

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Produção
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Rafael da Silva Fernandes

**METODOLOGIAS PARA DETERMINAÇÃO DE PERIODICIDADE ÓTIMA DE
MANUTENÇÃO PREVENTIVA SOB A SUPosição DE REPARO IMPERFEITO
EM MANUTENÇÃO CORRETIVA**

Belo Horizonte,

2019

Rafael da Silva Fernandes

**METODOLOGIAS PARA DETERMINAÇÃO DE PERIODICIDADE ÓTIMA DE
MANUTENÇÃO PREVENTIVA SOB A SUPOSIÇÃO DE REPARO IMPERFEITO
EM MANUTENÇÃO CORRETIVA**

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Doutorando: Rafael da Silva Fernandes

Orientadora: Profa. Dra. Marta Afonso
Freitas

Belo Horizonte

2019

F363m Fernandes, Rafael da Silva.
Metodologias para determinação de periodicidade ótima de manutenção preventiva sob a suposição de reparo imperfeito em manutenção corretiva [recurso eletrônico] / Rafael da Silva Fernandes. - 2019.
1 recurso online (xii, 46 f. : il., color.) : pdf.

Orientadora: Marta Afonso Freitas.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndice: f.45-46.
Bibliografia: f. 42-44.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de Produção - Teses. 2. Confiabilidade (Engenharia) – Métodos Estatísticos – Teses. 3. Manutenção e reparos – Teses. 4. Decisão Estatística – Teses. I. Freitas, Marta Afonso. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 658 (043)

Ficha catalográfica: Biblioteca Profº Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG



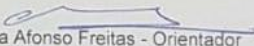
FOLHA DE APROVAÇÃO

Metodologias para Determinação de Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva sob a Suposição de Reparo Imperfeito na manutenção corretiva

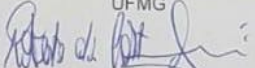
RAFAEL DA SILVA FERNANDES

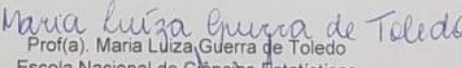
Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Doutor em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E INTERVENÇÃO EM SISTEMAS SOCIOTÉCNICOS, linha de pesquisa Modelagem Estocástica e Simulação.


Aprovada em 04 de outubro de 2019, pela banca constituída pelos membros:


Prof(a). Marta Afonso Freitas - Orientador
DEP/UFMG


Prof(a). Enrico Antonio Colosimo
UFMG


Prof(a). Roberto da Costa Quinino
DEST/UFMG


Prof(a). Maria Luiza Guerra de Toledo
Escola Nacional de Ciências Estatísticas


Prof(a). Gustavo Leonel Giardoni Avelle
Universidade de Brasília-Depto. de Estatística

Belo Horizonte, 4 de outubro de 2019.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus Pais, Carlos Eduardo e Maria Geralda, que um dia sonharam comigo, me amaram antes mesmo que eu existisse e se alegraram com a minha chegada ao mundo.

Aos meus irmãos Luana, Gustavo, Carla e Bernardo que foram amigos e companheiros, mesmo nas horas em que meus ideais pareciam distantes e inatingíveis.

Aos meus amigos e familiares que me fizeram vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, principalmente à minha tia Cléria, que tive um carinho especial por ter me acolhido inúmeras vezes e me apoiado intensamente em meus estudos.

Principalmente à minha esposa Ana Paula e minha filha Julia Mara que por incontáveis vezes meu cansaço e preocupação compartilhados por vocês, procurando amenizar minha ansiedade, mantendo-me firme diante dos obstáculos, aceitaram viver comigo o meu sonho.

E por fim, agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Marta Freitas, que com toda sua paciência, carinho e conhecimento me enriqueceu com suas experiências e me fez evoluir no campo da Engenharia de Produção.

Resumo

A confiabilidade tem desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento de sistemas e, conseqüentemente, no aumento da competitividade da empresa. Assim, a escolha adequada de um modelo para um sistema reparável é fundamental para reduzir despesas e riscos relacionados às falhas. De um modo geral, busca-se uma política ótima de manutenção, no sentido de reduzir o custo total esperado da manutenção. Este trabalho apresenta metodologias alternativas para a determinação de periodicidade ótima de Manutenção Preventiva – MP sob a suposição de Reparo Imperfeito – RI em Manutenções Corretivas – MC. Quando um estudo de caso conta com mais de um sistema em estudo, estimar o número de falhas até um determinado tempo de parada T , depende diretamente da política de manutenção escolhida, ademais, estimar o tempo esperado em que ocorre uma falha pode ser feito de formas diferentes e gerar resultados também diferentes. Para isso, é preciso recorrer a modelos que possibilitem tais estimações e assim forneçam subsídios para tomada de decisões tais como a escolha da política de manutenção mais adequada. Neste trabalho utilizamos o modelo ARA_1 – Arithmetic Reduction of Age de memória 1 além de métodos estatísticos tais como, estimação por máxima verossimilhança e simulação de Monte Carlo. Propomos aqui três metodologias alternativas para obtenção da periodicidade ótima: a primeira objetiva determinar a estimação pontual pela função custo e a estimação intervalar pela fonte de variabilidade da Simulação de Monte Carlo; a segunda visa a estimação da função média pelo método proposto por Jack (1997), adequando-o à classe de modelos ARA_1 ; e a terceira visa apresentar uma estimação dos tempos de falhas utilizando a função média acumulada – MCF estimada $\hat{\Lambda}(t)$ de forma recursiva. A situação prática estudada em Toledo *et al.* (2016) é revisitada, sendo os resultados obtidos comparados e analisados. As metodologias propostas demonstraram situações de análises alternativas a respeito do comportamento dos sistemas em estudo, impactando diretamente na tomada de decisão para a escolha da política de manutenção ótima. A estimação do tempo de periodicidade ótima bem como a determinação dos tempos de falhas esperados demonstraram mais condizente com o modelo de redução aritmética ARA_1 .

Palavras-Chave: Confiabilidade, Manutenção, Reparo Imperfeito, Modelo de Idade Virtual, Processo Lei de Potência, Função Intensidade, Parada Ótima.

Abstract

Reliability has played a key role in system development and consequently in increasing competition company. Thus, the appropriate choice of a model for a repairable system is critical to reducing expenses and related risks to failures. In general, an optimal maintenance policy is sought to reduce total cost maintenance. This work presents alternative methodologies for determination of optimal periodicity of Preventive Maintenance – PM under the assumption of Repair Imperfect – IR in Corrective Maintenance – CM. When a case study has more than a system under study, estimate the number of failures up to a certain downtime T directly depends on the maintenance policy chosen. In addition, to estimate the expected time where a failure occurs can be done in different ways and generate different results too. In this work we use the model ARA_1 – Arithmetic Reduction of Age memory 1, in addition to statistical methods such as maximum likelihood estimation and Monte Carlo simulation. Here we propose three alternatives methodologies for obtaining the optimal periodicity: the first objective is to determine the point estimation by the cost function and the interval estimation by the source of variability of the Monte Carlo Simulation; the second aims to estimate the average function by the method proposed by Jack (1997), adapting it to ARA_1 ; and the third methodology objective an estimation of failure times using the recursively estimated Mean Cumulative Function – MCF. $\hat{\Lambda}(t)$. The practical situation studied in Toledo *et al.* (2016) is revisited, and the results obtained compared and analyzed. The proposed methodologies demonstrated alternative analysis situations regarding the behavior of the systems under study, directly impacting the decision making for choosing the optimal maintenance policy. The estimation of the optimal periodicity time as well as the determination of the expected failure times proved to be more consistent with the ARA_1 arithmetic reduction model.

Keywords: Reliability, Maintenance, Imperfect Repair, Virtual Age Model, Power Law Process, Intensity Function, Optimal Stop.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	vi
Abstract.....	vii
1. Introdução.....	1
1.1. Literatura.....	1
1.2. Notações e Acrônimos	4
2. Situação Prática Motivadora	6
3. Análise de Dados Recorrentes.....	8
3.1. Notação básica	8
3.2. Modelo ARA (Arithmetic Reduction of Age) de reparo Imperfeito para CM	10
3.3. Problema de Minimização de Custo	11
4. Metodologias para Estimção de Política Ótima de PM.....	16
4.1. Metodologia I.....	16
4.2. Metodologia II	19
4.3. Metodologia III	23
4.3.1. Descrição para geração do vetor $tii \geq \mathbf{0}$ de forma recursiva	23
4.3.2. Descrição para estimção de um Intervalo de Confiança para τ	25
5. Situação Prática Revisitada	28
5.1. Análise Preliminar Conjunto de Dados	28
5.1.1. Estimção da Periodicidade Ótima pelo Metodologia I	29
5.1.2. Estimção da Periodicidade Ótima pelo Metodologia II.....	32
5.1.3. Estimção da Periodicidade Ótima pela Metodologia III.....	37
6. Conclusões e Considerações Finais.....	40
7. Referências Bibliográficas	42
Apêndice A – Determinação da Função $D\tau$ para o caso onde há redução aritmética conforme a Classe de Modelos ARA1	45

1. Introdução

1.1. Literatura

A Confiabilidade desempenha um papel importante no desenvolvimento da qualidade de sistemas e, conseqüentemente, no aumento da competitividade da empresa. Quando uma empresa decide lançar um produto, por exemplo, espera-se que este seja **durável** (isto é, sua vida útil seja longa), tenha **disponibilidade** (por exemplo: não esteja “quebrado” ou não se encontre em manutenção) e seja **confiável** (no sentido de que, estando disponível, o produto consiga realizar suas funções básicas sem falhar, durante um tempo predeterminado e sob determinadas condições de uso).

A ocorrência de falhas ao longo do tempo se enquadra em um escopo mais geral conhecido como o de eventos recorrentes. Entende-se por processos de eventos recorrentes, aqueles que geram eventos repetidamente ao longo do tempo. Assim, um modelo probabilístico/estatístico para um sistema reparável deve descrever a ocorrência de eventos (no caso falhas) ao longo do tempo. A função intensidade desempenha um papel importante na seleção de um modelo para um sistema reparável, uma vez que contém informações sobre como um sistema envelhece ao longo do tempo.

Tipicamente, as suposições em relação à forma com que um sistema envelhece, e como é afetado por uma falha e reparo, irão guiar a escolha do modelo para um sistema reparável. De um modo geral, as intervenções feitas em um sistema reparável com o intuito de corrigir ou evitar a ocorrência de falhas podem ser classificadas em dois tipos: **manutenção corretiva** (*Corrective Maintenance – CM*) e **manutenção preventiva** (*Preventive Maintenance – PM*).

A primeira visa retornar o sistema à condição de operação após uma falha, e é adotada no caso em que as falhas não afetam fatalmente o sistema como um todo. Vale ressaltar que a **Manutenção Corretiva** é caracterizada por uma ocorrência de falha inesperada, ao qual é necessário intervir no sistema com uma ação de reparo

Já a segunda consiste numa parada programada para melhorar a condição do sistema. A **Manutenção Preventiva** decorre de um planejamento que leva em consideração a diminuição do desgaste do sistema para reduzir a frequência de ocorrência de falhas no mesmo.

As ações de reparo, tanto em manutenção preventiva como corretivas, podem ser de 3 tipos:

- **Reparo Mínimo (*Minimal Repair, MR*)** – O reparo feito no sistema faz como que ele retorne a mesma condição que estava imediatamente antes da ocorrência da falha “tão ruim quanto velho” (“*as bad as old*”, *ABAO*).
- **Reparo perfeito (*Perfect Repair, PR*)** – O reparo faz com que o sistema retorne à condição de novo “tão bom quanto novo” (“*as good as new*”, *AGAN*).
- **Reparo Imperfeito (*Imperfect Repair, IR*)** – O reparo traz o estado de um sistema, a um estado compreendido entre o de um sistema completamente novo e aquele que vigorava no instante imediatamente à falha. É, portanto, um nível intermediário entre os reparos mínimo e perfeito.

Na prática, supor um reparo mínimo ou reparo perfeito não é razoável para alguns sistemas. Segundo Doyen e Gaudoin (2011) é comum que a experiência verdadeira, na maior parte dos casos, resulte numa situação intermediária entre “tão bom quanto novo” e “tão ruim quanto velho”.

Modelos probabilísticos para descrever este tipo de característica do efeito do reparo imperfeito podem ser encontrados na literatura. Dentre eles, destaca-se as classes de modelos *ARI* – *Arithmetic Reduction of Intensity* e *ARA* – *Arithmetic Reduction of Age* propostos por Doyen e Gaudoin (2004). Neste trabalho estamos interessados na classe de modelos *ARA*, onde o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na idade virtual do sistema.

É importante ressaltar que qualquer tipo de Manutenção (corretiva ou preventiva) incorre em custos tanto diretamente ligados à atividade da manutenção ou quanto aos custos indiretos. Assim, aumentar de maneira não criteriosa a frequência de manutenções preventivas por exemplo, visando reduzir o número esperado de falhas, não é necessariamente uma boa estratégia.

Portanto a implementação de uma política ótima de manutenção, ótima no sentido de redução do custo total esperado da manutenção é de suma importância para a saúde financeira da empresa. Esse problema tem sido abordado por vários autores.

Gilardoni e Colosimo (2007), apresentaram um estudo no qual os sistemas operavam sob uma estratégia de manutenção na qual manutenções preventivas (PM) eram realizadas em

tempos pré-determinados e manutenções corretivas (CM) na ocorrência de falhas. A análise dos dados foi feita, supondo-se reparo perfeito para as manutenções preventivas (PM) e reparo mínimo para as corretivas. Além disso, a forma funcional da *power law* foi utilizada para a função intensidade. Sob essas suposições foi possível derivar uma forma funcional fechada para a periodicidade ótima das PM's. Uma estimativa pontual para este parâmetro foi obtida por máxima verossimilhança utilizando o histórico de falhas e um intervalo de confiança para a periodicidade ótima também foi fornecido.

Posteriormente, Toledo *et al.* (2016) expandiu o modelo utilizado em Gilardoni e Colosimo (2007), considerando agora PM com reparo perfeito, mas as CM com reparo imperfeito. Em particular, o modelo ARA_1 (*Arithmetic Reduction of Age*) de memória 1, de Doyen e Gaudoin (2004), foi utilizado para as CM. Isso introduziu uma dificuldade adicional à análise. O processo pontual, ao contrário do caso de Gilardoni e Colosimo (2007), não é mais um *NHPP* (*Non Homogeneous Poisson Process*), a função média aqui não tem uma forma fechada, o que dificultou encontrar uma expressão para o cálculo da periodicidade ótima. Para suplantear essa dificuldade, os autores desenvolveram um procedimento de 4 passos envolvendo estimação por máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo (os parâmetros da *power law* e o parâmetro indicador da eficiência do reparo), simulação de Monte Carlo e o Maior Minorante Convexo (*Greatest Convex Minorant – GCM*; Boswell, 1966) para obter uma estimativa pontual da periodicidade ótima. A metodologia foi aplicada à uma situação prática. Intervalos de confiança Bootstrap (Efron e Tibshirani, 1986) também foram fornecidos.

O primeiro objetivo deste trabalho é metodológico: propomos aqui metodologias alternativas à apresentada por Toledo *et al.* (2016) para obtenção da periodicidade ótima. Aqui a função custo é usada diretamente o que elimina a necessidade da utilização do GCM para encontrar a periodicidade ótima, visto que a função média não será diferenciada.

O segundo objetivo deste trabalho é prático: a situação prática estudada em Toledo *et al.* (2016) é revisitada. Os resultados obtidos pelas metodologias aqui propostos são comparados aos obtidos pelos autores (estimativas pontuais e intervalos de confiança) para várias razões de custo. as metodologias alternativas levam a estimativas com maior precisão com um esforço computacional mais baixo.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresentamos brevemente a situação motivadora, na Seção 3 será abordado os conceitos básico de processos de contagem, a classe de modelos ARA além dos modelos propostos por Gilardoni e Colosimo (2007) e Toledo *et al.* (2016). Na Seção 4 apresentamos as metodologias propostos neste trabalho. Na Seção 5 descrevemos a implementação das metodologias à situação prática. Na Seção 6 apresentamos as conclusões e discussões para trabalhos futuros.

1.2. Notações e Acrônimos

Para melhor entendimento dos termos utilizados neste trabalho bem como padronização com as notações utilizadas por Doyen e Gaudoin (2011).

ABAO – As Bad As Old (“Tão ruim quanto velho”)

AGAN – As Good As New (“Tão bom quanto novo”)

ARA – Arithmetic Reduction of Age (“Redução Aritmética da Idade”)

CM – Corrective Maintenance (“Manutenção Corretiva”)

PM – Preventive Maintenance (“Manutenção Preventiva”)

MR – Minimal Repair (“Reparo Mínimo”)

IR – Imperfect Repair (“Reparo Imperfeito”)

MLE – Maximum Likelihood Estimator (“Estimativa de Máxima Verossimilhança”)

NHPP – Non Homogeneous Poisson Process (“Processo de Poisson Não Homogêneo”)

PLP – Power Law Process (“Processo Lei de Potência”)

MCF – Mean Cumulative Function (“Função Média Acumulada”)

EOP – Estimation of the Optimal Periodicity (“Estimação da Periodicidade Ótima”)

$\lambda(t)$ – Função Intensidade

$\Lambda(t)$ – Função Intensidade Acumulada

$N(t)$ – Número de Falhas até o tempo t

C_{PM} – Custo de Manutenção Preventiva

C_{IR} – Custo de Manutenção Corretiva com Reparo Imperfeito (IR)

t_i – Tempo da i -ésima falha e $i = 1, 2, \dots, n$

T – Tempo de Truncamento

τ – Periodicidade de Manutenção Preventiva

n – Número estimado de falhas até o tempo de truncamento T

$\mu = (\beta, \eta)$ – vetor de parâmetros da função PLP

ρ – Parâmetro de Eficiência de Reparo Imperfeito e $0 \leq \rho \leq 1$

$T_{N(t)}$ – Tempo da Última Falha Ocorrida

$\hat{t}_{IR=0}$ – EOP sob a Suposição de Reparo Mínimo

B – n° de reamostragens bootstrap

N_{MC} – n° de amostras geradas na simulação de Monte Carlo

2. Situação Prática Motivadora

A situação econômica no Brasil e no mundo, caracterizado principalmente pela globalização, tem passado por constantes alterações na forma de produção dos produtos e serviços. Aspectos relacionados à qualidade total desses bens, bem como às questões ambientais, passaram a ser uma das principais preocupações das empresas.

A manutenção, embora despercebida, vem ganhando esse destaque principalmente nas empresas de grande porte, pois objetiva manter equipamentos e máquinas em condições de pleno funcionamento. A manutenção ideal de uma máquina visa tanto a disponibilidade para a produção quanto aos custos das manutenções.

No campo da mineração, em que os fatores de produção, redução dos custos de operação e manutenção estão diretamente ligados aos lucros estimados, a manutenção constitui uma atividade dispendiosa e de considerável incerteza de retorno financeiro.

O setor de transporte na mineração, pode contribuir em até 40% dos custos totais de produção. Isso é justificado pelo deslocamento de grande volume e peso do minério. Logo, uma gestão de manutenção que visa reduzir tais custos, conseqüentemente estará impactando diretamente os lucros estimados de uma empresa mineradora.

Os caminhões “fora de estrada”, são especificamente concebidos para ser o mais robusto equipamento de mineração. Tais caminhões são capazes de transportar entre 25 a 400 toneladas de minério e estes são responsáveis pelo transporte de minério dentro da mina, ou no percurso entre a mina e a usina de beneficiamento.

A situação prática motivadora deste trabalho é relacionada a uma frota de caminhões diesel-elétrico “fora de estrada” de uma indústria de mineração. O tempo médio de operação de um caminhão no setor de mineração é de 23h/dia, segundo a própria mineradora.

O plano de manutenções preventivas é disponibilizado pelo fabricante por meio de manuais. Seguindo a “Programação de Intervalos de Manutenção”, isto é, executando as manutenções em intervalos previamente definidos até o equipamento atingir 16 mil horas e, assim, recomenda-se então que o equipamento seja totalmente desmontado para uma revisão geral em todos os componentes, ou seja, realiza-se uma PM.

Já a manutenção corretiva não pode ser considerada como uma medida de redução de custo ou de otimização da produtividade, pois esta é a mais cara e inviável. Há uma

preocupação grande do plano de manutenção em evitar tais falhas, pois acarreta parada inesperada da produção e a necessidade de reposição imediata de componentes, além de outros fatores relacionados ao tempo e ao custo.

Dessa forma, analisar o histórico de falhas em caminhões “fora de estrada” é uma situação real em que o modelo probabilístico discutido pode ser aplicado.

Em um levantamento realizado pela empresa, durante um período de cinco meses, foram observadas 4.383 paradas na frota de caminhões diesel-elétricos operando em uma de suas minas, totalizando aproximadamente 22.295 horas paradas. Entre as várias causas dessas paradas estão falhas no sistema elétrico, motor, sistema de freios e suspensão, além de espera por mão de obra, dos equipamentos e dos componentes para reposição. Nesse período, as falhas nos motores a diesel causaram diretamente cerca de 20% do tempo parado devido à ocorrência de falhas.

A mineradora forneceu um histórico de falhas e ações de manutenção preventiva em uma amostra de motores de caminhões diesel-elétricos fora de estrada da frota de uma mina. Havia 143 motores, e 208 falhas foram registradas. Houve também 50 ações de manutenção preventiva no período avaliado.

Desse modo, deseja-se estabelecer uma política ótima de manutenção que, considerando o número esperado de falhas no sistema, minimize os custos de manutenção preventiva e corretiva. Assumindo que esses motores passarão por uma manutenção preventiva perfeita com uma periodicidade τ e serão reparados caso falhem (reparo imperfeito), o objetivo é encontrar o valor ótimo de τ que minimize os custos globais das manutenções.

O cálculo da periodicidade ótima de manutenção preventiva, no sentido de ser o mínimo custo global das manutenções corretivas e preventivas, foi estimada em Toledo *et al.* (2016) e a proposta aqui é apresentar outras metodologias para encontrar τ e comparar os resultados.

3. Análise de Dados Recorrentes

3.1. Notação básica

Um processo de contagem é um modelo estocástico para um fenômeno físico caracterizado por eventos distribuídos aleatoriamente ao longo do tempo. Nesses estudos, essas “ocorrências ao longo do tempo” são, por exemplo, as falhas de um sistema reparável, e são descritas com pontos no eixo do tempo. A escala usada para caracterizar as distribuições dos eventos é em unidades do tempo, porém outras escalas podem ser usadas. Por exemplo, número de defeitos por comprimento do tecido, número de quilômetros rodados por um automóvel ou número de ciclos de operação executados por uma máquina.

Para um único processo de eventos recorrentes, ou processo de falhas, introduzimos as seguintes notações:

- $\{T_i\}_{i \geq 0}$, os tempos de falhas, ou manutenções corretivas $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$
- $\{X_i\}_{i \geq 0}$, os tempos entre manutenções, ou *gaps*, com $X_i = T_i - T_{i-1}$ e $i = (1, 2, \dots)$
- $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$, o **processo de contagem** associado que registra o número acumulado de falhas. Especificamente, $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I(T_k \leq t)$ é o número de falhas no intervalo $(0, t]$, e $N_{a,b} = N_b - N_a$, o número de falhas no intervalo $(a, b]$. N é chamado *variável aleatória de contagem*.

No contexto de manutenção de sistemas reparáveis, estamos interessados em contar o número de falhas que ocorrem até o tempo t , para todo $t \geq 0$.

Para unificação da notação utilizada, temos que a função média de um processo pontual é definida como sendo a esperança:

$$\Lambda(t) = \Lambda_t = E[N_t] \quad (3.1)$$

Assim, $\Lambda(t)$ é o número esperado de falhas até o tempo t , sendo portanto uma função não-decrescente.

Modelos para eventos recorrentes podem ser especificados considerando-se a distribuição de probabilidade para o número de eventos em intervalos pequenos $[t, t + \Delta t]$, dado o histórico da ocorrência de eventos antes de t . Seja $\mathcal{H}_{t^-} = \{N_s: 0 \leq s < t\}$ o histórico do processo no tempo t (exclusivo), onde (t^-) representa o instante de tempo imediatamente

antes de t . Para eventos ocorrendo em uma escala de tempo contínua, supõe-se que dois eventos não podem ocorrer simultaneamente. Assim, a *função intensidade completa* fornece a probabilidade instantânea de um evento ocorrer em t , condicional ao histórico do processo, e define o processo matematicamente. A intensidade completa é definida formalmente pela equação

$$P(t|\mathcal{H}_{t^-}) = \lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{H}_{t^-}) \quad (3.2)$$

Intuitivamente, a função intensidade é então a probabilidade de falha em um intervalo pequeno dividido pelo tamanho desse intervalo. Assim, haverá muitas falhas em intervalos nos quais λ_t for grande, e poucas falhas em intervalos nos quais λ_t for pequeno.

Quando Λ é diferenciável, a taxa de ocorrência de falhas (*ROCOF – Rate of Occurrence of Failures*) pode ser definida como:

$$\mu(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t) \quad (3.3)$$

A *ROCOF* pode ser interpretada como a taxa instantânea de mudança no número esperado de falhas.

Sob a suposição de aplicação do reparo mínimo ao sistema em estudo, o processo de falhas é uma Processo de Poisson Não Homogêneo (*NHPP – Non Homogeneous Poisson Process*), já que sua função intensidade λ_t não é constante $\forall t \geq 0$.

Em um sistema para o qual assume-se que a probabilidade de falhas simultâneas é zero, $\lambda_t = \mu(t)$, ou seja, a função intensidade e a taxa de ocorrência de falhas (*ROCOF*) são a mesma função, Rigsdon e Basu (2000). Especificamente $\lambda_t \times \Delta t \approx E[N_{t,t+\Delta t}]$, e se Λ_t denota o número acumulado esperado de eventos em t , então:

$$\Lambda_t = E[N_t] = \int_0^t \lambda_s ds \quad (3.4)$$

Assim, $\lambda_t = \mu(t) = \frac{d}{dt} \Lambda_t$ e pode ser interpretada como a taxa instantânea de mudança no número esperado de falhas.

Sobre o pressuposto de reparo imperfeito, a função intensidade λ_t depende do histórico de falhas e a função *ROCOF* não coincide com λ_t , e assim $\Lambda_t = E[N_t] \neq \int_0^t \lambda_s ds$. Doyen e Gaudoin (2004) propuseram duas novas classes de modelos para reparo imperfeito, na

primeira classe o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na intensidade de falhas (*Arithmetic Reduction of Intensity – ARI*) e na segunda classe, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na idade virtual do sistema (*Arithmetic Reduction of Age – ARA*). O interesse do nosso trabalho está no modelo ARA e se encontra detalhado na seção a seguir.

3.2. Modelo ARA (Arithmetic Reduction of Age) de reparo Imperfeito para CM

A classe de modelos de Redução Aritmética da Idade (*Arithmetic Reduction of Age – ARA*) consiste em uma classe de modelos que considera que a ação de reparo imperfeito, reduz a idade do sistema de tal modo que sua função intensidade de falha λ_t é igual àquela observada em um determinado tempo anterior, conhecido como idade virtual V_t e $V_t < t$, sendo t a idade real do sistema, desde o início de seu funcionamento.

Como a idade virtual é igual a idade real observada num determinado tempo anterior, a idade virtual V_t é então caracterizada pela idade real t , o número de falhas N_t e os tempos de falhas $t_1, t_2, \dots, t_{N(t)}$, ou seja, $V_t = V(t, N_t, t_1, t_2, \dots, t_{N_t})$. Neste sentido, $\lambda_t = \lambda_{V_t}$.

Cabe salientar que, sob o modelo ARA, após cada ação de reparo, o valor da idade virtual de um item é reduzida pela constante multiplicativa ρ , resultando num deslocamento horizontal do gráfico (ver) e expressa pela função intensidade:

$$\lambda_{ARA}^*(t) = \lambda_{t-\rho T_{N_t}} \quad (3.5)$$

Doyen e Gaudoin (2004) destaca três possibilidades para modelagem a partir da memória m , sendo:

- **ARA_∞** – entende-se *infinito* como a utilização de todos os tempos de falhas anteriores à falha;
- **ARA₁** – utilizando apenas o tempo de falha anterior e;
- **ARA_m** – sendo m um número natural, que representa o número de falhas anteriores ao tempo t e que será utilizado para a redução aritmética da idade virtual.

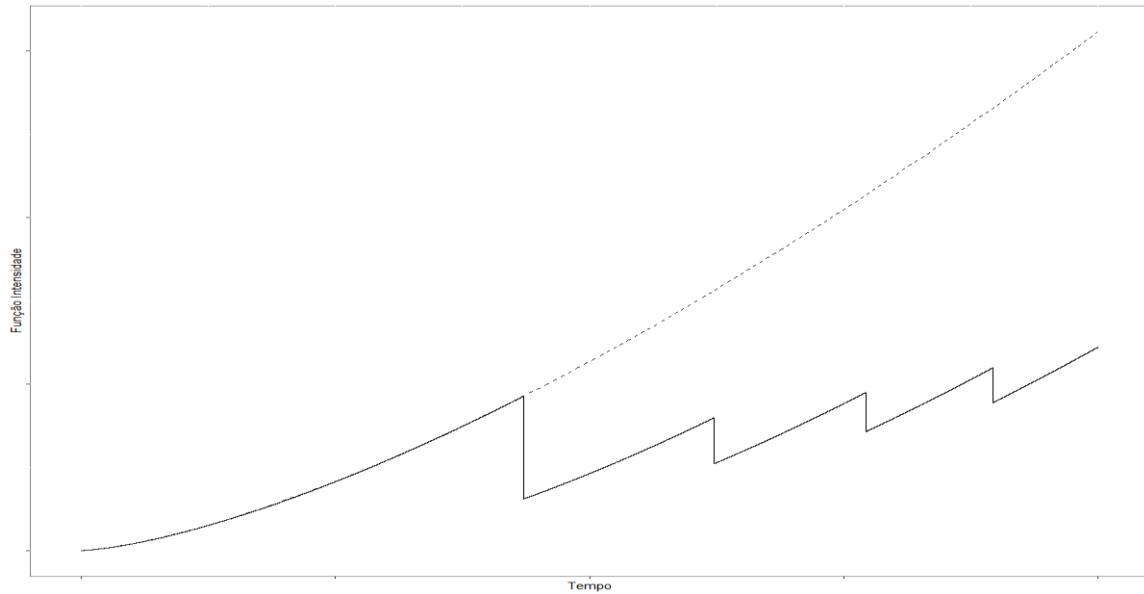


Figura 3.1 - Função Intensidade para o modelo ARA_1 .

T_{N_t} neste caso representa o tempo no qual ocorre a N_t – ésima falha e o modelo ARA onde a reparação reduz a idade do sistema desde a última falha, é chamado de modelo de Redução Aritmética de Idade com memória 1 (ARA_1). Sua intensidade de falha é:

$$\lambda_{ARA_1}^*(t) = \lambda(t - (1 - \rho) \times T_{N_t}) \quad (3.6)$$

Conforme discorrem Doyen e Gaudoin (2004), o efeito do reparo ρ pode gerar diferentes classificações. Quando a eficiência de reparo é $\rho = 0$, significa que a ação de reparo é considerada reparo perfeito e o sistema volta a condição de “tão bom quanto novo” (AGAN). Quando $\rho = 1$, a ação de reparo é considerada mínima e o sistema retorna a condição imediatamente anterior a falha, “tão ruim quanto velho” (ABAO). Para valores de ρ tal que $0 < \rho < 1$, o reparo é então considerado imperfeito. É considerável assumir que, quanto mais próximo o ρ fica de $\rho = 0$, as falhas ocorram com um período maior de tempo, e assim os *gap*'s aumentam.

Por fim, o reparo pode ser prejudicial, e isso acontece quando a ação de reparo provoca uma piora na condição do sistema, com $\rho < 0$. Neste trabalho, baseado na suposição que na prática o valor de ρ é desconhecido, usaremos seu valor estimado para fundamentar nossas análises.

3.3. Problema de Minimização de Custo

Considerando um sistema sujeito à falhas, e que é colocado em operação no tempo $t = 0$, assume-se algumas condições:

- O tempo de Manutenção Preventiva (PM) é agendado em τ unidades de tempo;
- Existe apenas um ponto de PM, é fixado um custo C_{PM} , em que instantaneamente transforma o sistema a uma condição “tão bom quanto novo”, neste caso o sistema será tratado como um novo sistema;
- No intervalo de tempo $0 \leq t \leq \tau$, um Reparo Imperfeito (IR) com taxa $(1 - \rho)$ e $0 \leq \rho \leq 1$ é executado após cada Manutenção Corretiva (CM), com um custo esperado para cada IR de C_{IR} ;
- Os custos de reparação e tempos de falha são independentes;
- O tempo de duração do reparo é negligenciado.

Assumindo que ocorre uma manutenção preventiva a cada τ unidade de tempo, o custo esperado por unidade de tempo para um sistema dado por (Gilardoni e Colosimo 2007) é:

$$C(\tau) = \frac{C_{PM} + C_{IR}E[N(\tau)]}{\tau}, \quad \tau > 0 \quad (3.7)$$

Sob o modelo ARA_1 , $E[N(\tau)]$ é dado pela equação:

$$\Lambda(t) = \int_0^{\rho} E \left[\lambda \left(t - (1 - \rho T_{N(t)}) \right) \right] dt \quad (3.8)$$

O objetivo aqui é encontrar um intervalo ótimo de PM que minimiza a equação $C(\tau)$, que é o valor τ que satisfaz:

$$D(\tau) = \tau\lambda(\tau) - \Lambda(\tau) = \frac{C_{PM}}{C_{IR}} \quad (3.9)$$

Onde $\lambda(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t)$ é a função *ROCOF* para o sistema.

Gilardoni e Colosimo (2007) mostraram que quando trabalhamos sob a suposição de reparo mínimo e assumindo a forma funcional *PLP* para a função intensidade, chegamos a uma expressão fechada para τ , dada por:

$$\tau = \eta \left[\frac{C_{PM}}{(\beta - 1)C_{MR}} \right]^{1/\beta} \quad (3.10)$$

A forma fechada para τ na equação (3.10) é encontrada visto que no caso estudado pelo autores supracitados, é possível encontrar uma forma fechada para $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ e assim aplicar na equação (3.9). Note que C_{IR} naquele caso é C_{MR} (que é o custo de reparo mínimo).

No caso em estudo, tratando-se de reparo imperfeito, não temos mais um caso de uma *NHPP* e a *ROCOF* não coincide com a função intensidade. Conseqüentemente $\Lambda(t)$ não tem forma fechada, o que pode ser observado na equação (3.8).

Toledo *et al.* (2016) propuseram uma simulação de Monte Carlo para calcular uma aproximação das funções $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ utilizando os estimadores de máxima verossimilhança, podendo ser aplicado à equação (3.9) e assim obter uma estimativa para periodicidade ótima de PM.

O procedimento é descrito da seguinte forma (ver Figura 3.2, etapas 1 a 3) :

- **Etapa 1: Estimação de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros do Modelo.** Usando o histórico de falhas e a função de Log-Verossimilhança para estimar $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ (parâmetros do PLP) e $\hat{\rho}$ (eficiência do reparo).
- **Etapa 2: Estimação da Função Média $\Lambda(t)$:** Simulação de Monte Carlo pelo histórico de falhas e cálculo do MCF.
 - **Etapa 2.1: Simulação de Monte Carlo.** Usa-se os valores $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\rho}$ para gerar N_{MC} processos de falha ($N_{MC} = 10^4$) truncado no tempo T .
 - **Etapa 2.2: Cálculo do MCF $\hat{\Lambda}(t)$.** Os processos de falhas gerados na etapa anterior são truncados por tempo, o *MCF* é simplesmente o número médio de falhas observadas entre 0 e T sobre os N_{MC} processos.
- **Etapa 3: Estimação da Periodicidade Ótima τ .** Com o intuito de utilizar a função custo dada na equação (3.9), é necessário encontrar estimativas para a função $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$. Na Etapa 2, o *MCF* foi usado como uma estimativa para $\Lambda(t)$. Contudo o *MCF* é uma função escada, cujo a derivada é zero em quase toda parte, e uma estimativa para $\lambda(t)$ não pode ser diretamente obtida a partir de $\Lambda(t)$. Usa-se então a estimação não-paramétrica dada pela derivada direita do Maior Minorante Convexo (“*Greatest Convex Minorant - GCM*”).
- **Etapa 4: Estimação do Intervalo de Confiança para τ :** Define-se um intervalo de confiança para τ utilizando reamostragem *bootstrap* a um nível de significância α pré-definido. Ver fluxograma (Figura 3.3)

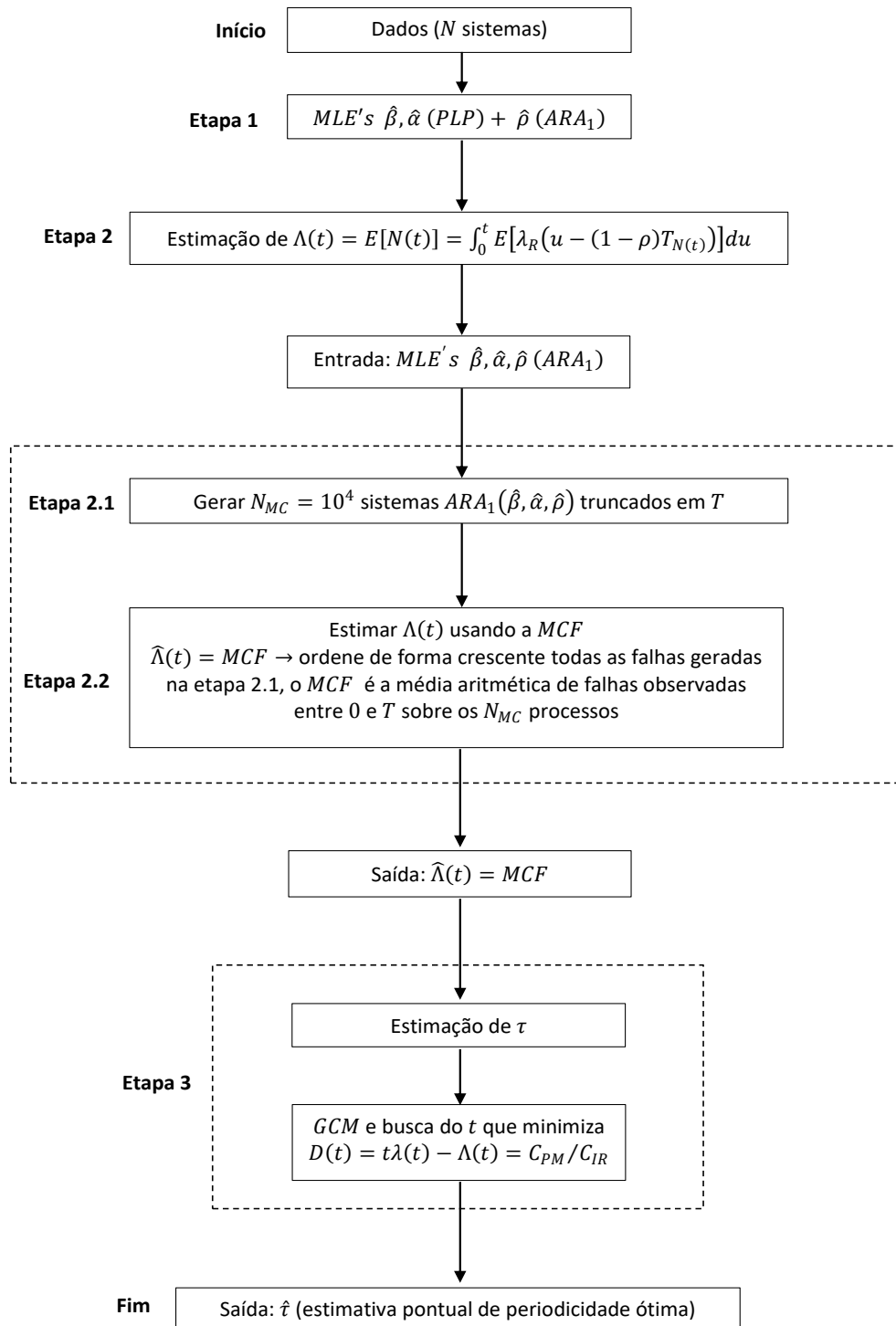


Figura 3.2 – Fluxograma das etapas 1 a 3 Toledo *et al.* (2016).

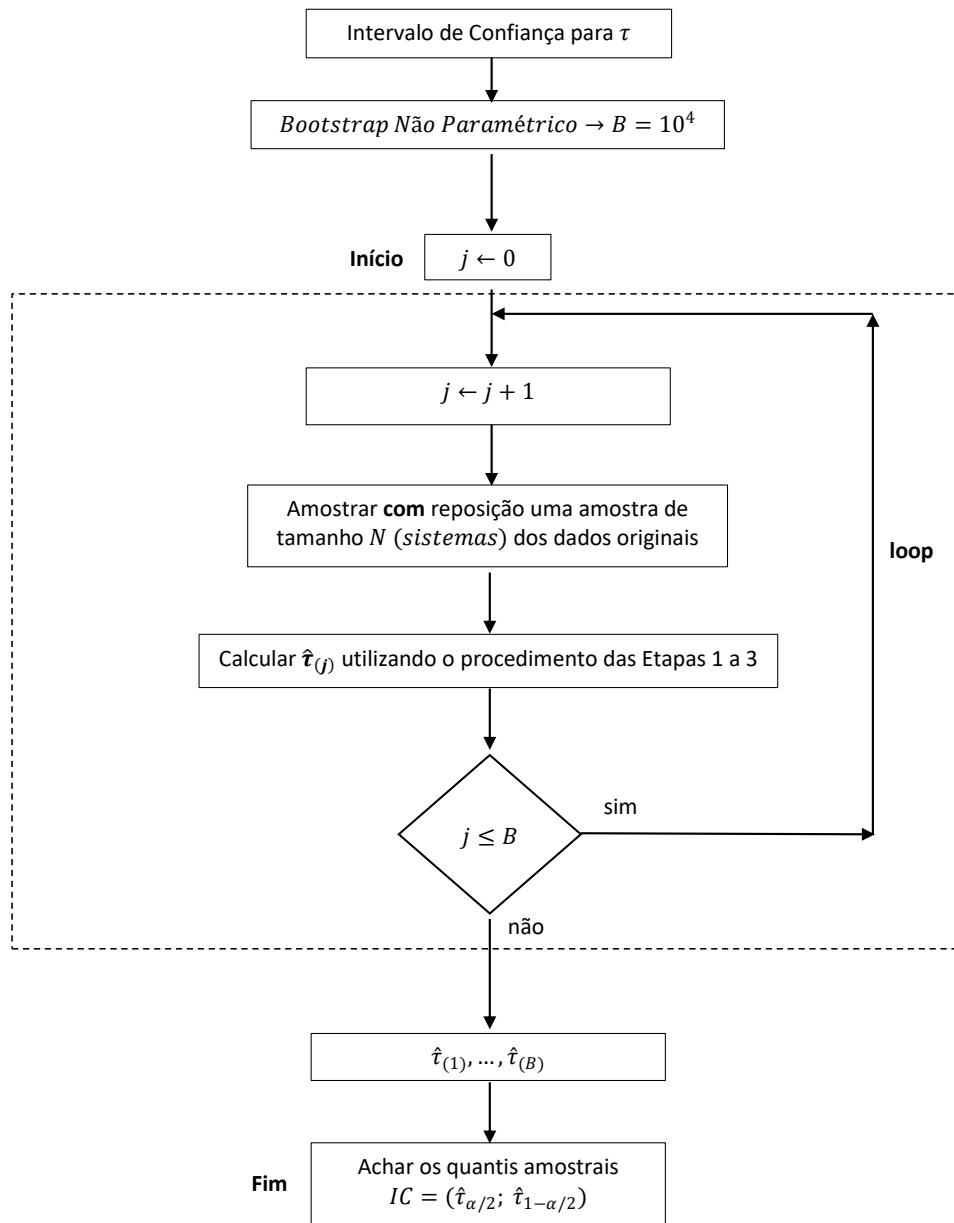


Figura 3.3 – Fluxograma com as etapas para a construção do intervalo de confiança bootstrap.

4. Metodologias para Estimação de Política Ótima de PM

Uma questão importante que está relacionada ao conceito de **Manutenção Preventiva** é o fato de a mesma tratar-se de uma intervenção planejada, em geral a política de manutenção determina tempos periódicos para ações de reparo, como ocorre nas manutenções semestrais (ou por quilometragem) na maioria dos automóveis, ou no caso das bombas de poupa de minério de ferro, em que o fabricante sugere que a *PM* ocorra a cada 15.000 horas de operação.

Nesta seção iremos abordar três metodologias alternativas ao apresentado Toledo *et al.* (2016): a primeira visa retirar a Etapa 3 apresentada na seção 3.3 em que é utilizado a estimação não-paramétrica dada pela derivada direita do Maior Minorante Convexo (“*Greatest Convex Minorant - GCM*”) para encontrar $\lambda(t)$; a segunda visa utilizar a estimação apresentada por (Jack 1997) para estimação da função média acumulada *MCF* $\Lambda(t)$; e, por fim, a metodologia 3 visa apresentar uma estimação dos tempos esperados de falhas utilizando a função estimada $\Lambda(t)$ de forma recursiva.

4.1. Metodologia I

Em Toledo *et al.* (2016) tem-se $\Lambda(t)$ é dada pela equação (3.8), a qual é estimada na Etapa 2 pelo cálculo do *MCF*. A *MCF* é uma função escada e com isso não há como encontrar diretamente a função $\lambda(t)$. A solução encontrada pelos autores (e apresentada na Seção 3.3) foi implementar os 3 passos descritos, ou seja, uma combinação de estimadores de máxima verossimilhança, simulação de Monte Carlo e a estimação não paramétrica *GCM*. A metodologia I consiste em utilizar a equação (3.7) onde não há a necessidade de utilização de $\lambda(t)$ e, conseqüentemente, retirar a necessidade da estimação não paramétrica *GCM*.

A metodologia I é então descrito da seguinte forma:

- **Etapa 1: Estimação de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros do Modelo.**
Usando o histórico de falhas e a função de Log-Verossimilhança para estimar $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ (parâmetros do PLP) e $\hat{\rho}$ (eficiência do reparo).
- **Etapa 2: Estimação da Função Média $\Lambda(t)$:** Simulação de Monte Carlo pelo histórico de falhas e cálculo do *MCF*.
 - **Etapa 2.1: Simulação de Monte Carlo.** Usa-se os valores $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar B processos de falha ($v = 10^4$) truncado no tempo T . Aqui o

processo de geração de falhas é o mesmo proposto por Toledo *et al.* (2015).

- **Etapa 2.2: Cálculo do MCF $\hat{\Lambda}(t)$.** Como o processo de falhas gerado anteriormente é truncado por T , a Função MCF é o número médio de falhas que ocorre até um tempo $t \leq T$.
- **Etapa 3: Estimação da Periodicidade Ótima τ .** Aqui utilizamos a equação (3.7) substituindo $E[N(t)] = \hat{\Lambda}(t)$ para calcular $\hat{\tau}$. Logo:

$$C(t) = \frac{C_{PM} + C_{RI}\hat{\Lambda}(t)}{t} \quad e \quad \hat{\tau} = \arg \min_{0 < t \leq T} C(t)$$

- **Etapa 4: Estimação do Intervalo de Confiança para τ :** Para encontrar o Intervalo de Confiança para τ , são realizados $K = 10^4$ execuções das etapas 1 a 3 descritas acima, gerando um vetor de tempos $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_K$. A média aritmética destes tempos $\hat{\tau} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\tau}_i$ é eleita como o tempo ótimo de manutenção e os quantis da sequência $\hat{\tau}_i$'s são usados para estimar um Intervalo de Confiança IC para τ .

Com intuito de ilustrar a metodologia, descrevemos apresentamos o fluxograma, Figura 4.1.

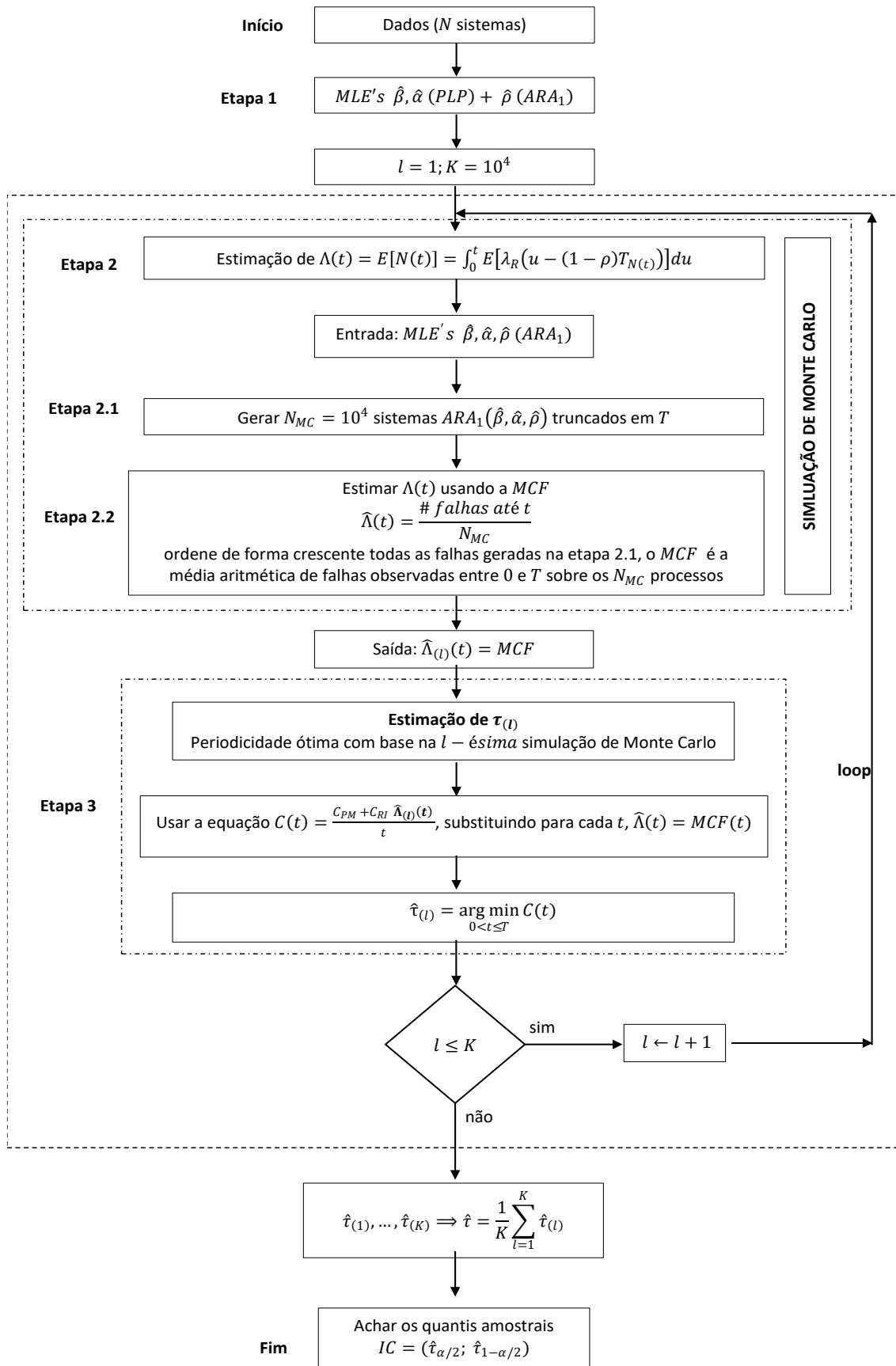


Figura 4.1 - Fluxograma das etapas 1 a 4 da metodologia I.

4.2. Metodologia II

Este modelo se diferencia na estimação de $\Lambda(t)$. Aqui é utilizado o método proposto por Jack (1997). O problema então é o de estimar os tempos médios das falhas, pois para um único sistema em estudo, as falhas são as que ocorrem do único sistema e utilizadas para estimação da função média acumulada, no entanto, no caso em que há mais de um sistema em estudo, cada sistema terá um vetor de falhas diferente, gerado de forma aleatória.

Para o caso em que há mais de um sistema em estudo, definimos então a estimativa do tempo médio para cada falha como:

Definição: Seja t_{ij} o j – ésimo tempo de falha do sistema i (truncado por falha) e $i = 1, 2, \dots, k$, logo $\hat{t}_j = \bar{t}_{.j}$ é a estimativa do j – ésimo tempo médio de falha e é dado por

$$\hat{t}_j = \bar{t}_{.j} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_{ij} \quad (4.1)$$

A metodologia II é então descrito da seguinte forma:

- **Etapa 1: Estimação de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros do Modelo.** Usando o histórico de falhas e a função de Log-Verossimilhança para estimar $\hat{\beta}, \hat{\eta}$ (parâmetros do PLP) e $\hat{\rho}$ (eficiência do reparo).
- **Etapa 2: Estimação dos tempos médio de falhas \hat{t}_i :** Simulação de Monte Carlo pelo histórico de falhas e cálculo da Função Intensidade.
 - **Etapa 2.1: Simulação de Monte Carlo.** Usa-se os valores $\hat{\beta}, \hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar N_{MC} processos de falha ($N_{MC} = 10^4$) truncados por falha, sendo o número de falhas dado por $n = (T/\eta)^\beta$.
 - **Etapa 2.2: Cálculo dos tempos médio de falhas \hat{t}_i :** Utilizando os $N_{MC} = 10^4$ processos de falha, e como são gerados em forma de sistemas, temos os primeiros, os segundos, os terceiros e os demais tempos de falhas. Para os N_{MC} sistemas tempos truncados por falha, temos o vetor de tempos médios de falhas dado por $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$ dada pela equação (4.1).
- **Etapa 3: Estimação da Função Média $\Lambda(t)$:** Pelo método proposto por (Jack 1997) , se N_t denota o número esperado de falhas até um tempo de truncamento T , então $\Lambda(t) = E[N_t]$ é a função média correspondente a $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ é dada conforme a equação (4.2) descrita abaixo.

- **Etapa 4: Estimação da Periodicidade Ótima τ .** Aqui utilizamos a equação (3.7) substituindo $E[N(t)] = \hat{\Lambda}(t)$ para calcular $\hat{\tau}$. Logo:

$$C(t) = \frac{C_{PM} + C_{IR}\hat{\Lambda}(t)}{t} \quad e \quad 0 < t \leq T$$

$$\hat{\tau} = \arg \min_{t>0} C(t)$$

- **Etapa 5: Estimação do Intervalo de Confiança para τ :** Para encontrar o Intervalo de Confiança para τ , são realizados $K = 10^4$ execuções das etapas 1 a 4 descritas acima, gerando um vetor de tempos $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_K$. A média aritmética destes tempos $\hat{\tau} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\tau}_i$ é eleita como o tempo ótimo de manutenção e os quantis da sequência $\hat{\tau}_i$'s são usados para estimar um Intervalo de Confiança *IC* para τ .

Descrição do Método de Jack (1997): Para um único tempo de Manutenção Preventiva, a redução aritmética da PM não é levada em conta, e assim o intuito é saber o número esperado de falhas até o primeiro tempo de PM τ . Assim, vão existir n falhas, T_1, \dots, T_n que irão ocorrer até o tempo de truncamento T .

$$E[N(\tau)] = \Lambda(\tau) = \sum_{j=1}^n [\Lambda(t_j - (1 - \rho)t_{j-1}) - \Lambda(\rho t_{j-1})] + \Lambda(\tau - (1 - \rho)t_n) - \Lambda(\rho t_n) \quad (4.2)$$

e $t_{j-1} \leq t < t_j$ e $j = 1, 2, \dots, n$

Sendo a intensidade inicial supostamente ser da forma *PLP - Process Law Power*

$$E[N(t)] = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{t_j - (1 - \rho)t_{j-1}}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_{j-1}}{\eta} \right)^\beta \right] + \left(\frac{\tau - (1 - \rho)t_n}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_n}{\eta} \right)^\beta$$

Assim a Função Média estimada $\hat{\Lambda}_t$, é a estimativa para o valor esperado do número de falhas, quando $t_j = \hat{t}_j = \bar{t}_j$ conforme equação (4.1).

$$\hat{\Lambda}_t = \hat{\eta}^{-\hat{\beta}} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\left(\hat{t}_j - (1 - \hat{\rho})\hat{t}_{j-1} \right)^{\hat{\beta}} - \left(\hat{\rho}\hat{t}_{j-1} \right)^{\hat{\beta}} \right] + \left(T - (1 - \hat{\rho})\hat{t}_n \right)^{\hat{\beta}} - \left(\hat{\rho}\hat{t}_n \right)^{\hat{\beta}} \quad (4.3)$$

Recomenda-se a execução do procedimento $K = 10^4$, pois há a variabilidade devido a simulação de Monte Carlo. Por isso é importante analisar a distribuição dos tempos \hat{t}_j 's. Neste modelo espera-se uma variabilidade menor dos tempos ótimos estimados \hat{t}_j 's, pois a variabilidade da função $\hat{\Lambda}_t$ na metodologia I é maior que a variabilidade dos tempos estimados \hat{t}_j 's.

Como utilizado na metodologia I, a estimação do tempo ótimo τ é a média das $K = 10^4$ execuções da metodologia II descrito acima, gerando um vetor de tempos $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_K$. A média aritmética destes tempos $\hat{\tau} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\tau}_i$ é eleita como o tempo ótimo de manutenção e os quantis da sequência $\hat{\tau}_i$'s são usados para estimar um Intervalo de Confiança IC para τ .

O fluxograma a seguir (Figura 4.2) ilustra a metodologia II aqui apresentado:

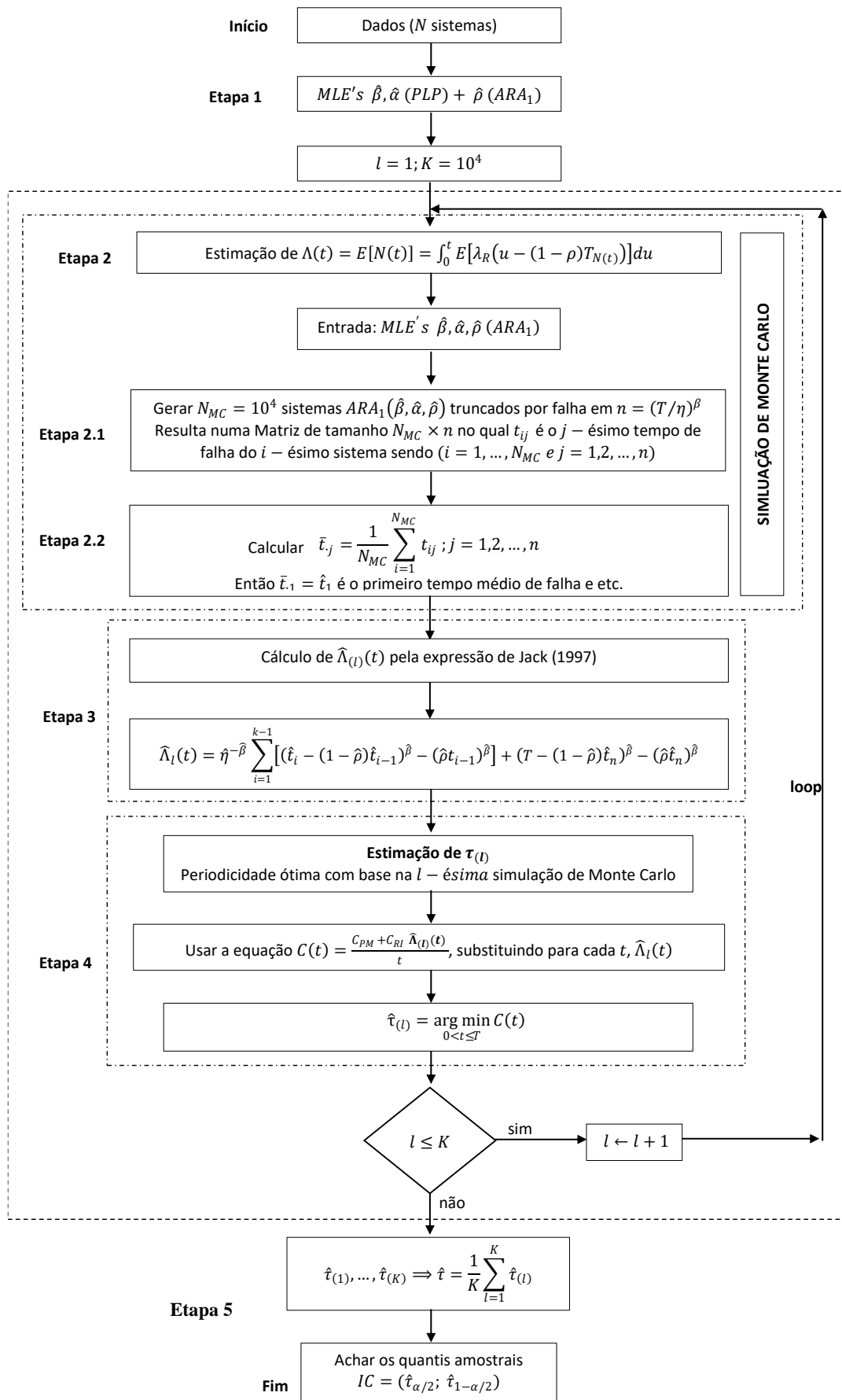


Figura 4.2 - Fluxograma das etapas 1 a 5 da metodologia II.

4.3. Metodologia III

Na Seção 3.1 mostramos que $\Lambda(t)$ é o número esperado de falhas até o tempo t , dada pela equação (3.1). Então podemos fazer $\Lambda(t) = 0, 1, 2, \dots, n$, e assim temos $\{t_i\}_{i \geq 0}$, sendo o vetor dos tempos esperados de falhas, ou manutenções corretivas $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ tal qual $\Lambda^{-1}(i) = t_i$ e representa assim o tempo em que o número esperado de falha é igual a i .

A metodologia III visa estimar o vetor $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$ com $\hat{t}_i \leq T$ utilizando a Função Média estimada $\hat{\Lambda}_t$ dada pela equação (4.3).

A metodologia é então descrita da seguinte forma:

- **Etapa 1: Estimação de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros do Modelo.**
Usando o histórico de falhas e a função de Log-Verossimilhança para estimar $\hat{\beta}, \hat{\eta}$ (parâmetros do PLP) e $\hat{\rho}$ (eficiência do reparo).
- **Etapa 2: Estimação dos tempos esperados de falhas $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$:** Utiliza-se a Função Média estimada $\hat{\Lambda}_t$ dada pela equação (4.3) de forma recursiva para encontrar $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$. Calcula-se então utilizando os *EMV's* encontrados na Etapa 1 na equação (4.4). Como $\hat{\Lambda}_t$ é construída a medida que $t \rightarrow T$ e é uma função não-decrescente, quando $t = T$ temos também a estimativa de $\hat{\Lambda}_t$.
- **Etapa 3: Estimação da Periodicidade Ótima τ .** Aqui utilizamos a equação (3.7) substituindo $E[N(t)] = \hat{\Lambda}(t)$ construída na Etapa 2 para calcular $\hat{\tau}$. Logo:

$$C(t) = \frac{C_{PM} + C_{IR}\hat{\Lambda}(t)}{t} \quad e \quad 0 < t \leq T$$

$$\hat{\tau} = \arg \min_{t > 0} C(t)$$

- **Etapa 4: Estimação do Intervalo de Confiança para τ :** Para encontrar o Intervalo de Confiança para τ , é gerado vetor de tempos $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_K$ e $K = 10^4$ de acordo com o procedimento descrito abaixo. Os quantis da sequência $\hat{\tau}_i$'s são usados para estimar um Intervalo de Confiança *IC* para τ .

4.3.1. Descrição para geração do vetor $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$ de forma recursiva

Fazemos primeiro para o caso em que $E[N(t)] = 1$, em seguida para $E[N(t)] = 2$ e por fim generalizamos para o caso em que $E[N(t)] = n$.

Se $\Lambda(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta$ é uma função PLP, logo $\Lambda^{-1}(t) = \eta \times t^{\frac{1}{\beta}}$

Para o caso em que $E[N(t) = 1]$, queremos encontrar $\Lambda^{-1}(1)$

$$\Lambda^{-1}(1) = \eta \times 1^{\frac{1}{\beta}} \rightarrow t_1 = \eta$$

Como a primeira falha t_1 não é condicionada a nenhuma falha anterior, utilizar a função inversa de $\Lambda(t)$, conforme descrito acima, é aceitável.

Para o caso em que $E[N(t) = 2]$, queremos encontrar $\Lambda^{-1}(2|t_1 = \eta)$, e assim derivando do Método de Jack (1997) temos que:

$$E[N(t) = 2] = \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{t_i - (1-\rho)t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta \right] = \left(\frac{t_1}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_2 - (1-\rho)t_1}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_1}{\eta} \right)^\beta = 2$$

$$\left(\frac{t_2 - (1-\rho)t_1}{\eta} \right)^\beta = 2 - \overbrace{\left(\frac{t_1}{\eta} \right)^\beta}^{=1} + \overbrace{\left(\frac{\rho t_1}{\eta} \right)^\beta}^{=\rho^\beta}$$

Logo, se $\Lambda(t_2 - (1-\rho)t_1) = \left(\frac{t_2 - (1-\rho)t_1}{\eta} \right)^\beta$ então $t_2 - (1-\rho)t_1 = \eta(1 + \rho^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$

E,

$$t_2 = \eta(1 + \rho^\beta)^{\frac{1}{\beta}} + (1-\rho)t_1$$

Como $\Lambda^{-1}(2|t_1 = \eta)$ representa o tempo esperado em que ocorre duas falhas dado que já ocorreu a primeira falha, logo

$$\Lambda^{-1}(2|t_1 = \eta) = t_2 = \eta(1 + \rho^\beta)^{\frac{1}{\beta}} + (1-\rho)t_1$$

De forma generalizada queremos encontrar $\Lambda^{-1}(n|t_{n-1})$, e assim derivando do Método de Jack (1997) temos que:

$$E[N(t) = n] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t_i - (1-\rho)t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{t_i - (1-\rho)t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_{i-1}}{\eta} \right)^\beta \right]}_{=n-1} + \left(\frac{t_n - (1-\rho)t_{n-1}}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{\rho t_{n-1}}{\eta} \right)^\beta = n$$

Assim temos que,

$$\left(\frac{t_n - (1 - \rho)t_{n-1}}{\eta}\right)^\beta = n - (n - 1) + \left(\frac{\rho t_{n-1}}{\eta}\right)^\beta$$

E

$$\Lambda(t_n - (1 - \rho)t_{n-1}) = 1 + \Lambda(\rho t_{n-1})$$

$$\boxed{\Lambda^{-1}(n|t_{n-1}) = t_n = \eta \left[1 + \left(\frac{\rho t_{n-1}}{\eta}\right)^\beta\right]^{1/\beta} + (1 - \rho)t_{n-1}} \quad (4.4)$$

Da equação (4.4) podemos tirar três informações desta metodologia, sendo:

$$1^\circ \Lambda(t_n - (1 - \rho)t_{n-1}) = 1 + \Lambda(\rho t_{n-1})$$

$$2^\circ \Lambda(T - (1 - \rho)t_n) = \Lambda(T) - n + \Lambda(\rho t_n)$$

$$3^\circ \Lambda(\rho t_n) = \left(\frac{\rho t_n}{\eta}\right)^\beta = \rho^\beta \times \left(\frac{t_n}{\eta}\right)^\beta = \rho^\beta \times \Lambda(t_n)$$

Os valores de $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$ e $\hat{t}_n \leq T$, é o vetor estimado dos tempos de falhas quando utilizamos os *EMV's* encontrados na Etapa 2 desta metodologia e $n \in \mathbb{N}$ é o número estimado de falhas até o tempo de truncamento T . Importante observar que se $t_n < T$ então $n^* = n + \varepsilon = \Lambda(T)$ sendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $0 < \varepsilon < 1$, isto é, $\Lambda(t_n < T) = \Lambda(T) - \Lambda(t_n) = \Lambda(T) - n = \varepsilon$.

4.3.2. Descrição para estimação de um Intervalo de Confiança para τ

1. Geram-se K vetores de parâmetros $\hat{\mu} = (\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{\rho})$ estimados na Etapa 1, sendo $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_B$.

Como o vetor de parâmetros $\hat{\mu} = (\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{\rho}) = \arg \max L(\mu)$ segue aproximadamente uma distribuição normal multivariada, com média $\hat{\mu}$ e matriz de covariância Σ dada por menos a inversa da matriz hessiana de $L(\mu)$ avaliada em $\hat{\mu}$. A matriz Hessiana é dada portanto

$$H = -\left(\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu \partial \mu^t}\right)$$

Assim, teoria assintótica pode ser usada para se construir intervalos de confiança para os parâmetros.

2. Substituem os valores do item anterior na equação (4.4) para estimar os tempos $\{\hat{t}_i\}_{i \geq 0}$ e construir as funções médias estimadas $\hat{\Lambda}(t)_1, \hat{\Lambda}(t)_2, \dots, \hat{\Lambda}(t)_B$, conforme descrito na Etapa 2.
3. Substitui cada valor de $\hat{\Lambda}(t)_i$ na equação (3.7) fazendo $E[N(\tau)] = \hat{\Lambda}(t)_i$ e obtendo assim $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_B$, conforme descrito na Etapa 3.
4. Os quantis da sequência $\hat{\tau}_i$'s são usados para estimar um Intervalo de Confiança para $\hat{\tau}$.

Para melhor compreensão da metodologia III, foi construído um fluxograma (ver Figura 4.3).

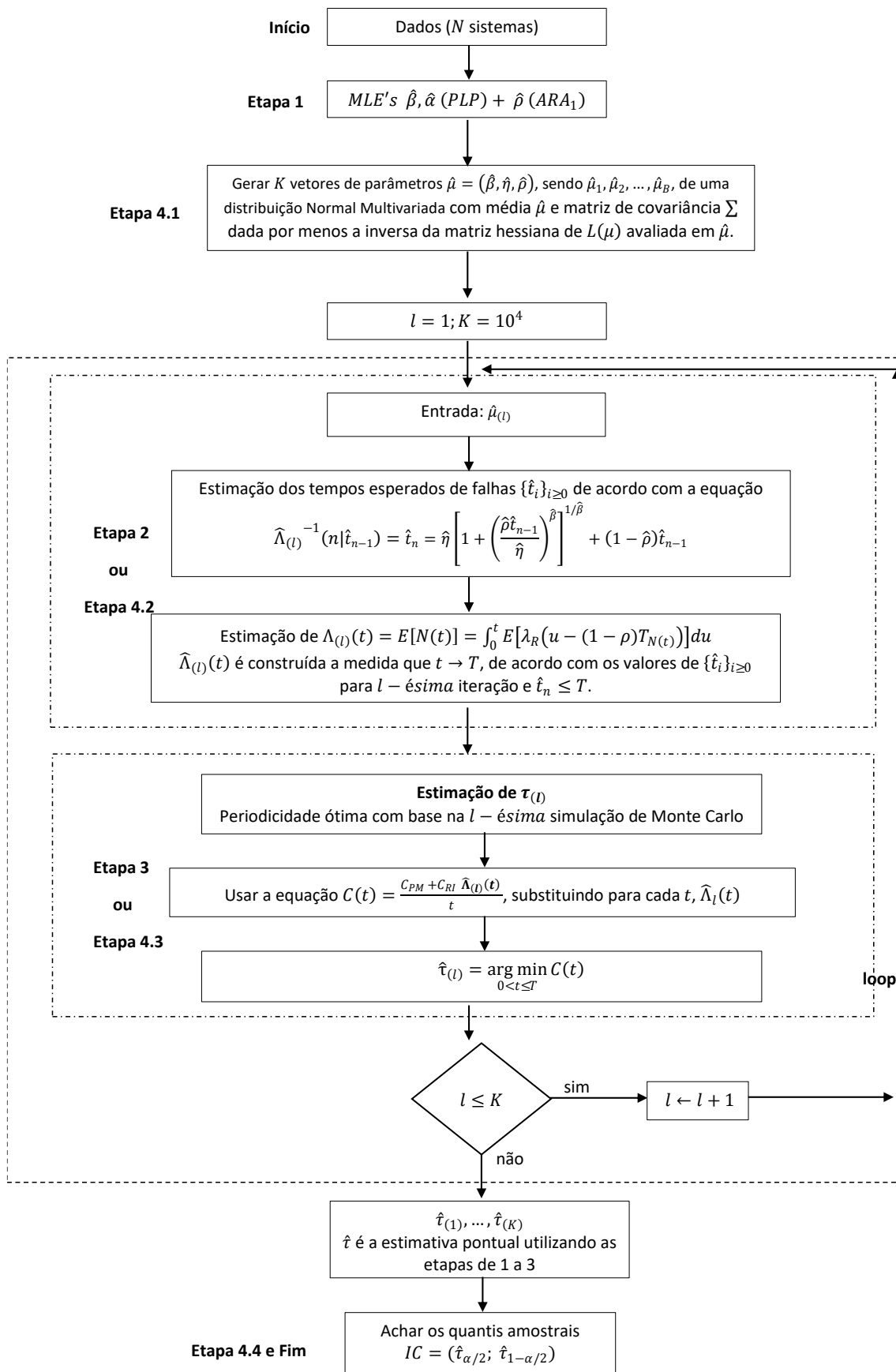


Figura 4.3 - Fluxograma das etapas 1 a 4 da metodologia III.

5. Situação Prática Revisitada

Nesta seção, apresentamos a análise de um conjunto de dados reais apresentado em Toledo, *et al.* (2016) e refere-se ao histórico de falhas de 193 motores de “caminhões fora de estrada” truncados no tempo de 40.000 horas de operação.

Para este conjunto de dados, as seguintes suposições são feitas:

- A Intensidade Inicial é uma função *PLP* dada por:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}, \eta > 0 \text{ e } \beta > 0$$

- O efeito de PM é caracterizado por uma ação de reparo perfeito e o sistema transforma-se num novo sistema, considerado tão bom quanto novo.
- A análise do sistema está restrita a uma única ocorrência de PM.
- O efeito de CM é caracterizado por um ação de reparo imperfeito, com eficiência de reparo (ρ) o qual será estimado a partir dos dados.

As informações acerca do conjunto de dados, bem como sua validação e a análise da metodologia aplicado, podem ser consultados no próprio trabalho citado. O intuito aqui é aplicar os dados nos modelos apresentados e comparar tais resultados.

5.1. Análise Preliminar Conjunto de Dados

A Figura 5.1 (estimador de Nelson-Aalen para a Função Média Acumulada) apresenta uma forma convexa, indicando que, caso o mecanismo de falha siga um *NHPP*, o tempo entre falhas para estes sistemas pode estar diminuindo, ou seja, o sistema está deteriorando.

Em Toledo, *et al.* (2016) os valores dos parâmetros estimados para os dados e utilizando a classe de modelos ARA_1 foram:

$$\hat{\beta} = 2.458, \hat{\eta} = 15582 \text{ e } \hat{\rho} = 0.471$$

A razão de custo utilizada nas análises é $C_{PM}/C_{IR} = 1/1.23$. Iremos assumir, nesta seção, que $C_{PM} = 1$ e analisaremos o efeitos da alteração de C_{IR} , isto é, não é necessário avaliar a razão de custo se apenas o C_{IR} altera. A análise pela Razão de Custo C_{PM}/C_{IR} somente será viável quando analisarmos a equação (3.9) se necessário.

Iremos assumir $\hat{\tau}$ como a **Estimação da Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva**, que refere-se ao valor de t que minimiza a equação (3.7). Conforme especificado na Seção 1.2, utilizaremos *PM (do inglês Preventive Maintenance)* quando referirmos a Manutenção Preventiva e *CM (do inglês Corrective Maintenance)* para Manutenção Corretiva.

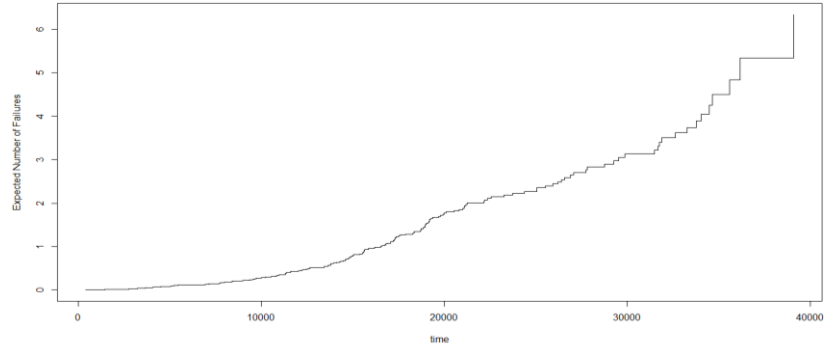


Figura 5.1 – Estimador Nelson-Aalen da Função Média – Dados dos motores de caminhões fora de estrada.

5.1.1. Estimação da Periodicidade Ótima pelo Metodologia I

Como a Etapa 1 é a estimação dos parâmetros, então iremos executar as Etapas 2 e 3 da metodologia. Assim, estamos interessados em $\hat{\tau}$ utilizando a mesma estrutura utilizada por Toledo, *et al.* (2016) com a diferença principal de estimar τ utilizando a equação (3.7).

Nossa primeira análise refere-se à Etapa 2 (simulação de Monte Carlo para obter cada $\hat{\Lambda}_{(l)}(t), N_{MC} = 10^4$) e, conforme já discutido, há uma variabilidade da função média acumulada, devido a variação dos tempos de falhas estimados nos $N_{MC} = 10^4$ sistemas gerados na simulação de Monte Carlo. Na equação (3.7) o único valor que altera em relação às estimações é o valor $\hat{\Lambda}_t$, desta forma uma alteração nos tempos gerados durante uma determinada estimação altera o valor estimado de $\hat{\tau}$.

A Figura 5.2 representa o histograma dos $K = 10^4$ tempos de periodicidade ótima estimados. Sendo o menor valor estimado de 13273, o maior valor estimado de 17046 e uma amplitude de 3773 horas. Os quantis $\tau_{0,025}, \tau_{0,5}$ e $\tau_{0,975}$ são respectivamente 14013, 15031 e 16153. Portanto aplicando a metodologia I o tempo ótimo de periodicidade de MP foi estimado em $\hat{\tau} = 15037 \text{ horas}$ (média aritmética os $K = 10^4$ valores).

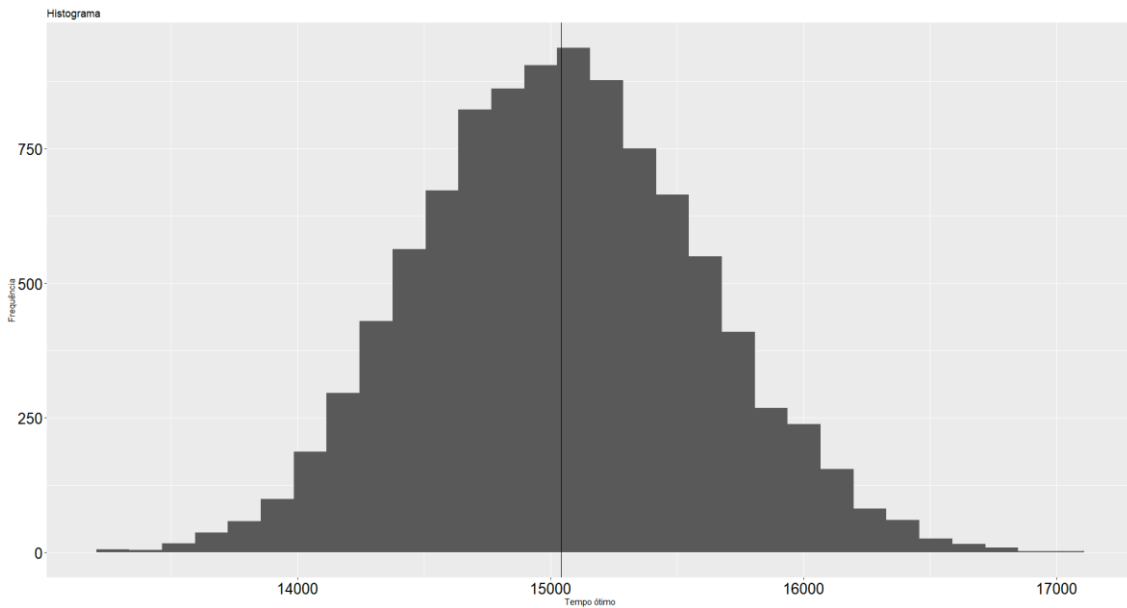


Figura 5.2 - Histograma que representa a distribuição de $K = 10^4$ tempos de periodicidade ótima estimados. A linha sólida vertical representa o tempo médio.

Para finalizar a análise, resta-nos comparar como o modelo se comporta quanto a razão de custo ou especificamente em relação ao C_{IR} . 5 razões de custos diferentes foram avaliadas, sendo estas $C_{IR} = [1.23 \ 3 \ 5 \ 10 \ 15]$ que são as mesmas razões avaliadas em Toledo, *et al.* (2016). Na Figura 5.3 é possível analisar o histograma gerado para cada razão de custo, nota-se uma variabilidade menor e valores estimados de $\hat{\tau}$ menor quando C_{IR} aumenta, isto caracteriza que o modelo está menos propenso a aceitar que uma falha ocorra antes da PM e, quanto à variabilidade no processo de construção de $\hat{\Lambda}_t$, há uma menor variação dos tempos de falhas estimados. A Tabela 5.1 apresenta um resumo dos resultados obtidos com base $K = 10^4$ estimados para cada razão de custo.

Tabela 5.1 – Resultados obtidos para as 5 razões de custos utilizando a metodologia I.

C_{PM}/C_{IR}	Mínimo	Percentil 2,5%	Mediana	Média Aritmética ($\hat{\tau}$)	Percentil 97,5%	Máximo
1/1,23	13273	14013	15031	15037	16153	17046
1/3	7863	8486	9166	9172	9895	10671
1/5	6186	6633	7230	7235	7881	8534
1/10	4378	4818	5344	5351	5927	6328
1/15	3716	3998	4502	4510	5056	5647

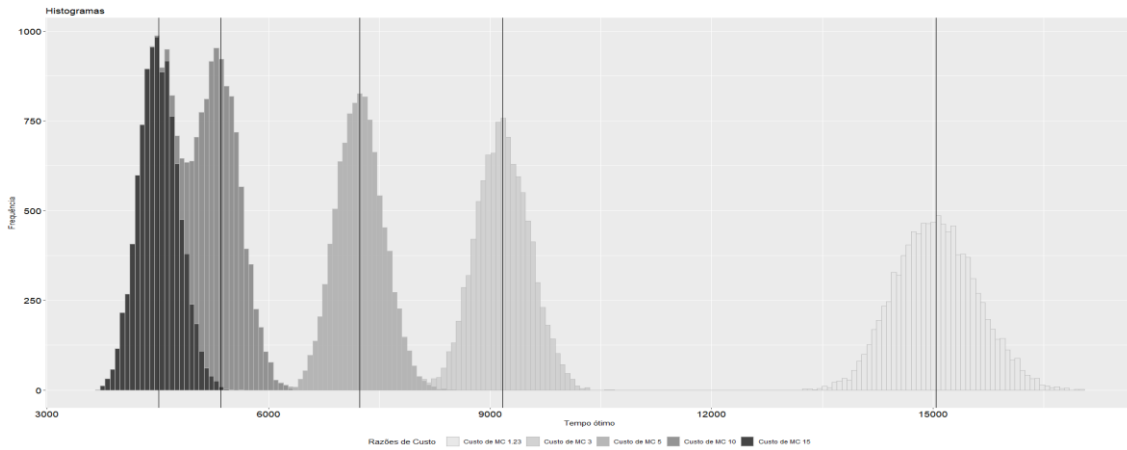


Figura 5.3 – Histogramas referentes as razões de custos analisadas em função do tempo ótimo estimado τ . A Tabela 5.2 representa os valores apresentados em Toledo, *et al.* (2016), sendo \hat{t}_{MR} a estimação dos tempos supondo reparo mínimo, \hat{t}_{IR-0} os tempos estimados pelo modelo ARA_1 apresentado na Seção 3.3 e \hat{t}_{IR-1} sendo os tempos estimados na metodologia 1 apresentado na Seção 4.1. Como previsto os tempos estimados são próximos e o intervalo de confiança contempla os tempos estimados com suposição de reparo mínimo, isto é, tais modelos não identificam melhora significativa ou aumento do tempo de PM com a suposição de reparo imperfeito.

Tabela 5.2 – Análise comparativa dos tempos estimados para suposição de reparo mínimo, metodologia de Toledo, *et al.* (2016) e a metodologia I.

C_{PM}/C_{IR}	\hat{t}_{MR}	95% CI	$\hat{t}_{IR-0}(1)$	95% CI	$\hat{t}_{IR-1}(2)$	95% CI
1/1,23	14.345	(13.304; 15.511)	15.815	(13.632; 18.082)	15.037	(14.013; 16.153)
1/3	9.429	(8.898; 9.995)	9.207	(8.608; 10.173)	9.172	(8.486; 9.895)
1/5	7.414	(6.974; 7.901)	7.500	(6.720; 8.125)	7.235	(6.633; 7.881)
1/10	5.350	(4.949; 5.820)	5.593	(4.847; 6.227)	5.351	(4.818; 5.927)
1/15	4.421	(4.028; 4.888)	4.621	(4.017; 5.386)	4.510	(3.998; 5.056)

(1) Estimativa pontual da periodicidade ótima – Toledo, *et al.* (2016).

(2) Estimativa pontual da periodicidade ótima – Metodologia I.

Uma outra forma de analisar a estimação ótima de periodicidade \hat{t}_{IR-1} , é pela análise de box-plot (Figura 5.4), de modo que seja possível compreender que o aumento do Custo C_{IR} também indica um tempo menor de \hat{t} e corrobora com a ideia de que quando o Custo de C_{IR} é muito alto, você intervém antes para não assumir estes gastos inesperados. Em $\hat{t}_{IR-1} = 4.510$ e $C_{PM}/C_{IR} = 1/15$ tem-se que $\hat{\Lambda}(t = 4.510) = 0,0516$, isto é, dos 10^4 sistemas gerados, estes produziram 49235 tempos de falhas e representam assim 5,16% das ocorrências das falhas antes da Manutenção Preventiva. No caso da razão de custo

$C_{PM}/C_{IR} = 1/1.23$, o $\hat{t}_{IR-1} = 15037$ e $\hat{\Lambda}(t = 15037) = 0,7383$, assim tem-se 73,83% das ocorrências das falhas antes da PM, e isto significa que você está mais disposto a aceitar o fato de ocorrer uma falha, pois o custo C_{IR} é menor.

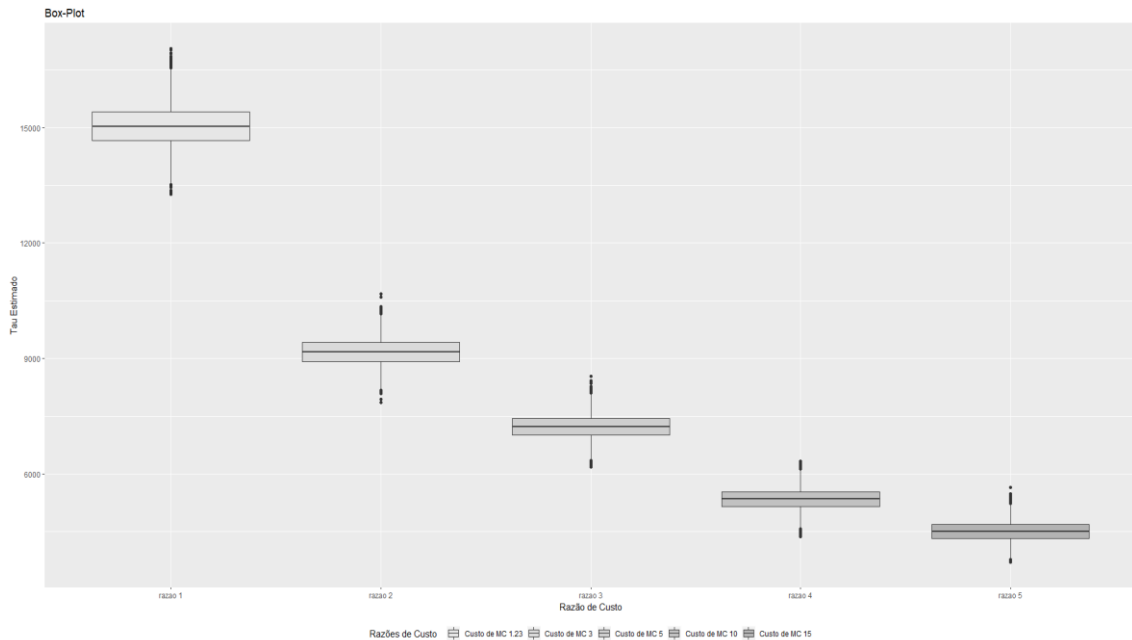


Figura 5.4 –Box-Plot para analisar o comportamento do tempo ótimo de periodicidade estimado em relação ao custo de CM (C_{IR}).

A análise dos tempos ótimos supondo reparo mínimo requer uma estimação dos parâmetros da função *PLP* supondo que não há redução aritmética e, portanto, não há eficiência de reparo quando há uma ação de manutenção corretiva. Neste caso a estimação dos parâmetros retorna valores diferentes para quando se assume que há redução aritmética e, conseqüentemente, eficiência de reparo. Logo, dizer que o sistema se comporta como reparo mínimo antes da primeira falha tem esse viés, e neste trabalho dizemos que o sistema se comporta sem o efeito da redução aritmética até a primeira falha.

5.1.2. Estimação da Periodicidade Ótima pelo Metodologia II

Como a Metodologia II possui variabilidade devido a simulação de Monte Carlo na Etapa 2.1 com $N_{MC} = 10^4$ sistemas, isto indica que sempre haverá uma diferença de estimação dos tempos médios de falhas $\hat{t}_j = \bar{t}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_{ij}$. Para não disponibilizar um resultado sujeito a esta variabilidade, a metodologia II foi executado $K = 10^4$ vezes e a média dos valores obtidos foi eleita para analisar o banco de dados.

O número de falhas utilizado para o truncamento é $n = \left(\frac{40000}{15582}\right)^{2,458} = 10,145 \approx 10$.

Para este banco de dados, o vetor de 10 falhas esperadas é:

0 13806 22385 28991 34351 38858 42883 46502 49821 52888 55730

Sendo $\hat{t}_1 = 13806, \hat{t}_2 = 22385, \hat{t}_3 = 28991, \hat{t}_4 = 34351$ e $\hat{t}_5 = 38858$ os tempos de falhas estimados menor que $T = 40000$ apresentando assim em média 5 tempos de falhas. Cabe ressaltar que este número é inteiro, mas a quantidade de falhas estimada até o tempo $T = 40000$ é $E[N(t)] = 4.491577$, logo a simulação de dados a partir dos parâmetros estimados retorna 5 ou mais falhas até $T = 40000$ na maioria dos casos. De fato essa análise já foi apontada na metodologia I aqui apresentado, pois a Simulação de Monte Carlo, nos dois casos, indicou isso (lembre-se, foram gerados $N_{MC} = 10^4$ sistemas e estes retornaram mais de 5000 sistemas com 5 falhas ou mais).

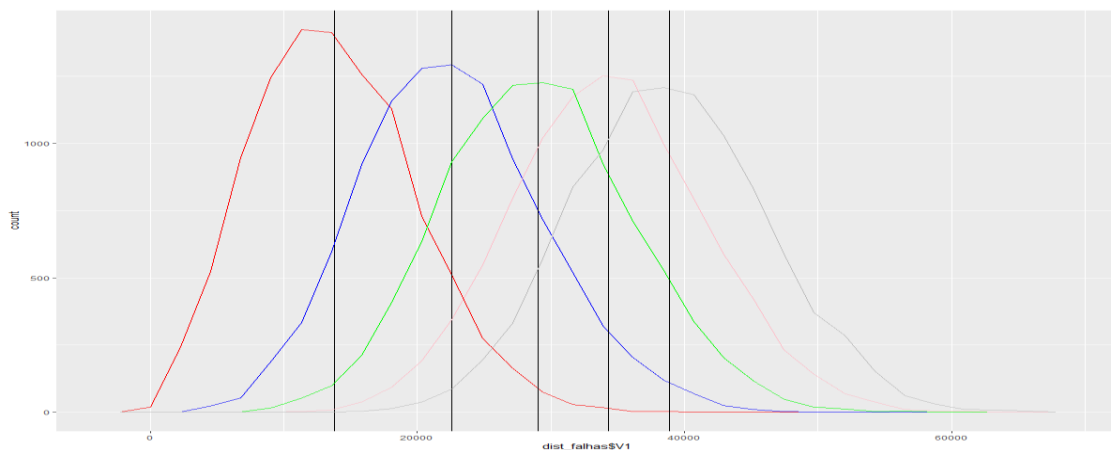


Figura 5.5 – Gráficos de Polígonos de Frequência para análise visual da distribuição dos tempos de falhas ocorridos antes de $T = 40000$. As linhas verticais representam os tempos de falhas estimados $\hat{t}_1 = 13806, \hat{t}_2 = 22385, \hat{t}_3 = 28991, \hat{t}_4 = 34351$ e $\hat{t}_5 = 38858$.

Como é de interesse, a Figura 5.5 representa a distribuição do tempos gerados nos $N_{MC} = 10^4$ sistemas. Observa-se aqui que há sistemas que geraram sua primeira falha próximo de $T = 40000$ ou até próximo de zero, sendo que, para o exemplo utilizado, o maior tempo de falha 38202 e o menor tempo de falha encontrado em 235.

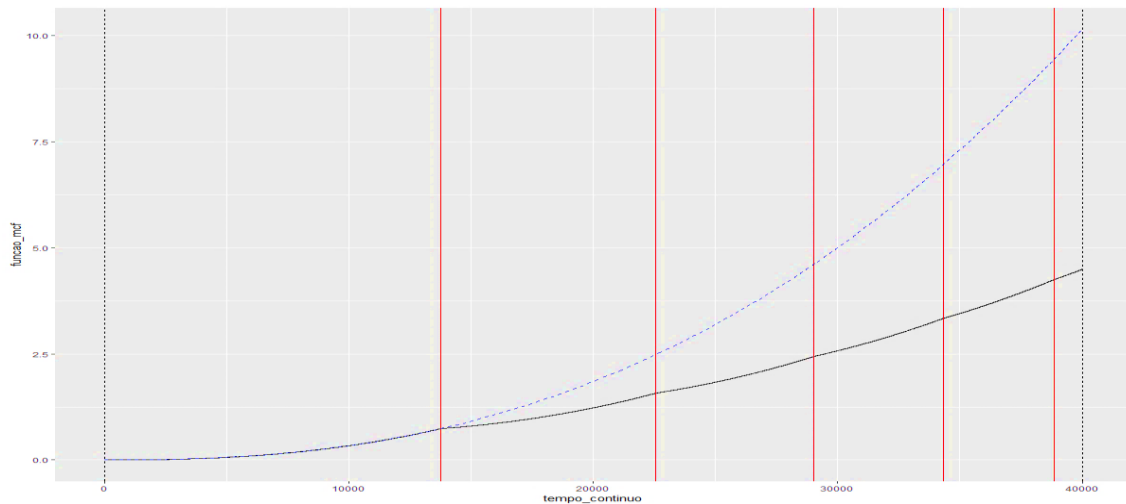


Figura 5.6 – Representação gráfica da Função Média Acumulada – MCF, estimada pelo modelo II. A linha tracejada representa a Função PLP $\Lambda(t) = (t/\eta)^\beta$, a linha sólida representa a Função MCF estimada e as linhas verticais representam os tempos de falhas estimados, o tempo zero e o tempo de truncamento por tempo.

A Figura 5.6 representa a Função Média Acumulada construído com a equação (4.3). Nota-se que os intervalos entre os tempos de falhas (*gap's*) estão diminuindo com o tempo, indicando deterioração do sistema com o passar do tempo e ainda indicando o formato convexo da curva da Função MCF e o valor do parâmetro $\beta > 1$.

A Figura 5.7 representa o histograma dos $K = 10^4$ tempos de periodicidade ótima estimados. Sendo o menor valor estimado de 18680, o maior valor estimado de 19013 e uma amplitude de 333 horas. Os quantis $\tau_{0,025}$, $\tau_{0,5}$ e $\tau_{0,975}$ são respectivamente 18757, 18848 e 18938. Nota-se aqui uma menor variabilidade em relação ao modelo I, e isso ocorre justamente pela estimação de $\hat{\Lambda}_t$, que não varia em cada execução.

O tempo ótimo de Manutenção Preventiva estimado foi de $\tau = \mathbf{18848}$ horas para a razão de custo $C_{PM}/C_{IR} = 1/1.23$.

Observa-se que este tempo é superior ao estimado na metodologia I, e isto é coerente com o fato de que, se há uma redução aritmética após uma ação de reparo imperfeito, então o sistema assim rejuvenesce, logo tem de haver um prolongamento no tempo de manutenção preventiva. Para este exemplo temos $\hat{t} > \hat{t}_1$ e isto significa que C_{IR} é próximo de C_{PM} e convém deixar ocorrer a primeira falha. Já nas demais razões, os tempos estimados já são menores que \hat{t}_1 e significa que C_{IR} é caro e não deve deixar que ocorra uma falha inesperada.

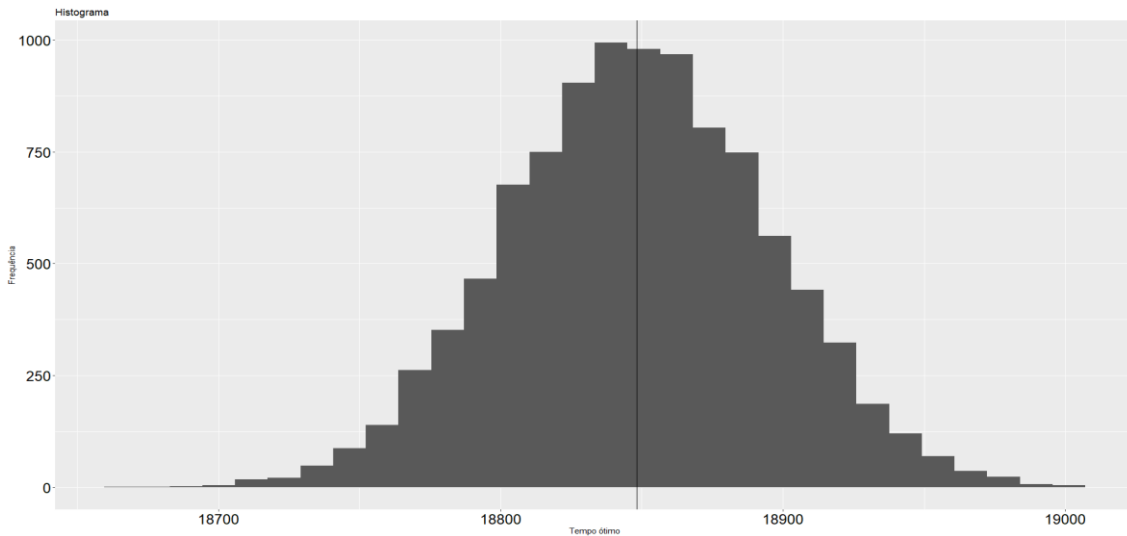


Figura 5.7 – Histograma que representa a distribuição de $K = 10^4$ tempos de periodicidade ótima estimados. A linha sólida vertical representa o tempo médio.

Nos resta ainda comparar como a metodologia II se comporta quando a razão de custo se altera. 5 razões de custos diferentes foram avaliadas, sendo estes $C_{IR} = [1,23 \ 3 \ 5 \ 10 \ 15]$ que são as mesmas razões avaliadas na seção anterior. A Tabela 5.3 apresenta um resumo dos resultados apenas para a razão de custo $C_{PM}/C_{IR} = 1/1,23$. Não há variabilidade para as demais razões de custos apresentadas, sendo os tempos estimados 8.549, 6.944, 5.237 e 4.441 respectivamente. Aqui o conceito de comportamento sem efeito de reparo imperfeito antes da primeira falha faz mais sentido, pois como o tempo de periodicidade ótima é menor que o primeiro tempo de falha esperado, não há redução aritmética e é possível assim utilizar a forma fechada da equação (3.10).

Tabela 5.3 – Resultado obtidos para a razão de custo $C_{PM}/C_{IR} = 1/1,23$ utilizando a metodologia II.

C_{PM}/C_{IR}	Mínimo	Percentil 2,5%	Mediana	Média Aritmética (\hat{t})	Percentil 97,5%	Máximo
1/1,23	18671	18759	18848	18848	18938	19007

Os tempos estimados e apresentados acima foram calculados pela metodologia II aqui proposto. Para validar o argumento vamos calcular o tempo ótimo pela forma fechada da equação (3.10).

$$\hat{t} = 15582 \left[\frac{1}{(2,458 - 1)3} \right]^{1/2,458} = 8548,529 \approx 8549$$

Logo, nesta metodologia o procedimento para estimação do Intervalo de Confiança leva em consideração a variabilidade de estimação do tempo médio de falha, conforme descrito na Seção 4.2. Como o valor estimado para os custos $C_{IR} = [3 \ 5 \ 10 \ 15]$ são menores que o tempo médio de falha, não há variabilidade o cálculo do intervalo de confiança não é realizado. Na Seção 5.1.3 é apresentado uma alternativa para este cálculo de Intervalo de Confiança. A Tabela 5.4 apresenta um resumo dos tempos \hat{t}_{IR-2} .

Tabela 5.4 – Análise comparativa dos tempos estimados para suposição de reparo mínimo, metodologia de Toledo, *et al.* (2016) e a metodologia II.

C_{PM}/C_{IR}	\hat{t}_{MR}	95% CI	$\hat{t}_{IR-0}(1)$	95% CI	$\hat{t}_{IR-2}(2)$	95% CI
1/1,23	14.345	(13.304; 15.511)	15.815	(13.632; 18.082)	18.848	(18.759; 18.938)
1/3	9.429	(8.898; 9.995)	9.207	(8.608; 10.173)	8.549	
1/5	7.414	(6.974; 7.901)	7.500	(6.720; 8.125)	6.944	
1/10	5.350	(4.949; 5.820)	5.593	(4.847; 6.227)	5.237	
1/15	4.421	(4.028; 4.888)	4.621	(4.017; 5.386)	4.441	

(1) Estimativa pontual da periodicidade ótima – Toledo, *et al.* (2016).

(2) Estimativa pontual da periodicidade ótima – Metodologia II.

Se utilizar $C_{IR} = 1,23$, conforme resultado apresentado na Tabela 5.3 e calcular na forma fechada, o resultado para a estimação seria $\hat{t} = 12286,39$ e é diferente de $\hat{t}_{IR-2} = 18848$. Para este caso, é razoável pensar que o custo é baixo e espera-se a ocorrência de uma falha inesperada antes da Manutenção Preventiva. Logo surgem duas perguntas naturais:

Pergunta 1: Dado que $C_{PM} = 1$, para quais valores de C_{IR} é possível determinar a periodicidade ótima através da forma fechada da equação (3.10)?

Tal análise não é trivial, pois simplesmente utilizar a equação (3.10) substituindo $\hat{t} = \hat{t}_1 = 13806$ para encontrar C_{IR} não significa encontrar a resposta da primeira pergunta. Vejamos:

$$13806 = 15582 \left[\frac{1}{(2,458 - 1)C_{IR}} \right]^{1/2,458} \rightarrow \boxed{C_{IR} = 0,923471}$$

Para o exemplo supracitado temos $C_{IR} = 1,23$ que é maior que o valor calculado e por isso esse cálculo está errado. Neste trabalho foi feita uma aproximação numérica e encontrou-se um $\hat{t}_1 = 17561$ para $C_{IR_1} = 1,90397$ e um $\hat{t}_2 = 10286$ para $C_{IR_2} = 1,90398$. Com uma diferença na 5ª casa decimal há um ponto de salto de estimação e o ponto médio de C_{IR_1} e C_{IR_2} seria um bom candidato a responder a **primeira pergunta**.

Esse seria o ponto em que C_{IR_1} é baixo e aceitaria a ocorrência de uma falha antes de PM e C_{IR_2} é alto e espera-se que a PM seja realizada antes da ocorrência de uma falha inesperada.

Pergunta 2: Existe uma forma fechada que leva em consideração a redução aritmética e que estime o valor de \hat{t} ?

A resposta a esta pergunta é ainda mais complexa e neste trabalho não foi encontrado a solução. No Apêndice A é realizado uma tentativa para encontrar a forma fechada através da função $D(\tau)$ descrita na equação (3.9), porém não possível isolar o parâmetro τ .

5.1.3. Estimação da Periodicidade Ótima pela Metodologia III

A metodologia III é o mais exato, pois é necessário apenas a estimação dos parâmetros por Máxima Verossimilhança, a construção da Função MCF pelo método de (Jack 1997) e a determinação dos tempos esperados das falhas. Essa metodologia não possui simulação e não gera valores diferentes a cada execução.

Para este banco de dados, o vetor de falhas esperadas, construído através da Etapa 2, até $T = 62000$ é:

0 15582 24779 31443 36789 41323 45298 48864 52114 55112 60521

Sendo $\hat{t}_1 = 15582, \hat{t}_2 = 24779, \hat{t}_3 = 31443$ e $\hat{t}_4 = 36789$ os tempos de falhas estimados para este banco de dados menores que $T = 40000$ apresentando assim 4 tempos de falhas. Cabe ressaltar que este número é inteiro, mas a quantidade de falhas estimada até o tempo $T = 40000$ é $E[N(t)] = 4.673066$, e assim uma simulação de dados a partir dos parâmetros estimados retornará 5 ou mais falhas até $T = 40000$ na maioria dos casos. Neste caso, temos que $n^* = n + \varepsilon = \Lambda(T)$ é então $n^* = E[N(t)] = 4 + 0.673066$ e $\varepsilon = 0.673066$.

O tempo ótimo de Manutenção Preventiva estimado foi de $\hat{t} = \mathbf{20244}$ horas.

Para o nosso exemplo, temos o $IC = [19077; 23083]$.

A Figura 5.8 representa a Função Média Acumulada construído com a equação (4.4) de forma recursiva. Nota-se que o primeiro tempo esperado de falha é o mesmo tempo esperado para o caso em que as manutenções corretivas ainda não ocorreram, o que configura o parâmetro estimado $\hat{t}_1 = \hat{\eta}$. Outra análise importante é que os intervalos entre os tempos de falhas (*gap's*) estão diminuindo com o tempo, indicando deterioração do

sistema com o passar do tempo e ainda indicando o formato convexo da curva da Função MCF e o valor do parâmetro $\beta > 1$.

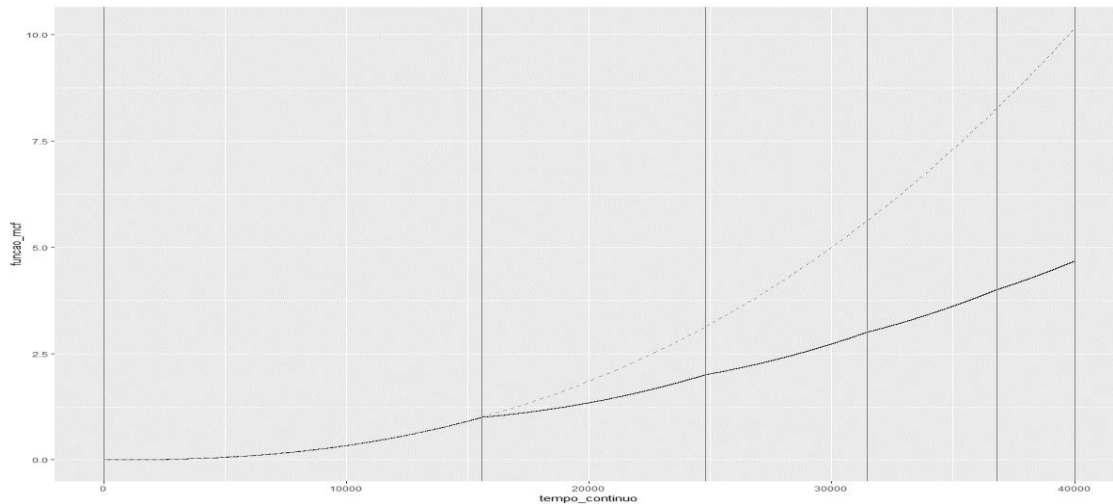


Figura 5.8 – Representação gráfica da Função Média Acumulada – MCF, estimada pelo modelo III. A linha tracejada representa a Função PLP $\Lambda(t) = (t/\eta)^\beta$, a linha sólida representa a Função MCF estimada e as linhas verticais representam os tempos de falhas estimados, o tempo zero e o tempo de truncamento por tempo.

Observa-se que este tempo é superior ao estimado nas metodologias I e II, e isto é coerente com o fato de que, se há uma redução aritmética após uma ação de reparo imperfeito, então o sistema assim rejuvenesce, logo tem de haver um prolongamento no tempo de manutenção preventiva.

As mesmas perguntas sobre o ponto em que se torna muito caro ou barato o C_{IR} surge. No entanto aqui temos algo mais específico e sem a variabilidade de uma simulação. No caso da metodologia II, o exemplo apresentado para comparar, está sujeita à variabilidade, pois todas as vezes que executamos o procedimento surgem valores diferentes.

Para exemplificar a variação do C_{IR} em relação à estimação de \hat{t} , vejamos a Figura 5.9. Nela o salto ocorre em $C_{IR} = 1.4250$, ou seja, para $C_{IR} < 1.4250$ temos uma estimação de $\hat{t} > \hat{t}_1 = \hat{\eta}$ e para $C_{IR} > 1.4250$ temos $\hat{t} < \hat{t}_1 = \hat{\eta}$. O salto ocorre pois não justifica executar as manutenções próximas. Neste caso surge uma terceira pergunta:

Pergunta 3: Qual é o tamanho deste salto?

Para o exemplo utilizado, o salto é de 8244 horas, e foi calculado de forma numérica, isto é, foi calculado o \hat{t} variando C_{IR} de $1 + s \leq C_{IR} \leq 5$ e $s = k * 0,0004$ e $k = 0,1,2,3, \dots$. Aqui o valor do ponto médio para valores imediatamente após e antes ao ponto de salto

é de 15695. Outra informação relevante é que para $C_{IR} = 1.4248$, temos $\hat{t} = 19817$ e para $C_{IR} = 1.4252$, temos $\hat{t} = 11573$.

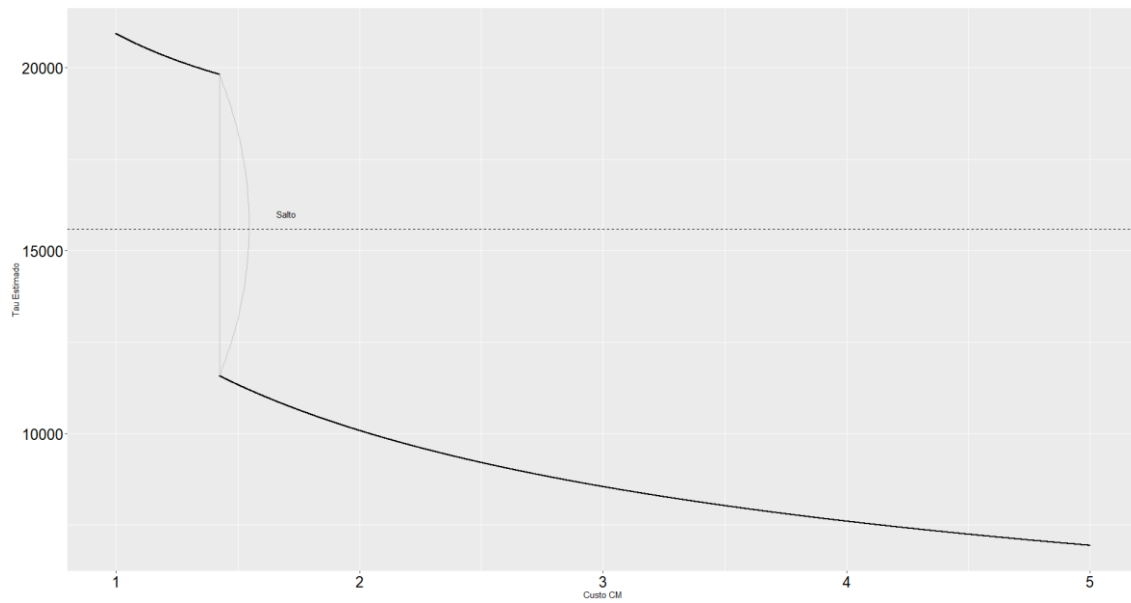


Figura 5.9 – Análise do Tempo Ótimo de PM estimado em relação ao Custo C_{IR} com precisão de 0.0004.

6. Conclusões e Considerações Finais

O foco deste trabalho foi avaliar a periodicidade ótima de PM supondo reparo imperfeito nas Manutenções Corretivas. A metodologia I, visto como uma alternativa à metodologia proposta por Toledo, *et al.* (2016), demonstrou válido e gerou valores próximos. A sua utilização justifica-se pela facilidade de implementação e sem a utilização da estimação não-paramétrica dada pela derivada direita do Maior Minorante Convexo (“*Greatest Convex Minorant - GCM*”). No entanto, tal metodologia não demonstrou levar em consideração a redução aritmética da idade e conseqüentemente um aumento no tempo ótimo de periodicidade da Manutenção Preventiva, isto é, devido à redução aritmética o sistema rejuvenesce e está menos propenso a ocorrência de falhas inesperadas, prolongando assim o tempo τ .

A metodologia II demonstrou ser mais promissor ao prolongamento de τ , no entanto, este carrega consigo a variabilidade de estimação dos tempos médios de falhas pela Simulação de Monte Carlo. Executar $N_{MC} = 10.000$ simulações para gerar os tempos médios possui dois problemas: O primeiro é o da própria execução tornando-se um trabalho árduo. O segundo é que a simulação demonstrou gerar mais tempos de falhas que o sistema inicial e isso pode ter ocorrido devido às considerações iniciais do banco de dados. A distribuição de frequências do banco de dados utilizado, por exemplo, possui 88 dos 193 sistemas apresentando uma única falha e numa geração de N_{MC} sistemas ocorreu uma única falha em 87 dos 10.000 sistemas. Como dito anteriormente, a maior parte dos sistemas gerados retornam 5 ou mais tempos de falhas. Tal situação foi contornada no artigo de Toledo, *et al.* (2016) com o método de bootstrap por reamostragem, que mantém a estrutura do banco de dados original.

A metodologia III apontou ser o mais consistente, tanto na estimação de τ devido a não variabilidade dos dados quanto a preservação da estrutura apresentada em Gilardoni e Colosimo (2007). Em termos de resultados, a metodologia mantém consigo a redução aritmética e que é fundamental quando supõe ações de reparo imperfeito nas manutenções corretivas. No entanto, tal metodologia trouxe consigo as três perguntas mencionadas anteriormente. Nenhuma delas foi possível determinar de forma exata. As respostas às perguntas 1 e 3 foram encontradas de forma numérica e a resposta à pergunta 2 não foi possível obter. A Função Custo $C(\tau)$ que foi utilizada para estimar o melhor valor de τ no sentido de minimizar o custo.

Dentre as três metodologias, recomenda-se a utilização da metodologia III. Porém, é necessário levar em consideração as ponderações feitas durante a análise na Seção 5.1.3. Sendo o ponto de salto a análise considerada mais importante, pois a diferença no salto é sutil o que pode ser visto na diferença, que se encontra na 4^a casa decimal.

A estimação de τ utilizando a Função Custo $C(\tau)$ é mais direta e mais fácil de ser obtida, utilizar $D(\tau)$ demonstraria ser útil apenas para encontrar uma forma fechada para estimação de τ . A complexidade aqui está em isolar o valor de τ quando utilizada a Função *PLP*. Tal complexidade pode ser vista no Apêndice A.

Por fim, responder as 3 perguntas de forma mais precisa e exata torna-se a proposta para trabalhos futuros. Em relação à pergunta 1, encontrar um C_{IR} que torna-se possível utilizar a forma fechada para estimação de τ tornaria o cálculo muito mais rápido. Em relação à pergunta 2, de encontrar uma forma fechada que leva em consideração a redução aritmética, seria também prática para determinar τ de forma direta. E em relação à pergunta 3, o tamanho do ponto de salto seria útil para determinar o intervalo de tempo em que não seria compensador, em termos de custo, realizar a Manutenção Preventiva.

7. Referências Bibliográficas

- Andersen, P. K., O. Borgan, R. D. Gill, e N. Keiding. *Statistical Models Based on Counting Processes*. New York: Springer, 1993.
- Barbosa, Lucas Bicalho. *Gestão da Manutenção: Diagnóstico do Planejamento da Manutenção para Laboratórios de uma Unidade de uma Instituição de Ensino Superior*. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.
- Barlow, R. E., e F. Proschan. “Optimum Preventive Maintenance Policies.” *Operations Research* 8 (1960): 90-100.
- Bartholomew-Biggs, M., B. Christianson, e M. Zuo. “Optimizing Preventive Maintenance Models.” *Computational Optimization and Applications*, 2006: 261-279.
- Bartholomew-Biggs, M., M. Zuo, e X. Li. “Modelling and Optimizing Sequential Imperfect Preventive Maintenance.” *Reliability Engineering and System Safety*, 2009: 53-62.
- Cotta, D. M. “Testes de Hipóteses para Modelos de Reparo Imperfeito.” Belo Horizonte, Minas Gerais: UFMG, 04 de 04 de 2018.
- Cotta, Daysemara Maria. *Testes de Hipóteses para Modelos de Reparo Imperfeito*. Belo Horizonte: UFMG, 2018.
- Doyen, Laurent, e Olivier Gaudoin. “Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age.” *Reliability Engineering & System Safety*, 2004: 45-56.
- Doyen, Laurent, e Olivier Gaudoin. “Modeling and Assessment of Aging and Efficiency of Corrective and Planned Preventive Maintenance.” *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY* 60 (DECEMBER 2011): 759-769.
- Gertsbakh, I. *Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance*. Beersheva: Springer, 2005.
- Gilardoni, G. L., e E. A. Colosimo. “Optimal Maintenance Time for Repairable Systems.” *Journal of Quality Technology*, 2007: 48-53.

- Jack, N. “Analysing Event Data From a Repairable Machine Subject to Imperfect Preventive Maintenance.” *Quality and Reliability Engineering International*, 1997: 183-186.
- James, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- Kawai, H., J. Koyanagi, e M. Ohnishi. “Optimal Maintenance Problems for Markovian Deteriorating Systems.” *Stochastic Models in Reliability and Maintenance*, 2002: 193-218.
- Lin, D., M. Zuo, e R. Yam. “General Sequential Imperfect Preventive Maintenance Models.” *International Journal of Reliability, Quality and Safety*, 2000: 253-266.
- Mine, H., H. Kawai, e Y. Fukushima. “Preventive Replacement of an Intermittently used System.” *IEEE Transactions on Reliability*, 1981: 391-392.
- Nakagawa, Toshio. “Periodic and Sequential Preventive Maintenance Policies.” *Journal of Applied Probability* (Springer), 1986: 536-542.
- Oliveira, Cássius Henrique Xavier. “Política Ótima de Manutenção Preventiva de Transportadores de Correia.” Belo Horizonte, MG, 2016.
- Pan, R., e S. E. Rigdon. “Bayes Inference for General Repairable Systems.” *Journal of Quality Technology* 41 (2009): 82-93.
- Pinto, A., e J. Nascif. *Manutenção: função estratégica*. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1999.
- Rigsdon, Steven E., e Asit P. Basu. *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. New York: Wiley-Interscience, 2000.
- Stadje, W., e D. Zuckerman. “A Geeralized Maintenance Model of Stochastically Deteriorating Equipament.” *European Journal of Operation Research*, 1996: 285-301.
- Toledo, M. L. G., M. A. Freitas, E. A. Colosimo, e G. L. Gilardoni. “Ara and ARI Imperfect Repair Models: Estimation, good-of-fit and reliability prediction.” *Reliability Engineering & System Safety*, 2015: 107-115.

- Toledo, M. L. G., M. A. Freitas, E. A. Colosimo, e G. L. Gilardoni. "Optimal Periodic Maintenance Policy under Imperfect Repair: A Case Study of Off-Road Engines." *IEEE Transactions*, 2016: 747-758.
- Wu, S., e M. Zuo. "Linear and Nonlinear Preventive Maintenance Models." *IEEE Transactions on Reliability*, 2010: 242-249.
- Yeh, R. H. "Optimal Inspection and Replacement Policies fo Multi-state Deterioration Systems." *European Journal of Operation Research*, 1996: 248-259.

Apêndice A – Determinação da Função $\hat{D}(\tau)$ para o caso onde há redução aritmética conforme a Classe de Modelos ARA_1

Suponha que uma máquina seja colocada em operação após o tempo $t_0 = 0$ e a manutenção preventiva ocorra no tempo $\tau > 0$. Dado que cada falha é reparada imperfeitamente através do modelo ARA_1 , temos que $N(t)$ denota o número de falhas no sistema que ocorre até o tempo t e $\Lambda(t) = E[N(t)]$ é a Função Média Acumulada. Definimos então $\Lambda(t)$ como demonstrado na equação (4.2).

Para $\tau < t_1$

$$C(\tau) = \frac{C_{PM} + C_{RI} \left(\frac{\tau}{\eta}\right)^\beta}{\tau}$$

E assim utilizamos a forma fechada, conforme descrito na equação (3.9).

Para $t_{k-1} < \tau$

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \frac{C_{PM} + C_{RI} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \overbrace{[\Lambda(t_i - (1-\rho)t_{i-1}) - \Lambda(\rho t_{i-1})]}^{=(k-1), \text{ pois já ocorreu } (k-1) \text{ falhas}} + \Lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) - \Lambda(\rho t_{k-1}) \right\}}{\tau} \\ &= \frac{C_{PM} + C_{RI}(k-1) + C_{RI}\{\Lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) - \Lambda(\rho t_{k-1})\}}{\tau} \end{aligned}$$

Derivando e igualando a zero, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dC(\tau)}{d\tau} &= \frac{\overbrace{C_{RI}\lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1})}^{u'} \times \overbrace{\tau}^v}{\tau^2} \\ &\quad - \frac{\overbrace{C_{PM} + C_{RI}(k-1) + C_{RI}\{\Lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) - \Lambda(\rho t_{k-1})\}}^u \times \overbrace{1}^{v'}}{\tau^2} = 0 \end{aligned}$$

$$C_{RI}\lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) \times \tau - C_{PM} - C_{RI}(k-1) - C_{RI}\{\Lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) - \Lambda(\rho t_{k-1})\} = 0$$

$$\lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) \times \tau - \{\Lambda(\tau - (1-\rho)t_{k-1}) - \Lambda(\rho t_{k-1})\} = \frac{C_{PM}}{C_{RI}} + (k-1)$$

$$\lambda(\tau - (1 - \rho)t_{k-1}) \times \tau - \Lambda(\tau - (1 - \rho)t_{k-1}) = \frac{C_{PM}}{C_{RI}} + (k - 1) - \Lambda(\rho t_{k-1})$$