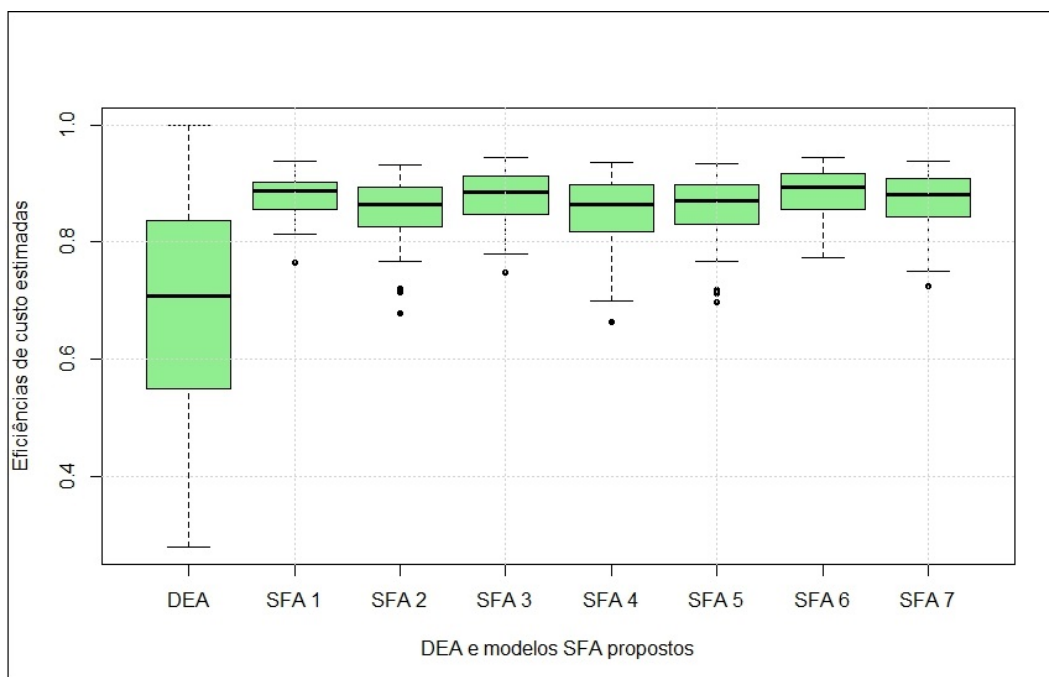


Figura 4.1: Boxplots comparando eficiências originais de DEA e eficiências propostas de SFA.

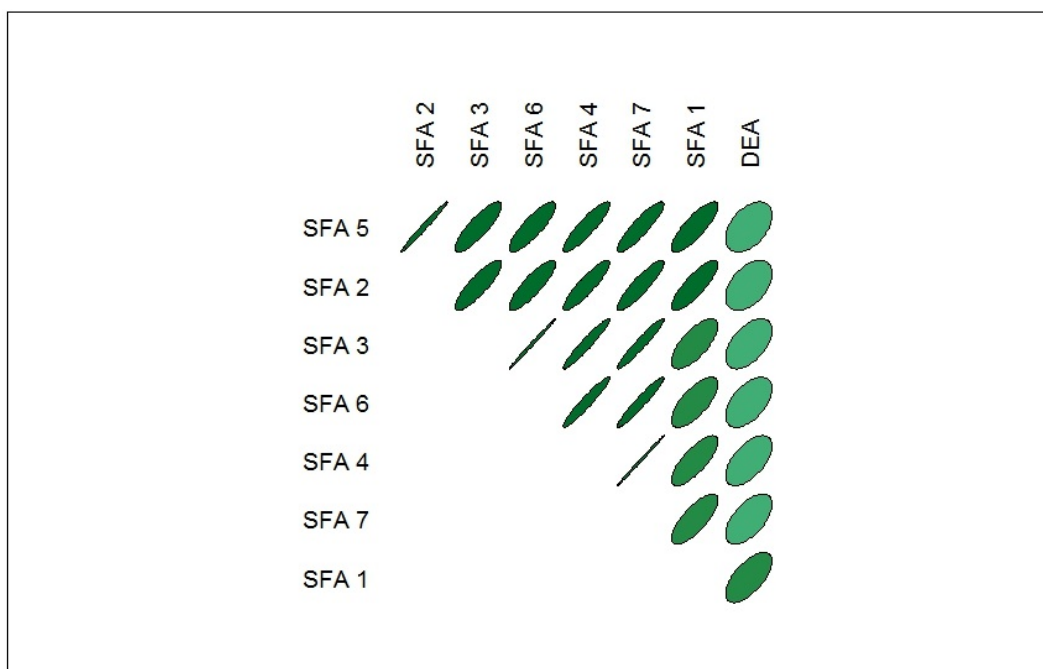


Figura 4.2: Matriz de correlação comparando eficiências originais de DEA e eficiências propostas de SFA.

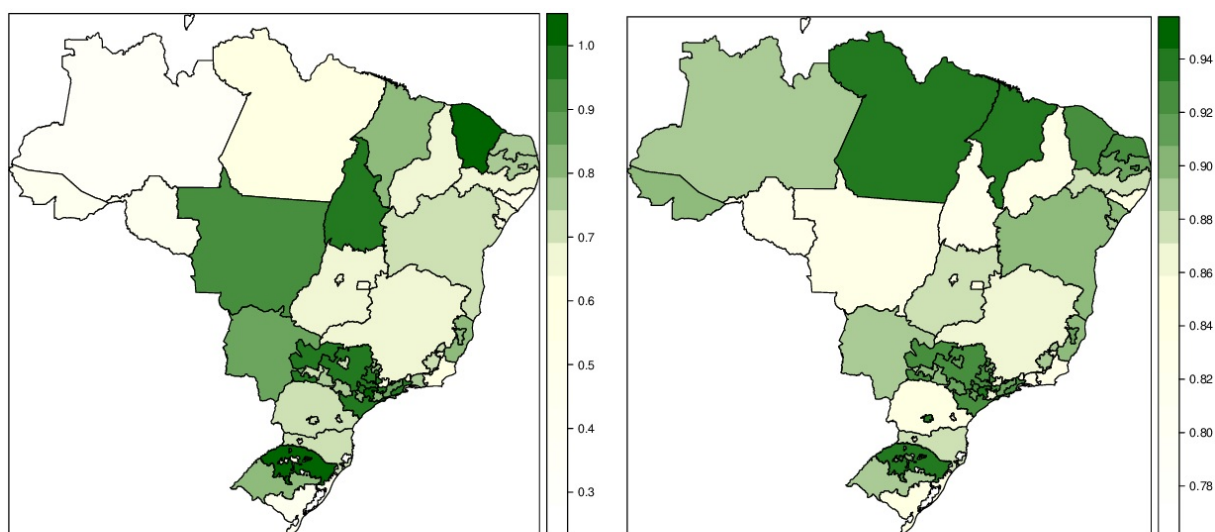
Tabela 4.2: Escores de eficiência estimados utilizando os modelos de SFA propostos.

DSO	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7
DMED	0,7657	0,6789	0,7474	0,6634	0,6971	0,7737	0,7241
BOA VISTA	0,7643	0,7213	0,7800	0,7019	0,7193	0,7943	0,7498
JOAO CESA	0,8344	0,7142	0,7886	0,7005	0,7113	0,8156	0,7578
CERON	0,8521	0,8015	0,8186	0,7801	0,8029	0,8285	0,8097
ETO	0,8505	0,8141	0,8219	0,8198	0,8300	0,8289	0,8432
CEPISA	0,8511	0,7824	0,8207	0,7900	0,7865	0,8364	0,8203
LIGHT	0,8843	0,8586	0,8262	0,7915	0,8616	0,8419	0,8192
AMPLA	0,8718	0,7668	0,8303	0,8018	0,7957	0,8428	0,8235
EMT	0,8918	0,8439	0,8306	0,8379	0,8425	0,8430	0,8605
ENF	0,8563	0,8092	0,8363	0,7960	0,8246	0,8439	0,8187
CEB	0,8390	0,8089	0,8363	0,7922	0,7995	0,8492	0,8187
CEEE	0,8207	0,8123	0,8478	0,7906	0,8073	0,8500	0,8169
CEAL	0,8519	0,8275	0,8391	0,8227	0,8416	0,8508	0,8465
COPEL	0,8521	0,8085	0,8465	0,8061	0,8097	0,8539	0,8350
CHESP	0,8694	0,7981	0,8435	0,8163	0,8210	0,8553	0,8427
FORCEL	0,8873	0,8690	0,8455	0,8725	0,8805	0,8555	0,8872
IGUAÇU	0,8700	0,8256	0,8468	0,8079	0,8243	0,8564	0,8392
URUSSANGA	0,8722	0,8758	0,8422	0,8173	0,8916	0,8584	0,8455
COCEL	0,8145	0,7706	0,8538	0,8011	0,7682	0,8585	0,8289
BRAGANTINA	0,9046	0,8449	0,8527	0,8173	0,8463	0,8608	0,8368
CEMIG	0,8821	0,8460	0,8547	0,8119	0,8471	0,8663	0,8343
ELETROPAULO	0,8923	0,8720	0,8559	0,8429	0,8869	0,8694	0,8656
CELG	0,8630	0,8489	0,8603	0,8305	0,8469	0,8723	0,8542
CELESC	0,8658	0,8378	0,8692	0,8349	0,8436	0,8761	0,8587
CELPE	0,8475	0,8118	0,8695	0,8429	0,8266	0,8804	0,8602
EMS	0,9097	0,8749	0,8816	0,8779	0,8905	0,8834	0,8869
EMG	0,8949	0,8786	0,8807	0,8525	0,8777	0,8835	0,8698
DEMEI	0,8551	0,8140	0,8806	0,8377	0,8276	0,8872	0,8608
SULGIPE	0,8911	0,8967	0,8755	0,8756	0,8797	0,8907	0,8988
AMAZONAS	0,8542	0,8271	0,8853	0,8629	0,8374	0,8910	0,8817
COOPERALIANÇA	0,8726	0,8518	0,8872	0,8415	0,8514	0,8936	0,8689
RGE SUL	0,9016	0,8484	0,8858	0,8694	0,8495	0,8937	0,8860
ELETROACRE	0,8371	0,8806	0,8886	0,8589	0,8876	0,8954	0,8789
ELETROCAR	0,8771	0,8697	0,8855	0,8554	0,8913	0,8955	0,8718
CAIUÁ	0,9181	0,8887	0,8927	0,8661	0,8886	0,8962	0,8819
ESCELSA	0,8982	0,8400	0,8887	0,8653	0,8446	0,8976	0,8822
CPEE	0,9322	0,9101	0,8938	0,8806	0,9141	0,9011	0,8980
VALE PARANAPANEMA	0,9254	0,9150	0,9029	0,8842	0,9187	0,9048	0,8968
COELBA	0,9011	0,8978	0,8980	0,8772	0,8956	0,9063	0,8900
ESE	0,8880	0,8754	0,8992	0,8819	0,8813	0,9071	0,8933
SANTA MARIA	0,8935	0,8871	0,9121	0,9029	0,9020	0,9099	0,9104
BANDEIRANTE	0,8894	0,8464	0,9059	0,8945	0,8548	0,9128	0,9034
NACIONAL	0,9172	0,8995	0,9084	0,8814	0,8986	0,9132	0,8939
EPB	0,8885	0,8740	0,9021	0,8951	0,8814	0,9142	0,9069
SANTA CRUZ	0,9242	0,9164	0,9127	0,8971	0,9185	0,9168	0,9088
CSPE	0,9270	0,9112	0,9107	0,8979	0,9161	0,9172	0,9084
HIDROPAN	0,8922	0,9069	0,9143	0,8697	0,9081	0,9196	0,8901
EBO	0,8877	0,9135	0,9105	0,9069	0,9202	0,9207	0,9195
JAGUARI	0,8967	0,8574	0,9156	0,9062	0,8388	0,9215	0,9194
COSERN	0,9089	0,8950	0,9141	0,9049	0,9050	0,9218	0,9140
ELEKTRO	0,8889	0,8560	0,9166	0,9049	0,8679	0,9230	0,9175
CPFL PAULISTA	0,9101	0,8895	0,9198	0,9027	0,8976	0,9242	0,9162
MOCOCA	0,9069	0,8867	0,9224	0,9104	0,8871	0,9247	0,9176
COELCE	0,9279	0,9073	0,9225	0,9121	0,9087	0,9281	0,9229
NOVA PALMA	0,8545	0,8650	0,9223	0,9212	0,8716	0,9289	0,9271
CELPA	0,8672	0,9153	0,9293	0,9151	0,9186	0,9324	0,9221
CFO	0,8566	0,8892	0,9294	0,9112	0,8925	0,9325	0,9195
RGE	0,9179	0,9291	0,9314	0,9304	0,9337	0,9337	0,9330
CEMAR	0,8991	0,9231	0,9296	0,9263	0,9269	0,9354	0,9306
PIRATININGA	0,9164	0,9136	0,9306	0,9250	0,9181	0,9357	0,9293
MUXFELDT	0,9382	0,9322	0,9457	0,9363	0,9312	0,9439	0,9382

Nota: os escores de eficiência foram classificados em ordem crescente do Modelo 6.



A Figura 4.3 mostra a distribuição das eficiências DEA e SFA (Modelo 6) em todo o território brasileiro. Esquemas de cores foram ajustados para a faixa de eficiência DEA e SFA para minimizar as diferenças de escala. Os resultados mostram padrões semelhantes entre as eficiências DEA e SFA nas regiões sul e sudeste. Além disso, as eficiências de SFA são maiores no norte, ao contrário das eficiências de DEA que são extremamente mais baixas nessa região. Isso ocorre porque o modelo SFA inclui ajustes ambientais. Veronese *et al.* (2018) e Gil *et al.* (2017) também concluíram que a região norte do Brasil enfrenta condições ambientais adversas que exigem atualizações de eficiência de custos. Diferenças significativas entre DEA e SFA são encontradas nos estados de Mato Grosso e Tocantins (centro-oeste/norte). Ao contrário do DEA, as eficiências de SFA para as DSOs localizadas nesses estados foram menores em comparação com as eficiências de SFA em todo o território brasileiro. Em geral, apesar das diferenças de escala mostradas na Figura 4.3, tanto o DEA quanto o SFA proposto apresentaram padrões similares de maior e menor eficiência na maioria das DSOs brasileiros. Mudanças específicas são principalmente devidas a ajustes ambientais.



(a) Eficiências estimadas DEA

(b) Eficiências estimadas SFA 6.

Figura 4.3: Eficiências estimadas DEA e SFA em todo o território brasileiro.

A Figura 4.4 também ilustra semelhanças e diferenças entre eficiências de DEA e SFA após ajustes de escala. As DSOs foram classificados em ordem crescente de dissimilaridade. Dois eixos  $y$  diferentes são mostrados. Os valores de eficiência de SFA estão localizados no eixo  $y$  esquerdo, enquanto os valores de eficiência DEA estão localizados no eixo  $y$  direito. Pode-se concluir que, após o escalonamento, tanto a eficiência DEA quanto a SFA

são similares a um grande grupo de DSOs. Como mencionado anteriormente, grandes dissimilaridades estão associadas a algumas DSOs localizadas na região norte.

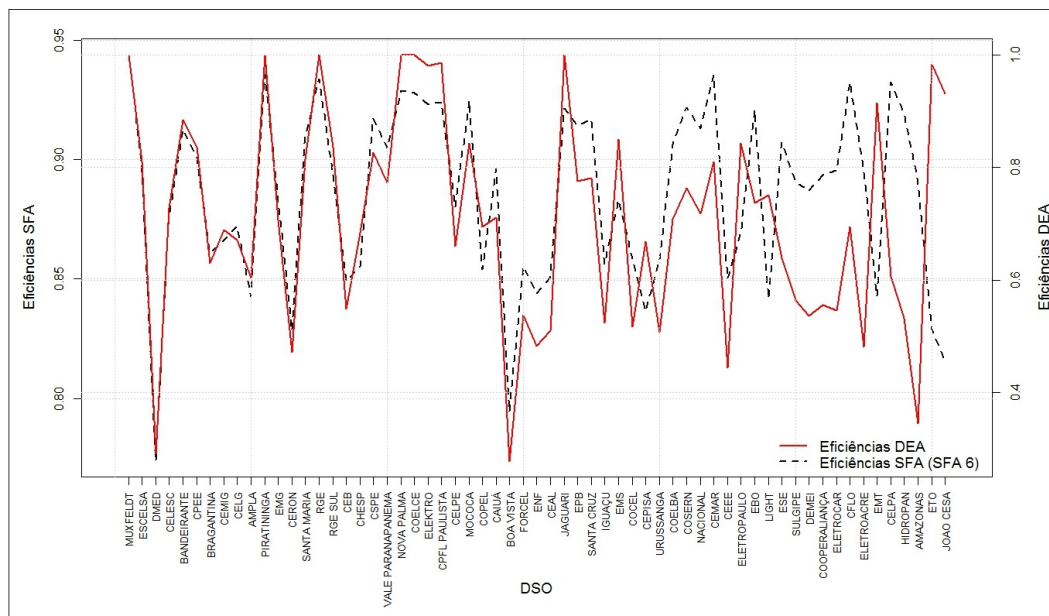


Figura 4.4: Similaridades e dissimilaridades entre DEA e SFA após ajustes de escala.

A Tabela 4.3 mostra as eficiências DEA e SFA para todas as DSOs e seus respectivos custos eficientes. Os resultados são classificados em ordem crescente das eficiências de DEA. Como as eficiências de SFA são, em média, maiores que as eficiências de DEA, a maioria dos custos eficientes de SFA são maiores do que os custos eficientes de DEA. No entanto, as maiores eficiências de SFA estão abaixo de 100%. Isso ocorre porque as eficiências de SFA são estimadas usando a média *a posteriori*. Como consequência, as DSOs que alcançaram 100% utilizando DEA apresentarão eficiências mais baixas usando SFA. Isso é mostrado na parte inferior da Tabela 4.3. Uma alternativa para superar essa limitação é usar o valor máximo de eficiências de DEA e SFA como a eficiência final, como sugerido em Agrell e Bogetoft (2017).

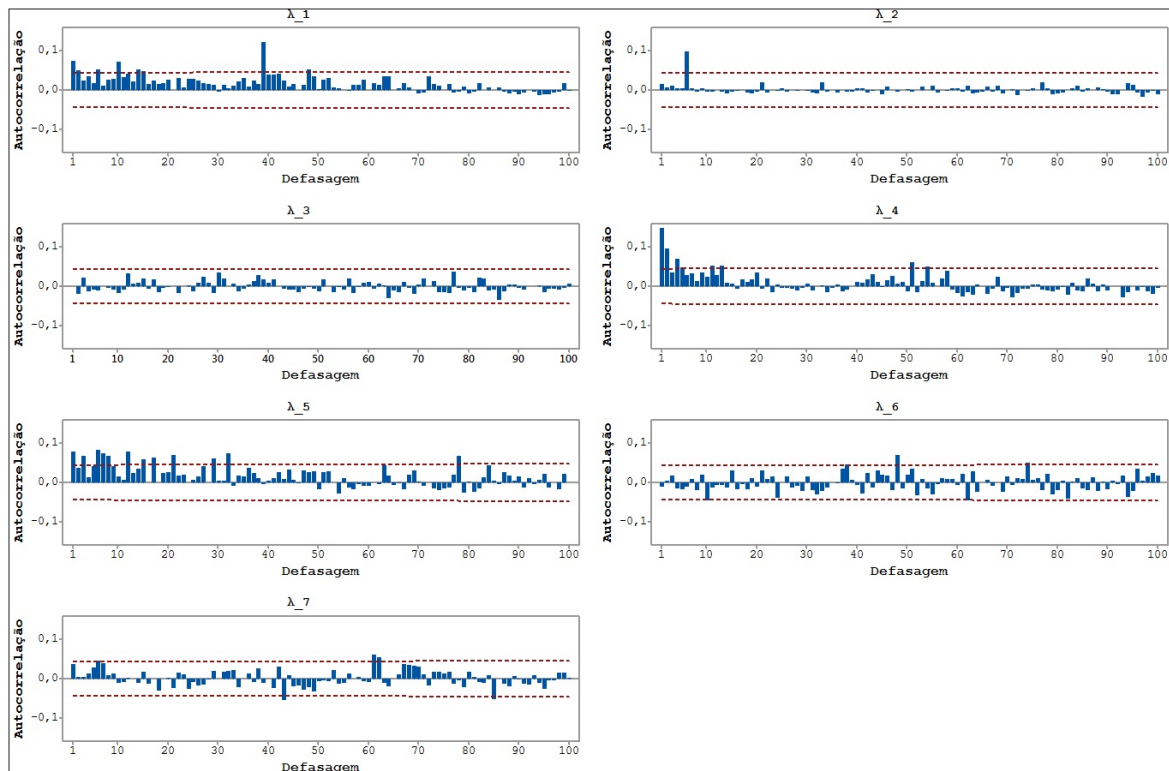
Os resultados mostram uma grande diferença de escala entre as eficiências DEA e SFA. A eficiência média do DEA é de 70,5%, enquanto a eficiência média do SFA é de 88,5%. Essa diferença representa uma receita total de R\$ 3.175.509.926,81 ou U\$ 971,1 milhões (considerando uma taxa de câmbio média de R\$ 3,27 por U\$ 1,00 no ano de 2016), que atualmente é contabilizada como ineficiência. Como mencionado anteriormente, isso ocorre porque o SFA decompõe a distância da fronteira de custo em duas componentes, ruído e ineficiência econômica, enquanto a DEA assume apenas a ineficiência econômica.

Tabela 4.3: Eficiências estimadas e custos eficientes utilizando DEA e SFA (Modelo 6), e diferenças entre custos eficientes utilizando DEA e o SFA proposto.

DSO	DEA	SFA 6	OPEX Eficiente DEA (R\$)	OPEX Eficiente SFA 6 (R\$)	SFA Mudança (R\$)
BOA VISTA	0,2788	0,7943	25 556 579,36	72 799 267,22	47 242 687,86 ▲
DMED	0,2925	0,7737	13 701 384,11	36 245 575,96	22 544 191,84 ▲
AMAZONAS	0,3385	0,8910	158 480 620,50	417 078 259,35	258 597 638,85 ▲
CEEE	0,4402	0,8500	283 298 377,35	546 996 095,14	263 697 717,78 ▲
URUSSANGA	0,4706	0,8584	2 919 625,37	5 325 596,45	2 405 971,08 ▲
CERON	0,4723	0,8285	150 896 328,24	264 709 589,97	113 813 261,73 ▲
ENF	0,4773	0,8439	17 060 734,43	30 163 298,44	13 102 564,01 ▲
ELETROACRE	0,4822	0,8954	55 397 088,80	102 870 328,87	47 473 240,07 ▲
CEAL	0,5111	0,8508	165 651 311,27	275 729 011,15	110 077 699,87 ▲
COCEL	0,5194	0,8585	10 667 825,64	17 631 314,62	6 963 488,97 ▲
IGUAÇU	0,5282	0,8564	9 299 509,27	15 078 296,51	5 778 787,23 ▲
DEMEI	0,5294	0,8872	6 029 224,84	10 104 630,19	4 075 405,36 ▲
FORCEL	0,5374	0,8555	2 302 945,15	3 666 038,41	1 363 093,26 ▲
HIDROPAN	0,5405	0,9196	4 091 106,17	6 960 079,05	2 868 972,88 ▲
ELETROCAR	0,5475	0,8955	8 875 619,78	14 517 352,05	5 641 732,27 ▲
CEB	0,5490	0,8492	209 422 109,05	323 972 674,46	114 550 565,41 ▲
COOPERALIANÇA	0,5615	0,8936	7 401 912,74	11 779 949,76	4 378 037,02 ▲
SULGIPE	0,5638	0,8907	24 258 769,21	38 326 417,50	14 067 648,28 ▲
AMPLA	0,5918	0,8428	389 547 727,90	554 762 283,73	165 214 555,83 ▲
CELPA	0,5963	0,9324	404 356 427,10	632 251 584,55	227 895 157,46 ▲
BRAGANTINA	0,6334	0,8608	30 400 514,76	41 312 652,39	10 912 137,63 ▲
ESE	0,6413	0,9071	119 207 414,10	168 621 656,90	49 414 242,80 ▲
CELPE	0,6593	0,8804	567 757 907,55	758 101 234,45	190 343 326,90 ▲
CEPISA	0,6686	0,8364	262 940 893,06	328 930 688,56	65 989 795,50 ▲
CELG	0,6716	0,8723	636 942 966,74	827 262 789,91	190 319 823,18 ▲
CHESP	0,6842	0,8553	10 684 709,04	13 357 742,40	2 673 033,36 ▲
CEMIG	0,6898	0,8663	1 559 382 615,03	1 958 305 749,20	398 923 134,17 ▲
COPEL	0,6944	0,8539	921 299 620,68	1 132 916 200,47	211 616 579,79 ▲
CAIUÁ	0,6996	0,8962	46 718 956,27	59 847 115,45	13 128 159,19 ▲
CFLO	0,6998	0,9325	11 053 894,68	14 730 208,08	3 676 313,40 ▲
NACIONAL	0,7024	0,9132	22 979 857,74	29 877 638,54	6 897 780,80 ▲
EMG	0,7071	0,8835	89 328 273,51	111 606 719,88	22 278 446,37 ▲
COELBA	0,7086	0,9063	950 382 640,99	1 215 600 160,69	265 217 519,70 ▲
CELESC	0,7283	0,8761	610 036 189,83	733 803 079,84	123 766 890,01 ▲
LIGHT	0,7289	0,8419	672 705 722,42	776 933 929,47	104 228 207,04 ▲
EBO	0,7380	0,9207	33 049 261,01	41 228 536,01	8 179 275,00 ▲
COSERN	0,7546	0,9218	222 182 274,39	271 427 489,22	49 245 214,84 ▲
VALE PARANAPANEMA	0,7683	0,9048	36 862 519,27	43 413 501,52	6 550 982,25 ▲
SANTA CRUZ	0,7697	0,9168	40 051 305,05	47 706 033,02	7 654 727,97 ▲
EPB	0,7762	0,9142	236 460 129,38	278 509 035,37	42 048 905,99 ▲
ESCELSA	0,7986	0,8976	268 519 911,39	301 804 022,53	33 284 111,15 ▲
SANTA MARIA	0,8002	0,9098	27 837 424,60	31 653 267,84	3 815 843,24 ▲
CEMAR	0,8102	0,9354	402 967 994,29	465 223 348,83	62 255 354,54 ▲
ELETROPAULO	0,8269	0,8694	1 205 490 658,03	1 267 417 389,74	61 926 731,71 ▲
CSPE	0,8300	0,9172	17 652 782,24	19 509 075,30	1 856 293,06 ▲
CPEE	0,8332	0,9011	14 468 400,13	15 646 143,08	1 177 742,95 ▲
RGE SUL	0,8373	0,8937	272 950 518,08	291 329 041,91	18 378 523,83 ▲
MOCOCA	0,8406	0,9247	10 061 842,95	11 068 833,69	1 006 990,73 ▲
EMS	0,8494	0,8834	293 097 953,73	304 825 180,45	11 727 226,72 ▲
BANDEIRANTE	0,8852	0,9128	311 776 392,00	321 493 834,80	9 717 442,80 ▲
EMT	0,9145	0,8430	486 714 829,63	448 667 715,08	-38 047 114,55 ▼
JOAO CESA	0,9302	0,8156	2 134 654,07	1 871 801,38	-262 852,69 ▼
CPFL PAULISTA	0,9786	0,9242	776 723 186,65	733 518 498,73	-43 204 687,92 ▼
ETO	0,9833	0,8289	246 388 940,33	207 698 637,64	-38 690 302,69 ▼
ELEKTRO	0,9844	0,9230	514 851 312,42	482 743 777,86	-32 107 534,56 ▼
JAGUARI	1,0000	0,9215	12 324 819,00	11 356 950,96	-967 868,04 ▼
COELCE	1,0000	0,9281	571 992 828,00	530 849 383,88	-41 143 444,12 ▼
PIRATININGA	1,0000	0,9357	300 814 765,00	281 468 525,18	-19 346 239,82 ▼
MUXFELDT	1,0000	0,9439	2 304 748,00	2 175 443,57	-129 304,43 ▼
RGE	1,0000	0,9337	304 029 938,00	283 885 491,97	-20 144 446,03 ▼
NOVA PALMA	1,0000	0,9289	5 762 588,00	5 353 135,95	-409 452,05 ▼

## 4.4 Critério de Convergência

Segundo Cowles e Carlin (1996), um método eficiente e relativamente simples para monitorar a convergência do Amostrador de Gibbs, é o gráfico de *Autocorrelation Function* (ACF) construído a partir das amostras geradas para  $\lambda$ . A função de autocorrelação é uma medida da correlação entre as observações de uma série temporal que estão separadas por  $k$  unidades de tempo (*lag*), isto é, entre  $\lambda_t$  e  $\lambda_{t-k}$ . Quanto mais rápido for o decaimento dos valores dessa função de autocorrelação em relação ao aumento do *lag*, melhor é o *mixing* (mistura) das cadeias geradas. A Figura 4.5 a seguir, apresenta os gráficos para os modelos propostos.



Nota: com limites de significância de 5% para autocorrelações.

Figura 4.5: Gráficos de ACF para os parâmetros  $\lambda$  dos modelos propostos.

Conforme pode ser observado na Figura 4.5, as correlações entre as amostras geradas  $\lambda_t$  e  $\lambda_{t-k}$  decaem à medida que aumenta-se o valor de  $k$  (*lag*), isto é, essas correlações vão diminuindo à medida que as amostras geradas vão se tornando mais afastadas temporalmente uma da outra. Esse fato indica baixa autocorrelação da cadeia, *mixing* apropriado e confiabilidade dos estimadores gerados, isto é, de  $\hat{\lambda}$  para todos os modelos propostos.

## Conclusão e Considerações de Prosseguimento

**N**esse último capítulo, apresentam-se as conclusões obtidas a partir da concepção e execução desse estudo, perpassando pela validação das hipóteses associadas à questão-problema. Também são sugeridas algumas considerações para um possível prosseguimento do trabalho.

### 5.1 Histórico Contextual

Como já mencionado anteriormente, para cumprir o compromisso de levar energia elétrica aos seus consumidores, as DSOs brasileiras têm custos que devem ser cobertos pela tarifa de energia. Por essa razão, a ANEEL atua para que esta seja composta apenas pelos custos que efetivamente se relacionam com os serviços prestados, de forma a torná-la justa, blindando os consumidores das voracidades do mercado e das ineficiências na gestão da concessionária.

A partir de 2010, a ANEEL iniciou debates com a sociedade sobre as regras e metodologias para definir as receitas das DSOs, através de audiências públicas. A partir disso, a agência reguladora propôs uma revisão completa do modelo que calcula os custos operacionais das concessionárias, convergindo para a prática de custos eficientes.

Partindo do pressuposto de que os escores de eficiência devem ser suficientemente precisos e efetivos, a fim de balizar políticas gerenciais e tomadas de decisão mais acertadas, tornam-se cruciais o desenvolvimento e o emprego, pelo regulador, de metodologias que se

mostrem consistentes na definição de custos operacionais, como por exemplo, o emprego dos denominados métodos de *benchmarking* (ou de fronteira), favorecendo assim, tanto as DSOs quanto os próprios consumidores. Em muitos países, tem sido aplicado o *state-of-the-art benchmarking*, que segundo Bogetoft e Otto (2011), já é responsável por um considerável impacto econômico positivo em países europeus.

Estes métodos têm proporcionado aos analistas de diferentes setores da economia moderna, em especial àqueles do setor de regulação de energia elétrica, a identificação do nível máximo de produto ou dos níveis mínimos de custo, dada a quantidade de recursos produtivos empregados, bem como a avaliação do desvio de um determinado grupo em relação aos padrões de referência. Sendo assim, a ANEEL começou a utilizar modelos de DEA (atual) e COLS Cobb-Douglas (não mais utilizado) para as DSOs brasileiras. Porém, existem algumas lacunas e discrepâncias na metodologia empregada e, infelizmente, a ANEEL ainda não possui uma metodologia livre de distorções, que possa apresentar resultados capazes de incentivar uma análise mais verossímil da realidade.

Apesar das grandes melhorias do modelo de *benchmarking* de distribuição de eletricidade no Brasil nos últimos ciclos periódicos de revisão tarifária, as eficiências de custo estimadas apresentaram grande variabilidade de um ciclo de revisão anterior para o seguinte. Infelizmente, mesmo com preciosas e fundadas sugestões ofertadas à ANEEL, a problemática da ausência de implementação de uma metodologia acurada ainda persiste. Com isso, a definição dos escores de eficiência das DSOs fica prejudicada, e conseqüentemente, tomadas de decisão se mantêm deficientes. Logo, existe uma lacuna a ser preenchida pela ANEEL: **qual metodologia utilizar e/ou ser desenvolvida, de maneira que se possa definir satisfatoriamente, uma fronteira de custos eficientes para as DSOs brasileiras?**

A busca por metodologias que pudessem suprir as deficiências dos métodos atuais, como por exemplo, a utilização de modelos de fronteira estocástica (SFA), motivaram as pesquisas que foram desdobradas nesse trabalho de doutoramento. Além disso, a associação entre a modelagem e o método de resolução pode resultar em uma valiosa ferramenta para o processo de tomada de decisão.

## 5.2 Validação das Hipóteses sob Estudo

Ajustar um modelo de fronteira estocástica a um conjunto de dados limitado não é uma tarefa trivial, como demonstrado nesse trabalho. Usando uma abordagem tradicional

de máxima verossimilhança, o parâmetro de assimetria pode convergir para o infinito com probabilidade positiva, comprometendo a estimativa da eficiência de custo. Como alternativa, a abordagem Bayesiana fornece um mecanismo adequado para a estimativa do parâmetro de assimetria e pode impor restrições nos coeficientes do modelo.

No entanto, a abordagem Bayesiana proposta tem limitações e mais investigações ainda são necessárias. O processo de estimação Bayesiano aplicado foi o *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Para avaliar a convergência, são necessárias múltiplas execuções e, portanto, os resultados finais podem apresentar pequenas diferenças. As estatísticas WAIC, DIC e LPML foram utilizadas para avaliar o ajuste do modelo.

O objetivo desse estudo foi duplo: primeiro replicar o mais próximo possível, as eficiências estimadas para as DSOs brasileiras, utilizando uma abordagem robusta de SFA, ou seja, utilizando as mesmas entradas e saídas do modelo empregado atualmente pelo regulador. Segundo, propor uma abordagem alternativa e robusta de SFA utilizando a informação disponível, incluindo a componente ambiental. Uma correlação linear máxima de  $\rho = 0,6531$  foi obtida usando um modelo SFA com uma função de custo Translog. No entanto, o modelo original de DEA inclui restrições adicionais de peso que ainda exigem estudos adicionais para desenvolver uma proposta de SFA semelhante. Esse trabalho estimou, com sucesso, um método de *benchmarking* de SFA para estimar os custos eficientes das DSOs brasileiras, validando as duas hipóteses levantadas na seção (1.9) desse texto.

## 5.3 Resultados Obtidos

Os resultados mostram uma grande diferença de escala entre as eficiências DEA e SFA. A eficiência média do DEA é de 70,5%, enquanto a eficiência média do SFA é de 88,5%. Essa diferença representa uma receita total de R\$ 3.175.509.926,81 ou U\$ 971,1 milhões (considerando uma taxa de câmbio média de R\$ 3,27 por U\$ 1,00 no ano de 2016), que atualmente é contabilizada como ineficiência. Como mencionado anteriormente, isso ocorre porque o SFA decompõe a distância da fronteira de custo em duas componentes, ruído e ineficiência econômica, enquanto a DEA assume apenas a ineficiência econômica. Apesar da diferença de escala, tanto DEA e SFA apresentam semelhanças importantes e algumas diferenças são encontradas em DSOs localizadas no norte do Brasil.

Vale ressaltar que, embora as pontuações originais do DEA variem de 28 a 100%, o regulador aplicou *ad-hoc* restrições adicionais para forçar as eficiências no intervalo de 80

a 100% . A ANEEL aplicou um procedimento de padronização simples. Usando o SFA ou o máximo de SFA e DEA como a nova estimativa de eficiência, as eficiências estarão aproximadamente dentro do intervalo de 80 a 100%, como esperado pelo regulador.

Até onde se sabe, este é o primeiro trabalho que apresenta com sucesso um modelo robusto de SFA, utilizando técnicas Bayesianas, para as DSOs brasileiras aplicando as mesmas entradas, saídas e incluindo informações ambientais. Os resultados e discussões aqui apresentados foram submetidos para apreciação e publicação no periódico *Energy Economics*.<sup>1</sup>

## 5.4 Metodologias Complementares

Na literatura, duas metodologias principais concorrem entre si quanto à maneira de se definir as fronteiras de eficiência. O DEA utiliza técnicas de programação linear determinista, enquanto o SFA faz uso de técnicas econométricas.

O DEA é mais difundido e possui a vantagem de não impor formas funcionais aos dados. Porém, a fronteira calculada pode ser influenciada negativamente caso os dados sejam contaminados por erros aleatórios e/ou apresentem valores discrepantes (*outliers*). Com isso, a mensuração das eficiências fica comprometida. O SFA tem uma natureza estocástica e, ao permitir a acomodação de ruídos e *outliers* na base de dados, inferências estatísticas sobre os parâmetros da função de fronteira podem ser realizadas. Todavia, esse método requer considerações de formas funcionais e distribuições probabilísticas sobre os parâmetros envolvidos na estimação, além de exigir especialização estatística avançada em comparação com o DEA. Também, Lampe e Hilgers (2015) chamam a atenção para o fato da atividade de pesquisa no DEA não ser tão rápida na adoção de novos métodos como no SFA.

Apesar dessas significativas diferenças metodológicas entre os dois métodos, independentemente de qual será escolhido pelo regulador, é interessante avaliar os dois, pois um complementa o outro e permite uma maior robustez dos resultados. Logo, como resposta para a questão-problema apresentada nesse trabalho, pode-se dizer que DEA e SFA devem ser vistas como metodologias não-excludentes e complementares, que podem ser utilizadas e desenvolvidas pelo regulador brasileiro, visando definir satisfatoriamente, uma fronteira de custos eficientes para as DSOs brasileiras.

---

<sup>1</sup><https://www.journals.elsevier.com/energy-economics>



## 5.5 Considerações de Prosseguimento

Para além do escopo desse trabalho, mas com desejo de prosseguimento nos estudos, podem-se elencar as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Investigar a metodologia do *M-factor* (Sartori, 2006) como possibilidade de estimar o parâmetro  $\lambda$ , criando uma penalização (*M-factor*) para a verossimilhança e permitindo assim, o emprego de técnicas frequentistas para a estimação desse parâmetro;
- Investigar formas de estimar o modelo SFA a fim de aproximá-lo do atual modelo DEA, caso assim seja proposto pelo regulador;
- Investigar modelos alternativos, como por exemplo, *StoNED*.

## 5.6 Considerações Finais

Ao se chegar nessa parte final, julga-se oportuno destacar a observação feita por Haney e Pollit (2011), de que quanto mais fortes e maduras forem as instituições políticas, mais provável é que um país tenha um alto índice de boas práticas de regulação, pois se garante um regulador independente.

E por fim, ressalta-se que o presente trabalho consiste em uma pequena, porém importante contribuição alternativa num cenário já tão amplamente pesquisado via DEA. Não se pretende com ele, desmentir ou desqualificar os trabalhos e metodologias já realizados, mas sim, criar uma sinergia entre as partes. E nesse sentido, vale parafrasear Paradi (2015):

*“Os métodos de engenharia para resolver problemas, melhorar sistemas e até mesmo evitar desastres não permitem que simplesmente se rejeite o que outros criaram, mas devem, em vez disso, apresentar alternativas viáveis e suportáveis.”*





## Apêndice A

**N**esse primeiro apêndice, serão apresentados os procedimentos metodológicos necessários para a obtenção das expressões matemáticas que foram discutidas ao longo desse trabalho.

### A.1 Obtenção da Expressão para o Cálculo de $f(\epsilon)$

Na seção 2.5.2.4 do capítulo 2, foi considerado o seguinte modelo de custo com fronteira estocástica baseado em Aigner *et al.* (1977):

$$\ln E_i = \ln C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \epsilon_i, \tag{A.1}$$

$$\ln E_i = C(\mathbf{w}_i, y_i, \boldsymbol{\beta}) + \nu_i + u_i, \tag{A.2}$$

$$\nu_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2), \tag{A.3}$$

$$u_i \underset{iid}{\sim} N^+(0, \sigma_u^2), \tag{A.4}$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes entre si,} \tag{A.5}$$

$$u_i \text{ e } \nu_i \text{ são independentes de } x_i. \tag{A.6}$$

A função densidade de probabilidade marginal  $f(\epsilon)$  pode ser obtida, integrando-se a função  $f(\epsilon, u)$  dada em (2.42), isto é:

$$\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \int_0^\infty f(\epsilon, u) du \\
&= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{(\epsilon-u)^2}{2\sigma_\nu^2} - \frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right] du \\
&= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\epsilon-u}{\sigma_\nu}\right)^2 + \left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2\right]\right\} du. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Pode ser feita a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\epsilon-u}{\sigma_\nu}\right)^2 + \left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2 &= \frac{\epsilon^2 - 2\epsilon u + u^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{u^2}{\sigma_u^2} \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} - \frac{2\epsilon u}{\sigma_\nu^2} + u^2 \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} + \frac{1}{\sigma_u^2}\right) \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}{\sigma_\nu^2\sigma_u^2} \left(\frac{-2\epsilon u\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2} + u^2\right). \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Definindo  $\mu_* = \epsilon \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}$  e  $\sigma_*^2 = \frac{\sigma_\nu^2\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}$ , a equação (A.8) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\epsilon-u}{\sigma_\nu}\right)^2 + \left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2 &= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}{\sigma_\nu^2\sigma_u^2} \left(\frac{-2\epsilon u\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2} + u^2\right) \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{1}{\sigma_*^2} (-2u\mu_* + u^2) \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{1}{\sigma_*^2} (-2u\mu_* + u^2) + \frac{\mu_*^2}{\sigma_*^2} - \frac{\mu_*^2}{\sigma_*^2} \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \frac{1}{\sigma_*^2} (-2u\mu_* + u^2 + \mu_*^2) - \frac{\mu_*^2}{\sigma_*^2} \\
&= \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2} + \left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2 - \frac{\epsilon^2\sigma_u^2}{\sigma_\nu^2(\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2)} \\
&= \left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Com isso, a expressão (A.7) é simplificada para:

$$\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \int_0^\infty f(\epsilon, u) du \\
&= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right]\right\} du \\
&= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right)\right] du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right] \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] du. \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

Agora seja considerar  $\tilde{u} = \frac{u-\mu_*}{\sigma_*}$ , o que implica em  $\tilde{u} \in [-\mu_*/\sigma_*, \infty)$  e  $\frac{d\tilde{u}}{du} = \frac{1}{\sigma_*} \therefore du = \sigma_* d\tilde{u}$ .

Logo, a integral dada em (A.10) pode ser resolvida como:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] du = \int_{\frac{-\mu_*}{\sigma_*}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{u}^2\right) \sigma_* d\tilde{u} = \sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right) \quad (\text{A.11})$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right)\right] \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu\sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right)\right] \sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2} \left[\frac{1}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)}\right]} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}\right)\right] \\
&= \frac{\phi\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2}}\right)}{\sqrt{\sigma_\nu^2 + \sigma_u^2} \cdot \left[\frac{1}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)}\right]} \\
&= \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{\epsilon}{\sigma}\right), \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

onde  $\sigma = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_\nu^2}$  é conhecido como parâmetro de escala,  $\lambda = \frac{\sigma_u}{\sigma_\nu}$  representa o parâmetro de forma,  $\phi(\cdot)$  é a função densidade de probabilidades normal padrão e,  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição de probabilidades acumuladas normal padrão.

## A.2 Obtenção da Expressão para o Cálculo de $E(u|\epsilon)$

Na subseção 2.5.2.4 do capítulo 2, foi apresentada uma expressão, proposta por Jondrow *et al.* (1982), para o cálculo da ineficiência econômica de um dado produtor, conforme cálculos a seguir (o subscrito  $i$  foi omitido).

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &= E(u|\epsilon) \\
 &= \int_0^{\infty} u \cdot f(u|\epsilon) du \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \cdot \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] du. \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

Novamente, seja considerar

$$\tilde{u} = \frac{u - \mu_*}{\sigma_*},$$

o que implica em  $\tilde{u} \in [-\mu_*/\sigma_*, \infty)$  e  $\frac{d\tilde{u}}{du} = \frac{1}{\sigma_*} \therefore du = \sigma_* d\tilde{u}$ .

Então,

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &= E(u|\epsilon) \\
 &= \int_{-\frac{\mu_*}{\sigma_*}}^{\infty} \frac{\mu_* + \tilde{u}\sigma_*}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{u}^2\right) d\tilde{u} \\
 &= \frac{\mu_*}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_{-\frac{\mu_*}{\sigma_*}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{u}^2\right) d\tilde{u} + \frac{\sigma_*}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_{-\frac{\mu_*}{\sigma_*}}^{\infty} \frac{\tilde{u}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{u}^2\right) d\tilde{u} \\
 &= \mu_* + \frac{\sigma_*}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right] \\
 &= \mu_{*i} + \frac{\phi\left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_{*i}}{\sigma_*}\right)} \sigma_*. \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

### A.3 Obtenção da Expressão para o Cálculo de

$$E(e^{-u}|\epsilon)$$

Na subseção 2.5.2.4 do capítulo 2, foi apresentada uma expressão, proposta por Battese e Coelli (1988), para o cálculo da eficiência econômica de um dado produtor, conforme cálculos a seguir (o subscrito  $i$  foi omitido).

$$\begin{aligned} EE &= E(e^{-u}|\epsilon) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot f(u|\epsilon) du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \cdot \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2 - u\right] du \\ &= \frac{1}{\sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2 - u\right] du. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Considerando que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{u - \mu_*}{\sigma_*}\right)^2 - u &= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^2 - 2u\mu_* + \mu_*^2}{\sigma_*^2}\right) - u \\ &= -\frac{[u - (\mu_* - \sigma_*^2)]^2}{2\sigma_*^2} - \frac{1}{2}(2\mu_* - \sigma_*^2), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

então, a equação (A.15) pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned} EE &= \frac{1}{\sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[u - (\mu_* - \sigma_*^2)]^2}{2\sigma_*^2} - \frac{1}{2}(2\mu_* - \sigma_*^2)\right\} du \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(2\mu_* - \sigma_*^2)\right]}{\sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[u - (\mu_* - \sigma_*^2)]^2}{\sigma_*^2}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Agora seja considerar  $\tilde{u} = \frac{u - (\mu_* - \sigma_*^2)}{\sigma_*}$ , o que implica em  $\tilde{u} \in [(-\mu_*/\sigma_*) + \sigma_*, \infty)$  e  $\frac{d\tilde{u}}{du} = \frac{1}{\sigma_*} \therefore du = \sigma_* d\tilde{u}$ .

Logo, a integral dada em (A.17) pode ser resolvida como:

$$\begin{aligned}
EE &= E(e^{-u}|\epsilon) \\
&= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(2\mu_* - \sigma_*^2)\right]}{\sigma_* \Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)} \int_{-\frac{\mu_*}{\sigma_*} + \sigma_*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_* \exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{u}^2\right\} d\tilde{u} \\
&= \exp\left(-\mu_* + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right) \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*} - \sigma_*\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_*}{\sigma_*}\right)}. \tag{A.18}
\end{aligned}$$



## Apêndice B

Nesse segundo apêndice, é apresentada uma síntese do procedimento de simulação computacional conhecido como Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), bem como um de seus algoritmos, conhecido como Amostrador de Gibbs.

### B.1 Procedimento Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)

Conforme foi apresentado na subseção 2.5.2.5, o estimador Bayesiano de um vetor  $\boldsymbol{\psi}$  de parâmetros a serem estimados é definido como o valor médio da distribuição *a posteriori*,  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$ , isto é,

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}] = \int_{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi} f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}) d\boldsymbol{\psi}. \quad (\text{B.1})$$

Infelizmente, na maioria das vezes o cálculo desta última integral é intratável analiticamente. De acordo com Souza (2008), esse fato atrasou por muito tempo o desenvolvimento de modelos Bayesianos. Somente nas últimas três décadas, com a evolução da simulação computacional, é que este cenário se reverteu. Devido à complexidade, os modelos Bayesianos necessitam na maioria das vezes, do suporte de métodos de simulação, tais como aqueles que usam o procedimento conhecido como *Monte Carlo<sup>1</sup> via Cadeias*

---

<sup>1</sup>Simulações de Monte Carlo referem-se àquelas simulações que utilizam números aleatórios.

de Markov (MCMC). Dentre estes, destaca-se o *Amostrador de Gibbs* para a realização de inferências sobre a distribuição *a posteriori*, sendo considerado uma técnica numérica eficiente. Basicamente, a ideia desse método é poder gerar variáveis aleatórias de uma distribuição marginal, sem ter de resolvê-la diretamente. Osiewalski e Steel (1998) trazem um estudo com descrição detalhada sobre esses método numérico de simulação.

Uma maneira aparentemente plausível de se resolver a integral da equação (B.1) consiste em gerar amostras aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $\{\psi_t, t = 1, 2, \dots, T\}$  da distribuição *a posteriori*  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$  e realizar a seguinte aproximação:

$$E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi_t, \quad (\text{B.2})$$

que converge para  $E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}]$  com probabilidade um, quando  $T \rightarrow \infty$ .

Entretanto, apesar de ser considerada uma ideia simples, o custo dessa simplicidade é que além da variância ser alta, em diversos casos, é praticamente impossível amostrar diretamente da distribuição *a posteriori* (Tierney, 1994). Porém, uma poderosa alternativa é fazer uso do procedimento MCMC, descrito a seguir.

O MCMC (Metropolis *et al.*, 1953) é um procedimento eficiente para gerar variáveis aleatórias, baseando-se em processos estocásticos denominados *Cadeias de Markov*. Logo, antes de se apresentar o método propriamente dito, vale a pena definir alguns conceitos referentes a estes processos.

### B.1.1 Cadeias de Markov

O conteúdo dessa subseção foi baseado nas obras de Anton e Busby (2006); Hines *et al.* (2006); Taha (2008); Hillier e Lieberman (2010).

Um processo estocástico é definido como um conjunto indexado de variáveis aleatórias,  $\{X_t\}$ , em que o índice  $t$  percorre dado conjunto  $T$ . Normalmente, admite-se que  $T$  seja o conjunto de inteiros não-negativos e  $X_t$  represente uma característica mensurável de interesse no instante  $t$ . Por exemplo,  $X_t$  poderia representar o nível de estoque de determinado produto no final da semana  $t$  (Hillier e Lieberman, 2010). Um processo estocástico normalmente apresenta a seguinte estrutura:

O estado atual do sistema pode cair em qualquer uma das  $M + 1$  categorias mutuamente exclusivas denominadas *estados*. Para facilitar a notação, esses estados são identificados como  $0, 1, \dots, M$ . A variável aleatória  $X_t$  representa o estado do sistema

no instante  $t$ , de modo que seus únicos valores possíveis sejam  $0, 1, 2, \dots, M$ . O sistema é observado em pontos determinados do tempo, identificados por  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Portanto, o processo estocástico  $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots, X_T$  fornece uma representação matemática de como o estado do sistema físico evolui ao longo do tempo. Esse tipo de processo é conhecido como um processo estocástico em tempo discreto com um espaço de estado finito.

### B.1.1.1 Propriedade Markoviana

Um processo estocástico  $X_t$  é dito ter *propriedade markoviana* se:

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad (\text{B.3})$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  e toda sequência  $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ . Traduzindo isso em palavras, essa propriedade markoviana diz que a probabilidade condicional de qualquer “evento” futuro, dados “quaisquer” eventos passados e o estado presente  $X_t = i$ , é independente dos eventos passados e depende apenas do estado atual. Um processo estocástico  $X_t (t = 0, 1, 2, \dots, T)$  é uma Cadeia de Markov se possuir a propriedade markoviana.

### B.1.1.2 Probabilidades de Transição

As probabilidades condicionais  $P(X_{t+1} = j | X_t = i)$  para uma Cadeia de Markov são chamadas probabilidades de transição ou *Kernel de Transição* em uma etapa. Se, para cada  $i$  e  $j$ ,  $P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$ , para todo  $t = 1, 2, \dots, T$ , então as probabilidades de transição são ditas *estacionárias*.

Portanto, ter probabilidades de transição estacionárias implica que as probabilidades de transição não mudam ao longo do tempo. A existência de probabilidades de transição (em uma etapa) estacionárias também implica o mesmo, isto é, para cada  $i, j$  e  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ),  $P(X_{t+n} = j | X_t = i) = P(X_n = j | X_0 = i)$  para todo  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Essas probabilidades condicionais são denominadas probabilidades de transição em  $n$  etapas.

### B.1.1.3 Notação

Para simplificar a notação com probabilidades de transição estacionárias, façamos com que:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{t+1} = j | X_t = i) \\ p_{ij}^{(n)} &= P(X_{t+n} = j | X_t = i). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Assim, a probabilidade de transição em  $n$  etapas  $p_{ij}^{(n)}$  é simplesmente a probabilidade condicional de que o sistema estará no estado  $j$  após exatamente  $n$  etapas (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado  $i$  a qualquer instante  $t$ . Quando  $n = 1$ , note que  $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ . Para  $n = 0$ ,  $p_{ij}^{(0)}$  é apenas  $P(X_0 = j | X_0 = i)$  e, conseqüentemente, é 1 quando  $i = j$  e 0 quando  $i \neq j$ .

Como as  $p_{ij}^{(n)}$  são probabilidades condicionais, elas devem satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &\geq 0, \quad \forall i, j, n, \\ \sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} &= 1, \quad \forall i, n. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Uma maneira conveniente de mostrar todas as probabilidades de transição em  $n$  etapas é o formato de matriz a seguir:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{M} \end{array} \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{M} \\ \left[ \begin{array}{cccc} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{array} \right] \end{array}$$

Essa matriz é denominada de *matriz de transição em  $n$  etapas*. Note que a probabilidade de transição em determinada linha e coluna é para a transição do estado de linha para o estado de coluna.

#### B.1.1.4 Equações de Chapman-Kolmogorov

As equações de *Chapman-Kolmogorov* fornecem um método para calcular as probabilidades de transição em  $n$  etapas:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}, \quad (\text{B.6})$$

para todo  $i, j = 0, 1, 2, \dots, M$  e quaisquer  $m = 1, 2, \dots, n-1$  e  $n = m+1, m+2, \dots, n$ .

Na equação (B.6),  $p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$  indica que, dado um ponto de partida de estado  $i$ , o processo vai ao estado  $k$  após  $m$  etapas e depois para o estado  $j$  em  $n-m$  etapas. Logo, a soma das probabilidades sobre todos os possíveis  $k$  leva a  $p_{ij}^{(n)}$ . No entanto, pode-se mostrar que  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ . Assim, a matriz de probabilidades de transição em  $n$  etapas  $\mathbf{P}^{(n)}$  pode ser obtida calculando-se a  $n$ -ésima potência da matriz de transição em uma etapa  $\mathbf{P}$ .

### B.1.1.5 Classificação dos Estados em uma Cadeia de Markov

Em uma Cadeia de Markov, é usual dar a seguinte nomenclatura para os estados::

**Estado Absorvente** - um estado  $j$  é absorvente caso, após adentrar esse estado, o processo jamais deixará este estado novamente. Portanto,  $p_{jj} = 1$ ;

**Estado Transiente** - um estado  $i$  é transiente se, após entrar nesse estado, existir a possibilidade de se alcançar outro estado  $j$ , mas não será possível voltar ao estado  $i$  em que se estava;

**Estado Recorrente** - o estado  $i$  é dito ser recorrente se, após entrar neste estado, o processo com certeza for retornar a este estado novamente em outra etapa. Para isso, este estado não pode ser transiente;

**Estado Periódico** - o período do estado  $i$  é definido como o inteiro  $t, (t > 1)$ , tal que  $p_{ii}^{(n)} = 0$  para todos os valores de  $n$  diferentes de  $t, 2t, 3t, \dots$ , e  $t$  é o maior inteiro com essa propriedade;

**Estado Aperiódico** - se existirem dois números consecutivos  $s$  e  $s + 1$  tais que, o processo possa se encontrar no estado  $i$  nos instantes  $s$  e  $s + 1$ , o estado é dito como tendo período 1 e é dito aperiódico;

**Estado Ergódico** - em uma Cadeia de Markov de estados finitos, os estados recorrentes que forem aperiódicos são denominados estados ergódicos;

**Cadeia Ergódica** - uma Cadeia de Markov é dita ergódica se todos os seus estados forem ergódicos, isto é, se todos os estados forem recorrentes e aperiódicos;

**Cadeia Irredutível** - uma Cadeia de Markov é dita irredutível se todos os seus estados se comunicam entre si.

### B.1.1.6 Probabilidade de Estado Estável

Para qualquer Cadeia de Markov ergódica e irredutível, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad (\text{B.7})$$

e é independente de  $i$ . Os  $\pi_j$  são chamados *probabilidades de estado estável* de uma Cadeia de Markov e satisfazem às seguintes equações de estado estável:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \quad \forall \quad j = 0, 1, \dots, M, \\ \sum_{j=0}^M \pi_j &= 1.\end{aligned}\tag{B.8}$$

Após essa síntese de alguns dos conceitos referentes às Cadeias de Markov, podem ser apresentadas a ideias que estão por trás do MCMC.

### B.1.2 Lógica do MCMC

Seja considerar uma sequência de variáveis aleatórias  $\{\psi_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ , tal que em cada momento  $t \geq 0$ , o próximo estado  $\psi_{t+1}$  é gerado da distribuição condicional  $f(\psi_{t+1}|\psi_t)$ , que representa a probabilidade de transição entre os estados, e não depende de  $t$  se a cadeia for homogênea no tempo. Uma realização desta sequência de variáveis aleatórias  $\{\psi_t, t = 1, 2, \dots, T\}$  constitui uma Cadeia de Markov, com  $\psi_0$  representando uma condição inicial.

Se essa cadeia for ergódica e irredutível, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ , implicando na existência de uma distribuição estacionária para  $\pi_j$ . Assim, se  $\psi_t$  for gerado a partir desta distribuição, então todos os valores seguintes também o serão (Roberts, 1996).

Considerando  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$  dada na equação (B.1) como sendo a distribuição estacionária, isto é,

$$f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}) \equiv f(\boldsymbol{\pi}),\tag{B.9}$$

pode ser observado que se  $t \rightarrow \infty$ , os pontos amostrados  $\psi_t$  se parecerão cada vez mais com as amostras de  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$  (Gilks *et al.*, 1996). Ignorando as primeiras  $t_b$  iterações da cadeia (período de *burn-in*<sup>2</sup>), pode-se utilizar a Cadeia de Markov para estimar  $E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}]$ , sendo  $\boldsymbol{\psi}|E \sim f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$ , da seguinte maneira:

$$E[\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}] = \frac{1}{T - t_b} \sum_{t=t_b+1}^T (\boldsymbol{\psi}_t|\mathbf{E}),\tag{B.10}$$

<sup>2</sup>O período de *burn-in* representa as primeiras  $t_b$  iterações da Cadeia de Markov que serão desprezadas, porém necessárias para dar estabilidade e confiabilidade ao procedimento MCMC.

com probabilidade de convergência tendendo a um (Roberts, 1996). Assim, torna-se possível encontrar o estimador  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  descrito na equação (B.1).

Uma última questão a se tratar diz respeito à construção de uma Cadeia de Markov tal que  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E}) \equiv f(\pi)$ , isto é, a distribuição estacionária,  $f(\pi)$ , seja equivalente à distribuição *a posteriori*,  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$ . Uma possível solução para essa questão faz uso do algoritmo conhecido como *Amostrador de Gibbs*, descrito a seguir.

### B.1.3 Algoritmo Amostrador de Gibbs

De acordo com Gamerman e Lopes (2006), o Amostrador de Gibbs (Geman e Geman, 1984) é um esquema iterativo de amostragem de uma Cadeia de Markov, cujas probabilidades de transição são formadas pelas distribuições condicionais completas. Casella e George (1992) descrevem o funcionamento deste algoritmo da seguinte maneira: seja estudar o comportamento da distribuição marginal da variável aleatória  $\psi_1$  em um contexto de mais variáveis  $(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_d)$ . A marginal em questão é dada por:

$$f(\psi_1) = \int_{\psi_d} \int_{\psi_{d-1}} \dots \int_{\psi_3} \int_{\psi_2} f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d) d\psi_2 d\psi_3 \dots d\psi_d. \quad (\text{B.11})$$

O cálculo dessas integrais pode ser impossível de ser realizado. Felizmente, o Amostrador de Gibbs permite contornar essa situação, estimando as distribuições marginais através de simulação, conforme o algoritmo descrito na Figura B.1.

Conforme pode ser observado nesse algoritmo, cada iteração se completará após  $d$  movimentos. Após um critério de convergência ser atendido, os valores resultantes para  $\boldsymbol{\psi}^{(t)} = (\psi_1^{(t)}, \psi_2^{(t)}, \dots, \psi_d^{(t)})$  formam uma amostra para  $f(\boldsymbol{\psi})$ . Se o mesmo raciocínio for aplicado a  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$ , a equação (B.1) pode ser resolvida diretamente.

### B.1.4 Critério de Convergência

Segundo Cowles e Carlin (1996), um método eficiente e relativamente simples para monitorar a convergência do Amostrador de Gibbs, é o gráfico de *Autocorrelation Function* (ACF) construído a partir das amostras geradas para  $f(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{E})$ . A função de autocorrelação é uma medida da correlação entre as observações de uma série temporal que estão separadas por  $k$  unidades de tempo (*lag*), isto é, entre  $f(\psi_t|\mathbf{E})$  e  $f(\psi_{t-k}|\mathbf{E})$ . Quanto mais rápido for o decaimento dos valores dessa função de autocorrelação em

```

procedimento Amostrador de Gibbs
1  {Inicialização}
2   $t \leftarrow 1$ ;
3   $\boldsymbol{\psi}^{(0)} \leftarrow (\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \dots, \psi_d^{(0)})$ ;
4  {Iterações}
5  para  $t = 1$  até  $T$  (passo =  $t$ ) faça
6    se Critério de Convergência Não Satisfeito
7      então
8         $\boldsymbol{\psi}^{(t)} \leftarrow (\psi_1^{(t)}, \psi_2^{(t)}, \dots, \psi_d^{(t)})$ , onde:
9         $\psi_1^{(t)} = f(\psi_1 | \psi_2^{(t-1)}, \psi_3^{(t-1)}, \dots, \psi_d^{(t-1)})$ ;
10        $\psi_2^{(t)} = f(\psi_2 | \psi_1^{(t)}, \psi_3^{(t-1)}, \dots, \psi_d^{(t-1)})$ ;
11        $\vdots$ 
12        $\psi_d^{(t)} = f(\psi_d | \psi_1^{(t)}, \psi_2^{(t)}, \dots, \psi_{d-1}^{(t)})$ ;
13     senão
14       Pare;
15      $f(\boldsymbol{\psi}) \leftarrow \boldsymbol{\psi}^{(t)} \leftarrow (\psi_1^{(t)}, \psi_2^{(t)}, \dots, \psi_d^{(t)})$ ;
16   fim-se;
17 fim-para
fim Amostrador de Gibbs;

```

Figura B.1: Algoritmo Amostrador de Gibbs.

relação ao aumento do *lag*, melhor é o *mixing* (mistura) das cadeias geradas. A Figura B.2 a seguir, ilustra esse tipo de gráfico.

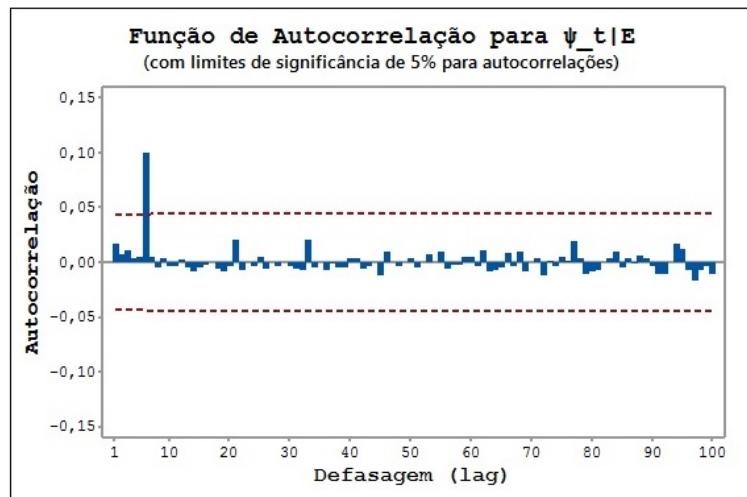
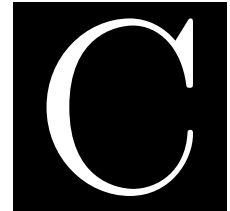


Figura B.2: Exemplo de um gráfico ACF para  $\psi_t|E$ .



Conforme pode ser observado na Figura B.2, as correlações entre as amostras geradas  $f(\psi_t|E)$  e  $f(\psi_{t-k}|E)$  decaem à medida que aumenta-se o valor de  $k$  (*lag*), isto é, essas correlações vão diminuindo à medida que as amostras geradas vão se tornando mais afastadas temporalmente uma da outra. Esse fato indica baixa autocorrelação da cadeia, *mixing* apropriado e confiabilidade dos estimadores gerados, isto é, de  $\hat{\psi}$ .





## Apêndice C

Conforme foi discutido no capítulo 3, os modelos BSFA propostos foram comparados utilizando-se as estatísticas *Watanabe-Akaike Information Criterion* (WAIC), *Deviance Information Criterion* (DIC) e *Log-Pseudo Marginal Likelihood* (LPML). Os modelos com menor valor de DIC e maiores valores de WAIC e LPML alcançam melhor ajuste aos dados. Nesse terceiro apêndice, é apresentada uma síntese destes critérios.

### C.1 Critérios de Seleção de Modelos

#### C.1.1 *Log-Pseudo Marginal Likelihood* (LPML)

Esse critério funciona como uma validação cruzada do modelo, do tipo *leave-one-out*, utilizando o logaritmo da função de verossimilhança como critério de comparação entre os vários modelos de BSFA disponíveis, isto é, para cada modelo, calcula-se:

$$LPML = \sum_i^n \ln f(x_i | \mathbf{x}_{(-i)}), \quad (\text{C.1})$$

onde  $\mathbf{x}_{(-i)}$  é o conjunto de  $n$  dados sem a observação  $x_i$ . Escolhe-se o modelo com maior valor de LPML.

### C.1.2 *Deviance Information Criterion (DIC)*

Esse critério penaliza simultaneamente, a falta de ajuste e a complexidade do modelo, conforme a seguinte equação:

$$DIC = E[D(\mathbf{x}|\Theta)] + \{E[D(\mathbf{x}|\Theta)] - D(\mathbf{x}|\hat{\Theta})\}, \quad (C.2)$$

onde:

- $\Theta$  e  $\hat{\Theta}$  são os parâmetros e os estimadores de máxima verossimilhança do modelo;
- $D(\mathbf{x}|\Theta) = -2 \ln [f(\mathbf{x}|\Theta)]$  é o *deviance*, isto é, a soma de quadrados dos resíduos do ajuste obtido por máxima verossimilhança, ao invés de mínimos quadrados ordinários (OLS);
- $E[D(\mathbf{x}|\Theta)]$  é a média *a posteriori* para o *deviance* e penaliza a falta de ajuste;
- $D(\mathbf{x}|\hat{\Theta})$  é o *deviance* avaliado na média ou na mediana *a posteriori* de  $\hat{\Theta}$ ;
- $E[D(\mathbf{x}|\Theta)] - D(\mathbf{x}|\hat{\Theta})$  é o tamanho efetivo do modelo e penaliza a complexidade.

Escolhe-se o modelo com menor valor de DIC.

### C.1.3 *Watanabe-Akaike Information Criterion (WAIC)*

Esse critério também é composto por duas componentes: uma que penaliza a falta de ajuste do modelo e outra que penaliza a complexidade do mesmo, da seguinte maneira:

$$WAIC = -2 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \ln E[f(x_i|\Theta)] + \sum_{i=1}^n V[\ln f(x_i|\Theta)] \right\}. \quad (C.3)$$

Escolhe-se o modelo com maior valor de WAIC.

## Referências Bibliográficas

- Agrell, P., Bogetoft, P., 2017. Regulatory benchmarking: models, analyses and applications. *Data Envelopment Analysis Journal* 3, 49–91.
- Aigner, D., Lovell, C., Schmidt, P., 1977. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Economics* 6 (1), 21–37.
- Albert, J., 2009. *Bayesian Computation with R*. New York: Springer.
- Albuquerque, M., 1987. Uma análise translog sob mudança tecnológica e efeitos de escala: um caso de modernização ineficiente. *Pesquisa em Planejamento Econômico* 17 (1), 191–220.
- Altoé, A., Costa, N., Lopes, A., Veloso, T., Saurin, V., 2017. Technical efficiency and financial performance in the brazilian distribution service operators. *Socio-Economic Planning Sciences* 1 (1), 1–14.
- Alvarez, A., Amsler, C., Orea, L., Schmidt, P., 2006. Interpreting and testing the scaling property in models where inefficiency depends on firm characteristics. *Journal of Productivity Analysis* 25 (1), 201–212.
- Amsler, C., Prokhorov, A., Schmidt, P., 2014. Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models. *Econometric Reviews* 33 (1), 497–522.
- ANEEL, 2006. NT 262/2006: segundo ciclo de revisão tarifária periódica das concessionárias de distribuição de energia elétrica do Brasil. Technical note, SER/SFF/SRD/SFE/SRC/ANEEL.
- ANEEL, 2015. NT 66/2015: metodologia de custos operacionais. Technical note, SRM-SGT-ANEEL.

- ANEEL, 2017. NT 162/2017: abertura de audiência pública para atualização dos parâmetros relacionados à definição dos custos operacionais regulatórios (submódulos 2.2 e 2.2a dos procedimentos de regulação tarifária - proret). Technical note, SRM-ANEEL.
- Anton, H., Busby, R., 2006. *Álgebra Linear Contemporânea*. Porto Alegre: Bookman.
- Arcoverde, F., Tannuri-Pianto, M., Sousa, M., 2005. Mensuração das eficiências das distribuidoras do setor energético brasileiro usando fronteiras estocásticas. *Anais do Encontro Nacional de Economia XXXIII* (1), 1–18.
- Atkinson, S., Dorfman, J., 2005. Bayesian measurement of productivity and efficiency in the presence of undesirable outputs: crediting electric utilities for reducing air pollution. *Journal of Econometrics* 126, 445–468.
- Azzalini, A., 1985. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics* 12 (1), 219–230.
- Azzalini, A., 2013. *The Skew-Normal and Related Families*. New York: Cambridge University Press.
- Bandyopadhyay, D., Das, A., 2006. On measures of technical inefficiency and production uncertainty in stochastic frontier production model with correlated error components. *Journal of Productivity Analysis* 26 (1), 165–180.
- Banker, R., 2011. Report on aneels proposal for electricity distribution tariff regulation. Technical note, Technical Note, 101/2011.
- Banker, R., Charnes, A., Cooper, W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science* 30 (9), 1078–1092.
- Banker, R., Forsund, F., Zhang, D., 2017. Use of data envelopment analysis for incentive regulation of electric distribution firms. *Data Envelopment Analysis Journal* 3, 1–47.
- Banker, R., Natarajan, R., 2008. Evaluating contextual variables affecting productivity using data envelopment analysis. *Operations Research* 56 (1), 48–58.
- Banker, R., Zhang, D., 2016. Improvement in efficiency under dea-based incentive regulation of electric utilities in Brazil. Technical note based on Ph.D. Thesis of Daqun Zhang, Temple University.

- Battese, G., Coelli, T., 1988. Prediction of firm level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data. *Journal of Econometrics* 38, 387–399.
- Battese, G., Coelli, T., 1992. Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to paddy farmers in India. *Journal of Productivity Analysis* 3 (1), 153–169.
- Battese, G., Coelli, T., 1995. A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data. *Empirical Economics* 20 (1), 325–332.
- Battese, G., Corra, G., 1977. Estimation of a production frontier model: with application to the pastoral zone of eastern Australia. *Australian Journal of Agricultural Economics* 21 (3), 169–179.
- Bauer, P., 1990. Recent developments in the econometric estimation of frontiers. *Journal of Econometrics* 46, 39–56.
- Bayes, C. L., Branco, M. D., 2007. Bayesian inference for the skewness parameter of the scalar skew-normal distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 141–163.
- Behr, A., 2015. *Production and Efficiency Analysis with R*. New York: Springer.
- Bogetoft, P., 2014. Comments on the brazilian benchmarking model for energy distribution regulation. forth cycle of tariff review, NT 192 2014. Tech. rep.
- Bogetoft, P., Lopes, A. L. M., 2015. Comments on the brazilian benchmarking model for energy distribution regulation forth cycle tariff review technical note 407/2014. Tech. rep.
- Bogetoft, P., Otto, L., 2011. *Benchmarking with DEA, SFA and R*. International Series in Operations Research and Management Science. New York: Springer.
- Casella, G., George, E., 1992. Explaining the Gibbs Sampler. *The American Statistician* 46.
- Caudill, S., Ford, J., 1993. Biases in frontier estimation due to heteroscedasticity. *Economics Letters* 41 (1), 17–20.

- CEPA, 2013. Assessing Efficiency for the 2005 Distribution Price Control Review. London: OFGEM.
- Chambers, R., 1988. Applied Production Analysis: a dual approach. New York: Cambridge University Press.
- Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2 (6), 429–444.
- Chen, Y., Schmidt, P., Wang, H., 2014. Consistent estimation of the fixed effects stochastic frontier model. *Journal of Econometrics* 18 (2), 65–76.
- Chen, Z., Barros, C., Borges, M., 2015. A Bayesian stochastic frontier analysis of chinese fossil-fuel electricity generation companies. *Energy Economics* 48, 136–144.
- Christensen, L., Jorgenson, R., Lau, L., 1971. Conjugate duality and transcendental logarithmic function. *Econometrica* 39 (1), 255–256.
- Cobb, C., Douglas, P., 1928. A theory of production. *The American Economic Review* 18 (1), 139–165.
- Coelli, T., 1995. Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: A monte carlo analysis. *Journal of Productivity Analysis* 6 (1), 247–268.
- Colin, E., 2018. Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Rio de Janeiro: LTC.
- Cook, W., Zhu, J., 2013. Data Envelopment Analysis: balanced benchmarking. San Bernardino: Cook and Zhu.
- Cornwell, C., Schmidt, P., Sickles, R., 1990. Production frontiers with cross-sectional and time-series variation in efficiency levels. *Journal of Econometrics* 46 (1), 185–200.
- Costa, M., Lopes, A., Matos, G., 2015a. Statistical evaluation of data envelopment analysis versus cols cobb-douglas benchmarking models for the 2011 brazilian tariff revision. *Socio-Economic Planning Sciences* 49, 47–60.
- Costa, M., Rodrigues, T., Costa, A., Natowics, R., Braga, A., 2015b. Sequential selection of variables using short permutation procedures and multiple adjustments: an application to genomic data. *Statistical Methods in Medical Research*, 1–24.
- Cowles, K., 2004. Review of winbugs 1.4. *The American Statistician* 58, 330–336.



- Cowles, M., Carlin, B., 1996. Markov chain monte carlo convergence diagnostics: A comparative review. *Journal of the American Statistical Association* 91 (434), 883–904.
- Debreu, G., 1951. The coefficient of resource utilization. *Econometrica* 19 (3), 273–292.
- Deprins, D., Simar, L., 1989a. Estimating technical inefficiencies with corrections for environmental conditions with an application to railway companies. *Annals of Public and Cooperative Economics* 60 (1), 81–102.
- Deprins, D., Simar, L., 1989b. Estimation de frontières déterministes avec facteurs exogènes d'inefficacité. *Annales d'Economie et de Statistique* 14 (1), 117–150.
- Dey, D., Gelfand, A., Peng, F., 1997. Overdispersed generalized linear models. *Journal of Statistical Planning and Inference* 64 (1), 93–107.
- Dorfman, J., Koop, G., 2005. Current developments in productivity and efficiency measurement. *Journal of Econometrics* 126, 233–240.
- Douglas, P., 1976. The cobb-douglas production function once again: its history, its testing, and some new empirical values. *Journal of Political Economy* 84 (5), 903–915.
- Draper, N., Smith, H., Pownell, E., 1966. *Applied regression analysis*. New York: Wiley.
- Edvardsen, P., 2006. Productivity and regulatory reform of norwegian electricity distribution utilities. *Performance Measurement and Regulation of Network Utilities* 1, 97–131.
- Efron, B., 1979. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics* 7 (1), 1–26.
- Emrouznejad, A., Yang, G., 2017. A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in dea: 1978 e 2016. *Socio-Economic Planning Sciences* 1 (1), 1–5.
- Farrel, M., 1957. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society* 120 (3), 253–281.
- Forsund, F., 2009. Good modelling of bad outputs: pollution and multiple-output production. *International Review of Environmental and Resource Economics* 3, 1–38.
- Forsund, F., Lovell, C., Schmidt, P., 1980. A survey of frontier production functions and of their relationship to efficiency measurement. *Journal of Econometrics* 13 (1), 5–25.

- Franco, F., Fortuna, M., 2003. The stochastic frontier method in measuring the efficiency of hospital services: a literature review. *Portuguese Association of Economics and Health* 2, 4–33.
- Färe, R., Grosskopf, S., Noh, D., Weber, W., 2005. Characteristics of a polluting technology: theory and practice. *Journal of Econometrics* 126, 469–492.
- Gamerman, D., Lopes, H., 2006. *Markov Chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. London: Chapman and Hall.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., Rubin, D. B., 2014. *Bayesian data analysis*. Vol. 2. FL: CRC press Boca Raton.
- Geman, S., Geman, D., 1984. Stochastic relaxation, gibbs distributions and bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* PAMI-6.
- Geyer, C. J., Johnson, L. T., 2017. *Markov Chain Monte Carlo*. R package version 0.9-5. URL <https://CRAN.R-project.org/package=mcmc>
- Gil, G., Costa, M., Lopes, A., Mayrink, V., 2017. Spatial statistical methods applied to the 2015 brazilian energy distribution benchmarking model: accounting for unobserved determinants of inefficiencies. *Energy Economics* 64 (1), 373–383.
- Gilks, W., Richardson, S., Spiegelhalter, D., 1996. *Introducing Markov chain monte carlo*. In: Chapman, L., Hall (Eds.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Vol. 1. W. Gilks and S. Richardson and D. Spiegelhalter.
- Gilks, W., Roberts, G., 1996. Strategies for improving mcmc. In: Gilks, W., Richardson, S., Spiegelhalter, D. (Eds.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall, pp. 89–114.
- Greene, W., 1980a. Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions. *Journal of Econometrics* 13 (1), 27–56.
- Greene, W., 1980b. On the estimation of a flexible frontier production model. *Journal of Econometrics* 13 (1), 101–115.
- Greene, W., 1990. A gamma-distributed stochastic frontier model. *Journal of Econometrics* 46 (1/2), 141–64.

- Greene, W., 2005. Fixed and random effects in stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis* 23 (1), 7–32.
- Griffin, E., Steel, J., 2007. Bayesian stochastic frontier analysis using winbugs. *Journal of Productivity Analysis* 27 (3), 163–176.
- Hadri, K., 1999. Estimation of a doubly heteroscedastic stochastic frontier cost function. *Business and Economic Statistics* 17 (1), 359–363.
- Haney, A., Pollit, M., 2009. Efficiency analysis of energy networks: an international survey of regulators. *Energy Policy* 37 (12), 5814–5830.
- Haney, A., Pollit, M., 2011. Exploring the determinants of best practice benchmarking in electricity network regulation. *Energy Policy* 39, 7739–7746.
- Henze, N., 1986. A probabilistic representation of the skew-normal distribution. *Scandinavian journal of statistics*, 271–275.
- Hillier, F., Lieberman, G., 2010. *Introdução à Pesquisa Operacional*. Porto Alegre: McGraw Hill.
- Hines, W., Montgomery, D., Goldsman, D., Borrer, C., 2006. *Probabilidade e Estatística na Engenharia*. Rio de Janeiro: LTC.
- Hu, J., Wang, S., 2006. Total-factor energy efficiency of regions in china. *Energy Policy* 34 (17), 3206–3217.
- Huang, C., Liu, J., 1994. Estimation of a non-neutral stochastic frontier production function. *Journal of Productivity Analysis* 5 (2), 171–180.
- Jamasb, T., Pollitt, M., 2001. Benchmarking and regulation: international electricity experience. *Utilities Policy* 9, 107–130.
- Jondrow, J., Lovell, C., Materov, I., Schmidt, P., 1982. On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model. *Journal of Econometrics* 19 (2), 233–238.
- Juárez, M. A., Steel, M. F., 2010. Model-based clustering of non-Gaussian panel data based on skew-t distributions. *Journal of Business & Economic Statistics* 28 (1), 52–66.
- Koop, G., Osiewalski, J., Steel, M., 1995. Posterior analysis of stochastic frontier models using gibbs sampling. *Computational Statistics* 10, 353–373.

- Koopmans, T., 1951. An an analysis of production as an efficient combination of activities. In: Wiley, N. Y. (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocatio*. Vol. 13. Cowles Comission for Research in Economics.
- Kopp, R., Diewert, W., 1982. The decomposition of frontier cost function deviations into measures of technical and allocative efficiency. *Journal of Econometrics* 19 (2), 319–331.
- Kumbhakar, S., 1990. Production frontiers, panel data, and time-varyng technical inefficiency. *Journal of Econometrics* 46 (1), 201–212.
- Kumbhakar, S., Glosh, S., McGuckin, J., 1991. A generalized production frontier approach for estimating determinants of inefficiency in us dairy farms. *Journal of Business and Economic Statistics* 9 (3), 279–286.
- Kumbhakar, S., Lien, G., Hardarker, J., 2014. Technical efficiency in competing panel data models: A study of norwegian grain farming. *Journal of Productivity Analysis* 41 (2), 321–337.
- Kumbhakar, S., Lovell, C., 2003. *Stochastic Frontier Analysis*. New York: Cambridge University Press.
- Kumbhakar, S., Tsionas, E., 2013. The good, the bad and the ugly: a system approach to good modeling of bad outputs. Working paper.
- Kumbhakar, S., Wang, H., 2005. Estimation of growth convergence using a stochastic production frontier approach. *Economics Letters* 88 (1), 300–305.
- Kumbhakar, S., Wang, H., Horncastle, A., 2015. *Stochastic Frontier Analysis Using Stata*. New York: Cambridge University Press.
- Kuosmanen, T., 2012. Stochastic semi-nonparametric frontier estimation of electricity distribution networks: application of the stoned method in the finnish regulatory model. *Energy Economics* 34, 2189–2199.
- Kuosmanen, T., Kortelainen, M., 2012. Stochastic non-smooth envelopment of data: semi-parametric frontier estimation subject to shape constraints. *Journal of Productivity Analysis* 38 (1), 11–28.

- Kuosmanen, T., Saastamonein, A., Sipilainen, T., 2013. What is the best practice for benchmark regulation of electricity distribution? comparison of dea,sfa and stoned methods. *Energy Policy* 61, 740–750.
- Lai, H., Huang, C., 2013. Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions. *Journal of Productivity Analysis* 40 (1), 1–14.
- Lampe, H., Hilgers, D., 2015. Trajectories of efficiency measurement: a bibliometric analysis of dea and sfa. *European Journal of operational Research* 240, 1–21.
- Land, K., Lovell, C., Thore, S., 1993. Chance-constrained data envelopment analysis. *Managerial and Decision Economics* 14 (1), 541–554.
- Lee, L., 1983. A test for distributional assumptions for the stochastic frontier functions. *Journal of Econometrics* 22 (3), 245–267.
- Liseo, B., Loperfido, N., 2006. A note on reference priors for the scalar skew-normal distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136 (2), 373–389.
- Llorca, M., Orea, L., Pollit, M., 2014. Using the latent class approach to cluster firms in benchmarking: an application to the us electricity transmission industry. *Operations Research Perspectives* 1 (1), 6–17.
- Llorca, M., Orea, L., Pollit, M., 2016. Efficiency and environmental factors in the us electricity transmission industry. *Energy Economics* 55 (1), 234–246.
- Lopes, A., 2015. Benchmarking Using Data Envelopment Analysis (DEA) in Regulating Electricity: the brazilian case. NESP-FACE/UFMG, Belo Horizonte.
- Lopes, A., Vilela, B., Costa, M., Lanzer, E., 2016. Critical evaluation of the efficient costs assessment model used in the regulation of brazilian energy distribution service operator. *Revista Gestão e Tecnologia* 16 (3), 5–30.
- Meeusen, W., van den Broeck, J., 1977. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review* 18 (2), 435–444.
- Mesquita, R., 2017. Regulação de custos de distribuição de energia elétrica: uma análise comparativa das abordagens de benchmarking utilizadas em países europeus e latino-americanos. Ph.D. thesis, UFMG.

- Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A., Teller, E., 1953. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics* 21 (6), 1087–1092.
- Nieswand, M., Seifert, S., 2018. Environmental factors in frontier estimation: A monte carlo analysis. *European Journal of Operational Research* 265, 133–148.
- Nocedal, J., Wright, S., 2006. *Numerical Optimization*. New York: Springer.
- Olesen, O., Petersen, N., 2016. Stochastic data envelopment analysis - a review. *European Journal of Operational Research* 251 (1), 2–21.
- Osiewalski, J., Steel, M., 1998. Numerical tools for the bayesian analysis of frontier models. *Journal of Productivity Analysis* 10, 103–117.
- Paradi, J., 2015. Comments on aneel's models. In: Lopes, A. (Ed.), *Benchmarking Using Data Envelopment Analysis - DEA in Regulating Electricity: the Brazilian case*. Vol. 1. NESP-FACE/UFGM.
- Pitt, M., Lee, L., 1981. The measurement and sources of technical inefficiency in the indonesian weaving industry. *Journal of Development Economics* 9 (1), 43–64.
- Plumer, M., 2003. Jags: A program for analysis of bayesian graphical models using gibbs sampling. In: K. Hornik, F. L., Zeileis, A. (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing*. pp. 1–10.
- Plummer, M., 2016. *Bayesian Graphical Models using MCMC*. R package version 4-6. URL <https://CRAN.R-project.org/package=rjags>
- Plummer, M., 2017. *Just another gibbs sampler (JAGS) version 4.3.0. Software manual*.
- Ray, S., 2004. *Data Envelopment Analysis: theory and techniques for Economics and Operation Research*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ray, S., 2015. A critical review of aneel's dea methodology. In: Lopes, A. (Ed.), *Benchmarking Using Data Envelopment Analysis - DEA in Regulating Electricity: the Brazilian case*. Vol. 1. NESP-FACE/UFGM.
- Reifschneider, D., Stevenson, R., 1991. Systematic departures from the frontier: a framework for the analysis of firm inefficiency. *International Economic Review* 32 (3), 715–723.

- Roberts, G., 1996. Markov chains concepts related to sample algorithms monte carlo. In: Chapman, L., Hall (Eds.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Vol. 3. W. Gilks and S. Richardson and D. Spiegelhalter.
- Saastamoinen, A., Kuosmanen, T., 2016. Quality frontier of electricity distribution: supply security, best practices, and underground cabling in finland. *Energy Economics* 53, 281–292.
- Sartori, N., 2006. Bias prevention of maximum likelihood estimates for scalar skew-normal and skew-t distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136 (12), 4259–4275.
- Schmidt, P., Lovell, C., 1979. Estimating technical and allocative inefficiency relative to stochastic production and cost frontiers. *Journal of Econometrics* 9 (1), 343–366.
- Schmidt, P., Sickles, R., 1984. Production frontiers and panel data. *Journal of B. and E. Statistics* 2 (4), 367–374.
- Seber, A., Lee, A., 2012. *Linear regression analysis*. New York: Wiley.
- Semolini, R., 2014. *Eficiência dos custos operacionais das empresas de distribuição de energia elétrica no brasil*. Ph.D. thesis, Unicamp.
- Sherphard, R., 1953. *Cost and Production Functions*. New Jersey: Princeton University Press.
- Simar, L., Wilson, P., 2007. Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes. *Journal of Econometrics* 136 (1), 31–64.
- Souza, M., 2008. *Uma abordagem Bayesiana para o cálculo dos custos operacionais eficientes das distribuidoras de energia elétrica*. Ph.D. thesis, PUC-RJ.
- Souza, M., Diallo, M., Souza, R., Baydia, T., 2010a. The cost efficiency of the brazilian electricity distribution utilities: a comparassion of Bayesian sfa and dea models. *Mathematical Problems in Engineering* 2010, 1–20.
- Souza, M., Souza, R., Pessanha, J., 2007. Avaliação dos custos operacionais eficientes das distribuidoras de energia elétrica: um exercício com modelos de fronteira estocástica bayesiana. *SPOLM* 1, 1–14.

- Souza, M., Souza, R., Pessanha, J., 2010b. Custos operacionais eficientes das distribuidoras de energia elétrica: um estudo comparativo dos modelos dea e sfa. *Gestão e Produção* 17, 653–667.
- Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N., Lunn, D., 2003. WinBUGS 1.4. Software manual.
- Stead, A., Wheat, P., Greene, W., 2017. Robust stochastic frontier analysis: A student's t-half normal model with application to highways maintenance costs in England. Tech. rep., Working Paper. University of Leeds, Insitute for Transport Studies.
- Stevenson, R., 1980. Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation. *Journal of Econometrics* 13 (1), 57–66.
- Sueyoshi, T., Yuan, Y., Goto, M., 2017. A literature study for dea applied to energy and environment. *Energy Economics* 62, 104–124.
- Taha, H., 2008. *Pesquisa Operacional*. Porto Alegre: Pearson Prentice Hall.
- Tannuri-Pianto, M., Sousa, M., Arcoverde, F., 2009. Fronteiras de eficiência estocásticas para empresas de distribuição de energia elétrica no Brasil: uma análise de dados de painel. *Estudos Econômicos* 39 (1), 221–247.
- Tierney, L., 1994. Markov chains for exploring posterior distributions. *The Annals of Statistics* 22 (4), 1701–1728.
- Tobin, J., 1958. Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica* 26 (1), 24–36.
- Train, E., 2009. *Discrete Choice Methods with Simulation*. Cambridge: Cambridge university press.
- Tsionas, E. G., 2002. Stochastic frontier models with random coefficients. *Journal of Applied Econometrics* 17 (2), 127–147.
- van den Broeck, J., Koop, G., Osiewalski, J., Steel, M., 1994. Stochastic frontier models: a bayesian perspective. *Journal of Econometrics* 61, 273–303.
- Vaninsky, A., 2006. Efficiency of electric power generation in the united states: analysis and forecast based on data envelopment analysis. *Energy Economics* 28 (3), 326–338.



- Veronese, A., 2015. Estimação paramétrica de escores de eficiência em 2 estágios: impacto das variáveis ambientais no ajuste das eficiências regulatórias das empresas brasileiras de distribuição de energia elétrica para o 4crtp. Ph.D. thesis, UFMG.
- Veronese, A., Costa, M., Lopes, A., Carmo, G., 2018. A close look at second stage data envelopment analysis using compound error models and the tobit model. *Socio-Economic Planning Sciences* xx (xx), xx–xx, no prelo.
- Wang, H., 2002. Heteroscedasticity and non-monotonic efficiency effects of a stochastic frontier model. *Journal of Productivity Analysis* 18 (1), 241–253.
- Wang, H., Ho, C., 2010. Estimating fixed-effect panel stochastic frontier models by model transformation fixed and random effects in stochastic frontier models. *Journal of Econometrics* 157 (1), 286–296.
- Zaja, M., Banker, R., Fang, S., Hunjet, D., Neralic, L., Wendell, R., 2017. Efficiency gains in Croatia's electricity distribution centers following industry structure changes. *Data Envelopment Analysis Journal* 3, 119–150.
- Zanini, A., 2004. Regulação econômica no setor elétrico brasileiro: uma metodologia para definição de fronteiras de eficiência e cálculo do fator x para empresas distribuidoras de energia elétrica. Ph.D. thesis, PUC-RJ.
- Zhou, P., Ang, B., Poh, K., 2008. A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies. *European Journal of Operational Research* 189 (1), 1–18.



## Índice Remissivo

### A

Agências Reguladoras, 2

### C

Cadeias de Markov, 98

classificação dos estados, 101

equações de Chapman-Kolmogorov,  
100

matriz de transição, 100

probabilidade de estado estável, 101

probabilidade de transição, 99

propriedade markoviana, 99

Critérios de Seleção dos Modelos, 107

DIC, 72, 108

LPML, 72, 107

WAIC, 72, 108

Custos

custos gerenciáveis, 5

custos não-gerenciáveis, 5

### D

Despesas

CAPEX, 15

OPEX, 15

TOTEX, 15

Deviance, 108

### E

Empresas de Distribuição

autorizadas, 2

concessionárias, 2

cooperativas de eletrificação rural, 2

permissionárias, 2

Estatísticas

$\gamma$ , 48

M3T, 39, 75

Estimador Bayesiano

$\hat{\psi}$ , 52, 97

Estimador Frequentista

$\hat{\lambda}$ , 47

$\hat{\Theta}$ , 50

$\hat{\beta}$ , 47

$\hat{\sigma}_u^2$ , 47

$\hat{\sigma}_\nu^2$ , 47

$\hat{\sigma}$ , 47

$\hat{u}_i$ , 49

Estimativas, 76, 78

Estimação

da fronteira estocástica de custo, 35

paramétrica para  $e^{-u_i}$ , 37

enfoque Bayesiano, 50

enfoque frequentista, 45

### F

Fronteira

de custo, 31

de produção, 25

- Função de Custo  
 Cobb-Douglas, 33  
 Reparametrizada  
 $\xi(\mathbf{y}_i)$ , 65  
 Translog, 34
- Função de Produção, 29  
 Cobb-Douglas, 29  
 Translog, 30
- Função de Verossimilhança  
 $L(\mathbf{E}, \boldsymbol{\psi})$ , 52  
 função de log-verossimilhança, 47
- Função Densidade de Probabilidades  
 $f(\epsilon_i)$ , 46, 91  
 $f(\mathbf{E} \text{ cond } \boldsymbol{\psi})$ , 52  
 $f(\boldsymbol{\psi})$ , 52, 103  
 $f(\boldsymbol{\psi} \text{ cond } \mathbf{E})$ , 52  
 $f(\nu_i)$ , 45  
 $f(u \text{ cond } \epsilon)$ , 48  
 $f(u, \epsilon)$ , 48  
 $f(u_i)$ , 45  
 $f_X(x)$ , 65  
 $f_Z(z)$ , 64  
 $f_\epsilon(\epsilon)$ , 64
- M**
- MCMC, 97  
 amostrador de Gibbs, 103  
 critério de convergência, 103  
 ACF, 84, 104
- Modelo de Custo  
 com fronteira estocástica, 36
- Modelos Propostos para o SFA de Custos  
 modelo 1, 69  
 modelo 2, 70  
 modelo 3, 70  
 modelo 4, 71  
 modelo 5, 71  
 modelo 6, 72  
 modelo 7, 72
- Monópolio Natural, 1
- Métodos de *Benchmarking*, 8  
*Goal Programming*, 8  
 CMAD, 9  
 COLS, 12  
 DEA, 11  
 Empresa de referência, 14  
 MOLS, 9  
 OLS, 9  
 REA, 8  
 SDEA, 8  
 SFA, 13  
 StoNED, 13  
 TFA, 9
- Métricas  
 eficiência, 5, 94, 95  
 alocativa, 30  
 econômica, 31  
 técnica, 25  
 eficácia, 5  
 escores de eficiência, 7  
 ineficiência  
 técnica, 27  
 produtividade, 5
- P**
- Parâmetro  
 $\delta$ , 65  
 $\delta_1$ , 69  
 $\lambda$ , 46, 65  
 $\Theta$ , 50  
 $\delta$ , 56  
 $\boldsymbol{\psi}$ , 52

- $\mu$ , 40  
 $\mu_*$ , 48  
 $\nu_i$ , 66  
 $\sigma$ , 46, 65  
 $\sigma_u^2$ , 40  
 $\sigma_*^2$ , 48  
 $\sigma_\nu^2$ , 40  
 $\xi$ , 64  
 $\zeta_i$ , 56  
 $a$ , 64  
 $u_i$ , 49, 66  
 $NTL(y_7)$ , 68  
 de saída ordinária  
 $Cons(y_1)$ , 68  
 $High(y_4)$ , 68  
 $Over(y_3)$ , 68  
 $Under(y_5)$ , 68  
 $Wmkt(y_2)$ , 68  
 exógenas, 54  
 $z_i$ , 68  
*e.variable*, 68

**R**

## Regulação, 2

- price cap*, 5  
 distribuição, 4  
 geração, 4  
 regulação por incentivo, 5  
 tarifária, 2  
 transmissão, 4

## Revisões Tarifárias, 4

- 1º ciclo, 4  
 2º ciclo, 4  
 3º ciclo, 5  
 4º ciclo, 5

**S**

## Setor

- de distribuição de energia elétrica, 2  
 elétrico brasileiro, 1

**V**

## Variáveis

- de entrada  
 $PMSO_a(x)$ , 68  
 de saída indesejada  
 $CHI(y_6)$ , 68