

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM
ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO E AÇO**

**ESTUDO DE ELEMENTO FINITO DE 3 NÓS E 5 GRAUS DE
LIBERDADE E SEU EFEITO NO BLOQUEIO DE SOLUÇÃO NO CASO
DE UMA VIGA ENGASTADA A PARTIR DAS TEORIAS DE VIGAS DE
EULER BERNOULLI E TIMOSHENKO**

Eduardo Henrique Ávila de Oliveira

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E AÇO

**ESTUDO DE ELEMENTO FINITO DE 3 NÓS E 5 GRAUS DE LIBERDADE E SEU
EFEITO NO BLOQUEIO DE SOLUÇÃO NO CASO DE UMA VIGA ENGASTADA A
PARTIR DAS TEORIAS DE VIGAS DE EULER BERNOULLI E TIMOSHENKO**

EDUARDO HENRIQUE ÁVILA DE OLIVEIRA

Trabalho Final apresentado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e Aço".

Comissão Examinadora:

Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES – UFMG (Orientador)

Prof. Felício Bruzzi Barros
DEES – UFMG

Belo Horizonte, 21 de junho de 2017

SUMÁRIO

RESUMO	4
1. INTRODUÇÃO	5
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
3. OBJETIVO.....	13
4. ELEMENTOS FINITOS ESCOLHIDOS PARA O ESTUDO.....	13
4.1. Caracterização E Obtenção Da Matriz De Rigidez Do Elemento Finito Tipo 1 – 3 Nós E 5 Graus De Liberdade (3 Deslocamentos Verticais E 2 Rotações).....	14
4.2. Obtenção Da Matriz De Rigidez Do Elemento Finito Tipo 2 – 3 Nós E 5 Graus De Liberdade (2 Deslocamentos Verticais E 3 Rotações)	19
5. EXEMPLO A SER ESTUDADO	24
5.1. Estudo Do Elemento Tipo 1	25
5.2. Estudo Do Elemento Tipo 2	29
6. COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS E ELEMENTOS	33
7. CONCLUSÃO	36
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	38

RESUMO

Esse trabalho foi desenvolvido com o intuito de estudar o comportamento de um elemento finito de 3 nós e 5 graus de liberdade no caso prático de uma viga engastada em uma extremidade. A flecha foi analisada na extremidade livre para diversos valores de esbeltez da viga para a teoria de Timoshenko, que considera o efeito do esforço cortante e a distorção da seção. Primeiramente, foram desenvolvidas as matrizes de rigidezes de dois tipos de elementos: o elemento tipo 1 com deslocamentos verticais nos 3 nós e apenas rotações nos nós externos; e o elemento tipo 2 com rotações nos 3 nós e deslocamentos verticais nos nós externos. A partir da obtenção de suas matrizes de rigidez, foram obtidos os valores dos deslocamentos nodais. O parâmetro de comparação para estudo dos dois tipos de elementos estudados foi a razão entre o deslocamento vertical do nó livre que tem uma carga concentrada para a teoria de Euler-Bernoulli e o deslocamento vertical do mesmo nó relacionado à teoria de Timoshenko. Ademais, o resultado esperado era que a medida que a esbeltez da viga aumentava, o efeito do esforço cortante seria menos significativo devido ao fato de que a área da seção transversal, nesse caso, ser bem menor que o comprimento da viga. O elemento tipo 1 apresentou resultados satisfatórios na medida que a razão mencionada anteriormente não tendeu para o valor nulo com o aumento da esbeltez da viga. No entanto, no elemento tipo 2, essa razão se aproximou do valor nulo com o aumento da esbeltez. Esses resultados são justificados pelo fato de que a distorção para vigas, na teoria de Timoshenko, é a diferença da rotação e da derivada primeira da função que aproxima a flecha. No caso do elemento tipo 1, foi obtido que a rotação é uma função constante e a função da flecha é de primeiro grau. Portanto, a igualdade pode ser satisfeita ou se aproximar do valor nulo. Já para o caso do elemento tipo 2, tem-se que a rotação é aproximada por uma função de segundo grau, enquanto a flecha é aproximada por uma função de primeiro grau. Dessa forma, a igualdade não pode ser satisfeita e assim o efeito do esforço cortante vai ser significativo, ocasionando uma superrigidez do elemento. Serão analisados também a representatividade dos esforços de momento fletor e esforço cortante para cada tipo de elemento.

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente utilizado no ramo da engenharia de estruturas e nas diversas áreas do conhecimento como forma de melhorar a análise, via computacional, do comportamento das estruturas.

A discretização de elementos estruturais da engenharia civil em programas computacionais sempre foi um desafio para os engenheiros calculistas. Muitas vezes a definição dos elementos finitos que simularão o comportamento global de uma estrutura já é pré-estabelecida pelos *softwares* existentes no mercado de trabalho, e acaba, muitas vezes, por não representar de forma satisfatória o comportamento da estrutura.

Por causa desse fato, é muito importante que os engenheiros tenham conhecimento dos elementos finitos e entendam sobre a formulação de cada um com intuito de fazer uma discretização compatível com o comportamento real da estrutura.

No caso desse trabalho, optou-se por fazer uma análise comparativa a partir de duas teorias de vigas, Euler-Bernouli e Timoshenko, no que se refere à flecha no caso particular de uma viga engastada em uma de suas extremidades. Para isso, será utilizado um elemento finito de viga com 3 nós e 5 cinco graus de liberdade. Além disso, será feita análise do deslocamento vertical do nó livre da viga a partir da variação da esbeltez da viga. Outrossim, será verificado se as funções dos momentos fletores e dos esforços cortantes são capazes de representar a variação do esforço em toda a extensão do elemento.

Toda a análise será feita a partir da dedução e obtenção da matriz de rigidez dos elementos a serem aplicados nesse trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

SORIANO (2009) obtém a matriz de rigidez de um elemento finito de cinco graus de liberdade com o objetivo de representar exatamente os esforços solicitantes ao longo do elemento estrutural. Para isso, a aproximação da função e do campo de deslocamentos é polinomial de quarta ordem (a partir da teoria de Euler-Bernoulli) pelo fato de haver cinco deslocamentos nodais, sendo assim capaz de representar campo quadrático de momento fletor e campo linear de esforço cortante. Contudo, o desenvolvimento desse elemento é realizado a partir da teoria clássica de vigas ou de Euler-Bernoulli, na qual é desprezado a influência do esforço cortante na rigidez da viga.

A matriz de rigidez obtida por SORIANO (2009) é dada por:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{316}{5L^2} & \frac{94}{5L} & \frac{196}{5L^2} & -\frac{34}{5L} & -\frac{512}{5L^2} \\ & \frac{36}{5} & \frac{34}{5L} & -\frac{6}{5} & -\frac{128}{5L} \\ & & \frac{316}{5L^2} & -\frac{94}{5L} & -\frac{512}{5L^2} \\ & & & \frac{36}{5} & \frac{128}{5L} \\ \text{SIM.} & & & & \frac{1024}{5L^2} \end{bmatrix}$$

AZEVEDO (2003) desenvolve e explica as teorias de vigas estudadas nesse trabalho, teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

A teoria de Euler Bernoulli compartilha das seguintes hipóteses:

- 1) Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao do eixo da viga;
- 2) O deslocamento lateral do elemento é nulo;
- 3) As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação.

A Figura 2.1 a seguir demonstra a configuração de uma seção de viga após a deformação devido a um momento fletor segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

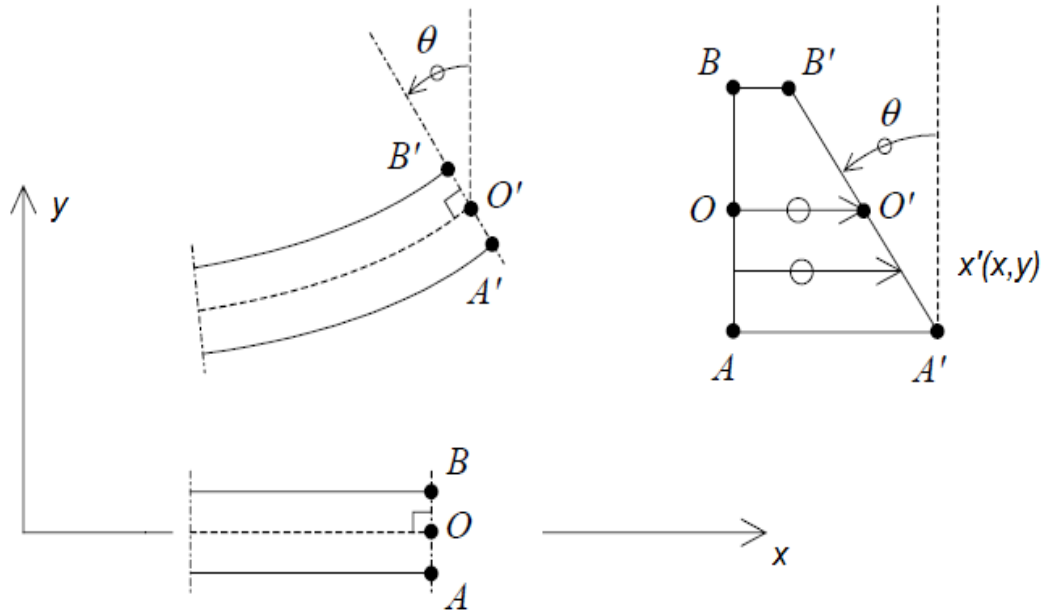


Figura 2.1 : Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli

Em contrapartida, a teoria de Timoshenko compartilha das seguintes hipóteses:

- 1) Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao do eixo da viga;
- 2) O deslocamento lateral do elemento é nulo;
- 3) As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação.

A formulação de Timoshenko para a flexão de vigas representa uma maior aproximação da deformação real da seção transversal em vigas. Na medida em que a esbeltez da viga ou a razão entre comprimento do elemento e a área da seção transversal diminuem, os esforços de cisalhamento na direção da altura tornam-se importantes e não podem ser mais desprezadas.

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

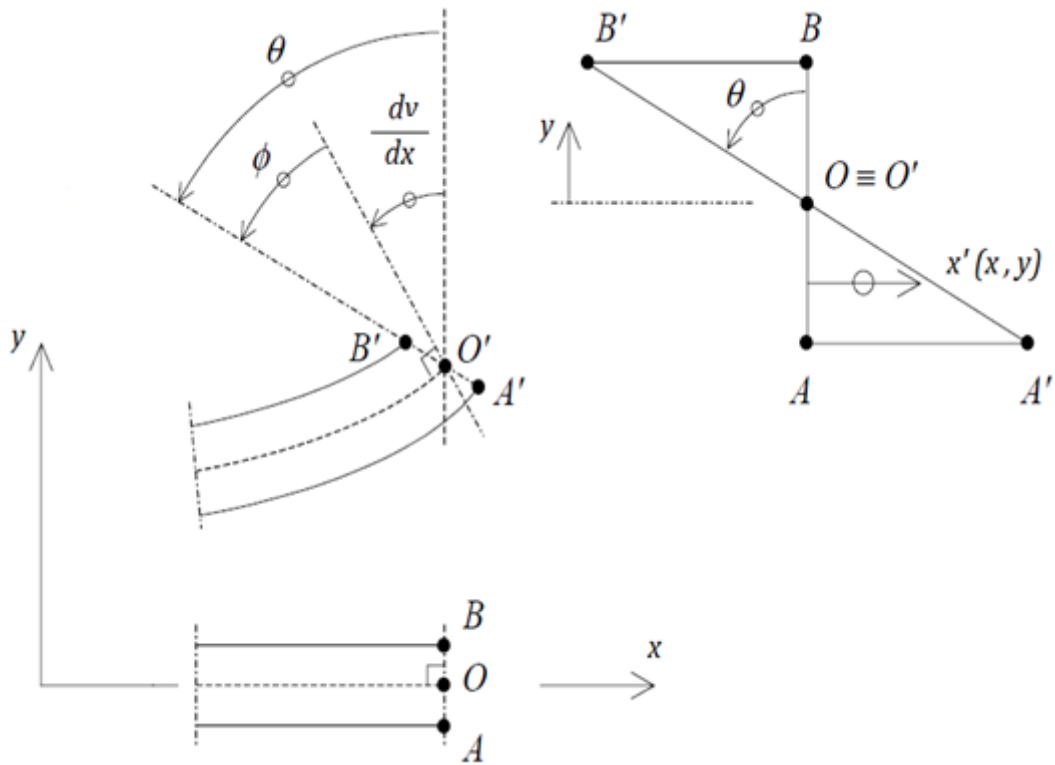


Figura 2.2 : Teoria de Vigas de Timoshenko

A Figura 2.2 ilustra a deformada de uma viga submetida flexão devido à ação de cargas verticais segundo a teoria de Timoshenko. Dessa forma, é possível inferir que:

$$\theta = \frac{dv}{dx} + \phi$$

Além disso, considerando que $\text{tg}\theta = x'/y$, tem-se:

$$x'(x, y) = -y \cdot \theta(x)$$

Na formulação da viga de Timoshenko, tem-se, da relação Deformação x Deslocamento, a situação:

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d\theta}{dx}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

A Figura 2.3, obtida de OÑATE (1995), mostra o estudo e o comportamento de diferentes elementos finitos, além da influência da integração reduzida na influência do bloqueio de uma solução. O bloqueio representa uma superrrigidez da viga advinda da consideração do esforço cortante e que resulta em flechas da teoria de viga de Timoshenko que destoam fortemente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O parâmetro escolhido para o estudo é resultado da razão de flechas nas extremidade da viga entre a teoria de Timoshenko e a teoria de Euler-Bernoulli.

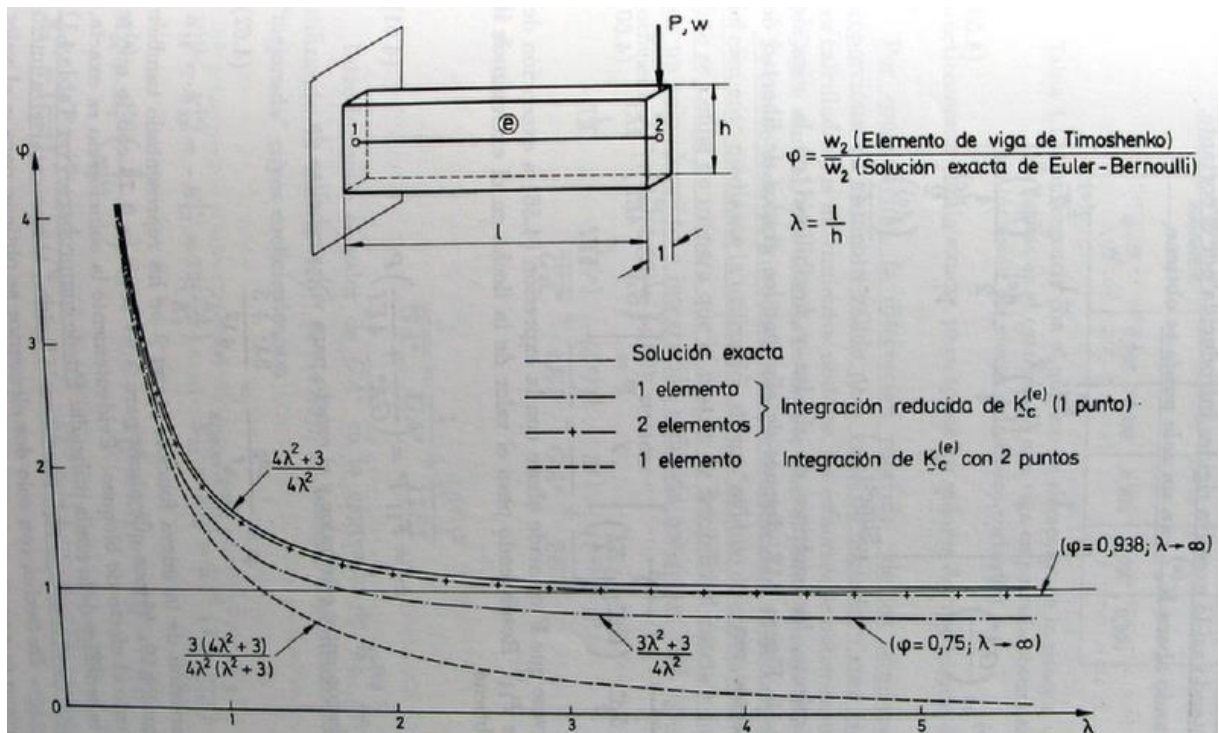


Figura 2.3 : Viga de dois nós analisada como elemento de Timoshenko. Variação da flecha de a extremidade livre de uma viga engastada. Variação da ordem de integração para a rigidez do elemento. (Oñate, 1995)

O elemento de OÑATE cuja identificação é o elemento unitário com integração da matriz de rigidez relacionada ao corte com dois pontos é constituído de dois nós e 4 graus de liberdade. A matriz de rigidez de um elemento de dois nós com quatro graus de liberdade, considerando o efeito do esforço cortante, é obtida a partir da relação:

$$k = \int B^T D B dx$$

Sendo:

$$B = \begin{Bmatrix} B_F \\ B_C \end{Bmatrix} \text{ e } D = \begin{Bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA^* \end{Bmatrix}$$

Dessa forma, consegue-se identificar as contribuições de flexão e cortante na matriz de rigidez.

As parcelas da matriz de rigidez global que correspondem à flexão, k_f , e ao esforço cortante, k_c , estão representadas a seguir e foram extraídas de OÑATE (1995):

$$k_f = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_c = \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ & & 1 & -\frac{L}{2} \\ \text{SIM.} & & & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

Partindo do exemplo a ser estudado que é uma viga engastada em um nó (1) e livre no outro nó (2) que está submetido a uma carga concentrada de valor P , consegue-se formular a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} \frac{GA^*}{L} & & & & \\ & \frac{GA^*}{2} & & & \\ & \left(\frac{GA^*}{3}L + \frac{EI}{L}\right) & & & \\ & & -\frac{GA^*}{2} & & \\ \text{SIM.} & & \frac{GA^*}{L} & & \\ & & & \frac{GA^*}{2} & \\ & & & \left(\frac{GA^*}{6}L - \frac{EI}{L}\right) & \\ & & & -\frac{GA^*}{2} & \\ & & & \left(\frac{GA^*}{3}L + \frac{EI}{L}\right) & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{y1} \\ \phi_1 \\ d_{y2} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A partir da eliminação dos graus de liberdade nulos (d_{y1} e ϕ_1) correspondentes ao engastamento obtém-se o sistema de equações simplificado:

$$\begin{bmatrix} \frac{GA^*}{L} & -\frac{GA^*}{2} \\ -\frac{GA^*}{2} & \left(\frac{GA^*}{3}L + \frac{EI}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{y2} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com a inversão da matriz de rigidez, obtém-se a matriz de flexibilidade e o sistema pode ser resolvido ao se encontrar a solução do sistema:

$$\begin{Bmatrix} d_{y2} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = k^{-1}f = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \begin{bmatrix} \frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{EI} \\ \frac{L^2}{EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}; \text{ onde } \gamma = \frac{12EI}{GA^*L^2}$$

A flecha na extremidade livre da viga então vale:

$$d_{y2} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) P$$

Para uma seção retangular com valores de base e altura, b e h, respectivamente:

$$I = \frac{bh^3}{12}; A^* = \frac{5}{6}bh \text{ e adotando } \nu = 0,25 \rightarrow \gamma = 3 \left(\frac{h}{L} \right)^2 = \frac{3}{\lambda^2}$$

onde $\lambda = h/L$ é coeficiente de esbeltez da viga.

De acordo com TIMOSHENKO (1970), a expressão exata da matriz de flexibilidade ($F = k^{-1}$) de uma viga com e sem a inclusão do efeito do esforço cortante de acordo com a teoria clássica de vigas é:

a) Sem esforço cortante (Euler-Bernoulli):

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

b) Com esforço cortante (Timoshenko):

$$F = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

A flecha exata na extremidade livre da viga é:

a) Sem esforço cortante:

$$d'_{2y} = \frac{L^3}{3EI} P$$

b) Com esforços cortante:

$$d'_{2y} = \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) P$$

Para uma viga esbelta, cujo valores de esbeltez são grandes, espera-se que o efeito do esforço cortante seja desprezível, e a solução numérica obtida deve coincidir com a expressão de flecha exata demonstrada na letra (a).

A avaliação dessa tendência de convergência pode ser estudada por intermédio da razão entre a flecha obtida pelo elemento finito estudado e a flecha exata:

$$\varphi = \frac{d_{2y}}{d'_{2y}} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) P}{\left(\frac{L^3}{3EI} \right) P} = \frac{3(4\lambda^2 + 3)}{4\lambda^2(\lambda^2 + 3)}$$

Esperaria que essa função se aproximasse do valor unitário. No entanto, à medida que a esbeltez aumenta essa razão tende ao valor nulo, conforme pode ser visto na Figura 2.3.

Oñate utiliza um procedimento para “driblar” esse problema da superestimativa da rigidez que consiste em diminuir a influência do esforço cortante ao integrar os termos da matriz de rigidez relacionada ao esforço cortante. Para isso, ele utiliza um número de pontos de integração inferior ao que é necessário para o cálculo exato. Assim, espera-se que a flexibilidade da estrutura deve aumentar, diminuindo a enorme rigidez encontrada com um elemento de dois nós estudado primeiramente.

Com a integração reduzida com 1 ponto vê que o parâmetro φ tende para o valor de 0,75 e o efeito de bloqueio é eliminado. A não exatidão da solução se deve á simplicidade do elemento considerado em relação à realidade.

Oñate também faz o cálculo para 2 elementos e nota que φ tende para 0,938. Apesar de não demonstrado no gráfico anterior, Oñate confirma que a medida que aumenta o número de elementos, o valor de φ tende para o valor unitário. Essas afirmações podem ser demonstradas pela Tabela 2.1 adaptada de OÑATE (1995):

	Valores para $L/h \rightarrow \infty$				
Número de Elementos	1	2	4	8	16
$\varphi = \frac{d_{2y}}{d'_{2y}}$	0,750	0,938	0,984	0,996	0,999

Tabela 2.1: Variação da relação de flechas entre as teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli para a variação de esbeltez da viga

3. OBJETIVO

O objetivo é verificar a influência da adição de um nó interno ao elemento finito no bloqueio da solução. Serão utilizados dois tipos de elementos de viga: o tipo 1 com 3 nós e 5 graus de liberdade (nó interno com deslocamento vertical liberado) e o tipo 2 com também 3 nós e 5 graus de liberdade (nó interno com rotação liberada)

4. ELEMENTOS FINITOS ESCOLHIDOS PARA O ESTUDO

Nesse capítulo serão demonstradas as formulações dos dois elementos finitos escolhidos para o estudo do efeito de bloqueio para uma viga com uma de suas extremidades engastada e a outra livre e submetida a uma carga concentrada.

4.1. Caracterização E Obtenção Da Matriz De Rigidez Do Elemento Finito Tipo 1 – 3 Nós E 5 Graus De Liberdade (3 Deslocamentos Verticais E 2 Rotações)

O elemento finito que será estudado neste item, e do qual será obtido a matriz de rigidez, está demonstrado na Figura 4.1:

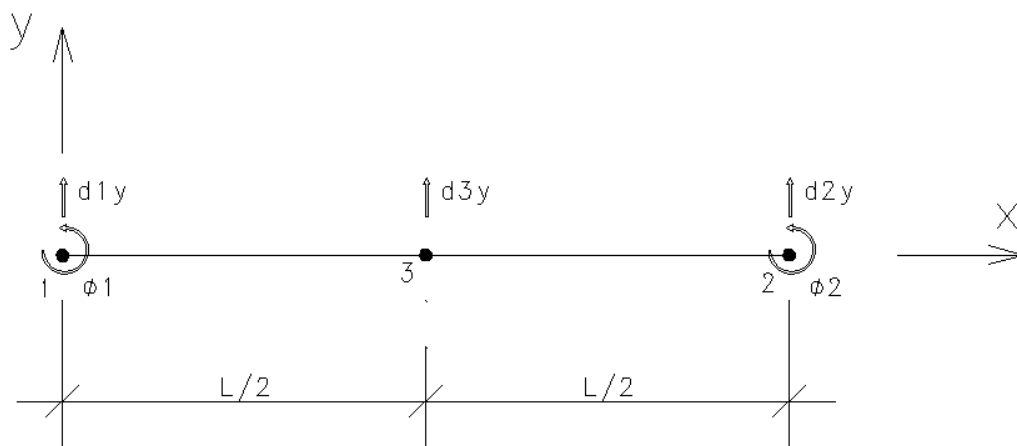


Figura 4.1 : Elemento finito de viga do tipo 1 (3 nós e deslocamento vertical no nó interno)

A interpolação do deslocamento vertical “y” e da rotação θ é realizado separadamente para cada uma destas variáveis, pois a rotação não deriva exatamente do deslocamento vertical devido à deformação relacionada ao corte.

O deslocamento vertical, por apresentar três deslocamentos nodais, terá uma interpolação quadrática.

$$v(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2$$

- Para o nó 1:
 $v(0) = d_{1y}$
- Para o nó 2:
 $v(L) = d_{2y}$
- Para o nó 3:

$$v(L/2) = d_{3y}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3(0) + a_5(0)^2 = d_{1y} \\ a_1 + a_3(L) + a_5(L)^2 = d_{2y} \\ a_1 + a_3(L/2) + a_5(L/2)^2 = d_{3y} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2y} \\ d_{3y} \end{Bmatrix}$$

$$\text{onde } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix} \text{ e } d = \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2y} \\ d_{3y} \end{Bmatrix}$$

Sabe-se que:

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

$$\text{onde } \varphi = [1 \quad x \quad x^2] \text{ e } \alpha = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

Logo, a partir dessas equações:

$$v(x) = \varphi \cdot G^{-1} \cdot d = N \cdot d$$

onde N é a matriz das funções de forma do elemento considerado.

A inversa da matriz G é dada por:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & -1/L & 4/L \\ 2/L^2 & 2/L^2 & -4/L^2 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz das funções de forma do elemento é dada por:

$$N = \varphi \cdot G^{-1} = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & -1/L & 4/L \\ 2/L^2 & 2/L^2 & -4/L^2 \end{bmatrix}$$

$$N = \left[1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right]$$

$$dN = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right]$$

Por outro lado, a rotação, por apresentar dois deslocamentos nodais, terá uma interpolação linear.

$$\theta(x) = a_3 + a_4x$$

- Para o nó 1:

$$\theta(0) = \phi_2$$

- Para o nó 2:

$$\theta(L) = \phi_4$$

$$\begin{cases} a_2 + a_4(0) = \phi_2 \\ a_2 + a_4(L) = \phi_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{onde } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}, \alpha = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} \text{ e } d = \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

Sabe-se que:

$$v(x) = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{onde } \varphi = [1 \quad x] \text{ e } \alpha = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Logo, a partir dessas equações:

$$v(x) = \varphi \cdot G^{-1} \cdot d = N \cdot d$$

onde N é a matriz das funções de forma do elemento considerado.

A inversa da matriz G é dada por:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz das funções de forma do elemento é dada por:

$$N = \varphi \cdot G^{-1} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

$$N = [1 - x/L \quad x/L]$$

$$dN = [-1/L \quad 1/L]$$

Considerando que:

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Logo:

$$\gamma_{xy} = \frac{d - y \cdot \theta(x)}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \frac{dv}{dx} = -\phi$$

Derivando a função de aproximação:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \cdot a_1 + \frac{dN_3}{dx} \cdot a_3 + \frac{dN_5}{dx} \cdot a_5$$

Substitui-se a equação acima na penúltima, além da variável θ :

$$\gamma_{xy} = -N_2 \cdot a_2 - N_4 \cdot a_4 + \frac{dN_1}{dx} \cdot a_1 + \frac{dN_3}{dx} \cdot a_3 + \frac{dN_5}{dx} \cdot a_5$$

A organização matricial da equação acima é dada por:

$$\gamma_{xy} = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad -N_2 \quad \frac{dN_3}{dx} \quad -N_4 \quad \frac{dN_5}{dx} \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$B_s = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad -N_2 \quad \frac{dN_3}{dx} \quad -N_4 \quad \frac{dN_5}{dx} \right]$$

e B_s é a matriz de deformação associada ao cisalhamento.

Considerando por outro lado que:

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d\theta}{dx}$$

Considerando a coordenada do nó do elemento:

$$\varepsilon'(x) = -\frac{d\theta}{dx}$$

Derivando a função de aproximação:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dN_2}{dx} \cdot a_2 + \frac{dN_4}{dx} \cdot a_4$$

A organização matricial da equação acima é dada por:

$$\varepsilon'(x) = \left[0 \quad -\frac{dN_2}{dx} \quad 0 \quad -\frac{dN_4}{dx} \quad 0 \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$B_b = \left[0 \quad -\frac{dN_2}{dx} \quad 0 \quad -\frac{dN_4}{dx} \quad 0 \right]$$

e B_s é a matriz de deformação associada à flexão.

Após todas essas demonstrações, pode-se determinar a matriz de rigidez do elemento em estudo considerando duas partes na integração: àquela relacionada ao momento (EI) e á relacionada ao corte (GA):

$$k = EI \int_L^0 B_b^t \cdot B_b dx + GA \int_L^0 B_s^t \cdot B_s dx$$

A integração analítica foi realizada na variável x através do auxílio do programa wxMaxima e ambas as partes são simétricas:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ \text{SIM.} & & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 7/3 & 5L/6 & 1/3 & L/6 & -8/3 \\ & L^2/3 & -L/6 & L^2/6 & -2L/3 \\ & & 7/3 & -5L/6 & -8/3 \\ & & & L^2/3 & 2L/3 \\ \text{SIM.} & & & & 16/3 \end{bmatrix}$$

4.2. Obtenção Da Matriz De Rigidez Do Elemento Finito Tipo 2 – 3 Nós E 5 Graus De Liberdade (2 Deslocamentos Verticais E 3 Rotações)

O elemento finito que será estudado, e do qual será obtido a matriz de rigidez assim como no elemento tipo 1, está demonstrado na Figura 4.2:

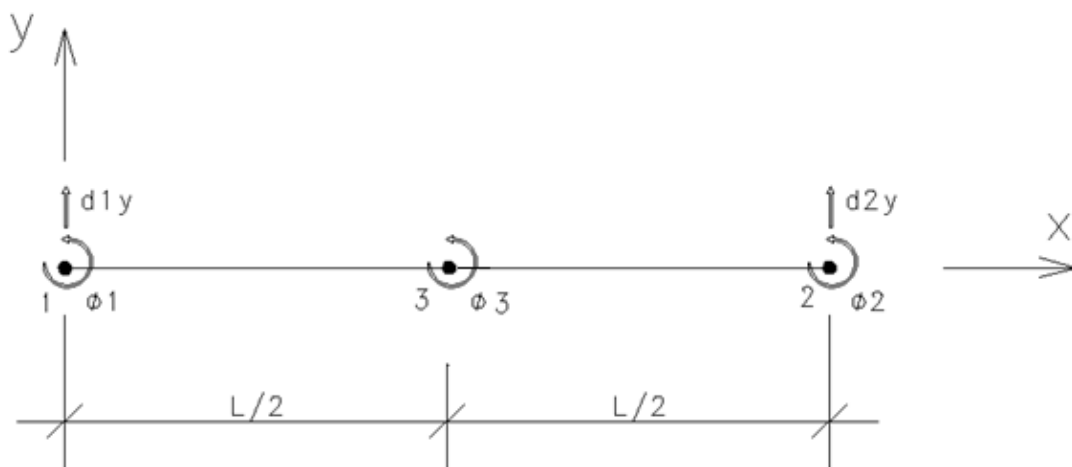


Figura 4.2 : Elemento finito de viga do tipo 2 (3 nós e rotação no nó interno)

A interpolação do deslocamento vertical y e da rotação θ é realizado separadamente para cada uma destas variáveis, pois a rotação não deriva exatamente do deslocamento vertical devido à deformação relacionada ao corte.

O deslocamento vertical, por apresentar dois deslocamentos nodais, terá uma interpolação linear.

$$v(x) = a_1 + a_3x$$

- Para o nó 1:

$$v(0) = d_{1y}$$

- Para o nó 2:

$$v(L) = d_{2y}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3(0) = d_{1y} \\ a_1 + a_3(L) = d_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

onde $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix}$ e $d = \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$

Sabe-se que:

$$v(x) = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

onde $\varphi = [1 \quad x]$ e $\alpha = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix}$

Logo, a partir dessas equações:

$$v(x) = \varphi \cdot G^{-1} \cdot d = N \cdot d$$

onde N é a matriz das funções de forma do elemento considerado.

A inversa da matriz G é dada por:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz das funções de forma do elemento é dada por:

$$N = \varphi \cdot G^{-1} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

$$N = [1 - x/L \quad x/L]$$

$$dN = [-1/L \quad 1/L]$$

Considerando que:

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Logo:

$$\gamma_{xy} = \frac{d - y \cdot \theta(x)}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \frac{dv}{dx} = -\phi$$

Derivando a função de aproximação:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dN_1}{dx} \cdot a_1 + \frac{dN_3}{dx} \cdot a_3$$

Substitui-se a equação acima na penúltima, além da variável θ :

$$\gamma_{xy} = -N_2 \cdot a_2 - N_4 \cdot a_4 - N_5 \cdot a_5 + \frac{dN_1}{dx} \cdot a_1 + \frac{dN_3}{dx} \cdot a_3$$

A organização matricial da equação acima é dada por:

$$\gamma_{xy} = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad -N_2 \quad \frac{dN_3}{dx} \quad -N_4 \quad -N_5 \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$B_s = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad -N_2 \quad \frac{dN_3}{dx} \quad -N_4 \quad -N_5 \right]$$

e B_s é a matriz de deformação associada ao corte (cisalhamento).

Por outro lado, a rotação, por apresentar três deslocamentos nodais, terá uma interpolação quadrática.

$$\theta(x) = a_2 + a_4x + a_5x^2$$

- Para o nó 1:
 $\theta(0) = \phi_1$
- Para o nó 2:
 $\theta(L) = \phi_2$
- Para o nó 3:
 $\theta(L/2) = \phi_3$

$$\begin{cases} a_2 + a_4(0) + a_5(0)^2 = \phi_1 \\ a_2 + a_4(L) + a_5(L)^2 = \phi_2 \\ a_2 + a_4(L/2) + a_5(L/2)^2 = \phi_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

onde $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$ e $d = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$

Sabe-se que:

$$\theta(x) = [1 \quad x \quad x^2] \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

onde $\varphi = [1 \quad x \quad x^2]$ e $\alpha = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$

Logo, a partir dessas equações:

$$\theta(x) = \varphi \cdot G^{-1} \cdot d = N \cdot d$$

onde N é a matriz das funções de forma do elemento considerado.

A inversa da matriz G é dada por:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & -1/L & 4/L \\ 2/L^2 & 2/L^2 & -4/L^2 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz das funções de forma do elemento é dada por:

$$N = \varphi \cdot G^{-1} = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L & -1/L & 4/L \\ 2/L^2 & 2/L^2 & -4/L^2 \end{bmatrix}$$

$$N = \left[1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right]$$

$$dN = \left[-\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right]$$

Considerando por outro lado que:

$$\varepsilon(x) = -y \frac{d\theta}{dx}$$

Considerando a coordenada do nó do elemento:

$$\varepsilon'(x) = -\frac{d\theta}{dx}$$

Derivando a função de aproximação:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dN_2}{dx} \cdot a_2 + \frac{dN_4}{dx} \cdot a_4 + \frac{dN_5}{dx} \cdot a_5$$

A organização matricial da equação acima é dada por:

$$\varepsilon'(x) = \left[0 \quad -\frac{dN_2}{dx} \quad 0 \quad -\frac{dN_4}{dx} \quad -\frac{dN_5}{dx} \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$B_b = \left[0 \quad -\frac{dN_2}{dx} \quad 0 \quad -\frac{dN_4}{dx} \quad -\frac{dN_5}{dx} \right]$$

e B_b é a matriz de deformação associada à flexão.

Após todas essas demonstrações, pode-se determinar a matriz de rigidez do elemento em estudo considerando duas partes na integração: àquela relacionada ao momento (EI) e á relacionada ao corte (GA):

$$k = EI \int_L^0 B_b^t \cdot B_b dx + GA \int_L^0 B_s^t \cdot B_s dx$$

A integração analítica foi realizada na variável x através do auxílio do programa wxMaxima e ambas as partes são simétricas:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 7/3 & 0 & 1/3 & -8/3 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7/3 & -8/3 \\ \text{SIM.} & & & & 16/3 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/6 & -1 & L/6 & 2L/3 \\ & 2L^2/15 & -L/6 & -L^2/30 & L^2/15 \\ & & 1 & -L/6 & -2L/3 \\ & & & 2L^2/15 & L^2/15 \\ \text{SIM.} & & & & 8L^2/15 \end{bmatrix}$$

5. EXEMPLO A SER ESTUDADO

O caso a ser estudado será o de uma viga com uma extremidade engastada e a outra livre submetida a uma carga concentrada de valor P conforme ilustra, a seguir, a Figura 5.1.

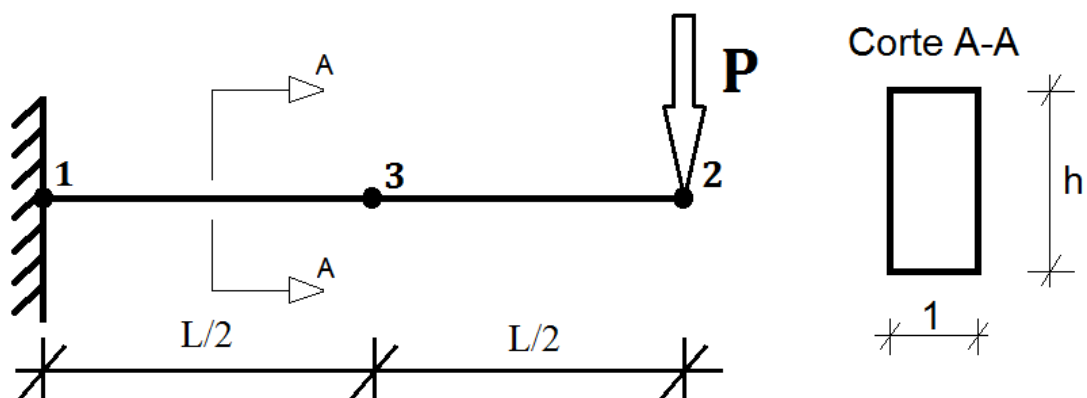


Figura 5.1 : Caso a ser estudado (viga retangular engastada em uma extremidade e livre na outra)

O elemento finito anteriormente demonstrado possibilita a simplificação da relação entre a matriz de rigidez (k), a matriz de deslocamentos (d) e a matriz de esforços (f). Essa relação é simplificada pela eliminação de linhas e colunas da igualdade devido aos deslocamentos restringidos devido ao engastamento da viga. Em ambos os elementos, como será visto a seguir, haverá a simplificação da matriz original 5x5 para uma matriz 3x3 devido ao deslocamento vertical e a rotação no nó 1 serem nulos.

5.1. Estudo Do Elemento Tipo 1

No item 1.1 foi demonstrada a obtenção da matriz de rigidez de um elemento finito de 3 nós e 5 graus de liberdade, no qual são 2 rotações nos nós extremos e 3 deslocamentos verticais nos 3 nós.

A matriz desse elemento para a teoria de Timoshenko é a seguinte:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 7/3 & 5L/6 & 1/3 & L/6 & -8/3 \\ & L^2/3 & -L/6 & L^2/6 & -2L/3 \\ & & 7/3 & -5L/6 & -8/3 \\ & & & L^2/3 & 2L/3 \\ \text{SIM.} & & & & 16/3 \end{bmatrix}$$

Uma vez eliminados os graus de liberdade nulos correspondentes aos deslocamentos restringidos é obtido o sistema de equações simplificado que relaciona matriz de rigidez, deslocamentos nodais e forças:

$$k \times d = f$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7 GA}{3 L} & & -\frac{8 GA}{3 L} \\ & -\frac{5}{6} GA & \\ & \frac{GAL}{3} + \frac{EI}{L} & \frac{2}{3} GA \\ \text{SIM.} & & \frac{16 GA}{3 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução do sistema anterior se passa pela inversão da matriz de rigidez k do elemento finito mencionado anteriormente que representará a viga em estudo. Essa inversão foi realizada, analiticamente pelo programa wxMáxima e está demonstrada a seguir:

$$k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EIL + AGL^3}{4EIGA} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{8EIL + AGL^3}{16EIGA} \\ & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{8EI} \\ \text{SIM.} & & \frac{28EIL + AGL^3}{64EIGA} \end{bmatrix}$$

Tem-se então:

$$d = k^{-1} \times f$$

$$\begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EIL + AGL^3}{4EIGA} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{8EIL + AGL^3}{16EIGA} \\ & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{8EI} \\ \text{SIM.} & & \frac{28EIL + AGL^3}{64EIGA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo, para o deslocamento vertical na extremidade livre da viga (nó 2) tem-se o seguinte valor:

$$d_{2y} = \left(\frac{4EIL + AGL^3}{4EIGA} \right) P = \left(\frac{4EIL}{4EIGA} + \frac{AGL^3}{4EIGA} \right) P = \left(\frac{L}{GA} + \frac{L^3}{4EI} \right) P$$

$$\phi_2 = \left(\frac{L^2}{2EI} \right) P$$

$$d_{3y} = \left(\frac{8EIL + AGL^3}{16EIGA} \right) P = \left(\frac{8EIL}{16EIGA} + \frac{AGL^3}{16EIGA} \right) P = \left(\frac{L}{2GA} + \frac{L^3}{16EI} \right) P$$

Sabe-se que a rotação e a flecha em qualquer ponto da viga é aproximada através das funções de forma e dos deslocamentos dos nós. Assim, nesse caso tem-se os seguintes valores para as funções que vão representar a rotação e a flecha:

$$\theta = N_{\theta 2} \cdot \phi_2 = \frac{x}{L} \left(\frac{L^2}{2EI} \right) P = \frac{Lx}{2EI} P$$

$$v = N_{v2} \cdot d_{2y} + N_{v3} \cdot d_{3y} = \left(-\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\right) \left(\frac{L}{GA} + \frac{L^3}{4EI}\right) P + \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}\right) \left(\frac{L}{2GA} + \frac{L^3}{16EI}\right) P =$$

$$\left(-\frac{x}{GA} - \frac{xL^2}{4EI} + \frac{2x^2}{GAL} + \frac{x^2L}{2EI}\right) P + \left(\frac{2x}{GA} + \frac{xL^2}{4EI} - \frac{2x^2}{GAL} - \frac{x^2L}{4EI}\right) P =$$

$$v = P \left[x^2 \left(\frac{2}{GAL} + \frac{L}{2EI} \right) - x \left(\frac{1}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) \right] + P \left[x \left(\frac{2}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) - x^2 \left(\frac{2}{GAL} + \frac{L}{4EI} \right) \right]$$

Da teoria de vigas é sabido que a distorção e a curvatura são dadas por:

$$\chi = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad \gamma = \theta - \frac{dv}{dx}$$

Logo:

$$\chi = \frac{d^2}{dx^2} \left\{ P \left[x^2 \left(\frac{2}{GAL} + \frac{L}{2EI} \right) - x \left(\frac{1}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) \right] + P \left[x \left(\frac{2}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) - x^2 \left(\frac{2}{GAL} + \frac{L}{4EI} \right) \right] \right\}$$

$$\chi = \left(\frac{4P}{GAL} + \frac{PL}{EI} \right) - \left(\frac{4P}{GAL} + \frac{PL}{2EI} \right) = \frac{PL}{2EI}$$

$$\gamma = \theta - \frac{dv}{dx} = P \left(\frac{Lx}{2EI} \right) - \left\{ P \left[x \left(\frac{4}{GAL} + \frac{L}{EI} \right) - \left(\frac{1}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) \right] + P \left[\left(\frac{2}{GA} + \frac{L^2}{4EI} \right) - x \left(\frac{4}{GAL} + \frac{L}{2EI} \right) \right] \right\}$$

$$= P \left(\frac{Lx}{2EI} \right) - P \left(\frac{4x}{GAL} \right) - P \left(\frac{Lx}{EI} \right) + P \left(\frac{1}{GA} \right) + P \left(\frac{L^2}{4EI} \right) - P \left(\frac{2}{GA} \right) - P \left(\frac{L^2}{4EI} \right) + P \left(\frac{4x}{GAL} \right)$$

$$+ P \left(\frac{Lx}{2EI} \right)$$

Simplificando a expressão anterior:

$$\gamma = P \left(\frac{1}{GA} \right) - P \left(\frac{2}{GA} \right) = -\frac{P}{GA}$$

A partir dessas informações pode-se calcular os esforços solicitantes na viga a partir desse modelo de elemento finito:

- Momento Fletor:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} = \chi = \frac{PL}{2EI}$$

$$M = \frac{PLEI}{2EI} = \frac{PL}{2} \Rightarrow \text{momento constante não está bem representado}$$

- Esforço Cortante:

Sabendo que o esforço cortante é dado por $V = \tau \cdot A = G \cdot \gamma \cdot A$

$$V = GA \left(-\frac{P}{GA} \right) = -P \Rightarrow \text{cortante constante está bem representada}$$

A análise da influência desse elemento finito escolhido para o caso de bloqueio de solução será realizada a partir do seguinte parâmetro:

$$\varphi = \frac{d_{2y} \text{ (Elemento de viga de Timoshenko)}}{d'_{2y} \text{ (Elemento de viga de Euler – Bernoulli)}}$$

No caso de uma seção retangular serão adotados os seguintes valores conforme OÑATE (1995):

$$I = \frac{bh^3}{12}; A^* = \frac{5}{6}bh; \nu = 0,25$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2,5} = \frac{2E}{5}$$

$$A^* = \frac{5}{6}bh = \frac{5}{6}h \Rightarrow \text{(já que a largura da viga é considerada unitária)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12} \Rightarrow \text{(já que a largura da viga é considerada unitária)}$$

$$\lambda = \frac{L}{h}$$

$$\varphi = \frac{\left(\frac{L}{GA} + \frac{L^3}{4EI} \right) P}{\left(\frac{L^3}{3EI} \right) P} = \frac{\left(\frac{L}{\frac{2E}{5} \frac{5}{6}h} + \frac{L^3}{4E \frac{h^3}{12}} \right)}{\left(\frac{L^3}{3E \frac{h^3}{12}} \right)} = \frac{\left(\frac{L}{\frac{E}{3}h} + \frac{L^3}{\frac{E}{3}h^3} \right)}{\left(\frac{L^3}{\frac{E}{4}h^3} \right)} = \frac{3\lambda^2 + 3}{4\lambda^2}$$

5.2. Estudo Do Elemento Tipo 2

No item 1.2 foi demonstrada a obtenção da matriz de rigidez de um elemento finito de 3 nós e 5 graus de liberdade, no qual são 3 rotações e 2 deslocamentos verticais nos nós extremos.

A matriz desse elemento para a teoria de Timoshenko é a seguinte:

$$k = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 7/3 & 0 & 1/3 & -8/3 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7/3 & -8/3 \\ \text{SIM.} & & & & 16/3 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{GA}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/6 & -1 & L/6 & 2L/3 \\ & 2L^2/15 & -L/6 & -L^2/30 & L^2/15 \\ & & 1 & -L/6 & -2L/3 \\ & & & 2L^2/15 & L^2/15 \\ \text{SIM.} & & & & 8L^2/15 \end{bmatrix}$$

Uma vez eliminados os graus de liberdade nulos correspondentes aos deslocamentos restringidos é obtido o sistema de equações simplificado que relaciona matriz de rigidez, deslocamentos nodais e forças:

$$k \times d = f$$

$$\begin{bmatrix} \frac{GA}{L} & & & & \\ & -\frac{GA}{6} & & & \\ & & \frac{2}{15}GAL + \frac{7EI}{3L} & & \\ & & & \frac{GAL}{15} - \frac{8EI}{3L} & \\ \text{SIM.} & & & & \frac{16EI}{3L} + \frac{8}{15}GAL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2y} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução do sistema anterior se passa pela inversão da matriz de rigidez k do elemento finito mencionado anteriormente que representará a viga em estudo. Essa inversão foi realizada, analiticamente pelo programa wxMáxima e está demonstrada a seguir:

$$k^{-1} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{720E^2I^2L + 312EIGAL^3 + 9G^2A^2L^5}{G^3A^3L^4 + 72G^2A^2EIL^2 + 720GAE^2I^2} & \frac{6L^2}{GAL^2 + 12EI} & \frac{540EIL^2 + 21GAL^4}{2G^2A^2L^4 + 144GAEIL^2 + 1440E^2I^2} \\ & \frac{12L}{GAL^2 + 12EI} & \frac{6L}{GAL^2 + 12EI} \\ \text{SIM.} & & \frac{1260EIL + 57GAL^3}{4G^2A^2L^4 + 288GAEIL^2 + 2880E^2I^2} \end{array} \right]$$

Tem-se então:

$$d = k^{-1} \times f$$

Logo, para o deslocamento vertical na extremidade livre da viga (nó 2) tem-se o seguinte valor:

$$d_{2y} = \left(\frac{720E^2I^2L + 312EIGAL^3 + 9G^2A^2L^5}{G^3A^3L^4 + 72G^2A^2EIL^2 + 720GAE^2I^2} \right) P$$

$$\phi_2 = \left(\frac{6L^2}{GAL^2 + 12EI} \right) P$$

$$\phi_3 = \left(\frac{540EIL^2 + 21GAL^4}{2G^2A^2L^4 + 144GAEIL^2 + 1440E^2I^2} \right) P$$

Sabe-se que a rotação e a flecha em qualquer ponto da viga é aproximada através das funções de forma e dos deslocamentos dos nós. Assim, nesse caso tem-se os seguintes valores para as funções que vão representar a rotação e a flecha:

$$\theta = N_{\theta 2} \cdot \phi_2 + N_{\theta 3} \cdot \phi_3 \left(\text{onde } N_{\theta 2} = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \text{ e } N_{\theta 3} = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right)$$

$$v = N_{v 2} \cdot d_{2y} \left(\text{onde } N_{v 2} = \frac{x}{L} \right)$$

Da teoria de vigas é sabido que a distorção e a curvatura são dadas por:

$$\chi = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad \gamma = \theta - \frac{dv}{dx}$$

Logo, vale a análise dos resultados encontrados:

1) χ (curvatura):

A curvatura é a derivada segunda da função representativa da flecha da viga que será, nesse caso, uma função linear. Logo, não é uma boa consideração de elemento, pois a segunda derivada indica uma curvatura igual a zero.

$$\chi = \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow 0$$

2) γ (distorção):

No caso da distorção, tem-se o seguinte: para uma aproximação do modelo de Timoshenko para o modelo de Euler Bernoulli seria necessário que a distorção tendesse a zero no modelo de Timoshenko como a indicação a seguir:

$$\gamma = \theta - \frac{dv}{dx} = 0$$

Contudo, para o elemento estudado do tipo 2 a rotação é composta de uma função de 2º grau, enquanto a derivada da função de flecha resultará em uma constante pelo fato de ela ser uma função de 1º grau. Essa não igualdade pode ser verificada na Figura 5.2 a seguir:

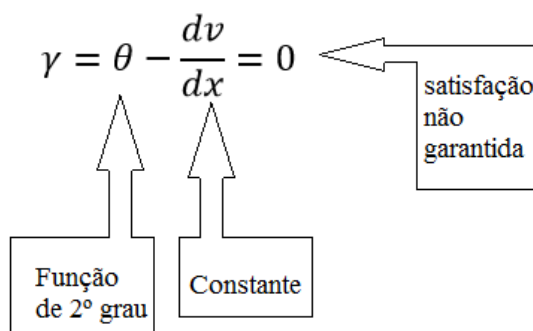


Figura 5.2 : Impossibilidade do valor da distorção se tornar nulo

A partir dessas informações pode-se calcular os esforços solicitantes na viga a partir desse modelo de elemento finito:

- Momento Fletor:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

⇒ derivada segunda de uma função de 1º grau irá resultar em momento nulo

⇒ momento constante não está bem representado

- Esforço Cortante:

Sabendo que o esforço cortante é dado por $V = \tau \cdot A = G \cdot \gamma \cdot A$

$V = GA$ (função de 2º grau) ⇒ cortante constante não está bem representada

A análise da influência desse elemento finito escolhido para o caso de bloqueio de solução será realizada a partir do seguinte parâmetro:

$$\varphi = \frac{d_{2y} \text{ (Elemento de viga de Timoshenko)}}{d'_{2y} \text{ (Elemento de viga de Euler – Bernoulli)}}$$

No caso de uma seção retangular serão adotados os seguintes valores conforme OÑATE (1995):

$$I = \frac{bh^3}{12}; A^* = \frac{5}{6}bh; \nu = 0,25$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2,5} = \frac{2E}{5}$$

$$A^* = \frac{5}{6}bh = \frac{5}{6}h \Rightarrow \text{(já que a largura da viga é considerada unitária)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12} \Rightarrow \text{(já que a largura da viga é considerada unitária)}$$

$$\lambda = \frac{L}{h}$$

A partir das equações acima, o deslocamento vertical no nó de extremidade livre pode ser transformado conforme o desenvolvimento a seguir:

$$d_{2y} = P \left(\frac{5h^6 E^2 L + \frac{26h^4 E^2 L^3}{3} + h^2 E^2 L^5}{\frac{h^3 E^3 L^4}{27} + \frac{2h^5 E^3 L^2}{3} + \frac{5h^7 E^3}{3}} \right) = P \left[\left(\frac{h^2 E^2 L}{\frac{h^3 E^3}{3}} \right) \frac{5h^4 + \frac{26}{3}h^2 L^2 + L^4}{\frac{L^4}{9} + 2h^2 L^2 + 5h^4} \right] =$$

$$\begin{aligned}
P \left[\frac{\left(\frac{3L}{Eh} \right) \frac{5h^4 + \frac{26}{3}h^2L^2 + L^4}{h^4}}{\frac{L^4}{9} + 2h^2L^2 + 5h^4} \right] &= \frac{3\lambda}{E} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right) P \\
\varphi &= \frac{\frac{3\lambda}{E} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right) P}{\left(\frac{L^3}{3EI} \right) P} = \frac{\frac{3\lambda}{E} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right)}{\left(\frac{L^3}{3E \frac{h^3}{12}} \right)} = \frac{\frac{3\lambda}{E} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right)}{\left(\frac{4\lambda^3}{E} \right)} \\
&= \frac{3\lambda}{E} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right) \frac{E}{4\lambda^3} = \frac{3}{4\lambda^2} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right) \\
\varphi &= \frac{3}{4\lambda^2} \left(\frac{5 + \frac{26}{3}\lambda^2 + \lambda^4}{5 + 2\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{9}} \right)
\end{aligned}$$

6. COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS E ELEMENTOS

Além dos elementos tipo 1 e 2 demonstrados anteriormente, serão considerados também nesse estudo de comparação os elementos de 2 nós considerados em OÑATE (1995), quando foi comparada a influência da ordem de integração, que são:

- Oñate – Integração com 2 pontos (1 elemento)
- Oñate – Integração reduzida com 1 ponto (1 elemento)
- Oñate – Integração reduzida com 1 ponto (2 elementos)

A Tabela 6.1 a seguir demonstra a razão entre as flechas de Timoshenko e Euler-Bernoulli com o aumento da esbeltez das vigas para todos os casos desse trabalho, elemento tipo 1 e tipo 2, além dos casos estudados em OÑATE (1995):

Lambda	Nó interno com desloc. Vertical	Nó interno com rotação	Oñate - Integração com 2 pontos	Oñate - Integração reduzida com 1 ponto	Oñate - Integração reduzida com 2 elementos(1 ponto)
0,5	3,750	3,938	3,692	3,750	4,000
0,75	2,083	2,206	1,965	2,083	2,333
1	1,500	1,547	1,313	1,500	1,750
1,5	1,083	0,979	0,762	1,083	1,333
2	0,938	0,706	0,509	0,938	1,188
2,5	0,870	0,540	0,363	0,870	1,120
3	0,833	0,427	0,271	0,833	1,083
3,5	0,811	0,346	0,209	0,811	1,061
4	0,797	0,286	0,165	0,797	1,047
4,5	0,787	0,240	0,134	0,787	1,037
5	0,780	0,204	0,110	0,780	1,030
5,5	0,775	0,175	0,092	0,775	1,025
6	0,771	0,152	0,079	0,771	1,021
6,5	0,768	0,133	0,067	0,768	1,018
7	0,765	0,117	0,059	0,765	1,015

Tabela 6.1 : Tabela com os valores das razões entre as teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli para os elementos estudados (tipo 1 e 2) e também para os elementos de dois nós exemplificados por OÑATE

É possível notar que os valores de φ para o elemento tipo 1 (com deslocamento vertical no nó externo) são iguais aos valores do estudo de Oñate para uma integração reduzida de 1 ponto com 1 elemento. Portanto, na Figura 6.1 a seguir, onde há a plotagem dos valores da tabela anterior, essas duas opções estão superpostas.

**COMPARATIVO ENTRE FLECHA NA EXTREMIDADE LIVRE DE VIGA
ENGASTADA**

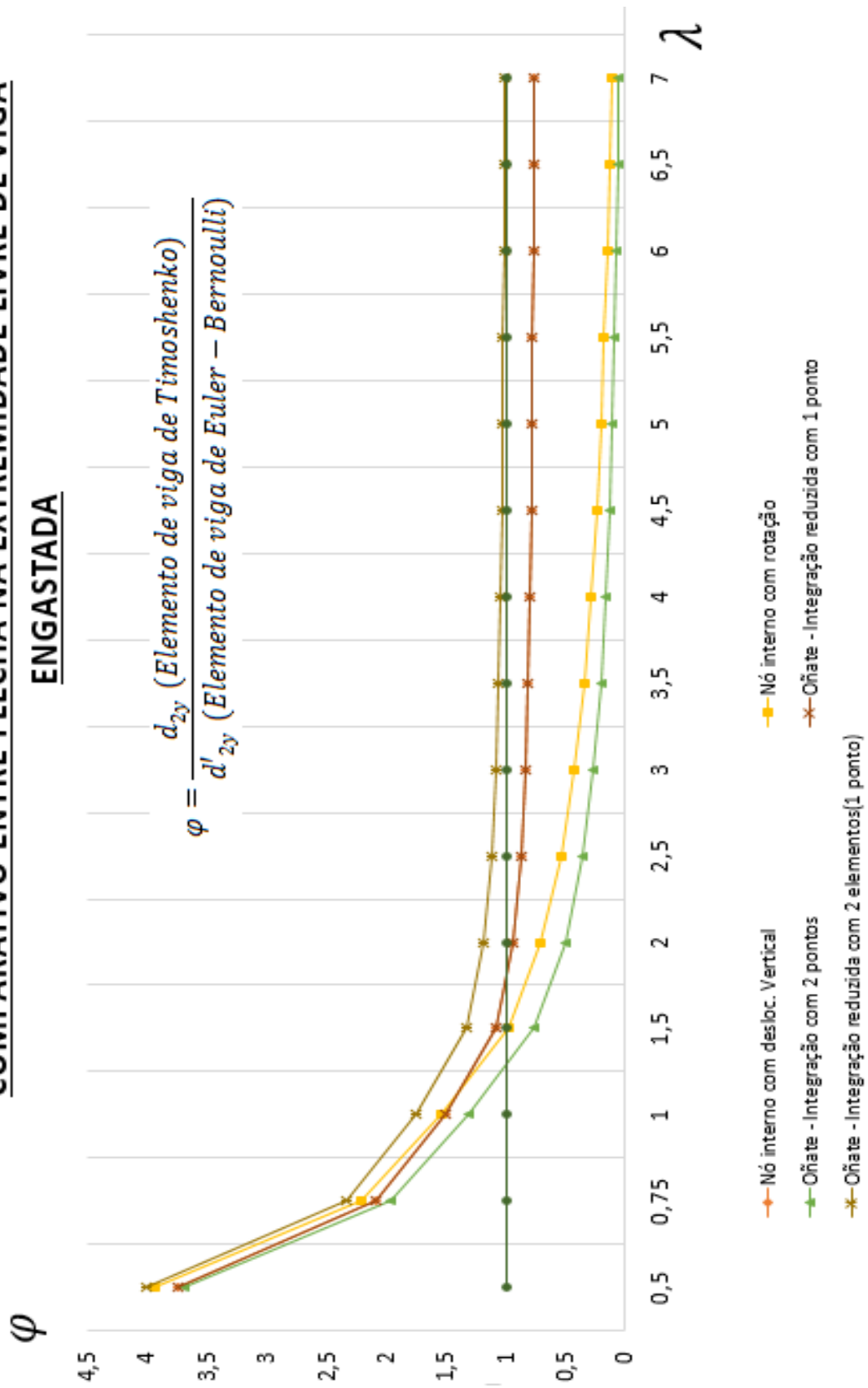


Figura 6.1 : Gráfico comparativo entre os modelos estudados

A partir da Figura 6.1 é possível comprovar a afirmação de que tanto o elemento de viga de Timoshenko de dois nós como o elemento tipo 2 com rotação no nó interno são incapazes de reproduzir fielmente a solução da teoria clássica de vigas.

Segundo Oñate (1995), a medida que a esbeltez ou o comprimento da viga aumenta é produzido um fenômeno de superrigidez numérica que, curiosamente, vai se tornando cada vez mais intenso até o “bloqueio” da solução, quando a viga se torna infinitamente rígida.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo comparativo, a partir das teorias de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, da flecha na extremidade livre de uma viga engastada a partir da utilização de dois tipos de elementos finitos com 3 nós e 5 graus de liberdade: o tipo 1 foi considerado aquele que, além de deslocamento vertical e rotação nos nós extremos, tinha deslocamento vertical também em um nó interno; e o tipo 2 tem como diferença em relação ao anteriormente mencionado a presença de rotação no nó interno ao invés de deslocamento vertical. O estudo comparativo da flecha foi realizado a partir do aumento da esbeltez da viga, ou seja, do aumento do comprimento do elemento.

Oñate (1995) apresentou o estudo para um elemento de viga de Timoshenko de 2 nós. O resultado desse elemento não foi satisfatório, pois a partir do momento em que a esbeltez da viga era aumentada houve um aumento da rigidez da viga, fazendo com que a razão entre as flechas do modelo de Timoshenko e o modelo de Euler-Bernoulli tivesse uma tendência para o valor nulo.

Quando houve a integração reduzida de um elemento, o valor da razão mencionado anteriormente tendeu para 0,75 e com isso o efeito de bloqueio desapareceu. Ademais, quanto mais elementos foram considerados para o estudo do modelo, a razão se aproximou mais do valor unitário.

No caso deste trabalho, quando foi adicionado um nó interno com deslocamento vertical (elemento tipo 1), nota-se que houve o desaparecimento do bloqueio e da superrigidez da viga e também a mesma aproximação de 0,75 do estudo de Oñate, como pode ser observado a partir da Tabela 6.1 e da Figura 6.1. Esses resultados de melhor aproximação com a teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli se deve ao fato de que a distorção é obtida, no modelo de Timoshenko,

a partir da subtração da função que aproxima os valores para a rotação pela derivada primeira da função que aproxima os valores para a flecha. Como a rotação, para esse elemento tipo 1, é uma função constante e a função que aproxima a flecha é de primeiro grau, tem-se um valor de distorção que independe de x ou do comprimento da barra, e portanto não aumenta com o acréscimo de esbeltez na análise. Com relação aos esforços solicitantes desse elemento tipo 1, o momento fletor não é bem representado, pois o mesmo é dependente da segunda derivada da função que representa a flecha que é constante para esse tipo de elemento. Já o esforço cortante é bem representado, pois a função que aproxima deslocamentos verticais é linear, assim como o esforço cortante para esse caso de estudo.

No caso do elemento tipo 2, houve uma tendência da razão entre as flechas da teoria de Timoshenko e de Euler-Bernoulli para o valor nulo, porém menor que o estudo realizado com o elemento de viga de dois nós, como pode ser observado na Tabela 6.1 e na Figura 6.1. Esse fato pode ser explicado pelo fato de que a função que aproxima a rotação ser de segundo grau e a que aproxima as flechas ser constante. Logo, a diferença das duas resultará em uma função que depende de x , ou seja, do comprimento da barra à ordem de valor 2 conforme ilustra a Figura 5.2. Com relação aos esforços solicitantes, o momento fletor não será bem representado pelo fato de que a função que aproxima as flechas é de primeiro grau. Ademais, o esforço cortante também não será bem representado pelo fato de que a função que aproxima a distorção ser de segundo grau.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, A.F.M., “*Método dos Elementos Finitos*”, Primeira Edição, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril de 2003.

De NAVARRA, E.O.I., “*Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análisis estático lineal*”, Segunda Edición, Barcelona, España, 1995.

SORIANO, H.L., “*Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*”, Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, Brasil, 2009.

TIMOSHENKO, S.P., “*Resistencia de Materiales*”, Partes I y II, Espasa-Calpe, 1970.