

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**

**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM**  
**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE**  
**CONCRETO ARMADO E AÇO**

**ESTUDO DOS CRITÉRIOS DE PARAMETRIZAÇÃO DO MODELO DE**  
**GRELHA PARA O CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO**  
**ARMADO**

**GABRIELA BORIM LEITE**

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE  
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E AÇO

**ESTUDO DOS CRITÉRIOS DE PARAMETRIZAÇÃO DO MODELO DE  
GRELHA PARA O CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO  
ARMADO**

GABRIELA BORIM LEITE

Trabalho Final apresentado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e Aço".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Ney Amorim Silva, D.Sc.  
DEES – UFMG (Orientador)

---

Prof. Sebastião Salvador Real Pereira, D.Sc.  
DEES – UFMG

Belo Horizonte, 20 de dezembro de 2017

## RESUMO

A análise estrutural deve ser realizada através do modelo numérico que melhor represente o comportamento real da estrutura, sendo fundamental a adoção de parâmetros que conduzam a resultados confiáveis, precisos e realistas. Dentre os processos utilizados para análise de lajes maciças destaca-se o Método de Analogia de Grelha, que consiste em substituir a laje por uma malha equivalente de barras que se cruzam para simular seu comportamento. Neste trabalho serão estudados os momentos fletores das lajes de um pavimento discretizado em elementos de grelha através do *software* CAD/TQS<sup>®</sup>. O objetivo é verificar a influência de parâmetros como o espaçamento da malha, a rigidez a torção dos elementos de grelha e a rigidez da vinculação com os apoios.

Palavras-Chave: Análise Estrutural; Lajes Maciças; Método de Analogia de Grelha; Momentos Fletores; Parâmetros.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Laje maciça apoiada sobre vigas.....	11
Figura 2: Composição de uma laje com vigotas pré-fabricadas .....	11
Figura 3: Laje alveolar.....	12
Figura 4: Lajes nervuradas apoiadas sobre pilares .....	12
Figura 5: Influência da flexibilidade das vigas no modelo de lajes .....	16
Figura 6: Discretização da laje em elementos de grelha .....	18
Figura 7: Graus de liberdade de um nó de grelha.....	19
Figura 8: Comportamento de malhas com diferentes espaçamentos.....	20
Figura 9: Diagrama de momentos fletores sem redução da rigidez a torção.....	22
Figura 10: Janela para edição dos casos de carregamento.....	25
Figura 11: Janela para edição dos dados das barras de grelha.....	26
Figura 12: Representação gráfica das articulações .....	26
Figura 13: Representação gráfica do engastamento parcial .....	26
Figura 14: Representação gráfica das restrições ao deslocamento.....	27
Figura 15: Janela para inserção dos dados de restrições de apoio.....	27
Figura 16: Visualizador de esforços e transferência para detalhamento da laje.....	28
Figura 17: Planta de fôrma do pavimento de referência.....	30
Figura 18: Escolha do modelo estrutural do edifício.....	31
Figura 19: Escolha do modelo estrutural do pavimento .....	32
Figura 20: Distribuição de cargas modelo IV.....	32
Figura 21: Modelo de grelha para vinculação com apoio rígido.....	35
Figura 22: Visualizador de esforços para vinculação com apoio rígido.....	35
Figura 23: Modelo de grelha para vinculação com apoio elástico .....	36
Figura 24: Visualizador de esforços para vinculação com apoio elástico .....	36
Figura 25: Visualizador de esforços para modelo sem divisor de inércia a torção .....	39
Figura 26: Diagramas de esforços para modelo sem divisor de inércia à torção .....	39
Figura 27: Visualizador de esforços para modelo com divisor 2 de inércia à torção.....	40
Figura 28: Diagramas de esforços para modelo com divisor 2 de inércia à torção.....	40
Figura 29: Visualizador de esforços para modelo com divisor 4 de inércia à torção.....	41

Figura 30: Diagramas de esforços para modelo com divisor 4 de inércia à torção.....	41
Figura 31: Visualizador de esforços para modelo com divisor 100 de inércia à torção.....	42
Figura 32: Diagramas de esforços para modelo com divisor 100 de inércia à torção.....	42
Figura 33: Modelo de grelha espaçamento 100 x 100 cm.....	47
Figura 34: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 100 x 100 cm.....	47
Figura 35: Modelo de grelha espaçamento 50 x 50 cm.....	48
Figura 36: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 50x50 cm.....	48
Figura 37: Modelo de grelha espaçamento 33,3x33,3 cm.....	49
Figura 38: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 33,3x33,3 cm.....	49
Figura 39: Modelo de grelha espaçamento 25 x 25 cm.....	50
Figura 40: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 25 x 25 cm.....	50
Figura 41: Modelo de grelha espaçamento 10x10 cm.....	51
Figura 42: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 10x10 cm.....	51

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Convenções gráficas para vinculações de lajes .....	13
Quadro 2: Momentos fletores negativos máximos na laje para modelo de grelha com apoio elástico e apoio rígido.....	37
Quadro 3: Momentos fletores máximos na última barra para modelo de grelha com diferentes divisores de inércia à torção .....	43
Quadro 4: Momentos fletores máximos na laje para modelo de grelha com diferentes divisores de inércia à torção.....	43
Quadro 5: Momentos fletores positivos máximos na laje para modelo de grelha com diferentes espaçamentos .....	52
Quadro 6: Momentos fletores negativos máximos na laje para modelo de grelha com diferentes espaçamentos .....	52

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2.</b>	<b>OBJETIVO</b>	<b>9</b>
<b>3.</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>10</b>
<b>3.1</b>	<b>Classificação das Lajes</b>	<b>10</b>
<b>3.1.1</b>	<b>Principais tipos de lajes</b>	<b>10</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Tipos de apoios</b>	<b>13</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Condições de vinculação</b>	<b>13</b>
<b>3.2</b>	<b>Métodos de Análise</b>	<b>13</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Método elástico</b>	<b>14</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Método rígido-plástico</b>	<b>14</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Análise linear</b>	<b>15</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Análise não-linear</b>	<b>15</b>
<b>3.3</b>	<b>Métodos de Dimensionamento</b>	<b>15</b>
<b>3.4</b>	<b>Método de Analogia de Grelha</b>	<b>18</b>
<b>4.</b>	<b>MODELO DE GRELHA - CAD/TQS<sup>®</sup></b>	<b>24</b>
<b>4.1</b>	<b>Carregamentos</b>	<b>24</b>
<b>4.2</b>	<b>Convenções de Desenho</b>	<b>25</b>
<b>4.3</b>	<b>Visualizador de Esforços</b>	<b>28</b>
<b>5.</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>30</b>
<b>5.1</b>	<b>Pavimento de Referência</b>	<b>30</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Dados gerais das lajes</b>	<b>31</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Modelo de cálculo (CAD/TQS<sup>®</sup>)</b>	<b>31</b>
<b>6.</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>34</b>
<b>6.1</b>	<b>Rigidez da Vinculação com os Apoios</b>	<b>34</b>
<b>6.2</b>	<b>Inércia à Torção das Barras</b>	<b>38</b>
<b>6.3</b>	<b>Espaçamento da malha</b>	<b>45</b>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As lajes são elementos planos bidimensionais responsáveis por receber a maioria das cargas verticais de um pavimento, como por exemplo, o peso de pessoas, mobiliários, revestimentos e alvenarias. Além de suportar as ações decorrentes de seu peso e uso, as lajes têm a função de distribuir estas cargas para os apoios.

O cálculo, dimensionamento e detalhamento de lajes, durante muitos anos, foram feitos manualmente e de maneira simplificada. Nesta época, eram utilizadas tabelas de métodos aproximados para calcular os momentos fletores de lajes retangulares e as reações das mesmas nas vigas. Além de demandar uma grande quantidade de tempo as tabelas podem levar a resultados muito distintos do comportamento real do pavimento, pois consideram as lajes como elementos isolados e apoiados em vigas indeformáveis, sendo que a interação entre as diversas lajes de um pavimento é considerada supondo um engastamento perfeito ou através da compatibilização de momentos na região do apoio.

A busca de um modelo numérico que gere esforços e deformações condizentes com o comportamento real da estrutura é de extrema importância, uma vez que tem influência direta na segurança da estrutura, no conforto dos usuários e no consumo dos materiais utilizados na construção.

Com o avanço tecnológico e o desenvolvimento de *softwares* voltados para o cálculo estrutural foi possível realizar análises mais refinadas e, foi através da resolução computacional de diversas equações simultâneas que o comportamento do pavimento como um todo pôde ser avaliado, o que levou a um resultado muito mais próximo do real funcionamento da estrutura. Existem diversos *softwares* que utilizam diferentes métodos de análise e dimensionamento de lajes, um dos processos mais utilizados é o Método de Analogia de Grelha.

O Método de Analogia de Grelha consiste em um modelo que permite a avaliação do comportamento de um piso através da discretização das lajes em uma malha de barras sujeita a atuação do carregamento vertical. O modelo possui diversas características que tornam a obtenção de resultados mais compatíveis com a realidade, sendo fundamental a adoção de



critérios de geração da malha que levem em consideração parâmetros do funcionamento da estrutura para a obtenção de resultados com a precisão adequada.

Devido à grande quantidade de variáveis relacionadas a esse método, é preciso avaliar suas influências, já que se aplicadas de forma errônea podem distorcer o comportamento do modelo, conduzindo a resultados discrepantes da realidade, e algumas vezes, contra a segurança. Deste modo será feita, utilizando o *software* CAD/TQS<sup>®</sup>, uma análise comparativa dos esforços finais de um pavimento, através da alteração de critérios de grande relevância, como: a distância entre as barras do modelo, a rigidez da vinculação das barras com os apoios e as características dos materiais atribuídos às barras.

Todo modelo numérico possui limitações, pois se trata de uma aproximação da estrutura real feita através da adoção de inúmeras hipóteses simplificadoras, sendo indispensável a análise e validação dos resultados apresentados por um Engenheiro.

## **2 OBJETIVO**

O principal objetivo deste trabalho é, utilizando o Método de Analogia de Grelha, analisar as mudanças no comportamento das lajes para diversas considerações e parâmetros adotados. O estudo será feito através da comparação dos valores dos momentos fletores de um pavimento para diferentes critérios, alterando a rigidez da vinculação das barras com os apoios, o refinamento da malha e a rigidez à torção das barras, a fim de analisar a influência desses parâmetros na obtenção de resultados mais próximos do real comportamento da laje.

### **3 REVISÃO DA LITERATURA**

As lajes estão sujeitas principalmente a ações normais a seu plano e têm a função de receber as cargas referentes ao seu peso e a utilização do pavimento e distribuí-las para os apoios.

Sob o ponto de vista estrutural, lajes são placas de concreto de superfície plana, em que a dimensão perpendicular à superfície (espessura) é bastante inferior às demais (largura e comprimento). Segundo a NBR 6118:2014 as placas são definidas como “Elementos de superfície plana sujeitos principalmente a ações normais ao seu plano. As placas de concreto são usualmente denominadas lajes.”

#### **3.1 Classificação das Lajes**

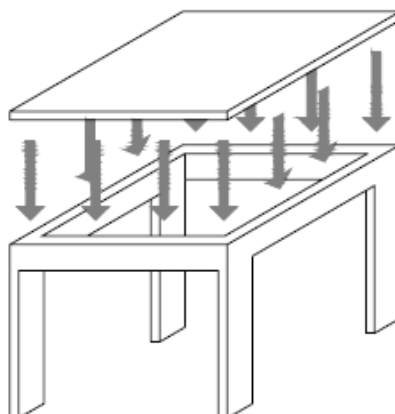
As lajes podem ser diferenciadas por sua forma (de contorno poligonal ou circular, maciça ou com espaços vazios), pelo tipo de apoio (alvenaria, vigas ou pilares), pela condição de vinculação com o apoio (apoio simples, engastamento ou bordo livre), quanto à sua natureza (maciça, nervurada ou pré-fabricada) e quanto ao tipo de armação (unidirecional ou bidirecional). As lajes também podem estar submetidas a diferentes tipos de carga, como por exemplo: carga pontual, uniforme, triangular, etc.

##### **3.1.1 Principais tipos de lajes**

Os tipos de lajes mais utilizados são as maciças, as pré-fabricadas e as nervuradas. Suas principais características são:

- **Maciças:** são as lajes mais utilizadas nos pavimentos de edifícios. Possuem toda a sua espessura composta por concreto, acrescido por armaduras longitudinais de flexão e em alguns casos, armaduras transversais (BASTOS, 2005). As lajes maciças podem ser armadas em uma ou duas direções dependendo da relação entre seus lados, sendo uma de suas grandes vantagens o fato de distribuir suas reações em todas as vigas de contorno. Na Figura 1 temos uma ilustração de uma laje maciça apoiada sobre vigas.

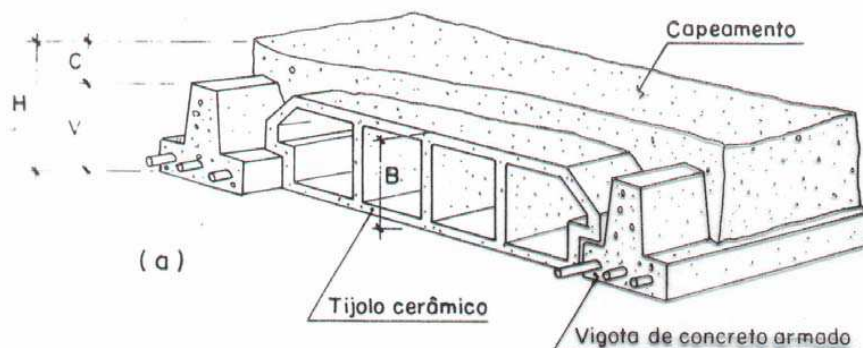
Figura 1: Laje maciça apoiada sobre vigas



Fonte: BARBOZA (2008)

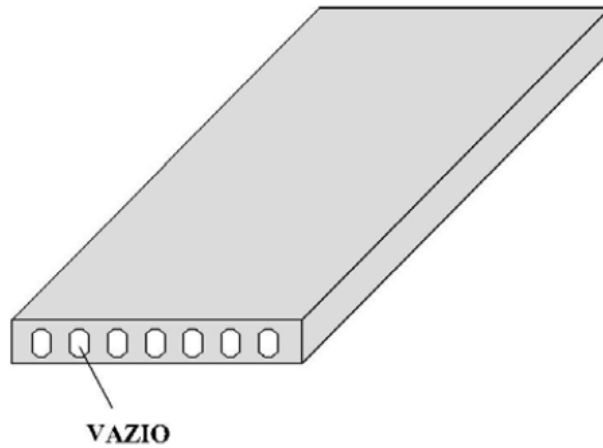
- Pré-fabricadas: são lajes em que pelo menos um de seus elementos foi executado no canteiro de uma fábrica. Devido a seu processo construtivo, as lajes pré-fabricadas normalmente são apoiadas em apenas uma direção, de preferência a de menor vão, concentrando toda a carga nas vigas em que se apoiam. A mais utilizada é formada por elementos pré-moldados denominados de vigotas (trilho de concreto armado/protendido ou treliça), por lajotas (normalmente cerâmicas) e por uma capa de concreto moldado no local (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2014), como pode ser visto na Figura 2. Também existem as lajes alveolares que são constituídas por painéis de concreto protendido em que sua seção transversal é composta por alvéolos longitudinais, que são responsáveis por reduzir o peso da peça (FIGURA 3).

Figura 2: Composição de uma laje com vigotas pré-fabricadas



Fonte: BARBOZA (2008)

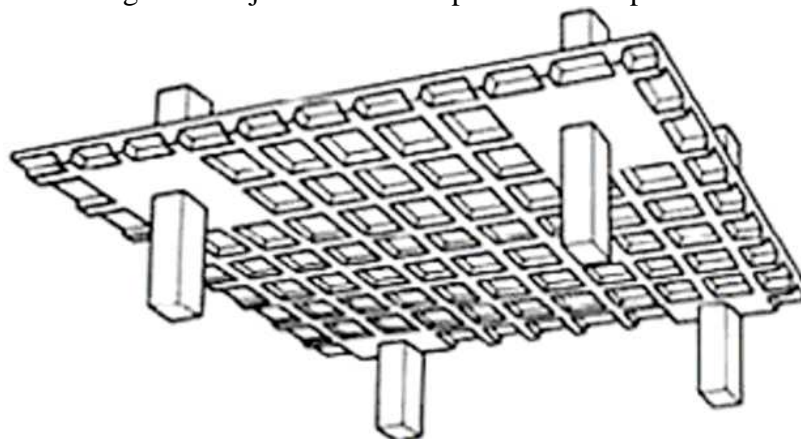
Figura 3: Laje alveolar



Fonte: BARBOZA (2008)

- Nervuradas: A laje nervurada é constituída por vigas (nervuras) que se cruzam e são solidarizadas através de uma mesa, formando uma laje de pequena espessura sobre uma estrutura de grelha. Os espaços entre essas nervuras podem ou não ser preenchidos com materiais inertes leves, como blocos cerâmicos, blocos de concreto ou blocos de EPS (isopor). Segundo Silva (2015) os pavimentos em lajes nervuras possuem uma grande economia no consumo de concreto já que elimina o uso desnecessário na região tracionada. Um exemplo de laje nervurada apoiada sobre pilares pode ser visto na Figura 4.

Figura 4: Lajes nervuradas apoiadas sobre pilares



Fonte: BARBOZA (2008)

### 3.1.2 Tipos de apoios

Existem, de forma geral, três tipos de apoio para lajes: as paredes de alvenaria, as vigas e os pilares, sendo mais comum apoiar as lajes em vigas. Para determinar os esforços solicitantes e as deformadas das lajes é preciso estabelecer o tipo de apoio, podendo ser pontuais (normalmente utilizados para simular pilares) ou contínuos (usados para simular vigas e paredes).

### 3.1.3 Condições de vinculação

Para o cálculo dos esforços solicitantes e das deformadas das lajes é preciso estabelecer a condição de vinculação das mesmas com seus apoios, podendo estar simplesmente apoiada, engastada ou com a borda livre. A borda livre é caracterizada pela ausência de apoio, já o engastamento é dado pela continuidade entre duas lajes vizinhas. Existem convenções gráficas para os diferentes tipos de apoio, como pode ser visto no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Convenções gráficas para vinculações de lajes

Borda livre	Borda simplesmente apoiada	Borda engastada
-----	—————	///////

Fonte: Debella (2015)

Segundo Cunha e Souza (1998) as lajes simplesmente apoiadas sofrem pequenas rotações em seus apoios, o que solicita as vigas à torção, como a mesma possui resistência desprezível a essa solicitação, o esforço irá causar a deformação do apoio. Os bordos livres apresentam deslocamentos verticais e rotações devido à ausência de apoio. Já nas lajes engastadas, as rotações são impedidas e o engastamento pode se dar de forma total ou parcial, sendo o engastamento total o que ocorre nas marquises engastadas em vigas e o engastamento parcial o que se dá em apoios intermediários devido à continuidade das lajes.

## 3.2 Métodos de Análise

Existem, basicamente, dois tipos de análise para o cálculo dos esforços de lajes maciças. Os métodos de ruptura, baseados na teoria da plasticidade, que consideram o comportamento não

linear do material e os métodos clássicos, fundamentados na teoria da elasticidade, que supõe que o material se comporta linearmente.

Na análise estrutural de edifícios de concreto armado devem ser levados em conta critérios importantes para simular de forma mais fiel possível o comportamento real da estrutura, sendo alguns deles a não-linearidade e heterogeneidade do material, os efeitos construtivos e a redistribuição dos esforços. Entretanto, estes critérios não são considerados em modelos puramente elásticos e, portanto, o uso de modelos sem adaptações deve ser evitado. Já os modelos numéricos, através da adoção de parâmetros adequados, representam de forma mais coerente o comportamento da estrutura.

### **3.2.1 Método elástico**

O Método Elástico consiste em analisar o comportamento da laje sob cargas de serviço com concreto não fissurado. Seus esforços podem ser determinados pela Teoria das Placas Delgadas de Kirchhoff, a qual é baseada nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal da placa e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo. Para utilizar o método devem ser adotadas algumas considerações simplificadoras sobre o material, considerando-o homogêneo, elástico, isotrópico, fisicamente linear e com pequenos deslocamentos. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014) os deslocamentos obtidos por este método são inferiores aos que ocorrem na realidade, já que a fissuração do concreto não é considerada.

### **3.2.2 Método rígido-plástico**

O Método Rígido-Plástico é baseado nos mecanismos de ruptura das lajes, admitindo-se que a ruína só ocorrerá com a formação de um conjunto de linhas de plastificação que tornariam a laje um sistema ou mecanismo hipostático. As linhas de plastificação são as zonas onde foi atingido o momento de plastificação e, nas lajes reais, correspondem às zonas de intensa fissuração da parte tracionada. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014) não é possível determinar os deslocamentos da estrutura em serviço através desse método, uma vez que após identificar a forma como a laje chegará ao colapso, seus esforços são calculados pelo Método das Charneiras Plásticas, também conhecido como método das linhas de ruptura.

### **3.2.3 Análise linear**

A análise linear considera que os materiais constituintes da estrutura possuem comportamento elástico-linear. A elasticidade é a capacidade que o elemento tem de se deformar ao receber ações externas e, voltar à configuração inicial, assim que essas ações forem retiradas. Já a linearidade diz respeito à proporcionalidade entre as deformações e à intensidade das ações externas. Considerando este método, as características geométricas dos elementos estruturais serão determinadas pela seção bruta do concreto.

### **3.2.4 Análise não-linear**

Segundo Kimura (2007) “em uma análise não linear, a resposta da estrutura tem um comportamento desproporcional ao acréscimo de cargas.”. Existem, basicamente, dois fatores responsáveis por esse comportamento: a alteração das propriedades dos materiais que compõe a estrutura, conhecida como não-linearidade física, e a alteração da geometria da estrutura, conhecida como não-linearidade geométrica. A não linearidade geométrica leva em consideração os efeitos de segunda ordem, decorrentes da análise da estrutura em sua posição deformada e, a não-linearidade física ocorre, principalmente, devido à fissuração, fluência e deformação plástica do concreto e ao escoamento das armaduras.

## **3.3 Métodos de Dimensionamento**

Segundo a NBR 6118/2014:

O objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço. A análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, em uma parte ou em toda a estrutura.

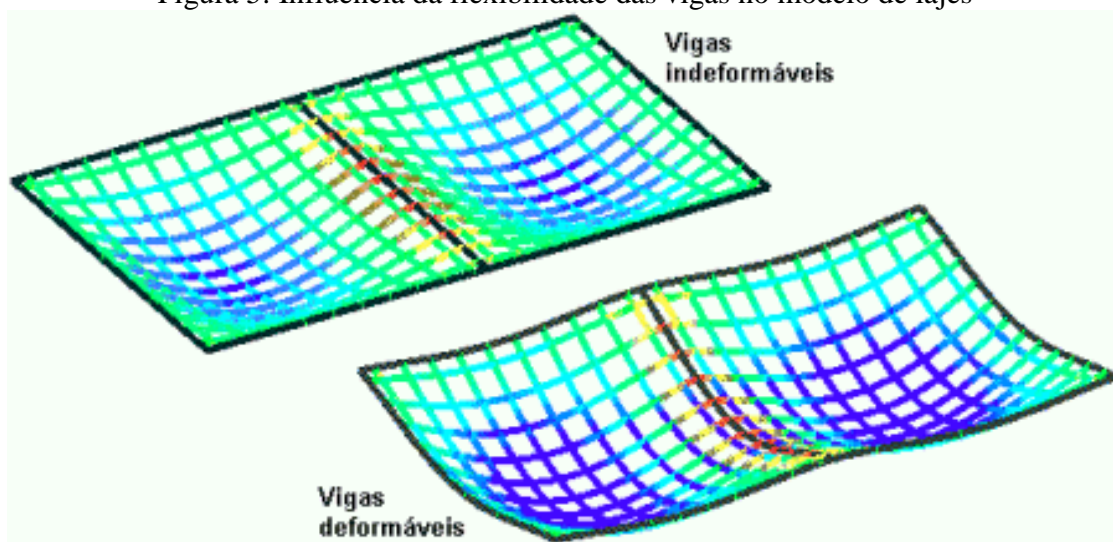
A análise estrutural é uma etapa de grande importância no desenvolvimento de um projeto, pois é a partir da determinação dos esforços solicitantes que o dimensionamento e detalhamento da estrutura são feitos, além de ser base para prever o comportamento da edificação em serviço. Existem diversos modelos para a análise de uma estrutura e a escolha deverá ser feita pelo que melhor representar o comportamento real da mesma.



Os métodos tradicionais para cálculo de lajes baseiam-se nos modelos elásticos, através da solução da equação diferencial que rege o comportamento da placa, também conhecido como Teoria das Placas. Porém, a solução analítica da equação só é possível para casos com condições de contorno e carregamentos simples, tornando-se assim uma solução limitada. Para solução de lajes mais complexas, que possuem solução inviável pela teoria da elasticidade, é preciso recorrer a procedimentos numéricos aproximados, viáveis apenas em computadores.

O cálculo de lajes foi feito por muito tempo através da utilização de tabelas, como as de Czerny, baseadas no método da elasticidade e efetuadas a partir da Teoria de Placas, com as quais os momentos fletores e deslocamentos máximos eram determinados. Além das limitações já citadas, referentes às condições de contorno e aos carregamentos, outra desvantagem desse método está na não consideração da interação da laje com o resto da estrutura, tanto em relação à dimensão e à rigidez das vigas e pilares, como em relação ao comportamento global do edifício, já que essas tabelas consideram, de forma simplificada, as lajes como isoladas sobre apoios indeformáveis. Em estruturas reais as lajes estão apoiadas sobre vigas flexíveis, o que altera a deformação da laje e, conseqüentemente, os esforços internos e as reações de apoio. A influência da flexibilidade das vigas está demonstrada na Figura 5 abaixo.

Figura 5: Influência da flexibilidade das vigas no modelo de lajes



Fonte: Banki (2013)

Outra importante característica das estruturas de concreto armado que não é levada em consideração nos modelos de análise elástica e linear é a capacidade de redistribuição de esforços, que consiste na alteração da distribuição dos esforços de uma estrutura devido à variação da rigidez de seus elementos. As estruturas de concreto armado estão propensas a plastificar, isto é, em determinadas condições e certas regiões, o concreto pode fissurar ou a armadura pode atingir o patamar de escoamento, alterando assim a rigidez dos elementos. Dessa maneira, se parte da estrutura não é capaz de absorver totalmente os esforços atuantes, a parcela não absorvida migrará para outra parte capaz de absorvê-lo.

Com o avanço da tecnologia e o desenvolvimento de *softwares* com grande poder de processamento, é possível resolver um grande volume de equações simultâneas, o que torna possível a análise de um pavimento como um todo, considerando a influência de uma laje nas lajes vizinhas e também a flexibilidade dos apoios.

Existem vários métodos para analisar e dimensionar lajes, os mais utilizados são:

- Resolução por Meio de Séries (Método Clássico): A resolução por Meio de Séries consiste na obtenção dos esforços e deslocamentos de lajes isoladas pelo Método Elástico. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), o cálculo de lajes maciças de concreto armado a partir do método de séries constitui na substituição dos valores de carga por uma série formada de funções trigonométricas, obtendo assim uma solução para a integração da equação fundamental da Teoria das Placas. A complexidade dessa solução motivou o surgimento de diversas tabelas com coeficientes para o cálculo de momentos fletores e flechas para casos específicos de carregamento e condições de apoio. Para utilização deste método, cada laje deve ser tratada de forma individual, levando em consideração sua vinculação com as lajes vizinhas (bordas simplesmente apoiadas, engastadas ou livres) e, posteriormente, devem ser aplicados critérios de correção para compatibilizar os esforços devido à continuidade das lajes.
- Método dos Elementos Finitos: O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico utilizado na análise de inúmeros tipos de estruturas. Para o cálculo de lajes é realizada a divisão da placa em elementos de pequenas dimensões finitas, denominados

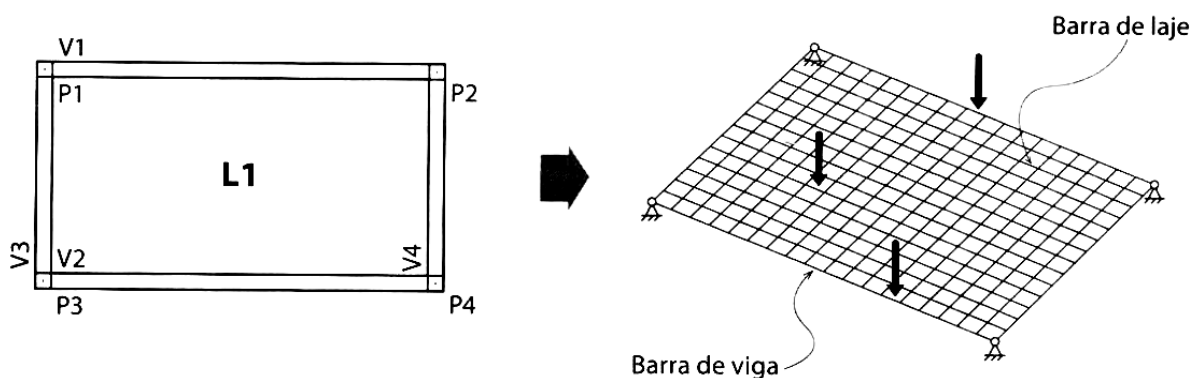
elementos finitos, conectados por pontos nodais, sendo o conjunto denominado de malha de elementos finitos. Cada elemento finito tem um comportamento pré-definido através de seus parâmetros, e quando superpostos aos demais elementos da malha simulam o comportamento da estrutura. O procedimento geral de análise consiste em concentrar a carga nos nós dos elementos e estabelecer o deslocamento e a continuidade das rotações em cada ponto nodal, no intuito de satisfazer as equações de equilíbrio e as condições de contorno impostas. Depois de obtida uma solução aproximada para o deslocamento, é feito o cálculo de todas as outras grandezas envolvidas no comportamento da laje, através da aplicação das condições de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio.

- Método de Analogia de Grelha: Por se tratar do método a ser utilizado neste trabalho o mesmo será descrito de forma mais detalhada na subseção a seguir.

### 3.4 Método de Analogia de Grelha

O Método de Analogia de Grelha consiste na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente, que corresponde a uma série ortogonal de barras, dispostas no plano horizontal, que representam os elementos estruturais do pavimento (vigas e lajes). Nesse método os pilares são considerados como apoios indeformáveis. Um exemplo da discretização da laje em elementos de barra pode ser visto na Figura 6.

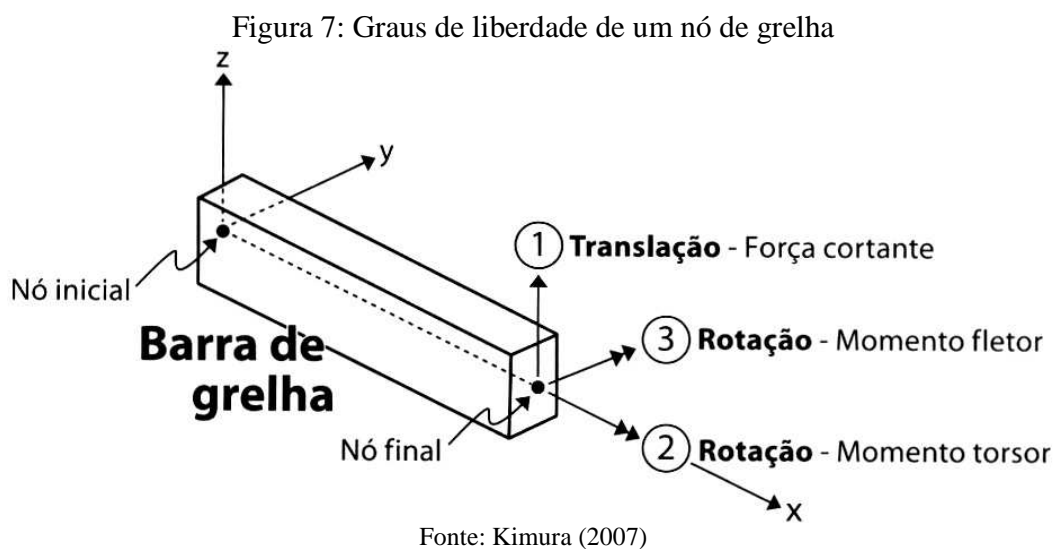
Figura 6: Discretização da laje em elementos de grelha



Fonte: Kimura (2007)

Cada painel de laje é discretizado em várias faixas de largura determinada. Essas faixas são substituídas por elementos de barras em seus eixos, dessa maneira cada barra irá representar um trecho do pavimento.

As grelhas são estruturas planas, formadas por elementos de barras que recebem cargas perpendiculares ao seu plano. Em cada interseção de barras é definido um nó com três graus de liberdade (FIGURA 7), uma translação e duas rotações, através dos quais é feita a determinação dos deslocamentos e dos esforços atuantes (momento fletor, momento de torção e força cortante).

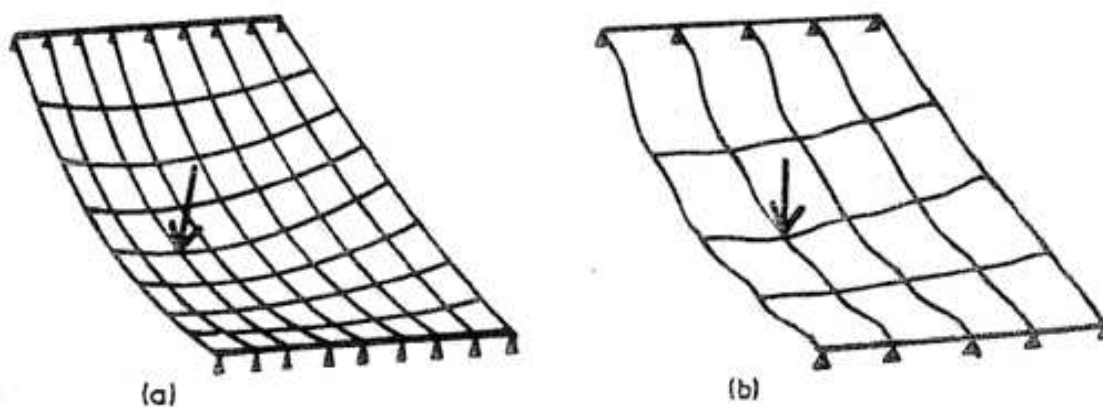


A discretização de um pavimento em uma malha de grelha pode ser feita para lajes com praticamente qualquer geometria. Uma etapa importante na geração da malha para um correto dimensionamento e detalhamento está na escolha do espaçamento das barras, na escolha das características das barras, principalmente a inércia a flexão e a torção, e na correta atribuição das condições de contorno e rigidez das vinculações com os apoios.

Como as lajes podem possuir formas variadas, tipos de carregamento e condições de contorno diferentes, não existe uma formulação padrão para o espaçamento das barras. Segundo Hambly (1976) quanto menores forem os espaçamentos entre as barras e, portanto, mais densa a malha, melhores serão os resultados obtidos, entretanto, essa melhora para de acontecer quando a largura das barras for menor que a espessura da placa.

Isso acontece, pois, não existe princípio físico ou matemático no modelo de grelha que garanta que os momentos de torção e as distorções angulares em determinado ponto sejam iguais nas duas direções ortogonais. Porém, quanto mais refinada for a malha, mais as curvaturas das barras se aproximam e, desta maneira, a grelha irá se deformar como uma superfície lisa, o que leva a resultados mais próximos do comportamento real da estrutura, como pode ser visto na Figura 8. A interrupção desta melhora no comportamento do modelo quando são adotados espaçamentos menores que a espessura da laje ocorre devido a rigidez a torção das barras, que diminui significativamente para malhas pouco espaçadas.

Figura 8: Comportamento de malhas com diferentes espaçamentos



Fonte: Neves (2010)

Os parâmetros de rigidez a torção e a flexão têm grande influência nos esforços e deslocamentos resultantes, portanto a escolha dessas propriedades deve ser feita de modo que se represente da forma mais fiel possível o comportamento da laje que está sendo modelada. De acordo com Carvalho e Figueiredo Filho (2014) o cálculo da inércia à flexão ( $I_f$ ) das barras é feito a partir da equação da resistência dos materiais para seções retangulares, considerando uma faixa de largura “b” (dada pela soma da metade dos espaços entre elementos vizinhos) e altura “h” (espessura da placa). Desta maneira, para um elemento de barra temos que a inércia à flexão,  $I_f$ , dado pela Equação 1:

$$I_f = \frac{b \times h^3}{12} \quad (1)$$

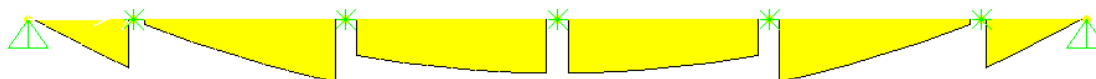
De acordo com Stramandinoli e Loriggio (2003), o momento de inércia à torção não é simplesmente uma propriedade geométrica da seção transversal da barra, como é o momento de inércia à flexão, portanto não existe regra geral para o seu cálculo em modelos de analogia de grelha. Isso ocorre devido às diferentes definições de torção, nas quais a barra pode ser analisada como uma viga, onde o momento de torção resulta do fluxo de cisalhamento horizontal (na face superior e inferior) somado ao fluxo vertical (nas faces laterais), e a barra também pode ser analisada como laje, onde o momento é função apenas do fluxo de cisalhamento horizontal.

Desta maneira, alguns autores utilizam para o cálculo a equação da resistência dos materiais para seções retangulares, outros propõem à adoção de uma inércia à torção proporcional à inércia à flexão. O sistema CAD/TQS<sup>®</sup> utiliza a Equação 2 abaixo, na qual “h” é a maior dimensão da seção transversal e “b” a menor, sendo esta a expressão simplificada utilizada para calcular a inércia à torção de vigas de seção retangular. Esse processo nem sempre é preciso, pois para barras pouco espaçadas a rigidez a torção (J) passa a ser muito influenciada pela malha utilizada, já que a largura da faixa será a menor dimensão, dimensão está que será elevada ao cubo.

$$J = \frac{h \times b^3}{3} \quad (2)$$

A rigidez à torção de uma barra está diretamente ligada à continuidade do diagrama de momentos fletores, já que os momentos de torção também estarão envolvidos no equilíbrio do nó. O valor da descontinuidade de cada nó corresponde ao valor do momento de torção aplicado no mesmo o que, em muitos casos, pode fazer com que os momentos fletores máximos não ocorram no meio do vão (FIGURA 9). Desta maneira, é comum reduzir a rigidez das barras a esse tipo de solicitação. Os divisores da rigidez à torção devem ser definidos com coerência para não levar a resultados irrealis ou contra a segurança da estrutura.

Figura 9: Diagrama de momentos fletores sem redução da rigidez a torção



Fonte: Stramandinoli e Loriggio (2003)

Existem diversas maneiras de se considerar os carregamentos da laje (peso próprio, revestimento, alvenarias, cargas devido ao uso e ocupação, etc.), através de cargas uniformemente distribuídas ao longo das barras ou através de cargas concentradas que podem ser aplicadas nos nós ou nas barras da grelha. Em ambos, o carregamento será dividido entre os elementos da grelha (nó ou barra) de acordo com a área de influência de cada elemento.

A resolução do método consiste em definir a matriz de rigidez do pavimento a partir das propriedades da barra e, após a aplicação das cargas, obter os deslocamentos da grelha por análise matricial. A partir dos deslocamentos obtidos, são calculados matricialmente os esforços atuantes. Pelo Método de Analogia de Grelha as barras da laje descarregam em seus apoios, sendo a força cortante que atua em cada barra lançada como carga pontual nos apoios.

Após a aplicação das cargas verticais nos elementos da grelha, a distribuição dos esforços nas lajes, vigas e pilares é feita de acordo com a rigidez dos elementos. Desta maneira, o esforço migrará automaticamente para região de maior rigidez, considerando assim, de forma bastante precisa, a interação entre lajes e vigas do pavimento. Contudo, é importante observar os esforços na região dos pilares para avaliar a influência de sua rigidez axial e de flexão no comportamento do pavimento em análise.

Para a obtenção apropriada dos esforços da laje e, conseqüentemente, um correto dimensionamento de sua armação, é preciso levar em consideração as reais condições de contorno da laje. É necessário estar atento ao aparecimento de momentos fletores negativos onde não há continuidade com lajes vizinhas, o que causa uma diminuição do momento positivo no centro da laje, levando a um detalhamento das armaduras contra a segurança.

O Método de Analogia de Grelha está limitado à análise isolada de pavimentos, já que não leva em consideração ações horizontais, como vento e empuxo. Desta maneira, é muito comum analisar os pavimentos sujeitos a ações verticais pelo modelo de grelha e aplicar seus resultados a modelos de pórticos formados por vigas e pilares, que serão submetidos aos esforços horizontais. A distribuição das cargas das lajes nas vigas do pórtico é feita através da transferência das reações das barras de lajes do modelo de grelha para as vigas do pórtico.

Atualmente o modelo de grelha é muito utilizado na análise de pavimentos de concreto armado, podendo ser utilizado em diferentes tipos de lajes como as maciças, nervuradas, planas e cogumelos. Por analisar o pavimento como um todo, esse método tem diversas vantagens sobre os métodos simplificados, pois consegue levar em consideração a deformação dos apoios das lajes, analisar painéis de lajes não retangulares e realizar interações entre momentos fletores nos apoios. Deste modo, para painéis de lajes contínuas o modelo por Analogia de Grelha obtém esforços e deformações bem próximos da situação real em regime elástico. Porém, é preciso estar atento aos parâmetros adotados na geração do modelo.

O modelo de grelha simulará, de forma bastante precisa, o comportamento da laje, desde que haja um refinamento adequado da malha, a correta atribuição das condições de contorno e plastificações do modelo e a correta adoção das características dos materiais.



## **4 MODELO DE GRELHA - CAD/TQS®**

O modelo de grelha do *software* CAD/TQS® tem como base o método clássico de Analogia de Grelha, ou seja, é composto por elementos de barras conectados por nós que possuem três graus de liberdade. As barras representam as vigas e lajes do pavimento, já os pilares são considerados como apoios sendo que, as barras podem se apoiar em um ou mais pontos dependendo do espaçamento entre elas e da dimensão do pilar.

O desenho de grelha será gerado automaticamente em função da planta de fôrmas, dos critérios definidos e dos casos de carregamento escolhidos. O modelo gerado pelo sistema pode ser refinado pelo Engenheiro através do editor de grelhas, onde são feitas alterações gráficas do desenho de dados de grelha, modificando barras de lajes, condições de contorno e carregamentos. As alterações em vigas e pilares devem ser feitas sempre na planta de fôrmas anteriormente à geração do modelo de grelha, já que os apoios e as barras correspondentes as vigas geradas no desenho de grelha não podem ser alterados, para impedir que o programa perca a relação entre a grelha e as plantas de fôrmas.

### **4.1 Carregamentos**

No *software* CAD/TQS® a carga distribuída de cada laje é calculada por um contorno passando pelo eixo de suas vigas limítrofes, sendo a carga total dividida pelo somatório dos comprimentos de suas barras. Como resultado tem-se uma carga por metro de barra que será lançada na grelha para cada caso de carregamento.

Cargas concentradas são inseridas sobre a barra ou sobre o nó mais próximo, já as cargas distribuídas parciais, como alvenarias sobre as lajes, são discretizadas em cargas concentradas e projetadas sobre as barras de laje que forem mais próximas.

O sistema pode processar vários carregamentos, combinações e envoltórias. Os carregamentos que atuam em um pavimento são definidos no modelador estrutural e, na edição de carregamentos (FIGURA 10), determinam-se quais carregamentos e combinações serão utilizadas para o cálculo dos esforços na laje.

Figura 10: Janela para edição dos casos de carregamento

Nº	TÍTULO DO CASO
1	Todas permanentes e acidentais dos pavimentos
2	Peso Próprio
3	Cargas permanentes
4	Cargas acidentais

Nº	TÍTULO DA COMBINAÇÃO
5	ELU/PERMAN/PP +PERM
6	ELU/PERMACID/PP +PERM+ACID
7	FOGO/PERMVAR/PP +PERM+0.3ACID
8	ELS/CFREQ/PP +PERM+0.4ACID
9	ELS/CQPERM/PP +PERM+0.3ACID

Incluir  
Editar  
Remover

Fonte: Autora (2017)

## 4.2 Convenções de Desenho

Todas as barras que discretizam uma laje são geradas junto a um texto que contém os dados da seção e o carregamento distribuído na barra. Primeiramente o texto contém a seção da barra, representada por base/altura, sendo a base correspondente ao espaçamento entre barras. Depois são identificados os carregamentos em tonelada força por metro (tf/m) para cada caso de carregamento adotado e, por último, são atribuídos os divisores de inércia à torção e flexão, caso existam. Na parte superior da Figura 11 podemos observar o texto da barra e, na parte inferior os respectivos dados utilizados para geração desta barra.

Também podem ser inseridas barras rígidas, normalmente utilizadas na ligação de barras de lajes com pilares, essas barras são identificadas pelo texto “SIM2”. A rigidez da barra é simulada através da adoção de uma seção de 1,00 x 1,00 m e da consideração de um concreto com módulo de elasticidade multiplicado por 100 (cem).

Figura 11: Janela para edição dos dados das barras de grelha

Fonte: Autora (2017)

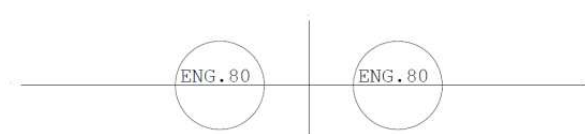
As articulações (FIGURA 12) podem ser inseridas nas extremidades das barras, podendo ser modificadas para engastamentos parciais (FIGURA 13) que podem variar de 0 (articulação total) a 1 (engastamento). Sendo que, o fator de engastamento 0.8 (ENG.80) representa uma redução de momento total elástico de aproximadamente 20%.

Figura 12: Representação gráfica das articulações



Fonte: Manual de Grelha TQS (2017)

Figura 13: Representação gráfica do engastamento parcial



Fonte: Manual de Grelha TQS (2017)

Existem três tipos de convenções para representar as restrições rígidas, sendo que o nó pode não ter restrições (normalmente não é representado no desenho), pode ter restrições ao deslocamento no eixo “Z” ou ter restrições nos eixos “X,Y e Z”. Existem também as restrições elásticas, usadas para simular a plastificação da vinculação das lajes com os apoios, onde são estabelecidos divisores de mola para rotação em “X” e em “Y” e para translação em “Z”. As restrições citadas estão representadas, respectivamente, na Figura 14.

Figura 14: Representação gráfica das restrições ao deslocamento



Fonte: Manual de Grelha TQS (2017)

A representação da restrição elástica contém um texto com os dados da restrição do apoio. Os números após o texto são, respectivamente, a largura em “X” do apoio, a largura em “Y” do apoio, a altura do pilar e os divisores de mola a rotação e a translação. A janela para a inserção dos dados referentes às restrições de apoio encontra-se na Figura 15.

Figura 15: Janela para inserção dos dados de restrições de apoio

**Dados de restrições de apoio**

Tipo de vínculo

- Restrito em Z, livre em XY
- Restrito em XYZ
- Elástico em XYZ

São definidas molas tanto à translação quanto à rotação do apoio

Dados de apoio elástico

Lx do pilar (m)      0.18

Ly do pilar (m)      0.50

Lz do pilar (m)      3.00

Ângulo de rotação (graus)      0.00

Divisor de rotação de mola      5.00

Divisor de translação de mola      10.00

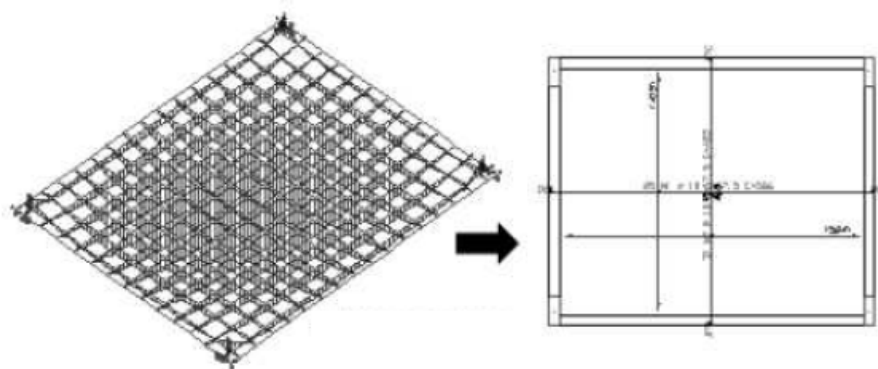
OK      Cancelar

Fonte: Autora (2017)

### 4.3 Visualizador de Esforços

Após extração, processamento e transferência dos esforços da grelha é possível visualizar os resultados através dos diagramas gerados de esforço cortante, momento fletor, momento de torção e deslocamentos. É preciso estar atento na consideração destes esforços, pois como no modelo de grelha a estrutura é discretizada em barras, o visualizador mostrará os resultados nas barras, sendo necessário dividir o esforço em uma barra por seu espaçamento para obter o esforço por metro de laje. A Figura 16 mostra o visualizador de esforços de grelha do CAD/TQS<sup>®</sup> e sua transferência de esforços para o detalhamento da laje.

Figura 16: Visualizador de esforços e transferência para detalhamento da laje



Fonte: Manual de Análise Estrutural TQS (2017)

É através dos visualizadores de esforços que o Engenheiro deve analisar graficamente o comportamento do seu pavimento, e em caso de incoerências em alguns pontos refinar o modelo de grelha. Nos pontos onde for necessário deve-se alterar a grelha a fim de que os esforços sejam transferidos de maneira correta para a laje e, posteriormente, para o pórtico. O refinamento da entrada gráfica do modelo de grelha pode ser feito através da alteração de condições de contorno, da plastificação da ligação das barras com os apoios ou até de parâmetros globais, como a alteração do espaçamento da malha e do coeficiente de redução da inércia à torção das barras.

O desenho de entrada gráfica de grelha é gerado automaticamente pelo sistema, sendo possível a ocorrência de incoerências. O comando de “verificar erros” assinala eventuais erros e avisos (regiões com problemas em potencial). Este comando deve ser executado antes e após o refinamento da grelha, verificando assim os possíveis erros de geração e de edições durante o

refinamento. Os erros mais comuns são os referentes a barras em balanço e de comprimento pequeno, que podem causar problemas de precisão, e aos textos não associados às barras ou repetidos, que causam erro na leitura dos dados da grelha. Os erros e avisos detectados devem ser verificados e, se necessário, corrigidos antes da transferência dos esforços da grelha.

## 5 METODOLOGIA

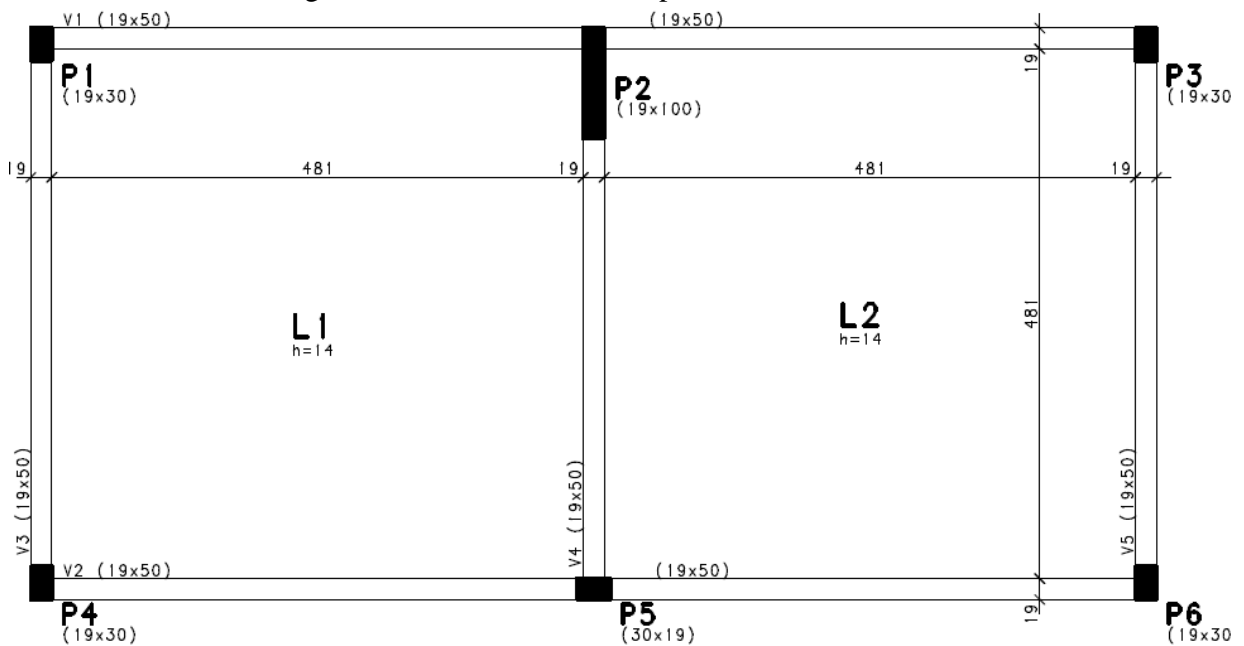
A partir da adoção de um projeto padrão foram calculados os esforços solicitantes nas lajes pelo método de Analogia de Grelha utilizando o *software* CAD/TQS<sup>®</sup>. Serão adotados diferentes critérios para discretização da malha e, em função dos momentos fletores resultantes, serão verificadas a influência de parâmetros como o espaçamento da malha, a rigidez à torção das barras e a rigidez da vinculação com os apoios.

### 5.1 Pavimento de Referência

No intuito de comparar os valores dos momentos fletores solicitantes para os parâmetros em questão, foi definido o projeto estrutural de um pavimento contendo apenas duas lajes. As dimensões e espessuras dos elementos estruturais podem ser vistas na Figura 17 abaixo.

É importante salientar que tanto as dimensões do pilar P2 quanto as espessuras das lajes L1 e L2 foram adotadas com a finalidade de utilizar um único modelo para visualizar os efeitos de todas as comparações que serão feitas ao longo do trabalho.

Figura 17: Planta de fôrma do pavimento de referência



Fonte: Autora (2017)

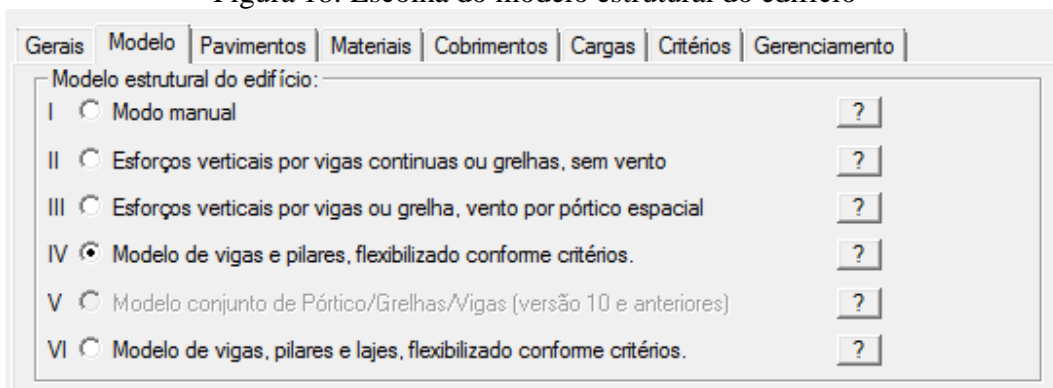
### 5.1.1 Dados gerais das lajes

- Resistência característica do concreto a compressão ( $f_{ck}$ ) = 25 Mpa;
- Módulo de elasticidade longitudinal ( $E_{cs}$ ) = 2415 kN/cm<sup>2</sup> (considerado brita de granito ou gnaiss);
- Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) = 0,2;
- Cargas atuantes:
  - peso próprio das lajes ( $g_1$ ) = 0,14 m x 25 kN/m<sup>3</sup> = 3,50 kN/m<sup>2</sup>;
  - revestimento ( $g_2$ ) = 1,00 kN/m<sup>2</sup>;
  - carga acidental ( $q$ ) = 1,50 kN/m<sup>2</sup> (considerado cargas para edifícios residenciais);
  - total de cargas permanentes ( $g$ ) = 4,50 kN/m<sup>2</sup>;
  - carga total ( $p$ ) = 6,00 kN/m<sup>2</sup>.

### 5.1.2 Modelo de cálculo (CAD/TQS<sup>®</sup>)

No *software* CAD/TQS<sup>®</sup> há seis opções para modelagem global do edifício, conforme mostra a Figura 18. Para o cálculo da nossa estrutura foi adotado o modelo IV.

Figura 18: Escolha do modelo estrutural do edifício

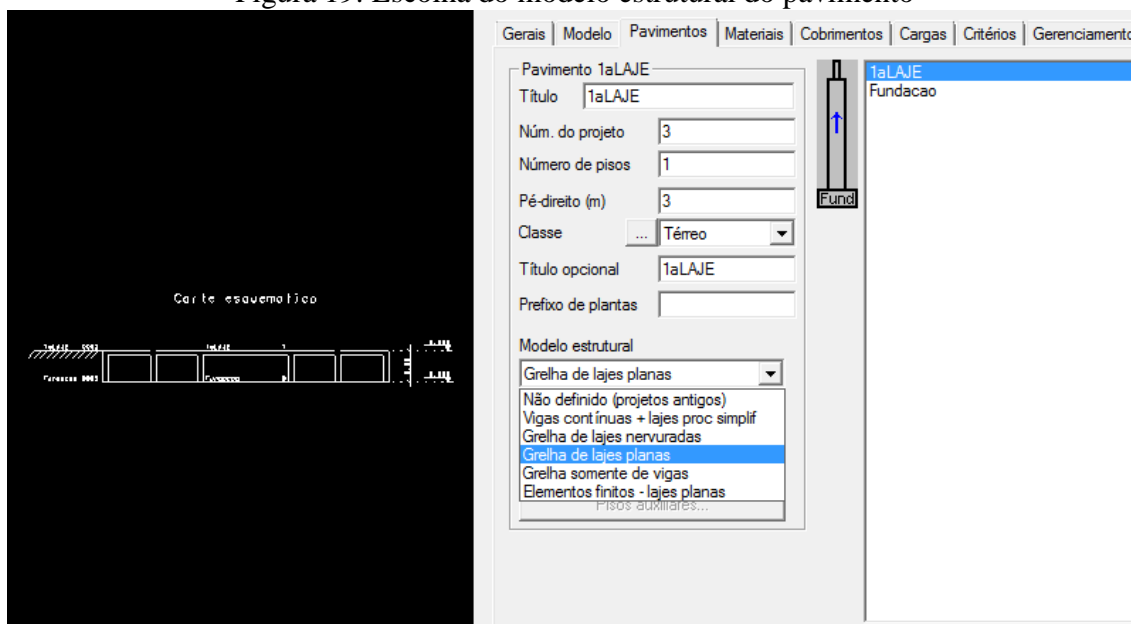


Fonte: Autora (2017)

Também existem diversas maneiras para modelar um pavimento, foi definido o modelo de grelha de lajes planas (FIGURA 19).



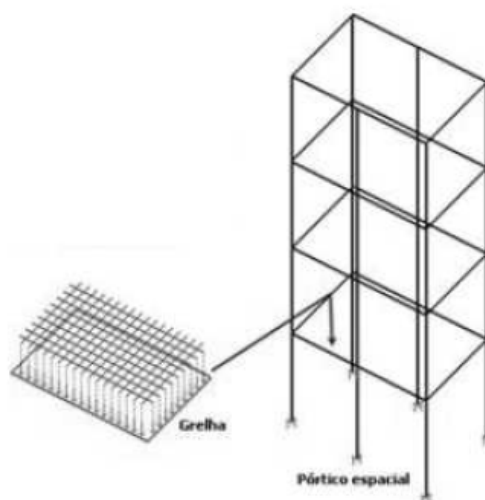
Figura 19: Escolha do modelo estrutural do pavimento



Fonte: Autora (2017)

A partir da escolha do modelo “grelha de lajes planas” teremos a geração de uma malha de barras que simulam as lajes, sujeitas aos esforços verticais, para a análise do pavimento. Os esforços resultantes da análise do modelo de grelha são utilizados para o dimensionamento e detalhamento das lajes. O modelo IV faz a transferência automática das reações das barras das lajes presentes no modelo de grelha (FIGURA 20) para as vigas do pórtico espacial.

Figura 20: Distribuição de cargas modelo IV



Fonte: Manual de Análise Estrutural TQS (2017)

O modelo IV consiste em um pórtico espacial composto por barras que simulam vigas e pilares, flexibilizados conforme critérios adotados, submetidos ao efeito do diafragma rígido da laje. Os esforços solicitantes decorrentes da aplicação das ações verticais (oriundos do modelo de grelha) e horizontais são calculados através do pórtico espacial e utilizados para o dimensionamento e detalhamento de vigas e pilares do edifício.

## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 6.1 Rigidez da Vinculação com os Apoios

Um aspecto importante na discretização de um pavimento por Analogia de Grelha é a consideração da vinculação dos pilares com as barras da grelha, sendo necessário avaliar a influência de suas rigidezes no comportamento do pavimento.

Quando uma barra de laje passa por dentro de um pilar a mesma pode receber dois tipos de ligação. Podem ser criadas barras rígidas que serão ligadas ao centro do apoio ou podem ser criados apoios independentes definidos com um coeficiente de mola à flexão. Para estudar a influência da rigidez dessas vinculações nos resultados do modelo de grelha serão analisados os dois tipos de ligação.

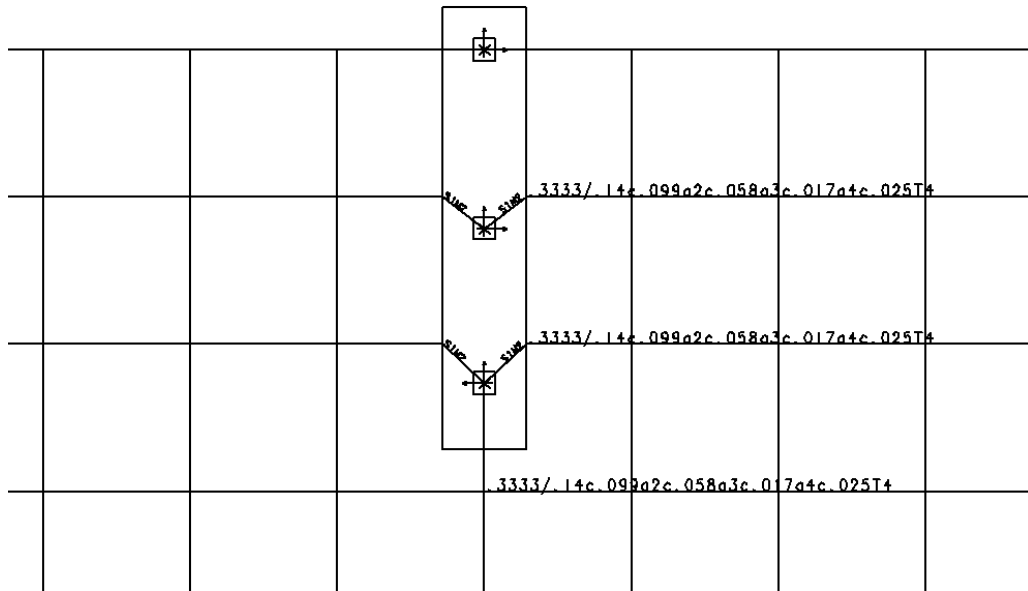
Os coeficientes de mola nas direções X e Y são calculados através da Equação 3:

$$\frac{4 \times E \times I}{L \times REDMOL} \quad (3)$$

Será utilizado o valor de 4 (quatro) para o “REDMOL” (reduzidor do coeficiente de mola), sendo este o valor sugerido pelo *software* CAD/TQS<sup>®</sup>. Para essa verificação foi utilizado um modelo de grelha considerando um espaçamento de 33,3 cm (3 barras por metro) e os esforços analisados serão os momentos fletores na direção “X”.

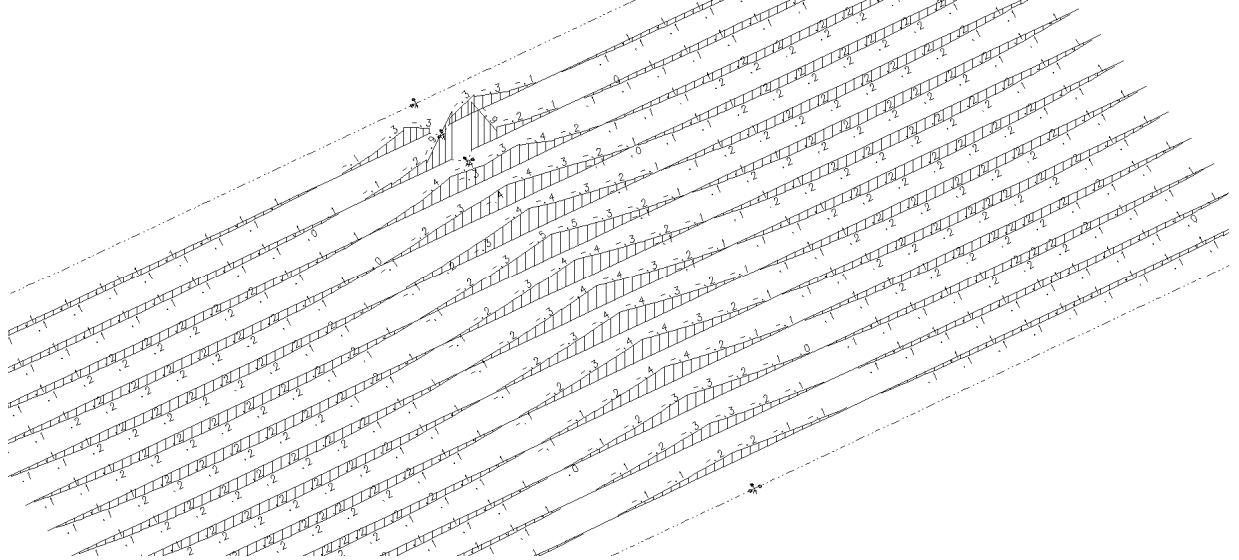
A Figura 21 contém a parte do modelo de grelha do pavimento que representa a ligação das barras da laje com o pilar através de barras rígidas e na Figura 22 pode-se observar o visualizador de esforços com os momentos fletores resultantes desse modelo. Da mesma maneira, a Figura 23 contém o modelo para ligação com apoio elástico e na Figura 24 o seu diagrama de momento fletor.

Figura 21: Modelo de grelha para vinculação com apoio rígido



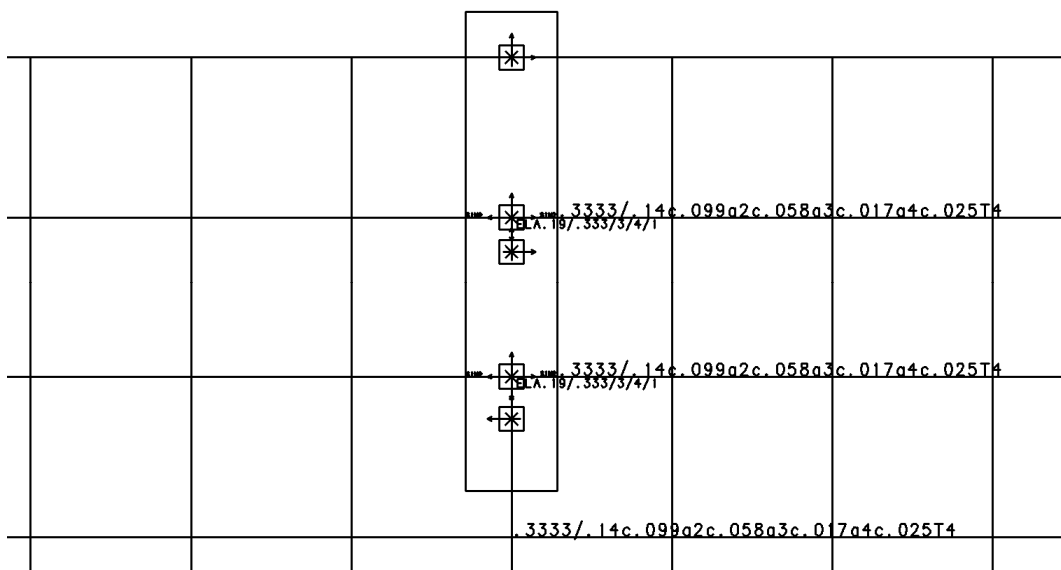
Fonte: Autora (2017)

Figura 22: Visualizador de esforços para vinculação com apoio rígido



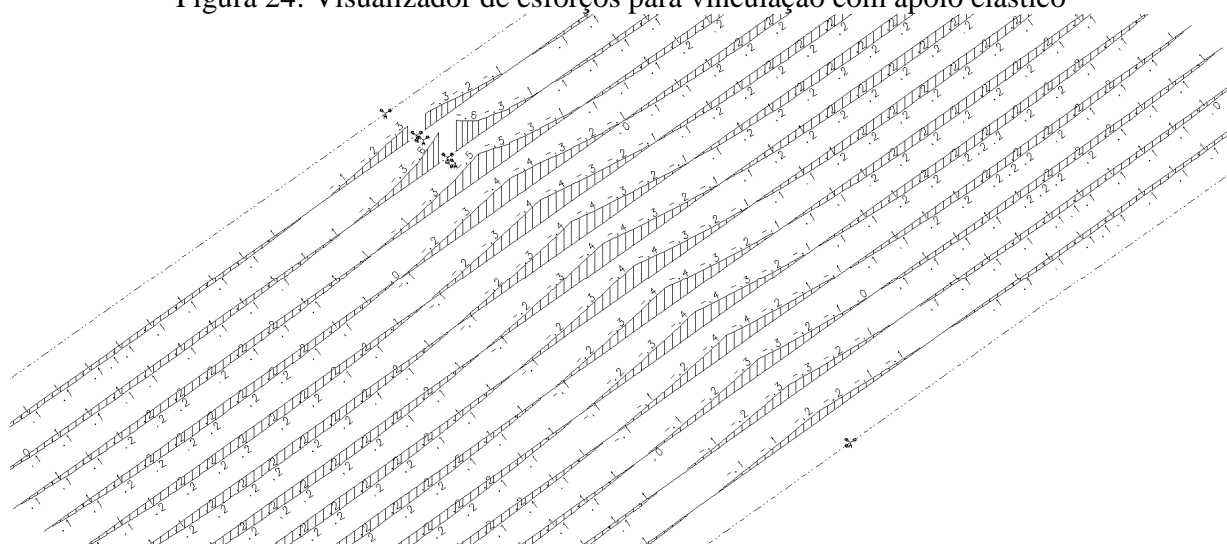
Fonte: Autora (2017)

Figura 23: Modelo de grelha para vinculação com apoio elástico



Fonte: Autora (2017)

Figura 24: Visualizador de esforços para vinculação com apoio elástico



Fonte: Autora (2017)

O Quadro 2 apresenta os valores dos momentos fletores negativos máximos da laje, na viga e na região do pilar, relativos ao modelo de grelha com apoio elástico e ao modelo com apoio rígido.

Quadro 2: Momentos fletores negativos máximos na laje para modelo de grelha com apoio elástico e apoio rígido

<b>MOMENTOS NEGATIVOS MÁXIMOS (tf.m)</b>				
	PILAR		VIGA	
	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro
APOIO RÍGIDO	-0,95	-2,85	-0,46	-1,37
APOIO ELÁSTICO	-0,61	-1,84	-0,45	-1,35

Fonte: Autora (2017)

No modelo de grelha os pilares são simulados como apoios, porém se os mesmos forem considerados como restrições totais à translação e à rotação, podem ocorrer “picos” de momentos negativos, levando a um mau dimensionamento das armaduras nessas regiões. Para evitar essa situação, os pilares podem ser simulados como apoios elásticos independentes e, desta maneira, no extremo de cada barra de laje que se apoiar diretamente no pilar será adicionada uma restrição elástica (mola).

Essa adaptação é possível devido à capacidade de redistribuição de esforços da laje, já que na prática as regiões próximas aos pilares plastificam, perdendo rigidez, e os esforços migram para regiões mais rígidas. É através desse refinamento do modelo de grelha que as solicitações resultantes tornam-se mais condizentes com a realidade, porém a redistribuição de esforços é limitada e deve ser avaliada criteriosamente durante a modelagem.

Analisando os resultados obtidos percebe-se uma diferença significativa nos momentos fletores negativos da laje na região dos pilares, sendo o momento por metro obtido com a adoção de apoios rígidos 55% maior que esforço no modelo com restrição elástica. Também pode-se perceber que com a utilização dos apoios rígidos temos um “pico” de momento fletor negativo por metro com valor 108% maior em relação ao momento negativo na viga, já com a utilização do apoio elástico temos um valor 36% maior, o que demonstra um melhor comportamento da laje e uma redistribuição de esforços mais adequada.

No modelo de grelha do CAD/TQS<sup>®</sup> existe outra alternativa para simular um eventual efeito não-linear nessas regiões, que consiste na definição de coeficientes de engastamentos parciais nas pontas das barras. Esses coeficientes são ativados para valores diferentes de um, sendo que para obter uma redução de momento de aproximadamente 20% é necessário utilizar um coeficiente de 0,8. O valor desse coeficiente deve ser calibrado para uma melhor redistribuição dos esforços da laje na região em questão e, como já foi mostrado neste trabalho, esse engastamento parcial será representado por uma articulação com o valor do coeficiente adotado indicado em seu centro.

## **6.2 Inércia à Torção das Barras**

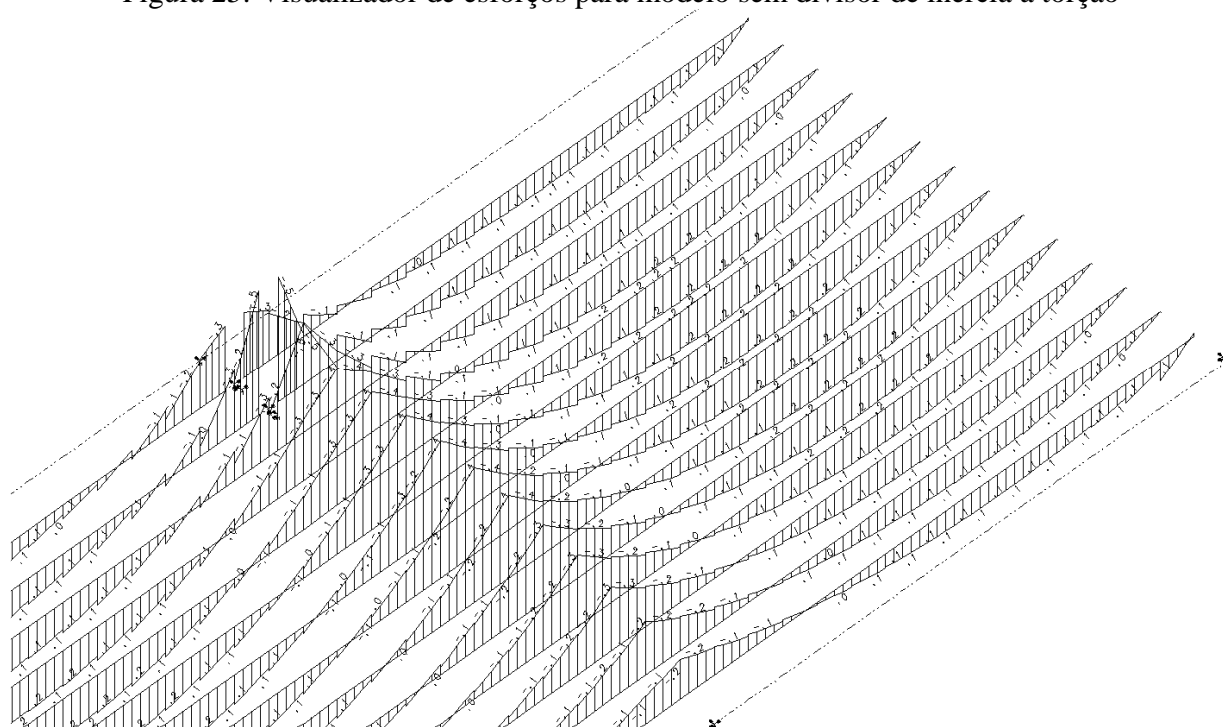
A rigidez à torção das barras de grelha tem grande influência no valor final dos momentos fletores das lajes. É possível estabelecer qualquer relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão das barras, desde que seja respeitada a capacidade de redistribuição de esforços da laje.

Segundo o manual de critérios do *software* CAD/TQS<sup>®</sup> é possível obter valores de esforços mais próximos do método de elementos finitos adotando o divisor da inércia à torção com valores entre 2 (dois) e 4 (quatro). Desta maneira, a consideração da rigidez à torção será analisada adotando-se quatro parâmetros: sem divisor de inércia (barras com inércia a torção integralmente considerada), divisor com o valor de 2 (dois), divisor com o valor de 4 (quatro) e divisor com o valor de 100 (cem) simulando barras sem rigidez a torção.

Para essa verificação foi utilizado um modelo de grelha considerando um espaçamento de 33,3 cm (3 barras por metro) e os esforços analisados serão os momentos fletores na direção “X”.

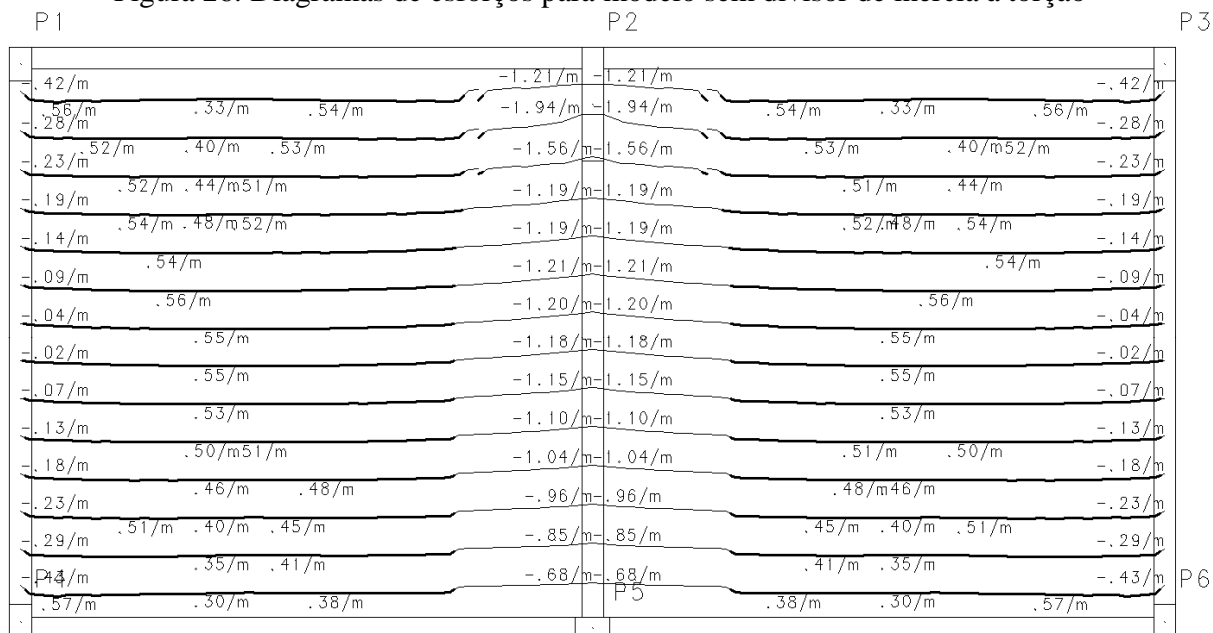
As Figuras 25, 27, 29 e 31 contêm parte do visualizador de esforços com os momentos fletores resultantes de cada modelo analisado e as Figuras 26, 28, 30 e 32 os diagramas de momento fletor com esforços por metro de laje de cada modelo.

Figura 25: Visualizador de esforços para modelo sem divisor de inércia a torção



Fonte: Autora (2017)

Figura 26: Diagramas de esforços para modelo sem divisor de inércia à torção

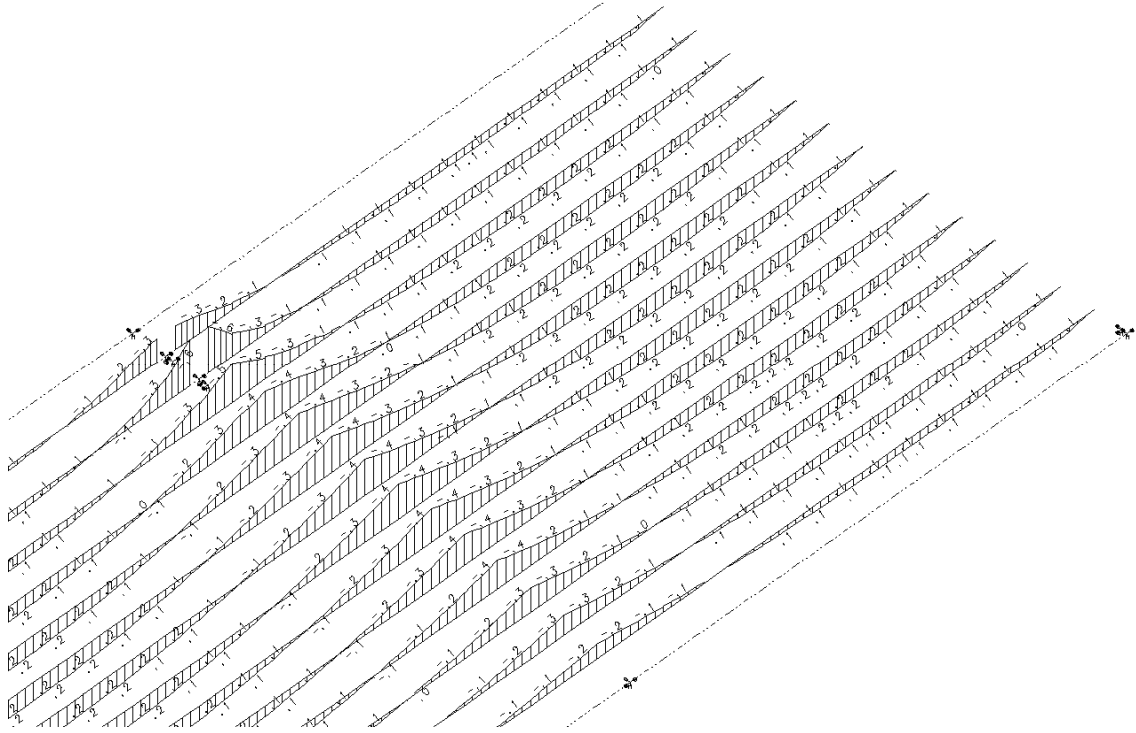


Fonte: Autora (2017)



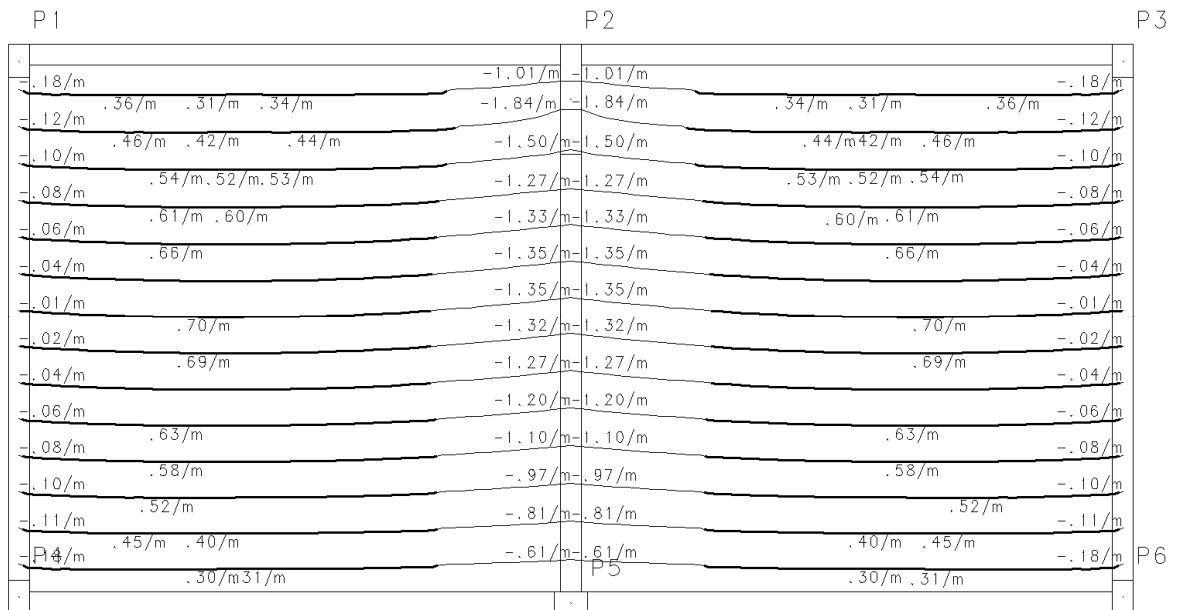


Figura 29: Visualizador de esforços para modelo com divisor 4 de inércia à torção



Fonte: Autora (2017)

Figura 30: Diagramas de esforços para modelo com divisor 4 de inércia à torção



Fonte: Autora (2017)



De posse dos resultados foi elaborado o Quadro 3 com os valores dos momentos fletores máximos na última barra do modelo de grelha. São apresentados os momentos positivos e negativos (na borda e na viga).

Quadro 3: Momentos fletores máximos na última barra para modelo de grelha com diferentes divisores de inércia à torção

<b>MOMENTOS FLETORES MÁXIMOS - ÚLTIMA BARRA (tf.m)</b>						
	NEGATIVO-VIGA		POSITIVO		NEGATIVO-BORDA	
	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro
SEM DIVISOR	-0,23	-0,68	0,19 / 0,10*	0,57 / 0,30*	-0,14	-0,43
DIVISOR = 2	-0,21	-0,64	0,15 / 0,10*	0,42 / 0,30*	-0,10	-0,29
DIVISOR = 4	-0,20	-0,61	0,12	0,31	-0,06	-0,18
DIVISOR = 100	-0,19	-0,58	0,10	0,31	-0,01	-0,04

\* valor máximo/valor no meio do vão

Fonte: Autora (2017)

O Quadro 4 possui uma comparação dos valores dos momentos fletores máximos da laje, negativos e positivos, para os quatro parâmetros adotados.

Quadro 4: Momentos fletores máximos na laje para modelo de grelha com diferentes divisores de inércia à torção

<b>MOMENTOS FLETORES MÁXIMOS (tf.m)</b>				
	NEGATIVO		POSITIVO	
	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro
SEM DIVISOR	-0,65	-1,94	0,19	0,56
DIVISOR = 2	-0,62	-1,87	0,21	0,63
DIVISOR = 4	-0,61	-1,84	0,23	0,70
DIVISOR = 100	-0,60	-1,81	0,27	0,80

Fonte: Autora (2017)

Analisando os resultados conclui-se que ao levar em consideração a totalidade da inércia à torção nas barras e ao adotar um divisor de inércia de 2 (dois), o diagrama de momentos fletores não é contínuo, ou seja, existe uma descontinuidade no diagrama gerado pela existência de um momento de torção aplicado nos nós. Devido a isso, os momentos máximos, em muitos casos, não ocorrem no centro do vão. Quando a rigidez à torção é reduzida por um divisor de 4 (quatro) as descontinuidades dos diagramas de momentos fletores são reduzidos, e assim, o máximo

esforço estará no nó central. Da mesma maneira, quando a inércia a torção é desprezada, não existe descontinuidade no diagrama de momento fletor das barras da laje.

Também é possível observar que nos modelos onde a rigidez à torção das barras não foi desconsiderada, existem momentos fletores negativos nas bordas das lajes, ocasionando uma ligeira diminuição nos momentos do meio do vão da barra. Além disso, percebe-se um aumento significativo do momento fletor positivo máximo no meio do vão da laje na medida em que foi aumentado o divisor da inércia à torção das barras, assim como houve uma grande diminuição no momento fletor negativo máximo, já que nesse caso, praticamente toda a laje é submetida apenas aos esforços de flexão, sendo perceptível a redistribuição dos esforços em função da alteração das rigidezes dos elementos

A redução das rigidezes à torção das barras é possível devido à baixa resistência do concreto armado a este tipo de solicitação, porém não é recomendado desprezar a existência desse esforço já que existe, no comportamento real da laje, um momento negativo nas bordas onde não há continuidade com lajes vizinhas. Esse momento ocorre pois, na maioria dos casos, as lajes são concretadas junto com as vigas, gerando um engastamento entre esses elementos. Deste modo, quando a laje é solicitada à flexão, a viga tende a girar junto com a ela, o que é impedido pela rigidez à torção das vigas e, o esforço para conter essa rotação gera o momento negativo na borda das lajes.

Foi possível visualizar que à medida que é reduzida a rigidez da barra à torção, o valor do momento de torção diminui, o momento fletor aumenta e a descontinuidade do diagrama é minimizada, mostrando-se necessário adotar um redutor de inércia que simule corretamente o comportamento da laje. Quando foi adotado um divisor de 2 (dois) para a inércia das barras a descontinuidade do diagrama ainda mostra-se muito significativa. Já quando adotou-se um divisor de 4 (quatro) foi obtido um melhor comportamento do modelo. É importante salientar que essa redução não deve ser considerada como um valor fixo, sendo importante analisar o comportamento de cada pavimento modelado para as variações deste parâmetro.

Outra consideração importante está no detalhamento da laje. Se a rigidez à torção não for reduzida em sua totalidade teremos momentos de torção nas lajes que devem ser levados em

consideração no dimensionamento e detalhamento da armação. Para isso, deve ser utilizado um processo do CAD/TQS<sup>®</sup> denominado “Wood&Armer”, em que os momentos de flexão e torção tornam-se envoltórias de momentos fletores negativos e positivos<sup>1</sup>.

É comum a utilização de medidas a favor da segurança no dimensionamento de lajes, definindo-se articulações nas barras em todas as bordas sem continuidade das lajes para simular o efeito da fissuração. As articulações utilizadas irão zerar o momento negativo nos cantos e, conseqüentemente, aumentar o momento positivo no meio do vão. Desta maneira a armação positiva estará dimensionada para o maior esforço caso a laje plastifique e, haverá também a armação negativa junto aos apoios para evitar a ocorrência desta fissuração.

### **6.3 Espaçamento da malha**

É fundamental que a discretização da malha seja suficientemente refinada para que os resultados da modelagem do pavimento sejam precisos e confiáveis. É necessário estar atento às condições de espaçamento da malha, à distância mínima da barra de laje as barras de contorno, à origem da grelha e à direção principal da malha.

O sistema gera todas as barras paralelas e ortogonais em relação a direção principal escolhida, que pode ser qualquer, e para garantir a continuidade das barras é necessário que todas as lajes do pavimento tenham a mesma direção principal. Essa continuidade também é garantida pela disposição das barras a partir de uma mesma origem, por meio da qual todas as barras de todas as lajes serão distribuídas, respeitando a distância mínima imposta.

A imposição de uma distância mínima das barras ao contorno da laje é importante para evitar que as barras de laje não se coincidam fisicamente com as vigas e para que o sistema não gere barras de dimensões muito pequenas que atrapalhem a verificação do modelo, sendo recomendável que essa distância seja de, no mínimo, metade da espessura das vigas. As barras de pequenas dimensões podem gerar picos de momentos negativos irreais devido à torção gerada no equilíbrio de esforços no cruzamento das barras verticais com as barras horizontais.

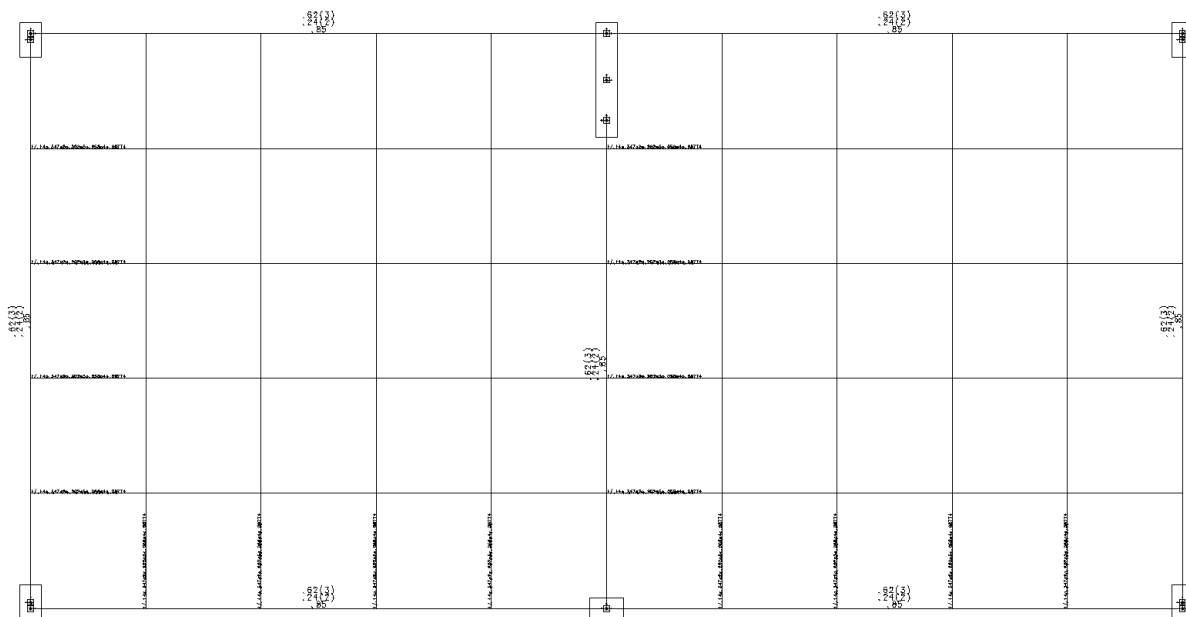
<sup>1</sup>Esse processo foi utilizado para obter os valores utilizados nas comparações feitas neste trabalho

Também é preciso estar atento à origem imposta para discretização do modelo, sendo importante fornecer uma origem que irá favorecer o posicionamento das barras. Esse posicionamento deve buscar garantir uma simetria na disposição das barras do pavimento como um todo para um melhor comportamento do modelo, sendo necessário utilizar um ponto que melhor se aproxime do eixo de simetria do pavimento. Também é possível adotar a origem em um ponto que favoreça o posicionamento das barras sobre algo importante, como uma fileira de apoios.

Além das recomendações sugeridas acima é preciso definir o espaçamento entre as barras do modelo para que o seu comportamento reproduza de maneira mais fiel possível o comportamento da laje, sem que o tempo necessário para o processamento se torne demasiadamente longo. O pavimento em questão será analisado por cinco diferentes modelos de grelha, com as barras espaçadas de 100 x 100 cm, 50 x 50 cm, 33,3 x 33,3 cm, 25 x 25 cm e 10 x 10 cm.

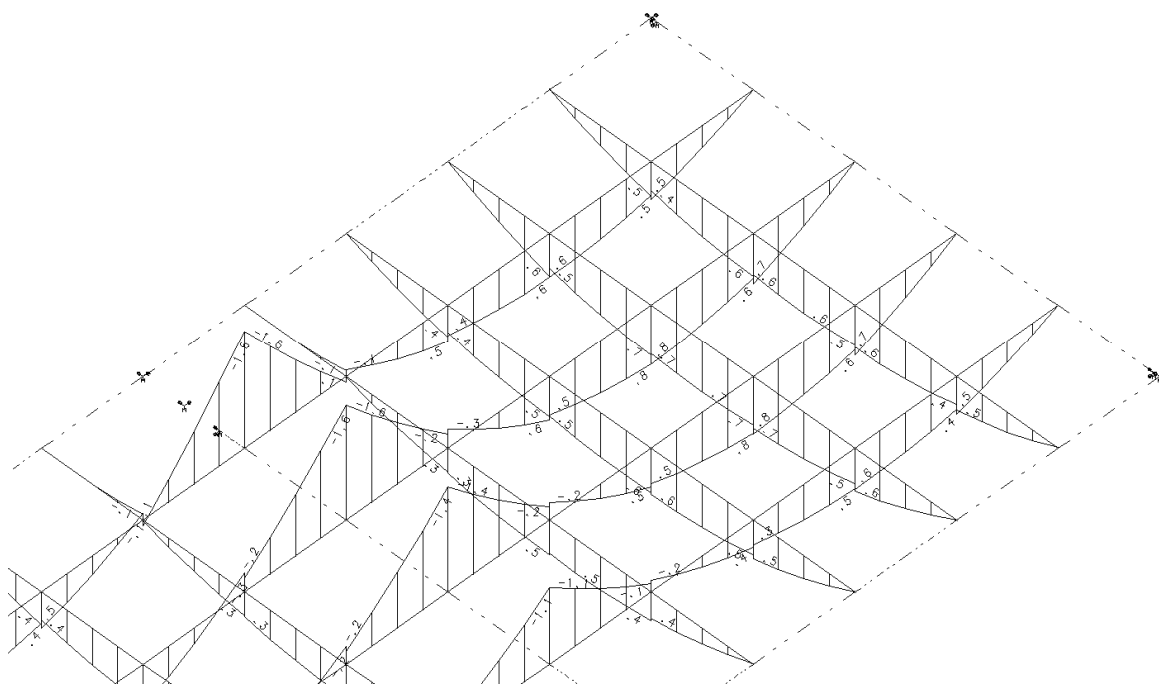
A seguir são apresentados os modelos de grelhas para os espaçamentos analisados (FIGURAS 33, 35, 37, 39 e 41) e os seus respectivos visualizadores de esforços com os momentos fletores resultantes de cada modelo (FIGURAS 34, 36, 38, 40 e 42).

Figura 33: Modelo de grelha espaçamento 100 x 100 cm



Fonte: Autora (2017)

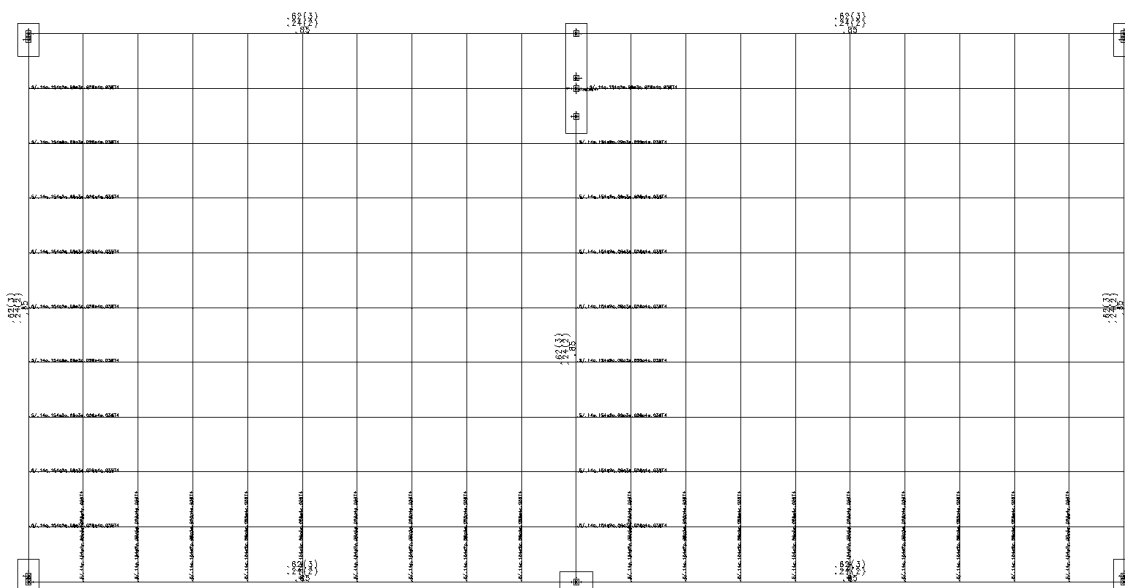
Figura 34: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 100 x 100 cm



Fonte: Autora (2017)

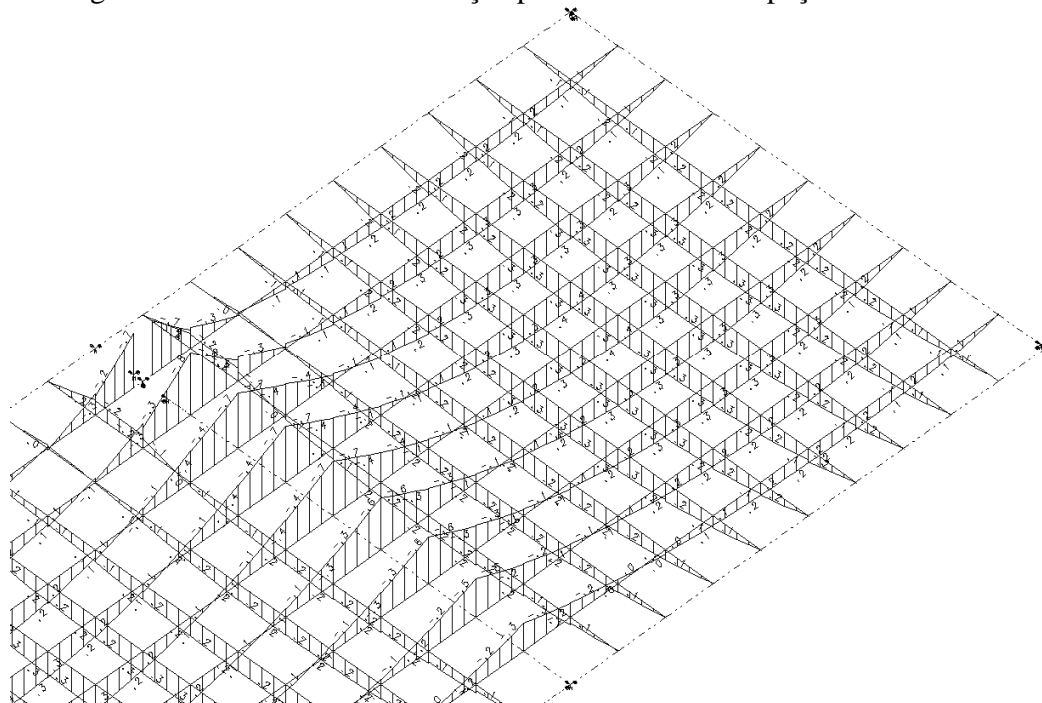


Figura 35: Modelo de grelha espaçamento 50 x 50 cm



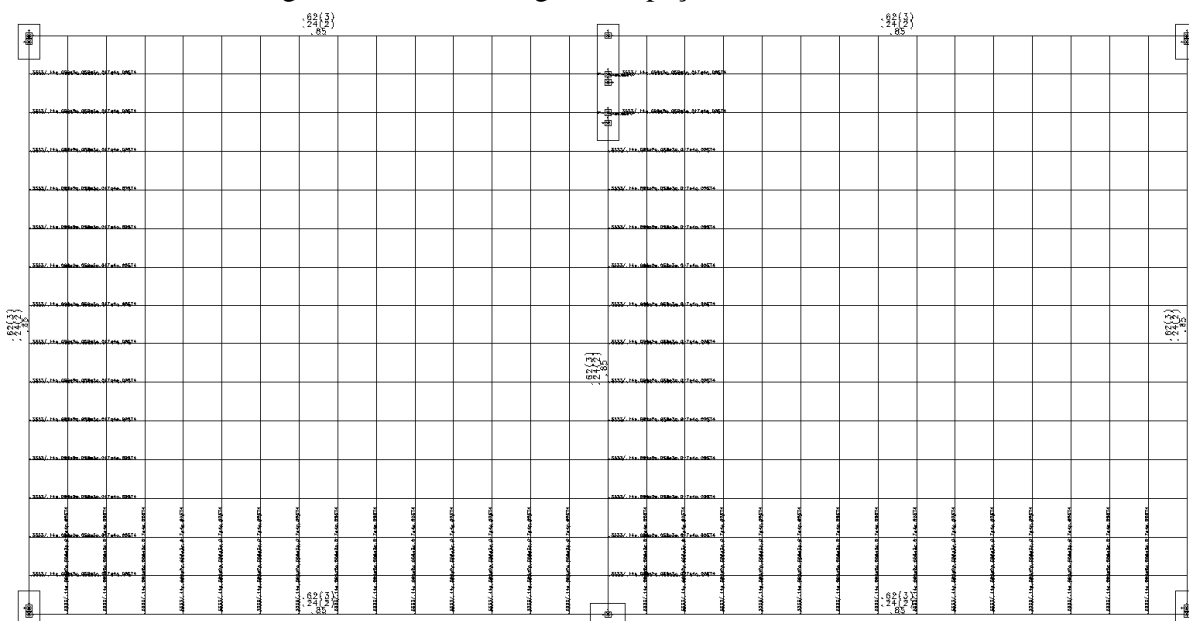
Fonte: Autora (2017)

Figura 36: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 50x50 cm



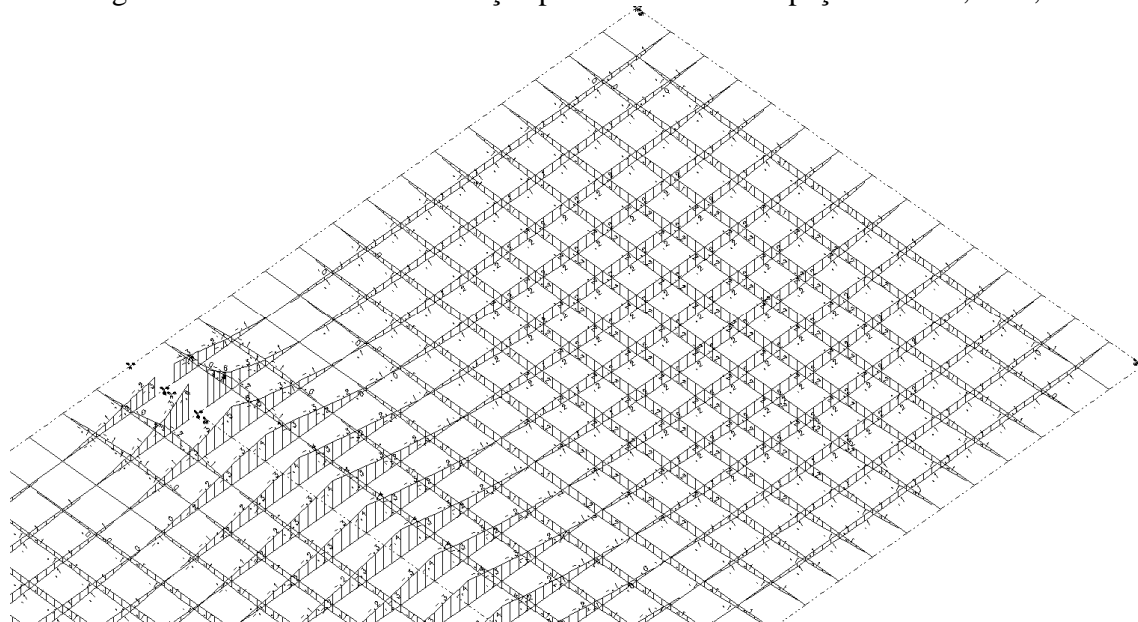
Fonte: Autora (2017)

Figura 37: Modelo de grelha espaçamento 33,3x33,3 cm



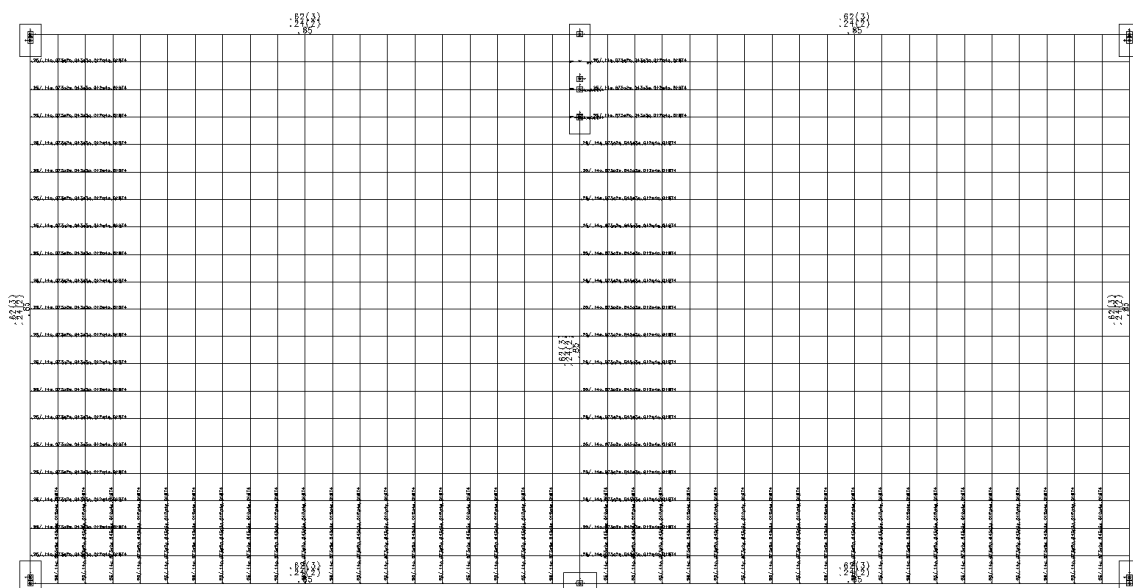
Fonte: Autora (2017)

Figura 38: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 33,3x33,3 cm



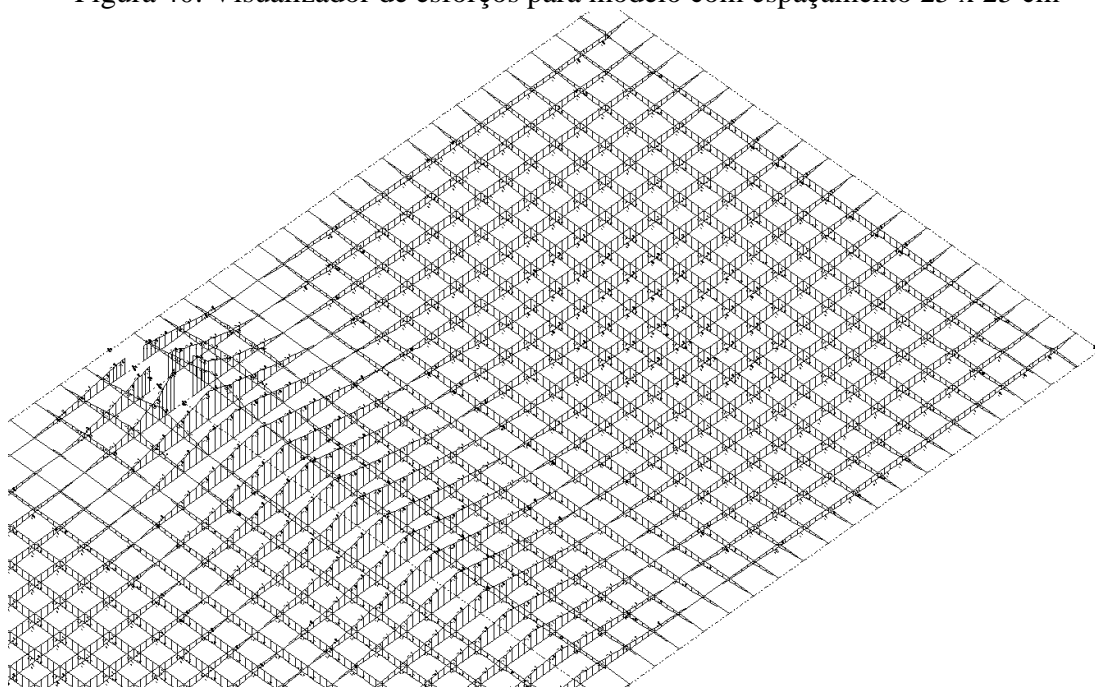
Fonte: Autora (2017)

Figura 39: Modelo de grelha espaçamento 25 x 25 cm



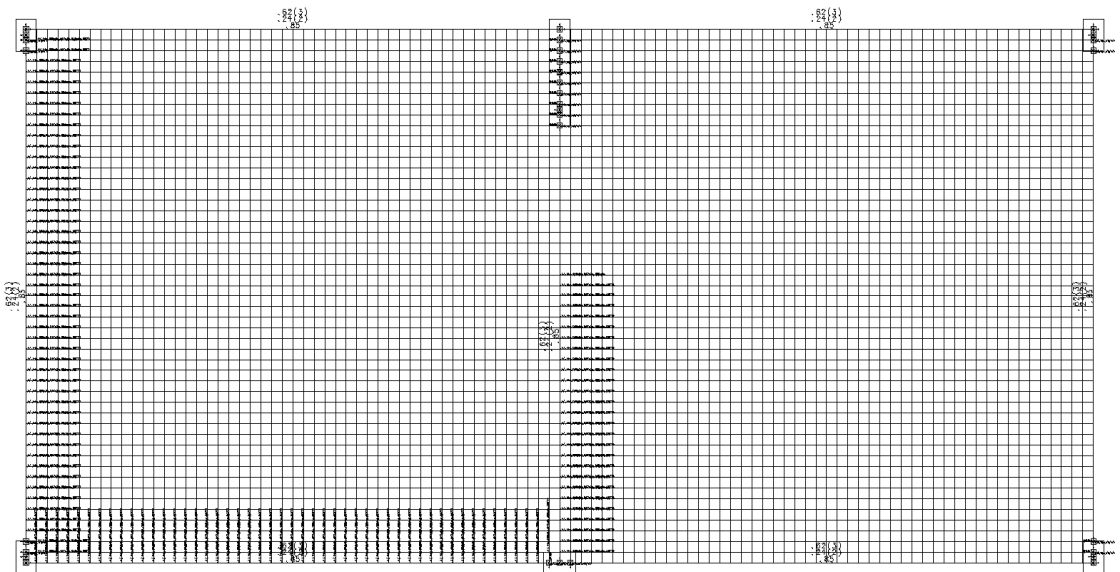
Fonte: Autora (2017)

Figura 40: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 25 x 25 cm



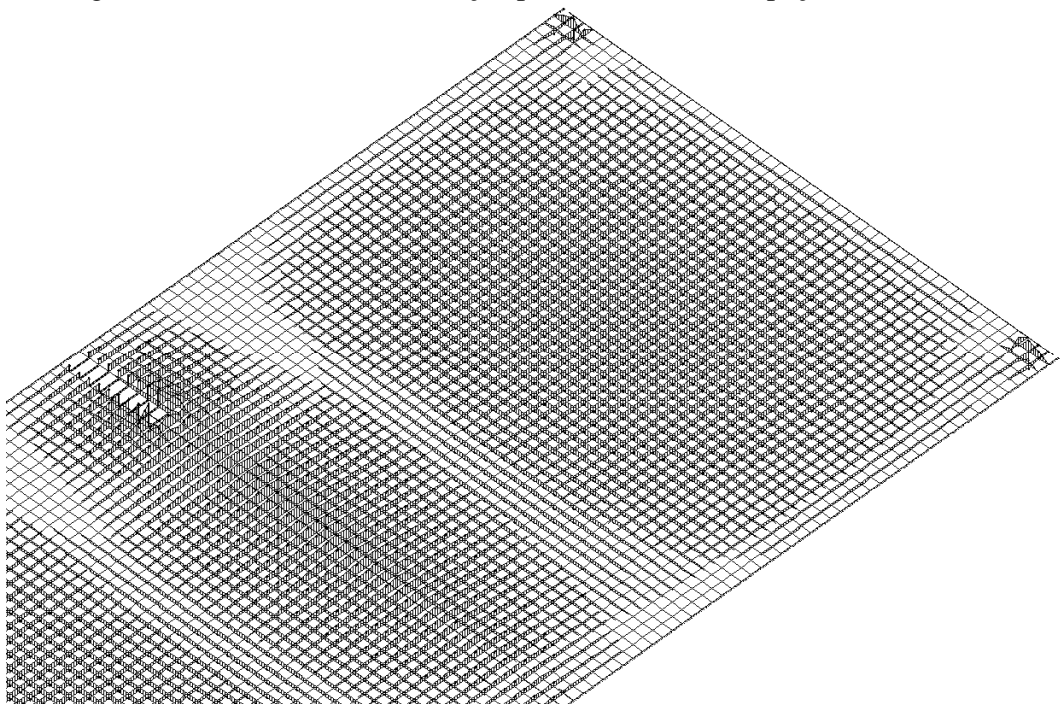
Fonte: Autora (2017)

Figura 41: Modelo de grelha espaçamento 10x10 cm



Fonte: Autora (2017)

Figura 42: Visualizador de esforços para modelo com espaçamento 10x10 cm



Fonte: Autora (2017)

O Quadro 5 possui uma comparação dos valores dos momentos fletores máximos da laje, positivos na direção “X” e na direção “Y” para os cinco espaçamentos adotados.

Quadro 5: Momentos fletores positivos máximos na laje para modelo de grelha com diferentes espaçamentos

<b>MOMENTOS POSITIVOS MÁXIMOS (tf.m)</b>				
	POSITIVO - DIR X		POSITIVO - DIR Y	
	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro
MALHA 100x100	0,82	0,82	0,67	0,67
MALHA 50x50	0,36	0,72	0,32	0,64
MALHA 33x33	0,23	0,70	0,21	0,62
MALHA 25x25	0,17	0,69	0,15	0,61
MALHA 10x10	0,07	0,74	0,06	0,62

Fonte: Autora (2017)

O Quadro 6 possui uma comparação dos valores dos momentos fletores máximos da laje, negativos na região do pilar e na região da viga (direção “X”) para os cinco espaçamentos adotados.

Quadro 6: Momentos fletores negativos máximos na laje para modelo de grelha com diferentes espaçamentos

<b>MOMENTOS NEGATIVOS MÁXIMOS (tf.m)</b>				
	NEGATIVO - PILAR		NEGATIVO - VIGA	
	M/barra	M/metro	M/barra	M/metro
MALHA 100x100	-1,74	-1,74	-1,59	-1,59
MALHA 50x50	-0,80	-1,60	-0,70	-1,39
MALHA 33x33	-0,61	-1,84	-0,45	-1,35
MALHA 25x25	-0,50	-2,01	-0,33	-1,32
MALHA 10x10	-0,27	-2,72	-0,14	-1,35

Fonte: Autora (2017)

Quanto mais refinada for a malha, mais a curvatura das barras se aproximam nas duas direções, o que conseqüentemente gera um melhor comportamento da laje. Analisando os resultados, pode-se perceber que quanto menor for o espaçamento entre as barras, mais densa será a malha e melhores serão os resultados obtidos. Sendo possível observar uma variação mínima dos valores de momentos positivos nas duas direções e dos momentos negativos na região das vigas, para as malhas de 50x50 cm, 33,3 x 33,3 cm e 25 x 25 cm. Fato que demonstra que os valores de

momento fletor realmente convergem. Vale lembrar que quanto mais espaçada é a malha, menor a quantidade de cálculos a serem feitos e menor será o tempo de processamento.

Entretanto, percebe-se que essa melhora é interrompida quando a largura das barras é menor que a espessura da placa, como se pode observar nos resultados obtidos para a malha de 10x10cm. Quando a malha é espaçada em 100, 50, 33 e 25 centímetros o parâmetro “b” da equação 2 corresponde à espessura da laje (menor dimensão) e o parâmetro “h” corresponde ao espaçamento da malha (maior dimensão), assim a rigidez à torção é proporcional ao cubo da menor dimensão, o que está coerente com o comportamento das barras. Já quando a malha é espaçada em 10 centímetros essas dimensões se invertem, resultando em valores incorretos para o momento fletor, no qual a rigidez à torção passa a ser muito influenciada pelo espaçamento da malha utilizada.

Nota-se também que a variação do negativo sobre o pilar possui irregularidades, isso ocorre devido à alteração do número de barras que chegam ao pilar, em função do espaçamento da malha, e também devido ao comprimento final das barras horizontais nessa região, em função da distância entre a face do pilar e a primeira barra vertical do modelo. Nessas regiões é preciso atentar-se ao comprimento dessas barras, podendo ser necessário adotar uma maior distância das barras ao contorno da laje em função do tamanho do pilar. Além disso, também pode ser necessário definir coeficientes de engastamento parcial na ponta das barras que apresentam “picos” de momentos negativos, esses coeficientes deveriam ser calibrados para se obter uma melhor distribuição dos esforços da laje na região em questão.

Temos então que, malhas muito espaçadas e malhas com espaçamento menor que a espessura da laje não apresentam resultados aceitáveis. Para malhas mais discretizadas (50 x 50 cm, 33,3 x 33,3 cm e 25 x 25 cm) não existe uma variação muito significativa nos resultados, porém na medida em que o espaçamento é reduzido, o computador necessita de mais tempo para efetuar o processamento. Para esse modelo, podemos utilizar o espaçamento de 33,3 centímetros (três barras por metro) o qual, utilizando um tempo de processamento adequado, representa de forma apropriada o comportamento da laje.

## 7 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo avaliar o comportamento estrutural de lajes maciças de concreto armado calculadas pelo Método de Analogia de Grelha, comparando os valores de momentos fletores obtidos para diferentes parâmetros de modelagem.

O modelo baseado na Analogia de Grelha possibilita uma análise integrada levando a resultados compatíveis com a realidade, mas deve-se ficar atento à algumas considerações de modelagem para se obter resultados com precisão adequada. A influência de critérios como o espaçamento da malha, a rigidez à torção dos elementos da grelha e a rigidez da vinculação das barras com os apoios, foi estudada neste trabalho no intuito de obter-se um modelo que melhor represente o comportamento real de uma laje maciça.

Após o processamento dos modelos propostos, foram apresentados os esforços para os diferentes parâmetros em questão, e foi feita uma análise comparativa entre os resultados, procurando explicar as possíveis causas para as diferenças observadas. A partir da comparação e análise dos resultados foram fornecidas indicações para adoção dos parâmetros considerados mais adequados. É importante salientar que esses resultados mostraram-se adequados para esse pavimento, sendo de extrema importância uma avaliação da validade do mesmo para outros pavimentos.

Nos pavimentos de concreto armado modelados pelo Método de Analogia de Grelha, os pilares são simulados por apoios e, através das comparações feitas nesse trabalho, tem-se que a consideração da vinculação das barras de laje com estes apoios leva a resultados mais coerentes quando são utilizados apoios elásticos à translação e à rotação, pois, quando os apoios são considerados como simples restrições, através da utilização de barras rígidas na ligação das barras com o pilar, são encontrados “picos” de momentos negativos na laje discrepantes dos valores usuais esperados. Os apoios elásticos simulam a plastificação do apoio, levando a uma redistribuição dos esforços e, conseqüentemente, a resultados mais compatíveis com o real comportamento da laje.

Em relação à rigidez à torção das barras, os resultados mais realistas são encontrados quando considera-se uma redução da inércia à torção. Já que, o diagrama de momentos fletores quando leva em consideração a torção apresenta descontinuidades, fazendo com que, em muitos casos, os momentos positivos fletores máximos na laje não ocorram no centro do vão. Além disso, a redução da rigidez à torção das barras é necessária devida à baixa resistência do concreto armado a esse tipo de solicitação, sendo assim, a redução irá simular a plastificação da laje quando solicitada a esse tipo de esforço.

É importante ressaltar que o Engenheiro deve definir com coerência a magnitude das plastificações adotadas, pois se esses parâmetros forem adotados de maneira inapropriada obtém-se uma estrutura insegura, frágil e com baixa ductilidade.

No modelo de Analogia de Grelha não existe nenhum princípio matemático que garanta que as distorções angulares de um ponto sejam iguais nas duas direções ortogonais, entretanto, se a malha da grelha for suficientemente refinada, essas distorções irão se aproximar. Sendo assim, as grelhas menos espaçadas levam a resultados mais coerentes para o momento fletor, notando-se uma convergência dos valores para grelhas mais refinadas, porém essa convergência cessa quando o espaçamento entre as barras torna-se menor que a altura da laje. Desta maneira, deve-se adotar uma grelha suficientemente refinada na qual o processamento não seja demasiadamente lento.

Nas comparações feitas neste trabalho é possível uma certa irregularidade na variação do momento fletor negativo obtido na medida em que o espaçamento das barras foram alterados, enfatizando que não é a grelha menos espaçada que traz o resultado mais coerente e que em regiões críticas, como pilares e bordas de lajes, deve-se estar atento aos resultados, fazendo as alterações necessárias para se obter o comportamento da laje de forma mais real possível.

A adequada obtenção de resultados no Método de Analogia de Grelha, assim como em outros métodos numéricos, depende da correta modelagem da laje, da atribuição de suas propriedades, condições de contorno e plastificações. A análise dos resultados deve ser criteriosa e, quando necessário, deve-se modificar o modelo em determinados trechos para obter resultados mais precisos.



É de extrema importância que o Engenheiro conheça os limites e possibilidades do *software* utilizado, e que saiba adotar os modelos e considerações mais adequados para cada tipo de estrutura. Observa-se também que o uso de programas de cálculo estrutural exige do usuário conhecimentos técnico e normativo, que associados a experiência garantem a correta elaboração de um projeto de estruturas.

## REFERÊNCIAS

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6618 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

BANKI, André Luiz. **Modelos de análise de lajes de concreto armado**. Disponível em: “<http://faq.altoqi.com.br/content/245/588/pt-br/modelos-de-an%C3%A1lise-de-lajes-de-concreto-armado.html>”.

BARBOZA, Marco Robiati. **Concepção e análise de estruturas de edifícios em concreto armado**. Relatório - UNESP, Bauru, 2008.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Notas de Aula da disciplina de Estruturas de Concreto I – Lajes de Concreto**. Apostila do curso de graduação em Engenharia Civil. UNESP, 2005.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado – Segundo a NBR 6618:2014**. 4ª ed. São Carlos: EdUFSCAR, 2014. 415 p.

CUNHA, Albino Joaquim Pimenta da; SOUZA, Vicente Custódio Moreira de. **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. 2ª ed. Rio de Janeiro: UERJ, 1998. 580 p.

DEBELLA, Leticia Barizon Col. **Estudo da analogia de grelha no cálculo de lajes maciças de concreto armado**. Dissertação - UTFPR, Pato Branco, 2015.

HAMBLY, E.C. **Bridge deck behavior**. London, Chapman and Hall, 1976.

HEENRICHS, Carlos Alexandre. **Estudos sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado**. Dissertação - UFSC, Florianópolis, 2003.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado – Cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. 1ª ed. São Paulo: Pini, 2007. 624 p.

NEVES, Luís Filipe Costa dos Santos. **Comparação de modelos de grelha e de elementos finitos de laje na modelação de estruturas de betão armado**. Dissertação – IST, Lisboa, 2010.

SILVA, Ney Amorim. **Concreto armado I**. Apostila do curso de especialização em estruturas. UFMG, 2015.

SILVA, M. A. F. ; FIGUEIREDO FILHO, J. R. ; CARVALHO, R. C. **A utilização da analogia de grelha para análise de pavimentos de edifícios em concreto armado**. In: V Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto. São Paulo, 2003.

STRAMANDINOLI, J. S. B. ; LORIGGIO, D. D. **Estudo da rigidez à torção para a aplicação do processo de analogia de grelha em lajes maciças.** In: V Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto. São Paulo, 2003.

TQS Informática Ltda. **Manual de análise estrutural.** Versão 17. São Paulo, 2017.

TQS Informática Ltda. **Manual de grelhas.** Versão 17. São Paulo, 2017.