

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA

**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM
ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO
E AÇO**

PROJETO E CÁLCULO DE UMA VIGA EM CONCRETO PROTENDIDO

DAVID RESENDE

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E AÇO

PROJETO E CÁLCULO DE VIGAS EM CONCRETO PROTENDIDO

DAVID RESENDE

Trabalho Final apresentado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e Aço".

Comissão Examinadora:

Prof. Sebastião Salvador, D.Sc.
DEES – UFMG (Orientador)

Prof. Ney Amorim, D.Sc.
DEES – UFMG

Belo Horizonte, 14 de março de 2018

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Zuleica, minha irmã Júlia e a Sara, pelo exemplo e pelo apoio incondicional.

Ao professor Sebastião Salvador, pela confiança e apoio.

RESUMO

Este estudo discorre sobre o cálculo estrutural em concreto protendido, no que diz respeito as considerações de cálculo e projeto de vigas protendidas. Para tal, pretende-se analisar uma viga isostática, por entender que ela apresenta de forma mais simples o tema do concreto protendido bem como lançar luzes sobre esse tema pouco tratado no mercado e nas universidades quando comparado ao concreto armado convencional.

Alem disso, pretende-se analisar detidamente as perdas imediatas e diferidas no concreto e no aço sob protensão e os tipos de protensão.

Palavras-chave: Concreto protendido. Viga protendida. Pontes.

ABSTRACT

This study discuss about the structural calculation in prestressed concrete, as well as calculation and design of prestressed beams. In order to do so, we intend to analyze an isostatic beam, since it presents a simpler way to study the subject of the prestressed concrete as well as to discuss on this untreated topic in the market and in the universities when compared to conventional reinforced concrete.

In addition, we intend to carefully analyze the immediate and deferred losses in the prestressed concrete and the types of pretension.

Keywords: Prestressed concrete. prestressed beam. Bridge.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	3
.RESUMO	3
LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS	8
1 INTRODUÇÃO	9
2 OBJETIVOS	9
3 CONCEITOS GERAIS DE PROTENSÃO	10
3.1 CLASSIFICAÇÃO	11
3.2 FASES DE PROTENSÃO	12
3.2.1 <i>Montagem das armaduras</i>	<i>12</i>
3.2.2 <i>Montagem das formas e concretagem</i>	<i>13</i>
3.2.3 <i>Protensão</i>	<i>13</i>
3.2.4 <i>Ancoragem</i>	<i>14</i>
3.2.5 <i>Aderência através de injeção de nata de cimento na bainha</i>	<i>15</i>
3.3 VANTAGENS E DESVANTAGENS	15
4 MATERIAIS	17
4.1 CONCRETO	17
4.1.1 <i>Retração</i>	<i>17</i>
4.1.2 <i>Fluência</i>	<i>18</i>
4.1.3 <i>Resistência à tração e compressão</i>	<i>19</i>
4.2 AÇOS PARA PROTENSÃO	19
4.2.1 <i>Fios encruados e fios por trefilação</i>	<i>19</i>
4.2.2 <i>Cordoalhas</i>	<i>20</i>
4.2.3 <i>Propriedades mecânicas</i>	<i>20</i>
4.2.4 <i>Relaxação do aço</i>	<i>21</i>
5 CÁLCULO DE UMA VIGA ISOSTÁTICA PROTENDIDA	22
5.1 DADOS DA ESTRUTURA	22
5.2 CÁLCULO DA SEÇÃO NECESSÁRIA	22
5.3 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS	23
5.4 DETERMINAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO	24
5.5 ESTUDO DA PEÇA À FLEXÃO	25
5.6 ESTUDO DAS PERDAS	25
5.6.1 <i>Perdas por atrito</i>	<i>26</i>
5.6.2 <i>Perdas por cravação</i>	<i>29</i>
5.6.3 <i>Perdas por deformação imediata</i>	<i>31</i>
5.6.4 <i>Perdas por fluência do concreto</i>	<i>36</i>
5.6.5 <i>Perdas por retração</i>	<i>40</i>
5.6.6 <i>Perdas por relaxação do aço</i>	<i>41</i>

5.7	QUADRO DE TENSÕES.....	41
5.8	DIMENSIONAMENTO DOS ESTRIBOS.....	46
5.9	RESULTADOS DA PLANILHA DE DIMENSIONAMENTO DE VIGAS ISOSTÁTICAS	48
6	CONCLUSÃO.....	53
7	BIBLIOGRAFIA	54

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TENSÕES NO ESTÁDIO I NUMA VIGA PROTENDIDA (RODRIGUES, 2008)	10
FIGURA 2 – CARGA EQUIVALENTE EXERCIDA POR UM CABO PARABÓLICO NUMA VIGA PROTENDIDA (RODRIGUES, 2008)	11
FIGURA 3 – MONTAGEM DAS ARMADURAS E FIXAÇÃO DAS BAINHAS (RODRIGUES,2008).....	12
FIGURA 4 – MONTAGEM DAS FORMAS E CONCRETAGEM	13
FIGURA 5 – MACACO HIDRÁULICO EXECUTANDO A PROTENSÃO E CONTROLE DE TENSÕES.....	13
FIGURA 6 – ETAPAS DA OPERAÇÃO DE PROTENSÃO (CATÁLOGO RUDLOFF).....	14
FIGURA 7 - ANCORAGENS ATIVAS TIPO E, B, EL E AF	14
FIGURA 8 - ANCORAGENS PASSIVAS TIPO U, H E PC	14
FIGURA 9 - ANCORAGENS DE EMENDA TIPO K E UK	15
FIGURA 10 - ANCORAGENS INTERMEDIÁRIAS TIPO Z.....	15
FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO DE UM ESQUEMA DE PROTENSÃO PARA INJEÇÃO DE NATA DE CIMENTO	15
FIGURA 12 - VALORES CARACTERÍSTICOS SUPERIORES DA DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DE RETRAÇÃO $ECS(T_{\infty},T_0)$ E DO COEFICIENTE DE FLUÊNCIA $\Phi(T_{\infty},T_0)$ (TABELA 8.2 DA NBR6118:2014).....	19
FIGURA 13 – DETALHE DE UMA CORDOLHA DE 7 FIOS.....	20
FIGURA 14 – CÁLCULO DAS ÁREAS NA PERDA POR CRAVAÇÃO	30

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESUMO DAS PERDAS POR ATRITO	29
TABELA 2 – TENSÕES APÓS AS PERDAS POR ATRITO E CRAVAÇÃO.....	31
TABELA 3 – TENSÕES APÓS AS PERDAS POR ATRITO E CRAVAÇÃO.....	36
TABELA 4 - VALORES CARACTERÍSTICOS SUPERIORES DA DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DE RETRAÇÃO	37
TABELA 5 – TENSÕES APÓS AS PERDAS POR ATRITO E CRAVAÇÃO.....	40
TABELA 6 – TENSÕES APÓS AS PERDAS POR RETRAÇÃO	40
TABELA 7 - VALORES DE ψ_{1000} EM PORCENTAGEM	41
TABELA 8 – TENSÕES APÓS TODAS AS PERDAS	41
TABELA 9 – FORÇAS DE PROTENSÃO	42
TABELA 10 - VALORES DAS TENSÕES EM CADA SEÇÃO,	44
TABELA 11 - QUADRO FINAL DE TENSÕES	45
TABELA 12 - QUADRO FINAL DE TENSÕES APÓS A ALTERAÇÃO DO FCK.....	46

1 INTRODUÇÃO

Segundo Evandro Porto Duarte, “No setor de projetos, devem ter 10 mil calculistas de concreto armado; desses, talvez uns 200 saibam calcular concreto protendido”.

Além de ser uma tecnologia com diversas utilidades, o concreto protendido pode ser utilizado em diversas obras, mas o seu emprego ainda não está próximo do seu potencial. Parte dessa culpa está na pouca divulgação e na setorização de seu conhecimento.

Neste trabalho será calculado uma viga isostática protendida completa, passo a passo e de forma didática seguindo as normas vigentes.

2 OBJETIVOS

O propósito maior deste trabalho é portanto, aprender mais sobre o tema do concreto protendido e divulgar para os demais interessados mais sobre essa área que tem tanto potencial de crescimento e desenvolvimento científico.

3 CONCEITOS GERAIS DE PROTENSÃO

Concreto protendido pode ser definido como um concreto submetido a um estado permanente de tensões internas, introduzidas por uma armadura previamente tracionada, que se opõem, até limites desejados, às tensões provocadas por cargas externas (RODRIGUES, 2008).

O grande inconveniente do concreto armado é que a sua armadura somente começa a trabalhar quando a peça é solicitada e, com isso, pelo efeito da aderência, a deformação do concreto acompanha a do aço, acarretando tensões de tração não só no aço como no concreto, que acaba por fissurar e, com isso, perde sua capacidade de proteção da armadura e perde seção colaborante com a consequente diminuição de inércia (DUARTE, 2015).

Em uma viga protendida com um cabo reto localizado a uma distância e (excentricidade) do eixo baricêntrico da seção transversal. Sendo:

P = força de protensão

M = momento fletor causado pela carga q

I = momento de inércia da seção transversal de concreto

A = área da seção transversal de concreto

as tensões resultantes que atuam a uma distância y do cg da seção serão dadas por

$$\sigma(y) = \frac{P}{A} \pm \frac{Pey}{I} \pm \frac{My}{I}$$

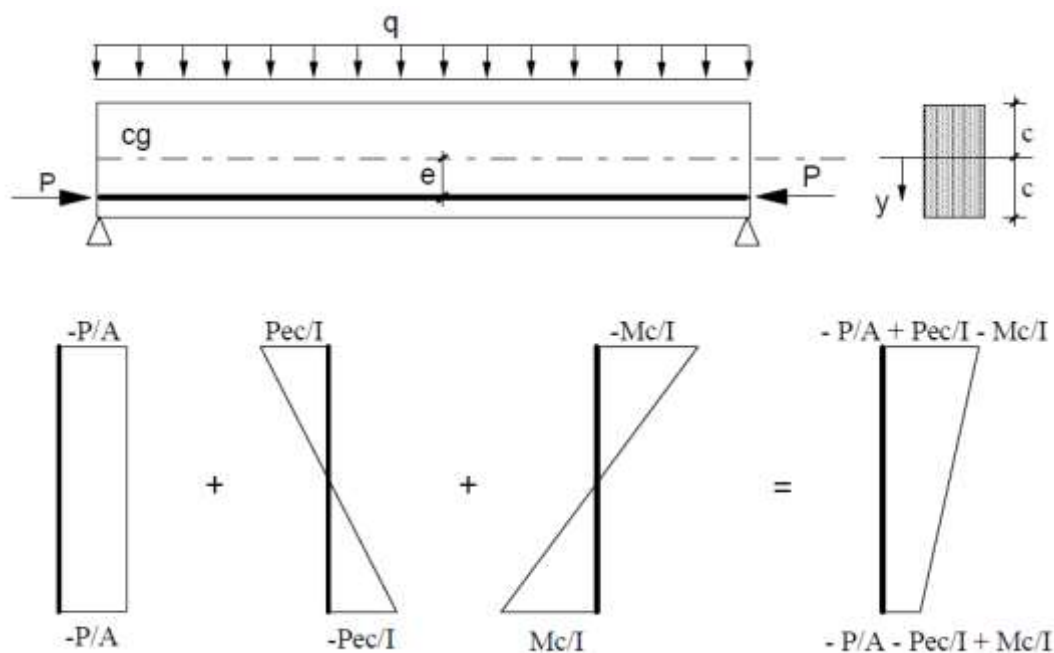


Figura 1 – Tensões no Estádio I numa viga protendida (RODRIGUES, 2008)

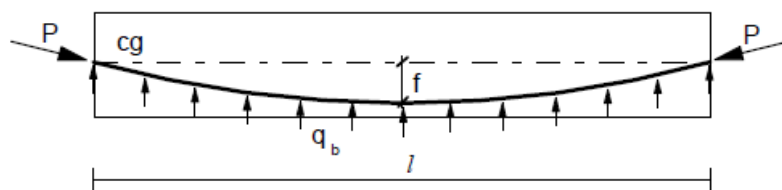


Figura 2 – Carga equivalente exercida por um cabo parabólico numa viga protendida (RODRIGUES, 2008)

Duarte (2015) descreve que o traçado do cabo parabólico faz com que se visualize fisicamente duas grandes virtudes da protensão:

- A inclinação do cabo na região do apoio fornece componentes que combatem ao mesmo tempo o esforço cortante e o momento fletor;
- A curvatura do cabo, através do seu tensionamento e a tendência a se retificar conduz a introdução de forças verticais de baixo para cima (forças de desviação), que combatem as cargas externas, reduzindo no todo o carregamento atuante na peça.

3.1 Classificação

Segundo Machado (2007) o concreto protendido pode ser classificado em

- Concreto com armadura ativa pré-tracionada (protensão com aderência inicial) – A ancoragem no concreto realiza-se só por aderência;
- Concreto com armadura ativa pós-tracionada (protensão com aderência posterior) – Após o estiramento dos cabos, a aderência é criada de modo permanente através da injeção das bainhas. Uma das grandes vantagens é que na eventualidade de ocorrer a ruptura de algum cabo, a estrutura absorverá e diluirá as tensões decorrentes do rompimento;
- Concreto com armadura ativa pós-tracionada (protensão sem aderência) – Não ocorre aderência entre os aços protendidos e a massa de concreto envolvente. Geralmente constituído de cordoalhas protendidas engraxadas em mangueiras de polietileno de alta densidade, onde a movimentação dentro das bainhas é permitida pela camada lubrificante. Por não haver aderência, os esforços de protensão ficam concentrados nas ancoragens. Essa concentração de forças exige que as ancoragens sejam produzidas com elevados padrões de qualidade e resistência. Por outro lado, por utilizar geralmente monocordoalhas, os macacos de protensão são de pequeno

porte e peso e os cabos são leves e muito flexíveis, permitindo curvas verticais e horizontais.

3.2 Fases de Protensão

3.2.1 Montagem das armaduras

Consiste na montagem das armaduras passivas e fixação das bainhas seguindo o traçado definido pelo projeto . As bainhas podem ser fixadas aos estribos, com ou sem as cordoalhas no seu interior, dependendo do traçado e da extensão do cabo.



Figura 3 – Montagem das armaduras e fixação das bainhas (RODRIGUES,2008)

3.2.2 Montagem das formas e concretagem



Figura 4 – Montagem das formas e concretagem

3.2.3 Protensão

Segundo o catálogo da Rudloff a operação de protensão é aplicada através de macacos hidráulicos e bombas de alta pressão. Normalmente, é composta pelas etapas de preparação, colocação do equipamento, protensão das cordoalhas, cravação e acabamento.



Figura 5 – Macaco hidráulico executando a protensão e controle de tensões

Como apresentado na Figura 6 a operação de protensão segue as seguintes etapas:



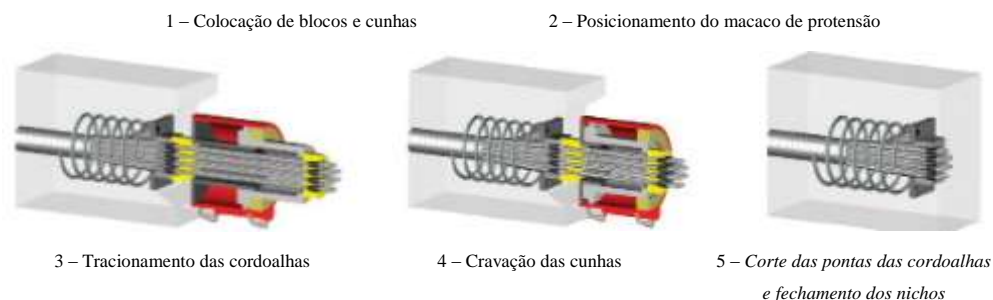


Figura 6 – Etapas da operação de protensão (Catálogo Rudloff)

3.2.4 Ancoragem

Segundo o catálogo da Rudloff, as ancoragens são dispositivos capazes de manter o cabo em estado de tensão, transmitindo a força de protensão ao concreto ou ao elemento estrutural. São basicamente de quatro tipos:

- Ancoragens ativas tipo E, B, EL e AF: são as ancoragens nas quais se promove o estado de tensão no cabo, através do macaco de protensão.

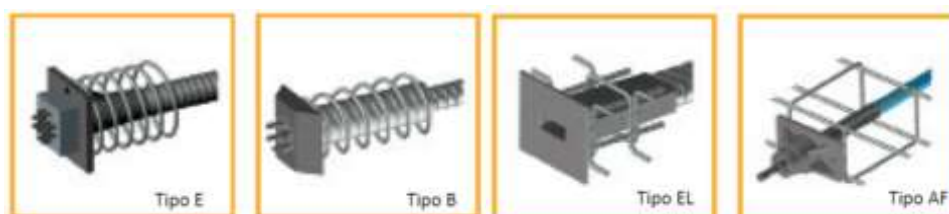


Figura 7 - Ancoragens ativas tipo E, B, EL e AF

- Ancoragens passivas tipo U, H e PC: são dispositivos embutidos no concreto, destinados a fixar a extremidade do cabo oposta àquela da ancoragem ativa. Somente recebem o esforço advindo da protensão executada na ancoragem ativa. A transferência da força de protensão para o concreto se dá por aderência das cordoalhas e por tensões de compressão entre a ancoragem e o concreto.



Figura 8 - Ancoragens passivas tipo U, H e PC

- Ancoragens de emenda tipo K e UK: são combinações de duas ancoragens, uma passiva e uma ativa, que permitem a continuação de cabos a partir de pontos intermediários.



Figura 9 - Ancoragens de emenda tipo K e UK

- Ancoragens intermediárias tipo Z: são ancoragens posicionadas no meio dos cabos, quando suas extremidades forem inacessíveis para a protensão.



Figura 10 - Ancoragens intermediárias tipo Z

As combinações de ancoragens mais comuns são duas ativas ou uma ativa e uma passiva, as quais podem ser adotadas para protensão com ou sem aderência.

3.2.5 Aderência através de injeção de nata de cimento na bainha

A injeção de nata de cimento nas bainhas garante a aderência mecânica da armadura de protensão ao concreto em todo o comprimento do cabo, além de assegurar a protensão das cordoalhas contra a corrosão.

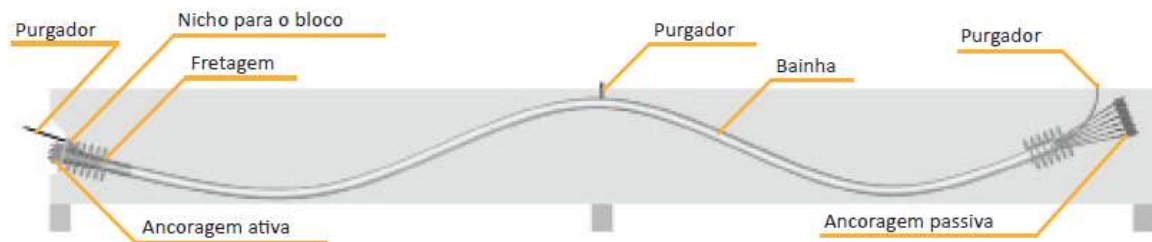


Figura 11 – Representação de um esquema de protensão para injeção de nata de cimento

3.3 Vantagens e Desvantagens

Segundo Thomaz (2004) e Rodrigues (2008), a adoção da solução do concreto protendido apresenta as seguintes vantagens:

- Devido à utilização de materiais de resistência muito mais alta (Aço e Concreto) pode-se construir estruturas mais esbeltas e com vãos maiores, com menor peso próprio, do que quando se constrói com o concreto armado.
- Enquanto para o Concreto protendido as vigas seguem a relação de Vão/17 a Vão/20, a altura das vigas em pontes rodoviárias para concreto armado variam entre Vão/10 a Vão/12.
- A protensão aumenta a vida útil das estruturas, pois as fissuras são evitadas, ou mesmo se existirem fissuras, as aberturas são mínimas . Isto aumenta a durabilidade.
- As deformações permanecem muito pequenas, porque as estruturas sob as cargas de serviço, mesmo com protensão parcial, praticamente permanecem no estágio I.
- Estruturas de Concreto Protendido têm uma grande resistência à fadiga, pois a variação de tensão nas armaduras protendidas é pequena, mesmo no caso de protensão parcial. Por isso as tensões ficam bem abaixo das tensões limites de resistência à fadiga.
- Estruturas em Concreto Protendido podem suportar grandes sobrecargas sem sofrer danos permanentes. As fissuras devidas às sobrecargas fecham novamente, desde que os alongamentos das armaduras fiquem abaixo do limite de 0,1 ‰ (0,1 mm/m).
- Eliminação da fissuração: O grande inconveniente do concreto armado, é que sua armadura somente começa a trabalhar quando a peça é solicitada, e com isto, pelo efeito da aderência, a deformação do concreto acompanha a do aço, acarretando tensões de tração não só no aço como no concreto, levando-o à fissuração. Com isto, o concreto armado perde duas de suas capacidades vitais: Proteção da armadura e seção colaborante para inércia, acarretando maiores tensões e deformações;
- A prévia compressão do concreto protendido, combate futuras tensões de tração pois não permite (ou pouco permite) que a seção seja tracionada e sim, descomprimida.
- Redução das dimensões da seção transversal: O emprego obrigatório de aços de alta resistência, associado a concretos de maior resistência, permite a redução das dimensões da seção transversal, com redução substancial do peso próprio.
- Diminuição da flecha: A protensão praticamente elimina a presença de seções fissuradas.

- Tem-se, assim, redução da flecha por eliminar a queda da rigidez a flexão correspondente à seção fissurada.
- Desenvolvimento de métodos construtivos: A protensão permite criar sistemas construtivos diversos: balanços sucessivos, premoldados, etc.

Entretanto, os mesmos autores destacam as seguintes desvantagens:

- Corrosão do aço de protensão: Assim como os aços do concreto armado, as armaduras de protensão também sofrem com a corrosão eletrolítica. Além disso apresentam outro tipo de corrosão, denominada de “corrosão sob tensão” (stress-corrosion) fragilizando a seção da armadura, além de propiciar a ruptura frágil, motivo pelo qual a armadura protendida deve ser muito bem protegida;
- Perdas da força de protensão: são todas as perdas verificadas nos esforços aplicados aos cabos de protensão;
- Qualidade da injeção de nata nas bainhas e da capa engraxada nas cordoalhas engraxadas;
- Forças altas nas ancoragens;
- Controle de execução mais rigoroso, carecendo de mão de obra especializada;

4 MATERIAIS

4.1 Concreto

Todas as propriedades do concreto, utilizadas nas estruturas de concreto armado, são replicadas nas estruturas de concreto protendido. Entretanto, duas delas têm significado especial ao serem computadas as perdas devidas à protensão, que serão detalhadas à diante. Trata-se de Retração e da Fluência do concreto, descritas à seguir:

4.1.1 Retração

Segundo Amorim (2010) a retração no concreto é uma deformação independente do carregamento e, portanto, de direção sendo, pois uma deformação volumétrica que ocorre devido à perda de parte da água dissociada quimicamente do processo de produção do concreto, quando esse “seca” em contato com o ar. Segundo a NBR 6118:2014 depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e da espessura fictícia da peça.

A água em excesso é necessária para dar trabalhabilidade ao concreto fresco. Em contato com o ar, o concreto perde parte da água não fixada quimicamente durante sua secagem ocorrendo assim uma diminuição do seu volume. A retração é, portanto, a deformação independente de carregamento provocada pela perda da água livre quando o concreto se encontra em contato com o ar. Parte da retração é irreversível.

Dentre os fatores que influenciam a retração, os principais são:

- Idade do concreto: a retração aumenta com a idade.
- Umidade do meio ambiente: a retração aumenta com a diminuição da umidade.
- Espessura da peça: a retração aumenta com a diminuição da espessura da peça.
- Composição do concreto: a retração aumenta com o consumo de cimento e com o aumento do fator água/cimento.
- Temperatura do meio ambiente: a retração aumenta com a temperatura,

4.1.2 Fluência

Segundo Amorim (2010), a fluência é uma deformação que depende do carregamento e é caracterizada pelo aumento da deformação imediata ou inicial, mesmo quando se mantém constante a tensão aplicada. Devido a essa deformação imediata ocorrerá uma redução de volume da peça, provocando esse fato uma expulsão da água quimicamente inerte, de camadas mais internas para regiões superficiais da peça, onde a mesma já tenha se evaporado. Isso desencadeia um processo, ao longo do tempo, análogo ao da retração, verificando-se dessa forma um crescimento da deformação inicial, até um valor máximo no tempo infinito.

Tanto a retração como a fluência podem ser calculados a partir da tabela 8.2 da NBR6118:2014.

Umidade média ambiente (%)			40		55		75		90	
Espessura fictícia 2Ac/u (cm)			20	60	20	60	20	60	20	60
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	t_0 dias	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2	1,9
		30	3,4	3	2,9	2,6	2,2	2	1,6	1,5
		60	2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C50 a C90		5	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5
		30	2	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1
		60	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1	1
$\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ ‰		5	-0,53	-0,47	-0,48	-0,43	-0,36	-0,32	-0,18	-0,15
		30	-0,44	-0,45	-0,41	-0,41	-0,33	-0,31	-0,17	-0,15
		60	-0,39	-0,43	-0,36	-0,4	-0,3	-0,31	-0,17	-0,15

Figura 12 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ e do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ (Tabela 8.2 da NBR6118:2014)

4.1.3 Resistência à tração e compressão

Segundo Duarte (2015), os estágios que limitarão as maiores tensões de compressão podem ser estimadas por:

- Na fibra inferior, na solicitação de pp+protensão: o valor da máxima tensão de compressão deverá ser inferior (devido às perdas de protensão) a 2/3 de f_{ck} ;
- Na fibra superior, na ocorrência de todos os carregamentos, o valor máximo igual a $f_{ck}/2$.

4.2 Aços para protensão

4.2.1 Fios encruados e fios por trefilação

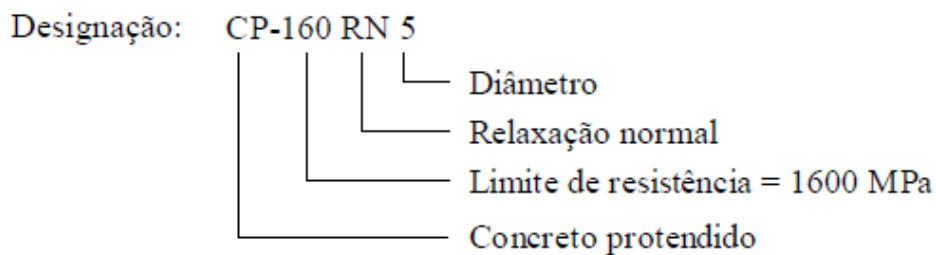
Classificação (NBR 7482)

- Conforme a resistência à tração, classificam-se nas categorias CP150, CP160 e CP170
- Conforme o comportamento à relaxação, classificam-se em relaxação normal (RN) e relaxação baixa (RB)

São fabricados com diâmetros de 4, 5, 6, 7 e 8 mm.

A resistência dos aços utilizados em concreto protendido (160MPa, 170MPa) são muito superiores aos utilizados no concreto armado (50MPa, 60MPa). Essa diferença na resistência dos aços para armadura passiva e ativa ocorre pois, por um lado, os aços como o CA-50, não resistiriam as forças de protensão praticadas no concreto protendido.

Por outro lado, os aços como o CP-160 são anti-economômicos caso fossem utilizados para o concreto armado. A fissuração depende da tensão e do módulo de elasticidade, mas como o último é praticamente o mesmo, quanto maior a resistência característica do aço, maior a fissuração ($\sigma_s \propto \omega_k$), ou seja, a área de aço necessária para os limites de fissuração seria a mesma tanto de aços das armaduras ativas, mais caros, como para os aços das armaduras passivas.



4.2.2 Cordoalhas

Cordoalha de sete fios

Constituída de sete fios de mesmo diâmetro nominal, encordoados, numa forma helicoidal, em torno de um fio central.



Figura 13 – Detalhe de uma cordoalha de 7 fios

Cordoalha de dois e três fios

Constituída de dois ou três fios de mesmo diâmetro nominal, encordoados numa forma helicoidal.

Classificação (NBR 7482)

- Cordoalha de sete fios: CP-175 RN ou RB; CP-190 RN ou RB
- Cordoalha de dois ou três fios: CP-180 RN

4.2.3 Propriedades mecânicas

f_{pyk} = valor característico da resistência de escoamento

f_{pyd} = valor de cálculo da resistência de escoamento

f_{ptk} = valor característico da resistência à tração

f_{ptd} = valor de cálculo da resistência à tração

$$f_{pyd} = f_{pyk} / \gamma_s \quad f_{ptd} = f_{ptk} / \gamma_s \quad \gamma_s = 1,15$$

f_{pyk} é um valor convencional correspondente à deformação permanente de 0,2%, que é também considerado como a tensão correspondente a um alongamento total de 1%.

Segundo o item 9.6.1.2 da ABNT NBR 6118:2014, durante as operações de protensão, a força de tração na armadura não pode superar os valores decorrentes da limitação das tensões no aço correspondentes a essa situação transitória.

a) Armadura pré-tracionada:

- por ocasião da aplicação da força P_i , a tensão σ_{pi} da armadura de protensão na saída do aparelho de tração deve respeitar os limites 0,77 f_{ptk} e 0,90 f_{pyk} para aços da classe de relaxação normal, e 0,77 f_{ptk} e 0,85 f_{pyk} para aços da classe de relaxação baixa;

b) Armadura pós-tracionada:

- por ocasião da aplicação da força P_i , a tensão σ_{pi} da armadura de protensão na saída do aparelho de tração deve respeitar os limites 0,74 f_{ptk} e 0,87 f_{pyk} para aços da classe de relaxação normal, e 0,74 f_{ptk} e 0,82 f_{pyk} para aços da classe de relaxação baixa;

- para as cordoalhas engraxadas, com aços da classe de relaxação baixa, os valores-limite da tensão σ_{pi} da armadura de protensão na saída do aparelho de tração podem ser elevados para 0,80 f_{ptk} e 0,88 f_{pyk} ;

- nos aços CP-85/105, fornecidos em barras, os limites passam a ser 0,72 f_{ptk} e 0,88 f_{pyk} , respectivamente.

Segundo o item 9.6.1.2.3 da NBR 6118:2014 por ocasião da aplicação da força P_i se constatadas irregularidades na protensão, decorrentes de falhas executivas nos elementos estruturais com armadura pós-tracionada, a força de tração em qualquer cabo pode ser elevada, limitando a tensão σ_{pi} aos valores estabelecidos em 9.6.1.2.1-b) majorados em até 10%, até o limite de 50% dos cabos, desde que seja garantida a segurança da estrutura, principalmente nas regiões das ancoragens.

4.2.4 Relaxação do aço

A perda de tensão do aço sob deformação constante define a relaxação desse aço.

A relaxação dos aços é determinada por meio de ensaios padronizados, medindo a perda de tensão em 1.000 horas numa temperatura ambiente de 20°C, relativa a uma carga igual a

80% da carga de ruptura do aço. A NBR 7197/1989 prescreve a sistemática para a execução desses ensaios.

Os aços de relaxação baixa são obtidos por meio de um tratamento termo-mecânico, e apresentam apenas 20% da relaxação dos aços RN. As cordoalhas e fios não apresentam comportamento diferenciado quanto à relaxação, pois a temperatura durante o processo de estabilização produz uma acomodação dos fios que compõem as cordoalhas.

Os aços de RB (aços estabilizados por processo termo-mecânico) possuem melhor desempenho para condições normais de aplicação, o que também ocorre para condições excepcionais, como no caso de temperaturas mais elevadas.

5 CÁLCULO DE UMA VIGA ISOSTÁTICA PROTENDIDA

5.1 Dados da Estrutura

A viga escolhida para esse exemplo se trata de uma viga biapoiada de 26,0m de vão livre, submetida a um carregamento permanente $g=8\text{kN/m}$ e a uma carga acidental $q=20\text{kN/m}$.

Para classe de agressividade II, o concreto deve ter $f_{ck} \geq 30\text{MPa}$.

Etapas do projeto de uma viga podem ser separadas em:

- Definir seção transversal;
- Definir o número de cabos;
- Definir a armadura passiva;
- Detalhamento.

A espessura da alma deve ser de, no mínimo 15cm, devido à intenção de se utilizar cabos com $7\phi 1/2''$, de modo a haver espaço suficiente para a concretagem.

5.2 Cálculo da Seção Necessária

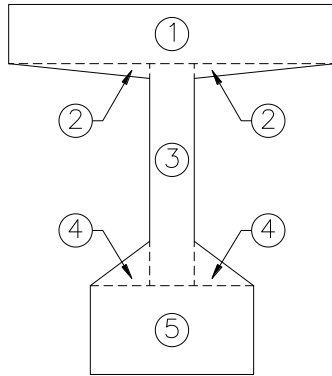
Rodrigues (2007) e Duarte (2015) recomendam como critério de pré-dimensionamento da seção necessária a seguinte expressão:

$$W_i^{nec} \geq \frac{M_{g+q}}{\frac{2}{3}f_{ck} - Perdas} = \frac{(g + q)L^2/8}{\frac{2}{3}f_{ck} - Perdas} = \frac{(8 + 20)26^2/8}{\left(\frac{2}{3}30\text{MPa} - 2\text{MPa}\right) \times 1000} = 0,131\text{m}^3$$

Valor estimado para as perdas lentas = 2MPa .

Módulo resistente elástico necessário abaixo da linha neutra: $W_i^{nec} \geq 0,131\text{m}^3$

5.3 Características Geométricas



n	yn (cm)	An (cm ²)	ynAn(cm ³)
1	115,0	2200	253000,0
2	103,3	237,5	24541,7
3	67,5	1125	75937,5
4	35,0	412,5	14437,5
5	15,0	2100	31500,0
	Σ=	6075	399416,7

Área: $A = 0,6075\text{m}^2$

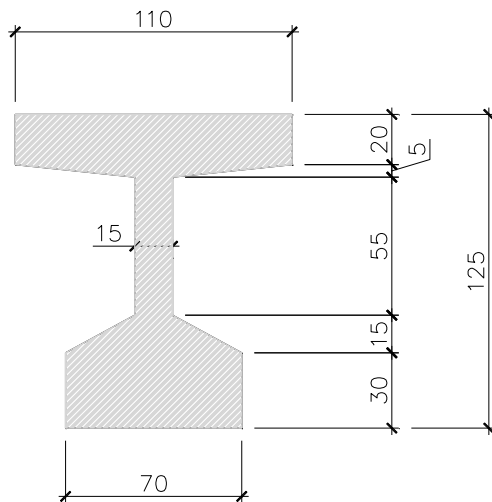
Momento de Inércia: $I = 0,1224\text{m}^4$

Módulo resistente elástico inferior: $W_i = 01863\text{m}^3$, logo $W_i > W_{i,nec}$

Módulo resistente elástico superior: $W_s = 0,2065\text{m}^3$

Altura da linha neutra com a face inferior: $y_i = 0,66\text{m}$

Altura da linha neutra com a face superior: $y_s = 0,59\text{m}$



Área	0,6075m ²	Inércia	0,1224m ⁴
yi	0,66m	Wi	0,1863m ³
ys	0,59m	Ws	0,2065m ³

Carregamento distribuído sobre a viga:

$$pp = 0,6075 \times 25 = 15,19\text{kN/m}$$

$$g = 8,0\text{kN/m}$$

$$q = 20\text{kN/m}$$

Determinação dos momentos fletores máximos na viga, neste caso, a seção mais solicitada se encontra no meio do vão:

$$M_{pp} = \frac{pp \times L^2}{8} = \frac{15,19 \times 26^2}{8} = 1283kNm$$

$$M_g = \frac{g \times L^2}{8} = \frac{8 \times 26^2}{8} = 676kNm$$

$$M_q = \frac{q \times L^2}{8} = \frac{20 \times 26^2}{8} = 1690kNm$$

Determinação das tensões máximas na seção mais solicitada:

$$\sigma_i = \frac{M}{W_i}; \sigma_s = \frac{M}{W_s}$$

$$\sigma_{pp}^i = \frac{M_{pp}}{W_i} = \frac{1,283}{0,1861} = 6,90MPa;$$

$$\sigma_{pp}^s = \frac{M_{pp}}{W_s} = \frac{1,283}{0,2065} = 6,21MPa$$

$$\sigma_g^i = \frac{M_g}{W_i} = \frac{0,676}{0,1861} = 3,63MPa;$$

$$\sigma_g^s = \frac{M_g}{W_s} = \frac{0,676}{0,2065} = 3,27MPa$$

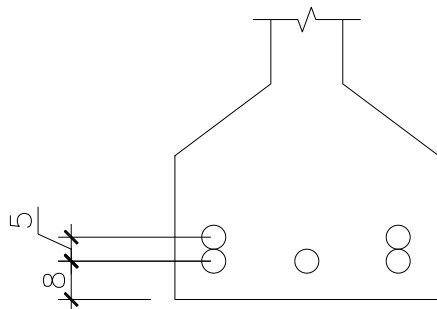
$$\sigma_q^i = \frac{M_q}{W_i} = \frac{1,690}{0,1861} = 9,08MPa;$$

$$\sigma_q^s = \frac{M_q}{W_s} = \frac{1,690}{0,2065} = 8,18MPa$$

$$\Sigma\sigma_i = 6,90 + 3,63 + 9,08 = 19,61MPa$$

$$\Sigma\sigma_s = 6,21 + 3,27 + 8,18 = 17,66MPa$$

5.4 Determinação da Força de Protensão



$$r = \frac{3 \times 0,08 + 2 \times 0,13}{5} = 0,10m$$

Centro de Gravidade do cabeamento na seção mais solicitada: adotado $r = 10cm$

$$e = y_i - r = 66 - 10 = 56cm$$

$$P = \frac{\Sigma\sigma_i}{\frac{1}{\text{Área}} + \frac{e}{W_i}} = \frac{19607}{\frac{1}{0,6075} + \frac{0,56}{0,1863}} = 4215kN$$

Será adotado cordoalhas de 7 fios CP 190 RB 12,70

Carga máxima de ruptura à 1% de alongamento = 149 kN (NBR7483 e Catálogo Acelor Mittal)

$$N_c = 0,82f_{pyk} = 0,82 \times 149,10 = 120\text{kN/cordoalha}$$

Serão adotadas 5 cordoalhas de 7 fios CP 190 RB 7 x 12,5

5.5 Estudo da Peça à Flexão

Esforços do momento fletor para cada seção:

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
	0	2,6	5,2	7,8	10,4	13
PP viga	0	462	821	1078	1232	1283
Envoltória	0	608	1082	1420	1622	1690

5.6 Estudo das Perdas

Vamos estudar as perdas de protensão, de acordo com o item 9.6.3.3.2.2 da ABNT NBR 6118:2014. Ao ser solicitada, a peça de concreto protendido encurta imediatamente. O aço de protensão irá acompanhar este encurtamento e perderá força ao longo do tempo. As tensões nas seções devem ser verificadas para o valor inicial e o menor valor da força. A consideração das perdas pode ser decisiva para que os limites admissíveis das tensões de tração e compressão nas bordas das seções sejam respeitados.

As perdas são subdivididas em dois grupos: As perdas imediatas e as perdas lentas.

Perdas de Protensão	
Imediatas	Lentas
Atrito	Fluência
Cravação	Retração
Deformação Imediata	Relaxação

As perdas ditas imediatadas podem ser mensuradas e mesmo controladas quando da sua manifestação. Isso se faz através da medida dos alongamentos dos cabos, de tal forma que as forças de protensão efetivamente implantadas nas estruturas de concreto podem ser aferidas com razoável precisão. O mesmo não ocorre para as perdas lentas, como se manifestam por um longo tempo, são função da reologia do concreto e das condições ambientes de temperatura e umidade. Sua avaliação somente é possível através de correlações empíricas traduzidas na forma de expressões numéricas (MACHADO, 2007).

5.6.1 Perdas por atrito

É causada pelo atrito entre o cabo e a bainha ao ser aplicada a força de protensão. Este efeito é acentuado nas curvas devido à existência do desvio da trajetória dos cabos nas mesmas e, à constituição corrugada da bainha.

A perda por atrito, segundo o item 9.6.3.3.2.2 da NBR 6118 é quantificada da seguinte forma:

Nos elementos estruturais com pós-tração, a perda por atrito pode ser determinada pela expressão:

$$\Delta P_{(x)} = P_i [1 - e^{-(\mu \Sigma \alpha + kx)}]$$

Onde:

P_i é o valor definido em 9.6.1.2.1;

x é a abscissa do ponto onde se calcula ΔP , medida a partir da ancoragem, expressa em metros (m);

$\Sigma \alpha$ é a soma dos ângulos de desvio entre a ancoragem e o ponto de abscissa x , expressa em radianos (rad);

μ é o coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha. Na falta de dados experimentais, pode ser estimado como a seguir (valores em 1/radianos):

$\mu = 0,50$ entre cabo e concreto (sem bainha);

$\mu = 0,30$ entre barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0,20$ entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica;

$\mu = 0,10$ entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica lubrificada;

$\mu = 0,05$ entre cordoalha e bainha de polipropileno lubrificada;

k é o coeficiente de perda por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo. Na falta de dados experimentais, pode ser adotado o valor $0,01\mu$ (1/m).

Segundo Machado (2007), o coeficiente k na realidade não visa tão somente corrigir as imperfeições de alinhamento (ondulação) mas também problemas construtivos diversos, tais como flechas entre pontos de suspensão e desvios parasitários tanto nos trechos retos como nos trechos curvos.

Segundo Duarte (2015), a equação também pode ser escrita como:

$$\sigma_x = \sigma_0 e^{-(\mu \Sigma \alpha + kl)}$$

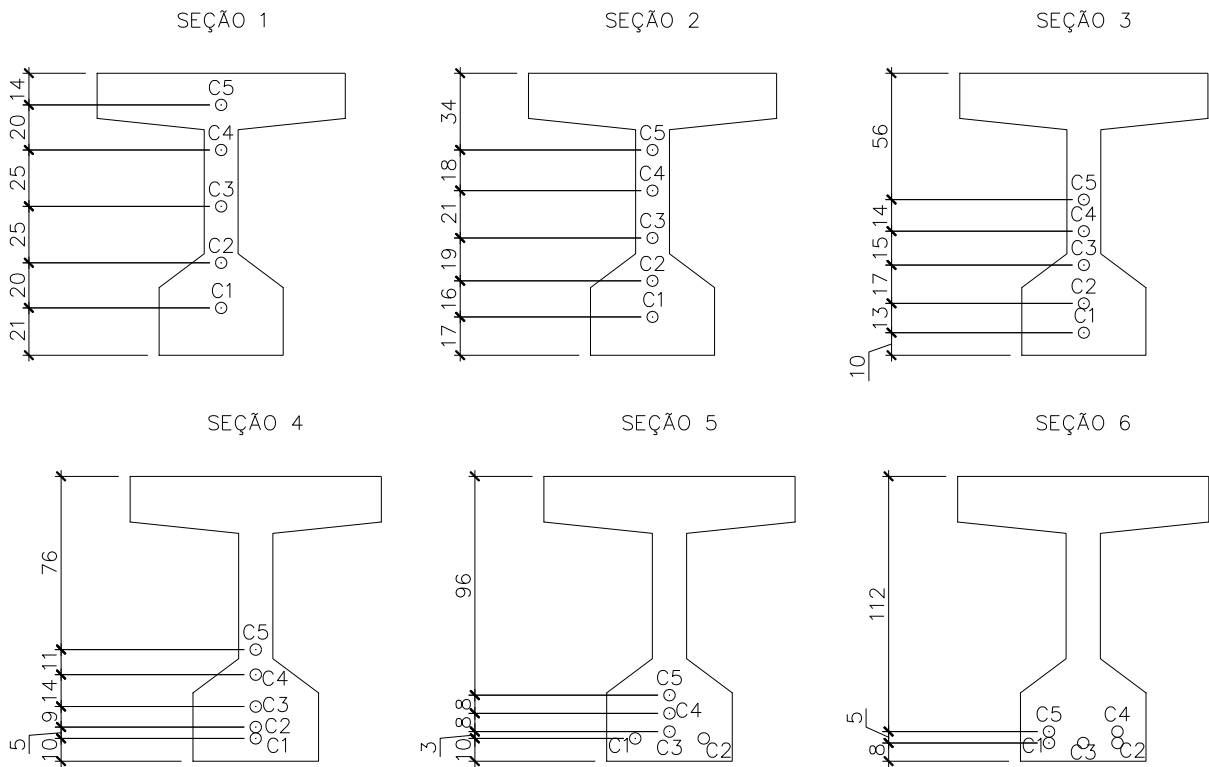
Onde:

σ_x Valor da tensão em cada seção após a atuação da perda por atrito;

σ_0 Tensão máxima aplicada pelo macaco à armadura de protensão ;

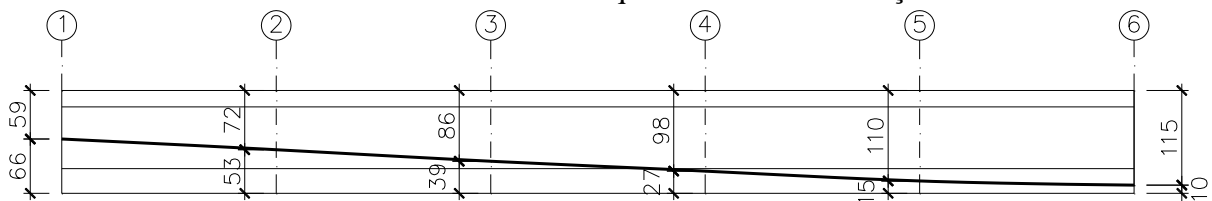
l distância da seção de cálculo a seção inicial.

Para a quantificação das perdas de tensão é considerado um cabo único representativo dos demais, o cabo resultante. Este cabo único é traçado com a média das excentricidades dos cabos originais em cada seção.



	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Cabo C1	14	34	56	76	98	112
Cabo C2	34	52	70	87	106	112
Cabo C3	59	73	85	101	114	117
Cabo C4	84	92	102	110	117	117
Cabo C5	104	108	115	115	117	117
Cabo Equivalente	59	72	86	98	110	115

Assim sendo a excentricidade do cabo equivalente em cada seção será:



$$S1 \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{0,72 - 0,59}{2,60} \right) = 2,9$$

$$S2 \rightarrow \alpha = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{0,72 - 0,59}{2,60} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{0,86 - 0,72}{2,60} \right)}{2} = 3,0$$

$$S3 \rightarrow \alpha = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{0,86 - 0,72}{2,60} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{0,98 - 0,86}{2,60} \right)}{2} = 2,9$$

$$S4 \rightarrow \alpha = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{0,98 - 0,86}{2,60} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1,10 - 0,98}{2,60} \right)}{2} = 2,6$$

$$S5 \rightarrow \alpha = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1,10 - 0,98}{2,60} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1,15 - 1,10}{2,60} \right)}{2} = 1,9$$

$$S6 \rightarrow \alpha = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1,15 - 1,10}{2,60} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1,10 - 1,15}{2,60} \right)}{2} = 0,0$$

A tensão inicial do cabo por norma deverá ser menor que $\sigma_0 = 1,1(0,74 \times f_{ptk}) = 1547\text{MPa}$. Adotado $\sigma_0 = 1406\text{MPa}$ por não apresentar na prática problema na protensão dos cabos, não solicitando em demasia os fios da cordoalha por estado múltiplo de tensões, portanto $\sigma_0 = 0,74 \times f_{ptk} = 1406\text{MPa}$.

Para os demais valores, foram adotados:

$\mu = 0,20$ entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica;

$k = 0,01\mu = 0,01 \times 0,20 = 0,002$

Para $l=13,00\text{m}$

$\Sigma\alpha = |3,0 - 2,9| + |2,9 - 3,0| + |2,6 - 2,9| + |1,9 - 2,6| + |0,0 - 1,9| = 3,10$

$\mu\Sigma\alpha + kl = 0,20 \times \left(3,10 \frac{\pi}{180} \right) + 0,002 \times 13 = 0,00368 \text{ rad}$

$\sigma_{(x=13,0\text{m})} = \sigma_0 e^{-(\mu\Sigma\alpha + kl)} = 1406 e^{-(0,00368)} = 1355\text{MPa}$

Tabela 1 – Resumo das perdas por atrito

Seção	<i>l</i> (m)	$\Sigma\alpha$ (°)	$(\mu\Sigma\alpha+kl)$ (rad)	σ (MPa)
1	0,00	0	0,000	1406
2	2,60	0,1	0,006	1398
3	5,20	0,2	0,011	1390
4	7,80	0,5	0,017	1382
5	10,40	1,2	0,025	1371
6	13,00	3,1	0,037	1355

5.6.2 Perdas por cravação

No momento da liberação dos cabos dos macacos, e conseqüente transferência dos esforços de protensão para a peça de concreto, ocorre uma acomodação das peças de ancoragem (cunhas). Os deslocamentos que ocorrem originam as chamadas perdas por cravação, também chamadas de perdas por encunhamento ou por acomodação da ancoragem. A cunha sempre penetra na ancoragem quando entra em carga. As perdas por cravação devem ser determinadas experimentalmente ou adotados os valores indicados pelos fabricantes de dispositivos de ancoragem.

Essa perda é máxima na região da ancoragem e vai diminuindo a partir da mesma para o centro da peça, até um ponto determinado em que o atrito anula esse escorregamento.

Nos sistemas que utilizam cunha individual para cada fio ou cordoalha, observam-se os seguintes valores médios de retorno devido ao encunhamento, para uma dada carga máxima:

Fio $\phi = 7mm$ $\delta = 5mm$

Cordoalha $\phi = 12,5mm$ $\delta = 6mm$ ou $\delta = 5mm$ (cunha cravada com macaco)

As perdas por cravação podem ser quantificadas igualando-se a energia de retorno das cordoalhas até serem bloqueadas pelas cunhas ($E_A \delta$) com a energia de atrito atuante em sentido contrário no interior do cabo, devido à acomodação.

$$A = \frac{E_A \delta}{2}$$

Onde:

E_A é o módulo de elasticidade da cordoalha (2.000.000kg/cm²)

δ é o retorno do cabo

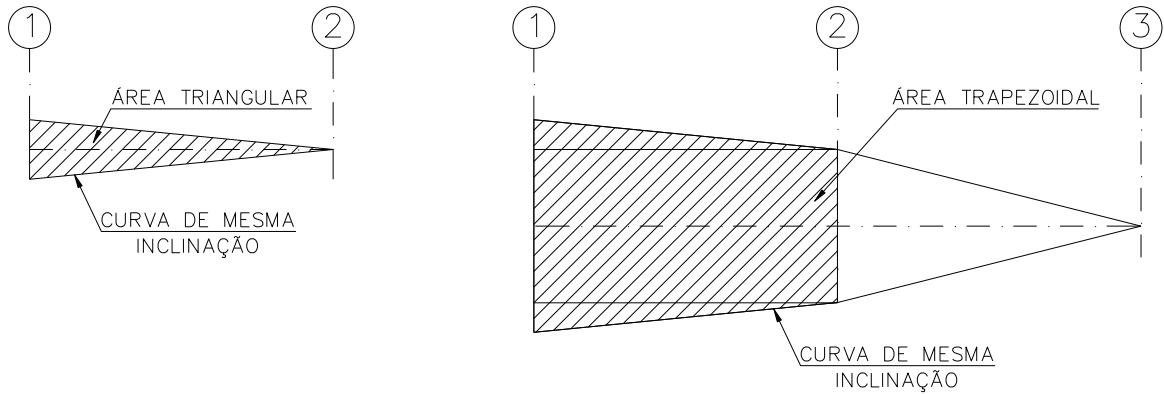


Figura 14 – Cálculo das áreas na perda por cravação

Área a ser igualada:

$$U = \frac{E_A \delta}{2} = \frac{200.000 \times 0,005}{2} = 500 \text{MPa} \cdot \text{m}$$

Área triangular

$$\Delta_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n+1}}{2} \times \Delta l$$

Áreas trapezoidais

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \sigma_n - \sigma_{n+1} \left(\frac{2n-1}{2} \right) \Delta l$$

1º Trecho: (S1 a S2) – Área triangular

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \times \Delta l = \frac{1406 - 1398}{2} \times 2,6 = 10 \text{MPa} \cdot \text{m} \ll U$$

2º Trecho: (S1 a S3) – Áreas trapezoidais

$$\Delta_2 = 10 + (1398 - 1390) \left(\frac{2 \times 2 - 1}{2} \right) 2,6 = 41 \text{MPa} \cdot \text{m} \ll U$$

3º Trecho: (S1 a S4) – Áreas trapezoidais

$$\Delta_3 = 41 + (1390 - 1382) \left(\frac{2 \times 3 - 1}{2} \right) 2,6 = 93 \text{MPa} \cdot \text{m} \ll U$$

4º Trecho: (S1 a S5) – Áreas trapezoidais

$$\Delta_4 = 93 + (1382 - 1371) \left(\frac{2 \times 4 - 1}{2} \right) 2,6 = 193 \text{MPa} \cdot \text{m} \ll U$$

5º Trecho: (S1 a S6) – Áreas trapezoidais

$$\Delta_5 = 193 + (1371 - 1355) \left(\frac{2 \times 5 - 1}{2} \right) 2,6 = 380 \text{MPa} \cdot \text{m} \ll U$$

Como $\Delta_5 \ll U$, ainda terá uma queda abaixo da tensão no meio do vão igual a:

$$\Delta = \frac{(U - \Delta_5)}{5l} = \frac{(500 - 380)}{5 \times 2,60m} = 9MPa$$

Então, a linha de simetria do gráfico estará na tensão:

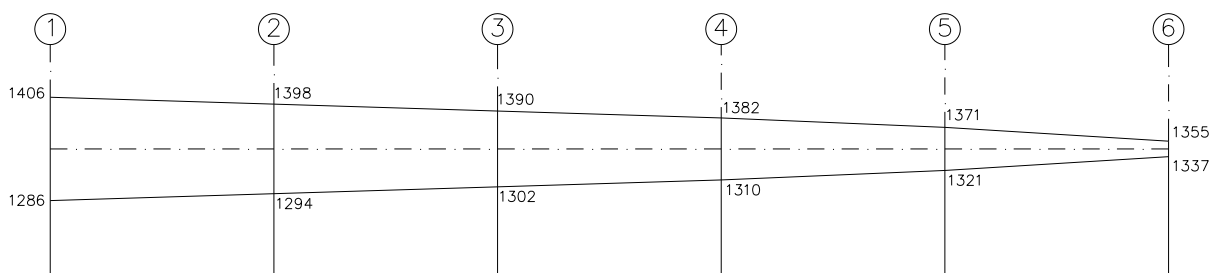
$$1355 - 9 = 1346MPa$$

Portanto, a tensão na seção 6, por exemplo, após a perda por cravação será igual a perda por atrito em S6 menos $2\Delta = 18MPa$.

$$\sigma_6 = 1355 - 18 = 1337MPa$$

Tabela 2 – Tensões após as perdas por atrito e cravação

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação	1286	1294	1302	1310	1321	1337



5.6.3 Perdas por deformação imediata

Ao receber a força de protensão, a viga de concreto sofre uma deformação elástica imediata, encurtando-se. Concomitantemente ocorre um encurtamento na armadura de protensão anteriormente protendida. A este encurtamento da armadura protendida, corresponde um alívio de tensão nos cabos, ocorrendo assim uma perda de protensão.

No caso em estudo está sendo considerado que a viga sofrerá protensão com aderência posterior, e é constituída por vários cabos. Sendo estes cabos tracionados um de cada vez, conforme é usual, a deformação do concreto provocado pela força no cabo que está sendo tracionado, acarreta perda de tensão nos cabos já ancorados.

Portanto, iguala-se o encurtamento do concreto ao do aço em cada seção, apenas levando-se em conta que cada cabo protendido, influencia apenas os que já estão protendidos, logo:

$$\Delta\sigma_{an} = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n}, \text{ onde } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}, \sigma_{an} = \sigma_n - \Delta\sigma_{an}$$

Onde:

$\Delta\sigma_{an}$ Perda de protensão na armadura de protensão, devida a deformação imediata do concreto;

ε_c Encurtamento do concreto;

E_a Módulo de elasticidade longitudinal da armadura de protensão;

n Número de cabos.

O cálculo de ε_c será feito no centro de gravidade do cabo equivalente, considerando-se os carregamentos de peso próprio e protensão. Para tanto, será necessário calcular o valor da força de protensão em cada seção, já consideradas as perdas anteriores:

$$N_n = \sigma_n n A_a.$$

Onde:

A_a é a área da seção transversal de cada cabo. Para cada cabo com 5 cordoalhas de 1/2", temos a seguinte área:

$A_a = 0,8 \times 7 \times \frac{\pi(1,27)^2}{4} = 7 \text{ cm}^2$, o valor 0,8, refere-se à redução da área de cada cordoalha devido à sua forma irregular.

Admitindo que a protensão ocorrerá 7 dias após a concretagem e o cimento utilizado será CPV-ARI. Calcula-se o fck do concreto na data de protensão segundo o item 12.3.3 da ABNT NBR 6118:2014:

$$\beta_1 = e^{\{s[1-(28/t)^{1/2}]\}}$$

onde:

$s = 0,38$ para concreto de cimento CPIII e IV;

$s = 0,25$ para concreto de cimento CPI e II;

$s = 0,20$ para concreto de cimento CPV-ARI;

t é a idade efetiva do concreto, em dias.

Essa verificação deve ser feita aos t dias, para as cargas aplicadas até essa data.

Ainda deve ser feita a verificação para a totalidade das cargas aplicadas aos 28 dias. Nesse caso, o controle da resistência à compressão do concreto deve ser feito em duas datas: aos t dias e aos 28 dias, de forma a confirmar os valores de f_{ckj} e f_{ck} adotados no projeto.

Para $t=7$ e $s=0,20$, temos:

$$\beta_1 = e^{\{0,2[1-(28/7)^{1/2}]\}} = 0,82$$

$$\frac{f_{ckj}}{f_{ck}} = \beta_1 \therefore f_{ckj} = \beta_1 \times f_{ck} = 0,82 \times 30 = 24,6MPa$$

O módulo de elasticidade do concreto, obtido aos 28 dias, conforme o item 8.2.8 da NBR 6118:2014, pode ser estimado pela fórmula:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600\sqrt{f_{ck}}$$

Sendo:

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse

$\alpha_E = 0,9$ para calcário

$\alpha_E = 0,7$ para arenito

$$E_{ci} = 1,0 \times 5600\sqrt{30} = 30672MPa$$

O módulo de elasticidade em uma idade menor que 28 dias pode ser avaliado pelas expressões a seguir:

$$E_{ci}(t) = \sqrt{\frac{f_{ckj}}{f_{ck}}} \times E_{ci}$$

$$E_{ci}(t) = \sqrt{0,82} \times 30672MPa = 27775MPa$$

Segundo o item 8.4.4 da NBR 6118:2014, na falta de dados específicos para o módulo de elasticidade do aço de armadura ativa, pode-se considerar para fios e cordoalhas o valor de:

$$E_a = 200GPa = 200000MPa$$

A seguir, temos a obtenção da perda de protensão devida à deformação imediata do concreto, para cada seção.

Para facilitar a visualização, foram recuperados valores já determinados anteriormente, tais

como, os momentos fletores seccionais devidos à carga de peso próprio, as excentricidades médias seccionais do cabo equivalente e as propriedades geométricas da seção transversal, observadas à seguir:

Seção	S1	S2	S3	S4	S5	S6
M_{pp} (kN.m)	0	465	827	1086	1241	1293
$e_{médio}$ (m)	0,59	0,72	0,86	0,98	1,10	1,15

Área	0,61m ²	I	0,12m ⁴
y_i	0,66m	W_i	0,18m ³
y_s	0,59m	W_s	0,21m ³

Seção 1

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_1 n A_a = \frac{1286 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4501 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_2 - e_1 = 0,59 - 0,59 = 0,00 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 0 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} = \frac{-4501}{0,61 \times 1000} = -7,38 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-7,38}{27775} = -2,66 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-2,66 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{5-1}{2 \times 5} = -21 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a1} = 1286 - 21 = 1265 \text{ MPa}$$

Seção 2

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_2 n A_a = \frac{1294 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4529 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_2 - e_1 = 0,72 - 0,59 = 0,13 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 465 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4529}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4529 \times 0,13 + 465)0,13}{0,12 \times 1000} = -7,56 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-7,56}{27775} = -2,72 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-2,72 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{5-1}{2 \times 5} = -22 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a2} = 1294 - 22 = 1272 \text{ MPa}$$

Seção 3

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_3 n A_a = \frac{1302 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4557 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_3 - e_1 = 0,86 - 0,59 = 0,27 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 827 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4557}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4557 \times 0,27 + 827)0,27}{0,12 \times 1000} = -8,38 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-8,38}{27775} = -3,02 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-3,02 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{4}{10} = -24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a3} = 1302 - 24 = 1278 \text{ MPa}$$

Seção 4

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_4 n A_a = \frac{1310 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4585 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_4 - e_1 = 0,98 - 0,59 = 0,39 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 1086 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4585}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4585 \times 0,39 + 1086)0,39}{0,12 \times 1000} = -9,80 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-9,80}{27775} = -3,53 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-3,53 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{4}{10} = -28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a4} = 1310 - 28 = 1282 \text{ MPa}$$

Seção 5

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_5 n A_a = \frac{1321 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4624 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_5 - e_1 = 1,10 - 0,59 = 0,51 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 1241 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4624}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4624 \times 0,51 + 1241)0,51}{0,12 \times 1000} = -12,33 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-12,33}{27775} = -4,44 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-4,44 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{4}{10} = -36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a5} = 1321 - 36 = 1285 \text{ MPa}$$

Seção 6

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_6 n A_a = \frac{1337 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4680 \text{ kN}$$

$$\text{Excentricidade: } e = e_6 - e_1 = 1,15 - 0,59 = 0,56 \text{ m}$$

$$\text{Momento devido ao peso próprio: } M_{pp} = 1293 \text{ kN.m}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4680}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4680 \times 0,56 + 1293)0,56}{0,12 \times 1000} = -13,87 \text{ MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{-13,87}{27775} = -4,99 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_c E_a \frac{n-1}{2n} = (-4,99 \times 10^{-4}) \times 200000 \times \frac{4}{10} = -40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a6} = 1337 - 40 = 1297 \text{ MPa}$$

Tabela 3 – Tensões após as perdas por deformação imediata

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação	1286	1294	1302	1310	1321	1337
Perda por deformação imediata	1265	1272	1278	1282	1285	1297

5.6.4 Perdas por fluência do concreto

Ao longo da vida útil da peça, os cabos vão encurtando gradativamente à medida que o concreto se deforma devido à tensão de protensão. Consequentemente, a força de protensão, que é uma das causas da fluência, está diminuindo. A tensão na armadura de protensão cai linearmente durante o período no qual a fluência ocorre.

Conforme item A.2.2.3 no Anexo A da NBR 6118:2014, no instante t a deformação devida à fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccd} + \varepsilon_{ccf} = \frac{\sigma_c}{E_{c,28}} \varphi(t_\infty, t_0)$$

Sendo ε_{cca} a deformação rápida e irreversível que ocorre durante as primeiras 24 h após a aplicação da carga, a ε_{ccd} deformação lenta irreversível e a ε_{ccf} deformação lenta reversível.

Deformações específicas devidas à fluência e à retração mais precisas podem ser calculadas segundo indicação do Anexo A da norma. Mas para casos onde não é necessária grande precisão o item 8.2.11 sobre fluência e retração da NBR 6118:2014 sugere que os valores

finais do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ e da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ do concreto, e podem ser obtidos, por interpolação linear, a partir da Tabela 4.

Tabela 4 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ e do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$

Umidade média ambiente (%)		40		55		75		90		
Espessura fictícia 2Ac/u (cm)		20	60	20	60	20	60	20	60	
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	t_0 dias	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2,0	1,9
		30	3,4	3	2,9	2,6	2,2	2,0	1,6	1,5
		60	2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C50 a C90		5	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5
		30	2,0	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1
		60	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1,0	1,0
$\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ (‰)		5	-0,53	-0,47	-0,48	-0,43	-0,36	-0,32	-0,18	-0,15
		30	-0,44	-0,45	-0,41	-0,41	-0,33	-0,31	-0,17	-0,15
		60	-0,39	-0,43	-0,36	-0,40	-0,30	-0,31	-0,17	-0,15

A tabela fornece o valor do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ e da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ em função da umidade média ambiente e da espessura fictícia 2Ac /u, onde Ac é a área da seção transversal e u é o perímetro da seção em contato com a atmosfera. Os valores desta Tabela são relativos a temperaturas do concreto entre 10 °C e 20 °C, podendo-se, entretanto, admiti-los como válidos para temperaturas entre 0 °C e 40 °C. Esses valores são válidos para concretos plásticos e de cimento Portland comum.

Entrando com os valores de:

Umidade ambiente, como referência (retirado da Tabela A.1 da NBR 6118:2014):

Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água ~90%

No ar livre em geral ~70%

Em ambiente seco ~40%

Adotado umidade ambiente = 75%

Espessura fictícia da viga: $\left(\frac{2A}{u}\right) = \left(\frac{2 \times 0,61}{5,48}\right) = 0,22m = 22,62cm$

Tempo: 30 dias

Concreto: C30

Encontramos os seguintes valores:

Coeficiente de fluência: $\varphi(t_\infty, t_0) = 2,2$

Deformação específica de retração: $\varepsilon_{cs}(t_\infty, t_0) = -0,33\text{‰} = -0,00033$

O coeficiente de fluência do concreto depende das condições climáticas, do grau de endurecimento do concreto, da espessura fictícia da viga de concreto protendido, da composição do concreto e varia com o tempo.

Rodrigues (2008) incentiva a utilização do programa *Reolog* para obtenção precisa das informações anteriormente descritas.

Seção 1

Força de tração: $N = \sigma_{a1} n A_a = \frac{1265 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4428 \text{ kN}$

Tensão no concreto: $\sigma_c = \frac{N}{A} = \frac{-4428}{0,61 \times 1000} = -7,26 \text{ MPa}$

Deformação devido a fluência: $\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-7,26}{27775} \times 2,2 = -5,75 \times 10^{-4}$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$\Delta\sigma_b = \varepsilon_f E_a = (-5,75 \times 10^{-4}) \times 200000 = -115 \text{ MPa}$

$\sigma_{b1} = 1265 - 115 = 1150 \text{ MPa}$

Seção 2

Força de tração: $N = \sigma_{a2} n A_a = \frac{1272 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4452 \text{ kN}$

Tensão no concreto: $\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4452}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4452 \times 0,13 + 465)0,13}{0,12 \times 1000} = -7,42 \text{ MPa}$

Deformação devido a fluência: $\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-7,42}{27775} \times 2,2 = -5,88 \times 10^{-4}$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$\Delta\sigma_b = \varepsilon_f E_a = (-5,88 \times 10^{-4}) \times 200000 = -118 \text{ MPa}$

$\sigma_{b2} = 1272 - 118 = 1154 \text{ MPa}$

Seção 3

Força de tração: $N = \sigma_{a3} n A_a = \frac{1278 \times 5 \times 7 \text{ cm}^2}{10} = 4473 \text{ kN}$

Tensão no concreto: $\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4473}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4473 \times 0,27 + 827)0,27}{0,12 \times 1000} = -8,19 \text{ MPa}$

Deformação devido a fluência: $\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-8,19}{27775} \times 2,2 = -6,49 \times 10^{-4}$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$\Delta\sigma_b = \varepsilon_{cc} E_a = (-6,49 \times 10^{-4}) \times 200000 = -130 \text{ MPa}$

$$\sigma_{b3} = 1278 - 130 = 1148 \text{MPa}$$

Seção 4

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_{a4} n A_a = \frac{1282 \times 5 \times 7 \text{cm}^2}{10} = 4487 \text{kN}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4585}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4585 \times 0,39 + 1086)0,39}{0,12 \times 1000} = -9,80 \text{MPa}$$

$$\text{Encurtamento do concreto: } \varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-9,80}{27775} \times 2,2 = -7,76 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_b = \varepsilon_{cc} E_a = (-7,76 \times 10^{-4}) \times 200000 = -155 \text{MPa}$$

$$\sigma_{b4} = 1282 - 155 = 1127 \text{MPa}$$

Seção 5

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_{a5} n A_a = \frac{1285 \times 5 \times 7 \text{cm}^2}{10} = 4498 \text{kN}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4624}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4624 \times 0,51 + 1241)0,51}{0,12 \times 1000} = -12,33 \text{MPa}$$

$$\text{Deformação devido a fluência: } \varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-12,33}{27775} \times 2,2 = -9,77 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_b = \varepsilon_{cc} E_a = (-9,77 \times 10^{-4}) \times 200000 = -195 \text{MPa}$$

$$\sigma_{b5} = 1285 - 195 = 1090 \text{MPa}$$

Seção 6

$$\text{Força de tração: } N = \sigma_{a6} n A_a = \frac{1297 \times 5 \times 7 \text{cm}^2}{10} = 4540 \text{kN}$$

$$\text{Tensão no concreto: } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{(Ne + M_{pp})e}{I} = \frac{-4540}{0,61 \times 1000} + \frac{(-4540 \times 0,56 + 1293)0,56}{0,12 \times 1000} = -13,27 \text{MPa}$$

$$\text{Deformação devido a fluência: } \varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_c} \varphi(t_\infty, t_0) = \frac{-13,27}{27775} \times 2,2 = -10,51 \times 10^{-4}$$

Perda de protensão na armadura de protensão:

$$\Delta\sigma_b = \varepsilon_{cc} E_a = (10,51 \times 10^{-4}) \times 200000 = -210 \text{MPa}$$

$$\sigma_{b6} = 1297 - 210 = 1087 \text{MPa}$$

Tabela 5 – Tensões após as perdas por fluência do concreto

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação	1286	1294	1302	1310	1321	1337
Perda por deformação imediata	1265	1272	1278	1282	1285	1297
Perda por fluência do concreto	1150	1154	1148	1127	1090	1087

5.6.5 Perdas por retração

Segundo Rodrigues (2008), a protensão só é aplicada à peça depois que o concreto já adquiriu resistência suficiente para suportar as tensões decorrentes da protensão e do peso próprio. Nessa época, uma parte da retração do concreto já ocorreu. A protensão deve ser adiada tanto quanto possível, com o objetivo de diminuir as perdas de protensão, pois a retração é mais intensa nas primeiras idades do concreto.

O valor da retração do concreto depende da umidade relativa do ambiente, consistência do concreto no lançamento e espessura fictícia da peça (item A.2.3.1 da NBR 6118:2014).

Admite-se também na pós-tensão, de forma simplificada, que a deformação do concreto é igual à do aço (RODRIGUES, 2008).

Como encontrado anteriormente, a deformação específica de retração pode ser considerada igual a $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0) = -0,33\text{‰} = -0,00033$.

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_a = -0,33\text{‰} = -0,00033$$

$$\Delta\sigma_a = \varepsilon_a E_a = -0,00033 \times 200000 = -66\text{MPa}$$

Tabela 6 – Tensões após as perdas por retração

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação	1286	1294	1302	1310	1321	1337
Perda por deformação imediata	1265	1272	1278	1282	1285	1297
Perda por fluência do concreto	1150	1154	1148	1127	1090	1087
Perda por retração	1084	1088	1082	1061	1024	1021

5.6.6 Perdas por relaxação do aço

A armadura de protensão tracionada e mantida com o comprimento constante sofre alívio de tensão ao longo do tempo, este fenômeno é chamado de relaxação do aço. Os valores médios da relaxação, medidos após 1000 horas à temperatura constante de 20°C podem ser adotados a partir da Tabela 7 encontrada no item 8.4.8 da NBR 6118:2014 para tensões entre 50% a 80% da carga de ruptura. A norma sugere considerar para o tempo infinito o valor de 2,5 vezes o valor da relaxação do ensaio, logo, $\psi(t_{\infty}, t_0) = 2,5 \psi_{1000}$.

Tabela 7 - Valores de ψ_{1000} em porcentagem

σ_{po}	Cordoalhas		Fios	
	RN	RB	RN	RB
0,5fptk	0,0	0,0	0,0	0,0
0,6fptk	3,5	1,3	2,5	1,0
0,7fptk	7,0	2,5	5,0	2,0
0,8fptk	12,0	3,5	8,5	3,0

Rodrigues (2008) e Duarte (1995) recomendam que, de forma prática e conservadora, admita-se uma queda de tensão da ordem de 60MPa para os aços de baixa relaxação (RB). O mesmo foi utilizado neste exemplo.

5.7 Quadro de tensões

Tabela 8 – Tensões após todas as perdas

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito (MPa)	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação (MPa)	1286	1294	1302	1310	1321	1337
Perda por deformação imediata (MPa)	1265	1272	1278	1282	1285	1297
Perda por fluência do concreto (MPa)	1150	1154	1148	1127	1090	1087
Perda por retração (MPa)	1084	1088	1082	1061	1024	1021
Perda por relaxação do aço (MPa)	1024	1028	1022	1001	964	961
Perdas Lentas Total (MPa)	241	244	256	281	321	336

Obtido o total de perdas de tensão em cada seção, pode-se obter os valores das forças de protensão reais necessário em cada seção. Para tanto, basta multiplicar a tensão em cada seção após as perdas imediatas, pela área total da seção dos cabos.

Conforme visto anteriormente, a área dos 5 cabos com 7 cordoalhas de ½” é igual a 35cm².

É necessário verificar as tensões antes e depois das perdas imediatas, portanto devemos encontrar as tensões após as perdas imediatas e a variação de tensão com as perdas lentas.

Tabela 9 – Forças de protensão

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN) Após perdas imediatas	4428	4452	4473	4487	4498	4540
ΔN (kN) Perdas lentas	844	854	896	984	1124	1176

Tensão de protensão na face inferior e superior após a ocorrência das perdas imediatas:

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i}; \quad \eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s}$$

Perdas lentas na face inferior e superior

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i}; \quad \Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s}$$

Seção 1

$$\eta_i = \eta_s = -\frac{N}{A} = \frac{4428}{0,61 \times 10} = -726$$

$$\Delta\eta_i = \Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} = \frac{844}{0,61 \times 10} = 138$$

Seção 2

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} = -\frac{4452}{0,61 \times 10} - \frac{4452 \times 0,13}{0,18 \times 10} = -1051$$

$$\eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s} = -\frac{4452}{0,61 \times 10} + \frac{4452 \times 0,13}{0,21 \times 10} = -454$$

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i} = +\frac{854}{0,61 \times 10} + \frac{854 \times 0,13}{0,18 \times 10} = 202$$

$$\Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s} = +\frac{854}{0,61 \times 10} - \frac{854 \times 0,13}{0,21 \times 10} = 87$$

Seção 3

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} = -\frac{4473}{0,61 \times 10} - \frac{4473 \times 0,27}{0,18 \times 10} = -1051$$

$$\eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s} = -\frac{4473}{0,61 \times 10} + \frac{4473 \times 0,27}{0,21 \times 10} = -454$$

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i} = +\frac{896}{0,61 \times 10} + \frac{896 \times 0,27}{0,18 \times 10} = 212$$

$$\Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s} = +\frac{896}{0,61 \times 10} - \frac{896 \times 0,27}{0,21 \times 10} = 91$$

Seção 4

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} = -\frac{4487}{0,61 \times 10} - \frac{4487 \times 0,39}{0,18 \times 10} = -1060$$

$$\eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s} = -\frac{4487}{0,61 \times 10} + \frac{4487 \times 0,39}{0,21 \times 10} = -458$$

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i} = +\frac{984}{0,61 \times 10} + \frac{984 \times 0,39}{0,18 \times 10} = 232$$

$$\Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s} = +\frac{984}{0,61 \times 10} - \frac{984 \times 0,39}{0,21 \times 10} = 100$$

Seção 5

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} = -\frac{4498}{0,61 \times 10} - \frac{4498 \times 0,51}{0,18 \times 10} = -1062$$

$$\eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s} = -\frac{4498}{0,61 \times 10} + \frac{4498 \times 0,51}{0,21 \times 10} = -459$$

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i} = +\frac{1124}{0,61 \times 10} + \frac{1124 \times 0,51}{0,18 \times 10} = 265$$

$$\Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s} = +\frac{1124}{0,61 \times 10} - \frac{1124 \times 0,51}{0,21 \times 10} = 115$$

Seção 6

$$\eta_i = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{W_i} = -\frac{4540}{0,61 \times 10} - \frac{4540 \times 0,56}{0,18 \times 10} = -1072$$

$$\eta_s = -\frac{N}{A} + \frac{Ne}{W_s} = -\frac{4540}{0,61 \times 10} + \frac{4540 \times 0,56}{0,21 \times 10} = -463$$

$$\Delta\eta_i = +\frac{\Delta N}{A} + \frac{\Delta Ne}{W_i} = +\frac{1176}{0,61 \times 10} + \frac{1176 \times 0,56}{0,18 \times 10} = 278$$

$$\Delta\eta_s = +\frac{\Delta N}{A} - \frac{\Delta Ne}{W_s} = +\frac{1176}{0,61 \times 10} - \frac{1176 \times 0,56}{0,21 \times 10} = 120$$

Tabela 10 - Valores das tensões em cada seção

Seção	S1	S2	S3	S4	S5	S6
η_i (MPa)	-7,3	-10,5	-13,9	-16,9	-19,9	-21,3
η_s (MPa)	-7,3	-4,6	-1,5	1,1	3,7	4,9
$\Delta\eta_i$ (MPa)	1,4	2,0	2,8	3,7	4,9	5,5
$\Delta\eta_s$ (MPa)	1,4	0,9	0,3	-0,2	-0,9	-1,3

Tensões admissíveis máximas

Bordo inferior da seção

$\sigma_{cm\acute{a}x} =$	-20 MPa
$\sigma_{Tm\acute{a}x} =$	3 MPa

Bordo superior da seção

$\sigma_{Cm\acute{i}n} =$	-15 MPa
$\sigma_{Tm\acute{i}n} =$	3 MPa

Tabela 11 - Quadro final de tensões

Seção	Tensão (MPa)		pp	prot i	σ_p	perdas	σ_a
S1	σ_i	p	0,0	-7,3	0,0	1,4	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-5,9	-5,9
	σ_s	p	0,0	-7,3	0,0	1,4	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-5,9	-5,9
S2	σ_i	p	2,5	-10,5	1,3	2,0	3,3
		Σ	-	-8,0	-6,7	-4,7	-1,4
	σ_s	p	-2,2	-4,6	-1,2	0,9	-2,9
		Σ	-	-6,8	-8,0	-7,1	-10,0
S3	σ_i	p	4,4	-13,9	2,3	2,8	5,8
		Σ	-	-9,5	-7,2	-4,4	1,4
	σ_s	p	-4,0	-1,5	-2,1	0,3	-5,2
		Σ	-	-5,5	-7,6	-7,3	-12,5
S4	σ_i	p	5,8	-16,9	3,1	3,7	7,6
		Σ	-	-11,1	-8,0	-4,4	3,3
	σ_s	p	-5,2	1,1	-2,8	-0,2	-6,9
		Σ	-	-4,1	-6,9	-7,1	-14,0
S5	σ_i	p	6,6	-19,9	3,5	4,9	8,7
		Σ	-	-13,2	-9,7	-4,9	3,8
	σ_s	p	-6,0	3,7	-3,1	-0,9	-7,9
		Σ	-	-2,2	-5,4	-6,3	-14,1
S6	σ_i	p	6,9	-21,3	3,6	5,5	9,1
		Σ	-	-14,4	-10,7	-5,2	3,9
	σ_s	p	-6,2	4,9	-3,3	-1,3	-8,2
		Σ	-	-1,3	-4,6	-5,9	-14,1

Nas células em negrito, observamos as tensões finais no bordo inferior e as tensões finais no bordo superior de cada seção.

Observa-se que a tensão de compressão no bordo superior superou o limite estabelecido. Aumentando-se o f_{ck} para 40MPa, temos as seguintes tensões admissíveis e o seguinte quadro de tensões:

Bordo inferior da seção

$\sigma_{cm\acute{a}x} =$	-27 MPa
$\sigma_{Tm\acute{a}x} =$	4 MPa

Bordo superior da seção

$\sigma_{Cm\acute{m}n} =$	-20 MPa
$\sigma_{Tm\acute{m}n} =$	4 MPa

Tabela 12 - Quadro final de tensões após a alteração do fck

Seção	Tensão (MPa)		pp	prot i	σ_p	perdas	σ_a
S1	σ_i	p	0,0	-7,3	0,0	1,3	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-6,0	-6,0
	σ_s	p	0,0	-7,3	0,0	1,3	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-6,0	-6,0
S2	σ_i	p	2,5	-10,5	1,3	1,9	3,3
		Σ	-	-8,0	-6,7	-4,8	-1,6
	σ_s	p	-2,2	-4,6	-1,2	0,8	-2,9
		Σ	-	-6,8	-8,0	-7,2	-10,1
S3	σ_i	p	4,4	-14,0	2,3	2,6	5,8
		Σ	-	-9,6	-7,2	-4,6	1,2
	σ_s	p	-4,0	-1,5	-2,1	0,3	-5,2
		Σ	-	-5,5	-7,6	-7,3	-12,6
S4	σ_i	p	5,8	-16,9	3,1	3,4	7,6
		Σ	-	-11,1	-8,1	-4,7	2,9
	σ_s	p	-5,2	1,1	-2,8	-0,2	-6,9
		Σ	-	-4,1	-6,9	-7,1	-14,0
S5	σ_i	p	6,6	-19,9	3,5	4,5	8,7
		Σ	-	-13,3	-9,8	-5,3	3,4
	σ_s	p	-6,0	3,7	-3,1	-0,8	-7,9
		Σ	-	-2,2	-5,4	-6,2	-14,1
S6	σ_i	p	6,9	-21,3	3,6	5,1	9,1
		Σ	-	-14,5	-10,8	-5,7	3,3
	σ_s	p	-6,2	4,9	-3,3	-1,2	-8,2
		Σ	-	-1,3	-4,6	-5,8	-13,9

5.8 Dimensionamento dos estribos

A máxima força cortante em uma viga bi-apoiada ocorre na região dos apoios e é equivalente a $V_{sd} = \frac{qL}{2}$.

	Vsd (t)
pp	19,7
g	10,4
q	26,0

Podemos obter graficamente os ângulos de saída dos cabos na seção do apoio, onde ocorrem estes momentos máximos:

$$\alpha_{Med} = \frac{(4,4 + 4,0 + 3,1 + 1,8 + 0,9)}{5} = 2,8 \text{ graus}$$

$$Nméd, S1 = 3665kN$$

$$V_p = 3665 \text{sen} \alpha = 179kN = 17,9t$$

O valor que a protensão faz na vertical está no sentido contrário a força de cisalhamento, ou seja, ela reduz a força cortante na seção.

$$V_{Sd} = 1,4V_{g+q} - 0,9V_P$$

$$V_{Sd} = 1,4(19,7 + 10,4 + 26,0) - 0,9(17,9) = 62,5t$$

$$b_w = b - 2/3 \Sigma\phi = 0,15 - 2/3 \times 0,05 = 0,12m$$

$$d = 1,15m$$

$$\tau_{wd} = \frac{V_{Sd}}{b_w d} = \frac{62,5}{0,12 \times 1,15} = 466 t/m^2 = 4,66MPa$$

$$\tau_{wd2} = 0,27 \left(1 - \frac{fck}{250}\right) fcd = 0,27 \left(1 - \frac{40}{250}\right) \frac{40}{1,4} = 6,48MPa = 0,648kN/cm^2$$

Como o valor da tensão convencional máxima de cisalhamento é maior que o valor de τ_{wd} , o concreto foi verificado, ou seja, a biela comprimida de concreto não romperá.

$$\tau_{wd2} = 0,27 \left(1 - \frac{fck}{250}\right) fcd = 0,27 \left(1 - \frac{40}{250}\right) \frac{40}{1,4} = 6,48MPa = 0,648kN/cm^2$$

$$\tau_{c0} = 0,009 fck^{2/3} = 0,009 \times 40^{2/3} = 1,05MPa = 0,105kN/cm^2$$

$$\rho_w = 100 \frac{\tau_{wd} - \tau_{c0}}{39,15} = 100 \frac{0,466 - 0,105}{39,15} = 0,922kN/cm^2 > \rho_{w,min} = 0,140kN/cm^2$$

$$A_{Sw} = \rho_w b_w = 0,922 \times 12 = 11,07cm^2/m$$

$$\frac{A_{Sw}}{2} = \frac{11,07}{2} = 5,53cm^2/m \rightarrow s = \frac{100}{5,53/0,785} = 14,2cm \rightarrow \phi 10c/14cm$$

Adotar $\phi 10c/14cm$

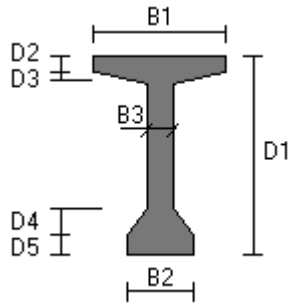
5.9 Resultados da planilha de dimensionamento de vigas isostáticas

1-Dados da estrutura

Viga bi-apoiada

Vão L=	26,0 m
fck=	40 MPa

2-Propriedades geométricas



B1=	110 cm
B2=	70 cm
B3=	15 cm
D1=	125 cm
D2=	20 cm
D3=	5 cm
D4=	15 cm
D5=	30 cm

n	yn (cm)	An (cm ²)	ynAn(cm ³)
1	115,0	2200	253000,0
2	103,3	237,5	24541,7
3	67,5	1125	75937,5
4	35,0	412,5	14437,5
5	15,0	2100	31500,0
	Σ=	6075	399416,7

SEM LAJE	
Área	0,6075 m ²
yi	0,66 m
ys	0,59 m
Inércia	0,1224 m ⁴
Wi	0,1861 m ³
Ws	0,2065 m ³
M _{g+q}	2366,00
Wi,nec	0,0959 m ³

3-Análise Estrutural

	PP viga	Envoltória
M	1283,34kNm	3649,34kNm
si	6,89 MPa	19,61 MPa
ss	6,21 MPa	17,67 MPa
P	1481 kN	4212 kN

r (CG cabos)	e
10cm	0,56m
Nc	
120 kN	
Nc	
7 ϕ 12,5	

3.1 - Esforços do Momento Fletor

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
	0	2,6	5,2	7,8	10,4	13
PP viga	0	462	821	1078	1232	1283
PP viga+laje	0	243	433	568	649	676
Envoltória	0	608	1082	1420	1622	1690

3.2 - Tensões dos carregamentos nas seções

	S1		S2		S3		S4		S5		S6	
	σ_i	σ_s	σ_i	σ_s	σ_i	σ_s	σ_i	σ_s	σ_i	σ_s	σ_i	σ_s
PP viga	0,0	0,0	2,5	2,2	4,4	4,0	5,8	5,2	6,6	6,0	6,9	6,2
PP viga+laje	0,0	0,0	1,3	1,2	2,3	2,1	3,1	2,8	3,5	3,1	3,6	3,3
Envoltória	0,0	0,0	3,3	2,9	5,8	5,2	7,6	6,9	8,7	7,9	9,1	8,2

3.3 - Excentricidades dos cabos em relação ao topo da viga e cabo equivalente

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Cabo C1	14	34	56	76	98	112
Cabo C2	34	52	70	87	106	112
Cabo C3	59	73	85	101	114	117
Cabo C4	84	92	102	110	117	117
Cabo C5	104	108	115	115	117	117
Cabo Equivalente	59	72	86	98	110	115

4-Perdas por atrito

4.1 - Ângulos médios

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
α	2,9	3,0	2,9	2,6	1,9	0,0

4.2 - Resumo das perdas por atrito

f _{ptk} (MPa)	σ_0 (MPa)	μ	k
1900	1406	0,20	0,002

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
l (m)	0,00	2,60	5,20	7,80	10,40	13,00
$\Sigma\alpha$ (°)	0,00	0,11	0,22	0,44	1,21	3,08
$(\mu\Sigma\alpha+kl)$ (rad)	0,000	0,006	0,011	0,017	0,025	0,037
σ (MPa)	1406	1398	1390	1382	1371	1355

5-Perdas por cravação

δ	Ea	U
0,005	200000	500

Trecho	S1-S2	S1-S3	S1-S4	S1-S5	S1-S6	>S6
Δ	10,18	40,54	94,31	193,14	380,31	9,21
Tensão na linha de simetria		1346,05				
	S1	S2	S3	S4	S5	S6
P.Crav (MPa)	1286	1294	1302	1310	1321	1337

6-Perdas por deformação imediata do concreto

s (CP)	t (dias)	β_t	fckj (MPa)	Eci	Eci(t=7)	Área _{Condoalhas}	n° Cabos
0,20	7	0,82	32,7	35417,5	32047,1	35	5

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	4530	4557	4585	4614	4652	4708
e (cm)	0,00	0,13	0,27	0,39	0,51	0,56
Mpp	0	462	821	1078	1232	1283
σ_c (MPa)	-7,46	-7,64	-8,47	-9,89	-12,41	-13,95
ε	-2,33E-04	-2,38E-04	-2,64E-04	-3,09E-04	-3,87E-04	-4,35E-04
$\Delta\sigma_a$ (MPa)	-19	-19	-21	-25	-31	-35
σ_a (MPa)	1267	1275	1281	1285	1290	1302

7-Perdas por fluência do concreto

t ₀ (dias)	Umidade (%)	Umidade (%)	u	Espessura fictícia	φ	
30	75	75	5,48	22,16	2,2	
	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN)	4464	4490	4510	4527	4543	4586
σ_c (MPa)	-7,35	-7,52	-8,30	-9,64	-12,00	-13,43
ε	-5,04E-04	-5,16E-04	-5,70E-04	-6,62E-04	-8,24E-04	-9,22E-04
$\Delta\sigma_a$ (MPa)	-101	-103	-114	-132	-165	-184
σ_a (MPa)	1167	1172	1167	1153	1125	1118

8-Perda por retração do concreto

ε_{cs} (‰)	$\Delta\sigma_a$ (MPa)
-0,33	-66

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
σ_a (MPa)	1101	1106	1101	1087	1059	1052

9-Perda por relaxação do aço

$\Delta\sigma_a$ (MPa)
-60

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
σ_a (MPa)	1041	1046	1041	1027	999	992

10-Tensões após todas as perdas

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
Perda por atrito (MPa)	1406	1398	1390	1382	1371	1355
Perda por cravação (MPa)	1286	1294	1302	1310	1321	1337
Perda por deformação imediata (MPa)	1267	1275	1281	1285	1290	1302
Perda por fluência do concreto (MPa)	1167	1154	1148	1127	1090	1087
Perda por retração (MPa)	1101	1106	1101	1087	1059	1052
Perda por relaxação do aço (MPa)	1041	1046	1041	1027	999	992
Tensão após perdas imediatas(MPa)	1267	1275	1281	1285	1290	1302
Perdas Lentas Total (MPa)	-227	-229	-240	-258	-291	-310

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
N (kN) Após perdas	4464	4490	4510	4527	4543	4586
ΔN (kN) Perdas lentas	-799	-807	-845	-910	-1024	-1093

Seção	S1	S2	S3	S4	S5	S6
η_i (MPa)	-7,3	-10,5	-14,0	-16,9	-19,9	-21,3
η_s (MPa)	-7,3	-4,6	-1,5	1,1	3,7	4,9
$\Delta\eta_i$ (MPa)	1,3	1,9	2,6	3,4	4,5	5,1
$\Delta\eta_s$ (MPa)	1,3	0,8	0,3	-0,2	-0,8	-1,2

Bordo inferior da seção

$\sigma_{cm\acute{a}x} =$	-27 MPa
$\sigma_{Tm\acute{a}x} =$	4 MPa

Bordo superior da seção

$\sigma_{Cm\acute{i}n} =$	-20 MPa
$\sigma_{Tm\acute{i}n} =$	4 MPa

Seção	Tensão (MPa)		pp	prot i	σ_p	perdas	σ_a
S1	σ_i	p	0,0	-7,3	0,0	1,3	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-6,0	-6,0
	σ_s	p	0,0	-7,3	0,0	1,3	0,0
		Σ	-	-7,3	-7,3	-6,0	-6,0
S2	σ_i	p	2,5	-10,5	1,3	1,9	3,3
		Σ	-	-8,0	-6,7	-4,8	-1,6
	σ_s	p	-2,2	-4,6	-1,2	0,8	-2,9
		Σ	-	-6,8	-8,0	-7,2	-10,1
S3	σ_i	p	4,4	-14,0	2,3	2,6	5,8
		Σ	-	-9,6	-7,2	-4,6	1,2
	σ_s	p	-4,0	-1,5	-2,1	0,3	-5,2
		Σ	-	-5,5	-7,6	-7,3	-12,6
S4	σ_i	p	5,8	-16,9	3,1	3,4	7,6
		Σ	-	-11,1	-8,1	-4,7	2,9
	σ_s	p	-5,2	1,1	-2,8	-0,2	-6,9
		Σ	-	-4,1	-6,9	-7,1	-14,0
S5	σ_i	p	6,6	-19,9	3,5	4,5	8,7
		Σ	-	-13,3	-9,8	-5,3	3,4
	σ_s	p	-6,0	3,7	-3,1	-0,8	-7,9
		Σ	-	-2,2	-5,4	-6,2	-14,1
S6	σ_i	p	6,9	-21,3	3,6	5,1	9,1
		Σ	-	-14,5	-10,8	-5,7	3,3
	σ_s	p	-6,2	4,9	-3,3	-1,2	-8,2
		Σ	-	-1,3	-4,6	-5,8	-13,9

11-Cálculo ao cisalhamento

$\alpha_{méd}$	2,8
$N_{méd,S1}$	3665 kN
V_p	-17,9 t
V_{pp+g+q}	56,1 t
V_{Pd}	-16,1 t
V_{Sd}	62,5 t
b_w	0,12 m
d	1,15 m
τ_{wd}	4,66 MPa
τ_{wd2}	6,48 MPa
τ_{c0}	1,05 MPa
ρ_w	9,21 MPa
A_{sw}	5,37 cm ² /m
Diâmetro	10
Espaçamento	14,82cm

Compressão na biela verificada

> ρ_{wmin}

Adotar $\phi 10c/14$

6 Conclusão

Ao longo deste estudo, realizou-se os devidos cálculos e verificações para dimensionar uma viga isostática protendida bem como lançou-se luzes sobre os conceitos de protensão, perdas imediatas e diferidas e análise final da viga após as referidas perdas, sem, todavia, almejar esgotar a temática. Salienta-se tratar de estudo introdutório, porém importante, visto que significativa parte da doutrina acredita na subutilização do concreto protendido, e alerta sobre seus benefícios.

Nesse sentido, destaca-se a existência de vasta área de estudos relativos ao tema do concreto protendido, sendo válido mencionar: a análise de vigas isostáticas protendidas sob carregamento de trens-tipo rodoviário e ferroviário, protensão em reservatórios, cálculo de vigas hiperestáticas, comparação entre vigas de concreto armado e protendido e protensão em vigas caixão.

No presente trabalho, apresentou-se um passo a passo de cálculo realizado através de um estudo de caso, em prol de elucidar parte do tema para que mais pessoas se interessem pelo mesmo e desenvolvam seus estudos na área. Além disso elaborou-se uma planilha de cálculo para facilitar futuros cálculos que abordem o tema.

7 Bibliografia

ABNT NBR 6118:2014 – **Projeto de estruturas de concreto**. 2014.

ABNT NBR 7187:2003 – **Projeto de pontes de concreto armado e concreto protendido**. 2003.

DUARTE, Evandro – **Cálculo Completo de uma viga isostática protendida** – Apostila, 1995.

DUARTE, Evandro - **Projeto e cálculo de uma viga isostática de concreto protendido** – Revista Concreto e Construções nº78, 2015.

THOMAZ, Eduardo – **Levantamento de dimensões de pontes pré-moldadas protendidas** – 1975.

THOMAZ, Eduardo – **Notas de aula de Concreto Protendido: Pontes pré-moldadas** – 2002 –IME, RJ.

RODRIGUES, Glauco – **Concreto Protendido** – Apostila, 2008.