

Wilfredo Renato Lavado Enco

Entropia de Volume ao longo de Fluxos do tipo Yamabe

Belo Horizonte

Setembro - 2017

Wilfredo Renato Lavado Enco

Entropia de Volume ao longo de Fluxos do tipo Yamabe

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Doutor em Matemática.

Universidade Federal De Minas Gerais – UFMG

Instituto De Ciências Exatas

Departamento De Matemática

Orientador: Marcos da Silva Montenegro

Coorientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte

Setembro - 2017

© 2017, Wilfredo Renato Lavado Enco.
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do ICEx - UFMG

Lavado Enco, Wilfredo Renato.

L392e Entropia de volume ao longo de fluxos do tipo Yamabe.
/ Wilfredo Renato Lavado Enco — Belo Horizonte, 2017.
62 f. il.; 29 cm.

Tese(doutorado) - Universidade Federal de
Minas Gerais – Departamento de Matemática.

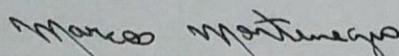
Orientador: Marcos da Silva Montenegro
Coorientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.

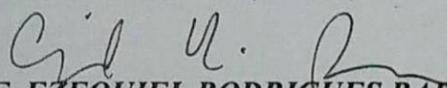
1. Matemática – Teses. 2. Equações diferenciais
parciais – Teses. 3. Variedades riemanianas - Teses.
4. Espaços de Finsler – Teses. I. Orientador.
II. Coorientador. III. Título.

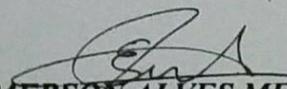
CDU 51(043)

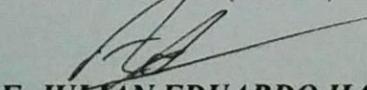
ATA DA NONAGÉSIMA QUARTA DEFESA DE TESE DO ALUNO WILFREDO RENATO LAVADO ENCO, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 14 DE SETEMBRO DE 2017.

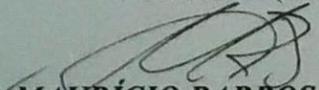
Aos quatorze dias do mês de setembro de 2017, às 14h00, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Wilfredo Renato Lavado Enco**, intitulada: "*Entropia de Volume ao longo de Fluxos do tipo Yamabe*", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Marcos da Silva Montenegro, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 14 de setembro de 2017.

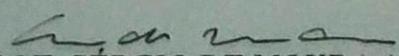

PROF. MARCOS DA SILVA MONTENEGRO
Orientador (UFMG)

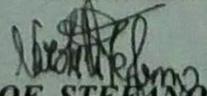

PROF. EZEQUIEL RODRIGUES BARBOSA
Coorientador (UFMG)


PROF. EMERSON ALVES MENDONÇA DE ABREU
Examinador (UFMG)


PROF. JULIAN EDUARDO HADDAD
Examinador (UFMG)

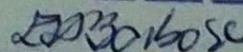

PROF. MAURÍCIO BARRÓS CORRÊA JÚNIOR
Examinador (UFMG)


PROF. SÉRGIO DE MOURA ALMARAZ
Examinador (UFF)


PROF. STEFANO NARDULLI
Examinador (UFRJ)

CONFERE COM O ORIGINAL

Belo Horizonte, 15/09/17



Dept. de Matemática / ICEx / UFMG

Eliane Andréa Barbosa
Secretária do Programa de Pós-
Graduação em Matemática - ICEx/UFMG
SIAPE: 0318139

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Aos meus pais, sem os quais nada disso teria sido possível. Obrigado por sempre estar ao meu lado, tanto nos momentos difíceis quanto nos momentos de alegria.

A minha namorada, Aída, pela paciência, força e companheirismo.

Aos meus orientadores: Ao Marcos pela valiosa orientação, pela amizade, as várias horas de sábios conselhos e acompanhamento nas horas críticas. Ao Ezequiel pelas boas discussões e sugestões que enriqueceram este trabalho. E a todos professores que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Um muito obrigado a todos os meus amigos, dentre os quais não posso deixar de citar: Carlos, Edwin, José, Mario, Miguel, Tauan e Victor.

Ao CNPq pela bolsa de doutorado que possibilitou meus estudos.

A Ciência não é apenas uma disciplina da razão, mas, também, de romance e de paixão.
(Stephen Hawking)

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e convergência suave das soluções de fluxos do tipo Yamabe sobre variedades Riemannianas e variedades de Finsler. Sob a hipótese da existência de uma métrica g com curvatura negativa demonstramos que esta é controlada por uma métrica de Yamabe a qual esta na mesma classe de equivalência de g . Em particular, demonstramos que a entropia de volume da métrica original é controlada pela entropia de volume das métricas de Yamabe.

Palavras-chaves: Fluxos conformes, Fluxos do tipo Yamabe, entropia de volume, variedades de Finsler.

Abstract

In this work we study the existence and smooth convergence of Yamabe-type flows solutions on Riemannian and Finsler manifolds. Under the assumption of the existence of a metric g with negative curvature, we demonstrate that it is controlled by a Yamabe metric which is in the same equivalence class of g . In particular, we demonstrate that the volume entropy of the original metric is controlled by the volume entropy of the Yamabe metrics.

Key-words: Conformal flows, Yamabe-type flows, volume entropy, Finsler manifolds.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	13
1.1 Entropia de volume e entropia topológica	13
1.2 Variedades de Finsler	14
1.3 Volume em Variedades de Finsler	19
2 A entropia de volume sobre variedades de Finsler	21
2.1 Fluxo de Yamabe	21
2.2 Fluxos do tipo Yamabe e a entropia de volume	31
3 A entropia de volume sobre variedades compactas com bordo	40
3.1 Fluxos do tipo Yamabe	40
3.2 Entropia de Volume - Caso 1	43
3.3 Entropia de Volume - Caso 2	53
Referências	62

Introdução

Fluxos do tipo Yamabe sobre variedades Riemannianas têm sido alvo de intensa pesquisa já que fornecem estruturas geométricas de evolução importantes para muitos problemas geométricos e físicos. Recentemente, pesquisas têm se concentrado em generalizar fluxos geométricos Riemannianos e conceitos associados aos mesmos para variedades Riemannianas com bordo e para variedades de Finsler.

Em 1960, Yamabe [17] conjecturou o seguinte resultado a seguir :

“Seja M uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$, e g uma métrica Riemanniana sobre M . Então existe uma métrica \tilde{g} conforme a g que têm curvatura escalar constante”.

Tal problema é chamado de *problema de Yamabe* e pode ser reduzido a determinar a solução de uma equação diferencial parcial elíptica não linear. De fato, se g e \tilde{g} são duas métricas Riemannianas tal que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, onde u é uma função suave e positiva, então a curvatura escalar associada a \tilde{g} e a curvatura escalar associada a g satisfazem

$$R_{\tilde{g}}u^{\frac{n+2}{n-2}} = R_g u - 4\frac{(n-1)}{(n-2)}\Delta_{\tilde{g}}u, \quad (0-1)$$

onde R_g denota a curvatura escalar de g e Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami associado a g , isto pode ser visto em [2]. Portanto, se $u > 0$ é a solução da equação

$$ru^{\frac{n+2}{n-2}} - R_g u + 4\frac{(n-1)}{(n-2)}\Delta_g u = 0, \quad (0-2)$$

então a métrica \tilde{g} tem curvatura escalar constante r .

O problema de Yamabe possui uma estrutura variacional, pois as soluções de (0-2) podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional

$$E_g(u) = \frac{\int_M \left(4\frac{(n-1)}{(n-2)}|du|_g^2 + R_g u^2 \right) dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

A existência de uma solução minimizante para o problema de Yamabe foi estabelecida nos trabalhos de Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen.

Em [10], Hamilton apresentou um ponto de vista diferente aos usuais métodos variacionais que até o momento tinham sido usados para abordar problemas tipo Yamabe. Ele propôs um fluxo conforme para resolver o problema de Yamabe, considerando a seguinte equação de evolução:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = (\bar{R}_{g_t} - R_{g_t})g_t, \quad (0-3)$$

onde R_{g_t} é a curvatura escalar associada com a métrica g_t e \bar{R}_{g_t} é a constante de normalização definida como o valor médio da curvatura escalar em M :

$$\bar{R}_{g_t} = \frac{\int_M R_{g_t} dvol_{g_t}}{\int_M dvol_{g_t}}.$$

A escolha dessa constante de normalização garante que o volume de M seja invariante ao longo do fluxo.

A equação de evolução (0-3) pode ser vista como uma generalização do fluxo de Ricci em dimensão 2 e muitas vezes é chamada como “o fluxo de Yamabe”. Da mesma forma que o fluxo de Ricci em dimensão 2, o fluxo de Yamabe pode ser reduzido a uma equação parabólica, isto é, se $g_t = u^{\frac{4}{n-2}}g$ e usando (0-1) podemos demonstrar que u satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{(n+2)}{4} \left(\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u - R_g u + \bar{R}_{g_t} u^{\frac{n+2}{n-2}} \right), \quad (0-4)$$

a qual pode ser vista como um análogo parabólico da equação (0-2). Logo da teoria de regularidade segue que o fluxo de Yamabe possui uma solução suave a qual é definida num pequeno intervalo de tempo. Hamilton em [9] demonstrou que o fluxo de Yamabe possui uma solução global para cada métrica inicial. Além disso, demonstrou que a curvatura escalar satisfaz $|R_{g_t}| \leq C$, onde C é uma constante que depende só da métrica inicial.

Estas ideias, dadas por Hamilton, foram retomadas por R. Ye [18] para demonstrar a existência de soluções para o fluxo de Yamabe sobre variedades conformemente flat e apresentou estimativas para as soluções do fluxo de Yamabe via o principio de reflexão de Alexandrov. Além disso, demonstrou que para $t \rightarrow \infty$ as métricas $g_t = u^{\frac{4}{n-2}}g$ convergem suavemente para uma métrica $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}}g$.

Num contexto similar ao do trabalho de Hamilton e R. Ye, em [5] S. Brendle estudou o problema de Yamabe sobre variedades com bordo considerando dois casos. No

primeiro considerou uma métrica inicial g_0 com curvatura média $H_{g_0} = 0$ sobre ∂M a qual logo deformou usando o fluxo

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = (\bar{R}_{g_t} - R_{g_t})g_t, \text{ sobre } M \quad (0-5)$$

com a condição $H_g = 0$ sobre ∂M . No segundo caso ele supôs uma métrica inicial g_0 com $R_{g_0} = 0$ sobre M a qual era deformada usando o fluxo

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = (\bar{H}_{g_t} - H_{g_t})g_t, \text{ sobre } \partial M \quad (0-6)$$

com a condição $R_g = 0$ sobre M e

$$\bar{H}_{g_t} = \frac{\int_M H_{g_t} dA_{g_t}}{\int_M dA_{g_t}}.$$

Usando tais fluxos, S. Brendle, demonstrou que sob hipóteses adequadas tais fluxos existem para todo tempo $t \geq 0$ e convergem para uma curvatura escalar e média constante, respectivamente.

Do exposto, vemos que é natural o uso do fluxo de Yamabe para o estudo de problemas de geométricos de evolução. Em particular, o fluxo de Yamabe e os fluxos do tipo Yamabe, este último apresentado na seção 2.2 do Capítulo 2 do trabalho, podem ser usados para o estudo da entropia topológica e da entropia de volume de uma variedade dada.

Resultados relacionados com estes tipos de entropia foram obtidos por Manning em [13]. Ele demonstrou, usando a fórmula de Katok-Knieper-Weiss, que a entropia de volume de uma superfície Riemanniana compacta com curvatura negativa decresce estritamente ao longo do fluxo de Yamabe. Mas no caso de curvatura não negativa o resultado não é válido, pois D. Jane em [11] construiu um toro bidimensional \mathbb{T} associado à métrica de Louville

$$ds^2 = \left(\frac{1}{(1 + 0,125 \cos x)^2} + f(y) \right) (dx^2 + dy^2),$$

onde f é uma função suave com período 2π tal que $f(y) > -\frac{1}{2}$ e igual a $y^2(1 - y^2)$ sobre $[-1, 1]$ no qual a entropia de volume cresce ao longo do fluxo de Yamabe.

Além disso, ela demonstrou que existe uma métrica associada à esfera bidimensional com

entropia topológica zero e que ao longo do fluxo de Yamabe, a entropia topológica desta métrica cresce.

Para dimensões $n \geq 3$. Suárez-Serrato e Tapie em [16] demonstram que se uma variedade Riemanniana compacta (M, g) possui curvatura escalar negativa então é possível estabelecer um controle da entropia de volume associada a g usando as métricas de Yamabe que estão na classe conforme de g .

Tendo em vista os resultados obtidos acima, faremos o estudo da existência e convergência de fluxos do tipo Yamabe a serem introduzidos na tese no contexto de variedades de Finsler e variedades com bordo e de curvatura negativa, os quais estendem os fluxos do tipo Yamabe introduzidos por Suarez-Serrato e Tapie em [16] para variedades Riemannianas compactas. Nossos fluxos serão usados para determinar estimativas para o controle da entropia de volume usando algumas ideias de Manning dadas em [12] e [13].

A tese está organizada em duas partes:

A *primeira parte do trabalho* concentra-se no estudo do fluxo do tipo Yamabe sobre variedades de Finsler. No Teorema 2.6, fazemos uma análise da existência e convergência do fluxo de Yamabe sobre variedades de Finsler associadas a uma métrica de Berwald. No Teorema 2.20, sob algumas hipóteses demonstramos a convergência dos fluxos tipo Yamabe e como uma aplicação desse resultado demonstramos que a entropia de volume h de uma métrica de Berwald é controlada pela entropia de volume das métricas de Yamabe-Berwald cujo traço do tensor de Ricci é $\mathcal{H}_{g_Y} = -1$, isto é,

$$\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|}h(g_Y) \leq h(g) \leq \sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|}h(g_Y).$$

Na *segunda parte do trabalho*, motivados pelos resultados do artigo de S. Brendle [5], nos Teoremas 3.5 e 3.15, damos uma demonstração da convergência do fluxo do tipo Yamabe sobre variedades Riemannianas com bordo. Como uma aplicação destes resultados demonstramos o Lema de Schwarz conforme.

1 Preliminares

1.1 Entropia de volume e entropia topológica

A entropia de volume é um invariante assintótico de uma variedade Riemanniana compacta o qual mede a taxa de crescimento exponencial do volume de bolas na cobertura universal. Este conceito está intimamente relacionado com outras noções de entropia encontradas em sistemas dinâmicos e desempenha um papel importante na geometria diferencial e na teoria dos grupos geométricos. Por exemplo, se a variedade tiver curvatura negativa, a entropia de volume coincide com a entropia topológica do fluxo geodésico.

Existe um interesse considerável na geometria diferencial em determinar métricas Riemannianas (ou Finslerianas) numa variedade compacta suave tal que estas sejam minimizantes ou estabeleçam um controle da entropia de volume.

Definição 1.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e (\tilde{M}, \tilde{g}) a cobertura universal de M . Definimos a entropia de volume por*

$$h(g) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \text{vol}(B_g(\tilde{x}, R))$$

onde \tilde{x} é qualquer ponto de \tilde{M} e $B_g(\tilde{x}, R)$ é a bola em \tilde{M} de raio R centrada em $\tilde{x} \in \tilde{M}$.

Exemplo 1.2 *A entropia de volume da esfera é zero. Pois a esfera é simplesmente conexa, então sua cobertura universal é ela propria. Isto é porque o volume das bolas da esfera é limitado.*

Exemplo 1.3 *A entropia de volume dos espaços quocientes do espaço Euclidiano também são zero. De fato, existe uma constante C , de modo que o volume das bolas de raio R de \mathbb{R}^n é $C.R^n$.*

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão n , $n \geq 2$, $UT(M)$ o fibrado tangente unitario associado a M , e $(\psi_t^g)_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo geodésico.

Para todo $T > 0$ e $v, w \in UT(M)$, defina

$$d_T^g(v, w) = \sup_{[0, T]} d(\psi_t^g(v), \psi_t^g(w)),$$

e $N_d(\varepsilon, T)$ como o número mínimo de bolas de raio ε na métrica d_T^g que cobrem M .

Definição 1.4 *A entropia topológica do fluxo geodésico é definida por*

$$h_{top}(\psi^g) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_d(\varepsilon, T)}{T}.$$

1.2 Variedades de Finsler

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados que servirão para o desenvolvimento do Capítulo 2.

Faremos uso da convenção de Einstein, ou seja, não escreveremos o símbolo do somatório para representar a soma quando aparecem índices repetidos. Além disso, denotaremos os espaços $X \setminus \{0\}$ como X_0 .

Definição 1.5 *Uma métrica de Finsler sobre M é uma função $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ tal que:*

1. F é C^∞ sobre TM_0
2. $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
3. A forma bilinear simétrica

$$g_y : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(x, y + su + tv)] \Big|_{s=t=0}$$

é definida positiva para todo $y \in T_x M_0$.

Observação 1.6 (a) *Seja (x^i, y^j) o sistema usual de coordenadas locais estandar sobre*

$$TM, g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j}(x, y) \text{ e } (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

(b) F é dita reversível se $F(x, -y) = F(x, y)$, $\forall (x, y) \in TM$.

(c) O par (M, F) é chamado de variedade de Finsler.

Enunciaremos o seguinte teorema que é de uso frequente nos argumentos de muitos resultados.

Teorema 1.7 (Teorema de Euler) *Suponha que a função H sobre \mathbb{R}^n é diferenciável fora da origem. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) H é positiva homogênea de grau r , isto é,

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$$

para todo $\lambda > 0$ e $y \in \mathbb{R}_0^n$.

(b) A derivada direcional radial de H é r vezes H , isto é,

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}_0^n$.

Denotemos por $S_x M$ o conjunto que contém todos os raios $[y] := \{\lambda y : \lambda > 0\}$, onde $y \in T_x M_0$. Definimos o fibrado esférico de M , denotado por SM , como a união de $S_x M$:

$$SM = \bigcup_x S_x M.$$

Naturalmente SM possui uma estrutura de variedade com dimensão $2n-1$. Os elementos de SM serão denotados por $(x, [y])$, onde $y \in T_x M_0$. Abusando da notação, se não houver confusão, escreveremos (x, y) no lugar de $(x, [y])$.

Seja $\tau : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes. O comprimento de τ é definido por

$$L_F(\tau) := \int_a^b F\left(\tau(t), \frac{d}{dt}\tau(t)\right) dt$$

Definimos a função distância inducida por F , como

$$d_F(p, q) := \inf_{\tau} L_F(\tau), \forall p, q \in M$$

Se a métrica de Finsler F é reversível, então d_F é simétrica.

Uma curva suave por partes $\tau : [a, b] \rightarrow M$ é dita minimizante se possui comprimento mínimo, isto é,

$$L_F(\tau) = d_F(\tau(a), \tau(b)).$$

Dizemos que τ é localmente minimizante, se para $t_0 \in [a, b]$, existe um número suficientemente pequeno $\varepsilon > 0$ tal que τ é minimizante quando é restrita a $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b]$

Definição 1.8 *Uma curva suave τ é chamada geodésica, se esta é localmente minimizante e $F(\tau, \frac{d\tau}{dt})$ é constante.*

As geodésicas sobre (M, F) estão localmente caracterizadas pelo seguinte lema

Lema 1.9 *Uma curva suave τ numa variedade de Finsler (M, F) é geodésica se, e somente se, a curva satisfaz*

$$\frac{d^2\tau^i}{dt^2} + 2G^i\left(\tau, \frac{d\tau}{dt}\right) = 0,$$

onde

$$G^i(y) = \frac{1}{4}g^{il}(y)\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(y)\right\}y^jy^k.$$

Definição 1.10 *Uma métrica de Finsler F é chamada de **métrica de Berwald**, se para qualquer sistema usual de coordenadas locais estandar, os coeficientes geodésicos $G^i(y)$ são quadráticos em $y \in T_xM$ para todo $x \in M$.*

Observação 1.11 (a) *As métricas Berwald F são denotadas comumente usando o g da observação 1.6.*

(b) *Se os coeficientes $G^i = G^i(y)$ são quadráticos, então existem funções locais $\Gamma_{jk}^i(x)$ sobre M tal que $\Gamma_{jk}^i(x) = \Gamma_{kj}^i(x)$ para todo $x \in M$ e*

$$G^i(y) = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(x)y^jy^k$$

(c) Para uma métrica de Berwald, g_{ij} ,

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$$

e

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^r} G_k^r + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^r} G_l^r - \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^r} G_j^r \right\}$$

não depende de y .

Exemplo 1.12 Seja $F(x, y) = \sqrt{g_{ij} y^i y^j}$ uma métrica Riemanniana sobre uma variedade M . Temos que os coeficientes geodésicos são

$$G^i(x) = \frac{1}{4} g^{il}(x) \left\{ 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x) \right\} y^j y^k.$$

onde $(g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}$. Claramente, G^i é quadrático em $y \in T_x M$. Logo F é uma métrica de Berwald.

Exemplo 1.13 Considere a métrica $F = \alpha + \beta$ sobre uma variedade diferenciável M , onde $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ é uma métrica Riemanniana e $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$ é uma 1-forma tal que $\|\beta\|_x = \sqrt{a^{ij}(x) b_i(x) b_j(x)} < 1$ com $(a^{ij}(x)) = (a_{ij}(x))^{-1}$. Como no exemplo anterior, temos que os coeficientes geodésicos de α são

$$\bar{G}^i(x, y) = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{ik}^j y^j y^k$$

onde $\bar{\Gamma}_{ik}^j(x) = \bar{\Gamma}_{ki}^j(x)$ são funções de $x \in M$. Defina $b_{i|j}$ por

$$b_{i|j} dx^j := db_i - b_j \bar{\Gamma}_{ik}^j dx^k$$

. Sejam

$$r_{ij} := \frac{1}{2} (b_{i|j} + b_{j|i}) \quad e \quad s_{ij} := \frac{1}{2} (b_{i|j} - b_{j|i}).$$

Os coeficientes geodésicos G^i de F são dados por

$$G^i = \bar{G}^i + P y^i + Q^i$$

onde

$$P := \frac{1}{2F} \{r_{ij}y^i y^j - 2\alpha b_r a^{rp} s_{pl} y^l\} \quad e \quad Q^i := \alpha a^{ir} s_{rl} y^l. \quad (1-1)$$

Se β é paralelo com respeito a α , isto é, $b_{i|j} = 0$, então

$$r_{ij} = 0 = s_{ij}.$$

Portanto, $P = 0 = Q^i$, o que implica

$$G^i = \bar{G}^i.$$

Como os G^i são quadráticos em $y \in T_x M$ para todo $x \in M$, segue que $F = \alpha + \beta$ é uma métrica de Berwald.

Definição 1.14 Seja $\bar{y} \in T_x M_0$. A conexão de Berwald é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla^y : T_x M \times C^\infty(TM) &\longrightarrow T_x M \\ (u, V) &\longmapsto \nabla^y(u, V) = \nabla_u^y V := \{u(V^i)(x) + V^i(x)\Gamma_{jk}^i(x)u^k\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \end{aligned}$$

onde $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \in T_x M$ e $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in C^\infty(TM)$

As seguintes definições podem ser encontradas em [1] e [3].

Definição 1.15 Definimos a **curvatura de Riemann** para variedades de Finsler como

$R_y = R_k^i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$, onde

$$R_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} y^j - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (1-2)$$

Logo temos que a **função escalar de Ricci** de F é definido como

$$R = \frac{1}{F^2} R_k^i, \quad (1-3)$$

o **tensor de Ricci**

$$Ric = \left(\frac{1}{2} F^2 R \right)_{y^i y^j}, \quad (1-4)$$

e o **traço do tensor de Ricci** é definida como

$$\mathcal{H}_g = g^{ij} Ric \quad (1-5)$$

1.3 Volume em Variedades de Finsler

Contrariamente ao que acontece na geometria Riemanniana, não há um volume canônico na geometria Finsleriana. Existe no entanto algumas formas naturais de definir volume sobre variedades de Finsler, as quais surgiram na geometria convexa. Entre elas, as mais estudadas são as formas de volume de Busemann-Hausdorff e a forma de volume de Holmes-Thompson, ambas reduzem-se à forma de volume de Riemann quando a métrica de Finsler torna-se Riemanniana.

A forma de volume de Busemann-Hausdorff é obtida ao considerar à variedade de Finsler como um espaço métrico e tomando as medidas de Hausdorff em respeito à métrica, no entanto Alvarez-Paiva e Berck em [15] demonstraram que apesar da naturalidade, pode não ser boa ao considerar generalizações, como por exemplo, da curvatura média.

Para definir a forma de volume de Holmes-Thompson, considere uma variedade de Finsler n dimensional (M, F) . No ponto $x \in M$, fixe uma base $\{b_i\}_{i=1}^n$ para $T_x M$ e a base dual associada $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ para $T_x^* M$. Para cada vetor $y = y^i b_i \in T_x M_0$, escreva

$$g_{ij} := g_y(b_i, b_j).$$

Cada $g_{ij}(y)$ é uma função C^∞ sobre \mathbb{R}_0^n . Defina

$$\tilde{\sigma}_F(x) := \frac{\int_{B_x^n} \det(g_{ij}(y)) dy^1 \dots dy^n}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)},$$

onde $B_x^n := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F(y^i b_i) < 1\}$. Assim, a forma

$$d\tilde{V}_F := \tilde{\sigma}_F(x) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$$

é uma forma de volume bem definida sobre M (**Forma de volume de Holmes-Thompson**).

Defina a forma de Hilbert

$$\omega := F_{y^j} dx^j = g_{ij}(y) y^j dx^i,$$

Observe que

$$d\omega = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} y^k dx^i \wedge dx^j - g_{ij} dx^i \wedge dy^j.$$

Assim

$$(d\omega)^n = d\omega \wedge \dots \wedge d\omega = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n! \det(g_{ij}(y)) dx^1 \dots dx^n dy^1 \dots dy^n.$$

A forma de volume ω define uma forma de volume sobre TM_0 dada por

$$dV_{SM} := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n!} (d\omega)^n.$$

Logo, pode-se definir o volume de uma variedade de Finsler (M, F) por

$$vol(M) := \frac{1}{\omega_n} \int_{SM} dV_{SM} = \frac{1}{\omega_n} vol(SM)$$

onde $\pi : SM \rightarrow M$ denota o fibrado esférico de M . Observe que para uma função f sobre M , tem-se

$$\int_{SM} \pi^* f dV_{SM} = \omega_n \int_M f d\tilde{V}_F. \quad (1-6)$$

Assim, a forma de volume dV_{SM} da origem à forma de volume $d\tilde{V}_F$ sobre M .

Proposição 1.16 (Ver[4]) *Sejam M uma variedade de Finsler, g uma métrica de Berwald e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $g_f = e^{2f}g$. Logo*

$$d\tilde{V}_{g_f} = e^{nf} d\tilde{V}_g.$$

Observação 1.17 *Através da forma de volume de Holmes-Thompson, podemos definir a entropia de volume numa variedade Finsleriana compacta da mesma forma que numa variedade Riemanniana compacta.*

2 A entropia de volume sobre variedades de Finsler

2.1 Fluxo de Yamabe

Uma das equações de evolução mais conhecidas na geometria Riemanniana é o fluxo de Yamabe

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = -R_{g_t} g_t & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g & \text{em } M \end{cases}$$

Nesta seção estudaremos o fluxo de Yamabe sobre variedades Finsler associado a métricas Berwald. Para isso vamos nos inspirar em algumas ideias de R. Ye apresentadas em [18] e nas notas de Mikula [14].

Em princípio, a mesma equação pode ser usada no contexto de Finsler, pois tanto g_{ij} quanto R tem sido generalizados para um contexto mais amplo. Assim, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -\mathcal{H}_{g_t} \cdot g_{ij} & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g & \text{em } M. \end{cases} \quad (2-1)$$

Logo pelo Teorema de Euler, temos $\frac{\partial F^2}{\partial t} = -\mathcal{H}_g \cdot F^2$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial \log(F)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mathcal{H}_{g_t} & \text{sobre } M \times (0, T), \\ F|_{t=0} = F_0 & \text{em } M. \end{cases}$$

Note que esta equação escalar aborda a evolução da métrica Finsleriana F e tem sentido geométrico tanto sobre TM_0 como sobre SM . Portanto a equação (2-1) é sugestiva para estudar o fluxo de Yamabe em geometria Finsleriana.

Como SM é compacta, pode-se normalizar a equação (2-1) exigindo que o volume de SM seja constante ao longo do fluxo. Para o fluxo normalizado, vamos considerar a equação $\frac{\partial g_t}{\partial t} = (-\mathcal{H}_{g_t} + K(t))g_t$, temos

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial \text{vol}(SM)}{\partial t} &= \int_{SM} \frac{\partial}{\partial t} dV_{SM} \\
 &= \int_{SM} \left\{ g_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - n \frac{\partial \log F}{\partial t} \right\} dV_{SM} \\
 &= \int_{SM} \left\{ n(-\mathcal{H}_{g_t} + K(t)) - \frac{n}{2}(-\mathcal{H}_{g_t} + K(t)) \right\} dV_{SM} \\
 &= \frac{n}{2} \int_{SM} (-\mathcal{H}_{g_t} + K(t)) dV_{SM}
 \end{aligned}$$

Isto implica que $K(t) = \frac{1}{\text{vol}(SM)} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM} =: \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t})$. Portanto, o fluxo de Yamabe normalizado em variedades de Finsler é definido como:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t})g_t & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g & \text{em } M. \end{cases} \quad (2-2)$$

Em relação a este fluxo alguns resultados interessantes são conhecidos

Teorema 2.1 (Ver[3]) *Sejam M uma variedade de Finsler e g uma métrica de Berwald tal que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = f(g)g_{ij}$, então $g_{ij}(t) = e^{\sigma(t)}g_{ij}(0)$ para alguma função suave σ sobre M .*

Teorema 2.2 (Ver[3]) *Sejam M uma variedade de Finsler fechada de dimensão $n \geq 3$ com conexão de Berwald, e g, \tilde{g} métricas de Berwald sobre M tal que $\tilde{g} = e^f g$, onde f é uma função suave e positiva. Então*

$$\begin{aligned}
 e^f \mathcal{H}_{\tilde{g}} = \mathcal{H}_g &+ (1-n)f_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + \frac{(n-2)(1-n)}{4}f_{\alpha}f_{\beta}g^{\alpha\beta} \\
 &- \frac{(n-1)}{2}f_l g^{il}g^{\alpha\beta}\partial_i g_{\alpha\beta} + (n-1)f_l g^{il}g^{\alpha\beta}\partial_i g_{\alpha\beta} + (n-1)f_l g^{ls}g^{ir}\partial_i g_{rs},
 \end{aligned}$$

onde $f_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$, $f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}}$ e $\mathcal{H}_g = g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} F^2 \text{Ric} \right)_{y^{\alpha}y^{\beta}}$.

Teorema 2.3 (Ver[3]) *Sejam M uma variedade de Finsler fechada de dimensão $n \geq 3$ com conexão de Berwald, e g, \tilde{g} métricas de Berwald sobre M tal que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, onde $u > 0$ é uma função suave sobre M . Então*

$$u^{\frac{n+2}{n-2}} \mathcal{H}_{\tilde{g}} = u \mathcal{H}_g + 4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \Delta^g u$$

onde $\Delta^g u = -u_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - u_l g^{il}\partial_i g_{\alpha\beta} + u_l g^{il}g^{l\beta}\partial_i g_{\alpha\beta}$.

Observação 2.4 Graças ao Teorema 2.3, no que segue nesta seção vamos considerar o operador

$$\Delta^g u := -u_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - u_l g^{il} \partial_i g_{\alpha\beta} + u_l g^{il} g^{l\beta} \partial_i g_{\alpha\beta}.$$

No que segue, chamaremos de métrica de Berwald-Yamabe a uma métrica de Berwald cujo traço do tensor de Ricci é constante.

O estudo do comportamento do fluxo de Yamabe sobre variedades de Finsler depende do seguinte resultado da teoria elíptica

Teorema 2.5 (Ver [8]) *Seja M uma variedade de Finsler fechada com métrica de Berwald g e de dimensão $n \geq 3$. logo*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} - L(u) = f(x) & \text{sobre } M \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } M \end{cases} \quad (2-3)$$

onde L é um operador diferenciável uniformemente elíptico de segunda ordem sobre $C^\infty(M)$ com coeficientes suaves. Se $f \in H^k(M)$ e $u_0 \in H^{k+2}(M)$, então existe uma única solução u para (2-3), tal que $u(\cdot, t) \in H^{k+2}(M)$ para toda $t > 0$. Além disso, existe $C > 0$ tal que para qualquer $t \geq 0$

$$|u(\cdot, t)|_{H^{k+2}} \leq C \left(|u_0|_{H^{k+2}} + |f|_{H^k} \right)$$

Assim podemos demonstrar a seguinte afirmação,

Teorema 2.6 *Sejam M uma variedade de Finsler compacta de dimensão $n \geq 3$ com conexão de Berwald e g uma métrica de Berwald sobre M tal que $\mathcal{H}_g < 0$, a solução da equação*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = \left(\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t} \right) g_t & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g, & \text{sobre } M \end{cases} \quad (2-4)$$

existe para todo tempo e converge para uma métrica de Yamabe-Berwald na classe conforme de g .

Demonstração.

Para demonstrar este teorema necessitaremos dos seguintes lemas

Lema 2.7 *Seja $u : M \times [0, T) \rightarrow M$ uma solução de (2-4). Então, para qualquer $t \in [0, T)$,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} &\geq \min |\mathcal{H}_g| + \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}, \\ \frac{\partial u_{\max}^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} &\leq \max |\mathcal{H}_g| + \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) u_{\max}^{\frac{4}{n-2}}, \end{aligned}$$

onde $u_{\min} = \min_M u$ e $u_{\max} = \max_M u$.

Demonstração. Defina $X = \{x \in M : u_{\min} = u\}$. Então

$$\frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} \geq \inf_{x \in X} \frac{\partial u^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} = \inf_{x \in X} \left\{ \frac{1}{Cu} \Delta^g u - \mathcal{H}_g + \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) u^{\frac{4}{n-2}} \right\}.$$

Como $x \in X$, então pelo princípio do mínimo $\Delta^g u \geq 0$. Assim

$$\frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} \geq \inf_X \{-\mathcal{H}_g + \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}\} \geq \inf_X \{|\mathcal{H}_g| + \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}\} \geq \min |\mathcal{H}_g| + \text{Avg}(\mathcal{H}_g) u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}.$$

De maneira similar, usando o princípio do máximo, temos a outra desigualdade. \square

Observe que

$$\frac{1}{\text{vol}(SM)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM} \geq \inf_{[g]} \frac{1}{\text{vol}(SM)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM},$$

Então,

$$\frac{1}{\text{vol}(SM)} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM} \geq \frac{1}{\text{vol}(SM)^{\frac{n}{2}}} \inf_{[g]} \frac{1}{\text{vol}(SM)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM}.$$

Se $\alpha = \inf_{[g]} \frac{1}{\text{vol}(SM)^{\frac{(n-2)}{n}}} \int_{SM} \mathcal{H}_{g_t} dV_{SM}$, temos

$$\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \geq \frac{\alpha}{\text{vol}(SM)^{\frac{n}{2}}}.$$

Daí,

$$\frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} \geq \min |\mathcal{H}_g| - \frac{|\alpha|}{\text{vol}(SM)^{\frac{n}{2}}} u_{\min}^{\frac{4}{n-2}}. \quad (2-5)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t})) = -\frac{(n-2)}{2\text{vol}(SM)} \int_{SM} |\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t}|^2 dV_{SM} \leq 0,$$

o qual implica que $Avg(\mathcal{H}_{g_t})$ é decrescente, então $Avg(\mathcal{H}_g) \geq Avg(\mathcal{H}_{g_t})$. Logo,

$$\frac{\partial u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} \leq \max |\mathcal{H}_g| + Avg(\mathcal{H}_g) u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \quad (2-6)$$

Lema 2.8 Temos, para qualquer $t \in [0, T)$,

$$u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq \min \left\{ \frac{\min |\mathcal{H}_g|}{2|\alpha|} vol(SM)^{\frac{2}{n}}, u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) \right\} \quad (2-7)$$

Demonstração. De (2-5), temos que

$$\frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} \geq C_1 - C_2 u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}.$$

onde $C_1 = \min |\mathcal{H}_g|$ e $C_2 = \frac{|\alpha|}{vol(SM)^{\frac{n}{2}}}$. Logo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{C_2 t} u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \right) \geq C_1 e^{C_2 t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C_1}{C_2} e^{C_2 t} - \frac{C_1}{C_2} + u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) \right)$$

Daí

$$u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq e^{-C_2 t} u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) + \frac{C_1}{C_2} (1 - e^{-C_2 t})$$

Se $\frac{\log 2}{C_2} \geq t$, então $e^{-C_2 t} \geq \frac{1}{2}$. Logo,

$$u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq \frac{1}{2} u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0)$$

Se $\frac{\log 2}{C_2} < t$, temos $u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq \frac{C_1}{C_2}$. Daí,

$$u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq \frac{\min |\mathcal{H}_g|}{2|\alpha|} vol(SM)^{\frac{2}{n}}.$$

□

Lema 2.9 Temos, para qualquer $t \in [0, T)$,

$$u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \leq A e^{Bt} \quad (2-8)$$

Demonstração. De (2-6), temos

$$\frac{\partial u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} \leq C_1 + C_2 u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}},$$

onde $C_1 = \max |\mathcal{H}_g|$ e $C_2 = \text{Avg}(\mathcal{H}_g)$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{C_2 t} u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \right) \leq C_1 e^{C_2 t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{C_1}{C_2} e^{-C_2 t} + \frac{C_1}{C_2} + u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) \right).$$

Então,

$$u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \leq e^{C_2 t} u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) - \frac{C_1}{C_2} (1 - e^{-C_2 t}) \leq \left(u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) + \frac{C_1}{C_2} \right) e^{C_2 t}$$

□

Assim de (2-7) e (2-8) temos

$$C_1(T) \leq u(x, t) \leq C_2(T) \quad (2-9)$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, T)$. Além disso, como

$$\frac{\partial u^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} = \frac{1}{uC} \Delta^g u - \mathcal{H}_g + \text{Avg}(\mathcal{H}_g) u^{\frac{4}{(n-2)}},$$

então

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(n-1)}{u^{\frac{4}{(n-2)}}} \Delta^g u = \frac{(n-1)C\mathcal{H}_g}{u^{\frac{6-n}{(n-2)}}} - (n-1)C \text{Avg}(\mathcal{H}_g) u \quad (2-10)$$

Aplicando o Teorema 2.5 e (2-9) na equação (2-10) concluímos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|u(\cdot, t)|_{C^2(M)} \leq C_1$$

para todo $t \in [0, T)$. Portanto $T = \infty$.

Mostremos agora que $C_2 = \text{Avg}(\mathcal{H}_g)$ não depende de T . Para isso, demonstremos o seguinte lema:

Lema 2.10 *Temos $\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $h \in [g]$. Então

$$\begin{aligned} \text{vol}_h(SM) &= \int_{SM} dV_{SM_h} = \omega_n \int_M d\tilde{V}_h \\ &= \omega_n \int_M u^{\frac{2n}{(n-2)}} d\tilde{V}_g \\ &\geq u_{\min}^{\frac{2n}{(n-2)}} \omega_n \int_M d\tilde{V}_g \\ &= u_{\min}^{\frac{2n}{(n-2)}} \text{vol}_g(SM). \end{aligned}$$

Daí,

$$u_{\min}^{\frac{2n}{(n-2)}} \leq \frac{\text{vol}_h(SM)}{\text{vol}_g(SM)} \quad (2-11)$$

Agora, suponha por absurdo que $\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \geq 0$ para todo t . Então, do Lema 2-5, temos

$$\frac{\partial u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} \leq \min |\mathcal{H}_g| = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \min |\mathcal{H}_g| + u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(., 0)).$$

Então,

$$u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}} \geq u_{\min}^{\frac{4}{(n-2)}}(., 0) + t \cdot \min |\mathcal{H}_g|,$$

para todo $t \geq 0$. Mas essa desigualdade contradiz (2-11). Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_{t_0}}) < 0$. Mas

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t})) = -\frac{(n-2)}{2\text{vol}(SM)} \int_{SM} |\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t}|^2 dV_{SM} < 0,$$

implica que

$$\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) < 0$$

para todo $t > t_0$. □

Lema 2.11 *Temos*

$$\frac{1}{C} \leq u(x, t) \leq C$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, \infty)$, onde C é uma constante positiva.

Demonstração. De (2-6), temos

$$\frac{\partial u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}}{\partial t} \leq C_1 - C_2 u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}},$$

onde $C_1 = \max |\mathcal{H}_g| > 0$ e $C_2 = -\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_{t_0}}) > 0$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{C_2 t} u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \right) \leq C_1 e^{C_2 t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_1}{C_2} e^{C_2 t} - \frac{C_1}{C_2} + u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) \right).$$

Assim

$$u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}} \leq e^{-C_2 t} u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) + \frac{C_1}{C_2} (1 - e^{-C_2 t}) \leq u_{\max}^{\frac{4}{(n-2)}}(\cdot, 0) + \frac{C_1}{C_2}.$$

□

Agora, vamos analisar \mathcal{H}_{g_t} . Para isso vamos estudar a equação de evolução

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{g_t}}{\partial t} = -(n-1) \Delta^{g_t} (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t} (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t})$$

Denote $(\mathcal{H}_{g_t})_{\max} = \sup_M \mathcal{H}_{g_t}$ e $(\mathcal{H}_{g_t})_{\min} = \inf_M \mathcal{H}_{g_t}$. Como M é compacta pode-se definir os seguintes conjuntos

$$P = \{x \in M : (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} = \mathcal{H}_{g_t}\} \text{ e } Q = \{x \in M : (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} = \mathcal{H}_{g_t}\}$$

Lema 2.12 *Se existem constantes $C, \varepsilon > 0$ tal que $-C \leq \mathcal{H}_g < -\varepsilon$ em M , então*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \geq (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\min} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) \geq \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\min} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) \geq 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \leq (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) \leq -\varepsilon \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) \leq 0$$

Em particular, tem-se $-C \leq \mathcal{H}_{g_t} < -\varepsilon$ para todo $x \in M$ e $t > 0$.

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} &\geq \inf_Q \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{H}_{g_t}), \\ &= \inf_Q \left\{ (n-1) \Delta^{g_t} (-\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) + (\mathcal{H}_{g_t})_{\min}) - \mathcal{H}_{g_t} (\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min}) \right\} \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \geq -\mathcal{H}_{g_t}(\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min}).$$

Como $(\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \leq \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t})$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \geq \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\min} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right)$$

De maneira análoga temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \leq (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right).$$

Assim $(\mathcal{H}_{g_t})_{\max}$ é decrescente. Logo, temos que $(\mathcal{H}_{g_t})_{\max} < -\varepsilon$, pois $(\mathcal{H}_g)_{\max} < -\varepsilon$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \geq -\varepsilon \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right).$$

Da monotonicidade de $(\mathcal{H}_{g_t})_{\max}$ e $(\mathcal{H}_{g_t})_{\min}$, tem-se

$$-\varepsilon > (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \quad \text{e} \quad (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \geq -C.$$

Portanto,

$$-C \leq \mathcal{H}_{g_t} \leq -\varepsilon \tag{2-12}$$

para todo $x \in M$ e $t > 0$. □

Lema 2.13 *Se $-C \leq \mathcal{H}_g < -\varepsilon$, então*

$$|\text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t}| \leq (C - \varepsilon)e^{-\varepsilon t}$$

para todo $x \in M$ e $t > 0$. Em particular,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$$

exponencialmente e uniformemente em x , quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \right), \\ &\leq -\varepsilon \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\min} - \text{Avg}(\mathcal{H}_{g_t}) \right) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\varepsilon(\mathcal{H}_{g_t})_{\min}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \right) \leq -\varepsilon \left((\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \right)$$

Daí,

$$|Avg(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t}| \leq (C - \varepsilon)e^{-\varepsilon t}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u^{\frac{4}{n-2}}}{\partial t} = \left(Avg(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t} \right) u^{\frac{4}{n-2}}.$$

Assim

$$\frac{4}{(n-2)} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = \left| \left(Avg(\mathcal{H}_{g_t}) - \mathcal{H}_{g_t} \right) u \right| \leq C(C - \varepsilon)e^{-\varepsilon t}.$$

□

Como

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) ds,$$

do Lema 2.13 temos que $u(x, t) \rightarrow u_\infty(x)$ exponencialmente e uniformemente em x , quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, do Teorema 2.5 temos

$$|u(\cdot, t) - u_\infty(\cdot)|_{C^k(M)} \rightarrow 0$$

exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Em particular, $\mathcal{H}_{g_t} \rightarrow \mathcal{H}_{g_\infty}$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, onde \mathcal{H}_{g_∞} é o traço do tensor de Ricci da métrica $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g$.

Por outro lado, para $f(t) = (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min}$ temos que $\frac{\partial f(t)}{\partial t} \leq -\varepsilon f(t)$. Se definimos $h(t) = e^{\varepsilon t} f(t) - f(0)$, então $\frac{\partial h(t)}{\partial t} \leq 0$ e $h(0) = 0$. Assim, $h(t) \leq 0$, implicando $f(t) \leq f(0)e^{-\varepsilon t}$. Logo,

$$|\mathcal{H}_{g_t} - Avg(\mathcal{H}_{g_t})| \leq (\mathcal{H}_{g_t})_{\max} - (\mathcal{H}_{g_t})_{\min} \leq \left((\mathcal{H}_g)_{\max} - (\mathcal{H}_g)_{\min} \right) e^{-\varepsilon t} \leq (C - \varepsilon)e^{-\varepsilon t}$$

para todo $t > 0$.

Usando (2-10), temos

$$L(u) = \frac{(n-1)C\mathcal{H}_g}{u^{\frac{(6-n)}{n-2}}} - (n-1)CAvg(\mathcal{H}_{g_t})u.$$

Assim, pelo Teorema 2.5, \mathcal{H}_{g_t} converge fortemente para uma constante quando $t \rightarrow \infty$.

Portanto, \mathcal{H}_{g_∞} é constante. □

2.2 Fluxos do tipo Yamabe e a entropia de volume

Nesta seção, estudaremos a entropia de volume através de fluxos do tipo Yamabe sobre variedades de Finsler associadas a métricas de Berwald. Para isso vamos nos inspirar em algumas ideias de Ye, Suarez-Serrato e Tapie dadas em [18] e [16].

Seja (M, g) uma variedade de Finsler compacta tal que $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_g \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$, o *fluxo de Yamabe de curvatura-normalizada crescente* é a família de métricas Berwald $(g_t)_{t \in [0, T]}$ que é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t, \\ g_0 = g \end{cases} \quad (2-13)$$

onde $\mathcal{H}_{\max}(g_t) = \max_M \mathcal{H}_{g_t}$. Tal fluxo é denotado por $FYCN^+$.

De maneira similar pode-se definir o *fluxo de Yamabe de curvatura-normalizada decrescente* como a família de métricas $(g_t)_{t \in [0, T]}$ que é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\mathcal{H}_{\min}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t, \\ g_0 = g \end{cases} \quad (2-14)$$

onde $\mathcal{H}_{\min}(g_t) = \min_M \mathcal{H}_{g_t}$. Tal fluxo é denotado por $FYCN^-$.

Teorema 2.14 *Seja M uma variedade de Finsler compacta de dimensão $n \geq 3$ e g uma métrica de Berwald tal que $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_g \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$. Então,*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t, \\ g_0 = g \end{cases}$$

possui uma única solução maximal g_t definida para $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$\mathcal{H}_{g_t} \in [\mathcal{H}_{\min}, \mathcal{H}_{\max}]$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma métrica de Berwald-Yamabe $g_{\max} \in [g]$ com $\mathcal{H}_{g_{\max}} \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$ tal que g_t converge exponencialmente para g_{\max} na C^k -topologia para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Seja g uma métrica de Berwald tal que $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_g \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$. Seja também \tilde{g}_t uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} = (\text{Avg}(\mathcal{H}_{\tilde{g}_t}) - \mathcal{H}_{\tilde{g}_t})\tilde{g}_t, \\ g_0 = g \end{cases} \quad (2-15)$$

Como $\mathcal{H}_{\max} < 0$, segue do Teorema 2.6 que o fluxo (2-15) tem uma única solução definida para todo tempo $t \geq 0$. Além disso, a métrica converge para uma métrica de Berwald-Yamabe g_Y na classe conforme de g tal que

$$\text{vol}(SM, g_Y) = \text{vol}(SM, g).$$

Defina

$$\begin{aligned} \psi : [0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ t &\mapsto \psi(t) = \int_0^t \left(\mathcal{H}_{\max}(\tilde{g}_\tau) - \bar{\mathcal{H}}_{\tilde{g}_\tau} \right) d\tau \end{aligned}$$

e seja

$$\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

a única solução da

$$\begin{cases} \alpha'(t) = e^{-\psi(\alpha(t))} \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}$$

Assim, temos que α é crescente. Logo, da convergência demonstrada no Teorema 2.6, existem $C, \varepsilon > 0$ tal que para todo $t \geq 0$, temos

$$|\mathcal{H}_{\max}(\tilde{g}_t) - \text{Avg}(\mathcal{H}_{\tilde{g}_t})| \leq C e^{-\varepsilon t}$$

Portanto, α existe para todo $t \geq 0$ e $\frac{\alpha(s)}{s}$ converge para um número positivo α_∞ quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 2.15 *Seja*

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então g_t satisfaz

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = (\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t$$

Demonstração. Como $g_t = e^{\psi(\alpha(t))}\tilde{g}_{\alpha(t)}$, então

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\psi(\alpha(t))}\tilde{g}_{\alpha(t)} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{\psi(\alpha(t))})\tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \\
 &= \psi'(\alpha(t))\alpha'(t)e^{\psi(\alpha(t))}\tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)}\alpha'(t) \\
 &= \psi'(\alpha(t))e^{-\psi(\alpha(t))}e^{\psi(\alpha(t))}\tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)}e^{-\psi(\alpha(t))} \\
 &= \psi'(\alpha(t))\tilde{g}_{\alpha(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \\
 &= \left(\mathcal{H}_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - \text{Avg}(\mathcal{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \right) \tilde{g}_{\alpha(t)} + \left(\text{Avg}(\mathcal{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) - \mathcal{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}} \right) \tilde{g}_{\alpha(t)} \\
 &= (\mathcal{H}_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - \mathcal{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}})\tilde{g}_{\alpha(t)} \\
 &= (\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t,
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usado que $\mathcal{H}_{g_t} = e^{-\psi(\alpha(t))}\mathcal{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}$ □

Portanto, $(g_t)_{t \geq 0}$ é uma solução do $FYCN^+$. Como a aplicação α é uma bijeção crescente sobre $(0, +\infty)$, a unicidade da solução do $FYCN^+$ segue da unicidade da solução de (2-15).

Agora, vamos demonstrar que as estimativas de \mathcal{H}_g são preservadas ao longo do fluxo

Lema 2.16 *O traço do tensor de Ricci \mathcal{H}_{g_t} satisfaz*

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{g_t}}{\partial t} = -(n-1)\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t))$$

e

$$\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_t} \leq \mathcal{H}_{\max}$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração. Se $g_t = u^{\frac{4}{(n-2)}}g_0$ e $h_t = v^{\frac{4}{(n-2)}}g_t$. Temos $h_t = (uv)^{\frac{4}{(n-2)}}g_0$, então

$$\mathcal{H}_{g_t} = u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}} \left\{ -\frac{1}{C}\Delta^{g_0}u + \mathcal{H}_{g_0}u \right\}$$

e

$$\mathcal{H}_{h_t} = (uv)^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}} \left\{ -\frac{1}{C}\Delta^{g_0}(uv) + \mathcal{H}_{g_0}(uv) \right\},$$

onde $C = -\frac{(n-2)}{4(n-1)}$.

Logo,

$$-\frac{1}{C}\Delta^{g_t}v + \mathcal{H}_{g_t}v = u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}}\left\{-\frac{1}{C}\Delta^{g_0}(uv) - \mathcal{H}_{g_0}(uv)\right\}. \quad (2-16)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_{g_t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}}\left\{-\frac{1}{C}\Delta^{g_0}u + \mathcal{H}_{g_0}u\right\}\right\} = -\frac{(n+2)}{(n-2)}\mathcal{H}_{g_t}\frac{u_t}{u} + \left(-\frac{1}{C}\Delta^{g_0}u_t + \mathcal{H}_{g_0}u_t\right)u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}}$$

Tomando $v = \frac{u_t}{u}$ na equação (2-16), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_{g_t} = -\frac{(n+2)}{(n-2)}\mathcal{H}_{g_t}\frac{u_t}{u} + \left(-\frac{1}{C}\Delta^{g_t}\frac{u_t}{u} + \mathcal{H}_{g_t}\frac{u_t}{u}\right).$$

Usando $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(n-2)}{4}\{\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t}\}u$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_{g_t} &= -\frac{(n-2)}{(n+2)}\mathcal{H}_{g_t}\frac{(n-2)}{4}\{\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t}\} \\ &\quad + \frac{(n-2)}{4}\left\{-\frac{1}{C}\Delta^{g_t}\left(\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t}\right) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{\max}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})\right\}, \\ &= -(n-1)\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)). \end{aligned}$$

Isto demonstra a primeira afirmação.

Para cada $\delta > 0$, considere a função

$$\begin{aligned} F_\delta : M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = \mathcal{H}_{g_t}(x) - (1+t)\delta \end{aligned}$$

Afirmamos que $F_\delta(x, t) < \mathcal{H}_{\max}$ para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. De fato, suponha por absurdo que existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que

$$\max_M F_\delta(x, t_0) = \mathcal{H}_{\max}. \quad (2-17)$$

Defina

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \geq 0 : \max_M F_\delta(x, t) = \mathcal{H}_{\max}\}.$$

Observamos que \tilde{t}_0 está bem definido, pois $t_0 \in \{t \geq 0 : \max_M F_\delta(x, t) = \mathcal{H}_{\max}\}$.

Como M é compacta, então existe $x_0 \in M$ tal que

$$F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = \mathcal{H}_{\max}. \quad (2-18)$$

Como $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_0} \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$ sobre M , segue que $\tilde{t}_0 > 0$. Da definição de \tilde{t}_0 e (2-17), temos

$$\begin{aligned} F_\delta(x, t) &< \mathcal{H}_{\max}, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tilde{t}_0) \\ F_\delta(x, \tilde{t}_0) &\leq \mathcal{H}_{\max}, \quad \forall x \in M \\ F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) &= \mathcal{H}_{\max}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Como $F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = \max_M F_\delta(x, \tilde{t}_0)$, então no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) \geq 0, \quad (2-20)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\max}(g_t) &= \max_M \mathcal{H}_{g_t} = \max_M \{F_\delta(x, t) + (1+t)\delta\} \\ &= \max_M \{F_\delta(x, t)\} + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) = \Delta^{g_t} \left(F_\delta(x, t) - \max_M F_\delta(x, t) \right) = \Delta^{g_t}(F_\delta(x, t)).$$

Além disso, também em (x_0, \tilde{t}_0) , temos

$$\mathcal{H}_{g_t}(x) - \mathcal{H}_{\max}(g_t) = 0, \quad (2-21)$$

pois em $t = \tilde{t}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\max}(g_{\tilde{t}_0}) &= \max_M F_\delta(x, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= \mathcal{H}_{\max} + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= \mathcal{H}_{g_{\tilde{t}_0}}(x_0), \end{aligned}$$

o qual demonstra a igualdade (2-21).

Logo usando $\frac{\partial \mathcal{H}_{g_t}}{\partial t} = -(n-1)\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t))$, (2-20) e (2-21), temos no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial F_\delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_{g_t} - \delta &= -(n-1)\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) - \delta \\ &\leq \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\max}(g_t)) - \delta \\ &= -\delta, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição pois $\delta > 0$. Isto mostra que

$$F_\delta(x, t) < \mathcal{H}_{\max}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Logo tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos que

$$\mathcal{H}_{g_t}(x) \leq \mathcal{H}_{\max}.$$

Para demonstrar que $\mathcal{H}_{g_t} \geq \mathcal{H}_{\min}$, é suficiente tomar $\delta > 0$ e definir

$$\begin{aligned} G_\delta : M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = \mathcal{H}_{g_t}(x) + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Argumentando em uma maneira similar ao caso anterior, temos

$$G_\delta(x, t) > \mathcal{H}_{\min}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Assim tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\mathcal{H}_{g_t}(x) \geq \mathcal{H}_{\min}.$$

□

Fixando $k \geq 2$, do Teorema 2.6 segue que a solução $(\tilde{g}_t)_{t \geq 0}$ da equação (2-15) converge exponencialmente na C^k -topologia a uma métrica $g_V \in [g]$ tal que $\text{vol}_{g_V}(SM) = \text{vol}_g(SM)$. Como a solução $(g_t)_{t \geq 0}$ é dada por

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}$$

com α estritamente crescente, $\frac{\alpha(t)}{t}$ convergindo para um limite positivo quando $t \rightarrow \infty$ e $\psi(t)$ convergindo exponencialmente a uma constante z quando $t \rightarrow \infty$. Isto implica que g_t converge exponencialmente a uma métrica de Berwald-Yamabe

$$g_{\max} = e^z g_V$$

Já que $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_t} \leq \mathcal{H}_{\max}$ para todo $t \geq 0$, então a curvatura escalar de g_{\max} satisfaz

$$\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_{\max}} \leq \mathcal{H}_{\max}.$$

□

Agora, consideremos o fluxo de Yamabe de curvatura normalizada decrescente ($FYCN^-$) sobre M com métrica inicial g . Seguindo argumentos similares aos feitos na demonstração do Lema 2.16, temos os seguintes resultados:

Lema 2.17 *O traço do tensor de Ricci satisfaz*

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{g_t}}{\partial t} = -(n-1)\Delta^{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\min}(g_t)) + \mathcal{H}_{g_t}(\mathcal{H}_{g_t} - \mathcal{H}_{\min}(g_t))$$

e

$$\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_t} \leq \mathcal{H}_{\max}$$

para todo $t \in [0, T)$.

Teorema 2.18 *Seja M uma variedade de Finsler fechada de dimensão $n \geq 3$ e g uma métrica de Berwald tal que $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_g \leq \mathcal{H}_{\max} < 0$. Então*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (\mathcal{H}_{\min}(g_t) - \mathcal{H}_{g_t})g_t, \\ g_0 &= g \end{cases}$$

possui uma única solução maximal g_t definida para $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$\mathcal{H}_{g_t} \in [\mathcal{H}_{\min}, \mathcal{H}_{\max}]$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma métrica de Berwald-Yamabe $g_{\min} \in [g]$ com $\mathcal{H}_{\min} \leq \mathcal{H}_{g_{\min}} < 0$ tal que g_t converge exponencialmente para g_{\min} na C^k -topologia para todo $k \geq 0$.

Observação 2.19 Pelo Lema 2.15 temos que para $g_t = e^{vt}g$ o fator conforme $t \mapsto e^{vt}$ para o $FYCN^+$ é crescente. Similarmente, podemos demonstrar que para o $FYCN^-$, o fator conforme $t \mapsto e^{wt}$ é decrescente.

O seguinte resultado ajudará na demonstração do Lema de Schwarz conforme para variedades de Finsler e na determinação de estimativas para a entropia de volume

Teorema 2.20 Sejam g_1 e g_2 métricas de Berwald sobre M tal que para todo ponto $x \in M$, temos que $g_1(x) \leq g_2(x)$ no sentido das formas bilineares. Então a entropia de volume satisfaz $h(g_1) \geq h(g_2)$.

Demonstração. Seja \tilde{M} a cobertura universal de M . Como g_1 e g_2 são métricas de Berwald sobre M , então

$$g_1(\tilde{x}) \leq g_2(\tilde{x})$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Logo

$$B_{g_2}(\tilde{x}, r) \subset B_{g_1}(\tilde{x}, r)$$

Como M é compacta, existe $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{d\tilde{V}_{g_1}}{d\tilde{V}_{g_2}} \leq C.$$

Assim, temos que para todo $r > 0$,

$$\text{vol}_{g_2}(B_{g_1}(\tilde{x}, r)) \leq C \text{vol}_{g_1}(B_{g_1}(\tilde{x}, r))$$

Logo

$$\frac{\log \text{vol}_{g_2}(B_{g_1}(\tilde{x}, r))}{r} \leq \frac{\log \text{vol}_{g_2}(B_{g_1}(\tilde{x}, r))}{r} \leq \frac{\log \text{vol}_{g_1}(B_{g_1}(\tilde{x}, r))}{r} + \frac{\log C}{r}.$$

Tomando $r \rightarrow \infty$, concluímos que $h(g_2) \leq h(g_1)$. □

Teorema 2.21 Seja M uma variedade de Finsler fechada de dimensão $n \geq 3$ e g uma métrica de Berwald tal que $\mathcal{H}_g \in [\mathcal{H}_{\min}, \mathcal{H}_{\max}] \subset (-\infty, 0)$ e g_Y é uma métrica de Berwald-Yamabe na classe conforme de g tal que $\mathcal{H}_{g_Y} = -1$. Então,

- (a) $\frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{\min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{\max}|}$ (**Lema de Schwarz Conforme**)
- (b) $\frac{\text{vol}(SM, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|^n}} \leq \text{vol}(SM, g) \leq \frac{\text{vol}(SM, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|^n}}$
- (c) $\frac{\text{Sys}(M, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|}} \leq \text{Sys}(M, g) \leq \frac{\text{Sys}(M, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|}}$
- (d) $\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|} h(g_Y) \leq h(g) \leq \sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|} h(g_Y)$

Demonstração.

- (a) Seja M uma variedade de Finsler de dimensão $n \geq 3$ e g uma métrica de Berwald tal que $\mathcal{H}_g \in [\mathcal{H}_{\min}, \mathcal{H}_{\max}]$. Como no $FYCN^+$ com métrica de Berwald inicial g o fator conforme cresce e converge para uma métrica tal que $\mathcal{H}_{g_{\max}} \leq \mathcal{H}_{\max}$, a qual é $\frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{g_{\max}}|}$, temos limite superior para g . Da mesma forma, o $FYCN^-$ com condição inicial g faz decrescer o fator conforme e converge para $\frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{g_{\min}}|}$ tal que $\mathcal{H}_{g_{\min}} \geq \mathcal{H}_{\min}$, o qual fornece o limite inferior que desejamos.
- (b) Como $\text{vol}(M, g_Y) = \int_M d\tilde{V}_{g_Y}$ e $\int_{SM} dV = \omega_n \int_M d\tilde{V}_{g_Y}$, então integrando com a forma de Holmes-Thompson e usando (1-6), temos

$$\frac{\text{vol}(SM, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|^n}} \leq \text{vol}(SM, g) \leq \frac{\text{vol}(SM, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|^n}}$$

- (c) Como o sístole, denotado por $\text{Sys}(M, g)$, é a longitude mínima de qualquer curva não homotópica a zero e as métricas de Berwald g e h satisfazem $g \leq h$ então

$$\text{Sys}(M, g) \leq \text{Sys}(M, h).$$

Logo, temos $\frac{\text{Sys}(M, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\min}|}} \leq \text{Sys}(M, g)$ e $\text{Sys}(M, g) \leq \frac{\text{Sys}(M, g_Y)}{\sqrt{|\mathcal{H}_{\max}|}}$

- (d) Por (a), temos que $\frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{\min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|\mathcal{H}_{\max}|}$ sobre M . Logo usando o Teorema 2.20, segue a afirmação.

□

3 A entropia de volume sobre variedades compactas com bordo

3.1 Fluxos do tipo Yamabe

Em este capítulo estudaremos a entropia de volume através de fluxos do tipo Yamabe sobre variedades com bordo, para isso vamos nos inspirar em algumas ideias de Brendle apresentadas em [5].

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M e g uma métrica sobre M . Denotamos por R_g a curvatura escalar de M , H_g a curvatura média de ∂M ,

$$\bar{R}_{g_t} = \frac{1}{\int_M dv_{g_t}} \int_M R_{g_t} dv_{g_t}$$

o valor médio da curvatura escalar de M , e por

$$\bar{H}_{g_t} = \frac{1}{\int_{\partial M} dA_{g_t}} \int_{\partial M} H_{g_t} dA_{g_t}$$

o valor médio da curvatura média de ∂M

Para uma variedade Riemanniana compacta M , Suarez-Serrato e Tapie demonstraram [16] que se g_0 é uma métrica com curvatura escalar negativa, então esta é controlada pelas métricas de Yamabe que estão na classe conforme de g_0 . Essa afirmação implica que a entropia de volume da métrica g_0 é controlada pelas entropias das métricas de Yamabe. Para obter esse resultado usaram fluxos do tipo Yamabe. A definição desses fluxos são:

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta tal que $R_{\min} \leq R_g \leq R_{\max} < 0$, então o *fluxo de Yamabe de curvatura-normalizada crescente* é a família de métricas Riemannianas $(g_t)_{t \in [0, T]}$ que é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (R_{\max}(g_t) - R_{g_t})g_t, \\ g_0 &= g \end{cases} \quad (3-1)$$

onde $R_{\max}(g_t) = \max_M R_{g_t}$. Tal fluxo é denotado por $FYCN^+$.

De maneira similar pode-se definir o *fluxo de Yamabe de curvatura normalizada decrescente* como a família de métricas $(g_t)_{t \in [0, T]}$ que é solução da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\min}(g_t) - R_{g_t})g_t, \\ g_0 = g \end{cases} \quad (3-2)$$

onde $R_{\min}(g_t) = \min_M R_{g_t}$, tal fluxo é denotado por $FYCN^-$.

Inspirados nestas afirmações e nos trabalhos de Brendle feitos para fluxos de Yamabe sobre variedades Riemannianas com bordo, vamos utilizar condições similares as dadas no artigo [5], restringindo tais condições para o caso de curvatura escalar menor ou igual a zero.

Assim para o estudo do comportamento assintótico, vamos distinguir o seguinte:

1. A classe conforme contém uma métrica de curvatura escalar negativa.
2. A classe conforme contém uma métrica de curvatura escalar zero.

Desta forma, temos

Caso 1 Determinar uma métrica conforme com curvatura escalar constante e negativa no interior da variedade e de curvatura média zero no bordo.

Caso 2 Determinar uma métrica conforme com curvatura escalar zero no interior da variedade e de curvatura média constante e negativa no bordo.

Para poder construir soluções para esses problemas, temos que estudar os correspondentes problemas parabólicos. No **Caso 1**, vamos considerar uma métrica inicial g_0 tal que $R_{g_0} < 0$ e $H_{g_0} = 0$, então a métrica será deformada pelos seguintes fluxos conformes

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\max}(g_t) - R_{g_t})g_t \text{ sobre } M \times (0, T), \\ H_{g_t} = 0 \text{ sobre } \partial M \times (0, T), \\ g_0 = g \end{cases} \quad (3-3)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\min}(g_t) - R_{g_t})g_t \text{ sobre } M \times (0, T), \\ H_{g_t} = 0 \text{ sobre } \partial M \times (0, T), \\ g_0 = g \end{cases} \quad (3-4)$$

De maneira similar ao caso anterior, no **Caso 2** vamos considerar uma métrica inicial g_0 tal que $R_{g_0} = 0$ e $H_{g_0} < 0$, então a métrica será deformada pelos seguintes fluxos conformes

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})g_t & \text{sobre } \partial M \times (0, T), \\ R_{g_t} = 0 & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g & \end{cases} \quad (3-5)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (H_{\min}(g_t) - H_{g_t})g_t & \text{sobre } \partial M \times (0, T), \\ R_{g_t} = 0 & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g & \end{cases} \quad (3-6)$$

A fim de analisar o comportamento ao longo do tempo das soluções das equações (3-3), (3-4), (3-5) e (3-6) precisaremos dos seguintes resultados obtidos por Brendle [5].

Teorema 3.1 *Se a classe conforme contém uma métrica com curvatura escalar negativa e curvatura média zero, então a solução para a equação*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\bar{R}_{g_t} - R_{g_t})g_t & \text{sobre } M, \times (0, T) \\ H_{g_t} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \end{cases}$$

converge para uma métrica de curvatura escalar constante no interior e curvatura média zero no bordo. Além disso, se existem duas métricas com curvatura escalar constante, então elas são múltiplos entre si.

Teorema 3.2 *Se a classe conforme contém uma métrica com curvatura média negativa e curvatura escalar zero, então a solução para a equação*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (\bar{H}_{g_t} - H_{g_t})g_t & \text{sobre } \partial M \times (0, T), \\ R_{g_t} = 0, & \text{sobre } M \times (0, T) \end{cases}$$

converge para uma métrica de curvatura média constante no bordo e curvatura escalar zero no interior. Além disso, se existem duas métricas com curvatura escalar constante, então elas são múltiplos entre si.

Observação 3.3 *Estes resultados de Brendle garantem que as curvaturas obtidas são constantes. Mas usando as ideias de Chen e Tung Ho dadas em [6], vemos que para o problema de Yamabe geral o sinal das curvatura dependem do sinal de f e das hipóteses sobre o invariante de Yamabe $Y(M, \partial M, g_0)$. Como*

$$Y(M, \partial M, g_0) = \inf_{g \in [g_0]} \frac{1}{\left(\int_M dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \left\{ \int_M R_g dv_g + 2 \int_{\partial M} H_g dA_g \right\},$$

então:

(a) *Se $R_g < 0$ e $H_g = 0$ então*

$$Y(M, \partial M, g_0) < 0.$$

(b) *Se $H_g < 0$ e $R_g = 0$ então*

$$Y(M, \partial M, g_0) < 0.$$

Portanto, para qualquer dos casos, temos $Y(M, \partial M, g_0) < 0$. Além disso, se f é uma constante negativa, a curvatura prescrita é de sinal negativo.

Assim, os Teoremas 3.1 e 3.2, em particular, podem ser unificados

Teorema 3.4 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo suave ∂M . Então para a solução do fluxo de Yamabe temos:*

- *Se $R_g < 0$ e $H_g = 0$, então existe uma única métrica $g_Y \in [g]$ tal que $R_{g_Y} = -1$.*
- *Se $R_g = 0$ e $H_g < 0$, então existe uma única métrica $g_Y \in [g]$ tal que $H_{g_Y} = -1$*

3.2 Entropia de Volume - Caso 1

Na primeira parte desta seção vamos nos concentrar na demonstração do seguinte teorema

Teorema 3.5 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo suave ∂M tal que $R_{\min} \leq R_g \leq R_{\max} < 0$. Então,*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\max}(g_t) - R_{g_t})g_t, & \text{sobre } M \times (0, T) \\ H_{g_t} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \\ g_0 = g \end{cases}$$

possui uma única solução maximal g_t definida para $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$R_{g_t} \in [R_{\min}, R_{\max}]$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma métrica de Yamabe $g_{\max} \in [g]$ com curvatura escalar $R_{g_{\max}} \leq R_{\max} < 0$ tal que g_t converge exponencialmente para g_{\max} na C^k -topologia para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Seja g uma métrica de Berwald tal que $R_{\min} \leq R_g \leq R_{\max} < 0$. Seja \tilde{g}_t uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} = (\bar{R}(\tilde{g}_t) - R_{\tilde{g}_t})\tilde{g}_t, & \text{sobre } M \times (0, T) \\ H_{\tilde{g}_t} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \\ g_0 = g \end{cases} \quad (3-7)$$

Como $R_{\max} < 0$, se segue do Teorema 3.1 que o fluxo (3-7) tem uma única solução definida para todo tempo $t \geq 0$. Além disso, a métrica converge para uma métrica de Yamabe, g_Y , na classe conforme de g tal que

$$\text{vol}(M, g_Y) = \text{vol}(M, g).$$

Defina

$$\begin{aligned} \psi : [0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ t &\mapsto \psi(t) = \int_0^t (R_{\max}(\tilde{g}_\tau) - \bar{R}_{\tilde{g}_\tau}) d\tau \end{aligned}$$

e seja

$$\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$$

a única solução da

$$\begin{cases} \alpha'(t) = e^{-\psi(\alpha(t))} \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}$$

Assim temos que α é crescente. Logo, da convergência demonstrada por Brendle, [5], que existem $C, \varepsilon > 0$ tal que para todo $t \geq 0$, temos

$$|R_{\max}(\tilde{g}_t) - \bar{R}_{g_t}| \leq Ce^{-\varepsilon t}$$

Portanto, α existe para todo $t \geq 0$, e $\frac{\alpha(s)}{s}$ converge para um número positivo α_∞ quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3.6 *Seja*

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então g_t satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\max}(g_t) - R_{g_t})g_t, & \text{sobre } M \times (0, T) \\ H_{g_t} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \end{cases}$$

Demonstração. Como $g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{\psi(\alpha(t))}) \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= \psi'(\alpha(t)) \alpha'(t) e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \alpha'(t) \\ &= \psi'(\alpha(t)) e^{-\psi(\alpha(t))} e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} e^{-\psi(\alpha(t))} \\ &= \psi'(\alpha(t)) \tilde{g}_{\alpha(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= (R_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - \bar{R}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} + (\bar{R}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}} - R_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= (R_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - R_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= (R_{\max}(g_t) - R_{g_t}) g_t, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usado que $R_{g_t} = e^{-\psi(\alpha(t))} R_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}$. Além disso, como

$$H_{g_t} = e^{-\frac{\psi(\alpha(t))}{2}} H_{\tilde{g}_{\alpha(t)}},$$

então $H_{g_t} = 0$. □

Portanto, $(g_t)_{t \geq 0}$ é uma solução do $FYCN^+$. Como a aplicação α é uma bijeção crescente sobre $(0, +\infty)$, a unicidade da solução do $FYCN^+$ segue da unicidade da solução de (3-7).

Agora, vamos demonstrar que as estimativas da curvatura escalar são preservadas ao longo do fluxo.

Lema 3.7 *A curvatura escalar de g_t satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{g_t}}{\partial t} = (n-1)\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) + R_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) & \text{sobre } M \times (0, T) \\ \frac{\partial R_{g_t}}{\partial \nu_{g_t}} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \end{cases}$$

e

$$R_{\min} \leq R_{g_t} \leq R_{\max}.$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração. Se $g_t = u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ e $h_t = v^{\frac{4}{n-2}}g$. Temos $h_t = (uv)^{\frac{4}{n-2}}g_0$, então

$$R_{g_t} = u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}} \left\{ -\frac{1}{C} \Delta_{g_0} u + R_{g_0} u \right\}$$

e

$$R_{h_t} = (uv)^{-\frac{n+2}{n-2}} \left\{ -\frac{1}{C} \Delta_{g_0}(uv) + R_{g_0}(uv) \right\}$$

onde $C = \frac{n-2}{4(n-1)}$.

Logo

$$-\frac{1}{C} \Delta_{g_t} v - R_{g_t} v = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left\{ -\frac{1}{C} \Delta_{g_0}(uv) - R_{g_0}(uv) \right\}. \quad (3-8)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{g_t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ u^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}} \left\{ -\frac{1}{C} \Delta_{g_0} u + R_{g_0} u \right\} \right\} = -\frac{n+2}{n-2} R_{g_t} \frac{u_t}{u} + \left(-\frac{1}{C} \Delta_{g_0} u_t + R_{g_0} u_t \right) u^{-\frac{n+2}{n-2}}$$

Tomando $v = \frac{u_t}{u}$ na equação (3-8),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} R_{g_t} &= -\frac{n+2}{n-2} R_{g_t} \frac{u_t}{u} + \left(-\frac{1}{C} \Delta_{g_t} \frac{u_t}{u} + R_{g_t} \frac{u_t}{u} \right), \text{ mas } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{n-2}{4} \{R_{\max}(g_t) - R_{g_t}\} u \\
 &= -\frac{n+2}{n-2} R_{g_t} \frac{n-2}{4} \{R_{\max}(g_t) - R_{g_t}\} \\
 &\quad + \frac{n-2}{4} \left\{ -\frac{1}{C} \Delta_{g_t} (R_{\max}(g_t) - R_{g_t}) + R_{g_t} (R_{\max}(g_t) - R_{g_t}) \right\} \\
 &= -R_{g_t} (R_{\max}(g_t) - R_{g_t}) - (n-1) \Delta_{g_t} (R_{\max}(g_t) - R_{g_t}) \\
 &= (n-1) \Delta_{g_t} (R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) + R_{g_t} (R_{g_t} - R_{\max}(g_t)).
 \end{aligned}$$

Além disso, como $g_t = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ então

$$\begin{aligned}
 -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_{g_0} u + R_{g_0} &= R_{g_t} u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sobre } M, \\
 \frac{2(n-1)}{n-2} \frac{\partial u}{\partial \nu_{g_0}} + H_{g_0} u &= H_{g_t} u^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \partial M,
 \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= (n-1) u^{-\frac{4}{n-2}} \Delta_{g_0} u - \frac{n-2}{4} (R_{g_0} u^{-\frac{4}{n-2}} - R_{\max}(g_t)) u \text{ sobre } M \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{g_0}} &= 0 \text{ sobre } \partial M \times (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \quad (3-9)$$

Assim temos que tomando $\frac{\partial}{\partial \nu_{g_0}}$ na equação do fluxo (3-9) e usando a condição de Neumann, temos $\frac{\partial R_{g_t}}{\partial \nu_{g_0}} = 0$ sobre ∂M , equivalentemente, $\frac{\partial R_{g_t}}{\partial \nu_{g_t}} = 0$ sobre ∂M . Isto demonstra a primeira afirmação.

Para cada $\delta > 0$, considere a função

$$\begin{aligned}
 F_\delta : M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\
 (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = R_{g_t}(x) - (1+t)\delta
 \end{aligned}$$

Afirmamos que $F_\delta(x, t) < R_{\max}$ para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. De fato, suponha por absurdo que existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que

$$\max_M F_\delta(x, t_0) = R_{\max}. \quad (3-10)$$

Defina

$$\tilde{t}_0 = \inf \{ t \geq 0 : \max_M F_\delta(x, t) = R_{\max} \}.$$

Observamos que \tilde{t}_0 está bem definido, pois $t_0 \in \{t : F_\delta(x_0, t) \geq R_{\max}\}$.

Como M é compacta, então existe $x_0 \in M$ tal que

$$F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = R_{\max}. \quad (3-11)$$

Como $R_{\min} \leq R_{g_0} \leq R_{\max} < 0$ sobre M , segue que $\tilde{t}_0 > 0$. Da definição de \tilde{t}_0 e (3-10), temos

$$\begin{aligned} F_\delta(x, t) &< R_{\max}, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tilde{t}_0) \\ F_\delta(x, \tilde{t}_0) &\leq R_{\max}, \quad \forall x \in M \\ F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) &= R_{\max}. \end{aligned} \quad (3-12)$$

Como $F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = \max_M F_\delta(x, \tilde{t}_0)$, então no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) \leq 0, \quad (3-13)$$

pois

$$\begin{aligned} R_{\max}(g_t) = \max_M R_{g_t} &= \max_M \{F_\delta(x, t) + (1+t)\delta\} \\ &= \max_M \{F_\delta(x, t)\} + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) = \Delta_{g_t}\left(F_\delta(x, t) - \max_M F_\delta(x, t)\right) = \Delta_{g_t}(F_\delta(x, t)).$$

Além disso, também em (x_0, \tilde{t}_0) , temos

$$R_{g_t}(x) - R_{\max}(g_t) = 0, \quad (3-14)$$

pois em $t = \tilde{t}_0$,

$$\begin{aligned} R_{\max}(g_{\tilde{t}_0}) &= \max_M F_\delta(x, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= R_{\max} + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= R_{g_{\tilde{t}_0}}(x_0), \end{aligned}$$

o qual demonstra a igualdade (3-14).

Logo usando $\frac{\partial R_{g_t}}{\partial t} = (n-1)\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) + R_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t))$, (3-13) e (3-14), temos no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial F_\delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} R_{g_t} - \delta &= (n-1)\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) + R_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) - \delta \\ &\leq R_{g_t}(R_{g_t} - R_{\max}(g_t)) - \delta \\ &= -\delta, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição pois $\delta > 0$. Isto mostra que

$$F_\delta(x, t) < R_{\max}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Logo tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos que

$$R_{g_t}(x) \leq R_{\max}.$$

Para demonstrar que $R_{g_t} \geq R_{\min}$, é suficiente tomar $\delta > 0$ e definir

$$\begin{aligned} G_\delta : M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = R_{g_t}(x) + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Argumentando de maneira similar ao caso anterior, temos

$$G_\delta(x, t) > R_{\min}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Assim tomando limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos

$$R_{g_t}(x) \geq R_{\min}.$$

□

Fixando um $k \geq 2$, da proposição 3.8 de [6] segue que a solução $(\tilde{g}_t)_{t \geq 0}$ da equação (3-7) converge exponencialmente na C^k -topologia para uma métrica $g_V \in [g]$ tal que $vol_{g_V}(M) = vol_g(M)$. Como a solução $(g_t)_{t \geq 0}$ é dada por

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}$$

com α estritamente crescente, $\frac{\alpha(t)}{t}$ convergindo para um limite positivo quando $t \rightarrow \infty$ e $\psi(t)$ convergindo exponencialmente rápido uma constante z quando $t \rightarrow \infty$. Isto implica que g_t converge exponencialmente rápido para uma métrica de Yamabe

$$g_{\max} = e^z g_V.$$

Já que $R_{\min} \leq R_{g_t} \leq R_{\max}$ para todo $t \geq 0$, então a curvatura escalar de g_{\max} satisfaz

$$R_{\min} \leq R_{g_{\max}} \leq R_{\max}.$$

□

Agora vamos considerar o fluxo de Yamabe de curvatura normalizada decrescente ($FYCN^-$) sobre M com métrica inicial g . Seguindo argumentos similares aos feitos na demonstração do Lema 3.7, temos os seguintes resultados

Lema 3.8 *A curvatura escalar de g_t satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{g_t}}{\partial t} = (n-1)\Delta_{g_t}(R_{g_t} - R_{\min}(g_t)) + R_{g_t}(R_{g_t} - R_{\min}(g_t)) & \text{sobre } M \times (0, T) \\ \frac{\partial R_{g_t}}{\partial \nu_{g_t}} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \end{cases}$$

e

$$R_{\min} \leq R_{g_t} \leq R_{\max}.$$

para todo $t \in [0, T)$

Teorema 3.9 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo suave ∂M tal que $R_{\min} \leq R_g \leq R_{\max} < 0$. Então*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (R_{\min}(g_t) - R_{g_t})g_t, & \text{sobre } M \times (0, T) \\ H_{g_t} = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \\ g_0 = g \end{cases}$$

possui uma única solução maximal g_t definida para $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$R_{g_t} \in [R_{\min}, R_{\max}]$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma métrica de Yamabe $g_{\min} \in [g]$ com curvatura escalar $0 > R_{g_{\min}} \geq R_{\min}$ tal que g_t converge exponencialmente rápido para g_{\min} na C^k -topologia para todo $k \geq 0$.

Observação 3.10 *Pelo Lema 3.6 temos que para $g_t = e^{vt}g$ o fator conforme $t \mapsto e^{vt}$ para o $FYCN^+$ é crescente. Similarmente, podemos demonstrar que para o $FYCN^-$, o fator conforme $t \mapsto e^{wt}$ é decrescente.*

Os seguintes resultados ajudaram na demonstração do Lema de Schwarz conforme e na determinação de estimativas para a entropia de volume

Teorema 3.11 *(Ver [12]) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então $h_{top}(g) \geq h(g)$. Além disso, se a curvatura seccional de M é não positiva então $h_{top} = h$.*

Teorema 3.12 *(Ver [7]) Se g_1 e g_2 são métricas Riemannianas sobre M tal que para todo ponto $x \in M$, temos que $g_1(x) \leq g_2(x)$. Então a entropia de volume satisfaz $h(g_1) \geq h(g_2)$. Além disso, se uma variedade Riemanniana não possui pontos conjugados então $h_{top} = h$.*

Teorema 3.13 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M e dimensão $n \geq 3$ tal que $R_g \in [R_{min}, R_{max}] \subset (-\infty, 0)$, $H_g = 0$ e g_Y é uma métrica de Yamabe na classe conforme de g tal que $R_{g_Y} = -1$. Então*

$$(a) \frac{g_Y}{|R_{min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|R_{max}|} \text{ (**Lema de Schwarz Conforme**)}$$

$$(b) \frac{Sys(M, g_Y)}{\sqrt{|R_{min}|}} \leq Sys(M, g) \leq \frac{Sys(M, g_Y)}{\sqrt{|R_{max}|}}$$

$$(c) \sqrt{|R_{max}|}h(g_Y) \leq h(g) \leq \sqrt{|R_{min}|}h(g_Y), \text{ se o bordo } \partial M \text{ é totalmente geodésico.}$$

Demonstração.

- (a) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ tal que $R_g \in [R_{min}, R_{max}]$. Como no $FYCN^+$ com métrica inicial g o fator conforme cresce e converge para uma métrica com curvatura escalar $R_{g_{max}} \leq R_{max}$. Pelo Teorema 3.1, temos $g_{max} = \frac{g_Y}{|R_{g_{max}}|}$. Logo temos um limite superior para g . Da mesma forma, o $FYCN^-$ com condição inicial g faz decrescer o fator conforme e converge para uma métrica g_{min} tal que $R_{g_{min}} \geq R_{min}$. Novamente pelo Teorema 3.1, temos $g_{min} = \frac{g_Y}{|R_{g_{min}}|}$. Logo g_{min} é o limite inferior que precisamos.

(b) Como o sístole, denotado por $Sys(M, g)$, é a longitude mínima de qualquer curva não homotópica a zero e as métricas g e h satisfazem $g \leq h$ então

$$Sys(M, g) \leq Sys(M, h).$$

Logo, $\frac{Sys(M, g_Y)}{\sqrt{|R_{\min}|}} \leq Sys(M, g)$ e $Sys(M, g) \leq \frac{Sys(M, g_Y)}{\sqrt{|R_{\max}|}}$

(c) Por (a), temos que $\frac{g_Y}{|R_{\min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|R_{\max}|}$ sobre M . Logo usando o Teorema 3.12 temos a afirmação.

□

Corolário 3.14 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com bordo ∂M e dimensão $n \geq 3$ tal que $R_g \leq R_{max} < 0$, $H_g = 0$, e $g_{max} = \frac{g_Y}{|R_{max}|}$ uma métrica de Yamabe na classe conforme de g com curvatura escalar $R_{g_{max}} = R_{max}$. Se (M, g_{max}) não possui pontos conjugados, então*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(g_{max})$$

onde $h_{top}(g)$ e $h_{top}(g_{max})$ são as entropias topológicas dos fluxos geodésicos sobre (M, g) e (M, g_{max}) .

Demonstração. Do Teorema 3.13 temos que a entropia de volume de (M, g) e (M, g_{max}) satisfazem

$$h(g) \geq h(g_{max})$$

Logo pelo Teorema 3.12 temos que $h_{top}(g_{max}) = h(g_{max})$. Além disso do Teorema 3.11 $h_{top}(g) \geq h(g)$. Assim temos que

$$h_{top}(g) \geq h(g) \geq h(g_{max}) = h_{top}(g_{max})$$

□

3.3 Entropia de Volume - Caso 2

Teorema 3.15 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M e dimensão $n \geq 3$ tal que*

$$R_g = 0$$

e

$$H_{\min} \leq H_g \leq H_{\max} < 0.$$

Então

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} = (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})g_t, & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \\ R_{g_t} = 0, & \text{sobre } M \times (0, T) \\ g_0 = g \end{cases}$$

possui uma única solução g_t definida para todo $t \in [0, \infty)$ tal que

$$R_{g_t} = 0, \quad H_{g_t} \in [H_{\min}, H_{\max}].$$

Além disso existe uma métrica de Yamabe g_{\max} na classe conforme de g com curvatura média $H_{g_{\max}} \leq H_{\max} < 0$ tal que g_t converge para g_{\max} .

Demonstração. Seja g uma métrica tal que $H_{\min} \leq H_g \leq H_{\max} < 0$. Seja \tilde{g}_t a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} = (\bar{H}_{\tilde{g}_t} - H_{\tilde{g}_t})\tilde{g}_t & \text{sobre } \partial M \times (0, T), \\ R_{\tilde{g}_t} = 0 & \text{sobre } M \times (0, T), \\ g_0 = g \end{cases} \quad (3-15)$$

Como $H_{\max} < 0$, segue do Teorema 3.2 que o fluxo conforme tem uma única solução definida para todo $t \geq 0$. Além disso a métrica converge exponencialmente para uma métrica de Yamabe na classe conforme de g tal que

$$\text{vol}(\partial M, g) = \text{vol}(\partial M, g_Y).$$

Defina

$$\begin{aligned} \psi : [0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ t &\mapsto \psi(t) = \int_0^t \left(H_{\max}(\tilde{g}_\tau) - \bar{H}_{\tilde{g}_\tau} \right) d\tau \end{aligned}$$

e seja

$$\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$$

a única solução de

$$\begin{cases} \alpha'(t) &= e^{-\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} \\ \alpha(0) &= 0 \end{cases}$$

Assim temos que α é crescente. Logo, da convergência da métrica, demonstrada por Brendle em [5], existem $C, \varepsilon > 0$ tal que para todo $t \geq 0$, temos

$$|H_{\max}(\tilde{g}_t) - \bar{H}_{g_t}| \leq Ce^{-\varepsilon t}$$

Portanto, α existe para todo $t \geq 0$ e $\frac{\alpha(s)}{s}$ converge para um limite positivo, α_∞ , quando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3.16 *Seja*

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então g_t satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})g_t, \quad \text{sobre } \partial M \times (0, T) \\ R_{g_t} &= 0, \quad \text{sobre } M \times (0, T) \end{cases}$$

Demonstração. Como $g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{\psi(\alpha(t))}) \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= \psi'(\alpha(t)) \alpha'(t) e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \alpha'(t) \\ &= \psi'(\alpha(t)) e^{-\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)} + e^{\psi(\alpha(t))} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} e^{-\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} \\ &= e^{\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} \left\{ \psi'(\alpha(t)) \tilde{g}_{\alpha(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{\alpha(t)} \right\} \\ &= e^{\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} \left\{ (H_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - \bar{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} + (\bar{H}_{\tilde{g}_{\alpha(t)}} - H_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} \right\} \\ &= e^{\frac{1}{2}\psi(\alpha(t))} (H_{\max}(\tilde{g}_{\alpha(t)}) - H_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}) \tilde{g}_{\alpha(t)} \\ &= (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})g_t, \quad \text{pois } H_{g_t} = e^{-\frac{\psi(\alpha(t))}{2}} H_{\tilde{g}_{\alpha(t)}} \end{aligned}$$

Além disso, como $R_{g_t} = e^{-\psi(\alpha(t))} R_{\tilde{g}_{\alpha(t)}}$, então $R_{g_t} = 0$. \square

Portanto, $(g_t)_{t \geq 0}$ é uma solução do $FYCN^+$. Como a aplicação α é uma bijeção crescente sobre $(0, +\infty)$, a unicidade da solução do $FYCN^+$ segue da unicidade da solução de (3-15).

Agora, vamos demonstrar que as estimativas da curvatura escalar são preservados ao longo do fluxo.

Lema 3.17 *A curvatura escalar de g_t satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} H_{g_t} &= \frac{(n-1)}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) - \frac{1}{2} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}), \text{ sobre } \partial M \times (0, T) \\ \Delta_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) &= 0, \text{ sobre } M \times (0, T) \end{cases}$$

e

$$H_{\min} \leq H_{g_t} \leq H_{\max}.$$

para todo $t \in [0, T)$.

Demonstração. Defina o operador

$$C_{g_t} = 2 \frac{(n-1)}{(n-2)} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} + H_{g_t}.$$

Assim $C_g(u\psi) = u^{\frac{n}{n-2}} C_{g_t}(\psi)$ para todo $\psi \in C^\infty(M)$.

Por outro lado, se $g_t = u^{\frac{4}{n-2}} g$ então

$$\frac{2(n-1)}{n-2} \frac{\partial u}{\partial \nu_g} + H_g u = H_{g_t} u^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \partial M \quad (3-16)$$

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + R_g u = R_{g_t} u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sobre } M. \quad (3-17)$$

Além disso

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{n-2}{4} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) u, \text{ sobre } \partial M \times (0, T), \\ \Delta_g u &= 0, \text{ sobre } M \times (0, T) \text{ e } u > 0 \text{ sobre } \bar{M} \times (0, T), \end{cases} \quad (3-18)$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{n-1}{2} u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu_g} - \frac{n-2}{4} (H_g u^{-\frac{2}{n-2}} - H_{\max}(g_t)) u \text{ sobre } \partial M \times (0, T), \\ \Delta_g u &= 0 \text{ sobre } M \times (0, T), \\ u &> 0 \text{ sobre } \bar{M} \times (0, T) \text{ e } u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3-19)$$

Das equações (3-16) e (3-18), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} H_{g_t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(u^{-\frac{n}{n-2}} C_g(u) \right) \\
 &= -\frac{n}{n-2} u^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} \frac{\partial u}{\partial t} C_g(u) + u^{-\frac{n}{n-2}} C_g \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{n}{4} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) + \frac{n-2}{4} u^{-\frac{n}{n-2}} C_g \left((H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) H_{g_t} \right) \\
 &= -\frac{n}{4} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) + \frac{n-2}{4} C_{g_t} \left((H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) H_{g_t} \right) \\
 &= \frac{n-1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) - \frac{1}{2} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})
 \end{aligned}$$

Como $R_g = 0$, $R_{g_t} = 0$, $L_{g_t} := -\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_{g_t} + R_{g_t}$ (definição do Laplaciano conforme) e usando a equação (3-18), temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-(n-1) \Delta_g u \right) \\
 &= \frac{(n-2)}{4} L_g \left((H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) u \right) \\
 &= \frac{(n-2)}{4} u^{\frac{n+2}{n-2}} L_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) \\
 &= -(n-1) u^{\frac{n+2}{n-2}} \Delta_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}).
 \end{aligned}$$

Assim temos $\Delta_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) = 0$ sobre M . Isto demonstra a primeira afirmação.

Para cada $\delta > 0$, considere a função

$$\begin{aligned}
 F_\delta : \partial M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\
 (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = H_{g_t}(x, t) - (1+t)\delta
 \end{aligned}$$

Afirmamos que $F_\delta(x, t) < H_{\max}$ para todo $(x, t) \in \partial M \times [0, +\infty)$. De fato, suponha por absurdo que existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que

$$\max_{\partial M} F_\delta(x_0, t_0) = H_{\max}. \quad (3-20)$$

Defina

$$\tilde{t}_0 = \inf \{ t \geq 0 : \max_{\partial M} F_\delta(x_0, t) = H_{\max} \}.$$

Observamos que \tilde{t}_0 está bem definido, pois $t_0 \in \{ t \geq 0 : \max_{\partial M} F_\delta(x, t) = H_{\max} \}$.

Como ∂M é compacta, então existe $x_0 \in \partial M$ tal que

$$F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = H_{\max} \quad (3-21)$$

Como $H_{\min} \leq H_{g_0} \leq H_{\max} < 0$ sobre M , segue que $\tilde{t}_0 > 0$. Da definição de \tilde{t}_0 e (3-20), temos

$$\begin{aligned} F_\delta(x, t) &< H_{\max}, \quad \forall (x, t) \in \partial M \times [0, t_0) \\ F_\delta(x, \tilde{t}_0) &\leq H_{\max}, \quad \forall x \in \partial M \\ F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) &= H_{\max}. \end{aligned} \tag{3-22}$$

Como

$$F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) = \max_{x \in \partial M} F_\delta(x, \tilde{t}_0),$$

então no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) \leq 0, \tag{3-23}$$

pois

$$\begin{aligned} H_{\max}(g_t) = \max_{\partial M} H_{g_t} &= \max_{\partial M} \{F_\delta(x, t) + (1+t)\delta\} \\ &= \max_{\partial M} \{F_\delta(x, t)\} + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) = \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} \left(\max_{\partial M} F_\delta(x, t) - F_\delta(x, t) \right) = -\frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} F_\delta(x, t).$$

Além disso, também em (x_0, \tilde{t}_0) , temos

$$H_{\max}(g_t) - H_{g_t}(x) = 0, \tag{3-24}$$

pois em $t = t_0$,

$$\begin{aligned} H_{\max}(g_{\tilde{t}_0}) &= \max_{\partial M} F_\delta(x, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= H_{\max} + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= F_\delta(x_0, \tilde{t}_0) + (1 + \tilde{t}_0)\delta \\ &= H_{g_{\tilde{t}_0}}(x_0), \end{aligned}$$

o qual demonstra a igualdade (3-24).

Logo usando $\frac{\partial}{\partial t} H_{g_t} = \frac{(n-1)}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) - \frac{1}{2} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t})$, (3-23) e (3-24), temos no ponto (x_0, \tilde{t}_0) ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial F_\delta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} H_{g_t} - \delta = \frac{(n-1)}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) - \frac{1}{2} H_{g_t} (H_{\max}(g_t) - H_{g_t}) - \delta \\ &\leq -\frac{1}{2} H_{g_t} (H_{g_t} - H_{\max}(g_t)) - \delta \\ &= -\delta, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição pois $\delta > 0$.

Isto mostra que

$$F_\delta(x, t) < H_{\max}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Logo tomando limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos que

$$H_{g_t}(x) \leq H_{\max}.$$

Para demonstrar que $H_{g_t} \geq H_{\min}$ é suficiente tomar $\delta > 0$ e definir a função

$$\begin{aligned} G_\delta : M \times [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) &\mapsto F_\delta(x, t) = H_{g_t}(x, t) + (1+t)\delta. \end{aligned}$$

Argumentando de uma maneira similar ao caso anterior, temos

$$G_\delta(x, t) > H_{\min}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$. Assim tomando limite quando $\delta \rightarrow 0$, temos que

$$H_{g_t}(x) \geq H_{\min}$$

□

Fixando um $k \geq 2$, do Teorema 1.2 de [5] segue que a solução (\tilde{g}_t) da equação (3-15) converge para uma métrica $g_V \in [g]$ tal que $\text{vol}_{g_V}(\partial M) = \text{vol}_g(\partial M)$. Como a solução $(g_t)_{t \geq 0}$ é dada por

$$g_t = e^{\psi(\alpha(t))} \tilde{g}_{\alpha(t)}$$

com α estritamente crescente, $\frac{\alpha(t)}{t}$ convergindo para um limite positivo quando $t \rightarrow \infty$ e $\psi(t)$ convergindo para uma constante z quando $t \rightarrow \infty$. Isto implica que g_t converge para uma métrica de Yamabe

$$g_{\max} = e^z g_V$$

Já que $H_{\min} \leq H_{g_t} \leq H_{\max}$ para todo $t \geq 0$, então a curvatura média de g_{\max} satisfaz

$$H_{\min} \leq H_{g_{\max}} \leq H_{\max}.$$

□

Agora vamos considerar o fluxo de Yamabe de curvatura normalizada decrescente ($FYCN^-$) com condição inicial g . Seguindo argumentos similares aos feitos na demonstração do Lema 3.17, temos os seguintes resultados

Lema 3.18 *A curvatura média de g_t satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} H_{g_t} &= \frac{(n-1)}{2} \frac{\partial}{\partial \nu_{g_t}} (H_{\min}(g_t) - H_{g_t}) - \frac{1}{2} H_{g_t} (H_{\min}(g_t) - H_{g_t}), \text{ sobre } \partial M \times (0, T) \\ \Delta_{g_t} (H_{\min}(g_t) - H_{g_t}) &= 0, \text{ sobre } M \times (0, T) \end{cases}$$

e

$$H_{\min} \leq H_{g_t} \leq H_{\max}.$$

para todo $t \in [0, T)$.

Teorema 3.19 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo suave ∂M tal que $H_{\min} \leq H_g \leq H_{\max} < 0$. Então*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_t}{\partial t} &= (H_{\min}(g_t) - H_{g_t}) g_t, \text{ sobre } \partial M \times (0, T) \\ R_{g_t} &= 0, \text{ sobre } M \times (0, T) \\ g_0 &= g \end{cases}$$

possui uma única solução maximal g_t definida para $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$H_{g_t} \in [H_{\min}, H_{\max}]$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma métrica de Yamabe $g_{\min} \in [g]$ com curvatura média $0 > H_{g_{\min}} \geq H_{\min}$ tal que g_t converge para g_{\min} .

Observação 3.20 Do Lema 3.16 temos que para $g_t = e^{vt}g$ o fator conforme $t \mapsto e^{vt}$ para o $FYCN^+$ é crescente. Similarmente podemos demonstrar que para o $FYCN^-$ o fator conforme $t \mapsto e^{wt}$ é decrescente.

Usando os resultados que ajudaram na demonstração do Lema de Schwarz conforme do primeiro caso, temos

Teorema 3.21 Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo suave ∂M e dimensão $n \geq 3$ tal que $R_g = 0$, $H_g \in [H_{\min}, H_{\max}] \subset (-\infty, 0)$ e g_Y uma métrica de Yamabe na classe conforme de g tal que $H_{g_Y} = -1$. Então

- (a) $\frac{g_Y}{|H_{\min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|H_{\max}|}$
- (b) $\frac{Sys(\partial M, g_Y)}{\sqrt{|H_{\min}|}} \leq Sys(\partial M, g) \leq \frac{Sys(\partial M, g_Y)}{\sqrt{|H_{\max}|}}$
- (c) $\sqrt{|H_{\max}|}h(g_Y) \leq h(g) \leq \sqrt{|H_{\min}|} \leq h(g_Y)$

Demonstração.

- (a) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com bordo suave de dimensão $n \geq 3$ cuja curvatura média satisfaz $H_g \in [H_{\min}, H_{\max}]$. Como no $FYCN^+$ com métrica inicial g o fator conforme cresce e converge para uma métrica g_{\max} tal que $H_{g_{\max}} \leq H_{\max}$. Pelo Teorema 3.2, temos $g_{\max} = \frac{g_Y}{|H_{g_{\max}}|}$. Logo temos um limite superior para g . Da mesma forma, o $FYCN^-$ com condição inicial g faz decrescer o fator conforme e converge para g_{\min} tal que $H_{g_{\min}} \geq H_{\min}$. Novamente pelo Teorema 3.2, temos $g_{\min} = \frac{g_Y}{|H_{g_{\min}}|}$. Logo g_{\min} fornece o limite inferior que desejamos.
- (b) Como o sístole, denotado por $Sys(M, g)$, é a longitude mínima de qualquer curva não homotópica a zero e as métricas g e h satisfazem $g \leq h$ então

$$Sys(\partial M, g) \leq Sys(\partial M, h).$$

$$\text{Logo, temos } \frac{Sys(\partial M, g_Y)}{\sqrt{|H_{\min}|}} \leq Sys(\partial M, g) \text{ e } Sys(\partial M, g) \leq \frac{Sys(\partial M, g_Y)}{\sqrt{|H_{\max}|}}$$

(c) Por (a) temos que $\frac{g_Y}{|H_{\min}|} \leq g \leq \frac{g_Y}{|H_{\max}|}$ sobre ∂M . Logo usando o Teorema 3.12 temos a afirmação.

□

Corolário 3.22 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M e dimensão $n \geq 3$ tal que $R_g = 0$, $H_g \leq H_{\max} < 0$, e $g_{\max} = \frac{g_Y}{|R_{\max}|}$ uma métrica de Yamabe na classe conforme de g com curvatura média $H_{g_{\max}} = H_{\max}$. Se g_{\max} não tem pontos conjugados, então*

$$h_{top}(g) \geq h_{top}(g_{\max})$$

onde $h_{top}(g)$ e $h_{top}(g_{\max})$ são as entropias topológicas dos fluxos geodésicos sobre (M, g) e (M, g_{\max}) .

Demonstração. Do Teorema 3.13 temos, em particular, que a entropia de volume de $(\partial M, g)$ e $(\partial M, g_{\max})$ satisfazem

$$h(g) \geq h(g_{\max})$$

Logo pelo Teorema 3.12 temos que $h_{top}(g_{\max}) = h(g_{\max})$. Além disso do Teorema 3.21 $h_{top}(g) \geq h(g)$. Assim temos que

$$h_{top}(g) \geq h(g) \geq h(g_{\max}) = h_{top}(g_{\max})$$

□

Referências

- [1] H. Akbar-Zadeh. Generalized einstein manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 17(4):342–380, 1995.
- [2] T. Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] S. Azami and A. Razavi. Yamabe flow on berwald manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(02):1550025, 2015.
- [4] T. Barthelmé. A new laplace operator in finsler geometry and periodic orbits of anosov flows. *arXiv preprint arXiv:1204.0879*, 2012.
- [5] S. Brendle. A generalization of the yamabe flow for manifolds with boundary. *Asian Journal of Mathematics*, 6:625–644, 2002.
- [6] X. Chen and P. T. Ho. Conformal curvature flows on compact manifold of negative yamabe constant. *Indiana U. Math. J.*, pages 1–34, 2016.
- [7] A. Freire and R. Mané. On the entropy of the geodesic flow in manifolds without conjugate points. *Inventiones mathematicae*, 69(3):375–392, 1982.
- [8] A. Friedman. Partial differential equations. holt, rinehart and winston. *Inc., New York*, 1:969, 1969.
- [9] R. Hamilton. Lectures on geometric flows. *Unpublished manuscript*, 1989.
- [10] R. S. Hamilton. The ricci flow on surfaces. *Contemp. math*, 71(1):237–261, 1988.
- [11] D. Jane. An example of how the ricci flow can increase topological entropy. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 27(6):1919–1932, 2007.
- [12] A. Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Annals of Mathematics*, 110(3):567–573, 1979.

-
- [13] A. Manning. The volume entropy of a surface decreases along the ricci flow. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24(1):171–176, 2004.
- [14] R. Mikula. Notes on the yamabe flow. *Preprint*.
- [15] J. Á. Paiva and G. Berck. What is wrong with the hausdorff measure in finsler spaces. *Advances in Mathematics*, 204(2):647–663, 2006.
- [16] P. Suárez-Serrato and S. Tapie. Conformal entropy rigidity through yamabe flows. *Mathematische Annalen*, 353(2):333–357, 2012.
- [17] H. Yamabe. On a deformation of riemannian structures on compact manifolds. 1960.
- [18] R. Ye et al. Global existence and convergence of yamabe flow. *Journal of Differential Geometry*, 39(1):35–50, 1994.