

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS
VIA ABORDAGEM GLOBAL-LOCAL DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**

Anelize Borges Monteiro

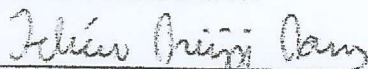
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

"ANÁLISE NÃO LINEAR DE MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS VIA
ABORDAGEM GLOBAL-LOCAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
GENERALIZADOS"

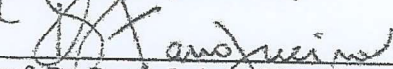
Anelize Borges Monteiro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:



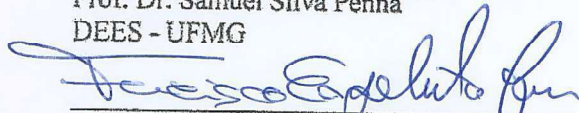
Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
DEES - UFMG (Orientador)



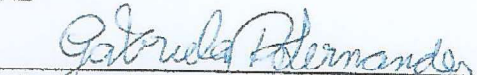
Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG (Coorientador)



Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG



Prof. Dr. Francisco Evangelista Junior
UNB



Profa. Dr. Gabriela Rezende Fernandes
UFG



Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba
UFG

Belo Horizonte, 02 de dezembro de 2019

M775a

Monteiro, Anelize Borges.

Análise não linear de meios parcialmente frágeis via abordagem global-local do método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Anelize Borges Monteiro. - 2019.

1 recurso online (xiii, 202 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Coorientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 133-187.

Bibliografia: f. 188-202.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Análise funcional não-linear - Teses. I. Barros Felício Bruzzi. II. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

"Se devo orgulhar-me, que seja nas coisas que mostram a minha fraqueza."

2 Coríntios 11:30.

Índice

Índice	iii
Lista de Tabelas	vi
Lista de Figuras	xi
Resumo	xii
Abstract	xiii
Agradecimentos	xiv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	5
1.1.1 Objetivo Geral	5
1.1.2 Objetivos Específicos	5
1.2 Organização do texto	6
2 Fundamentação Teórica	7
2.1 Formulações baseadas no conceito da Partição da Unidade	7
2.1.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados	9
2.1.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local	12
2.2 MEFG e MEFG global-local para análise fisicamente não linear de estruturas	19
2.2.1 MEFG e MEFG global-local aplicados à análise de estruturas de concreto	25
2.3 Aspectos teóricos da metodologia de Kim e Duarte (2015)	28
2.4 Formulação unificada para modelos constitutivos	32
3 MEFG global-local para análise fisicamente não linear	36
3.1 Aspectos teóricos do MEFG global-local para análise não linear	36
3.2 Formulação	38
3.3 Procedimento de solução do MEFG global-local para análise não linear	41
3.4 Considerações sobre a análise global-local	48

3.4.1	Escolha do Tipo de Condição de Contorno	48
3.4.2	Qualidade da transferência de informação do domínio global para o local e do local para o global enriquecido	48
4	Simulações Numéricas	50
4.1	MEFG para análise fisicamente não linear	51
4.1.1	Viga em balanço	52
4.1.2	Flexão em três pontos - Petersson (1981)	58
4.2	MEFG global-local para análise fisicamente não linear	60
4.2.1	Painel em L - Winkler <i>et al.</i> (2004)	61
4.2.2	Flexão em três pontos - Petersson (1981)	97
4.2.3	Cisalhamento em quatro pontos - Arrea e Ingraffea (1982)	113
5	Considerações Finais	128
5.1	MEFG global-local para análise fisicamente não linear	128
5.2	Recomendações para trabalhos futuros	131
A	Sistema Computacional INSANE	133
A.1	Histórico	134
A.2	Organização do Núcleo Numérico	135
A.3	MEFG	137
A.3.1	Interface <code>Assembler</code>	137
A.3.2	Classe Abstrata <code>Solution</code>	139
A.3.3	Classe Abstrata <code>Model</code>	139
A.4	MEFG global-local	142
A.4.1	Interface <code>Persistence</code>	142
A.4.2	Interface <code>Assembler</code>	142
A.4.3	Classe abstrata <code>Solution</code>	147
A.4.4	Classe <code>GFemModel</code>	147
A.4.5	Procedimento global-local para o MEFG	149
A.4.6	Integração Numérica das Equações do MEFG global-local	151
A.5	Análise não linear no contexto do MEFG	152
A.6	Análise não linear via MEFG global-local	163
A.6.1	Interface <code>Persistence</code>	164
A.6.2	Classe <code>GFemAssembler</code>	164
A.6.3	Classe Abstrata <code>Solution</code>	166
A.6.4	Funcionamento do procedimento de análise não linear	169
B	Funções de forma para o MEFG	171
C	Modelo de Fissuração Distribuída	172
C.1	Leis tensão-deformação de Carreira e Chu para tração e compressão	177
C.2	Notações	177
D	Modelo de Dano Escalar	179

E Modelo de Microplanos	182
E.1 Definição das Funções de Evolução de Dano	184
E.1.1 Função de dano exponencial	184
E.1.2 Função de dano polinomial	185
E.1.3 Funções de dano linear	185
E.2 Deformação equivalente de de Vree (1995)	186
Referências Bibliográficas	188

Lista de tabelas

2.1	Paralelo entre as técnicas apresentadas por Kim <i>et al.</i> (2012) e Kim e Duarte (2015).	31
3.1	Coordenadas dos pontos da trajetória de equilíbrio.	46
4.1	Parâmetros adotados.	53
4.2	Parâmetros adotados (Mazars, 1984).	56
4.3	Parâmetros obtidos experimentalmente por Petersson (1981).	58
4.4	Parâmetros materiais do painel em L.	63
4.5	Informações dos pontos observados.	75
4.6	Cargas de pico de cada domínio local com nove e 18 nós enriquecidos.	80
4.7	Informações dos pontos observados.	83
4.8	Cargas de pico de cada domínio local com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.	86
4.9	Parâmetros materiais.	100
4.10	Informações dos pontos observados.	102
4.11	Parâmetros das funções de dano (Wolenski, 2013).	105
4.12	Parâmetros materiais e das leis tensão-deformação	115

Lista de figuras

2.1	Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).	11
2.2	As três etapas do MEFG global-local.	14
2.3	Procedimento de solução de Kim <i>et al.</i> (2012).	29
2.4	Procedimento de solução de Kim e Duarte (2015).	30
3.1	Etapas da resolução de problemas não lineares pelo MEFG global-local.	37
3.2	Algoritmo de solução da abordagem global-local não linear.	42
3.3	Problema global: bloco $k = 0$ - obtenção do ponto de equilíbrio D . . .	44
3.4	Problema global: bloco $k = 1$ - obtenção do ponto de equilíbrio G . . .	45
3.5	Problema global: blocos $k = 2$ e $k = 3$ - obtenção dos pontos de equilíbrio J e M	46
3.6	Diagrama de atividades do MEFG global-local para análise não linear.	47
4.1	Geometria, carregamento e condições de contorno da viga. O mo- mento fletor $M = P \times 100$ e a força de cisalhamento P na extremidade esquerda da viga são reações de apoio.	53
4.2	Trajatórias de equilíbrio para os elementos de viga de Timoshenko. . .	54
4.3	Malhas quadrilaterais e triangulares.	54
4.4	Trajatórias de equilíbrio para os elementos quadrilaterais.	57
4.5	Trajatórias de equilíbrio para os elementos triangulares.	57
4.6	Geometria e malha de elementos finitos.	59
4.7	Trajatórias de equilíbrio para a flexão em três pontos.	59
4.8	Geometria, condições de contorno e de carregamento do painel em L.	62
4.9	Painel em L: problemas global e local.	64
4.10	Variação do número de passos adicionados a cada passo local do bloco de análise global-local para o passo global de deslocamento de 0,04 mm.	65

4.11	Variação do número de passos adicionados a cada passo local do bloco de análise global-local para o passo global de deslocamento de 0,02 mm.	66
4.12	Comparação entre as trajetórias de equilíbrio com passos globais de deslocamento de 0,04 e 0,02 mm	67
4.13	Problema global e três problemas locais.	70
4.14	Malha avaliada com MEFG convencional.	72
4.15	Trajетórias de equilíbrio com aplicação do MEFG convencional.	73
4.16	MEFG global-local com GL em 9 nós.	74
4.17	Trajетórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 9 nós.	75
4.18	Pontos observados nas trajetórias de equilíbrio: nove nós enriquecidos.	76
4.19	Evolução do dano: (a) $k = 1$; 0,02 mm, (b) $k = 9$; 0,18 mm e (c) $k = 13$; 0,26 mm.	77
4.20	Evolução do dano: (d) $k = 17$; 0,34 mm; (e) $k = 25$; 0,50 mm e (f) $k = 50$; 1,0 mm.	78
4.21	MEFG global-local com GL em 18 nós.	79
4.22	Trajетórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 18 nós.	79
4.23	Domínio local 1: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.	80
4.24	Domínio local 2: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.	81
4.25	Domínio local 3: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.	81
4.26	MEFG global-local com GL em 29 nós.	82
4.27	Trajетórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 nós.	82
4.28	Pontos observados nas trajetórias de equilíbrio: 29 nós enriquecidos.	83
4.29	Evolução do dano - 29 nós: (a) $k = 1$; 0,02 mm, (b) $k = 9$; 0,18 mm e (c) $k = 13$; 0,26 mm.	84
4.30	Evolução do dano - 29 nós: (d) $k = 17$; 0,34 mm, (e) $k = 25$; 0,50 mm e (f) $k = 50$; 1,0 mm.	85
4.31	Domínio 1: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.	87
4.32	Domínio 2: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.	87
4.33	Domínio 3: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.	88
4.34	Evolução do dano no domínio local 1.	89

4.35	Evolução do dano no domínio local 1.	89
4.36	Evolução do dano no domínio local 2.	90
4.37	Evolução do dano no domínio local 2.	90
4.38	Evolução do dano no domínio local 3.	91
4.39	Evolução do dano no domínio local 3.	91
4.40	MEFG global-local com GL em 51 nós no domínio local 3.	93
4.41	Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 e 51 nós.	94
4.42	MEFG global-local com GL em 75 nós no domínio local 3.	95
4.43	Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 e 75 nós.	96
4.44	Ensaio de flexão em três pontos: geometria e malha.	97
4.45	Problema global e local: flexão em três pontos.	98
4.46	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com P0 e P2.	101
4.47	Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local não linear com P0, P1 e P2.	102
4.48	Pontos observados na trajetória de equilíbrio GL-P2.	103
4.49	Distribuição de dano para o Modelo de Fissuração Distribuída.	103
4.50	Configuração deformada do problema global para o Modelo de Fissu- ração Distribuída.	104
4.51	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Micropla- nos com lei de dano linear com P0 e P2.	107
4.52	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Micropla- nos com lei de dano bilinear com P0 e P2.	107
4.53	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Micropla- nos com lei de dano exponencial com P0 e P2.	108
4.54	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Micropla- nos com lei de dano polinomial com P0 e P2.	108
4.55	Trajetória de equilíbrio para a lei de dano linear.	109
4.56	Trajetória de equilíbrio para a lei de dano bilinear.	110
4.57	Trajetórias de equilíbrio para a lei de dano exponencial.	110
4.58	Trajetória de equilíbrio para a lei de dano polinomial.	111
4.59	Distribuição de dano das quatro leis de dano: deslocamento vertical de 0,50 mm.	111
4.60	Distribuição de dano das quatro leis de dano: deslocamento vertical de 1,0 mm.	112

4.61	Configuração deformada do problema global das quatro leis de dano.	112
4.62	Geometria e carregamento do modelo.	113
4.63	Problemas global e problemas locais. Para simplificar as análises, foram desconsiderados os trechos do domínio global sujeitos a apenas movimentos de corpo rígido.	114
4.64	MEFG convencional: malha com 42 elementos.	117
4.65	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 42 elementos.	118
4.66	MEFG convencional: malha com 162 elementos.	119
4.67	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 162 elementos.	119
4.68	MEFG convencional: malha com 362 elementos	120
4.69	Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 362 elementos.	121
4.70	Problemas globais avaliados.	122
4.71	Trajetória de equilíbrio: problema local 1 - 64 elementos.	123
4.72	Distribuição de tensões de cisalhamento do problema local 1.	124
4.73	Distribuição de dano do problema local 1.	124
4.74	Configuração deformada do problema global 1.	124
4.75	Trajetória de equilíbrio: problema local 2 - 144 elementos.	126
4.76	Distribuição de tensões de cisalhamento do problema local 2.	126
4.77	Distribuição de dano do problema local 2.	127
4.78	Configuração deformada do problema global 2.	127
A.1	Simbologia do diagrama em UML.	134
A.2	Organização do núcleo numérico do sistema <i>INSANE</i> .	135
A.3	Diagrama de classes para <i>Persistence</i> .	136
A.4	Diagrama de classe para <i>Assembler</i> .	138
A.5	Diagrama de classe de <i>Solution</i> .	139
A.6	Diagrama de classe para <i>Model</i> .	140
A.7	Diagrama de classe para <i>ParametricElement</i> .	141
A.8	Métodos da classe <i>EquivalentNodalGeneralValue</i> .	143
A.9	Transferência de condições de contorno.	144
A.10	Diagrama de sequência das parcelas da classe <i>GFemAssembler</i> (Alves, 2012).	146
A.11	Pacote <i>EnrichmentType</i> .	148
A.12	Diagrama de sequência para montagem da matriz de rigidez.	150

A.13 Procedimento de integração numérica do MEF _G global-local. Adaptado de Alves (2012).	152
A.14 Diagrama de classe para <code>StaticEquilibriumPath</code>	153
A.15 Diagrama de classe para <code>Step</code>	154
A.16 Diagrama de classe para <code>IterativeStrategy</code>	155
A.17 Classes relacionadas à montagem da matriz de rigidez incremental. . .	155
A.18 Diagrama de classe para <code>ProblemDriver</code>	156
A.19 Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez.	157
A.20 Procedimento para obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas.	158
A.21 Interação entre classes para a montagem do tensor constitutivo de cada degeneração para análise via MEF ou MEF _G	159
A.22 Interação entre classes para cálculo das tensões via MEF ou MEF _G . .	160
A.23 Processo incremental-iterativo com controle de carga. Adaptado de Penna (2011).	161
A.24 Associação das equações (A.8) e (A.7).	164
A.25 Esquema para alteração do método <code>getFp()</code>	166
A.26 Hierarquia das classes <code>GlobalLocalNonLinear</code> e <code>GFemAssembler</code> . . .	166
A.27 Classe <code>GlobalLocalNonLinear</code>	167
A.28 Detalhamento da classe <code>GlobalLocalNonLinear</code>	169

Resumo

Monteiro, A. B. Análise não linear de meios parcialmente frágeis via abordagem global-local do Método dos Elementos Finitos Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) foi desenvolvido com o intuito de superar algumas limitações inerentes ao Método dos Elementos Finitos (MEF), relacionadas à propagação de defeitos, presença de grandes deformações ou na descrição de elevados gradientes das variáveis de estado. No MEFG há o enriquecimento do espaço da solução polinomial de MEF com informações conhecidas *a priori* tendo como base o conceito da Partição da Unidade (PU). Certos obstáculos da análise não linear podem ser amenizados com o emprego do MEFG e as frentes de dano e de plasticidade podem ser representadas com precisão. Dentro deste contexto foi proposta a abordagem global-local para o MEFG (MEFG global-local). O sucesso de sua aplicação para problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica já se encontra comprovado, porém sua extensão para a simulação do colapso de estruturas constituídas de materiais parcialmente frágeis ainda é um campo vasto a ser pesquisado. Neste trabalho, é proposta uma estratégia baseada na abordagem global-local do MEFG para descrever o processo de deterioração de meios parcialmente frágeis, como o concreto, no contexto da Mecânica do Dano Contínuo. A solução numérica usada para enriquecer o problema global, representado por uma malha grosseira, é obtida através de análise fisicamente não linear somente na região local onde ocorre a propagação do dano, representada por modelos constitutivos adequados. Com a descrição da região danificada incorporada ao problema global, por intermédio das funções de enriquecimento global-local, e a obtenção do estado de danificação mapeado a partir do modelo local, procede-se com a análise da região global. Exemplos numéricos bidimensionais foram apresentados para avaliar o desempenho da abordagem proposta e foram obtidos resultados coerentes com respostas experimentais da literatura e melhores em comparação aos resultados calculados também com o MEFG convencional.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados, Estratégia Global-Local, Análise Fisicamente Não Linear, INSANE.

Abstract

Monteiro, A. B. Nonlinear analysis of quasi-brittle media via global-local Generalized Finite Element Method approach. Thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

The Generalized Finite Element Method (GFEM) was developed in order to overcome some limitations inherent to the Finite Element Method (FEM), related to the defects propagation, presence of large deformations or even in the description of high gradients of state variables. The GFEM enriches the space of the polynomial FEM solution with *a priori* known information based on the concept of Partition of Unit (PU). Certain obstacles of nonlinear analysis can be mitigated with the GFEM and damage and plasticity fronts can be accurately represented. In this context, the global-local approach to the GFEM (GFEM global-local) was proposed. The success of its application to problems of Linear Elastic Fracture Mechanics is already proven, but its extension to the simulation of collapse of structures made of quasi-brittle media is still a vast field to be researched. Here, a coupling strategy is proposed based on the global-local GFEM to describe the deterioration process of quasi-brittle media, such as concrete, in the context of Continuous Damage Mechanics. The numerical solution used to enrich the global problem, represented by a coarse mesh, is obtained through physically nonlinear analysis performed only in the local region where damage propagation occurs, represented by constitutive models. The linear analysis of the global region is performed considering the incorporation of local damage through the global-local enrichment functions and damage state mapped from local problem. Numerical examples in two-dimensional domain have been presented to evaluate the performance of the proposed approach and the obtained results were coherent with the experimental ones and better than the results obtained with standard GFEM.

Keywords: Generalized Finite Element Method, Global-Local Strategy, Physically Nonlinear Analysis, INSANE.

Agradecimentos

A Deus, por me guiar e proteger em todos os momentos.

À minha família, Lia, Manoel e Emanoeli, pelo incentivo e apoio irrestritos. Mesmo à distância, acompanharam essa etapa de minha vida e me fortaleceram com seu amor e palavras de carinho.

Ao Professor Felício B. Barros, pela orientação dedicada, comprometida e paciente durante o desenvolvimento deste nosso trabalho. Por ser um exemplo como pessoa e profissional, pela gentileza ao acompanhar e aconselhar nos meus momentos de indecisão e por me incentivar irrestritamente. Agradeço por viabilizar meu crescimento profissional e pessoal e por partilhar as preocupações e alegrias de cada passo, e iterações, dessa trajetória.

Aos Professores Roque L. S. Pitangueira, Samuel S. Penna, Gabriel O. Ribeiro e Ramon P. Silva, pela dedicação exemplar e excepcional à docência, pelo cuidado, paciência e amizade concedidos desde a minha chegada à UFMG à época do mestrado.

Aos meus alunos de Introdução à Mecânica dos Sólidos da turma de 2018/2 (Engenharia Mecânica noturno, UFMG), por me fazerem acreditar, com seus questionamentos, compartilhamento de conhecimentos e amizade, que no caminho da docência está minha felicidade e motivação para seguir adiante.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas pela disponibilidade, atenção e prestatividade proporcionadas. Em especial à Fátima, cujos conselhos e sabedoria me incentivaram a perseverar.

Aos amigos e colegas de INSANE, do PROPEEs e de Sinop-MT que acompanharam e incentivaram a realização desta etapa. Meus agradecimentos em especial às amigadas perenes de Elis Regina Banderó, Carolinne Banderó, Juliano Soares, Juscelina Ferreira, Laura Medina, Plínio dos Santos, José Hurtado, Débora Coelho, Rodrigo Sernizon, Marcella Andrade, Lorena Leocadio, Tayrinne Gonçalves, Lapo Gori, Anderson Wolenski, Giuliano De Marchi e Leni Goëdert.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um recurso numérico bastante consolidado no estudo de diversos problemas de Engenharia de Estruturas, mas apresenta limitações especialmente quanto à descrição do comportamento de fenômenos que envolvem mudanças na geometria, como devido à propagação de trincas e fissuras, presença de grandes deformações ou ainda na descrição de elevados gradientes das variáveis de estado. A natureza desses fenômenos faz com que a geração da malha de elementos e a exigência de redefinição da malha tornem-se processos muito onerosos, o que impulsionou o desenvolvimento de métodos que buscam contornar estas dificuldades. Dentre eles, podem ser citadas as formulações sem malha que receberam grande atenção na década de 1990:

- Hidrodinâmica de Partículas Suavizado (*Smoothed Particle Hydrodynamics* - SPH), de Monaghan (1982, 1994);
- Métodos baseados diretamente nas aproximações de mínimos quadrados móveis:
 - Método dos Elementos Difusos, MED (*Diffuse Element Method* - DEM), introduzido em Nayroles *et al.* (1992);
 - Método de Galerkin Livre de Elementos, MGLE (*Element Free Galerkin Method* - EFGM), de Belytschko *et al.* (1994);

- Método dos Pontos Finitos, MPF (*Finite Point Element* - FPM), desenvolvido em Oñate *et al.* (1995), Oñate *et al.* (1996a) e Oñate *et al.* (1996b);
- Método das Partículas Reprodutoras do Núcleo (*Reproducing Kernel Particle Method* - RKPM), de Liu e Zhang (1995b) e Liu *et al.* (1995a);
- Métodos baseados na definição da Partição da Unidade:
 - Método das Nuvens *hp* (*hp-Clouds Method*), de Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996b) e Duarte e Oden (1996a);
 - Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, MEFPU (*Partition of Unity Finite Element Method* - PUFEM), descrito por Melenk (1995), Melenk e Babuska (1996) e Babuška e Melenk (1997);
- Método de Galerkin das Ondas Pequenas (*Wavelet Galerkin Method*), proposto por Amaratuga e Williams (1997).

Trabalhando na interface destes métodos com o MEF convencional, surgem também os métodos baseados em elementos e associados ao conceito da Partição da Unidade (PU), como o MEFPU, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM - *eXtended Finite Element Method*).

Os conceitos fundamentais do MEFPU foram introduzidos por Melenk (1995), Melenk e Babuska (1996) e Babuška e Melenk (1997) e baseiam-se na estratégia do enriquecimento da aproximação com base na multiplicação da PU por funções customizadas para este fim. Em Oden *et al.* (1998), o Método das Nuvens *hp* é reinterpretado sob o enfoque do MEFPU, usando-se a malha de elementos finitos e as funções de interpolação Lagrangianas para se propor o MEFG, que recebeu esta denominação e teve sua fundamentação estabelecida em Strouboulis, Copps e Babuska (2000b), Strouboulis, Babuska e Copps (2000a) e Duarte *et al.* (2000).

Posteriormente, Belytschko e Black (1999) apresentaram o XFEM, no contexto da Mecânica da Fratura, em que o refinamento da malha era mínimo graças ao enriquecimento das aproximações do MEF com funções de enriquecimento descontínuas associadas à presença das trincas.

Conforme Barros *et al.* (2004), a característica que o MEFG possui de enriquecer os nós, evitando o refinamento da malha, é muito interessante para a análise não linear de estruturas. Adicionalmente, alguns problemas em análise não linear podem ser amenizados pela abordagem do MEFG (como, por exemplo, a localização numericamente induzida) e as frentes de dano e de plasticidade podem ser reproduzidas com maior precisão. Tratando-se de materiais parcialmente frágeis como o concreto, Bobinski e Tejchman (2012) afirmaram que a fratura é um fenômeno importante e sua descrição requer o uso de técnicas matemáticas de enriquecimento, tais como o MEFG.

Duarte e Babuška (2005) propuseram o MEFG global-local (Método dos Elementos Finitos Generalizados Global-Local) empregando a estratégia usada no Método dos Elementos Finitos Global-Local de Noor (1986) para construir funções numéricas para o enriquecimento da PU. A aplicação do MEFG global-local é apropriada a situações nas quais importantes fenômenos concentrados em pequenas regiões do problema devem ser analisados. Na primeira fase de análise, o problema global é discretizado grosseiramente. A segunda fase contempla apenas a região que contém os fenômenos de interesse e esses que definem problemas locais utilizando-se a solução do problema da primeira fase como condição de contorno. Na terceira fase, a resposta numérica dos problemas locais são empregadas na discretização do problema global final. Assim, a solução numérica do problema local é introduzida no problema global como enriquecimento das funções Lagrangianas que formam a Partição da Unidade.

Quanto ao MEFG global-local, Kim *et al.* (2012) empregaram-no em problemas

de valor de contorno no entorno de regiões locais que exibem confinamento dos fenômenos de plastificação e danificação e Freitas (2015) realizou o acoplamento entre o MEF global-local e o MEF C^k para a modelagem de problemas bidimensionais elastoplásticos com plasticidade confinada. Kim e Duarte (2015) aplicaram o MEF global-local na análise tridimensional da propagação de trincas coesivas em estruturas de concreto, sendo evidenciada a eficiência computacional, robustez e precisão dessa abordagem. Os autores destacaram, entre outros aspectos, que a existência de erros de discretização nos denominados *elementos de mistura* (elementos que possuem nós que não são enriquecidos igualmente) ocasiona a perda de precisão nas respostas globais e ressaltaram que a abordagem estável do MEF (SGFEM: *Stable Generalized Finite Element Method* - Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (Babuška e Banerjee, 2012)) pode ser aplicada para minimizar esse problema.

Neste trabalho, a abordagem global-local é aplicada no âmbito dos métodos baseados na PU para descrever o processo de deterioração de meios parcialmente frágeis dentro do contexto da Mecânica do Dano Contínuo. A solução numérica usada para enriquecer o problema global é obtida através de análise fisicamente não linear realizada somente na região local, representada por modelos constitutivos adequados. Com a danificação da região local incorporada ao problema global, por intermédio das funções de enriquecimento global-local, procede-se com a análise linear da região global. Esse processo é realizado em blocos de análise global-local capazes de captar a evolução dos fenômenos de interesse e sua influência no comportamento global das estruturas.

Inserido no contexto da análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis, este trabalho integra o sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) (Fonseca, 2008) e está vinculado a outros dedicados ao mesmo tema, particularmente o arcabouço de modelos constitutivos criado por Penna (2011) e a estratégia global-local oriunda do trabalho de Alves (2012).

1.1 Objetivos

O enfoque deste trabalho é adaptar a técnica global-local, no contexto dos métodos baseados na PU e do MEFM, para a análise não linear de meios parcialmente frágeis. Para nortear tal meta, elencam-se nos itens subsequentes os objetivos geral e específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral da tese aqui proposta é utilizar a abordagem de enriquecimento da PU, obtida via MEFM, para a análise fisicamente não linear de estruturas compostas de material parcialmente frágil. Para isso, a técnica global-local será utilizada para captar a evolução dos fenômenos de deterioração material e sua influência no comportamento global das estruturas a partir de modelos constitutivos apropriados.

1.1.2 Objetivos Específicos

No sistema computacional *INSANE* são efetuadas as implementações necessárias à concretização dos objetivos deste trabalho, com o respaldo das implementações já existentes no sistema, destacando-se o ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos desenvolvido por Penna (2011), o MEFM global-local implementado por Alves (2012) em sua versão linear e o MEFM para análise não linear implementado e validado por Monteiro *et al.* (2014) e Monteiro *et al.* (2017).

Deste modo, pretende-se efetivar os seguintes objetivos específicos:

1. implementar a estratégia global-local aplicada ao MEFM para a análise fisicamente não linear de estruturas a partir da versão original de Alves (2012) existente no *INSANE*;
2. efetuar simulações numéricas com o respaldo da biblioteca de modelos constitutivos disponível no *INSANE* (Penna, 2011), avaliando-se as diferentes possibilidades de análise e a influência desses modelos nas respostas obtidas;

3. combinar os diferentes tipos de enriquecimentos presentes no INSANE (Alves, 2012), verificando-se a adequação e implicações dessas combinações;
4. comparar as respostas obtidas com resultados experimentais disponíveis na literatura para a validação da proposta desenvolvida.

1.2 Organização do texto

O texto desta tese contém cinco capítulos e cinco apêndices, descritos resumidamente a seguir.

Neste primeiro capítulo foram estabelecidos o tema que será tratado, sua contextualização, os objetivos para avaliá-lo e os recursos disponíveis para tal. O Capítulo 2 contempla a fundamentação teórica, que congrega a revisão de literatura quanto às formulações baseadas no conceito da PU e suas aplicações em análise fisicamente não linear de estruturas e os aspectos teóricos da metodologia de Kim e Duarte (2015) que embasa o trabalho. O Capítulo 3 é dedicado aos aspectos teóricos do MEFG global-local para análise fisicamente não linear proposto. Com o intuito de validar os recursos implementados, o Capítulo 4 reúne os exemplos numéricos cujos resultados são discutidos e comparados a outros disponíveis na literatura. O encadeamento dos capítulos anteriores permite a elaboração das considerações finais e de perspectiva de trabalhos futuros no Capítulo 5.

Complementarmente a esses capítulos, o Apêndice A apresenta o Sistema Computacional INSANE, com enfoque às implementações relacionadas ao MEFG e ao MEFG global-local para análise fisicamente não linear proposto. O Apêndice B descreve as funções de forma para o MEFG utilizadas neste trabalhos e os Apêndices C, D e E apresentam as formulações do Modelo de Fissuração Distribuída (para o caso de Estado Plano de Tensões), do Modelo de Dano Escalar e do Modelo de Microplanos, respectivamente.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo é reservado ao levantamento bibliográfico referente aos métodos baseados na PU, em especial o MEFG e o XFEM, entendidos aqui como estratégias equivalentes, e aos aspectos teóricos do trabalho de Kim e Duarte (2015) considerada no trabalho.

De forma a construir o entendimento coeso a respeito da tese, o texto, no decorrer da Seção 2.1, encaminha-se para o tema proposto percorrendo as formulações baseadas na PU, as características do MEFG global-local, sua aplicação para análise fisicamente não linear de estruturas e a aplicação desses métodos especificamente para análise de meios parcialmente frágeis.

Com a base bibliográfica definida, a Seção 2.2 completa o Capítulo 2 apresentando sinteticamente a metodologia de Kim e Duarte (2015) que fundamentou a estruturação do arcabouço teórico e computacional da tese.

2.1 Formulações baseadas no conceito da Partição da Unidade

No MEFG e no XFEM, a aproximação é construída e aprimorada com base no conceito da PU (Oden e Reddy, 1976), utilizado no MPU conforme Babuška *et al.* (1994), Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuska (1996). Nestes trabalhos, a PU é enriquecida ao ser multiplicada, em todo o domínio, por funções escolhidas para representar adequadamente o comportamento esperado para a solução que se

busca aproximar. Tais enriquecimentos polinomiais são também fundamentais para o Método Sem Malha *hp*-cloud desenvolvido por Duarte e Oden (1996b), Duarte e Oden (1996a) e Oden *et al.* (1998). No desenvolvimento do MEF_G apresentado por Strouboulis, Babuška e Copps (2000c) (uma combinação do MEF e PU) e do XFEM proposto por Moës *et al.* (1999), visou-se a permanência de características do MEF no MPU para eliminar problemas relacionados à integração numérica das equações de domínio e de contorno, bem com aproveitar a estrutura computacional disponível para o MEF. Assim, a PU desses métodos é fornecida pelas funções de forma do MEF convencional.

Em um apanhado histórico, o MEF_G, com tal denominação, foi aplicado pela primeira vez por Strouboulis, Babuska e Copps (2000a), Strouboulis, Copps e Babuska (2000b) e Duarte *et al.* (2000), contribuindo com o desenvolvimento do arcabouço matemático do método. Os enriquecimentos analíticos são usados da mesma maneira que no MPU, em particular com funções polinomiais e harmônicas, funções calculadas computacionalmente ("handbook functions"), ou mesmo funções capazes de representar singularidades da solução a ser aproximada. O XFEM também aplica a PU fornecida pelas funções convencionais de elementos finitos, de acordo com Belytschko e Black (1999) e Moës *et al.* (1999), voltado principalmente para o contexto da Mecânica da Fratura e concentrando o enriquecimento, com funções não polinomiais, apenas na região de propagação da trinca.

O XFEM e MEF_G são métodos basicamente idênticos. Segundo Belytschko *et al.* (2009), o nome MEF_G foi adotado pela *University of Texas* (Peng *et al.* (1999), van der Pijl *et al.* (2005) e Zhu e Atluri (1998)) em 1995 – 1996 e o nome XFEM foi criado na *Northwestern School* (Griebel e Schweitzer (2000), Belytschko *et al.* (2003)) em 1999. O XFEM foi inicialmente desenvolvido para a Mecânica da Fratura Linear Elástica (Moës *et al.*, 1999), com o enriquecimento construído através de funções descontínuas, como as funções de Heaviside e funções singulares especialmente definidas para esse fim (Belytschko e Black, 1999). A construção de uma

aproximação de grau polinomial superior a um poderia ser obtida com elementos finitos de ordem elevada (geralmente do tipo Q8 para aproximação de grau dois). No trabalho de Moës *et al.* (1999), por exemplo, o enriquecimento era realizado localmente, na ponta e no caminho da trinca. Posteriormente, o XFEM também foi usado para tratar fenômenos interfaciais, como no arcabouço para problemas multimateriais (Sukumar *et al.*, 2001), solidificação (Chessa *et al.*, 2002), bandas de cisalhamento (Areias e Belytschko, 2006), defeitos cristalográficos (Belytschko e Gracie, 2007) e problemas multicampo (Zhu e Atluri, 1998). Já os primeiros trabalhos que trataram do MEFG envolveram enriquecimentos com funções polinomiais para todo o domínio. A representação do campo de tensões em regiões em que este se torna singular era reproduzida enriquecendo-se os nós associados a estas regiões com funções obtidas da expansão assintótica da solução da Elasticidade Bidimensional.

Enquanto no XFEM a PU é baseada exclusivamente nas funções do MEF, o MEFG tem sido empregado de forma genérica, como no trabalho de Duarte *et al.* (2001), em que funções de Shepard e de elementos finitos são aplicadas de forma combinada para se construir a PU. A abordagem de ambas as vertentes de desenvolvimento destes métodos é, contudo, a mesma, fundamentada na ideia de funções do tipo PU e de seu enriquecimento com funções polinomiais ou não. Assim, as distinções entre MPU, MEFG e XFEM tornam-se relativamente irrelevantes, podendo ser tratados como equivalentes, conforme Fries e Belytschko (2010).

2.1.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG, referido aqui como equivalente ao XFEM, pode ser considerado uma variação do MEF convencional. A estratégia envolvida na formulação deste método é empregar as funções do tipo PU, escolhidas de acordo com o problema analisado, e enriquecê-las para se definir as funções de forma. Duarte e Kim (2008) enfatizaram a eficiência do MEFG na análise de superfícies danificadas localizadas arbitrariamente

em malhas, além de possuir, para essa classe de problemas, o mesmo nível de flexibilidade e facilidade de uso que os métodos sem malha, sendo computacionalmente mais eficiente.

De acordo com Duarte *et al.* (2000), muitos desses métodos sem malha propostos podem ser classificados como casos especiais do MEFG, isto porque esses métodos usam a PU, que é um conjunto de funções cujos valores somam a unidade em cada posição \mathbf{x} do domínio Ω . Alves *et al.* (2013) afirmaram que tal estratégia cria aproximações conformes que são melhoradas pelo esquema de enriquecimento nodal.

Duarte e Oden (1996b) apresentaram o método sem malha chamado Método das Nuvens *hp*, no qual *nuvens* de pontos são usadas para discretizar o domínio do problema e formam a base para construir as funções de PU. Tais funções, assim como no Método de Galerkin Livre de Elementos (Belytschko *et al.*, 1994), são construídas pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis e enriquecidas pela multiplicação com funções polinomiais ou não. O uso de funções PU em uma malha de elementos finitos e o enriquecimento dessas funções pelo mesmo procedimento do Método das Nuvens *hp* permitem a interpretação do MEFG como uma forma não convencional de MEF, estabelecendo uma relação com os métodos sem malha.

O termo *nuvem* (ω_j) herdado do Método das Nuvens *hp*, consiste, no contexto do MEFG, no conjunto de elementos finitos que compartilham o mesmo ponto nodal \mathbf{x}_j . As funções de Lagrange lineares \mathcal{N}_j , associadas a um dos n nós da malha de elementos finitos, podem ser consideradas como uma PU porque para qualquer posição \mathbf{x} :

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1. \quad (2.1)$$

Visando esclarecer essa estratégia, considera-se uma malha convencional de elementos finitos definida a partir de um conjunto de n pontos nodais $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$, de acordo com a Figura 2.1(a), no domínio \mathbb{R}^2 . Define-se uma nuvem ω_j formada por todos os elementos que compartilham o ponto nodal \mathbf{x}_j .

O conjunto de funções Lagrangeanas interpoladoras associadas ao nó \mathbf{x}_j define

a função $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$, cujo suporte corresponde à região ω_j , conforme ilustra a Figura 2.2(b).

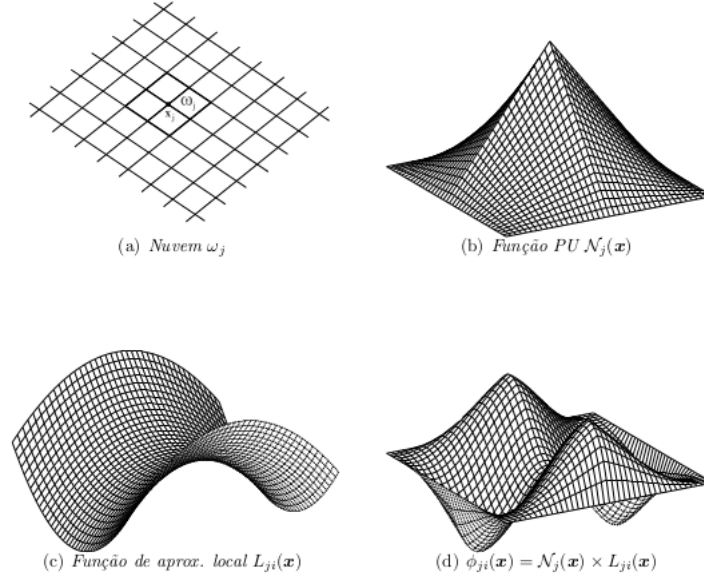


Figura 2.1: Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j (Barros, 2002).

Um conjunto de funções de enriquecimento (\mathcal{I}_j), denominadas funções de aproximação locais (L_{ji}), é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó \mathbf{x}_j com suporte na nuvem ω_j :

$$\mathcal{I}_j = \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad \text{com } L_{j1}(\mathbf{x}) = 1. \quad (2.2)$$

Ao final do processo, as funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, apresentadas na Figura 2.2(d), estão associadas ao nó \mathbf{x}_j , e são construídas através do enriquecimento das funções PU pelas componentes do conjunto \mathcal{I}_j . Assim, de acordo com a equação (2.3), $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ pode ser obtida pelo produto entre as funções básicas que formam a PU (Figura 2.1(b)) e as funções de enriquecimento (Figura 2.1(c)).

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^q = \mathcal{N}_j(x) \times \{L_{ji}\}_{i=1}^{q_j} \quad (\text{não há soma em } j). \quad (2.3)$$

As funções do conjunto (2.3) podem ser polinomiais ou não dependendo do problema analisado. O uso das funções de MEF como PU simplifica a implementação e evita, segundo Barros (2002), problemas relacionados à integração numérica e à imposição de condições de contorno.

A partir da seguinte combinação linear das funções de forma é obtida uma aproximação genérica \tilde{u} :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\}, \quad (2.4)$$

em que u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados com cada componente (\mathcal{N}_j) do MEF e ($\mathcal{N}_j \times L_{ji}(\mathbf{x})$) do MEFG, respectivamente.

Em adição, visando minimizar os erros de arredondamento durante o processamento computacional, Duarte *et al.* (2000) sugeriram uma transformação em torno das funções $L_{ji}(\mathbf{x})$, quando elas são do tipo polinomial. Neste caso, a coordenada \mathbf{x} é substituída por:

$$x \rightarrow \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h_j}, \quad (2.5)$$

em que h_j é o tamanho característico do maior elemento finito que compartilha o nó j , aqui definido como a maior distância entre dois vértices desse elemento.

Como resultado final do processo, obtém-se a função produto, que apresenta características aproximadoras da função de aproximação local, ao mesmo tempo que herda o suporte compacto da PU.

2.1.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local

Há comportamentos estruturais que não são descritos satisfatoriamente pela forma convencional do MEF, motivando o constante desenvolvimento de novas estratégias para sanar tal dificuldade. Problemas sujeitos a grandes deformações e à propagação de trincas, que exigem o remalhamento da estrutura, estão entre aqueles que têm despertado o interesse para estes novos desenvolvimentos.

O advento do MEFG contribuiu para melhorar a descrição desses problemas. Entretanto, a introdução de funções conhecidas *a priori* como enriquecimentos da aproximação nem sempre é capaz de capturar as informações necessárias para se compreender comportamentos estruturais mais complexos. Esta complexidade pode inviabilizar a pré-definição das funções e é possível que outros procedimentos, tal

como o refinamento h da malha (Duarte *et al.*, 2007), sejam necessários para que a solução seja encontrada.

Ainda no contexto do MEF, Noor (1986) propôs a aplicação de uma estratégia denominada *global-local* na resolução de problemas com não linearidades física e geométrica, com o objetivo de representar adequadamente fenômenos de característica local sem onerar computacionalmente a solução global do problema. Esta estratégia consiste nas seguintes etapas:

1. solução de um problema global discretizado de maneira grosseira em todo o domínio, não sendo descrito o fenômeno gerador dos gradientes localizados que se pretende analisar;
2. definição e solução de um problema local abrangendo a região em que tais gradientes ocorrem, empregando-se como condições de contorno a solução do problema global e uma malha refinada.

A aplicação da estratégia global-local no MEF é limitada, contudo, por alguns inconvenientes:

- a dificuldade em tratar a interface entre as descrições dos problemas global e local;
- a necessidade de que a descrição das condições de contorno seja razoavelmente precisa, visto que elas devem ser transferidas da análise global para a local;
- a incapacidade de lidar com as possíveis interações entre os problemas local e global ao longo do processo de análise.

Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008) e Kim *et al.* (2010) afirmaram que esses problemas podem ser dirimidos com a utilização da solução numérica do problema local como enriquecimento da aproximação do problema global, dentro da abordagem do MEFG. Assim, as seguintes etapas são acrescentadas à técnica global-local descrita por Noor (1986):

1. enriquecimento da solução global com a solução do problema local;
2. solucionamento do problema global enriquecido;
3. extração dos parâmetros de interesse.

Segundo Duarte *et al.* (2007), a aplicação de uma estratégia global-local na construção de funções de enriquecimento de natureza numérica é capaz de simplificar a discretização do problema e a Figura 2.2, para exemplificar, sintetiza o procedimento para construir funções de enriquecimento para problemas de propagação em meios parcialmente frágeis.

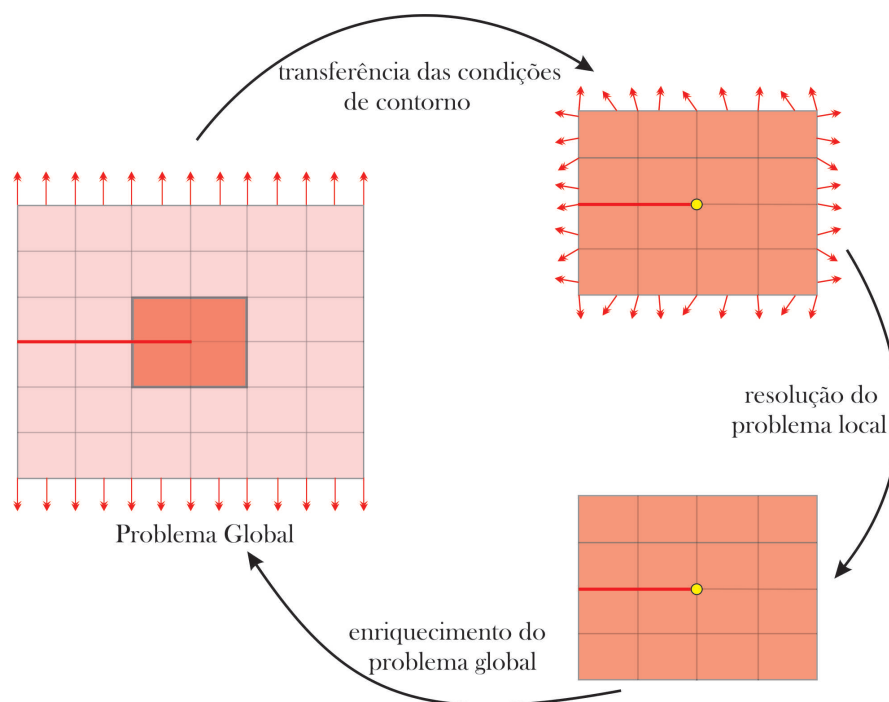


Figura 2.2: As três etapas do MEF global-local.

O MEF global-local tem sido aplicado e aprimorado em diversas pesquisas e, com o intuito de contextualizar este trabalho nos temas desenvolvidos atualmente, apresentam-se os aspectos relevantes de algumas delas.

Kim *et al.* (2008) aplicaram o conceito do MEF global-local para problemas de trincas em múltiplas regiões de uma placa sobre tração uniaxial. Kim *et al.* (2010) resolveram o problema de uma peça tridimensional na qual três trincas foram

descritas em três problemas locais diferentes e suas soluções foram repassadas para o domínio global (uma trinca por vez) através das funções de enriquecimento. Os autores formularam uma técnica em que o MEF G global-local era combinado ao MEF G - hp (Pereira *et al.*, 2009a,b), sendo este utilizado para discretizar os problemas de valor de contorno usados no MEF G global-local. A metodologia proposta permite a modelagem de pequenas trincas em malhas globais, grosseiras e sem trincas.

Kim *et al.* (2011) exploraram o paralelismo natural da estratégia do MEF G global-local e diferentes problemas locais foram distribuídos entre os processadores do sistema. Evangelista Jr *et al.* (2013) utilizaram uma aproximação em duas escalas com o conceito do MEF G global-local para solucionar problemas de trincas em múltiplas regiões, onde diferentes geometrias de trinca se situavam simultaneamente em diferentes posições de placas de concreto de aeroportos sob fundação elástica. A principal contribuição desse trabalho foi estender a aproximação do MEF G global-local para uma classe de problemas com trincas em múltiplas regiões envolvendo condições de contorno realistas e a existência de várias trincas de tamanhos e geometrias diferentes.

A estratégia do MEF G global-local descrita a seguir, adaptada para o escopo do presente trabalho, tem como base as pesquisas de Duarte e Kim (2008) e Kim *et al.* (2010).

2.1.2.1 Formulação do problema global

Inicialmente é considerado um problema da Teoria da Elasticidade em que o domínio é definido por $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em \mathbb{R}^n . O contorno é decomposto em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$, com $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$, sendo u e σ referentes às regiões em que as condições de Dirichlet (funções de deslocamento) e de Neumann (funções de força), respectivamente, são aplicadas, segundo as equações (2.6) e (2.7):

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_G^u \quad (\text{homogênea por simplificação}) \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^\sigma, \quad (2.7)$$

sendo \mathbf{u} o vetor de deslocamentos, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões, \mathbf{n} o vetor unitário normal para $\partial\Omega_G^\sigma$ e $\bar{\mathbf{t}}$ o vetor das tensões de superfície prescritas.

A equação de equilíbrio da Teoria da Elasticidade é apresentada na equação (2.8). Já a relação constitutiva é dada pela Lei de Hooke Generalizada, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, sendo \mathbf{C} o tensor constitutivo de rigidez elástica e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_G. \quad (2.8)$$

A solução aproximada do problema global inicial definido nas equações (2.6), (2.7) e (2.8) é dada por $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ na equação (2.9), tanto em análise via MEF quanto via MEFG (no caso de serem utilizadas funções enriquecedoras no problema global inicial):

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_G^0 \in \tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall \quad \tilde{\mathbf{v}}_G^0 \in \tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^0(\Omega_G)$
--

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}_G^0) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_G^0 \, ds, \quad (2.9)$$

em que $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem um definido em Ω_G construído pelas funções de forma do método utilizado (MEF ou MEFG) e que atende às condições de contorno homogêneas de Dirichlet (conforme a equação (2.6)). O termo $\tilde{\mathbf{v}}_G^0$ refere-se à função tentativa.

No caso do MEFG, a aproximação $\tilde{\mathbf{u}}_G^0(\mathbf{x})$ é determinada conforme a equação (2.4). Nela o conjunto $L_{ji}(\mathbf{x})$ pode ser definido apenas com monômios enriquecedores. O espaço também pode ser definido usando as funções de forma convencionais de MEF, uma vez que os fenômenos locais não precisam ser discretizados no problema global inicial.

2.1.2.2 Formulação do problema local

Seja Ω_L um subdomínio de Ω_G , equivalente ao domínio local. Este domínio deve conter os fenômenos indutores de concentrações de tensões, como trincas, aberturas,

inclusões ou outros fenômenos locais de interesse (Duarte e Kim, 2008). O seguinte problema é resolvido após a obtenção da solução global $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$:

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \quad \forall \tilde{\mathbf{v}}_L \in \tilde{\chi}_L(\Omega_L)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L \, ds = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L \, ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} [\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \eta \tilde{\mathbf{u}}_G^0] \cdot \mathbf{v}_L \, ds, \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que $\tilde{\chi}_L$ é o espaço usado para a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$, um espaço de Hilbert definido em Ω_L utilizando as funções de forma do MEF_G. Os domínios de integração da equação (2.10) representam contornos do domínio local.

De acordo com Kim *et al.* (2010), é possível selecionar os tipos de condições de contorno advindas de $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ a partir da escolha do parâmetro de rigidez η , conforme descrito a seguir.

- i. Para $\eta = 0$ a equação (2.10) se reduz a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L \, ds + \\ \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) \cdot \mathbf{v}_L \, ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Neste caso, correspondente às condições de contorno de Neumann, são transferidas apenas tensões para o contorno do problema local;

- ii. Para transferir apenas informações de deslocamentos para o problema local, caso das condições de contorno de Dirichlet, adota-se η como parâmetro utilizado no Método da Penalidade. Deste modo, como o valor de η é muito alto, a aplicação das tensões ($t(u_G)$) torna-se ineficaz, reduzindo a equação (2.10):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L \, ds = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L \, ds + \eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \cdot \mathbf{v}_L \, ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

- iii. Para a imposição das condições de contorno de Cauchy, deve-se aplicar um valor de η intermediário entre as duas condições anteriores. Assim, tensões

e deslocamentos são transferidos para o contorno do problema local. Com base em experimentos numéricos (Kim *et al.*, 2010), a seguinte expressão foi definida para a determinação de η :

$$\eta = \frac{E}{\sqrt[n]{V_0 J}}, \quad (2.13)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, n o número de dimensões espaciais do problema, V_0 o volume do elemento utilizado no sistema paramétrico e J o jacobiano do elemento global cuja aresta está contida no contorno local onde são impostas as condições de contorno.

2.1.2.3 Formulação do problema global enriquecido

Finalmente, a solução do problema local $\tilde{\mathbf{u}}_L$ (equação (2.10)) é utilizada como enriquecimento em uma nova análise do problema global. Esta estratégia é aplicada com o intuito de que a solução $\tilde{\mathbf{u}}_L$ seja capaz de aprimorar, em uma nova análise do domínio global, a representação da solução na região em que os fenômenos locais de interesse ocorrem. Nesta etapa da análise, haverá uma i -ésima função de forma (conforme estabelecido na equação (2.3), definida por:

$$\phi_j = \mathcal{N}_j \times \tilde{\mathbf{u}}_L, \quad (2.14)$$

em que \mathcal{N}_j é a função PU utilizada no problema global.

A solução do problema global enriquecido, $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$, é fornecida pela equação (2.15):

Encontre $\tilde{\mathbf{u}}_G^E \in \tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^E(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall \quad \tilde{\mathbf{v}}_G^E \in \tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^E(\Omega_G)$
--

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_G^E) : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}_G^E) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_G^E \, ds, \quad (2.15)$$

na qual $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^E(\Omega_G)$ é o espaço $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_G^0(\Omega_G)$ aumentado com as funções de enriquecimento global-local. O espaço pode ser aumentado através de outras funções de enriquecimento além da função global-local (Alves, 2012).

Em relação à integração numérica nesta etapa do MEF global-local, Kim *et al.* (2010) propõem a utilização de elementos locais como células de integração para o problema global enriquecido. Essa estratégia é possível desde que a malha local seja aninhada à global, sendo necessária uma sequência de mapeamentos de pontos de integração entre os sistemas paramétricos dos elementos locais e globais.

O problema enriquecido é solucionado com a mesma malha grosseira utilizada na resolução do modelo global inicial. No caso de problema da Elasticidade bidimensional, as funções de enriquecimento global-local adicionam apenas dois graus de liberdade a cada nó global enriquecido, independentemente da discretização utilizada no problema local. Conseqüentemente, o domínio local pode ser discretizado com malhas bastante refinadas, capazes de descrever o fenômeno localizado, sem acarretar um aumento significativo do tamanho do problema global final. De acordo com Kim *et al.* (2010), esta é a vantagem mais relevante do MEF global-local em relação ao MEF convencional, que exige alto grau de refinamento para a descrição do mesmo fenômeno no nível global.

A discretização local refinada, em abordagem h ou p ou com a aplicação de funções especiais ou combinação destas técnicas, é capaz de captar propriedades específicas do comportamento do problema. O enriquecimento do problema global com a solução local acarreta a incorporação do comportamento local na análise global, com o benefício de não elevar significativamente o custo computacional da solução global.

2.2 MEF e MEF global-local para análise fisicamente não linear de estruturas

Piedade Neto (2013) relatou que o MEF tem sido aplicado com sucesso na solução de problemas com singularidades e descontinuidades. Observa-se, porém, com base na literatura existente, que ainda há um vasto caminho a ser explorado com este método para a compreensão destes fenômenos.

De acordo com Torres (2003), alguns benefícios são esperados com a utilização do MEFG, tais como: enriquecimento da aproximação inicial limitado a regiões de interesse no domínio (locais que apresentam elevados gradientes de deformação e tensão, por exemplo), descrição minuciosa da distribuição de grandezas (como o dano) sem a necessidade de alterar a malha, etc. Segundo o autor, os seguintes aspectos do MEFG são favoráveis à análise não linear:

- o enriquecimento é efetuado após o mapeamento de coordenadas entre o elemento pai e o filho, sem a perda de qualidade aproximadora quando há distorção da malha;
- possibilidade de utilização de funções de enriquecimento correspondentes às soluções analíticas previamente conhecidas de problemas em que há regiões de singularidade, acarretando a redução do erro de aproximação;
- seleção apenas de regiões de interesse do domínio para aplicar o enriquecimento polinomial, sendo mantida a conformidade entre elementos (característica importante na simulação de processos localizados de danificação ou plastificação).

Trabalhos nos quais houve a aplicação do MEFG/XFEM (Torres (2003), Barros *et al.* (2004), Elguedj *et al.* (2007), Combescure *et al.* (2012), Piedade Neto (2013), Crété *et al.* (2014) e Broumand e Khoei (2015)) e do MEFG global-local (Kim *et al.* (2009), Kim *et al.* (2012) e Freitas (2015)) na análise fisicamente não linear de estruturas são elencados e brevemente descritos ao longo deste subitem.

Em seu trabalho, Torres (2003) realizou a implementação do MEFG para simulações numéricas tridimensionais de problemas estruturais nos quais há a presença de dano e de plasticidade (acoplados ou não). Para isso, foram tratados os modelos constitutivos elastoplástico (com função de von Mises), de dano evolutivo frágil (Mazars, 1984) e elastoplástico com dano (Lemaitre, 1985) e o MEFG contribuiu para melhor definir a distribuição das tensões equivalentes e do dano com o emprego de enriquecimento local em regiões de elevados gradientes dessas grandezas.

Barros *et al.* (2004) corroboraram a ideia de que a estratégia de enriquecimento nodal do MEFG, evitando o refinamento da malha, é muito interessante para a análise não linear. Além disso, os autores sugerem que alguns problemas em análise não linear podem ser amenizados com o emprego do MEFG (como a localização numericamente induzida) e as frentes de dano e de plasticidade podem ser reproduzidas com acurácia. Neste trabalho, os autores objetivaram estender o MEFG para a análise não linear devido ao dano progressivo e propuseram uma estratégia adaptativa p (uso de funções de enriquecimento polinomiais) adequada para a aproximação não linear.

Além do exposto, em Barros *et al.* (2004) a não linearidade foi introduzida nos problemas de valor de contorno através do modelo constitutivo do material. Os autores trataram uma viga de concreto armado com a presença de dano progressivo, sendo a resposta não linear relacionada à propagação de microtrincas no concreto.

Elguedj *et al.* (2007) estudaram a propagação de trincas por fadiga em materiais plásticos no arcabouço do XFEM. Os autores aplicaram as funções de enriquecimento propostas por Elguedj *et al.* (2006). A singularidade na ponta da trinca, no contexto da Mecânica da Fratura Elastoplástica, depende das características do encruamento do material, implicando na incorporação das propriedades do material nas funções de enriquecimento. Elguedj *et al.* (2007) concluíram que o método proposto conseguiu modelar os fenômenos físicos observados no crescimento e propagação de trincas por fadiga sem necessidade de remalhamento.

Combescure *et al.* (2012) desenvolveram e implementaram, no arcabouço do XFEM com funções de enriquecimento para propagação de trincas coesivas (Ortiz e Pandolfi, 1999; Moës e Belytschko, 2002), um modelo de dano para fratura e posteriormente forneceram uma nova avaliação analítica do ângulo de propagação de trincas no caso de fraturas por cisalhamento. Segundo os autores, a aproximação é realizada em três níveis: uma escala refinada, para a qual o dano é considerado contínuo; uma mesoescala, na qual a zona de danificação é representada por uma lei

coesiva; e uma escala grosseira, na qual a trinca é avaliada pela Mecânica da Fratura quando atinge determinado comprimento. Os exemplos numéricos apresentados envolveram o material aço e, em geral, os autores mostraram como é possível tratar de um modo controlado a passagem do modelo de dano para uma representação coesiva da fratura nos estágios iniciais de propagação.

Em seu trabalho, Piedade Neto (2013) abordou a análise não linear de Mecânica dos Sólidos por meio do MEFG para problemas de contato. Para isso, o autor desenvolveu um elemento de contato generalizado do tipo *segmento a segmento* (elemento de contato representado por uma linha de segmento) baseado no método *mortar* (Bernardi *et al.* (2001); Fisher e Wriggers (2005) *apud* Piedade Neto (2013)), além de considerar a existência de fenômenos não lineares em virtude do material e da cinemática nos modelos numéricos. Dentre as principais conclusões apresentadas pelo autor, destacam-se: nos exemplos de elastoplasticidade, a estratégia de enriquecimento do MEFG melhorou os resultados para malhas grosseiras; houve o aprimoramento da acurácia do modelo a um custo computacional baixo nos exemplos não lineares; os elementos de contato generalizados propostos foram capazes de fornecer resultados mais acurados que os obtidos com o uso de MEF.

Crété *et al.* (2014) avaliaram a propagação de trincas resultante da iniciação, crescimento e coalescência de vazios em estruturas. O XFEM foi empregado para simular a propagação da trinca utilizando funções de enriquecimento de Heaviside e funções singulares. Assumiu-se que a propagação ocorre à medida que a energia no entorno da ponta da trinca alcança um valor crítico. Assim, o comprimento da trinca é estimado através de um modelo constitutivo de dano acoplado com viscoplasticidade e seu crescimento ocorre enquanto há orientações de propagação potenciais (avaliação realizada pela análise de bifurcação considerando a localização de deformação) e a energia excede um valor crítico. Os materiais considerados pelos autores são metais e ligas, nos quais a fratura leva ao crescimento de trincas induzido pelo processo de dano. Entre outros aspectos, os autores concluíram que, na

metodologia proposta, a direção de propagação da fissura é a mesma independente do tamanho da malha.

Broumand e Khoei (2015) aplicaram o XFEM para avaliar a dinâmica de grandes deformações, visando modelar o processo completo de fratura dinâmica dúctil baseada em um modelo de dano viscoplástico não local. Para tanto, os autores empregaram:

- um modelo viscoplástico para tratar a não linearidade do material e a dependência do fluxo de tensão da taxa de deformação, do endurecimento e da temperatura;
- um modelo de dano isotrópico para modelar macroscopicamente a nucleação, o crescimento e a coalescência de microvazios;
- uma regularização viscoplástica combinada com o modelo viscoplástico não local para suprimir o fenômeno de localização devido ao dano e ao amolecimento devido à temperatura;
- o arcabouço do XFEM (com o emprego de funções de enriquecimento de Heaviside) para modelar todo o processo de fratura dúctil dinâmica.

Em suas conclusões, Broumand e Khoei (2015) destacaram que os resultados dos exemplos numéricos apresentados, todos com elementos de aço, foram capazes de demonstrar a robustez e acurácia do método computacional apresentado. Além disso, a avaliação feita pelos autores conseguiu prever o processo completo de iniciação da trinca até o estágio final de fratura, mesmo em geometrias e condições de carregamento complexas.

Em diversos contextos, é comum analisar estruturas em que os fenômenos de plasticidade ou danificação ocorrem de maneira confinada em algumas regiões críticas. Segundo Kim *et al.* (2012), se o problema for muito grande ou o carregamento for complexo, o custo computacional pode ser elevado e, então, uma análise linear

elástica simplificada frequentemente é requisitada, embora produza resultados menos acurados. Assim, o desenvolvimento de metodologias numéricas mais eficientes que possam tratar regiões não lineares pequenas mostrou-se necessário para reduzir este elevado custo computacional.

A estratégia de enriquecimento do MEF global-local aplicada para tratar a existência do confinamento dos fenômenos de plastificação e danificação apresenta benefícios. Kim *et al.* (2009) propuseram um procedimento numérico para a análise de problemas com não linearidade localizada, aplicando funções do tipo global-local para o enriquecimento da PU na construção dos espaços de aproximação na malha de elementos finitos grosseira. Segundo os autores, as zonas de processo não linear nessas trincas são muito menores que qualquer dimensão da estrutura, entretanto sua análise é relevante para o acompanhamento da nucleação e crescimento das trincas. Kim *et al.* (2012) também aplicaram essa metodologia e afirmaram que a aproximação pode fornecer soluções não lineares precisas com redução nos custos computacionais quando se compara ao MEF, uma vez que permite iterações não lineares nas malhas grosseiras após a criação das funções de enriquecimento, capazes de descrever apropriadamente o comportamento não linear localizado.

Kim *et al.* (2009) concluíram que o MEF global-local:

- permitiu a construção numérica de funções de enriquecimento para problemas com comportamento não linear local em que não há conhecimento *a priori* sobre suas soluções;
- não exigiu a discretização da trinca no domínio global, mantendo a acurácia da solução, e uma única malha grosseira pode ser usada para qualquer configuração complexa de trinca;
- forneceu soluções não lineares quase tão precisas quanto as obtidas com MEF com um custo computacional reduzido.

Em sua tese, Freitas (2015) realizou o acoplamento entre o MEF global-local

e o MEFG- C^k para a modelagem de problemas bidimensionais com concentração de tensões, denominando-o $MEFG^{gl-C^k}$. Na formulação, são utilizadas as funções arbitrariamente suaves $PU C^k$ no problema local (construídas através da PU de Shepard (Duarte *et al.*, 2006)) e funções $PU C^0$ nos problemas globais inicial e enriquecido. O uso das funções $PU C^k$ é justificado pela autora pelo fato de que permitem recuperar a elevada regularidade comum de aproximações por métodos livres de malha, mantendo a malha de elementos para a definição dos suportes das funções. Desta forma, tem-se a possibilidade de se elevar a regularidade sem o aumento de suporte. Com este acoplamento, segundo Freitas (2015), não há dependência de soluções analíticas e somente a solução local é empregada no problema global como enriquecimento.

Para efeito de comparação entre o $MEFG^{gl-C^k}$ e o MEFG global-local clássico, Freitas (2015), além de modelar um problema de elasticidade, realizou a modelagem de um problema elastoplástico com plasticidade confinada em uma pequena região do domínio global. Para isso, a autora considerou a teoria da plasticidade J_2 independente de taxa, com encruamento isotrópico do material e critério de plastificação de von Mises, sendo aplicado apenas carregamento monotônico e a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, com estado plano de deformações.

2.2.1 MEFG e MEFG global-local aplicados à análise de estruturas de concreto

De acordo com Unger *et al.* (2007), as simulações numéricas com o material concreto são importantes para o planejamento de estruturas novas e eficientes, bem como para a avaliação de estruturas existentes. Segundo os autores, a falha no concreto é acompanhada pela formação de trincas discretas e zonas de processo de fratura. Tais zonas podem ser representadas em modelos numéricos através de modelos de trinca distribuída, nos quais a abertura da trinca é representada por concentrações de deformação.

Unger *et al.* (2007) acrescentaram que as trincas também podem ser representadas explicitamente no modelo numérico. Considerando a mesoescala, o concreto consiste em uma matriz cimentícia e agregados. As microtrincas são iniciadas nas proximidades da interface entre a matriz e o agregado e uma trinca macroscópica é criada a partir da união de microtrincas. Assim, a estrutura heterogênea do concreto conduz ao fenômeno de *crack bridging*, em que duas trincas paralelas são conectadas por um agregado, o que permite a transferência de forças coesivas através da trinca existente. Neste contexto, os autores destacaram que a inclusão de forças coesivas transmitidas através de trincas é simples e não exige a adição de elementos interfaciais quando se aplica o XFEM. Segundo Unger *et al.* (2007), as trincas são caracterizadas por um campo de deslocamento descontínuo e a aplicação das funções de Heaviside como enriquecimento exige que a ponta da trinca esteja localizada na aresta do elemento finito. Os autores utilizaram como enriquecimento as funções de ponta de trinca, que permitem a representação dos campos de tensão singulares no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica e o campo de tensão na vizinhança da ponta da trinca não possui singularidade.

Segundo Bobinski e Tejchman (2012), o processo de fratura em materiais parcialmente frágeis como o concreto pode ser dividido em dois estágios principais: o surgimento de regiões limitadas com deformações intensas (incluindo microtrincas) e a ocorrência de macrotrincas. O primeiro estágio pode ser avaliado numericamente por aproximações contínuas baseadas na elastoplasticidade, Mecânica do Dano, elastoplasticidade acoplada com dano e modelos constitutivos de microplanos. Já o segundo estágio é interpretado como um salto no campo de deslocamentos contínuos através de métodos descontínuos, tais como elementos coesivos definidos ao longo das bordas de elementos finitos ou descontinuidades fortes com a aplicação de funções de enriquecimento em que as trincas podem ser arbitrariamente propagadas através de elementos finitos.

Em Moës e Belytschko (2002), o XFEM é utilizado na modelagem de descontinuidades e do crescimento arbitrário de trincas coesivas. A descontinuidade é modelada de forma independente da malha, o que permite a simulação do crescimento de trincas sem a necessidade de remalhamento e os autores estenderam o método para o caso do crescimento de trincas em concreto envolvendo uma lei coesiva nas faces dessas trincas.

O trabalho de Mariani e Perego (2003) abordaram uma metodologia para a simulação da propagação de trincas coesivas parcialmente estáticas em materiais parcialmente frágeis, sendo aplicadas como enriquecimento as funções de Heaviside e funções polinomiais cúbicas, capazes de reproduzir a forma da zona de processo na ponta de uma trinca coesiva e de propagar a trinca sem a necessidade de modificar a malha de elementos finitos.

Ren *et al.* (2014) definiram o concreto como um compósito poroelástico no qual os agregados são ligados à pasta de cimento através de uma zona de transição interfacial. Os autores propuseram uma solução numérica para o problema desse tipo de material usando o conceito de interface imperfeita sob o regime de saturação não drenada, sendo o XFEM e as funções de enriquecimento (representando a descontinuidade nos elementos cortados por uma interface imperfeita) adotados para descrever os campos de deslocamento e de poros de pressão.

Kim e Duarte (2015) aplicaram o MEEG global-local na análise tridimensional da propagação de trincas coesivas em estruturas de concreto, sendo evidenciada a eficiência computacional, robustez e acurácia da abordagem aplicada. Com base no artigo desses autores, tratado no próximo subitem, porém com abordagem bidimensional, é desenvolvida a metodologia desta tese.

2.3 Aspectos teóricos da metodologia de Kim e Duarte (2015)

Nos trabalhos de Kim *et al.* (2009), Kim *et al.* (2012), Freitas (2015) e Freitas *et al.* (2015) há o emprego do MEFG global-local para a análise de problemas de plasticidade, sendo importantes para vislumbrar as técnicas aplicadas, a possibilidade de superar problemas neste tipo de análise e as conclusões apresentadas, que tratam dos benefícios, dificuldades e potenciais pesquisas para o melhoramento das técnicas propostas.

Atentando-se ao trabalho de Kim *et al.* (2009), um modelo de plasticidade foi utilizado pelos autores para descrever a resposta irreversível e os efeitos do endurecimento do meio (teoria da plasticidade $J2$). Para avaliar a efetividade do MEFG global-local, os autores realizaram experimentos numéricos e compararam as respostas obtidas com o MEFG. Nas análises, um único problema local foi definido no entorno de uma trinca no domínio, com a aplicação de um modelo de endurecimento isotrópico linear, e assumiu-se o confinamento da deformação plástica no interior do domínio local (o que justifica o uso de uma lei elástica no problema global inicial). De acordo com Kim *et al.* (2009) e Kim *et al.* (2012), a análise de problemas não lineares com o MEFG global-local é efetuada da seguinte maneira:

- a solução global inicial da equação (2.9) é calculada na malha grosseira, para o passo de pseudo tempo final $t_{n_{máx}}$, as trincas não são discretizadas na resolução desse problema e uma lei linear elástica é usada para tratar o material;
- o problema local é construído automaticamente usando elementos extraídos da discretização grosseira global numa pequena região crítica com comportamento não linear. Esse problema é resolvido para o passo de pseudo tempo final $t_{n_{máx}}$ utilizando-se uma lei não linear e o algoritmo de Newton-Raphson para calcular a solução da equação (2.10);
- a solução local não linear, calculada no passo de pseudo tempo final $t_{n_{máx}}$, é

utilizada como função de enriquecimento do problema global em cada passo de pseudo tempo. Nesta etapa, o problema global (equação (2.15)) é solucionado incrementalmente com um modelo constitutivo não linear e com a mesma malha grosseira em cada passo de pseudo tempo t_n , sendo que somente a solução local não linear é usada como enriquecimento.

Kim e Duarte (2015) propuseram uma metodologia do MEEG global-local, aplicada à propagação de trincas coesivas, na qual as soluções do problema local refinado são obtidas através de análise não linear, cujas condições de contorno são extraídas do problema global. Além da construção de funções de enriquecimento global-local, é possível identificar os estados de dano do problema global e obter soluções acuradas para as malhas globais grosseiras. Segundo os autores, esse é o diferencial da metodologia em relação a outras, tais como as de Kim *et al.* (2009) e Kim *et al.* (2012), nas quais a solução local contribui somente com a descrição cinemática das soluções globais.

As Figura 2.3 e 2.4 apresentam a esquematização do processo de solução dos trabalhos de Kim *et al.* (2012) e Kim e Duarte (2015), respectivamente.

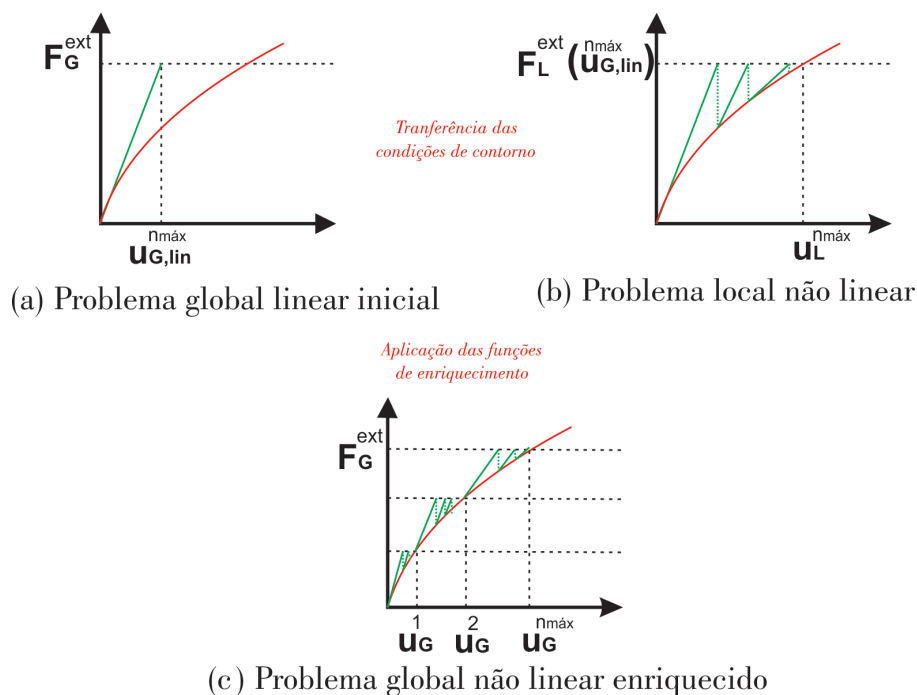


Figura 2.3: Procedimento de solução de Kim *et al.* (2012).

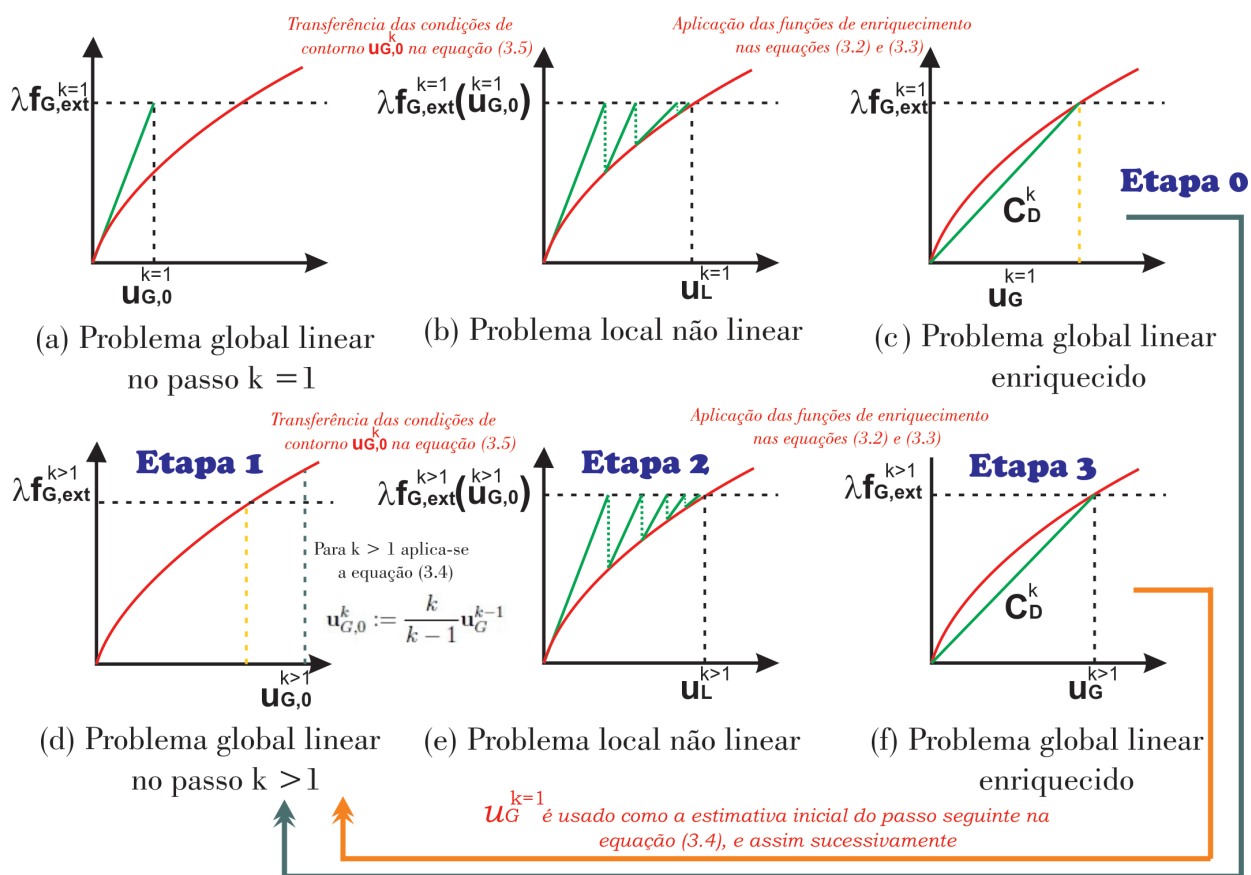


Figura 2.4: Procedimento de solução de Kim e Duarte (2015).

Na Tabela 2.1 é feito um paralelo entre as principais características desses dois trabalhos.

Tabela 2.1: Paralelo entre as técnicas apresentadas por Kim *et al.* (2012) e Kim e Duarte (2015).

	Kim <i>et al.</i> (2012)	Kim e Duarte (2015)
Fenômeno avaliado	Plasticidade confinada	Propagação de fraturas coesivas
Dimensão do problema	Tridimensional	Tridimensional
Método numérico	MEFG global-local	MEFG global-local
Etapas de resolução dos problemas	<p>1^a global linear: o problema é resolvido admitindo-se comportamento linear para a aplicação de todo o carregamento;</p> <p>2^a local não linear: aplicação das condições de contorno obtidas na 1^a etapa, admitindo-se comportamento não linear;</p> <p>3^a global não linear enriquecido: enriquecimento com a solução local (2^a etapa) - o problema não linear é resolvido, dividindo-se em passos não lineares.</p>	<p>inicial: cálculo de um deslocamento global para inicializar a 1^a etapa;</p> <p>1^a global linear: solução linear;</p> <p>2^a: local não linear (iterações não lineares no passo k);</p> <p>3^a: global linear enriquecido (no passo k).</p>
Processo de solução	As funções de enriquecimento global-local são calculadas apenas uma vez na 2 ^a etapa para o carregamento completo.	Há atualizações das funções de enriquecimento global-local durante a análise não linear, conforme a trinca se propaga; em cada passo, essas funções são aplicadas para definir a discretização na escala global.
Justificativa	A evolução plástica na região enriquecida com a função global-local é gradual.	O comportamento não linear é restrito a uma região altamente localizada; a solução local constrói funções de enriquecimento e identifica o estado de degradação do meio.
Variáveis de estado locais	Não são transferidas para o problema global. Cada problema armazena suas variáveis em seus pontos de integração.	São usadas no problema global enriquecido e levam à manipulação eficiente das funções de enriquecimento global-local.

A escolha da abordagem de Kim e Duarte (2015) no desenvolvimento do arcabouço teórico e computacional deste trabalho deve-se à interessante estratégia utilizada pelos autores para reduzir o erro de discretização da solução local. Este depende das condições de contorno aplicadas na porção do domínio local que não intersecta o contorno do domínio global ($\Gamma_L (\Gamma_L \cap (\Gamma_G^u \cup \Gamma_G^t))$). O deslocamento estimado $\mathbf{u}_{G,0}^k$ da solução global é usado como condição de contorno nesta porção do contorno local, porém tal solução não é exata.

A estratégia aplicada por Kim e Duarte (2015) para atenuar o erro de discretização descrito envolve a aplicação de iterações global-local: a solução do problema global \mathbf{u}_G^k é usada como condição de contorno e o problema local é resolvido novamente, encontrando-se \mathbf{u}_L^k . A solução \mathbf{u}_G^k é mais acurada do que a estimativa $\mathbf{u}_{G,0}^k$ e essa nova solução local fornece melhores funções de enriquecimento global-local para o problema.

Diferentemente desses autores, que trataram da propagação de trinca coesiva em meio linear elástico, neste trabalho a técnica global-local é utilizada para captar a evolução de fenômenos de deterioração material a partir de modelos constitutivos apropriados. O sistema *INSANE* possui uma biblioteca de modelos constitutivos baseada na estrutura teórica-computacional implementada por Penna (2011), cuja formulação unificada é sintetizada na próxima seção.

2.4 Formulação unificada para modelos constitutivos

Penna (2011) relatou que diversas vertentes da modelagem constitutiva são baseadas em estruturas teóricas capazes de representar as principais características do meio material, captando os comportamentos observados experimentalmente e propiciando um modelo mais realista. O autor destacou que, após o desenvolvimento de um grande número de modelos constitutivos elastoplásticos e de degradação elástica, foram observadas tentativas de unificação para representar, em uma mesma

estrutura teórica, as várias descrições do comportamento do material.

Neste contexto, Penna (2011) apresentou uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol *et al.* (1994), capaz de contemplar vários modelos constitutivos (elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico), formulados com uma ou múltiplas funções de carregamento, sejam estes modelos baseados em deformação, tensão, forças termodinâmicas ou variáveis de dano. Tal estrutura teórica parte de hipóteses comuns a modelos elastoplásticos e de degradação elástica para a descrição do meio material.

Inicialmente, deve-se estabelecer uma relação entre tensões e deformações, dada por:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^s \varepsilon_{kl} , \quad (2.16)$$

sendo σ_{ij} as componentes do tensor de tensões, E_{ijkl}^s o operador constitutivo secante e ε_{kl} as componentes do tensor de deformações.

Da equação anterior é obtida uma relação constitutiva tangente:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} . \quad (2.17)$$

Para tanto, são definidos uma ou mais funções de carregamento:

$$F_n = F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}), \quad (2.18)$$

em que $n = 1, 2, \dots, n$ representa o número de funções, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{p} é um vetor com variáveis internas.

O operador constitutivo tangente (equação (2.17)) é escrito como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^s + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nij} \bar{m}_{mkl} , \quad (2.19)$$

em que os tensores $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ devem ser determinados. Por notação, quando a formulação é baseada em deformação, os tensores são representados com uma barra superior. Caso contrário, trata-se da formulação baseada em tensão.

Penna (2011) destacou que as formulações baseadas em tensão e em deformação são ditas duais. Segundo o autor, as funções de carregamento, que podem ser escritas em termos de tensão ou deformação, fornecem expressões matemáticas com termos diferentes, mas, para um mesmo estado de tensão ou o correspondente estado de deformação, geram o mesmo resultado. Deste modo, é possível que as componentes tensoriais dos gradientes das formulações baseadas em tensão e deformação se relacionem e, conseqüentemente, que um modelo baseado em tensão seja escrito em termos de deformação e vice-versa.

O tensor das direções de evolução do carregamento $\bar{\mathbf{n}}$ pode ser obtido por:

$$\bar{n}_{nkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{p=\text{constante}} . \quad (2.20)$$

Já o tensor com os módulos inelásticos $\bar{\mathbf{H}}$ é dado por:

$$\bar{H}_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_m} \right|_{\sigma=\text{constante}} , \quad (2.21)$$

em que $m = 1, 2, \dots, m$ representa o número de variáveis internas.

Define-se a evolução dos processos dissipativos a partir do tensor $\bar{\mathbf{m}}$, que pode ser obtido por uma ou mais funções denotadas por Q :

$$\bar{m}_{mkl} = \left. \frac{\partial Q_m}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{p=\text{constante}} . \quad (2.22)$$

Quando não se tem uma função explícita para o potencial de dissipação em termos, neste caso, de ε_{kl} , pode-se redefinir o tensor $\bar{\mathbf{m}}$ por:

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (2.23)$$

sendo \bar{M}_{mijkl} as componentes do tensor das direções da variação do tensor de flexibilidade, obtidas pela Regra da Degradação Generalizada como:

$$\bar{M}_{mijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^s}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m*} , \quad (2.24)$$

onde \mathcal{D}_* define o conjunto de variáveis de dano, em que o símbolo $*$ indica índices de acordo com a natureza do problema (Ex. \mathcal{D} para um escalar, \mathcal{D}_i para um vetor

e \mathcal{D}_{ij} para um tensor de segunda ordem). \mathcal{M}_{m_*} é a variável que denota a direção da taxa de mudança de dano e E_{ijkl}^s são as componentes do tensor de rigidez secante.

A partir destas relações, tanto modelos baseados em tensão quanto em deformação podem ser inseridos no ambiente teórico e computacional para modelos constitutivos. Penna (2011) apresentou formulações de diversos modelos constitutivos e outros foram incluídos à biblioteca, tais como modelos de microplanos (Wolenski, 2013), o modelo elastoplástico com dano (Monteiro, 2013), modelos de armadura e aderência (Castro, 2013), etc. Embora implementados e validados no âmbito do Método dos Elementos Finitos, a formulação é geral o suficiente para que seja aplicado em outros métodos de análise.

Capítulo 3

MEFG global-local para análise fisicamente não linear

No decorrer da elaboração deste trabalho, os recursos para a análise não linear pelo MEF global-local foram implementados e validados por Monteiro *et al.* (2014) a partir da implementação da versão linear realizada por Alves (2012) e dos demais recursos para a análise não linear via MEF, conforme consta no Apêndice A. Na Seção A.6 deste apêndice encontra-se descrita a implementação do MEF global-local para a análise fisicamente não linear realizada neste trabalho.

Esse capítulo é dedicado à explanação, na Seção 3.1, dos aspectos teóricos do MEF global-local adaptado de Kim e Duarte (2015), na Seção 3.2 à descrição da formulação, na Seção 3.3 à definição do procedimento de solução, e na Seção 3.4 são feitas algumas considerações gerais sobre a análise global-local.

3.1 Aspectos teóricos do MEF global-local para análise não linear

Contextualizando o MEF global-local descrito na Seção 2.1.2, Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008) e Kim *et al.* (2010) afirmaram que alguns problemas atrelados à técnica global-local para o MEF descrita por Noor (1986) são eliminados com a utilização da solução numérica do problema local como enriquecimento da aproximação do problema global, com posterior solucionamento do problema global enriquecido, para o MEF global-local.

Dentre as abordagens global-local aplicadas ao MEEG disponíveis, optou-se por utilizar a apresentada por Kim e Duarte (2015), descrita na Seção 2.3, esquematizada na Figura 3.1. Na Etapa 3 a hipótese utilizada para a resolução é linear, mas as propriedades do material são degradadas ao longo da análise em virtude da solução do problema local.

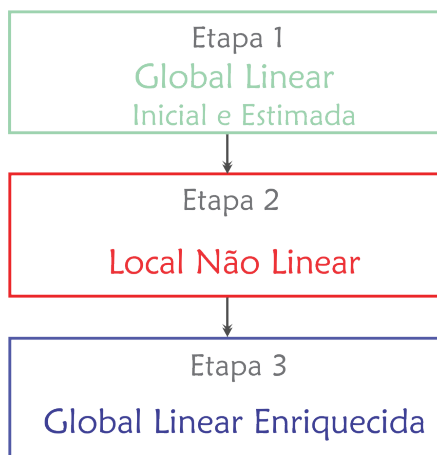


Figura 3.1: Etapas da resolução de problemas não lineares pelo MEEG global-local.

A adaptação da metodologia de Kim e Duarte (2015) e sua escolha como norteadora do desenvolvimento do arcabouço teórico e computacional deste trabalho deve-se à interessante estratégia utilizada pelos autores para dirimir o erro de discretização da solução local: a utilização iterações global-local. A solução do problema global $\mathbf{u}_{G,0}^k$ é usada como condição de contorno e o problema local é resolvido novamente, encontrando-se \mathbf{u}_L^k . A solução \mathbf{u}_G^k é mais acurada do que a estimativa $\mathbf{u}_{G,0}^k$ e essa nova solução local fornece melhores funções de enriquecimento global-local para o problema. Assim, esta mesma estratégia é adotada no desenvolvimento da tese e para a solução de problemas que envolvem a aplicação da Mecânica do Dano Contínuo, diferentemente de Kim e Duarte (2015), que tratam da propagação de trincas coesivas.

Nessa tese, a não linearidade física é modelada no problema local e apenas a degradação do material é levada à escala global e aplicada para construir a matriz de rigidez com aproximação secante. O procedimento de solução utilizado e as etapas

que o compõe têm como base a estratégia de solução *global linear inicial e estimada*, *local não linear* e *global linear enriquecida* e as formulações de Duarte e Kim (2008) e Kim *et al.* (2010) (Seção 2.1.1).

3.2 Formulação

Na análise global-local não linear realizada neste trabalho são definidos os seguintes parâmetros:

- i : número do passo local;
- j : número da iteração local;
- k : número do bloco de análise global-local (equivalente ao número do passo global);
- P_{DG} : tamanho do passo global de deslocamento;
- P_{LI} : número de passos locais iniciais; e
- P_{LA} : número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local.

Derivada da Seção 2.1.2, a formulação é reescrita a seguir, e cada bloco de análise global-local k compreende as três etapas descritas.

ETAPA 1. Problema global linear inicial e estimado

Inicialmente, para $k = 0$, é considerado um problema da Teoria da Elasticidade em que o domínio é definido por $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em \mathbb{R}^n .

O campo vetorial $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é a solução aproximada da forma fraca do problema global inicial definido nas equações (2.6), (2.7) e (2.8). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{G,0}^0) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_{G,0}^0 \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 \, ds = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 \, ds + \int_{\partial\Omega_G^u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 \, ds, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{v}_{G,0}^0$ são as funções teste.

A solução $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é obtida para a totalidade do carregamento (fator de carga $\lambda = 1$). Obtida a solução, $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é ajustado em função do tamanho do passo de deslocamento P_{DG} pré-definido para o problema global em um nó de controle adotado. Desta forma, obtém-se o fator de carga λ^0 definido por:

$$\lambda^0 = \frac{P_{DG}}{u_{G,0,DC}^0}, \quad (3.2)$$

em que $u_{G,0,DC}^0$ é uma componente de deslocamento do nó de controle adotado.

Para valores de $k \geq 1$, a solução $\mathbf{u}_{G,0}^k$ é estimada por meio da seguinte expressão, adaptada de Kim e Duarte (2015):

$$\mathbf{u}_{G,0}^k = \frac{(k+1)}{k} \mathbf{u}_{G,0}^{k-1}. \quad (3.3)$$

ETAPA 2. Problema local não linear

Um problema de valor de contorno é resolvido de forma incremental-iterativa no domínio local Ω_L , que contém as nuvens nas quais ocorre a danificação do material. A equação (3.4) define este problema, no qual calcula-se \mathbf{u}_L^k , e tem condições de contorno oriundas da solução *global inicial* da Etapa 1 $\mathbf{u}_{G,0}^k$.

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L^k) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_L^k \cdot \mathbf{v}_L ds = \int_{\partial\Omega_L \cap \Omega_G^z} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L^k ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} [\mathbf{t}(\mathbf{u}_G^k) + \eta \mathbf{u}_G^k] \cdot \mathbf{v}_L^k ds. \quad (3.4)$$

Nesse problema, um modelo constitutivo adequado para representar a propagação da degradação do meio é empregado. A solução é encontrada aplicando-se, no caso desse trabalho, o algoritmo de solução de Newton-Raphson padrão.

Na Etapa 2 de cada bloco de análise global-local é necessário resolver o problema desde o início do carregamento, até o nível de carga do bloco. Desta forma, para que se represente adequadamente o problema, aumenta-se a quantidade de passos locais resolvidos a cada bloco global-local. Assim, o número de passos locais totais

(N_{PL}) resolvidos em cada bloco k é dado pela soma dos passos locais iniciais com os passos locais adicionais, multiplicados por $(k + 1)$:

$$N_{PL} = P_{LI} + [(k + 1)P_{LA}]. \quad (3.5)$$

ETAPA 3. Problema global linear enriquecido

Na Etapa 3 é considerado um problema de valor de contorno idêntico ao definido nas equações (2.6), (2.7) e (2.8). A relação constitutiva é dada por $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}$, sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações e \mathbf{C}^s é a aproximação secante do tensor constitutivo adotado no equilíbrio do modelo global e obtido considerando a danificação ocorrida no problema local (mapeada para o problema global).

Nesta etapa, a solução do problema local \mathbf{u}_L^k (equação (3.4)) é empregada como base extrínseca de enriquecimento do problema global. Deste modo, reescreve-se a equação (2.3) como:

$$\{\phi_J\}(x) = \mathcal{N}_J(x) \times \mathbf{u}_L^k, \quad (3.6)$$

em que o índice J refere-se aos pontos nodais, \mathcal{N}_J é a função PU empregada no problema global inicial e \mathbf{u}_L^k é a solução do problema local, denominada agora de função de enriquecimento global-local.

O problema global enriquecido é definido por:

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^k) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_G^k \cdot \mathbf{v}_G^k ds = \int_{\partial\Omega_G^t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^k ds + \int_{\partial\Omega_G^v} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_G^k ds, \quad (3.7)$$

A aproximação $\mathbf{u}_G^k(x)$ é dada pela equação (3.7), onde as funções de aproximação contém o enriquecimento utilizado no problema global inicial e a solução do problema local.

A solução \mathbf{u}_G^k é obtida para a totalidade do carregamento (fator de carga $\lambda = 1$). Após a obtenção da solução, \mathbf{u}_G^k é ajustado em função do tamanho do passo de deslocamento P_{DG} pré-definido para o problema global. Desta forma, é obtido o fator de carga λ_E^k definido como:

$$\lambda_E^k = \frac{(k+1)P_{DG}}{u_{G,DC}^k}, \quad (3.8)$$

em que $u_{G,DC}^k$ é uma componente de deslocamento do nó de controle.

O ponto de coordenadas $\lambda_E^k \cdot u_G^k$ e λ_E^k é o ponto correspondente ao bloco de análise global-local k na trajetória de equilíbrio do problema.

3.3 Procedimento de solução do MEEG global-local para análise não linear

Conforme definido na Seção 3.2, na Etapa 1 do procedimento global-local proposto, o modelo constitutivo adotado é linear elástico. No bloco de análise global-local $k = 0$, encontra-se o campo vetorial $\mathbf{u}_{G,0}^0$ (equação (3.1)), que é multiplicado por λ^0 (equação (3.2)) e então transferido como condição de contorno para a Etapa 2. Na Etapa 2 é definida uma região local na qual ocorre o processo dissipativo, conhecida *a priori* (seja através de trabalhos disponíveis na literatura, experiência anterior do usuário, análise prévia com outros modelos de análise, etc.). Nessa etapa é considerado um modelo constitutivo não linear e sua solução é obtida com o emprego do algoritmo de Newton-Raphson padrão, sendo utilizada a aproximação secante do tensor constitutivo. Após a resolução dos passos i do processo de solução do problema local não linear, obtém-se a solução \mathbf{u}_L^0 (equação (3.4)) utilizada na construção das funções de enriquecimento global-local na Etapa 3. Nesta etapa, \mathbf{u}_G^0 (equação (3.7)) é encontrado utilizando-se uma análise linear com a matriz constitutiva secante. Finalmente, o vetor de deslocamentos \mathbf{u}_G^0 é multiplicado por λ_E^0 (equação (3.8)).

Para os blocos de análise global-local $k \geq 1$, encontra-se a solução global estimada $\mathbf{u}_{G,0}^k$ através da equação (3.3). Essa solução é transferida como condição de contorno para a Etapa 2 e o processo de solução prossegue conforme descrito para $k = 0$. Após a resolução dos passos i do processo de solução do problema local não linear, obtém-se a solução \mathbf{u}_L^k (equação (3.4)) utilizada na construção das funções de

enriquecimento global-local na Etapa 3. Na Etapa 3 é calculado \mathbf{u}_G^k (equação (3.7)) utilizando-se uma análise linear com a matriz constitutiva secante. Por fim, o vetor de deslocamentos \mathbf{u}_G^k é multiplicado por λ_E^k (equação (3.8)).

A Figura 3.2 apresenta o algoritmo de solução da abordagem proposta. A variável k representa o número bloco de análise global-local, i refere-se ao número do passo local e j representa o número da iteração local.

```

início
  execute();
  para cada bloco de análise global-local  $k$  faça
    Resolver Etapa 1:
    se  $k=0$  então
      Resolver o sistema de equação linear e obter  $\mathbf{u}_{G,0}^0$ 
    senão
      Obter a solução estimada  $\mathbf{u}_{G,0}^k = \frac{(k+1)}{k} \mathbf{u}_G^{k-1}$ 
    fim
    Transferir condição de contorno da Etapa 1 para Etapa 2;
    Resolver Etapa 2:
    para cada passo local  $i=i+1$  faça
      repita
        Montar matriz de rigidez  $[K]_{j-1}^i$  ;
        Obter os deslocamentos incrementais  $\{\Delta U^P\}_j^i$  e  $\{\Delta U^Q\}_j^i$  ;
        Obter o incremento de fator de carga  $\Delta \lambda_j^i$  ;
        Atualizar o vetor de deslocamentos nodais
         $\{U\}_j^i = \{U\}_{j-1}^i + \Delta \lambda_j^i \{\Delta U^P\}_j^i + \{\Delta U^Q\}_j^i$ ;
        Atualizar o fator de carga  $\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \Delta \lambda_j^i$ ;
        Obter o vetor de forças internas nodais equivalentes  $\{F\}_j^i$ ;
        Atualizar o vetor de forças residuais  $\{Q\}_j^i = \lambda_j^i \{P\} - \{F\}_j^i$ ;
      até convergência;
    fim
    Resolver Etapa 3:
    Enriquecer o problema global com  $\mathbf{u}_L^k$  calculado na Etapa 2;
    Resolver o sistema de equação linear e calcular  $\mathbf{u}_G^k$ ;
  fim
fim

```

Figura 3.2: Algoritmo de solução da abordagem global-local não linear.

O funcionamento da análise fisicamente não linear via MEEG global-local é detalhado por intermédio de um exemplo fictício em que são utilizados 10 passos globais. As Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 auxiliam no acompanhamento do procedimento descrito,

ilustrando a obtenção de pontos da trajetória de equilíbrio de um dado grau de liberdade do problema para os quatro primeiros blocos de análise global-local.

Para $k = 0$ (Figura 3.3) resolve-se, na Etapa 1, o problema global inicial para obtenção do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_{G,0}^0$, considerando a atuação da carga total ($\lambda = 1$), dando origem ao ponto A na Figura 3.3(a). O ponto A possui coordenadas $u_{G,0}^0$ e 1. Em seguida, uma vez obtido λ^0 , define-se $\lambda^0 \cdot \mathbf{u}_{G,0}^0$, dando origem ao ponto B da Figura 3.3(b). O ponto B possui coordenadas $\lambda^0 \cdot u_{G,0}^0$ e λ^0 . Prossegue-se então a resolução da Etapa 2, a análise fisicamente não linear do problema local, considerando-se $\lambda^0 \cdot \mathbf{u}_{G,0}^0$ como condição de contorno. Finalmente, resolve-se o problema global enriquecido com a solução oriunda da Etapa 2, obtendo-se a solução \mathbf{u}_G^0 , dando origem ao ponto C da trajetória de equilíbrio. O ponto C possui coordenadas u_G^0 e 1 (Figura 3.3(c)). Em seguida, uma vez obtido λ_E^0 , define-se $\lambda_E^0 \cdot \mathbf{u}_{G,0}^0$, dando origem ao ponto D da Figura 3.3(d). O ponto D é o primeiro ponto da trajetória de equilíbrio e possui coordenadas $\lambda_E^0 \cdot u_{G,E}^0$ e λ^0 .

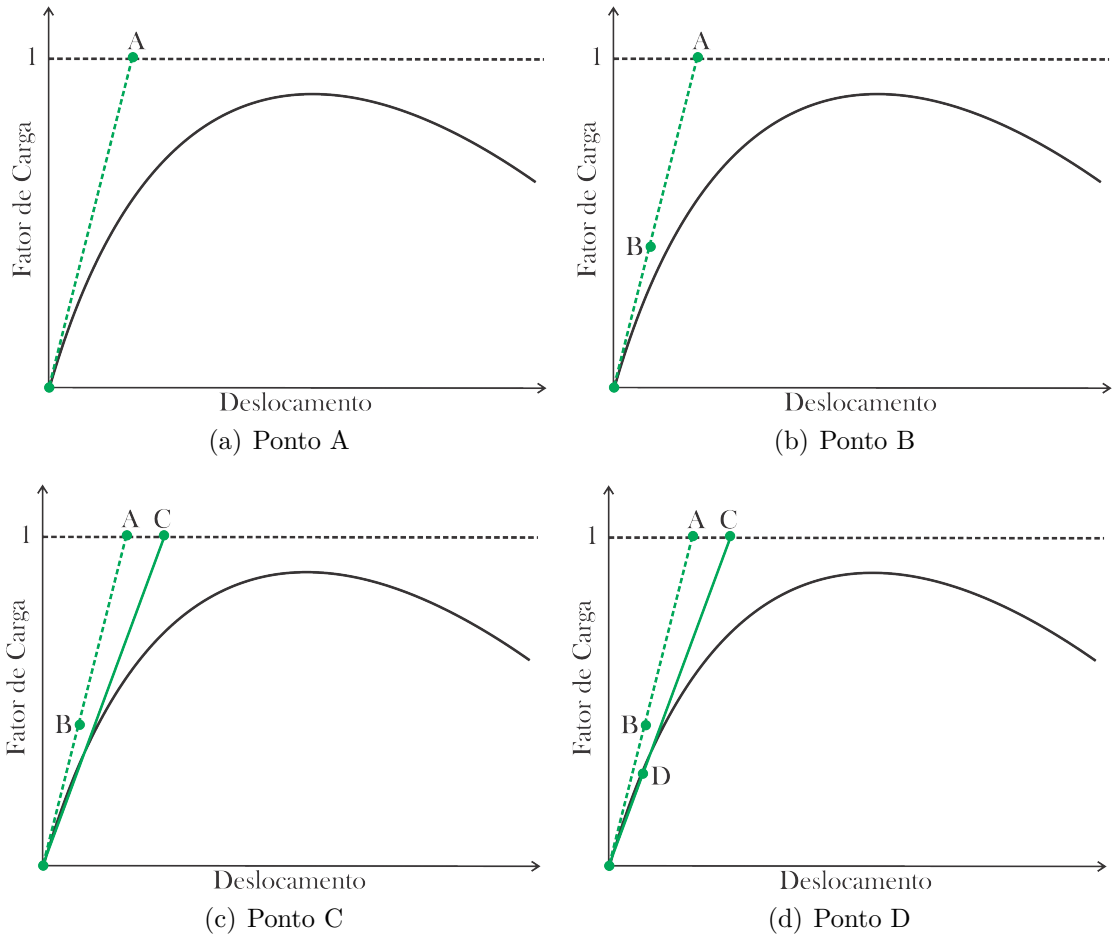


Figura 3.3: Problema global: bloco $k = 0$ - obtenção do ponto de equilíbrio **D**.

Em seguida, para $k = 1$ (Figura 3.4), na Etapa 1 resolve-se o problema global estimado para obtenção do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_{G,0}^1$ por meio da equação (3.3), dando origem ao ponto E na Figura 3.4(a). O ponto E possui coordenadas $u_{G,0}^1$ e $2\lambda_E^0$. Em seguida, $u_{G,0}^1$ é usado como condição de contorno da Etapa 2. Prossegue-se então a resolução da Etapa 2. Finalmente, resolve-se o problema global enriquecido com a solução oriunda da Etapa 2, obtendo-se a solução \mathbf{u}_G^1 , dando origem ao ponto F da trajetória de equilíbrio (Figura 3.4(b)), de coordenadas u_G^1 e 1. Em seguida, uma vez obtido λ_E^1 , define-se $\lambda_E^1 \cdot \mathbf{u}_{G,0}^1$, dando origem ao ponto G da Figura 3.4(c). O ponto G é o segundo ponto da trajetória de equilíbrio e possui coordenadas $\lambda_E^1 \cdot u_{G,0}^1$ e λ_E^1 .

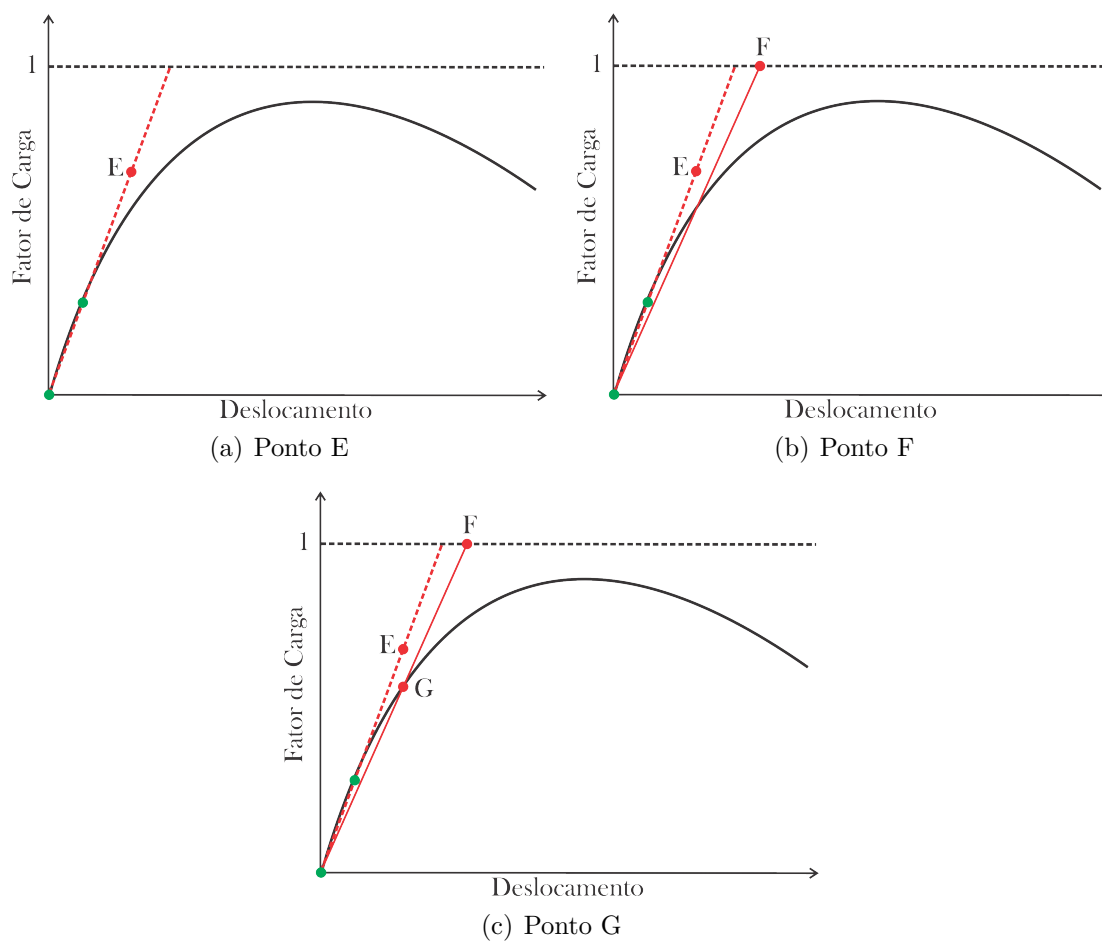


Figura 3.4: Problema global: bloco $k = 1$ - obtenção do ponto de equilíbrio **G**.

Para os blocos de análise $k = 2$ e $k = 3$, são obtidos, respectivamente, o terceiro (Figura 3.5(a)) e o quarto (Figura 3.5(b)) pontos da trajetória de equilíbrio, conforme funcionamento do bloco $k = 1$.

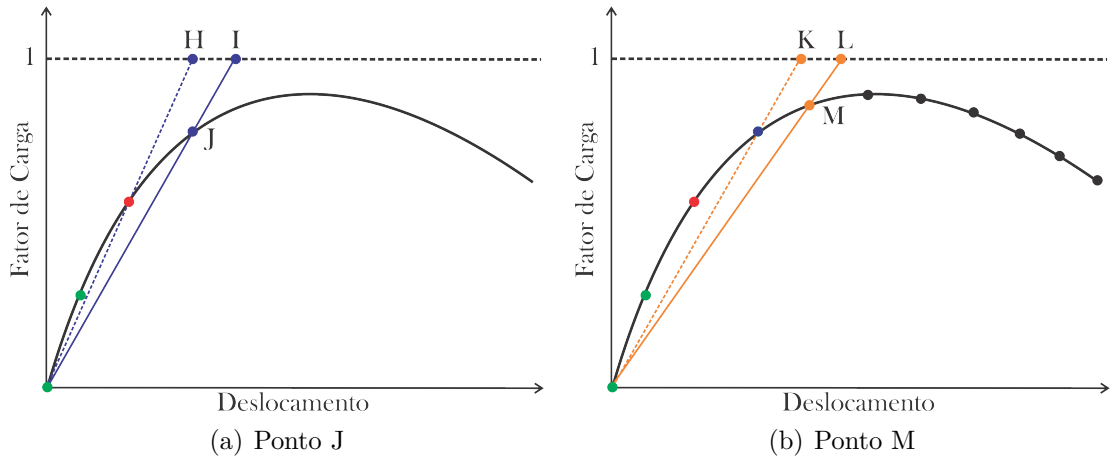


Figura 3.5: Problema global: blocos $k = 2$ e $k = 3$ - obtenção dos pontos de equilíbrio **J** e **M**.

A Tabela 3.1 apresenta as coordenadas de cada um dos pontos indicados nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.5.

Tabela 3.1: Coordenadas dos pontos da trajetória de equilíbrio.

Bloco k	Etapa	Ponto	Deslocamento	Fator de carga
0	1	A	$u_{G,0}^0$	1
0	1	B	$\lambda^0 \cdot u_{G,0}^0$	λ^0
0	3	C	u_G^0	1
0	3	D	$\lambda_E^0 \cdot u_G^0$	λ_E^0
1	1	E	$u_{G,0}^1$	$2\lambda_E^0$
1	3	F	u_G^1	1
1	3	G	$\lambda_E^1 \cdot u_G^1$	λ_E^1
2	1	H	$u_{G,0}^2$	$\frac{3}{2}\lambda_E^1$
2	3	I	u_G^2	1
2	3	J	$\lambda_E^2 \cdot u_G^2$	λ_E^2
3	1	K	$u_{G,0}^3$	$\frac{4}{3}\lambda_E^2$
3	3	L	u_G^3	1
3	3	M	$\lambda_E^3 \cdot u_G^3$	λ_E^3

A Figura 3.6, uma expansão do algoritmo da Figura 3.2, detalha o encadeamento das etapas de solução descritas nessa seção. O diagrama de atividades contido na Etapa 2 mostra os principais passos do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990).

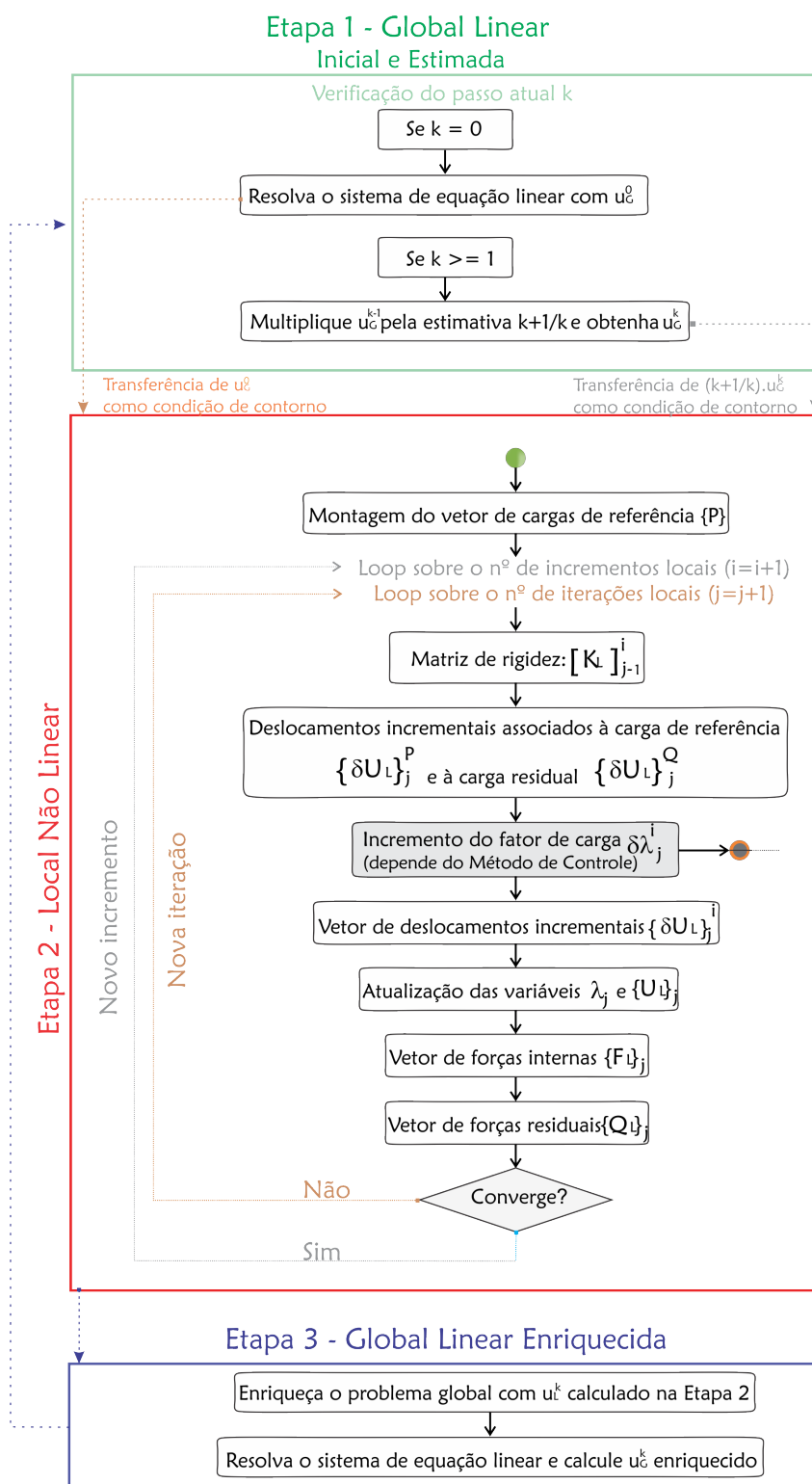


Figura 3.6: Diagrama de atividades do MEEG global-local para análise não linear.

3.4 Considerações sobre a análise global-local

A seguir são feitas algumas considerações sobre a análise global-local.

3.4.1 Escolha do Tipo de Condição de Contorno

Kim *et al.* (2010) estudaram os efeitos dos diferentes tipos de condições de contorno (*Neumann* - força, *Dirichlet* - deslocamento e *Cauchy* - força e deslocamento) no desempenho do MEEG global-local para problemas de Mecânica da Fratura Elástica Linear em três dimensões. Para os problemas analisados e para a variação de valores para η (equação (3.4)) avaliada, o erro relativo em termos de norma de energia foi menor para as condições de contorno de *Cauchy* do que para as de *Neumann* e *Dirichlet*, segundo os autores. Comparativamente, o erro relativo foi menor para as condições de *Neumann* do que nas de *Dirichlet*. Todos os tipos de condições de contorno apresentaram resultados aceitáveis para os problemas analisados.

Para os casos estudados por Kim *et al.* (2010), as condições de *Neumann* forneceram bons resultados. Entretanto, a utilização exclusiva destas condições pode inviabilizar a solução do problema local, caso a solicitação imposta não esteja devidamente equilibrada. A tensão é uma grandeza derivada e frequentemente mal avaliada em modelos do MEF ou MEEG. Desta forma, valores muito pequenos de rigidez η devem ser evitados quando condições de *Cauchy* forem empregadas, já que $\eta = 0$ equivale a condições de *Neumann*.

Kim e Duarte (2015) aplicaram as condições de contorno em termos de deslocamentos (*Dirichlet*) para problemas não lineares de fratura coesiva e neste trabalho essas mesmas condições de contorno são utilizadas.

3.4.2 Qualidade da transferência de informação do domínio global para o local e do local para o global enriquecido

Os trabalhos de Gupta *et al.* (2012a) e Duarte e Kim (2008), dentre outros, apresentam algumas sugestões para melhoria da qualidade da solução do problema

global-local. No caso de necessidade de aperfeiçoar a qualidade da informação transferida do modelo global inicial para o modelo local, tem-se as seguintes opções:

- aumentar a ordem dos elementos no problema global;
- usar enriquecimento polinomial nos nós do problema global.

No caso de necessidade de aprimorar a qualidade da informação transferida do modelo local para o global, tem-se as seguintes opções:

- enriquecimento ou refinamento da discretização do problema local;
- aumento do tamanho do domínio local (uso de uma zona *buffer*) (Gupta *et al.*, 2012b);
- aumento do número de nós enriquecidos pela solução local no problema global.

Capítulo 4

Simulações Numéricas

Este capítulo compreende as simulações numéricas realizadas com o MEF \bar{G} e MEF \bar{G} global-local para análise fisicamente não linear de estruturas para ilustrar e avaliar o desempenho da abordagem proposta. O arcabouço de modelos constitutivos de Penna (2011), disponível no INSANE, é fundamental aos objetivos desse capítulo, visto que são aplicados os Modelos de Fissuração Distribuída, de Dano Escalar de Mazars (1984) e de Microplanos de Leukart e Ramm (2006), explanados nos Apêndices C, D e E, respectivamente. Em síntese, as simulações foram assim agrupadas:

- Seção 4.1: MEF \bar{G} para análise fisicamente não linear - esta seção introdutória compreende exemplos desenvolvidos na primeira etapa de implementações necessárias para o MEF \bar{G} global-local. Assim, demonstra-se brevemente a generalidade da implementação realizada por Monteiro *et al.* (2014) para diferentes tipos e números de elementos finitos e tipos de função de enriquecimento polinomial;
- Seção 4.2: MEF \bar{G} global-local para análise fisicamente não linear - nesta seção, os recursos implementados para a abordagem proposta, apresentada no Capítulo 3, são investigados através da comparação das respostas obtidas com resultados experimentais do painel em L de Winkler *et al.* (2004), da flexão em três pontos de Petersson (1981) e do cisalhamento em quatro pontos de

Arrea e Ingraffea (1982).

Ao longo do texto, adotam-se as seguintes nomenclaturas e representações gráficas referentes às funções de enriquecimento, apresentadas no Apêndice B, aplicadas aos exemplos numéricos:

- P0: função de forma do MEF (nós não representados);
- P1: função de enriquecimento polinomial de grau um (nós de cor preta);
- P2: função de enriquecimento polinomial de grau dois (nós de cor verde); e
- GL: função de enriquecimento global-local (nós de cor vermelha).

4.1 MEFG para análise fisicamente não linear

Esta seção apresenta dois conjuntos de simulações numéricas:

- Seção 4.1.1: Viga em balanço; e
- Seção 4.1.2: Flexão em três pontos - Petersson (1981)

Do primeiro, pretende-se extrair resultados capazes de atestar a generalidade da implementação do MEFG para análise fisicamente não linear realizada por Monteiro *et al.* (2014) para diferentes tipos e números de elementos finitos e tipos de função de enriquecimento polinomial. No segundo conjunto, o aporte dos resultados do primeiro permite avaliar a efetividade da implementação através da comparação dos resultados experimentais de Petersson (1981) para a flexão em três pontos com as respostas obtidas nas simulações realizadas.

4.1.1 Viga em balanço

A viga representada na Figura 4.1 é submetida à força cortante P em sua extremidade direita. As seguintes análises numéricas são realizadas, com a aplicação do Modelo de Fissuração Distribuída (as aproximações de MEFG e MEF descritas a seguir são capazes de reproduzir qualquer polinômio de terceiro grau):

- MEFG (L2-P2-1): um elemento de linha $L2$ (dois nós) enriquecido pela função $P2$ (60 graus de liberdade);
- MEFG (L2-P2-2): dois elementos de linha $L2$ (três nós) enriquecidos pela função $P2$ (90 graus de liberdade);
- MEFG (L2-P2-3): três elementos de linha $L2$ (quatro nós) enriquecidos pela função $P2$ (120 graus de liberdade);
- MEFG (L3-P1-1): um elemento de linha $L3$ (três nós) enriquecido pela função $P1$ (54 graus de liberdade);
- MEFG (L3-P1-2): dois elementos de linha $L3$ (cinco nós) enriquecidos pela função $P1$ (90 graus de liberdade);
- MEFG (L3-P1-3): três elementos de linha $L3$ (sete nós) enriquecidos pela função $P1$; (126 graus de liberdade);
- MEF(L4-P0-1): um elemento de linha $L4$ (quatro nós) sem função de enriquecimento ($P0$) (24 graus de liberdade);
- MEF(L4-P0-2): dois elementos de linha $L4$ (sete nós) sem função de enriquecimento ($P0$) (42 graus de liberdade);
- MEF(L4-P0-3): três elementos de linha $L4$ (dez nós) sem função de enriquecimento ($P0$) (60 graus de liberdade).

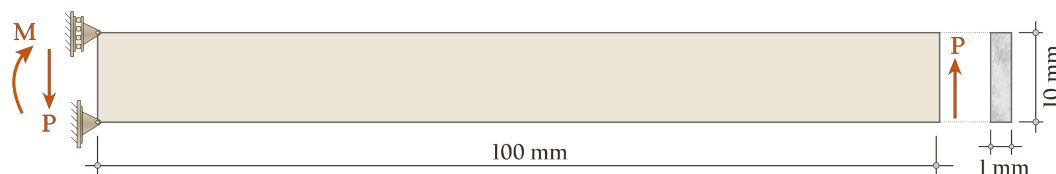


Figura 4.1: Geometria, carregamento e condições de contorno da viga. O momento fletor $M = P \times 100$ e a força de cisalhamento P na extremidade esquerda da viga são reações de apoio.

O comportamento não linear do problema é definido pelo Modelo de Fissuração Distribuída com lei tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986) na tração e na compressão e é considerado o modelo de viga de Timoshenko. As propriedades do concreto adotado são apresentadas na Tabela 4.1, cujos parâmetros são definidos como: F_c é a resistência à compressão, F_t é a resistência à tração, ε_c é a deformação relacionada à máxima tensão de compressão e ε_t é a deformação relacionada à máxima tensão de tração.

Tabela 4.1: Parâmetros adotados.

Módulo de elasticidade: $E = 25000$ MPa		coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$	
Parâmetros da lei de Carreira e Chu (1985, 1986)			
$F_c = 20,0$ MPa	$F_t = 2,0$ MPa	$\varepsilon_t = 0,00016$	$\varepsilon_c = 0,0016$

Nas simulações numéricas, foi adotada a viga com 10 mm de altura, e o método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga de 0,009, tolerância para a convergência de $1 \times 10^{-4} (\times 100\%) = 0,010\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais e carga de referência de $P = 20,0$ MN.

As trajetórias de equilíbrio para as simulações são apresentadas na Figura 4.2. Um refinamento h simples foi realizado e a partir das informações obtidas nota-se que o fator de carga máximo decresce à medida que a malha é refinada para todas as combinações, indicando uma tendência de localização induzida pela malha. As análises realizadas com dois e três elementos indicam melhores resultados no trecho pós-pico do que a malha com um elemento, captando o amolecimento do concreto. Ademais, respostas semelhantes são reproduzidas pelas simulações com MEEG e MEF e este fato aparenta estar associado ao mesmo espaço polinomial empregado

nas nove análises numéricas.

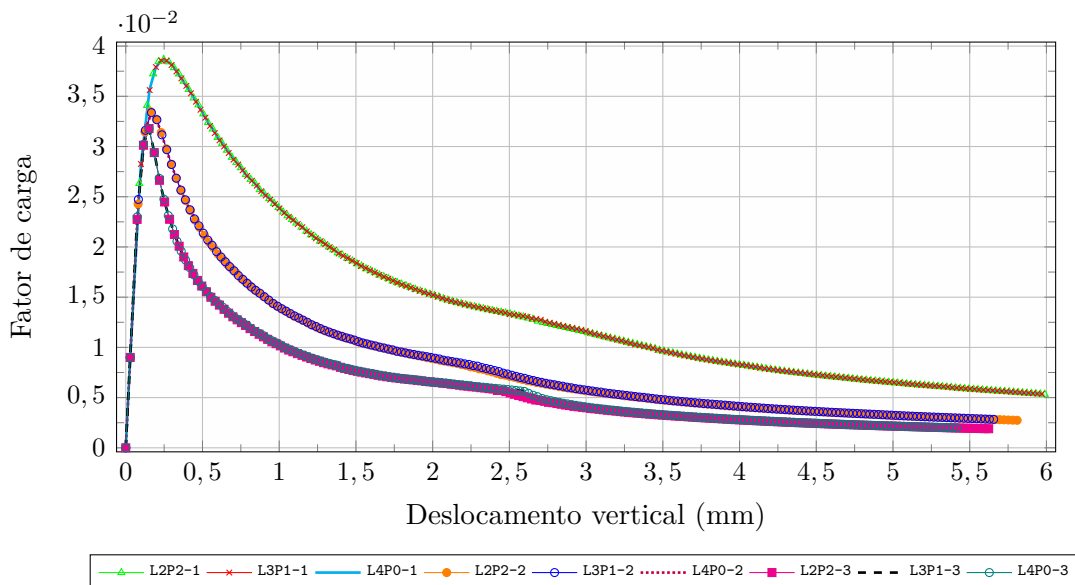


Figura 4.2: Trajetórias de equilíbrio para os elementos de viga de Timoshenko.

O mesmo exemplo apresentado na Figura 4.1 (o momento fletor e a força de cisalhamento na extremidade esquerda da viga são aplicadas como tensões neste problema) é analisada considerando Estado Plano de Tensões e o Modelo de Dano Escalar de Mazars (1984) (descrito no Apêndice D). A Figura 4.3 apresenta as malhas com elementos quadrilaterais (com um, dois e quatro elementos) e elementos triangulares (com dois elementos) utilizadas.

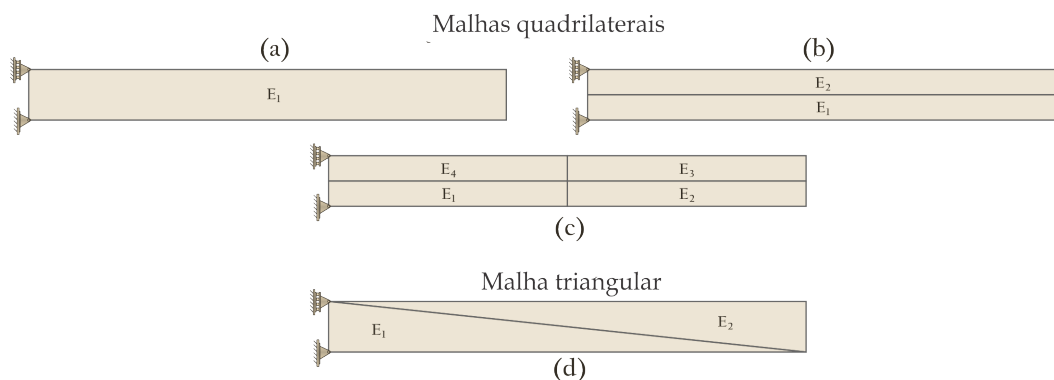


Figura 4.3: Malhas quadrilaterais e triangulares.

As simulações numéricas são definidas pelas combinações de diferentes tipos de elementos, níveis de refinamento das malhas e graus das funções de enriquecimento. Para as malhas com elementos quadrilaterais, o elemento cúbico Q_{12} é utilizado

somente para a malha Figura 4.3 (a). O resultado obtido para a análise com MEF é comparado aos alcançados com a aplicação do MEFG para três refinamentos h (Figura 4.3 (a), (b) e (c)). Adicionalmente, o elemento cúbico $T10$ é aplicado na análise com MEF em uma malha de elementos triangulares (Figura 4.3 (d)). As seguintes simulações numéricas são efetuadas, todas capazes de reproduzir qualquer polinômio cúbico:

- MEF (Q12-P0-1): um elemento quadrilateral $Q12$ (12 nós) sem função de enriquecimento (P0) (24 graus de liberdade);
- MEFG (Q8-P1-1): um elemento quadrilateral $Q8$ (oito nós) enriquecido pela função P1 (48 graus de liberdade);
- MEFG (Q8-P1-2): dois elementos quadrilaterais $Q8$ (13 nós) enriquecidos pela função P1 (78 graus de liberdade);
- MEFG (Q8-P1-4): quatro elementos quadrilaterais $Q8$ (21 nós) enriquecidos pela função P1 (126 graus de liberdade);
- MEFG (Q4-P2-1): um elemento quadrilateral $Q4$ (quatro nós) enriquecido pela função P2 (40 graus de liberdade);
- MEFG (Q4-P2-2): dois elementos quadrilaterais $Q4$ (seis nós) enriquecidos pela função P2 (60 graus de liberdade);
- MEFG (Q4-P2-4): quatro elementos quadrilaterais $Q4$ (nove nós) enriquecidos pela função P2 (90 graus de liberdade);
- MEF (T10-P0-2): dois elementos triangulares $T10$ (16 nós) sem função de enriquecimento (P0) (32 graus de liberdade);
- MEFG (T3-P2-2): dois elementos triangulares $T3$ (quatro nós) enriquecidos pela função P2 (40 graus de liberdade);

- MEFG (T6-P1-2): dois elementos triangulares $T6$ (nove nós) enriquecidos pela função P1 (54 graus de liberdade).

Nas simulações numéricas foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga inicial de 0,002, tolerância para a convergência de $1 \times 10^{-4} (\times 100\%) = 0,010\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais e cargas de referência de $P = 20,0$ MN e $M = 120,0$ MN.mm. A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros materiais empregados. Os parâmetros da lei de evolução de dano $A_{t,c}$ e $B_{t,c}$ são usados para determinar a forma da curva pós-pico. κ_0 é a deformação equivalente a partir da qual o processo de dano se inicia.

Tabela 4.2: Parâmetros adotados (Mazars, 1984).

Módulo de elasticidade: $E = 29200$ MPa coeficiente de Poisson: $\nu = 0,20$				
Parâmetros do Modelo de Dano Escalar de Mazars (1984)				
$A_t = 0,995$	$B_t = 8000$	$\kappa_0 = 0,00007$	$A_c = 0,655$	$B_c = 1050$

A Figura 4.4 evidencia as trajetórias de equilíbrio para os elementos quadriláteros. É aparente que quanto mais refinada é a malha, menos rígidas tornam-se as trajetórias de equilíbrio. Q12-P0 e Q4-P2 possuem o mesmo espaço de aproximação, enquanto Q8-P1 tem um termo a mais (x^2y^2), produzindo uma trajetória distinta daquela obtida com as outras duas discretizações. De maneira geral, para todas as trajetórias de equilíbrio, há a tendência de convergência em relação à carga limite e ao comportamento do ramo ascendente.

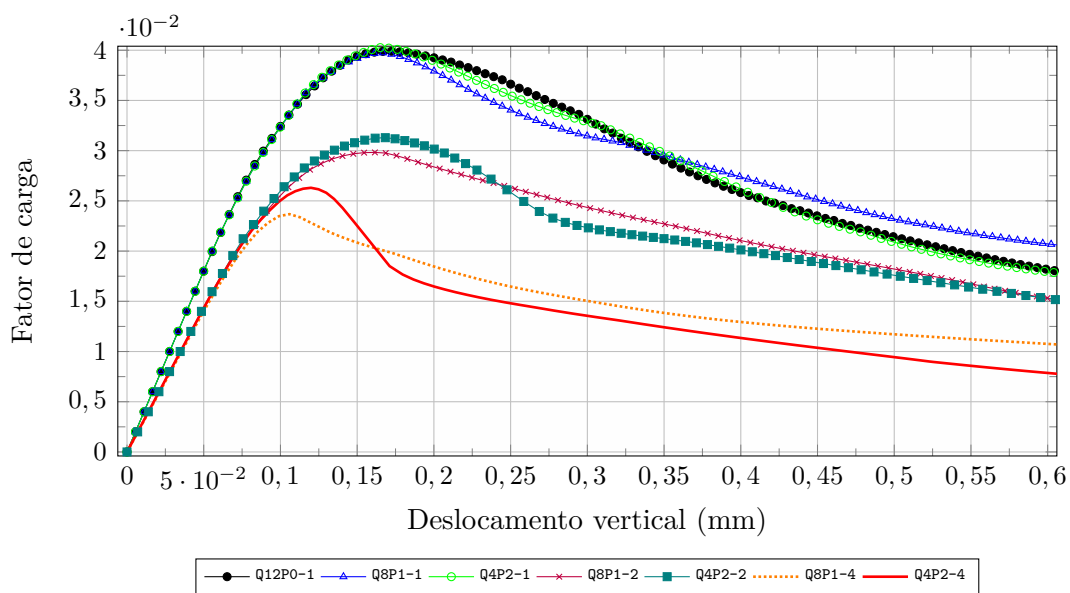


Figura 4.4: Trajetórias de equilíbrio para os elementos quadrilaterais.

Na Figura 4.5 verificam-se as trajetórias de equilíbrio para os elementos triangulares. Infere-se que o comportamento das trajetórias de equilíbrio de T10-P0-2, T6-P1-2 e T3-P2-2 são equivalentes, uma vez que o espaço de aproximação é sempre o mesmo.

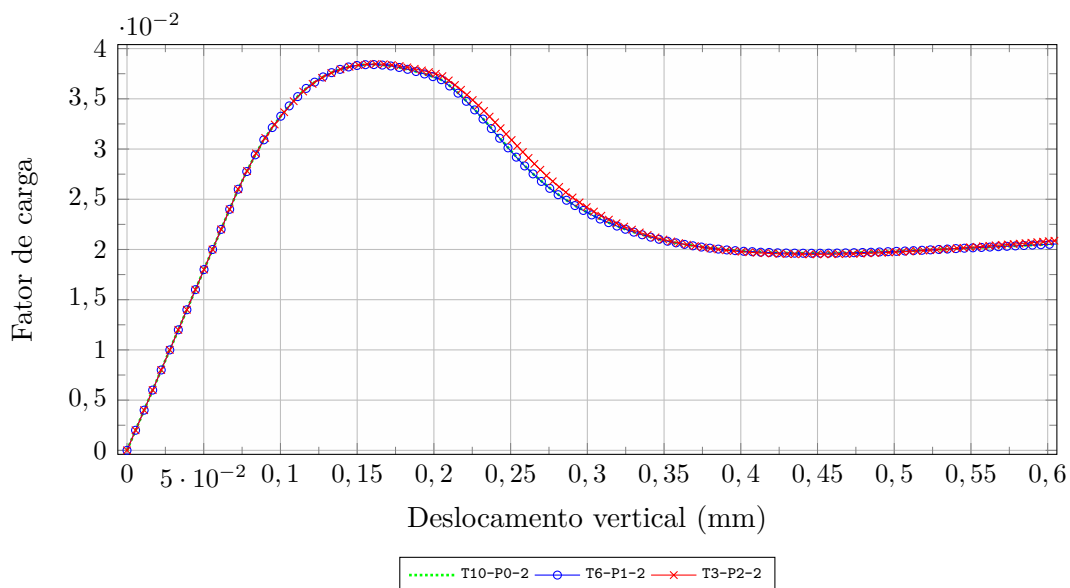


Figura 4.5: Trajetórias de equilíbrio para os elementos triangulares.

4.1.2 Flexão em três pontos - Petersson (1981)

Petersson (1981) analisou experimentalmente vigas de concreto submetidas à flexão em três pontos e os resultados experimentais são comparados às respostas numéricas obtidas aqui via MEF e MEFG e o Modelo de Microplanos de Leukart e Ramm (2006), com lei de dano exponencial (Apêndice E).

Os parâmetros materiais são listados na Tabela 4.3 (parametrização feita em Wolenski (2013)), em que α^{mic} é a degradação máxima permitida para o material, β^{mic} é o parâmetro que governa a forma da curva pós-pico e κ_0^{mic} é o valor limite de iniciação do dano para a lei de dano exponencial (todos são parâmetros adimensionais no modelo constitutivo).

Tabela 4.3: Parâmetros obtidos experimentalmente por Petersson (1981).

Módulo de elasticidade/coeficiente de Poisson	$E = 30000 \text{ MPa}/\nu = 0,20$
Tensão de escoamento uniaxial	$\sigma_t = 3,30 \text{ MPa}$
Energia de fratura	$G_f = 0,130 \text{ N/mm}$
Parâmetros da lei de dano (Wolenski, 2013)	
Exponencial	$\alpha^{mic} = 0,960 \quad \beta^{mic} = 500 \quad \kappa_0^{mic} = 0,0002$

A Figura 4.6 detalha a geometria da viga e a malha de 115 elementos quadriláteros de quatro nós. As seguintes simulações foram realizadas:

- MEFG(Q4-P1+P2): funções de enriquecimento P1 e P2 nos nós destacados na figura, com 384 graus de liberdade;
- MEF (Q4-P0): sem enriquecimento aplicado, com 260 graus de liberdade.

A análise foi realizada em condições de Estado Plano de Tensão e com a adoção de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga inicial de 0,02, tolerância para a convergência de $1 \times 10^{-4} (\times 100\%) = 0,010\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais e carga de referência de $P = 800,0 \text{ N}$.

A Figura 4.7 apresenta os resultados para o deslocamento vertical do nó representado pelo ponto A (ponto de máximo deslocamento destacado na Figura 4.6)

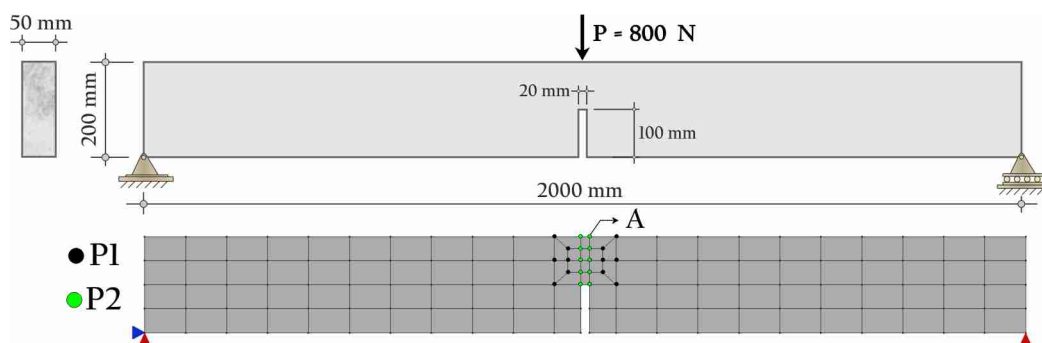


Figura 4.6: Geometria e malha de elementos finitos.

juntamente com os resultados experimentais de Petersson (1981). Na análise realizada com MEF, a trajetória de equilíbrio apresenta instabilidade devido à discretização grosseira adotada. Já as trajetórias de equilíbrio obtidas com o MEFG Q4-P1+P2 apresentaram melhor concordância com os resultados de Petersson (1981) em virtude da estratégia de enriquecimento aprimorar a solução nas proximidades da região onde os fenômenos não lineares acontecem.

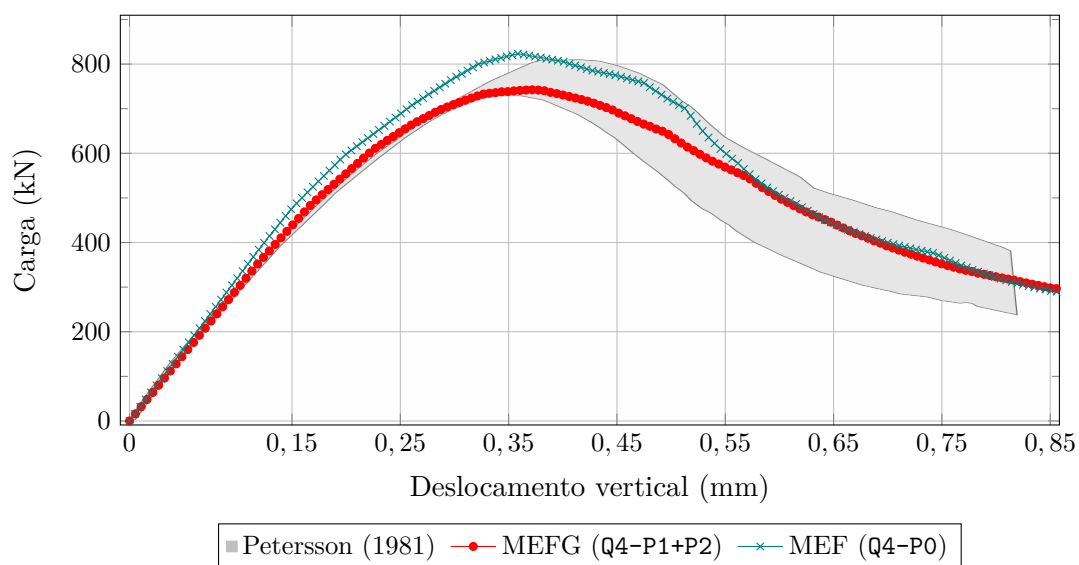


Figura 4.7: Trajetórias de equilíbrio para a flexão em três pontos.

4.2 MEEG global-local para análise fisicamente não linear

Nesta seção, a estratégia proposta para o MEEG global-local em análise fisicamente não linear, apresentada no Capítulo 3, é investigada por intermédio de simulações numéricas comparadas a ensaios experimentais em estruturas de concreto disponíveis na literatura. São, para este fim, definidos três conjuntos de análises numéricas:

- Seção 4.2.1: Painel em L - Winkler *et al.* (2004) - nessa seção, avaliam-se a influência de parâmetros numéricos da abordagem proposta e o efeito do tamanho do problema local e do aumento do número de nós globais enriquecidos com a solução numérica local, de acordo com a seguinte organização:
 - Seção 4.2.1.1: Influência do número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local e do tamanho do passo global - objetivou-se averiguar a influência do número de passos locais, variáveis ou não, e passos globais, sobre as trajetórias de equilíbrio obtidas;
 - Seção 4.2.1.2: Efeito do tamanho do problema local e do número de nós globais enriquecidos - pretendeu-se avaliar o impacto da ampliação do domínio local e do número de nós enriquecidos com a solução numérica local;
- Seção 4.2.2: Flexão em três pontos - Petersson (1981) - o intuito dessa seção foi demonstrar que os recursos implementados para análise não linear via MEEG global-local comportam adequadamente a aplicação de modelos constitutivos disponíveis na biblioteca do INSANE (Penna, 2011), sendo avaliados os subsequentes:
 - Seção 4.2.2.1: Modelo de Fissuração Distribuída; e

- Seção 4.2.2.2: Modelo de Microplanos, juntamente com quatro leis de dano;
- Seção 4.2.3: Cisalhamento em quatro pontos - Arrea e Ingraffea (1982) - a finalidade dessa seção foi verificar as respostas obtidas com MEFG convencional e averiguar o comportamento das respostas obtidas para uma mesma malha global, na presença e ausência de enriquecimento polinomial, quando há o refinamento da malha local, conforme as seguintes seções:
 - Seção 4.2.3.1: MEFG convencional; e
 - Seção 4.2.3.2: MEFG global-local não linear.

4.2.1 Painel em L - Winkler *et al.* (2004)

Esta seção compreende simulações numéricas de um painel de concreto utilizando-se o Modelo de Fissuração Distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986), disponível na biblioteca de modelos constitutivos do INSANE. Para avaliar o desempenho da estratégia proposta para o MEFG global-local na análise não linear de meios parcialmente frágeis, os resultados numéricos obtidos são comparados aos resultados experimentais de Winkler *et al.* (2004) e de análises que utilizam o MEFG em sua versão convencional. Com focos distintos, mas complementares, esta seção contém dois conjuntos de análises:

- Seção 4.2.1.1: Influência do número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local e do tamanho do passo global - objetivou-se averiguar a influência dos parâmetros numéricos da abordagem proposta sobre as trajetórias de equilíbrio obtidas; e
- Seção 4.2.1.2: Efeito do tamanho do problema local e do número de nós globais enriquecidos - avaliou-se o impacto da ampliação do domínio local e do número de nós enriquecidos com a solução local nas respostas obtidas.

As análises efetuadas em ambas as seções possuem características comuns que são reunidas nesta descrição inicial, enquanto suas especificações encontram-se organizadas nas respectivas seções.

Fundamentada nos ensaios experimentais em painéis de concreto em forma de L realizados por Winkler *et al.* (2004), que também efetuaram simulações numéricas com um Modelo de Fissuração Distribuída, a Figura 4.8 esquematiza a geometria, o carregamento e as condições de contorno desses ensaios. Considera-se o carregamento distribuído $q = 28,0 \text{ N/mm}$ e a espessura do painel de 100 mm. Nesta figura, destaca-se o ponto A que, para as malhas globais das simulações numéricas, corresponde ao nó cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio. O ponto B na malha local é adotado como nó de controle direto de deslocamento na análise não linear pelo método de controle de deslocamentos.

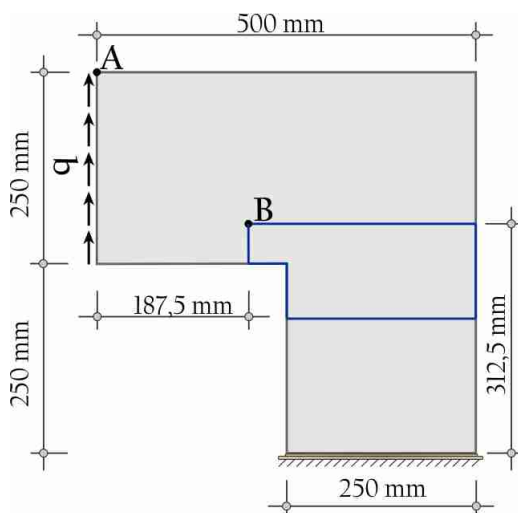


Figura 4.8: Geometria, condições de contorno e de carregamento do painel em L.

O Modelo de Fissuração Distribuída baseia-se no monitoramento da deterioração das propriedades físicas do material, sendo o processo de evolução das fissuras descrito pelo decaimento gradual de tensões com aumento de deformações. Em relação aos materiais adotados, no problema global o material é inicialmente elástico linear e seus parâmetros são definidos na Tabela 4.4. No problema local, bem como nas

análises com MEEG convencional, é considerado um Modelo de Fissuração Distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986) (Apêndice C) e Estado Plano de Tensão. As propriedades do concreto obtidas por Winkler *et al.* (2004) e os parâmetros adotados no Modelo de Fissuração Distribuída, especificados com base nos valores experimentais, também são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Parâmetros materiais do painel em L.

Propriedades do concreto de Winkler <i>et al.</i> (2004)	
Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,18$
Módulo de elasticidade	$E = 25850,0 \text{ MPa}$
Resistência à compressão	$F_c = 31,0 \text{ MPa}$
Resistência à tração	$F_t = 2,70 \text{ MPa}$
Parâmetros da lei de Carreira e Chu (1985, 1986)	
Resistência à compressão	$F_c = 31,0 \text{ MPa}$
Resistência à tração	$F_t = 2,70 \text{ MPa}$
Deformação na compressão	$\varepsilon_c = 0,002$
Deformação na tração	$\varepsilon_t = 0,0001925$
Fator de retenção ao cisalhamento	$\beta_r = 0,0$

As análises não lineares do problema local e com o MEEG convencional são realizadas com controle direto de deslocamento (Batoz e Dhatt, 1979), aproximação secante do tensor constitutivo e uma tolerância para a convergência de $1 \times 10^{-5} (\times 100\%) = 0,0010\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais. Conforme citado anteriormente, o deslocamento vertical do ponto B da Figura 4.8 é o grau de liberdade de controle nos modelos locais. Nesses modelos são definidos o parâmetro de penalidade $\eta = 1 \times 10^{10}$, condições de contorno de Dirichlet, e 4×4 pontos de Gauss por elemento (mesmo número de pontos de Gauss do modelo global).

4.2.1.1 Influência do número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local e do tamanho do passo global

Nas análises realizadas nesta seção, objetivou-se averiguar a influência dos seguintes parâmetros numéricos sobre as trajetórias de equilíbrio obtidas: número de

passos locais, variáveis ou não, passos adicionados e passos globais.

Para tanto, definiram-se as malhas dos modelos global e local da Figura 4.9, destacando-se a região da malha global referente ao problema local. A malha global possui 192 elementos quadriláteros de quatro nós e enriqueceram-se 29 nós com a função global-local e a malha local é composta por 36 elementos finitos quadriláteros de quatro nós. Como as análises dessa seção são preliminares no sentido de se compreender a influência de parâmetros numéricos da abordagem proposta, não houve o refinamento da malha local, que contém, portanto, o mesmo número de elementos da região que a representa na malha global. Busca-se, aqui, isolar o efeito do processo de solução do problema não linear na escala local desconsiderando a melhor descrição do comportamento que o refinamento do modelo local proporcionaria.

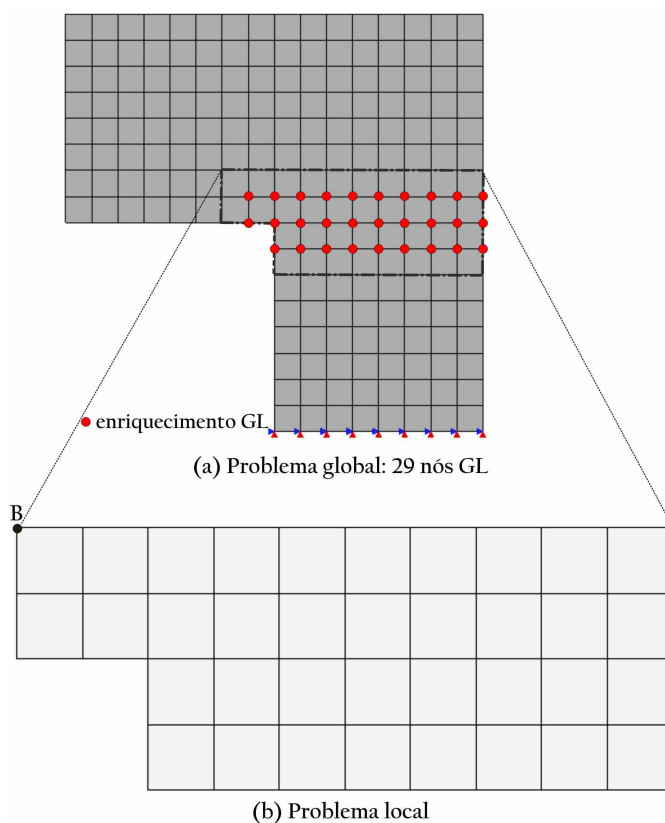


Figura 4.9: Painel em L: problemas global e local.

A primeira investigação concerne à influência do número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local nas respostas obtidas. Esse parâmetro variou em 0, 5, 10, 15 e 20, enquanto os seguintes parâmetros foram fixados:

- 25 passos globais;
- 10 passos locais iniciais;
- passo global de deslocamento de 0,04 mm; e
- passo de deslocamento do ponto B na direção vertical definido a partir do número de passos locais em cada bloco de análise.

As trajetórias de equilíbrio da Figura 4.10 referem-se à variação do número de passos adicionados a cada passo local do bloco de análise global-local, juntamente com os resultados experimentais de Winkler *et al.* (2004).

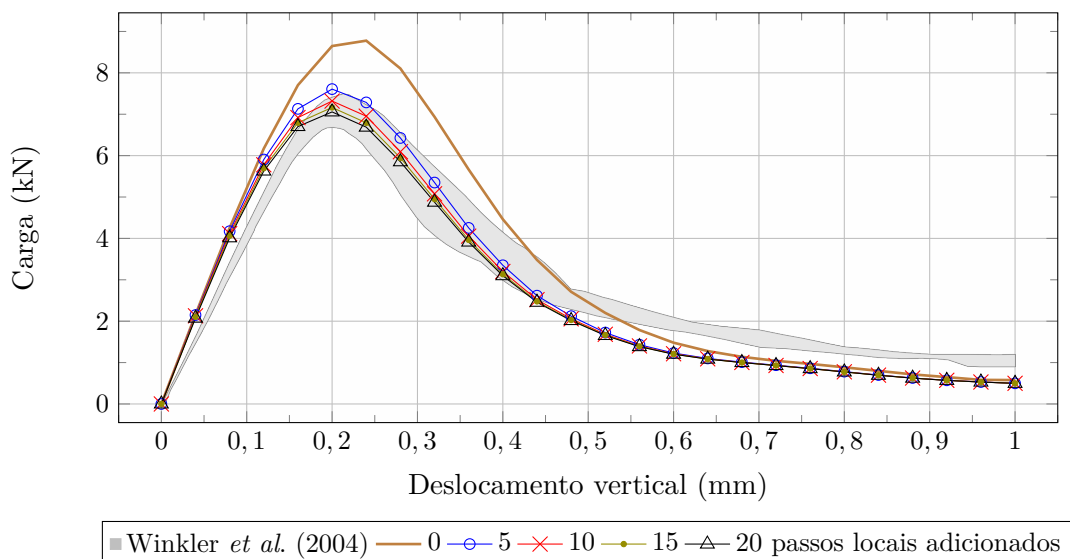


Figura 4.10: Variação do número de passos adicionados a cada passo local do bloco de análise global-local para o passo global de deslocamento de 0,04 mm.

Na Figura 4.10, excetuando-se a situação de nenhum passo adicional em cada bloco de análise, os demais valores adicionados produziram trajetórias muito próximas, especialmente aquelas de 10, 15 e 20 passos locais adicionados. Como o número de passos locais encarece a análise, pode-se indicar, portanto, a utilização de 10 passos locais adicionais, sem prejuízo para representação do comportamento global do problema.

No segundo conjunto de análise, são novamente variados os passos locais adicionados, mas agora com o dobro de passos globais. Tem-se, portanto, um passo

global de deslocamento de 0,02 mm, metade daquele empregado anteriormente. Em resumo, são empregados os seguintes parâmetros:

- 50 passos globais;
- 10 passos locais iniciais;
- passo global de deslocamento de 0,02 mm; e
- método de controle direto de deslocamento do ponto B na direção vertical.

As trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 4.11 relacionam-se à variação do número de passos adicionados a cada bloco de análise global-local, juntamente com os resultados experimentais de Winkler *et al.* (2004).

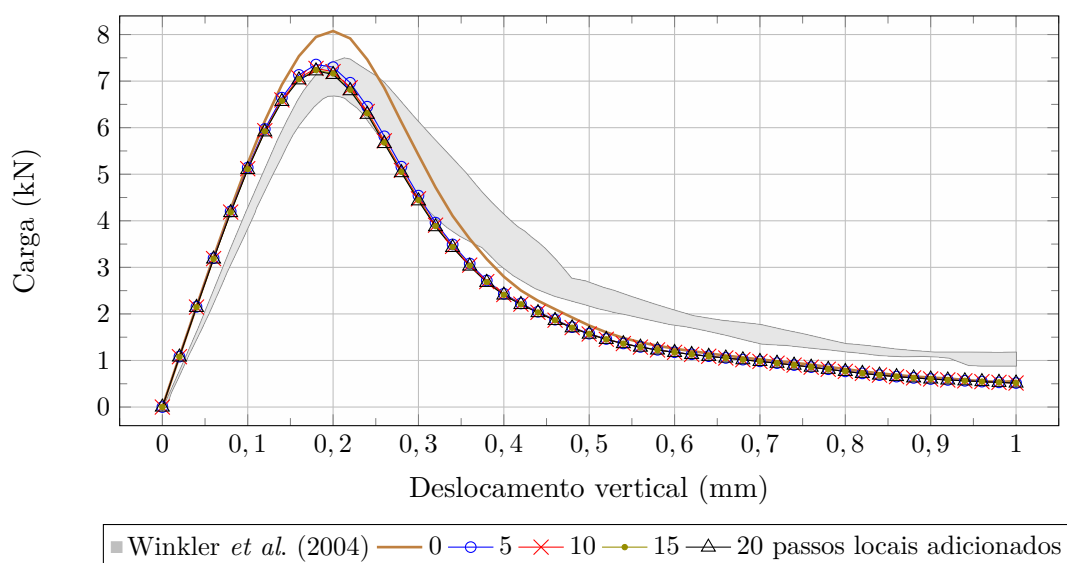


Figura 4.11: Variação do número de passos adicionados a cada passo local do bloco de análise global-local para o passo global de deslocamento de 0,02 mm.

Na trajetória de equilíbrio denominada 0, observa-se que não acrescentar passos locais, mantendo-se 10 passos locais em cada bloco de análise global-local, conduziu a uma carga de pico aproximadamente 25% superior ao limite de carga experimental de Winkler *et al.* (2004). Observa-se, novamente, a convergência das trajetórias de equilíbrio com 5, 10, 15 e 20 passos adicionados.

Para efeitos comparativos, apresentam-se os resultados das análises das Figuras 4.11 e 4.10, agrupando-os em função do número de passos locais adicionados. Resulta na Figura 4.12 a reunião das trajetórias de equilíbrio para os passos globais de deslocamento de 0,04 mm e 0,02 mm. Observando o efeito do passo de deslocamento global no comportamento da trajetória de equilíbrio, verifica-se que para 0,04 mm, ela mostrou-se mais instável com relação aos passos locais empregados. De fato, especialmente quando nenhum passo local é adicionado, e em menor escala para os demais casos, existe um maior distanciamento entre as curvas quando o maior passo global de deslocamento (0,04 mm) é utilizado.

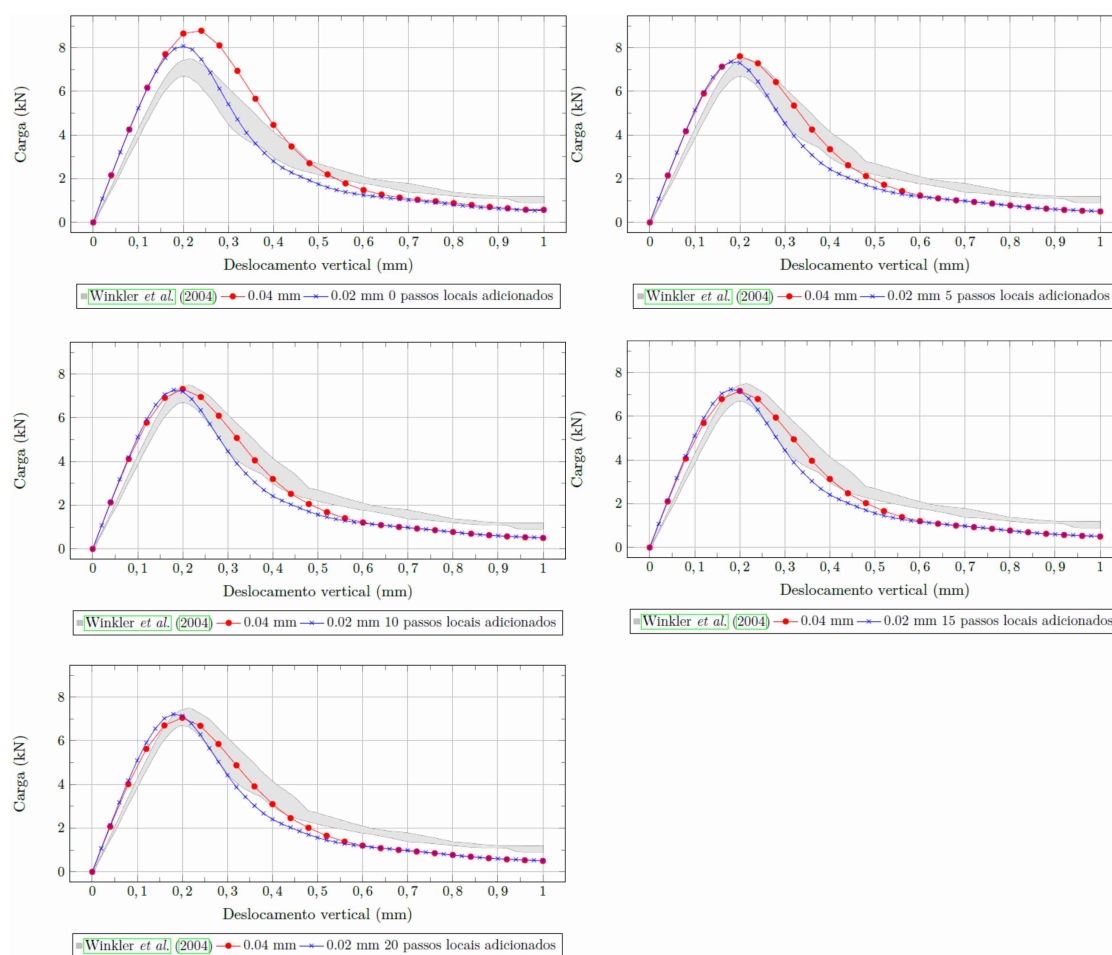


Figura 4.12: Comparação entre as trajetórias de equilíbrio com passos globais de deslocamento de 0,04 e 0,02 mm

4.2.1.2 Efeito da dimensão do problema local e do número de nós globais enriquecidos

O aporte fornecido pelas análises realizadas na Seção 4.2.1.1 permite aprofundar as investigações sobre o MEFG global-local para análise não linear de meios parcialmente frágeis quanto ao impacto na resposta global da ampliação do domínio local e do número de nós enriquecidos com a função global-local e da incorporação de funções de enriquecimento.

Essa investigação foi encorajada por algumas constatações de Duarte e Kim (2008) e Gupta *et al.* (2012b). Nestes trabalhos, aplicados em meios de comportamento linear elástico, identifica-se que a qualidade da solução global transferida para o contorno do problema local pode sim impactar na solução do problema. Este é um aspecto bastante importante, em se considerando o interesse em se ter uma malha global razoavelmente grosseira para justificar uma análise global-local com a escala local apresentando uma malha bastante refinada. Neste contexto, é sugerido, por exemplo, o enriquecimento polinomial da aproximação do problema global inicial e o aumento do tamanho do domínio local interferindo-se na chamada zona *buffer*. Tal região corresponderia à camada de elementos mais externa da malha global que fazem parte da área identificada com o problema local, mas sobre os quais não há enriquecimento com as soluções numéricas locais. Dessas, apenas a última estratégia é analisada nas próximas seções, para um contexto diferente dos artigos supracitados, sendo aplicada aqui para problemas de comportamento não linear induzido pela degradação do meio contínuo.

As análises efetuadas nesta seção possuem características comuns que são reunidas nesta descrição inicial, enquanto os detalhes encontram-se organizados em cada subseção. A definição dos parâmetros numéricos fundamentou-se nas observações realizadas na Seção 4.2.1.1, e a seguinte combinação de parâmetros foi considerada adequada:

- 50 passos globais;

- 10 passos locais iniciais;
- 10 passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local;
- passo global de deslocamento de 0,02 mm; e
- método de controle direto de deslocamento do ponto B na direção vertical.

As malhas dos problemas global e local foram definidas de acordo com a Figura 4.13. A malha global possui 192 elementos quadrilaterais de quatro nós e observa-se que há três domínios na malha global que equivalem a três problemas locais, sendo as malhas locais refinadas. Os problemas locais são especificados por:

- Problema local 1 (azul): abrange 36 elementos do domínio global, cujo refinamento gera 125 elementos quadrilaterais de quatro nós, com 142 nós e 284 graus de liberdade;
- Problema local 2 (amarelo): abrange 57 elementos do domínio global, cujo refinamento gera 146 elementos quadrilaterais de quatro nós, com 166 nós e 332 graus de liberdade; e
- Problema local 3 (rosa): abrange 80 elementos do domínio global, cujo refinamento gera 169 elementos quadrilaterais de quatro nós, com 192 nós e 384 graus de liberdade.

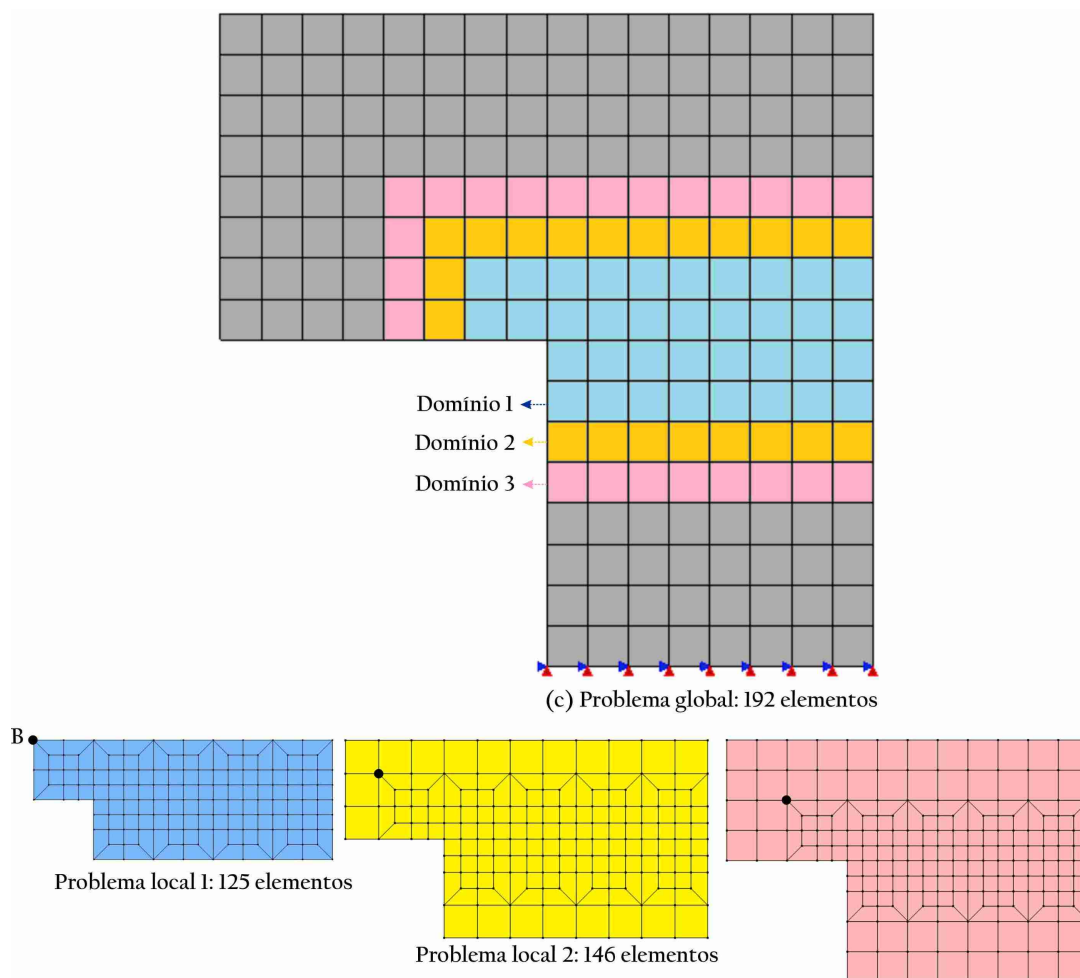


Figura 4.13: Problema global e três problemas locais.

Em Winkler *et al.* (2004) é apresentada a região na qual ocorre a danificação do painel, com iniciação da fissura na junção angular do painel e sua propagação horizontal por quase toda a peça. Por esse motivo, os nós globais escolhidos para serem enriquecidos encontram-se nessa região e aqui foram variados o número de nós enriquecidos com a solução local e o tamanho do domínio local para avaliar a influência nas respostas obtidas. Antes, porém, de se iniciarem as análises com a abordagem proposta, é feita uma verificação das respostas obtidas com a aplicação do MEEG convencional (Seção 4.2.1.2.1). Assim, tem-se o seguinte conjunto de análises:

- Seção 4.2.1.2.1 MEEG convencional com P0 e P1: em cada exemplo, todos os nós não possuem enriquecimento polinomial, o que se denota por P0, e todos

os nós são enriquecidos com a função polinomial P1, respectivamente;

- Seção 4.2.1.2.2 MEFG global-local com GL em 9 nós: 9 nós são enriquecidos com a função global-local;
- Seção 4.2.1.2.3 MEFG global-local com GL em 18 nós: 18 nós são enriquecidos com a função global-local;
- Seção 4.2.1.2.4 MEFG global-local com GL em 29 nós: 29 nós são enriquecidos com a função global-local;
- Seção 4.2.1.2.5 MEFG global-local com GL em 51 nós do domínio local 2; e
- Seção 4.2.1.2.6 MEFG global-local com GL em 75 nós do domínio local 3.

4.2.1.2.1 MEFG convencional

É importante a averiguação do comportamento do problema quando solucionado com MEFG convencional para que se evidencie o aperfeiçoamento da solução via o MEFG global-local para análise fisicamente não linear. Assim como feito por Kim e Duarte (2015), a malha utilizada para a aplicação do MEFG convencional possui o mesmo nível de refinamento, em sua região central, da malha local ilustrada na Figura 4.13. A malha apresentada na Figura 4.14 possui 281 elementos e 316 nós e é a mesma para as análises (a), em que não é aplicado enriquecimento polinomial, denominado de MEFG-P0 (632 graus de liberdade), e (b), na qual todos os nós são enriquecidos com a função polinomial de grau um (exceto os nós dos apoios), denominado de MEFG-P1 (3756 graus de liberdade).

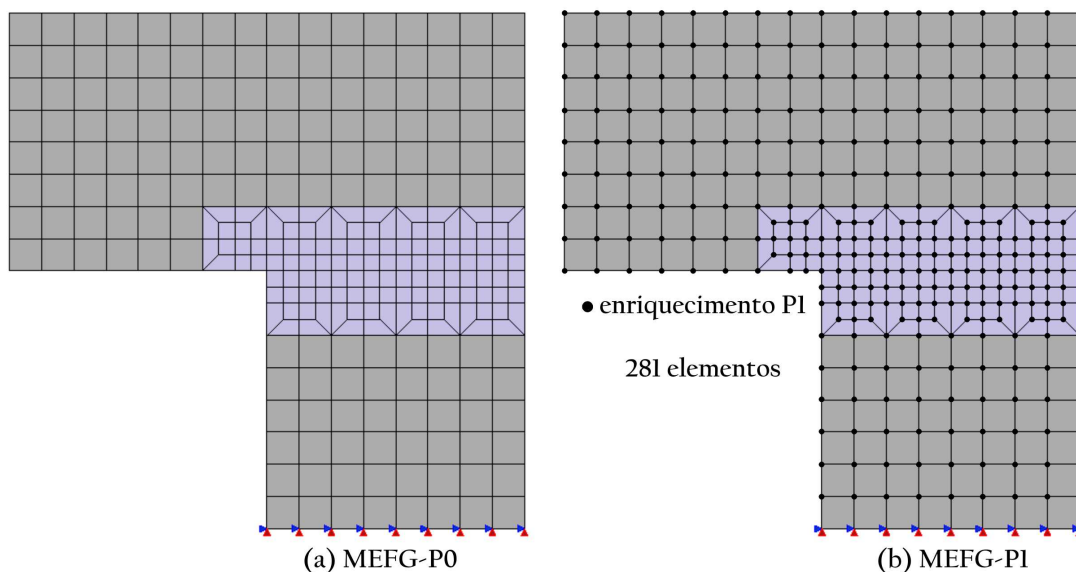


Figura 4.14: Malha avaliada com MEFG convencional.

Duas análises são realizadas com o MEFG convencional:

- MEFG-P0: nenhum nó é enriquecido com funções polinomiais e referente à Figura 4.14(a); e
- MEFG-P1: os nós indicados na Figura 4.14(b) são enriquecidos com P1.

Para manter a equivalência com o número de passos locais no último bloco de análise global-local (bloco $k = 50$ com 510 passos locais) das simulações com MEFG global-local não linear, os seguintes parâmetros numéricos são adotados:

- 500 passos;
- método de controle direto de deslocamento do ponto A (Figura 4.8) na direção vertical, com passos de deslocamento de 0,002 mm.

As trajetórias de equilíbrio das análises com MEFG convencional são apresentadas nos gráficos da Figura 4.15. O comportamento das duas trajetórias de equilíbrio, cujas cargas de pico mantiveram-se abaixo do valor limite dos resultados experimentais, sugere que houve localização de deformações. A presença de enriquecimento

polinomial conduziu à maior redução da carga de pico da trajetória MEFG-P1. Dessas observações, infere-se que o refinamento da malha global na região de desenvolvimento de dano e a solução com o MEFG convencional são incapazes de captar o comportamento do painel em L, e que a aplicação de enriquecimento polinomial uniformemente distribuído para todo o domínio afasta ainda mais as respostas obtidas do espectro experimental de Winkler *et al.* (2004).

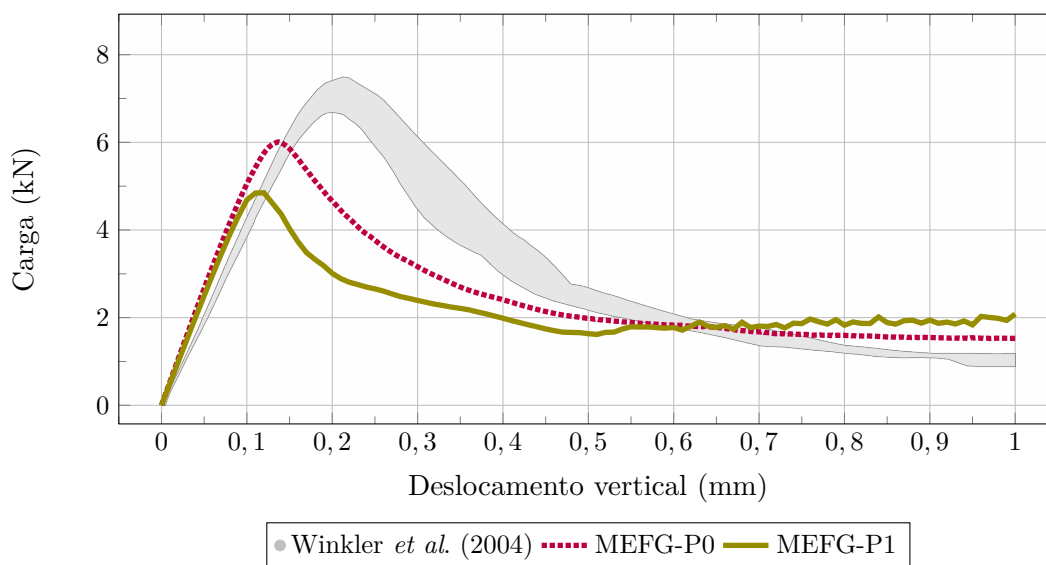


Figura 4.15: Trajetórias de equilíbrio com aplicação do MEFG convencional.

4.2.1.2.2 MEEG global-local com GL em nove nós

A Figura 4.16 detalha o enriquecimento adotado para a análise tratada nesta seção. Os nove nós destacados são enriquecidos com a solução numérica local. Para esta primeira verificação, foi escolhida a linha de nós que parte da junção angular do painel até a sua extremidade.

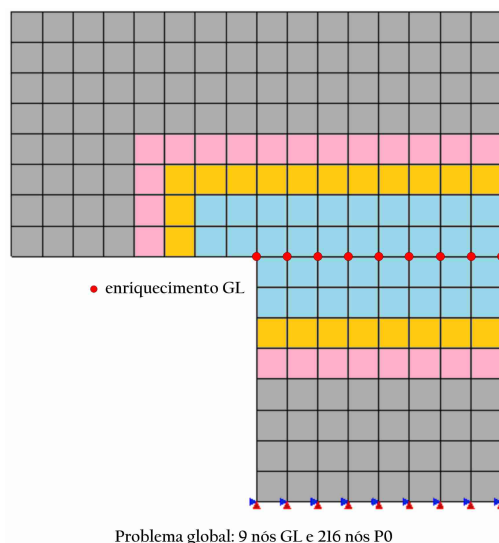


Figura 4.16: MEEG global-local com GL em 9 nós.

As três análises executadas para cada problema local definido na Figura 4.13 geraram as trajetórias de equilíbrio do ponto A (Figura 4.8) apresentadas na Figura 4.17. Nota-se que a aplicação da abordagem global-local proposta aprimorou as respostas obtidas quanto à aproximação das cargas de pico do limite de carga experimental e à descrição adequada da trajetória de equilíbrio, em relação aos resultados obtidos com o MEEG convencional.

É observada a convergência das três trajetórias e que, portanto, o aumento do tamanho do domínio local não afetou significativamente as respostas obtidas. O domínio local 3 alcançou a carga de pico de 7,2252 kN, apenas 1% e 0,35% superior às cargas de pico dos domínios 1 e 2, respectivamente, todas referentes ao deslocamento vertical do ponto A de 0,18 mm. Assim, os nove globais enriquecidos com a solução local foram suficientes para a obtenção de respostas bastante próximas do espectro experimental, demonstrando a eficiência da estratégia proposta.

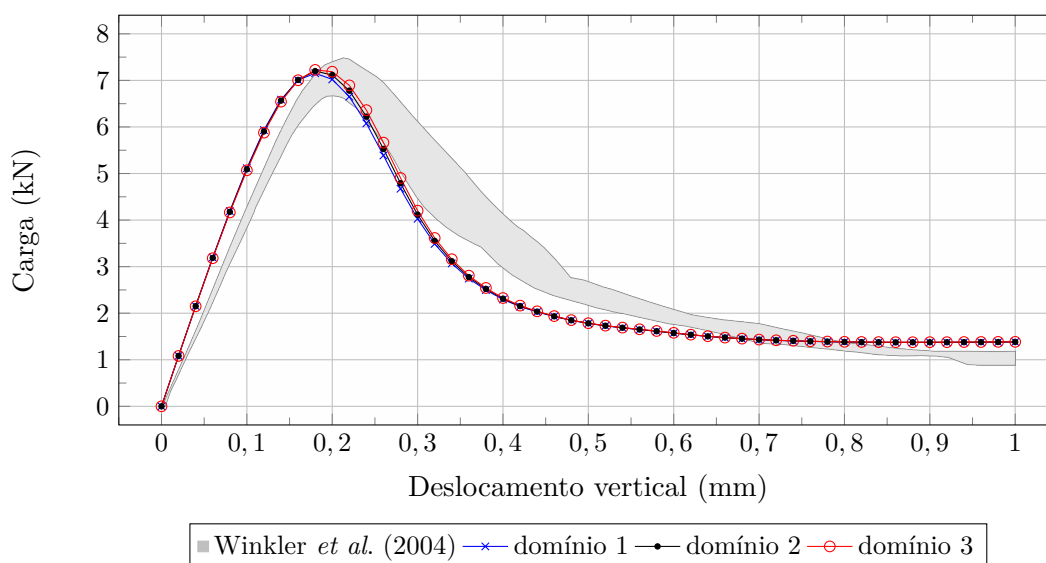


Figura 4.17: Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 9 nós.

Para se avaliar a propagação do dano ao longo da análise foram escolhidos os pontos (a), (b), (c), (d), (e) e (f) da trajetória de equilíbrio apresentada na Figura 4.17, cujas informações bloco de análise global-local k , número de passos locais i de cada bloco de análise global-local, fator de carga f_{carga} e deslocamento vertical dy do ponto A são descritas na Tabela 4.5. A Figura 4.18 indica a localização desses pontos.

Tabela 4.5: Informações dos pontos observados.

Ponto	k	i	dy	f_{carga1}	f_{carga2}	f_{carga3}
(a)	1	20	0,02 mm	0,1549	0,1548	0,1547
(b)	9	100	0,18 mm	1,0219	1,0286	1,0322
(c)	13	140	0,26 mm	0,7697	0,7897	0,8092
(d)	17	180	0,34 mm	0,4385	0,4452	0,4514
(e)	25	260	0,50 mm	0,2544	0,2547	0,2550
(f)	50	510	1,0 mm	0,1974	0,1976	0,1978

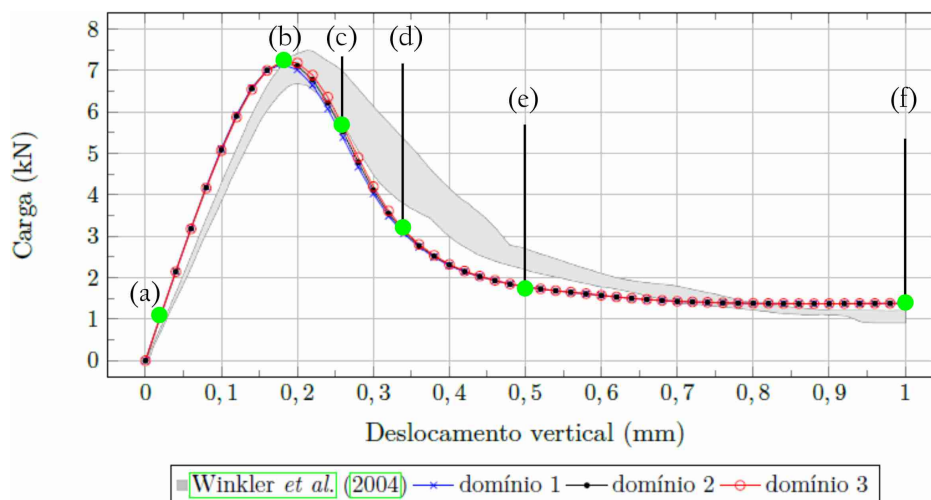


Figura 4.18: Pontos observados nas trajetórias de equilíbrio: nove nós enriquecidos.

Os padrões de evolução do dano, por tração, nos problemas locais são reunidos nas Figuras 4.19 e 4.20. Apenas os modelos locais são representados, pois são neles que o dano encontra-se confinado e somente neles o fenômeno de degradação do material é acompanhado.

Para isso, os gráficos são organizados de modo que a primeira, segunda e terceira colunas referem-se aos problemas locais 1, 2 e 3, respectivamente, e cada linha corresponde ao par bloco de análise global-local k e deslocamento vertical do nó de controle representado pelo ponto A na Figura 4.8. Desse modo, a observação desses gráficos por coluna evidencia a evolução gradativa do dano para cada problema local e por linha permite comparar os três problemas locais quanto à propagação do dano para um mesmo deslocamento vertical. Verifica-se que a degradação é iniciada de forma concentrada na junção angular do painel e propaga-se horizontalmente por quase toda a peça para os três tamanhos de domínios locais.

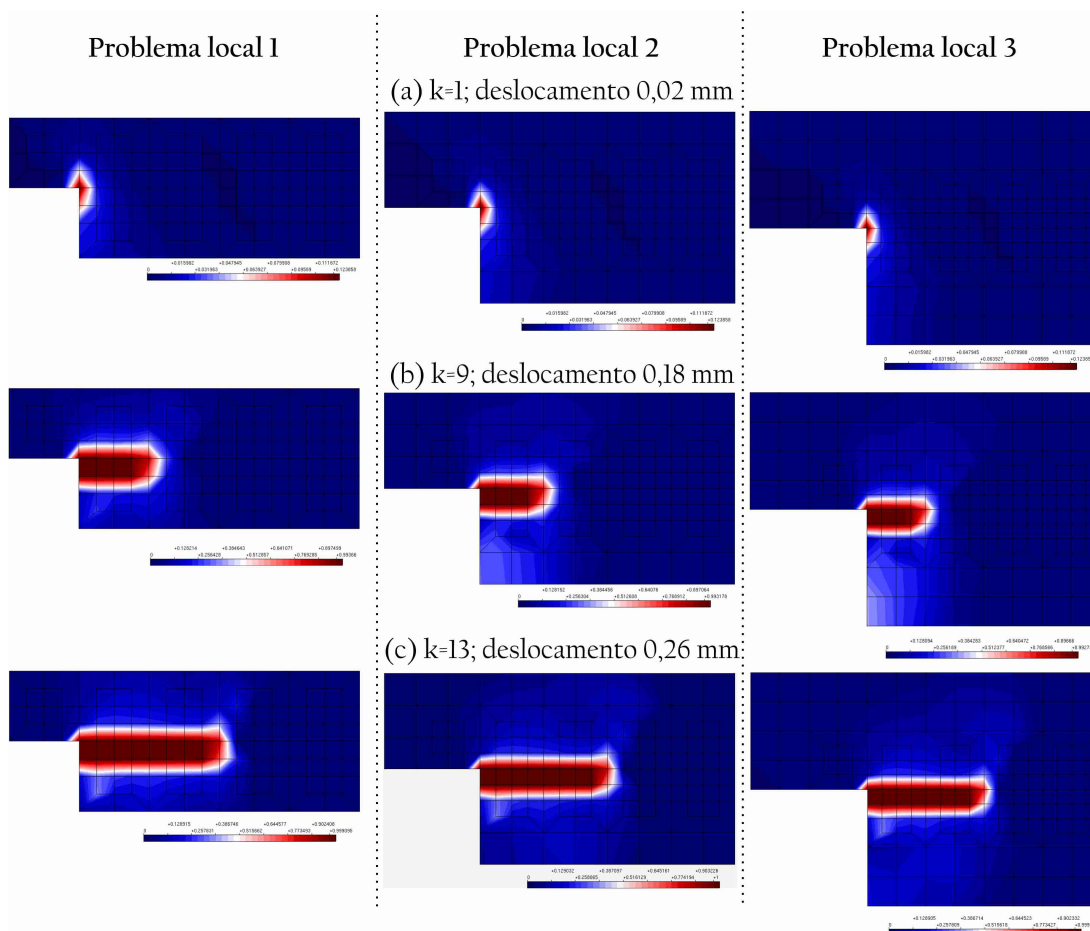


Figura 4.19: Evolução do dano: (a) $k = 1$; 0,02 mm, (b) $k = 9$; 0,18 mm e (c) $k = 13$; 0,26 mm.

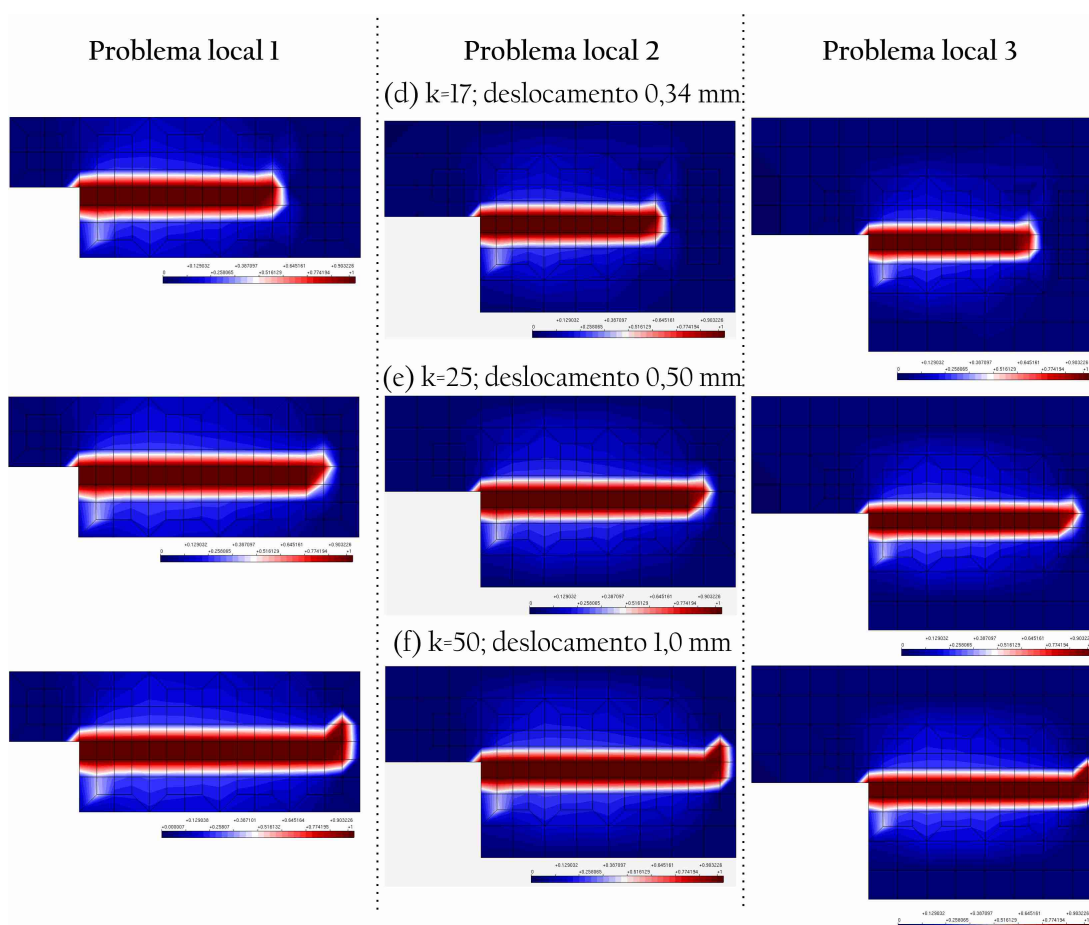


Figura 4.20: Evolução do dano: (d) $k = 17$; 0,34 mm; (e) $k = 25$; 0,50 mm e (f) $k = 50$; 1,0 mm.

4.2.1.2.3 MEFG global-local com GL em 18 nós

A Figura 4.21 apresenta dos 18 nós enriquecidos com a solução local.

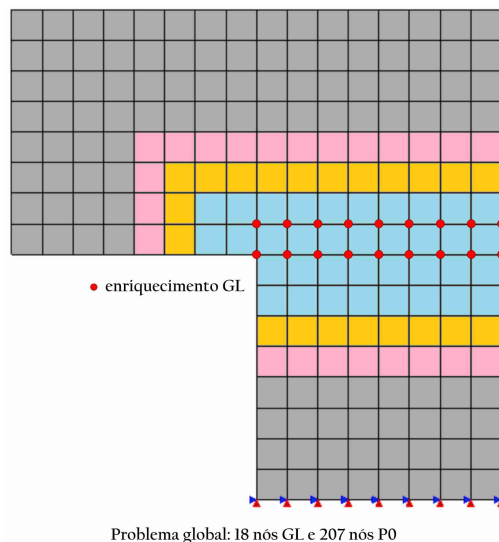


Figura 4.21: MEFG global-local com GL em 18 nós.

A Figura 4.22 apresenta as trajetórias de equilíbrio para os problemas locais 1, 2 e 3. Constatou-se que as três trajetórias convergiram e aproximam-se dos resultados experimentais de Winkler *et al.* (2004). O domínio local 3 alcançou a carga de pico de 7,2016 kN, apenas 1,05% e 0,42% superior às cargas de pico dos domínios 1 e 2, respectivamente, todas referentes ao deslocamento vertical do ponto A de 0,18 mm.

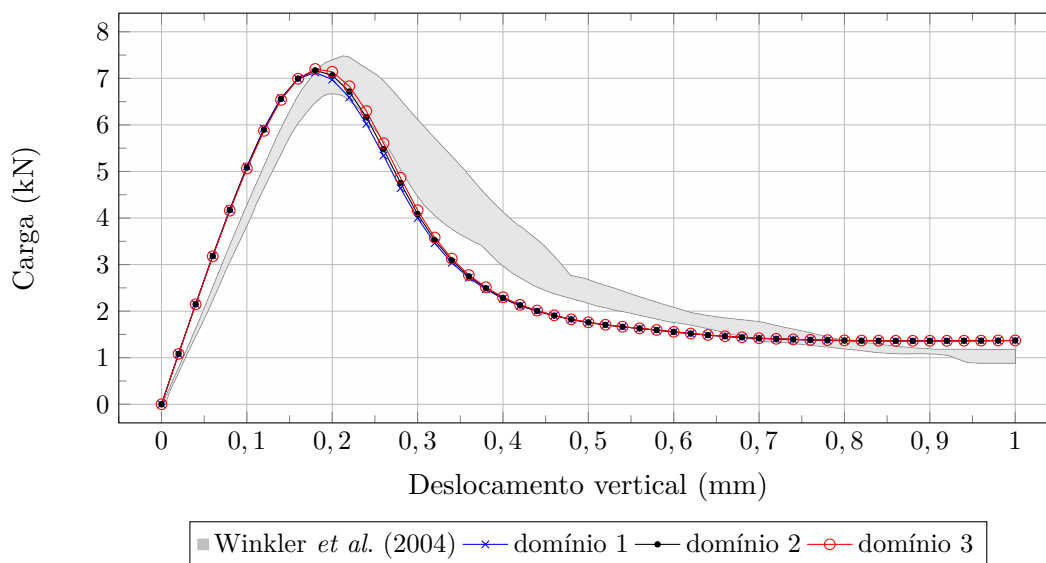


Figura 4.22: Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 18 nós.

As Figuras 4.23, 4.24 e 4.25 apresentam as trajetórias de equilíbrio obtidas com

nove e 18 nós enriquecidos com a solução local para os domínios locais 1, 2 e 3, respectivamente. Nas três figuras observa-se a convergência das trajetórias e os valores de carga de pico obtidos, apresentados na Tabela 4.6, mostram que o aumento do número de nós enriquecidos com a solução local os reduziu minimamente (diferença percentual indicada por % na quarta coluna da tabela). Portanto, o aumento do número de nós enriquecidos conforme a distribuição apresentada na Figura 4.21 não alterou significativamente os resultados para o três domínios locais.

Tabela 4.6: Cargas de pico de cada domínio local com nove e 18 nós enriquecidos.

Domínio	Carga: 9	Carga: 18	diferença %
1	7,1531 kN	7,1257 kN	0,38%
2	7,2001 kN	7,1711 kN	0,40%
3	7,2252 kN	7,2016 kN	0,33%

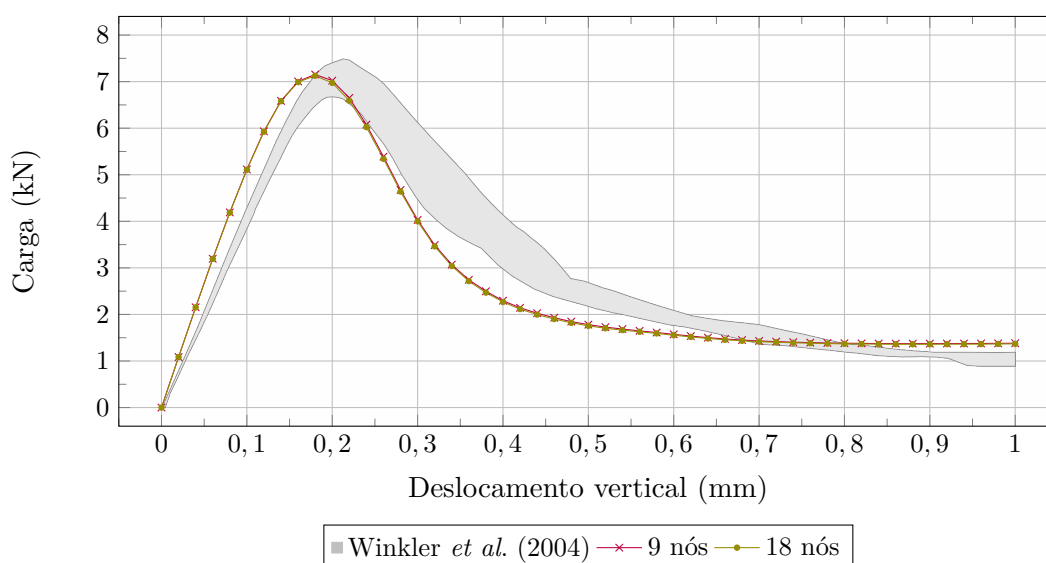


Figura 4.23: Domínio local 1: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.

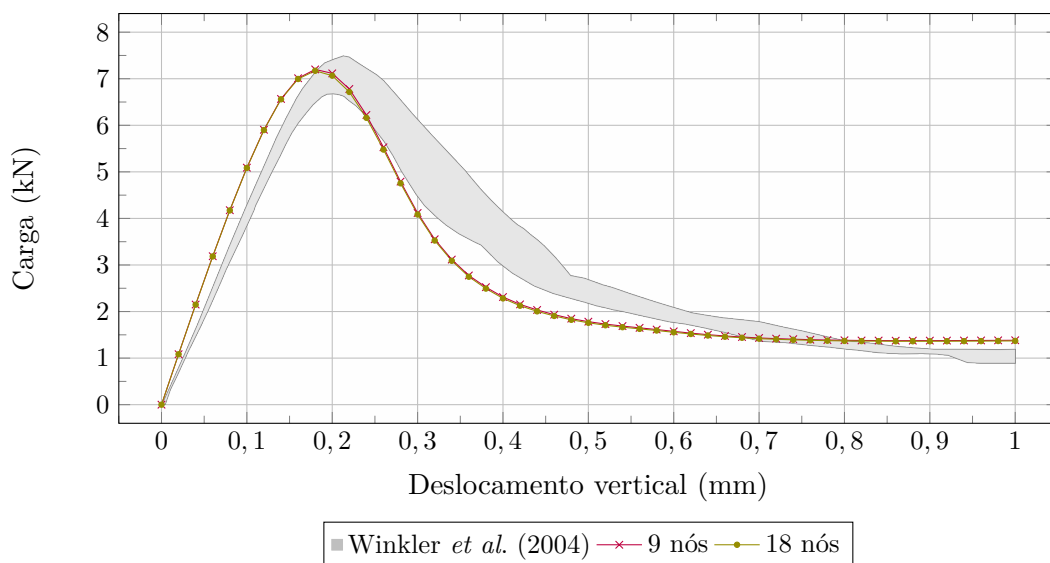


Figura 4.24: Domínio local 2: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.

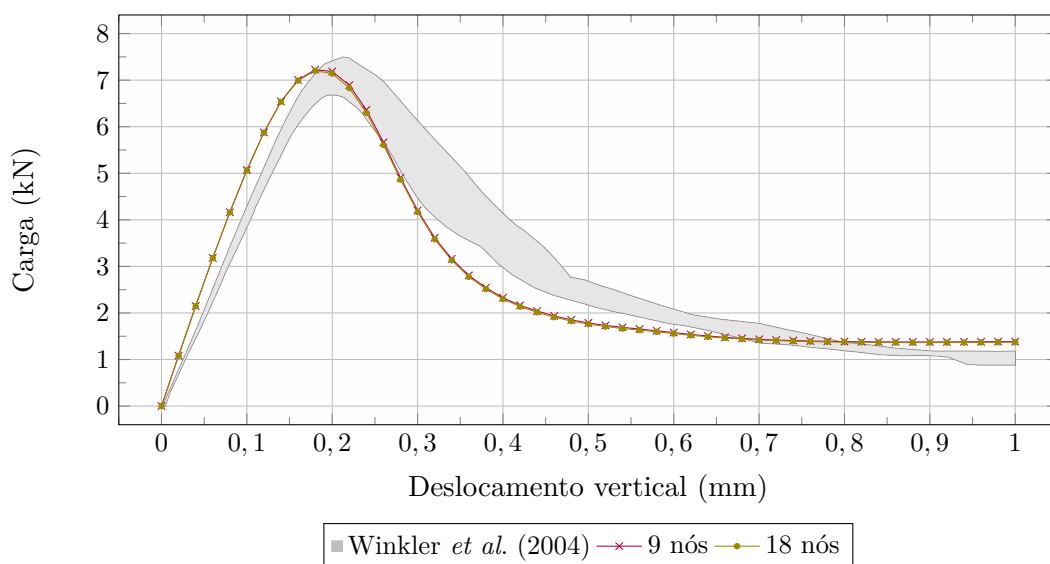


Figura 4.25: Domínio local 3: comparação das trajetórias de equilíbrio com nove e 18 nós enriquecidos.

4.2.1.2.4 MEFG global-local com GL em 29 nós

A Figura 4.26 apresenta dos 29 nós enriquecidos com a solução local.

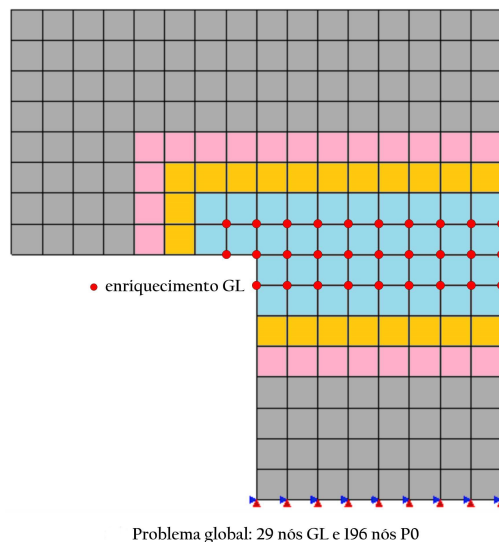


Figura 4.26: MEFG global-local com GL em 29 nós.

A Figura 4.27 apresenta as trajetórias de equilíbrio para os problemas locais 1, 2 e 3. As três trajetórias aproximam-se dos resultados experimentais. O domínio 3 alcançou a carga de pico de 6,7566 kN no deslocamento vertical do ponto A de 0,18 mm, enquanto a carga de pico dos domínios 1 e 2 forem de 6,7063 kN e 6,7323 kN, respectivamente, para o deslocamento vertical de 0,16 mm.

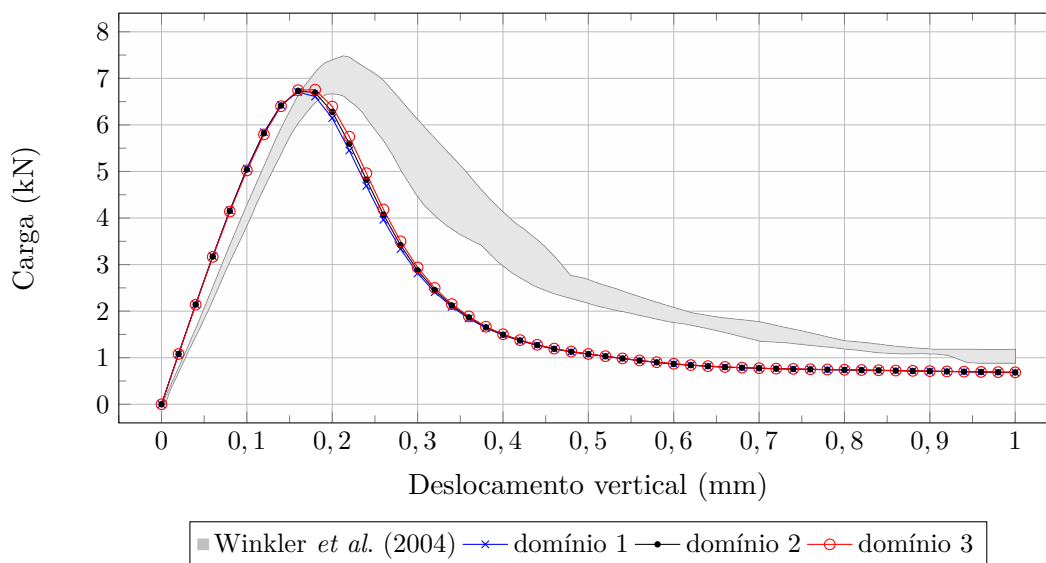


Figura 4.27: Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 nós.

Para avaliar a propagação do dano ao longo da análise foram escolhidos os pontos

(a), (b), (c), (d), (e) e (f) da trajetória de equilíbrio apresentada na Figura 4.27, cujas informações bloco de análise global-local k , número de passos locais i de cada bloco de análise global-local, fator de carga f_{carga} e deslocamento vertical dy do ponto A são descritas na Tabela 4.7. A Figura 4.28 indica a localização desses pontos.

Tabela 4.7: Informações dos pontos observados.

Ponto	k	i	dy mm	f_{carga1}	f_{carga2}	f_{carga3}
(a)	1	58	0,02	0,1543	0,1542	0,1541
(b)	9	48	0,18	0,9443	0,9558	0,9652
(c)	13	98	0,26	0,5662	0,5818	0,5977
(d)	17	120	0,34	0,2990	0,3021	0,3073
(e)	25	120	0,50	0,1537	0,1539	0,1544
(f)	50	120	1,0	0,09776	0,09772	0,09794

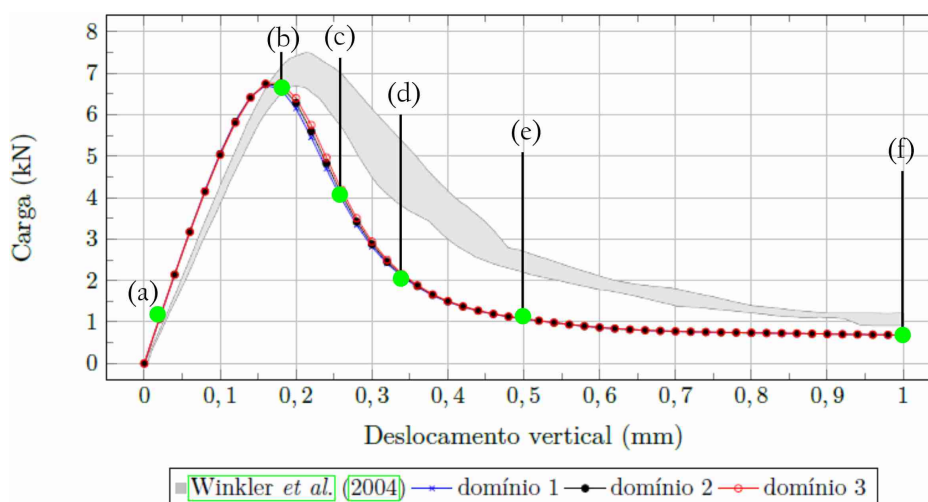


Figura 4.28: Pontos observados nas trajetórias de equilíbrio: 29 nós enriquecidos.

Os padrões de evolução do dano, por tração, nos problemas locais são reunidos nas Figuras 4.29 e 4.30. Apenas os modelos locais são representados, pois são neles que o dano encontra-se confinado e somente neles o fenômeno de degradação do material é acompanhado. Para isso, os gráficos são organizados de modo que a primeira, segunda e terceira colunas referem-se aos problemas locais 1, 2 e 3, respectivamente, e cada linha corresponde ao par bloco de análise global-local k e deslocamento vertical do nó de controle representado pelo ponto A na Figura 4.8. Desse modo, a observação desses gráficos por coluna evidencia a evolução gradativa do dano para

cada problema local e por linha permite comparar os três problemas locais quanto à propagação do dano para um mesmo deslocamento vertical. Verifica-se que a degradação é iniciada de forma concentrada na junção angular do painel e propaga-se horizontalmente por quase toda a peça.

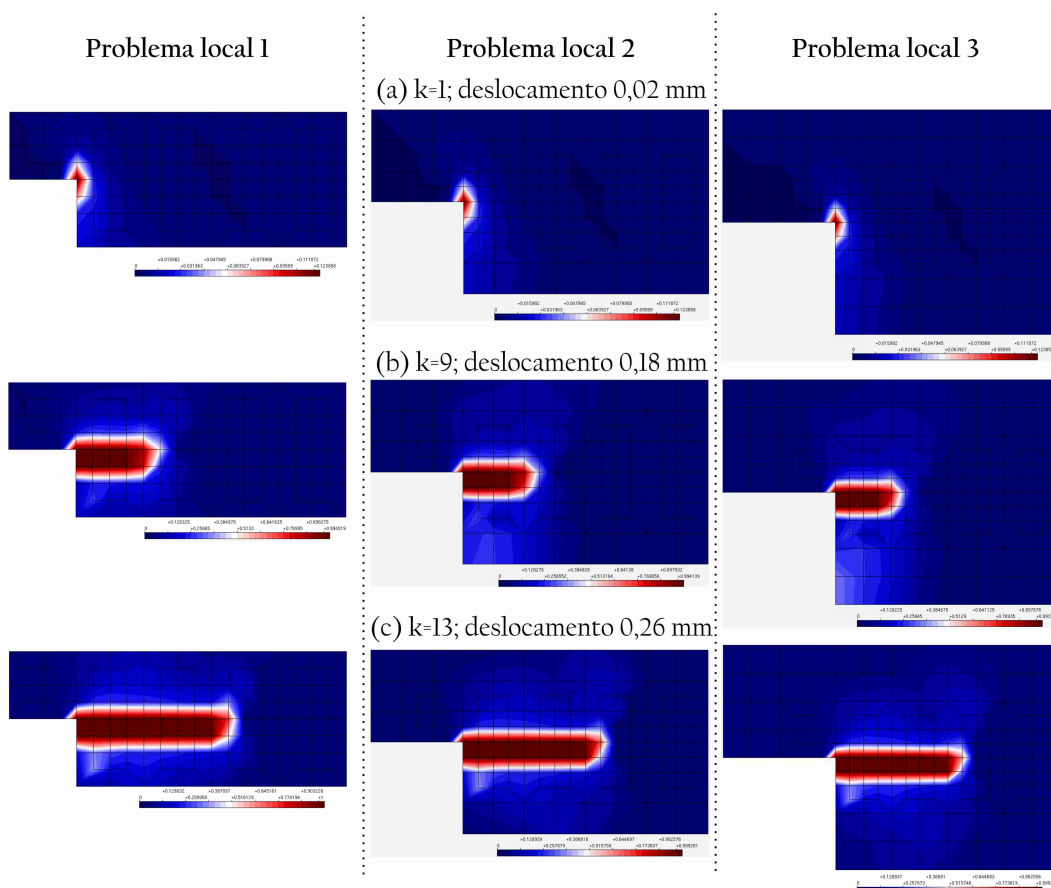


Figura 4.29: Evolução do dano - 29 nós: (a) $k = 1$; 0,02 mm, (b) $k = 9$; 0,18 mm e (c) $k = 13$; 0,26 mm.

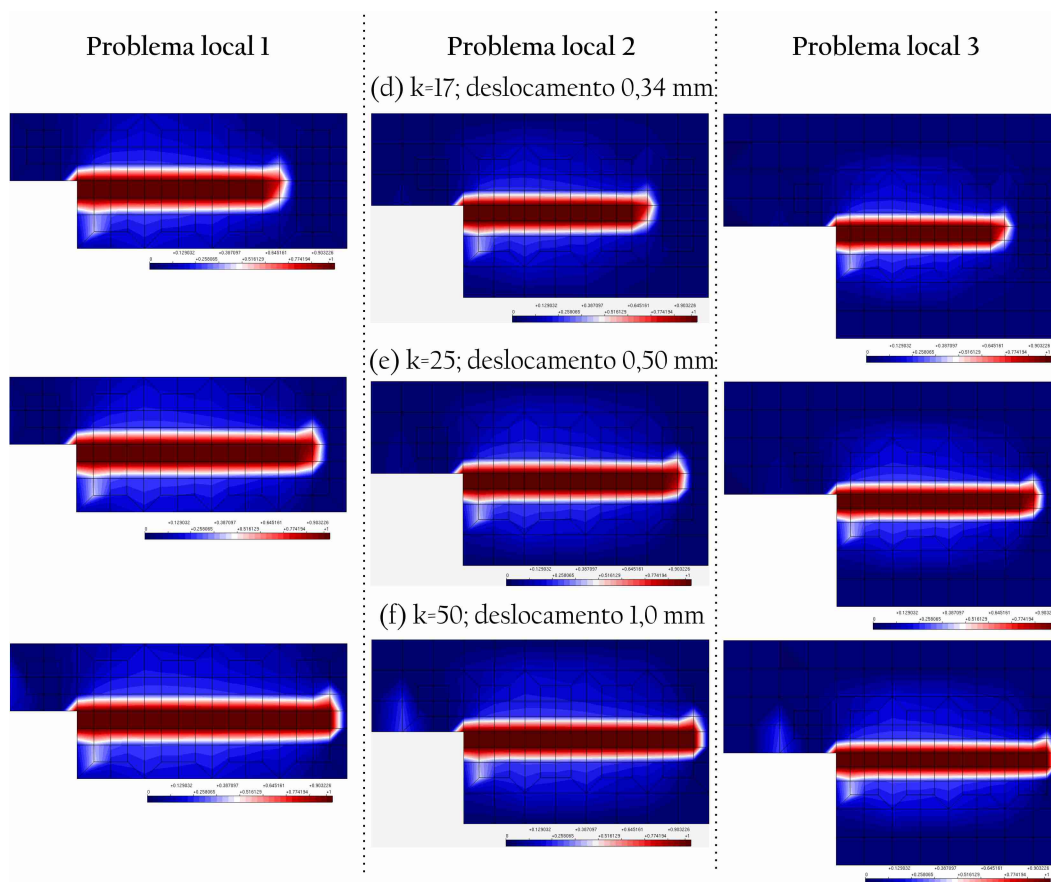


Figura 4.30: Evolução do dano - 29 nós: (d) $k = 17$; 0,34 mm, (e) $k = 25$; 0,50 mm e (f) $k = 50$; 1,0 mm.

Segundo Duarte e Kim (2008), a princípio, é interessante aplicar domínios locais maiores vez que reduziriam o efeito da falta de condições de contorno exatas para os problemas locais, mas tais domínios são computacionalmente custosos. No entanto, observa-se que domínio local 1 é suficiente para conter a evolução dessa danificação, e é computacionalmente menos custoso do que dos domínios 2 e 3, que possuem mais elementos para serem analisados. Observa-se, adicionalmente, que no domínio 1 com 18 nós enriquecidos, a zona *buffer* inexistente, o que deveria ser um problema com base nos dados da literatura. Não é o que se identifica neste trabalho, muito provavelmente pelo fato da região danificada estar bastante confinada, no interior dos três domínios, não impactando na qualidade das condições de contorno que são aplicadas a partir do resultado do problema global.

Outro aspecto típico da análise não linear aqui investigada, está no fato de que

o processo incremental do problema global permite que, a partir do segundo bloco de análise global, tenha-se uma aproximação de qualidade bastante superior do que a inicial. Gradativamente, a cada bloco de análise global-local, esta solução global é incrementada e, da mesma forma, a função a ser imposta como condição de contorno no problema local. Este cenário pode também ser usado para explicar o porquê de não se encontrar impacto do tamanho da zona *buffer* na qualidade da análise do problema local. O emprego de 29 nós, contudo, já modifica a trajetória conforme se discute a seguir, indicando uma tendência semelhante, ainda que pequena, de localização a exemplo do que ocorreu com o enriquecimento polinomial nas análises com o MEF convencional.

As Figuras 4.31, 4.32 e 4.33 apresentam as trajetórias de equilíbrio obtidas com nove, 18 e 29 nós enriquecidos com a solução local para os domínios locais 1, 2 e 3, respectivamente. Nas três figuras observa-se a convergência das trajetórias e os valores de carga de pico obtidos, apresentados na Tabela 4.8, mostram que o aumento do número de nós enriquecidos com a solução local os reduziu, e de maneira acentuada com a aplicação de 29 nós enriquecidos (diferença percentual indicada por % na quinta e sexta colunas da tabela).

Tabela 4.8: Cargas de pico de cada domínio local com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.

Domínio	Carga: 9	Carga: 18	Carga: 29	% 29 e 9	% 29 e 18
1	7,1531 kN	7,1257 kN	6,7063 kN	6,25%	5,89%
2	7,2001 kN	7,1711 kN	6,7323 kN	6,50%	6,12%
3	7,2252 kN	7,2016 kN	6,7566 kN	6,49%	6,18%

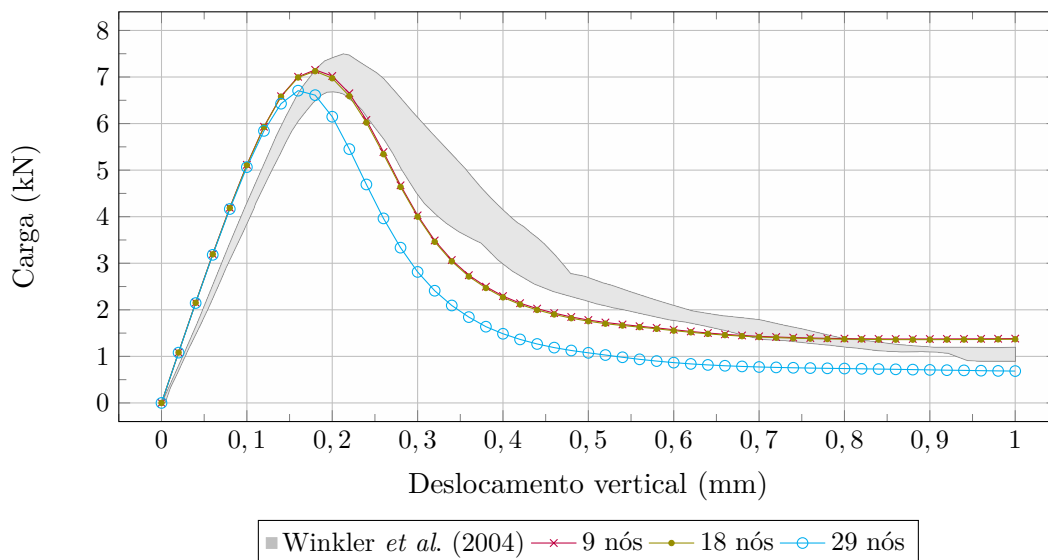


Figura 4.31: Domínio 1: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.

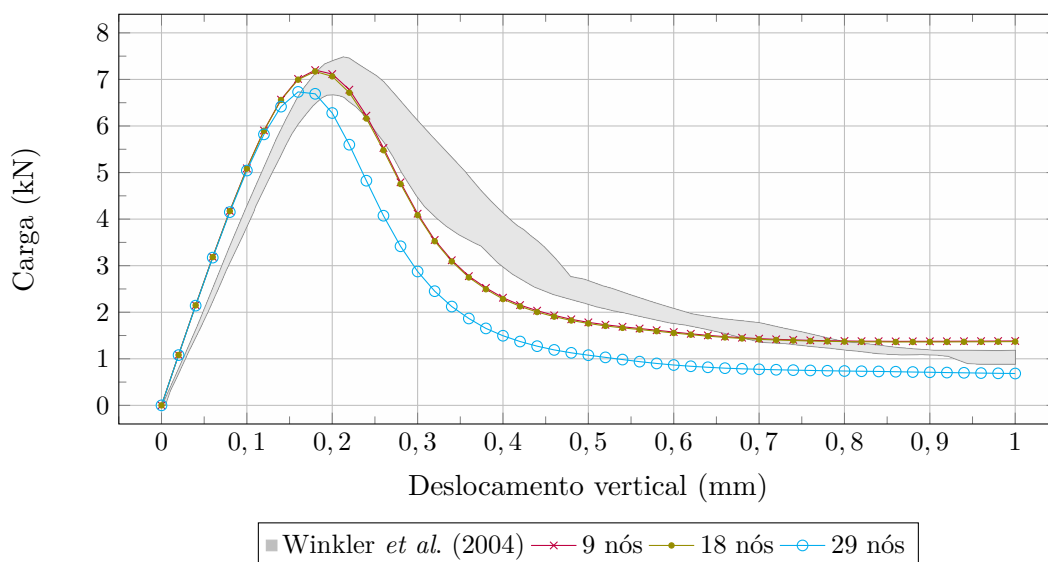


Figura 4.32: Domínio 2: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.

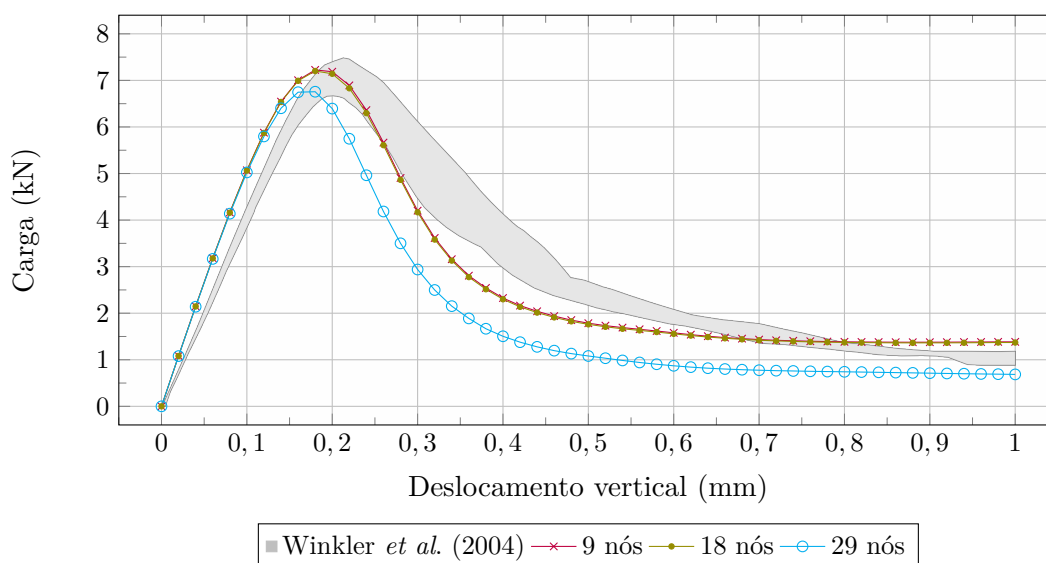


Figura 4.33: Domínio 3: trajetórias de equilíbrio com nove, 18 e 29 nós enriquecidos.

Das Figuras 4.31, 4.32 e 4.33 observa-se que o número de nós enriquecidos na direção de crescimento do dano influenciou significativamente os resultados das análises quando abrangeu quase toda a região de danificação. Com 29 nós enriquecidos as trajetórias tornaram-se mais flexíveis e com cargas de pico inferiores ao limite de carga experimental, mas acompanhando a tendência observada no espectro experimental de Winkler *et al.* (2004). Quando o domínio possui tamanho suficiente para abranger o processo de fissuração do elemento estrutural, o aumento do domínio local não influencia significativamente as respostas obtidas, já que se observou nas figuras acima a convergência das trajetórias de equilíbrio para os três domínios locais (considerando-se os nove, 18 e 29 nós enriquecidos).

Os gráficos representativos da distribuição da variável de dano nos três problemas locais com nove e 29 nós enriquecidos, anteriormente apresentados nas Figuras 4.19, 4.20, 4.29 e 4.30, são aqui reunidos da seguinte maneira: domínio local 1 nas Figuras 4.34 e 4.35; domínio local 2 nas Figuras 4.36 e 4.37; e domínio local 3 nas Figuras 4.38 e 4.39. Desse modo, é possível comparar a evolução do dano com nove e 29 nós enriquecidos em cada domínio local.

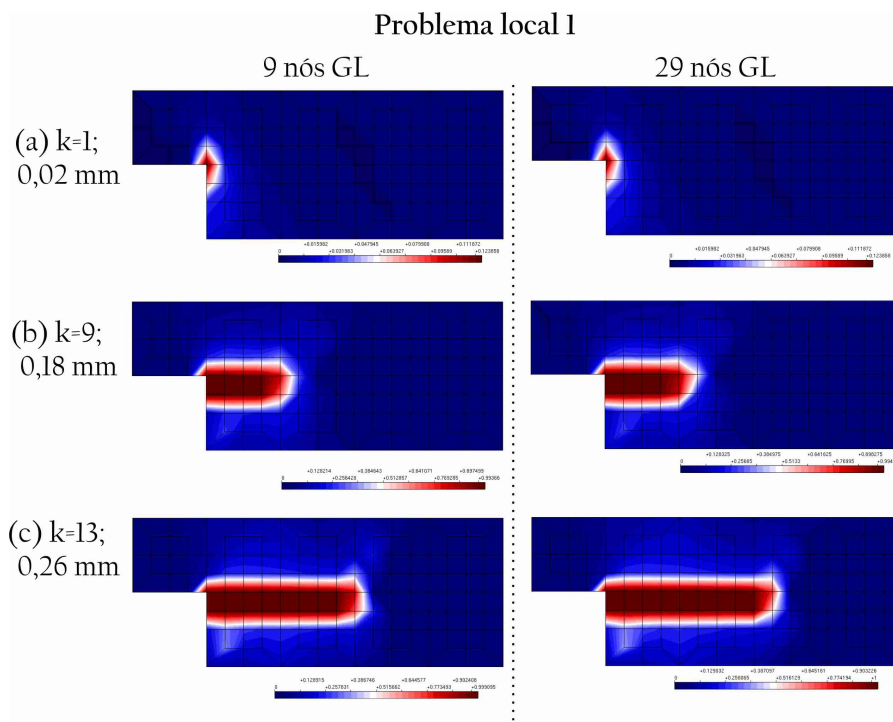


Figura 4.34: Evolução do dano no domínio local 1.

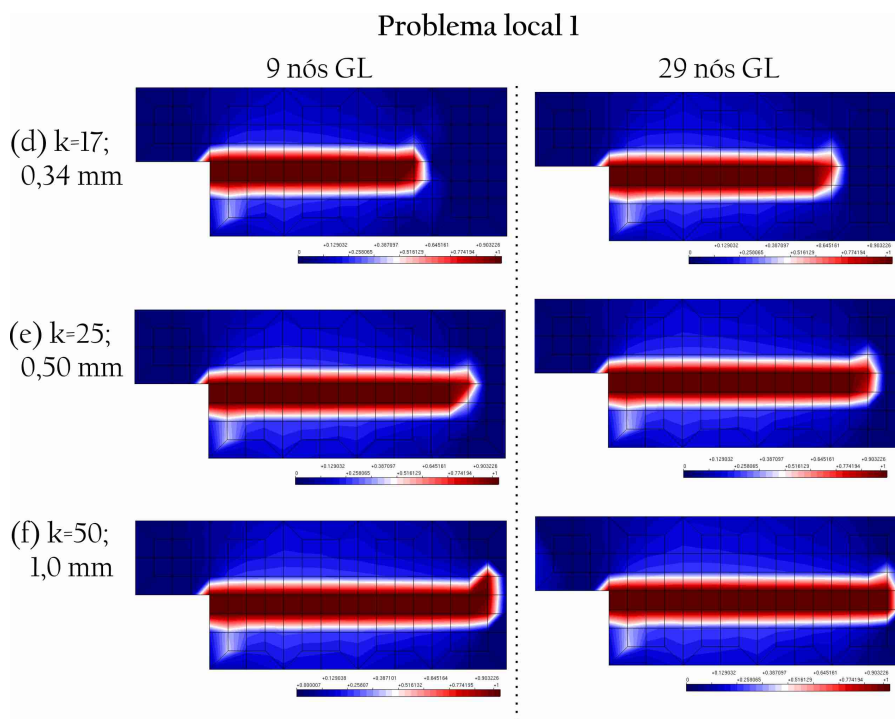


Figura 4.35: Evolução do dano no domínio local 1.

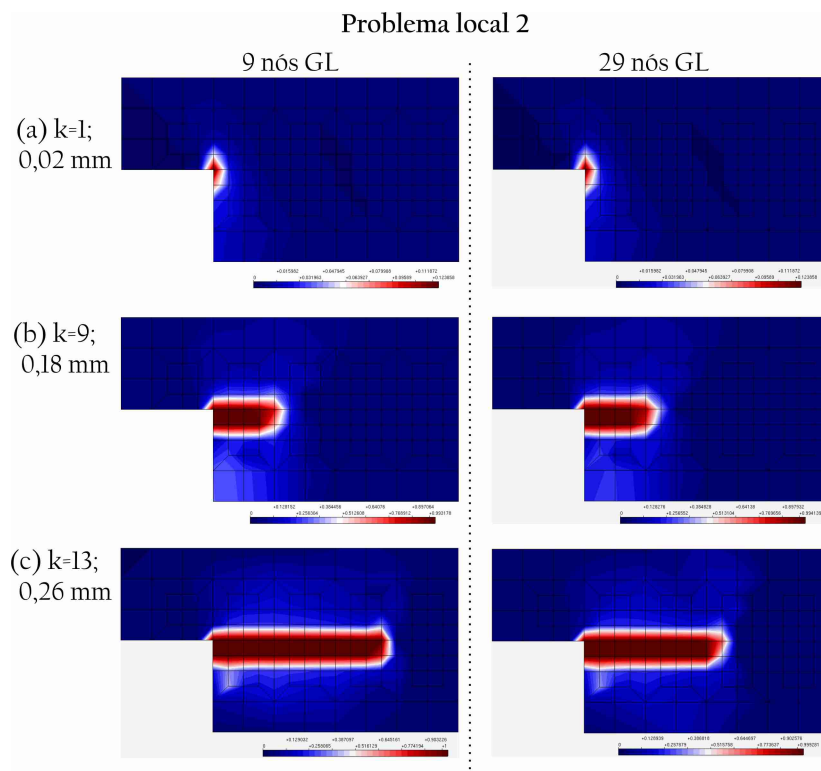


Figura 4.36: Evolução do dano no domínio local 2.

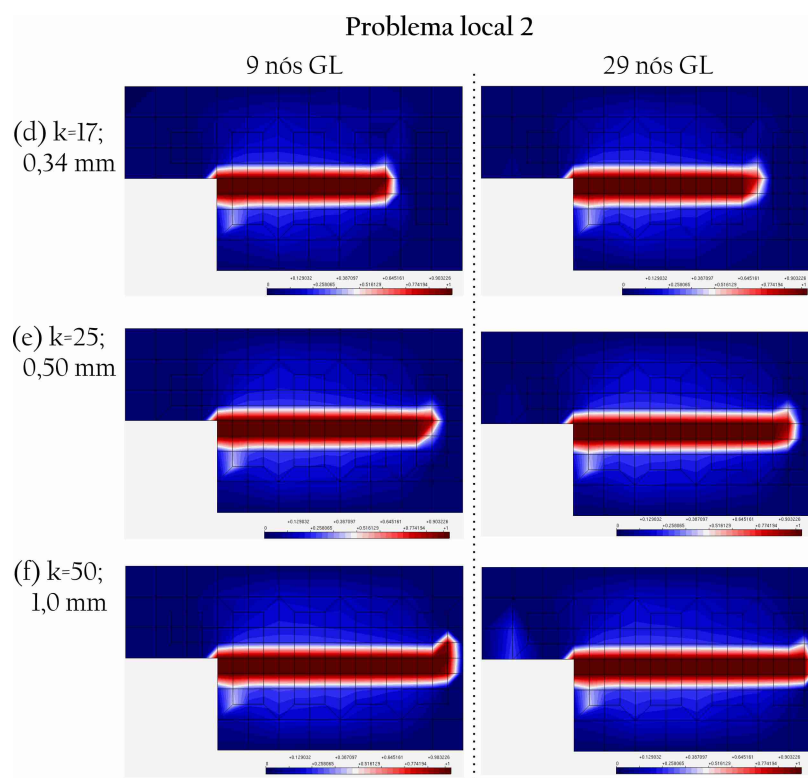


Figura 4.37: Evolução do dano no domínio local 2.

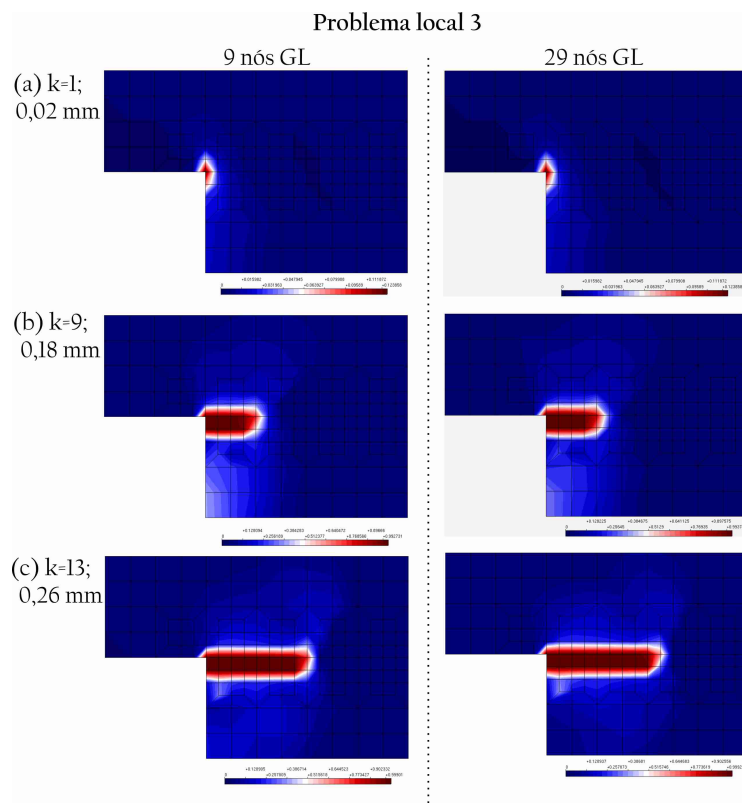


Figura 4.38: Evolução do dano no domínio local 3.

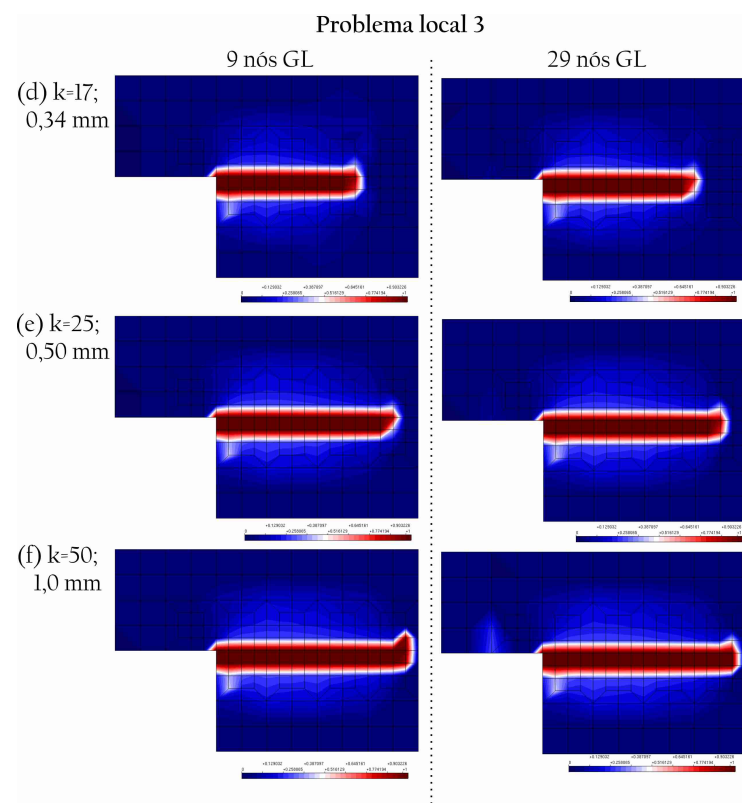


Figura 4.39: Evolução do dano no domínio local 3.

A partir de (c) $k = 13$ nas figuras acima é possível notar que, com 29 nós enriquecidos, o dano avança pelos elementos de maneira mais rápida em relação aos problemas com nove nós enriquecidos. A danificação mais acentuada com 29 nós enriquecidos é corroborada pelas trajetórias de equilíbrio das Figuras 4.31, 4.32 e 4.33, nas quais, o mesmo nível de deslocamento é alcançado com 29 nós com um nível de carga inferior ao necessário para as análises com nove nós enriquecidos. Observa-se também que no bloco de análise $k = 50$ dos três problemas locais o dano avançou sobre dois elementos da fileira superior nas análises com nove nós enriquecidos, o que não ocorreu com 29 nós, em que o dano manteve-se concentrado na faixa de elementos central. Isso não afetou os resultados obtidos, tendo as análises com nove nós enriquecidos levado a resultados coerentes com os resultados experimentais.

4.2.1.2.5 MEEG global-local com GL em 51 nós - domínio 3

Na expansão dos domínios locais para os problemas analisados até este momento, o número de nós globais enriquecidos com a solução numérica local limitou-se a 29, equivalente ao número máximo possível para o domínio local 1 e para tornar as comparações com os demais domínios justas. Deseja-se, então, averiguar a influência de enriquecer 51 nós do domínio local 2. A Figura 4.40 indica os nós enriquecidos.

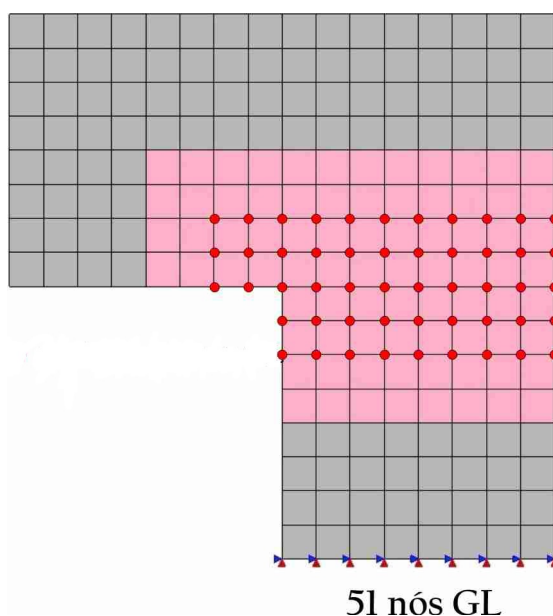


Figura 4.40: MEEG global-local com GL em 51 nós no domínio local 3.

As trajetórias de equilíbrio da Figura 4.41 foram obtidas com o emprego de 51 e 29 nós globais enriquecidos. Observa-se que o aumento do número de nós enriquecidos não influenciou significativamente a resposta obtida, sendo a carga de pico obtida apenas 2,72% inferior à obtida com 29 nós. Em virtude da convergência das duas trajetórias, conclui-se que enriquecer somente os nós próximos à região de danificação seja suficiente para obter respostas adequadas, e que mais nós enriquecidos oneram computacionalmente o processo de análise.

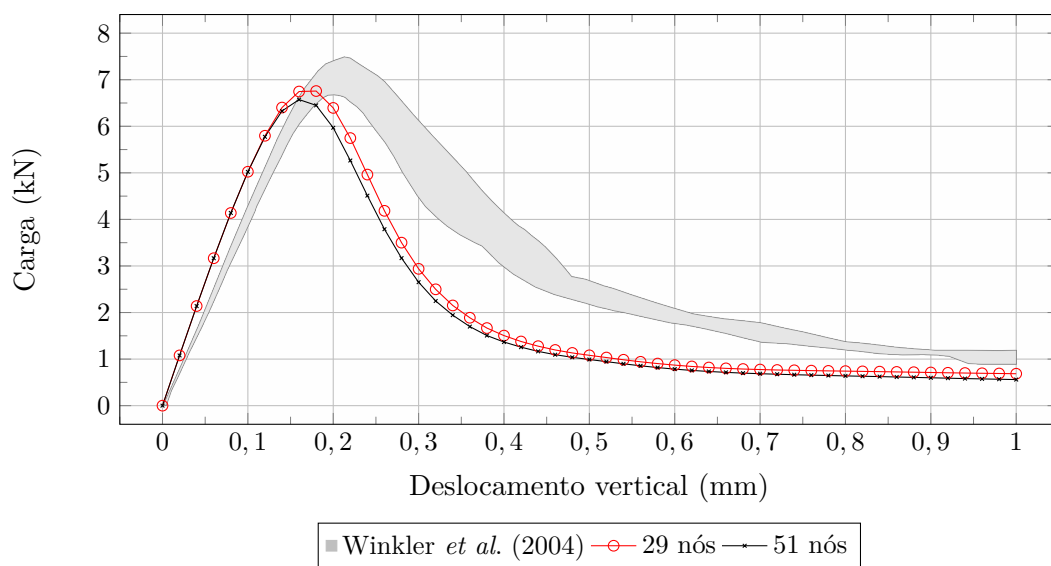


Figura 4.41: Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 e 51 nós.

4.2.1.2.6 MEFG global-local com GL em 75 nós - domínio 3

Assim como efetuado na seção anterior, analisa-se aqui a influência de se enriquecer 75 nós globais com a solução numérica local no domínio local 3. A Figura 4.42 indica os nós enriquecidos.

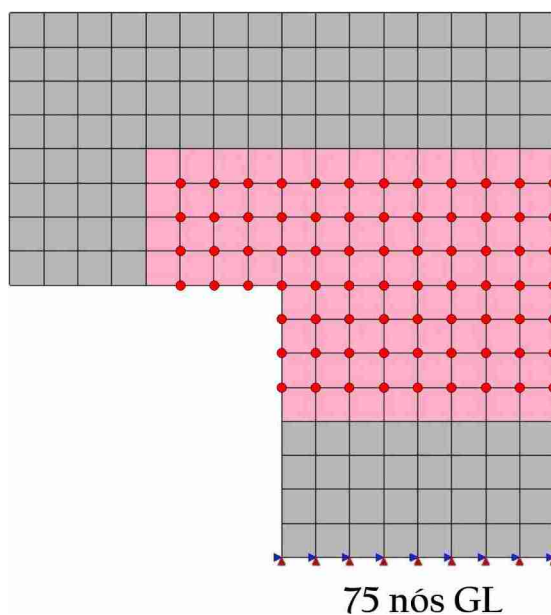


Figura 4.42: MEFG global-local com GL em 75 nós no domínio local 3.

As trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 4.43 foram obtidas com o emprego de 75 e 29 nós globais enriquecidos, esta apresentada anteriormente na Figura 4.27. O aumento do número de nós enriquecidos não alterou significativamente a resposta obtida, sendo a carga de pico obtida apenas 3,37% inferior à obtida com 29 nós. Assim como na seção anterior, a convergência das duas trajetórias mostra que o enriquecimento apenas de nós próximos à região de danificação é suficiente para obter respostas adequadas.

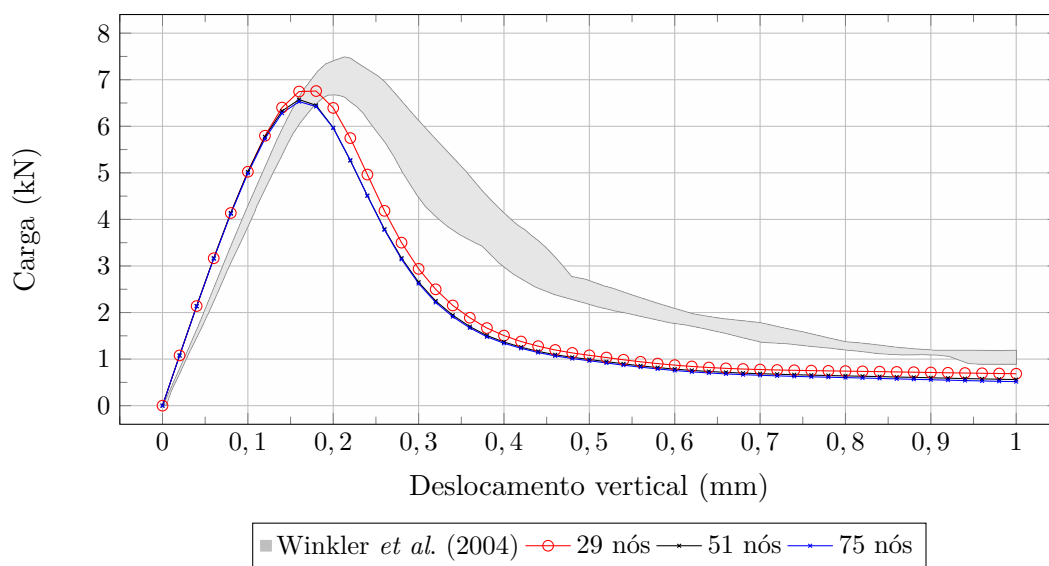


Figura 4.43: Trajetórias de equilíbrio: MEFG global-local com GL em 29 e 75 nós.

4.2.2 Flexão em três pontos - Petersson (1981)

O objetivo desta seção é demonstrar que os recursos implementados para análise não linear via MEF global-local comportam adequadamente a aplicação de modelos constitutivos disponíveis na biblioteca do INSANE (Penna, 2011), sendo avaliados os subsequentes:

- Seção 4.2.2.1: Modelo de Fissuração Distribuída; e
- Seção 4.2.2.2: Modelo de Microplanos, juntamente com quatro leis de dano.

As investigações realizadas em ambas as seções possuem características comuns que são reunidas nesta descrição inicial, enquanto os detalhamentos encontram-se organizados nas respectivas seções.

Embasada nos ensaios experimentais em vigas de concreto submetidas ao ensaio de flexão em três pontos realizados por Petersson (1981), a Figura 4.44 ilustra a geometria, o carregamento, as condições de contorno e o entalhe da viga. Considere-se o carregamento total $P = 800,0 \text{ N}$.

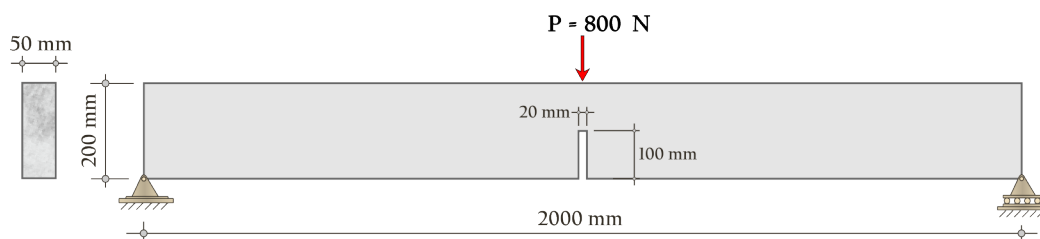


Figura 4.44: Ensaio de flexão em três pontos: geometria e malha.

O material tem módulo de elasticidade $E_0 = 30000,0 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. Para os problemas locais e para o MFEF convencional os parâmetros adotados para os dois tipos de modelos constitutivos são apresentados nas respectivas seções.

A viga é analisada com a malha de elementos finitos mostrada na Figura 4.45. Há 101 elementos quadrilaterais de quatro nós, totalizando 132 nós, e 64 elementos na malha local, sendo enriquecidos 12 nós globais com a solução numérica local.

Conforme destacado na figura, os nós brancos são enriquecidos com as funções polinomiais P1 ou P2, sendo cada caso indicado nas análises efetuadas. Os nós pertencente à aresta onde o carregamento é aplicado não são enriquecidos com a função global-local porque há a transferência das condições de contorno entre os problemas global e local nessa região. O ponto A, para as malhas globais, corresponde ao nó cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio. O ponto B na malha local é adotado como nó de controle na análise não linear pelo método de controle de deslocamentos.

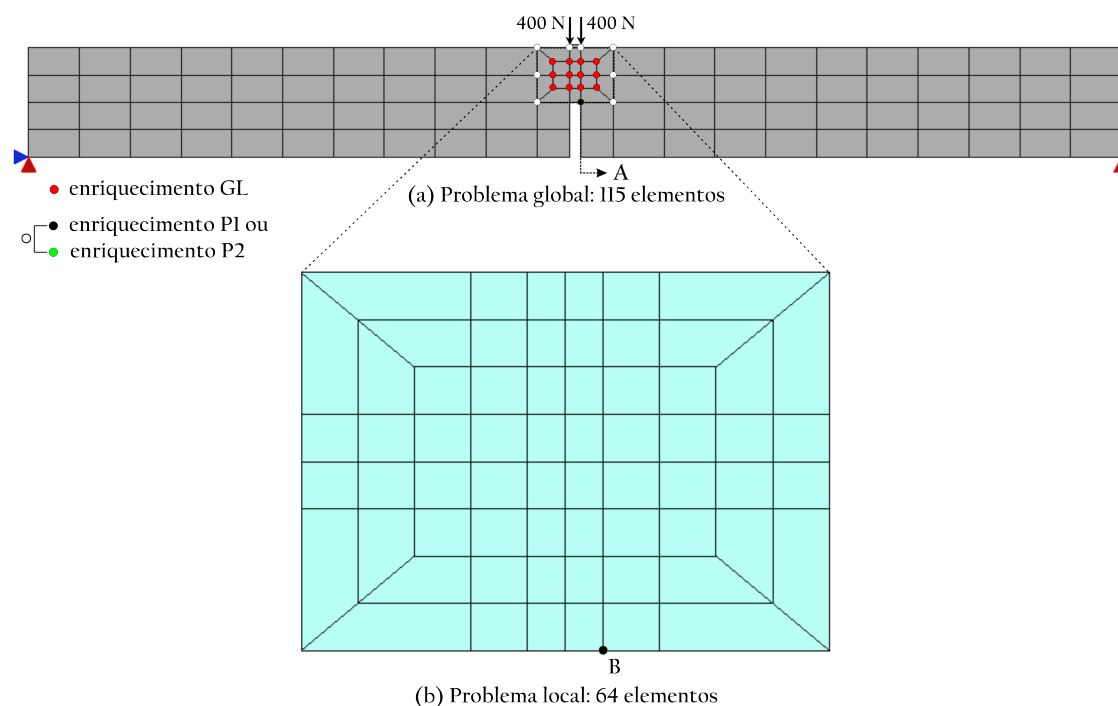


Figura 4.45: Problema global e local: flexão em três pontos.

A análise não linear do problema local é realizada com controle de deslocamentos (Batoz e Dhatt, 1979), aproximação secante do tensor constitutivo e uma tolerância para a convergência de $1 \times 10^{-4} (\times 100\%) = 0,010\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais. Conforme citado anteriormente, o deslocamento vertical do ponto B da Figura 4.45 é o grau de liberdade de controle. Nos modelos locais são definidos o parâmetro de penalidade $\eta = 3 \times 10^{12}$ e 4×4 pontos de Gauss por elemento (mesmo número de pontos de Gauss do modelo global).

A definição dos parâmetros numéricos do MEFG global-local não linear foi fundamentada em alguns testes realizados, a exemplo do que já foi efetuado e detalhado na Seção 4.2.1.1, e adotou-se, por experiência, a seguinte combinação:

- 50 passos globais;
- 20 passos locais;
- 2 passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local; e
- passo global de deslocamento de 0,020 mm.

Para a avaliação da abordagem proposta foram realizadas três análises com o Modelo de Fissuração Distribuída e três análises para cada combinação do Modelo de Microplanos com quatro leis de dano, conforme a seguinte organização:

- GL-P0: 12 nós enriquecidos com a solução global-local e os demais nós sem enriquecimento (288 graus de liberdade);
- GL-P1: 12 nós enriquecidos com a solução global-local, oito nós enriquecidos com a função polinomial P1 e os demais nós sem enriquecimento (320 graus de liberdade); e
- GL-P2: 12 nós enriquecidos com a solução global-local, oito nós enriquecidos com a função polinomial P2 e os demais nós sem enriquecimento (352 graus de liberdade).

4.2.2.1 Modelo de Fissuração Distribuída

O Modelo de Fissuração Distribuída foi aplicado no trabalho de Penna (2011) baseia-se no monitoramento da deterioração das propriedades físicas do material, sendo o processo de evolução das fissuras descrito pelo decaimento gradual de tensões com aumento de deformações. Os parâmetros obtidos experimentalmente por Petersson (1981) apresentaram uma faixa de valores de 2,50 N/mm² a 3,90 N/mm²

para a resistência à tração (F_t) e de 115 N/m a 137 N/m para a energia de fratura. O Modelo de Fissuração Distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986) e Estado Plano de Tensão (descrição presente no Apêndice C) é considerado nas análises. Os parâmetros são apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Parâmetros materiais.

Parâmetros da leis de Carreira e Chu (1985, 1986)	
Resistência à compressão	$F_c = 31,0$ MPa
Resistência à tração	$F_t = 2,70$ MPa
Deformação na compressão	$\varepsilon_c = 0,002$
Deformação na tração	$\varepsilon_t = 0,0001925$
Fator de retenção ao cisalhamento	$\beta_r = 0,00$

É importante a averiguação do comportamento do problema quando solucionado com MEFM convencional para que se evidencie o aperfeiçoamento da solução via o MEFM global-local para análise fisicamente não linear. Dessa forma, duas análises são realizadas com o MEFM convencional utilizando-se a mesma malha global da Figura 4.45:

- MEFM-P0: nenhum nó é enriquecido com funções polinomiais (264 graus de liberdade); e
- MEFM-P2: os 12 nós vermelhos e os oito nós brancos enriquecidos com a função polinomial P2 (424 graus de liberdade).

Para manter a equivalência com o número de passos locais da análise não linear no último bloco de análise global-local (bloco $k = 50$ com 120 passos locais) das simulações com MEFM global-local não linear, os seguintes parâmetros numéricos são adotados:

- 120 passos; e
- método de controle direto de deslocamento do ponto A na direção vertical, com passos de deslocamento de 0,008333 mm.

As trajetórias de equilíbrio das análises MEFG-P0 e MEFG-P2 são apresentadas na Figura 4.46. Observa-se que as respostas elásticas são bem identificadas e que a trajetória MEFG-P0 tangencia por cima os resultados experimentais. O enriquecimento de alguns nós com P2 possibilitou a concordância da trajetória de equilíbrio MEFG-P2 apenas no ramo ascendente, ocorrendo instabilidade no restante da curva.

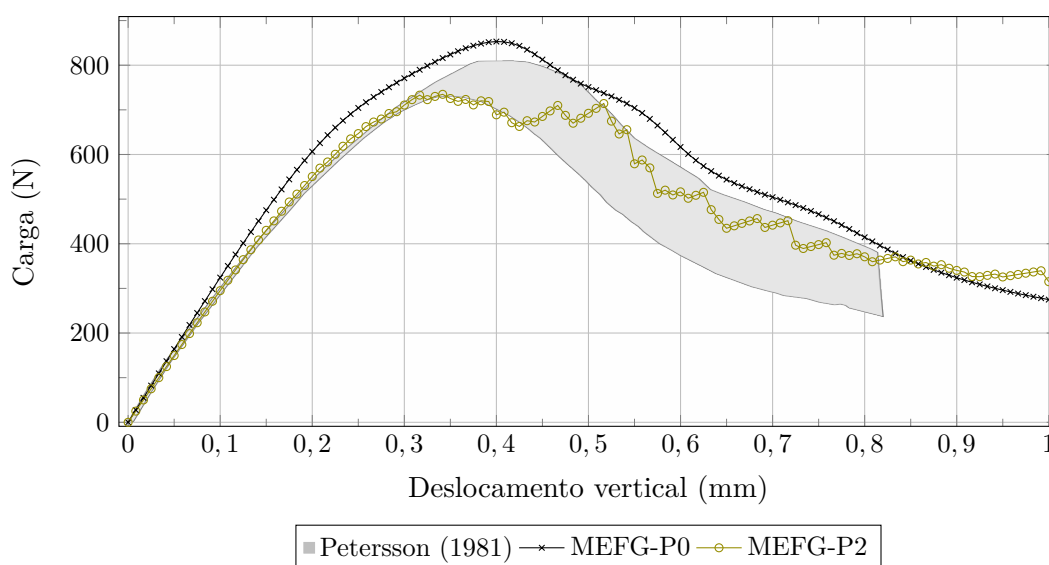


Figura 4.46: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com P0 e P2.

As simulações anteriores foram incapazes de representar o comportamento estrutural satisfatoriamente. Conforme citado na introdução dessa seção, o MEFG global-local não linear é aplicado para verificar o comportamento das respostas obtidas com a mesma malha global utilizada nas análises com o MEFG convencional, na presença e ausência de enriquecimento polinomial P1 e P2, havendo o refinamento da malha representativa do domínio local (Figura 4.45).

Das análises efetuadas com a abordagem proposta resultam as trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 4.47. Nota-se que a trajetória de equilíbrio GL-P0 está afastada dos resultados experimentais e apresenta uma perturbação em seu ramo descendente. Esta última observação é compartilhada com a trajetória GL-P1, mas o enriquecimento P1 nos nós que contornam a região onde é aplicado o enriquecimento global-local implicou na redução da carga de pico em relação a

GL-P0. A utilização da função polinomial P2, que deve ser capaz de representar o comportamento constitutivo no problema global, nesse mesmo contorno conduziu à trajetória de equilíbrio GL-P2 compatível com os resultados experimentais de Petersson (1981), tanto na estimativa da carga máxima quanto na descrição do regime pós-crítico.

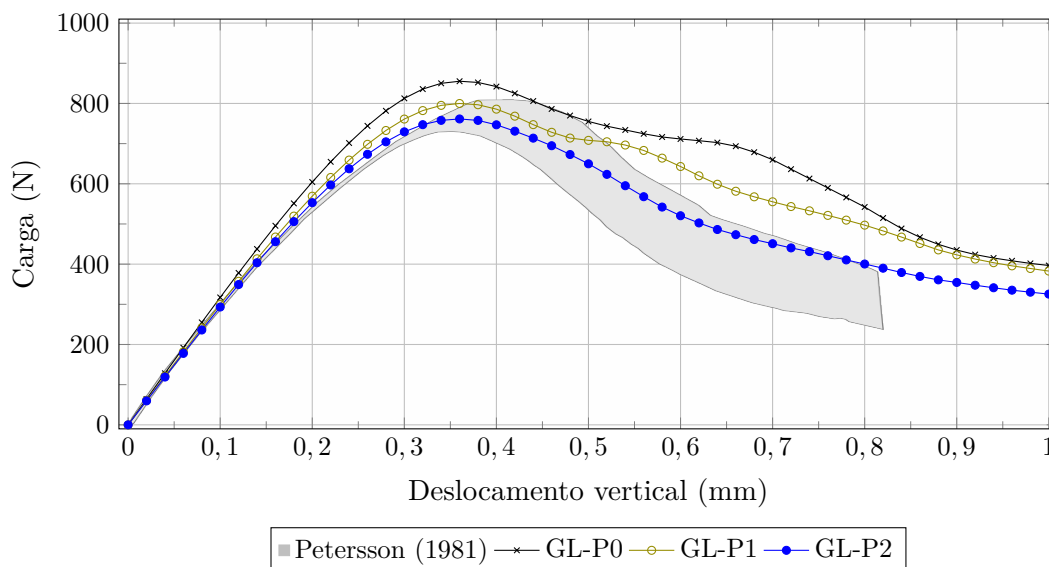


Figura 4.47: Trajetórias de equilíbrio: MEEFG global-local não linear com P0, P1 e P2.

Para se avaliar a propagação do dano ao longo da análise foram escolhidos os pontos (a), (b), (c) e (d) da trajetória de equilíbrio GL-P2 apresentada na figura anterior, cujas informações bloco de análise global-local k , número de passos locais i de cada bloco de análise global-local, fator de carga f_{carga} e deslocamento vertical dy do ponto A são descritas na Tabela 4.10. A Figura 4.48 indica a localização desses pontos.

Tabela 4.10: Informações dos pontos observados.

Ponto	k	i	dy mm	f_{carga}
(a)	19	58	0,36	0,9517
(b)	29	48	0,56	0,7098
(c)	39	98	0,76	0,5261
(d)	50	120	1,0	0,4067

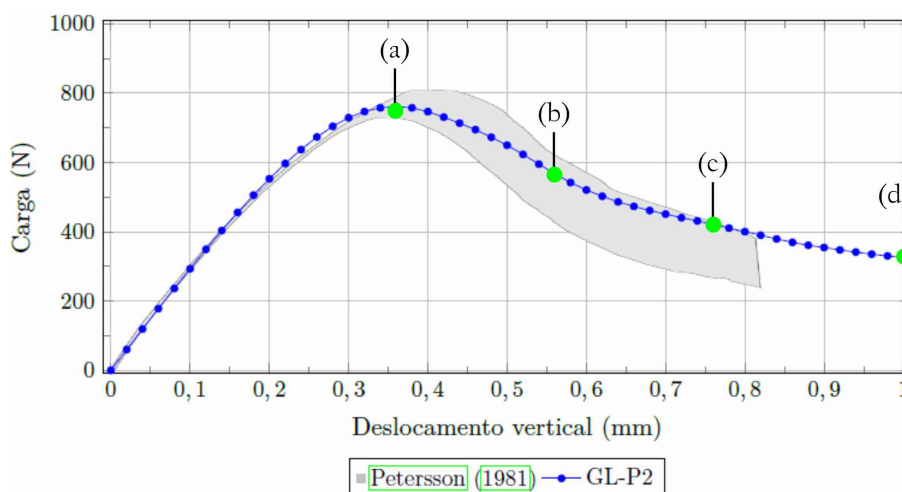


Figura 4.48: Pontos observados na trajetória de equilíbrio GL-P2.

A Figura 4.49 ilustra a evolução do dano no problema local ao longo da análise, representada pelos quatro pontos da trajetória de equilíbrio indicados na Figura 4.48. Observa-se que o dano concentra-se na região central do domínio local correspondente à região entre a trinca e os pontos de aplicação da carga no problema global.

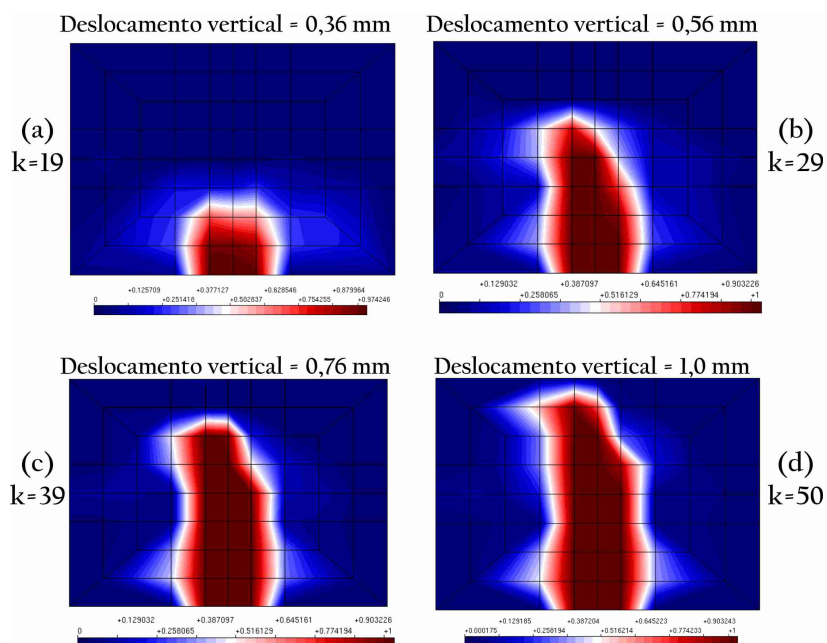


Figura 4.49: Distribuição de dano para o Modelo de Fissuração Distribuída.

A Figura 4.50 apresenta a configuração deformada do problema global ao longo da análise (ampliada para melhor visualização), representada pelos quatro pontos da trajetória de equilíbrio indicados na Figura 4.48.

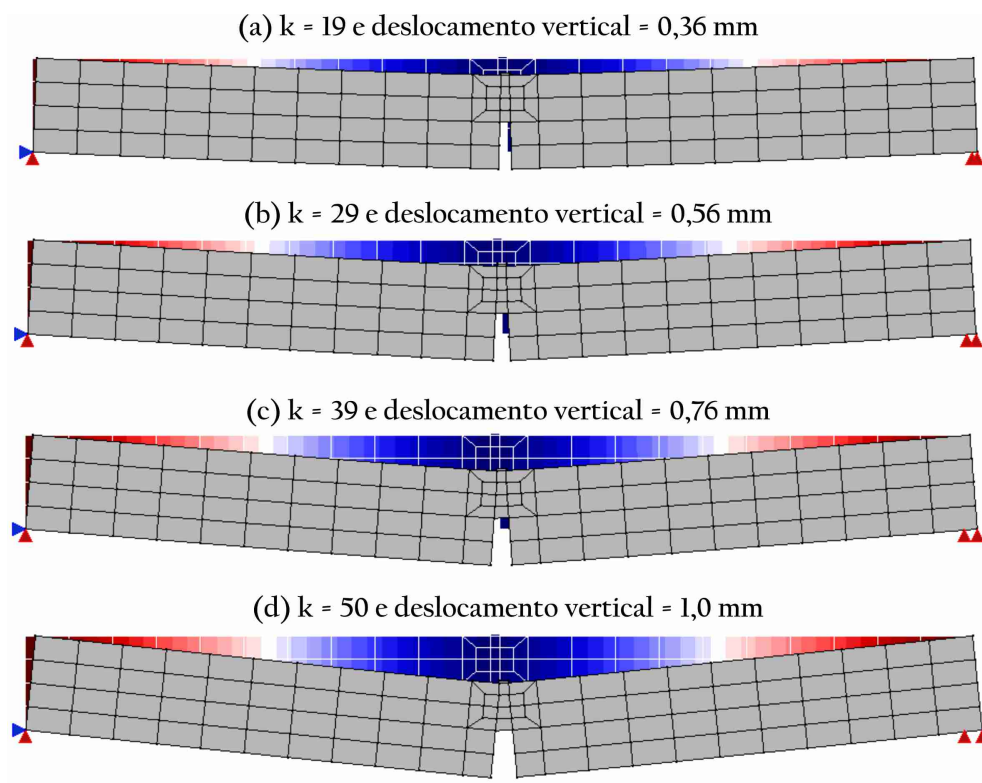


Figura 4.50: Configuração deformada do problema global para o Modelo de Fissuração Distribuída.

4.2.2.2 Modelo de Microplanos

Segundo Penna (2011), os modelos tradicionais de dano apresentam soluções satisfatórias para um comportamento ortotrópico. A complexidade inserida nos modelos de dano inviabilizam a representação na anisotropia, mas a solução para a sua representação de forma mais simples é apresentada pelos Modelos de Microplanos.

Com o intuito de avaliar também esse tipo de modelo, aplica-se nesta seção o Modelo de Microplanos de Leukart e Ramm (2006), implementado no INSANE por Wolenski (2013), no qual é utilizada uma restrição cinemática com componentes de deformação volumétrica e desviadora e é adotada uma única variável de dano que acopla os danos volumétrico e desviador nos microplanos, controlando a degradação a partir de funções de evolução de dano dependentes de uma única medida de deformação equivalente (detalhes descritos no Apêndice E).

A partir das informações experimentais definidas por Petersson (1981) e apresentadas na Tabela 4.9, foram obtidos a partir de parametrização de Wolenski (2013) os parâmetros numéricos para as funções de dano linear, bilinear, exponencial e polinomial com a medida de deformação equivalente proposta por de Vree (1995) (Wolenski, 2013), conforme a Tabela 4.11.

Tabela 4.11: Parâmetros das funções de dano (Wolenski, 2013).

Linear				
$\kappa_0 = 0,000190$	$\kappa_u = 0,00460$			
Bilinear				
$\kappa_0 = 0,000195$	$\kappa_u = 0,0055$	$\kappa_{cr} = 0,00155$	$f_0 = 4,0$	$f_{cr} = 2,25$
Exponencial				
$\alpha^{mic} = 0,960$	$\beta^{mic} = 500$	$\kappa_0 = 0,0002$		
Polinomial				
$f^e = 5,95 \text{ MPa}$	$E^0 = 30000,0 \text{ MPa}$	$\kappa_0 = 0,000385$		

Nesta tabela, os parâmetros adimensionais são definidos como: κ_0 é o valor

limite de iniciação do dano, κ_u determina o valor final do dano, κ_{cr} delimita um valor intermediário do dano. Já a tensão limite do material é representada por f_0 , a tensão intermediária no trecho pós-pico é definida por f_{cr} , α^{mic} é a degradação máxima do material e β^{mic} é o parâmetro que governa a forma da curva pós-pico. f^e é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e E^0 é o módulo de elasticidade inicial.

Assim como efetuado na Seção 4.2.2.1, o MEFG convencional é aplicado em duas análises com a mesma malha global da Figura 4.45: MEFG-P0, na qual nenhum nó é enriquecido com funções polinomiais (264 graus de liberdade), e MEFG-P2, em que os nós vermelhos e os nós brancos foram enriquecidos com a função polinomial P2 (424 graus de liberdade) e os mesmos parâmetros numéricos são adotados:

- 120 passos; e
- método de controle direto de deslocamento do ponto A na direção vertical, com passos de deslocamento de 0,008333 mm.

As trajetórias de equilíbrio das análises MEFG-P0 e MEFG-P2 obtidas com a aplicação do Modelo de Microplanos combinado com as leis de dano linear, bilinear, exponencial e polinomial são apresentadas nas Figuras 4.51, 4.52, 4.53 e 4.54, respectivamente. Similarmente aos resultados apresentados na Figura 4.46, as trajetórias MEFG-P0 distanciam-se dos resultados experimentais de Petersson (1981) e as trajetórias MEFG-P2 assemelham-se ao comportamento experimental apenas no ramo ascendente, ocorrendo instabilidade no restante da curva, especialmente para as leis de dano linear e exponencial.

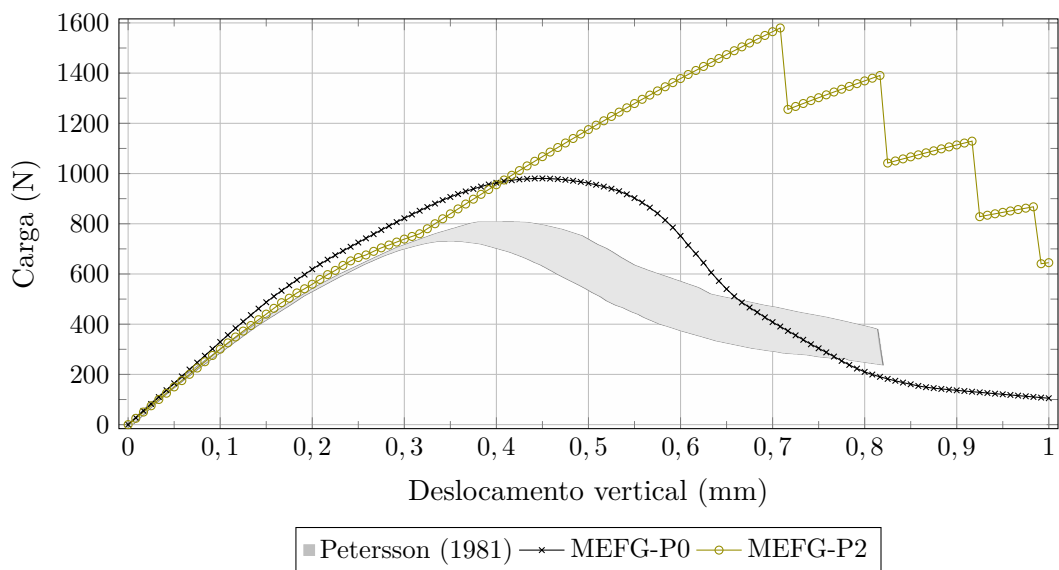


Figura 4.51: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Microplanos com lei de dano linear com P0 e P2.

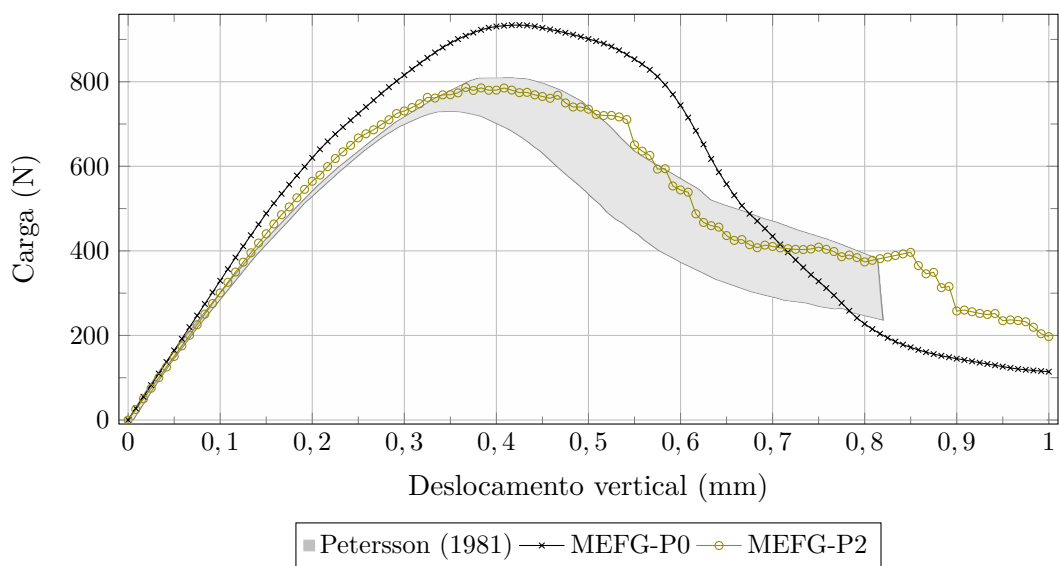


Figura 4.52: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Microplanos com lei de dano bilinear com P0 e P2.

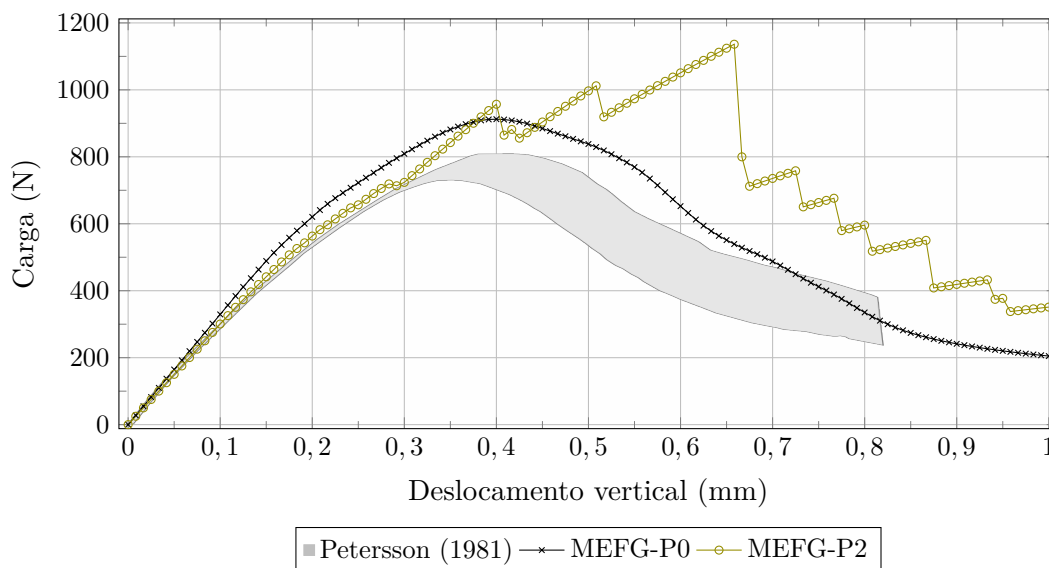


Figura 4.53: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Microplanos com lei de dano exponencial com P0 e P2.

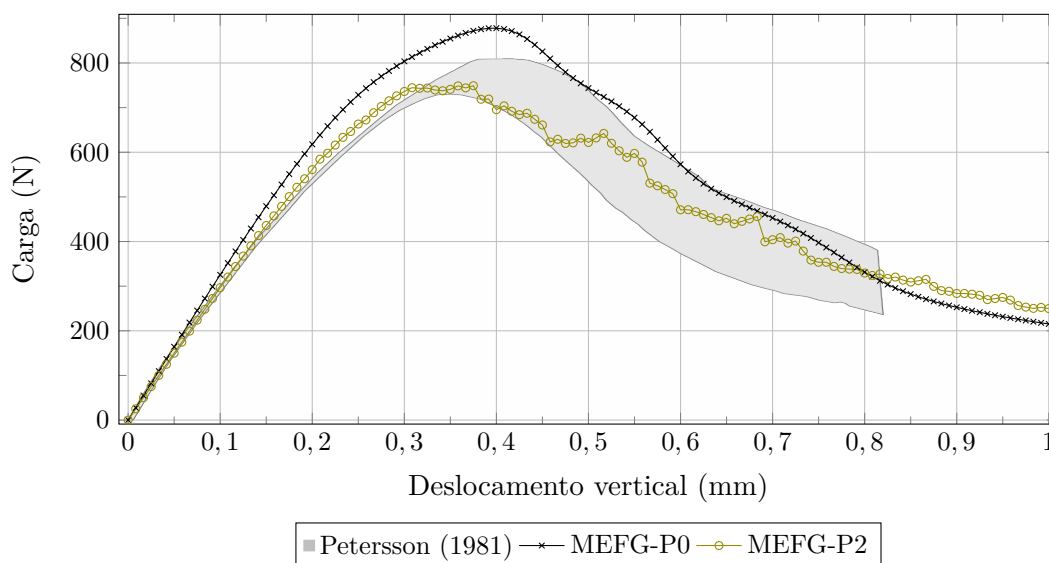


Figura 4.54: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional e Modelo de Microplanos com lei de dano polinomial com P0 e P2.

Investiga-se, através de simulações numéricas com o Modelo de Microplanos e quatro leis de dano, o comportamento das respostas obtidas pela aplicação do MEFG global-local não linear, com as malhas representativas dos problemas global e local ilustrados na Figura 4.45. Cada uma das Figuras 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58 reúne três trajetórias de equilíbrio obtidas com a utilização das leis de dano, linear, bilinear, exponencial e polinomial, respectivamente.

A tendência geral observada nessas quatro figuras é a de que a aplicação de enriquecimento polinomial nos nós que contornam a região onde são aplicados os enriquecimentos com a solução global-local aproxima as trajetórias de equilíbrio dos resultados experimentais de Petersson (1981), de maneira mais expressiva quando trata-se do enriquecimento P2. As leis de dano linear (Figura 4.55) e bilinear (Figura 4.56) não representaram bem o comportamento experimental. Verifica-se boa concordância dos resultados GL-P2 das leis de dano exponencial (Figura 4.57) e polinomial (Figura 4.58) com os resultados experimentais na estimativa da carga máxima, sendo que a lei polinomial descreveu de maneira mais adequada a trajetória de equilíbrio.

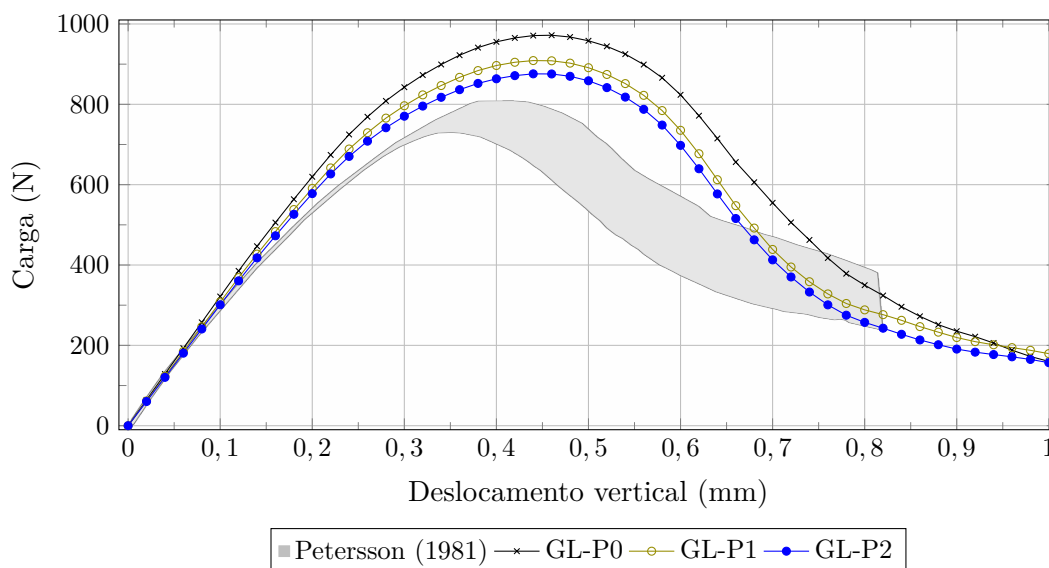


Figura 4.55: Trajetória de equilíbrio para a lei de dano linear.

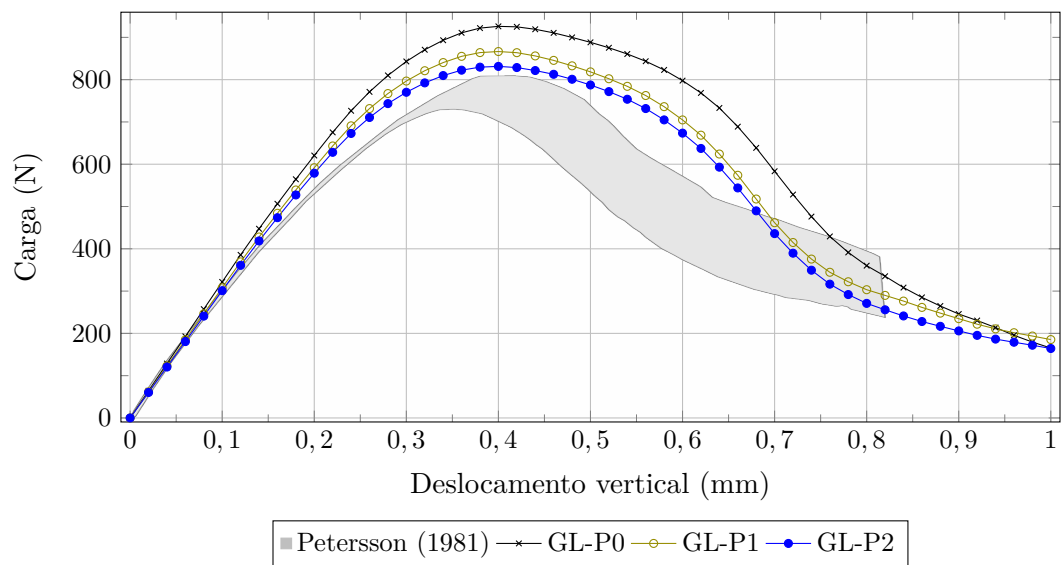


Figura 4.56: Trajetória de equilíbrio para a lei de dano bilinear.

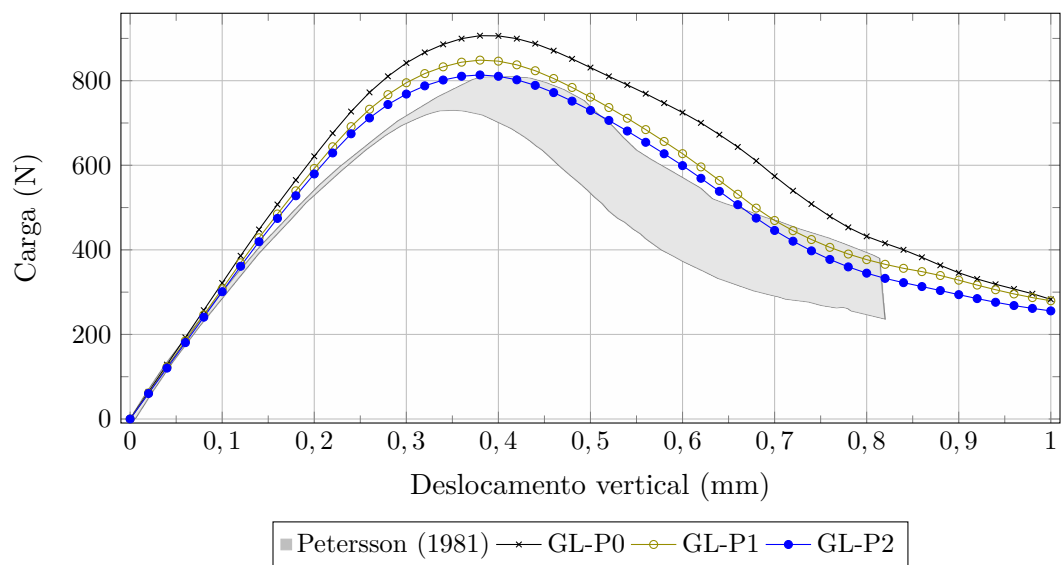


Figura 4.57: Trajetórias de equilíbrio para a lei de dano exponencial.

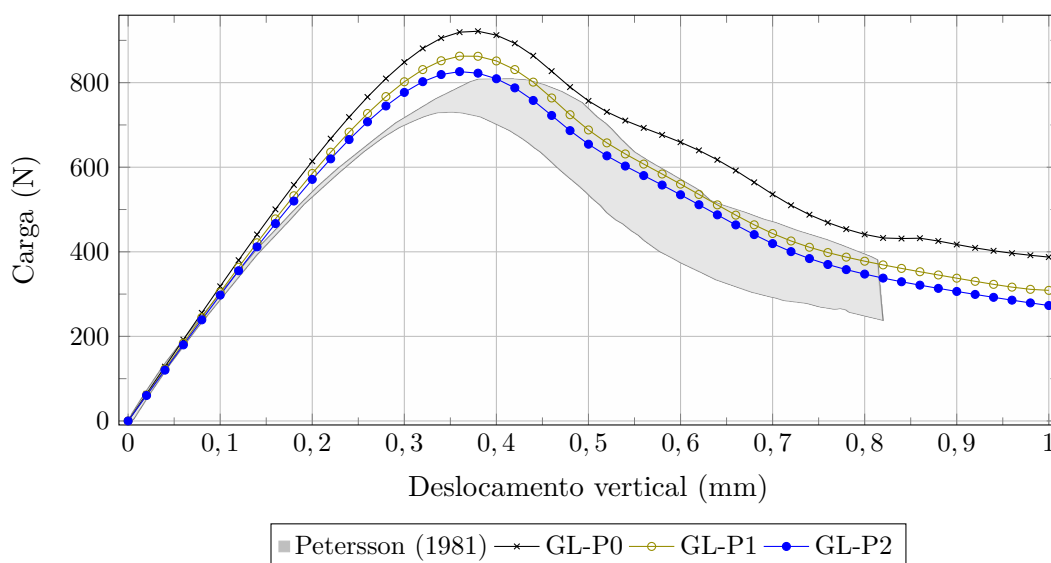


Figura 4.58: Trajetória de equilíbrio para a lei de dano polinomial.

As Figuras 4.59 e 4.60 reúnem as distribuições de dano, correspondentes aos deslocamentos verticais do nó de controle 0,50 mm e 1,0 mm, obtidas nas análises GL-P2 de cada lei de dano aplicada com o Modelo de Microplanos.

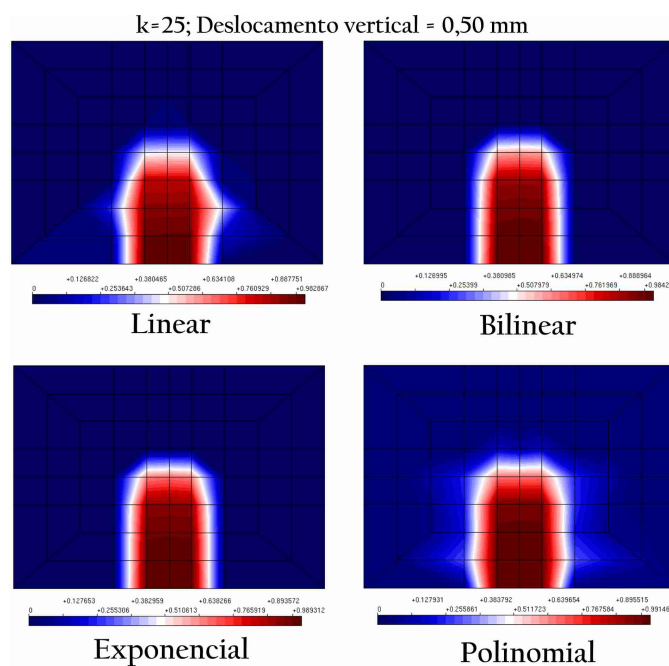


Figura 4.59: Distribuição de dano das quatro leis de dano: deslocamento vertical de 0,50 mm.

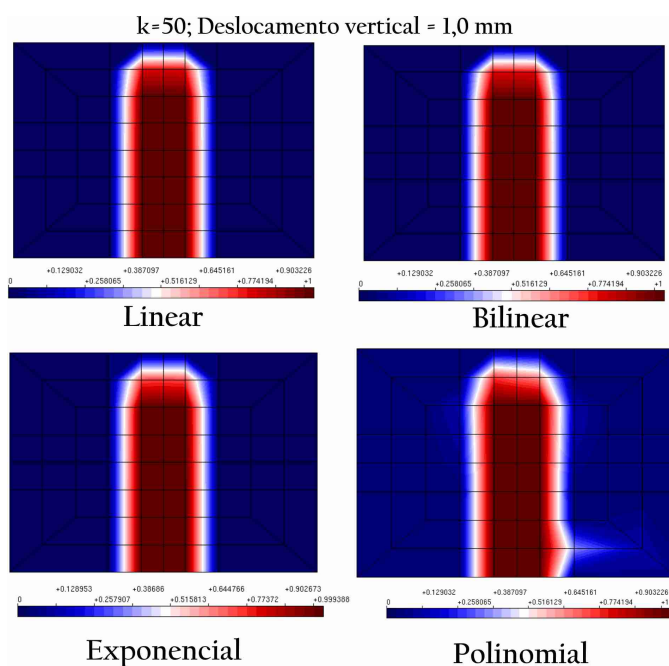


Figura 4.60: Distribuição de dano das quatro leis de dano: deslocamento vertical de 1,0 mm.

A Figura 4.61 apresenta a configuração deformada do problema global (ampliada para melhor visualização) correspondente ao ponto de carga máxima, obtida nas análises GL-P2 de cada lei de dano aplicada com o Modelo de Microplanos.

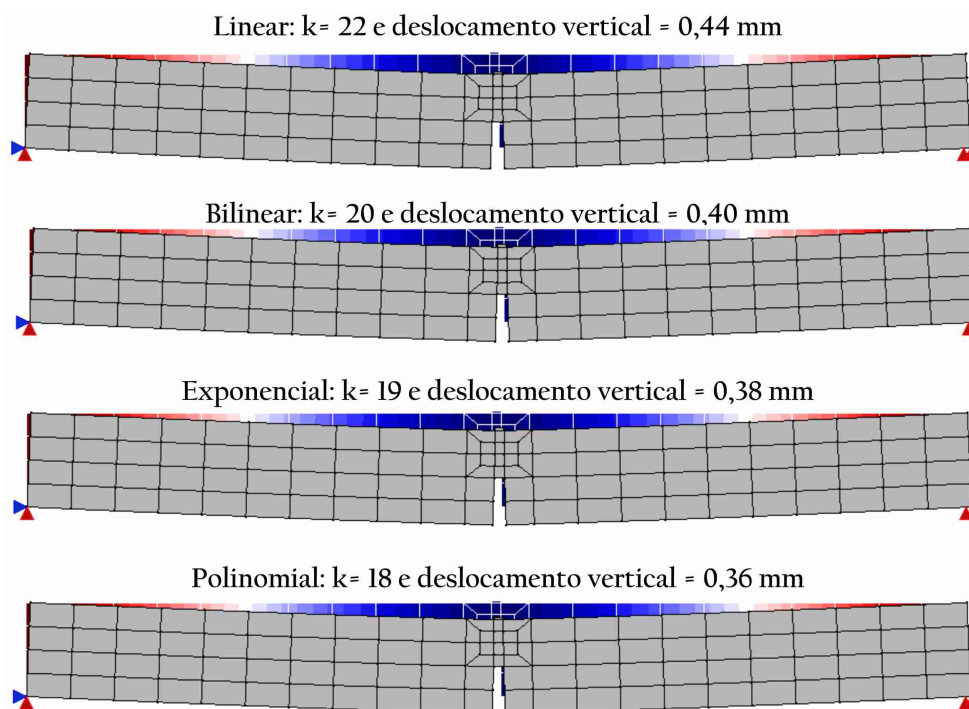


Figura 4.61: Configuração deformada do problema global das quatro leis de dano.

4.2.3 Cisalhamento em quatro pontos - Arrea e Ingraffea (1982)

A análise do comportamento do processo de degradação de estruturas de concreto, quando submetidas a um modo misto de sollicitação, é bastante explorada na modelagem numérica devido à dificuldade que envolve a simulação dos efeitos do cisalhamento em meios parcialmente frágeis. O modo misto de sollicitação foi investigado, através de ensaios experimentais ou modelos numéricos, a partir do ensaio de cisalhamento em quatro pontos por diversos autores, dentre eles Arrea e Ingraffea (1982). Os ensaios de cisalhamento em quatro pontos em vigas de concreto efetuados por esses autores apresenta resultados do deslocamento vertical relativo das extremidades da trinca, medida conhecida como CMSD - *Crack Mouth Sliding Displacement* (deslocamento da boca da trinca).

O ensaio é esquematizado na Figura 4.62 quanto às dimensões, carregamentos aplicados, condições de apoio e entalhe, destacando-se a representação do CMSD. Carga de referência de $P = 130000,0 \text{ N}$.

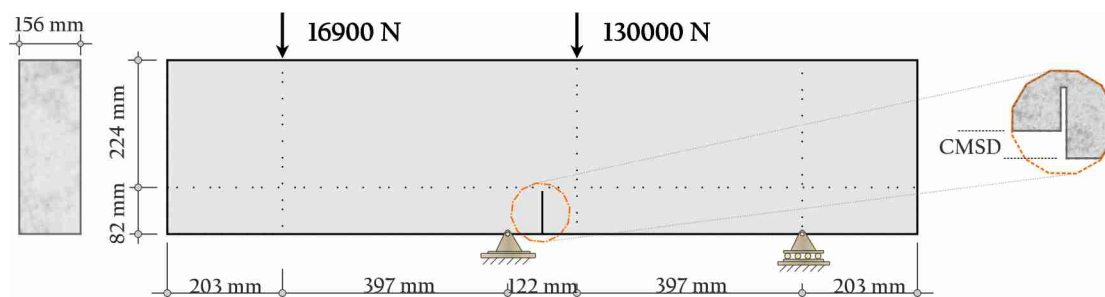


Figura 4.62: Geometria e carregamento do modelo.

A finalidade das análises dessa seção é averiguar o comportamento das respostas obtidas para uma mesma malha global, na presença e ausência de enriquecimento polinomial, quando do refinamento da malha local. A malha global apresentada na Figura 4.63 possui 42 elementos quadrilaterais de quatro nós e 59 nós. Nesta figura, destaca-se o ponto A que, para as malhas globais das simulações numéricas, equivale ao nó cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio. O nó representado por esse ponto é duplicado para simular uma das

extremidades da trinca. Os pontos B e C dos problemas locais 1 e 2, respectivamente, são adotados como nós de controle direto de deslocamento na análise não linear pelo método de controle de deslocamentos. As malhas locais avaliadas são refinadas da seguinte maneira:

- Problema local 1: 64 elementos quadrilaterais de quatro nós e 81 nós; e
- Problema local 2: 144 elementos quadrilaterais de quatro nós e 169 nós.

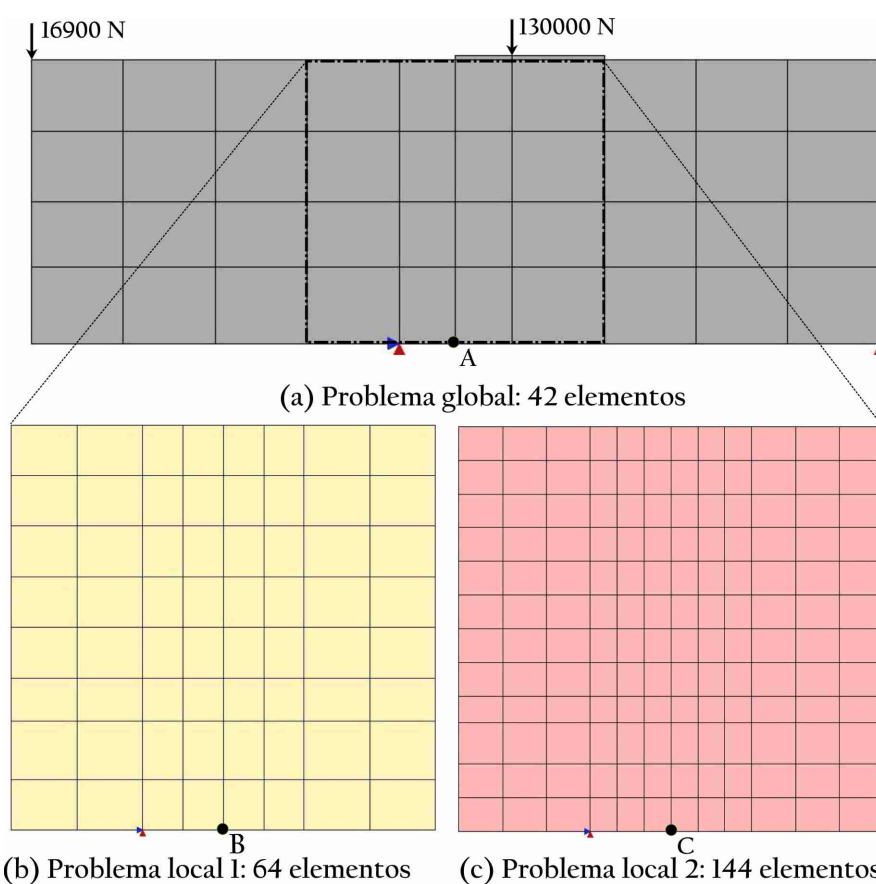


Figura 4.63: Problemas global e problemas locais. Para simplificar as análises, foram desconsiderados os trechos do domínio global sujeitos a apenas movimentos de corpo rígido.

O material é adotado com módulo de elasticidade $E_0 = 24800,0$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$. No problema local foi utilizado o Modelo de Fissuração Distribuída com a lei de Carreira e Chu (1985) para compressão e de Boone e Ingraffea (1987) para tração, cujos parâmetros, juntamente àqueles de Arrea e Ingraffea

(1982) para o concreto, são listados na Tabela 4.12. Nos experimentos de Arrea e Ingraffea (1982), a energia de fratura do concreto variou de 100,0 N/m a 140,0 N/m e a resistência à tração de 2,80 N/mm² a 4,0 N/mm². Assim, os parâmetros dos modelos aqui utilizados foram obtidos a partir dos valores médios dessas grandezas.

Tabela 4.12: Parâmetros materiais e das leis tensão-deformação

Módulo de elasticidade: $E_0 = 24800,0$ MPa coeficiente de Poisson: $\nu = 0,18$	
Parâmetros das leis de Carreira e Chu (1985) e Boone e Ingraffea (1987)	
Resistência à compressão	$F_c = 34,0$ MPa
Resistência à tração	$F_t = 3,40$ MPa
Energia de fratura	$G_f = 0,120$ MPa
Comprimento característico	$l_f = 40$ mm
Deformação	$\varepsilon_c = 0,002$

A análise não linear do problema local é realizada com controle de deslocamentos, aproximação secante do tensor constitutivo e uma tolerância para a convergência de $9 \times 10^{-4}(\times 100\%) = 0,090\%$ em relação à norma do vetor de deslocamentos incrementais. Conforme citado anteriormente, o deslocamento vertical do ponto A da Figura 4.63 é o grau de liberdade de controle. Nos modelos locais são definidos o parâmetro de penalidade $\eta = 1 \times 10^{10}$ e 4×4 pontos de Gauss por elemento (mesmo número de pontos de Gauss do modelo global).

A definição dos parâmetros numéricos fundamentou-se em alguns testes realizados (a exemplo do que já foi efetuado e detalhado na Seção 4.2.1.1), e a seguinte combinação de parâmetros foi considerada adequada:

- 40 passos globais;
- 10 passos locais;
- 5 passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local; e
- passo global de deslocamento de 0,0065 mm.

As análises são organizadas de acordo com os refinamentos das malhas representativas dos problemas locais. As simulações numéricas, porém, iniciam-se com a aplicação do MEFM convencional para verificação das respostas obtidas. Assim, tem-se:

- Seção 4.2.3.1 MEFM convencional: nesta seção são avaliadas três malhas de elementos finitos com e sem a aplicação de enriquecimento polinomial P1, sendo a primeira igual à malha global grosseira da Figura 4.63 e a segunda e terceira malhas com o mesmo nível de refinamento dos problemas locais 1 e 2 apresentadas nessa mesma figura, respectivamente;
- Seção 4.2.3.2 MEFM global-local não linear: dividida em duas seções que contemplam as simulações dos problemas locais 1 e 2 apresentados na Figura 4.63 com a aplicação de enriquecimento global-local e também de enriquecimento com a função polinomial P1.

4.2.3.1 MEFM convencional

Para que se possa avaliar o desempenho da abordagem global-local proposta, é relevante primeiramente verificar o comportamento do problema quando solucionado via MEFM convencional. Para esse propósito, três malhas são utilizadas: Figura 4.64, cuja malha é igual à malha global avaliada com o MEFM global-local não linear na Seção 4.2.3.2; e Figuras 4.66 e 4.68, nas quais os níveis de refinamento são os mesmos das duas malha locais avaliadas na Seção 4.2.3.2. A cada malha estão atreladas duas simulações numéricas: a primeira sem enriquecimento polinomial e a segunda com enriquecimento polinomial P1 nos nós indicados nas respectivas figuras.

Assim como no problema local, utiliza-se o Modelo de Fissuração Distribuída com a lei de Carreira e Chu (1985) para compressão e de Boone e Ingraffea (1987) para tração, com os parâmetros apresentados na Tabela 4.12. Para manter a equivalência

com o número de passos locais da análise não linear no último bloco de análise global-local (bloco $k = 40$ com 210 passos locais) das simulações com MEF global-local não linear, os seguintes parâmetros numéricos são adotados:

- 210 passos; e
- método de controle direto de deslocamento do ponto A na direção vertical, com passos de deslocamento de 0,001238 mm.

O primeiro conjunto de análises é composto pelas malhas apresentadas na Figura 4.64, que possuem 42 elementos finitos e 59 nós. Na malha denominada MEF-P0 não há enriquecimento polinomial, totalizando 118 graus de liberdade. O enriquecimento com a função polinomial P1 é aplicado aos nós indicados na malha MEF-P1, somando 338 graus de liberdade.

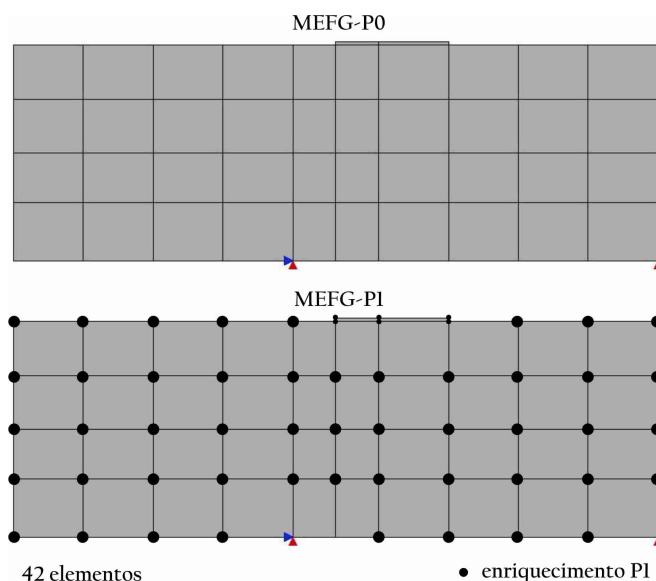


Figura 4.64: MEF convencional: malha com 42 elementos.

A Figura 4.65 apresenta as trajetórias de equilíbrio obtidas com as malhas MEF-P0 e MEF-P1. A trajetória de equilíbrio da malha MEF-P0 foi incapaz de descrever o ramo descendente da curva. A aplicação de enriquecimento polinomial promoveu a equivalência com o resultado experimental de Arrea e Ingrassia (1982) no ramo ascendente da trajetória da malha MEF-P1, mas observa-se a sua instabilidade no decorrer da análise. A utilização de uma malha grosseira, combinada

a um enriquecimento polinomial linear, não é capaz de captar o comportamento estrutural adequadamente.

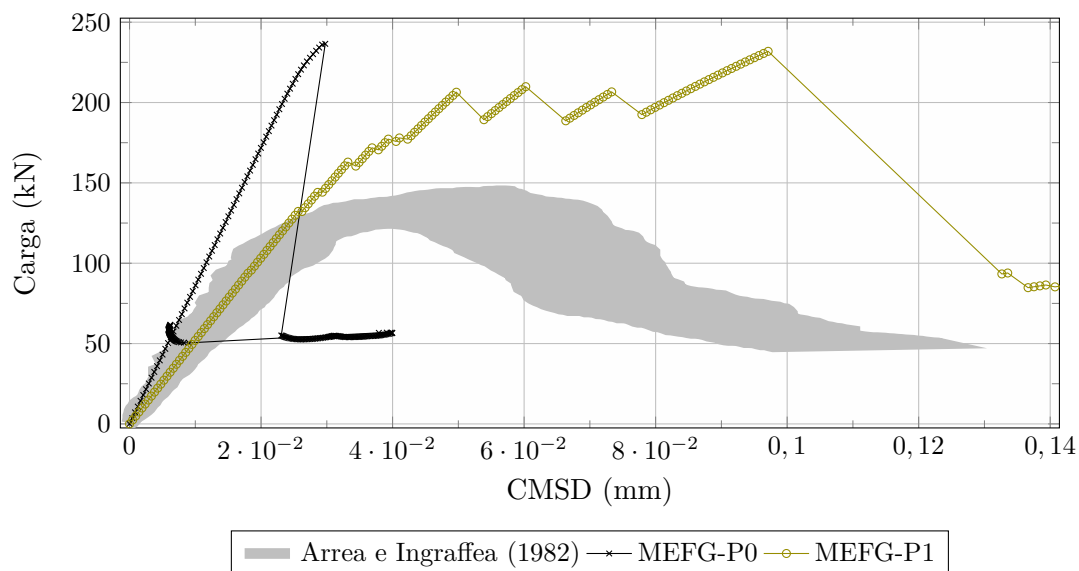


Figura 4.65: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 42 elementos.

O objetivo do segundo conjunto de análises foi verificar o comportamento estrutural obtido com a utilização de uma malha com refinamento equivalente ao da malha local adotada no problema local 1 (Figura 4.63). As malhas apresentadas na Figura 4.66 possuem 162 elementos finitos e 194 nós. Na malha denominada MEFG-P0 não há enriquecimento polinomial, somando 388 graus de liberdade. O enriquecimento com a função polinomial P1 é aplicado aos nós da região central da viga indicados na malha MEFG-P1, totalizando 608 graus de liberdade.

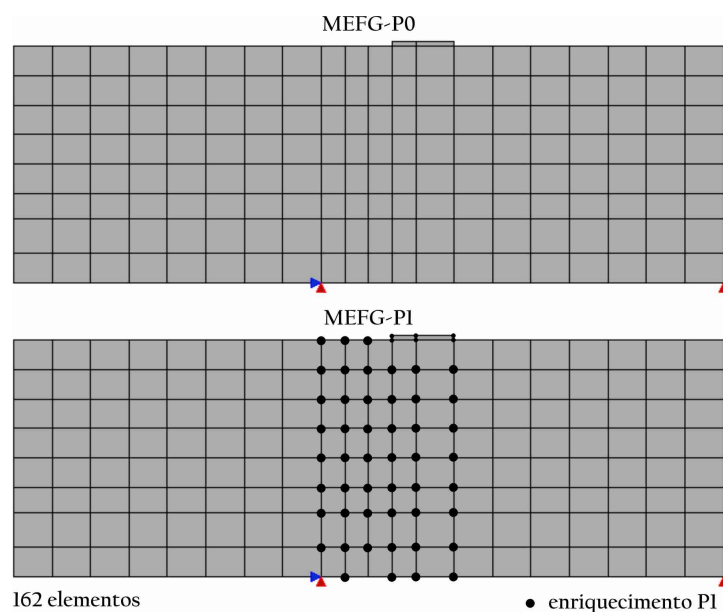


Figura 4.66: MEFG convencional: malha com 162 elementos.

Observa-se na Figura 4.67 que as trajetórias de equilíbrio acompanham por cima o espectro experimental de Arrea e Ingrassia (1982), sendo MEFG-P1 pouco mais próxima deste. No CMSD de aproximadamente $7 \cdot 10^{-2}$ mm, as trajetórias apresentam instabilidade. É evidente que o refinamento da malha propiciou respostas mais próximas ao resultado experimental do que os observados na Figura 4.65, porém o limite de carga permaneceu superior ao limite experimental.

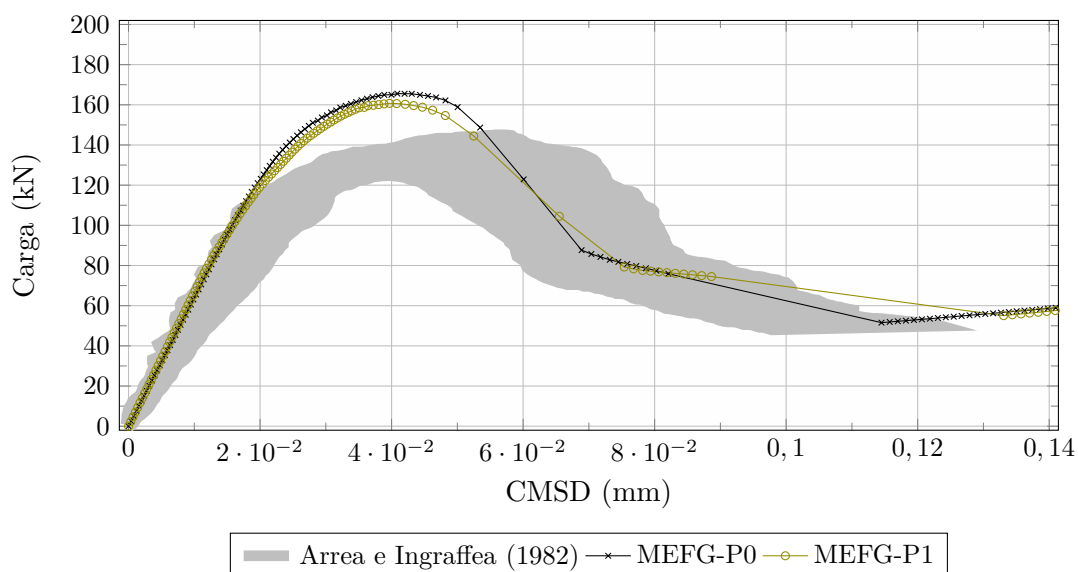


Figura 4.67: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 162 elementos.

Verifica-se nesse terceiro conjunto de análises o comportamento estrutural obtido com a utilização de uma malha com refinamento equivalente ao da malha local adotada no problema local 2 (Figura 4.63). As malhas apresentadas na Figura 4.68 possuem 362 elementos finitos e 409 nós. Na malha denominada MEFG-P0 não há enriquecimento polinomial, totalizando 818 graus de liberdade. O enriquecimento com a função polinomial P1 é aplicado aos nós da região central da viga indicados na malha MEFG-P1, somando 1238 graus de liberdade.

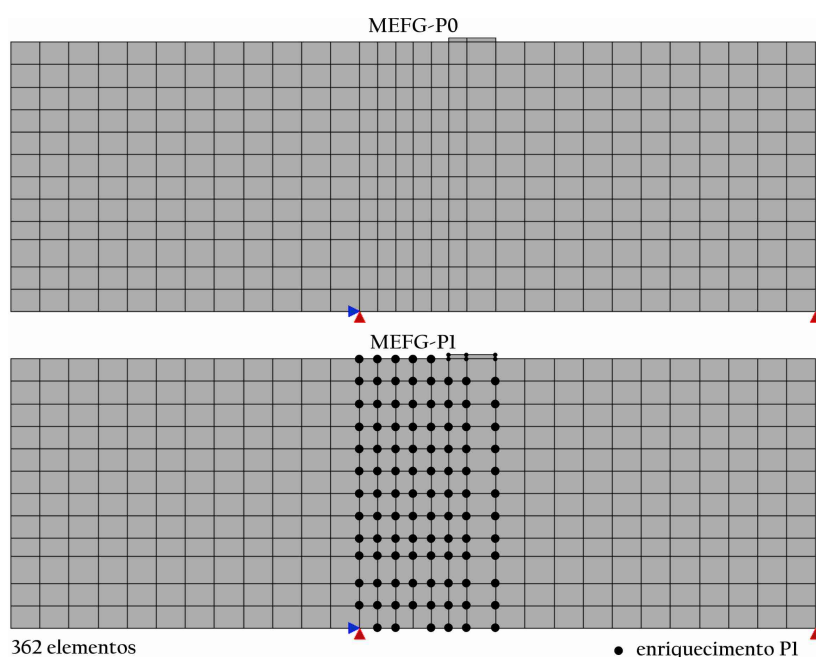


Figura 4.68: MEFG convencional: malha com 362 elementos

Na Figura 4.69 observa-se que a trajetória de equilíbrio da malha MEFG-P0 equivale ao resultado experimental até o CMSD de aproximadamente 4.10^{-2} mm, ocorrendo, na sequência, instabilidade. Já a trajetória da malha MEFG-P1, apesar de acompanhar o resultado experimental no trecho linear, apresenta instabilidade na descrição do ramo descendente.

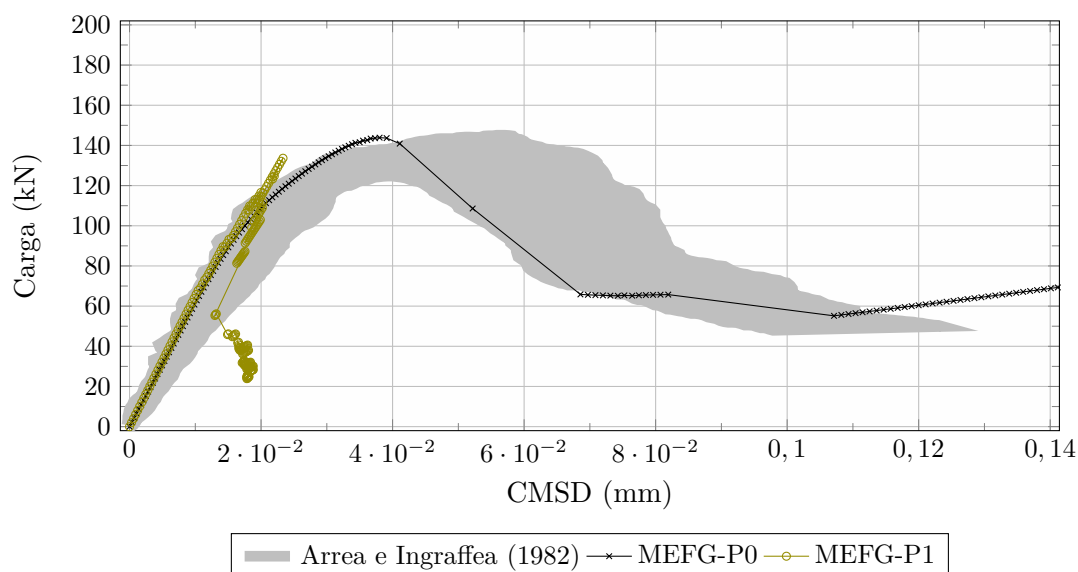


Figura 4.69: Trajetórias de equilíbrio: MEFG convencional com 362 elementos.

4.2.3.2 MEFG global-local não linear

As trajetórias de equilíbrio obtidas na seção anterior com o MEFG convencional permitiram concluir, de maneira geral, que a utilização de malhas de elementos finitos grosseiras, mesmo com a aplicação de enriquecimento polinomial, suscitou respostas incapazes de representar os resultados experimentais, descrevendo incorretamente a evolução do deslocamento vertical relativo da extremidade da trinca (Figura 4.65). As malhas mais refinadas propiciaram trajetórias de equilíbrio de aspecto semelhante ao espectro experimental de Arrea e Ingrassia (1982), principalmente no ramo ascendente (Figuras 4.67 e 4.69). Porém, a descrição do ramo descendente mostrou-se instável.

Neste contexto, a abordagem do MEFG global-local proposta é aplicada para averiguar o comportamento das respostas obtidas para a mesma malha global grosseira utilizada com MEFG convencional, na presença e ausência de enriquecimento polinomial, com duas malhas locais refinadas (Figura 4.63):

- Problema local 1: 64 elementos quadrilaterais de quatro nós e 81 nós; e
- Problema local 2: 144 elementos quadrilaterais de quatro nós e 169 nós.

Para cada um dos problemas locais foram efetuadas duas análises, representadas na Figura 4.70. Na primeira, denotada por *Problema global GL-P0: dez nós GL e 49 nós P0*, o enriquecimento com a solução global-local é aplicado em dez nós da malha global, enquanto os demais não são enriquecidos com a função polinomial P1, totalizando 140 graus de liberdade. Na segunda análise, indicada como *Problema global GL-P1: dez nós GL e 45 nós P1*, além dos dez nós enriquecidos com a solução global-local, outros 45 nós são enriquecidos com a função de enriquecimento P1, somando 318 graus de liberdade. Os nós pertencente à aresta onde o carregamento é aplicado não são enriquecidos com a função global-local porque há a transferência das condições de contorno entre os problemas global e local nessa região.

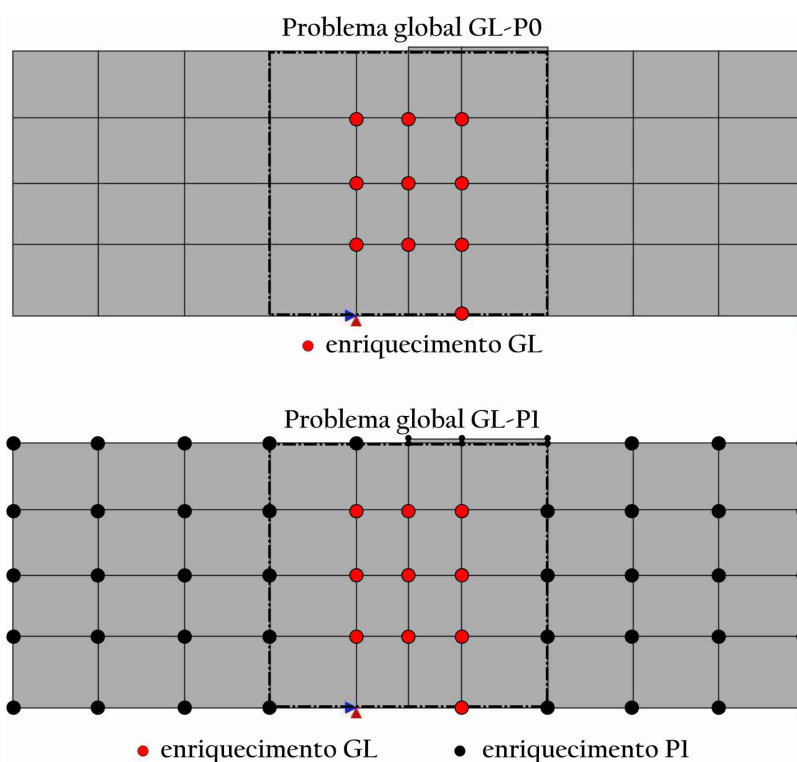


Figura 4.70: Problemas globais avaliados.

4.2.3.2.1 Problema local 1 - 64 elementos na malha local

A malha representativa do problema local 1, apresentada na Figura 4.63, foi obtida pela divisão por quatro de cada um dos 16 elementos globais correspondentes ao domínio local analisado. Os parâmetros materiais e numéricos para a solução

dos problemas foram previamente definidos na introdução da Seção 4.2.3. As trajetórias de equilíbrio obtidas para o problema local com 64 elementos combinado aos problemas globais GL-P0 e GL-P1 são reunidas na Figura 4.71. Observa-se que a trajetória (a) GL-P0 é muito rígida e destoa dos resultados experimentais de Arrea e Ingraffea (1982). Quando o enriquecimento P1 é incluído no problema global, nota-se, através da trajetória (b) GL-P1, que seu ramo ascendente e o início do ramo descendente, até o CMSD de aproximadamente $5 \cdot 10^{-2}$ mm, acompanham os resultados experimentais. Supõe-se que o enriquecimento polinomial contribuiu com a melhoria do resultado, mas a malha global pouco refinada aliada à malha local com apenas 64 elementos não é capaz de reproduzir o comportamento da viga no ensaio de cisalhamento em quatro pontos. Apesar de não descreverem completamente as trajetórias de equilíbrio, em relação às trajetórias obtidas com o MEF3 convencional apresentadas na Figura 4.65, é notório o aperfeiçoamento das respostas obtidas.

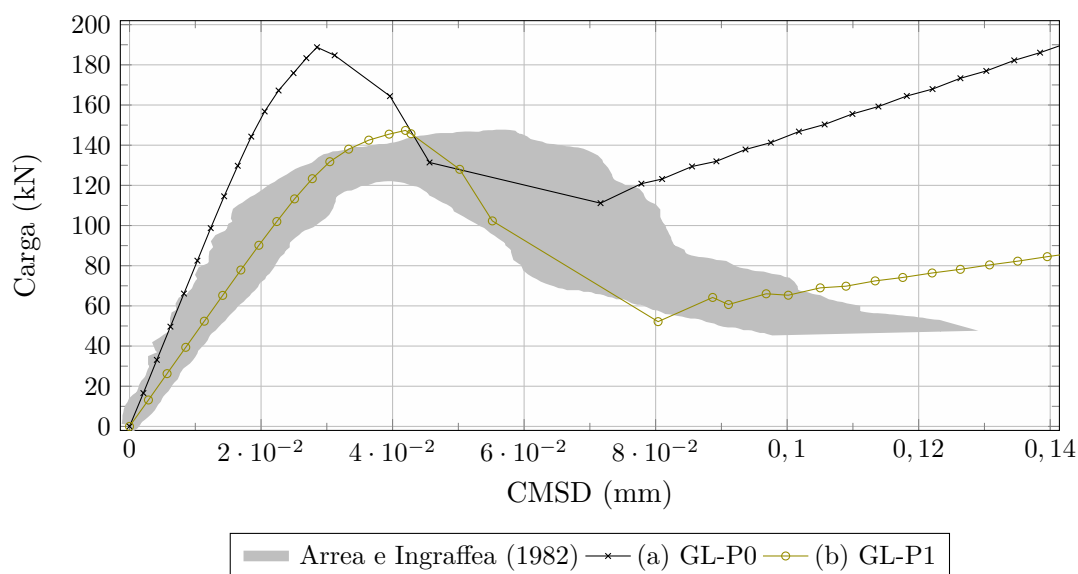


Figura 4.71: Trajetória de equilíbrio: problema local 1 - 64 elementos.

As Figuras 4.72, 4.73 e apresentam, respectivamente, os contornos de tensão de cisalhamento (τ_{xy}), a distribuição do dano no problema local 1 e a configuração deformada do problema global (ampliada para melhor visualização), correspondentes

ao máximo valor de carga (1,1334, que multiplicado pela carga aplicada de 130 kN leva ao valor de 147,3420 kN). Esse valor é alcançado no bloco de análise global-local $k = 15$, no qual são realizados 85 passos locais. A Figura 4.72 mostra que a banda de cisalhamento está localizada entre o apoio e a carga do centro da viga (carga aplicada no problema global), conforme esperado para o ensaio de cisalhamento em quatro pontos.

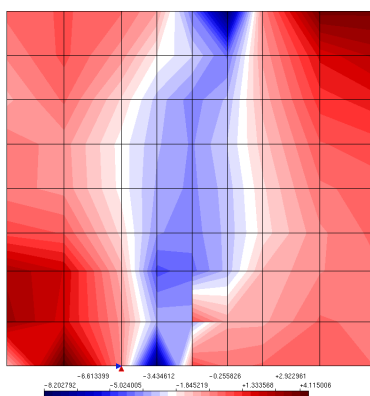


Figura 4.72: Distribuição de tensões de cisalhamento do problema local 1.

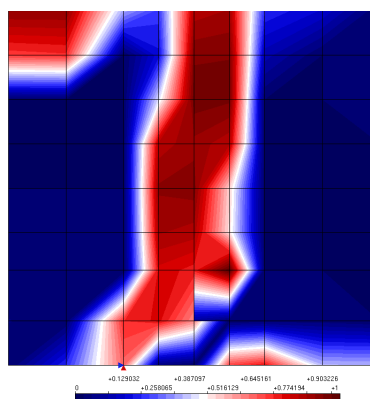


Figura 4.73: Distribuição de dano do problema local 1.

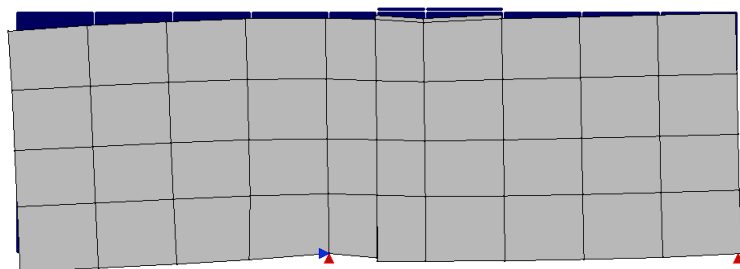


Figura 4.74: Configuração deformada do problema global 1.

4.2.3.2.2 Problema local 2 - 144 elementos na malha local

A partir das análises realizadas na seção anterior, decidiu-se investigar se o refinamento da malha local contribuiria com a regularização dos resultados obtidos. Como apresentado na Figura 4.63, dividiu-se por nove cada um dos 16 elementos globais correspondentes ao domínio local analisado, obtendo-se a malha do problema local 2 com 144 elementos. A Figura 4.75 ilustra as trajetórias de equilíbrio para os problemas globais GL-P0 e GL-P1. A trajetória de equilíbrio (a) GL-P0 apresenta uma carga limite aproximadamente 20% superior à carga limite do espectro experimental de Arrea e Ingraffea (1982), descrevendo ramo descendente até o CMDS de $7,5 \cdot 10^{-2}$ mm, ponto a partir do qual enrijece. Observa-se que a carga de pico obtida pela trajetória de equilíbrio (b) GL-P1 está bem mais próxima do valor limite de carga dos resultados experimentais e seu ramo descendente foi capaz de representar os resultados experimentais, descrevendo adequadamente a evolução do deslocamento vertical relativo da extremidade da trinca até o valor aproximado de $9 \cdot 10^{-2}$ mm, ponto a partir do qual apresenta enrijecimento. Dessa análise, infere-se que é possível obter resultados próximos aos experimentais com a adoção de uma malha global grosseira, mas que contenha enriquecimento polinomial em seus nós, combinada com uma malha local mais refinada. A diminuição do tamanho do passo global de deslocamentos poderia ocasionar a melhor descrição das trajetórias de equilíbrio.

As Figuras 4.76, 4.77 e 4.78 apresentam, respectivamente, os contornos de tensão de cisalhamento (τ_{xy}), a distribuição do dano no problema local 2 e a configuração deformada do problema global (ampliada para melhor visualização), correspondentes ao máximo valor de carga (1,2325, que multiplicado pela carga aplicada de 130 kN leva ao valor de 160,225 kN). Esse valor é alcançado no bloco de análise global-local $k = 16$, no qual são realizados 90 passos locais. A formação da banda de cisalhamento apresentada na Figura 4.76, localizada entre o apoio e a carga do centro da viga (carga aplicada no problema global), é um fenômeno característico

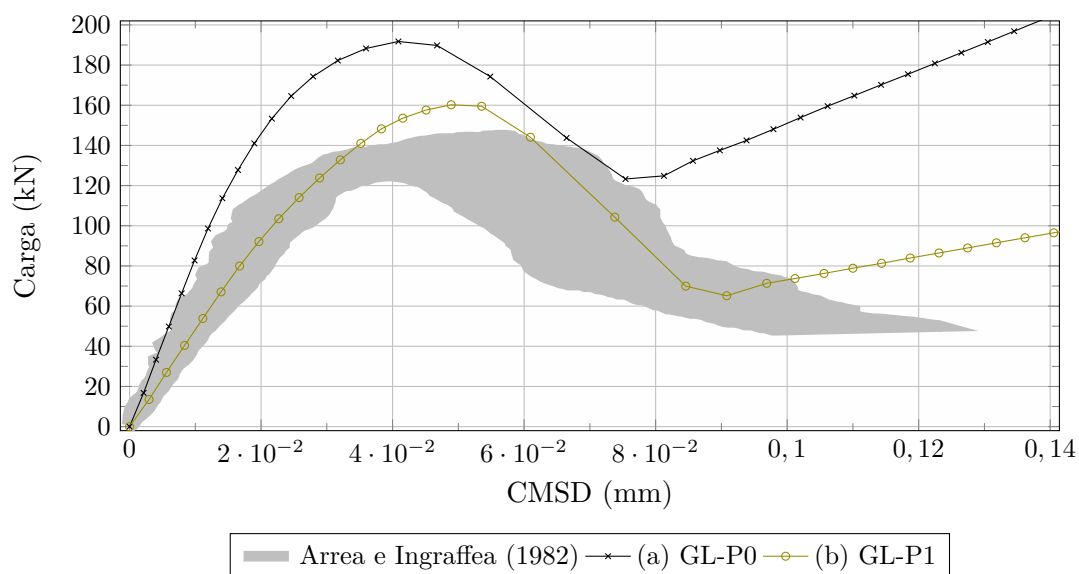


Figura 4.75: Trajetória de equilíbrio: problema local 2 - 144 elementos.

desse tipo de ensaio. Na Figura 4.78 observa-se deslocamento vertical relativo das extremidades da trinca. A Figura 4.77 evidencia que há concentração de dano na região que liga a ponta da trinca ao ponto de aplicação de carga e o valor máximo alcançado neste ponto da análise é de 0,9359.

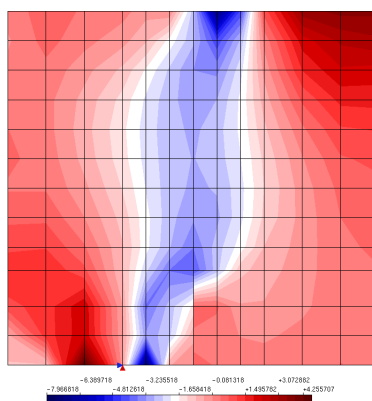


Figura 4.76: Distribuição de tensões de cisalhamento do problema local 2.

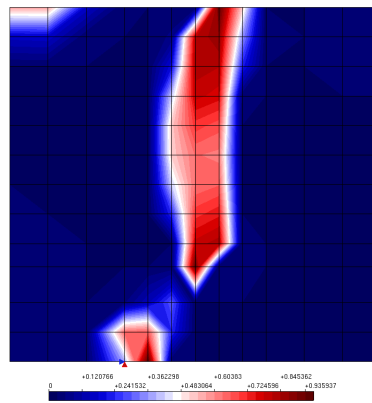


Figura 4.77: Distribuição de dano do problema local 2.

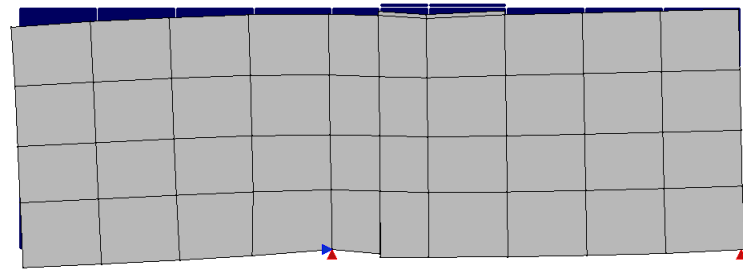


Figura 4.78: Configuração deformada do problema global 2.

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi adaptar a técnica global-local no âmbito dos métodos baseados na Partição da Unidade para descrever o processo de deterioração de meios parcialmente frágeis dentro do contexto da Mecânica do Dano Contínuo. Na abordagem proposta, a evolução dos fenômenos de deterioração material observados somente no problema local e sua influência no comportamento global das estruturas foi captada a partir de modelos constitutivos apropriados.

Neste capítulo são apresentadas as principais contribuições deste trabalho (Seção 5.1), bem como algumas recomendações para trabalhos futuros (Seção 5.2).

5.1 MEEG global-local para análise fisicamente não linear

No que se refere à abordagem global-local não linear proposta, este trabalho propiciou as seguintes contribuições:

- habilitação do MEEG para análise fisicamente não linear de estruturas no *INSANE* nos trabalhos de Monteiro *et al.* (2014) e Monteiro *et al.* (2017);
- possibilidade de análise não linear via abordagem global-local com o MEEG por meio de implementação no sistema computacional *INSANE* fundamentada na versão para análise linear de Alves (2012) e da adaptação da metodologia de Kim e Duarte (2015), no qual o problema local é tratado com modelos de

trinca coesiva;

- aplicabilidade do ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos desenvolvido por Penna (2011), em especial do Modelo de Fissuração Distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985, 1986) (Seções 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2.2 e 4.2.3), do Modelo de Dano Escalar de Mazars (1984) (Seção 4.1.1) e do Modelo de Microplanos de Leukart e Ramm (2006) (Seções 4.1.2 e 4.2.2.2) com as leis de dano linear, bilinear, exponencial e polinomial;
- os benefícios da abordagem proposta foram evidenciados na comparação com os resultados de análises feitas com o MEFG convencional que, de maneira geral, foram incapazes de equivaler aos resultados experimentais por apresentarem localização de deformação numericamente induzida quando utilizadas malhas refinadas e distanciamento das respostas experimentais quando aplicada malha grosseira;
- a aplicação do MEFG global-local para análise não linear mostrou-se adequada, a depender dos parâmetros empregados, através da obtenção de trajetórias de equilíbrio coerentes com os resultados experimentais disponíveis na literatura;
- o estudo dos parâmetros numéricos da análise não linear via MEFG global-local realizado na Seção 4.2.1.1 (Influência do número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local e do tamanho do passo global) permitiu inferir que é necessário um número ótimo de passos locais adicionados para representar o problema adequadamente e que o aumento do tamanho do passo global de deslocamento não alterou significativamente os resultados, havendo a convergência das trajetórias. O incremento de 0,02 mm mostrou-se mais adequado para a descrição das trajetórias de equilíbrio e foi adotado na Seção 4.2.1.2;

- nas análises realizadas na Seção 4.2.1.2 acerca do efeito do tamanho do problema local e do número de nós globais enriquecidos com a função global-local no painel em L observou-se na Seção 4.2.1.2.1 que a resposta da análise MEFG-P0 já apresentou tendência de localização por conta do refinamento h , e que a análise global-local com nove e 18 nós enriquecidos (Seções 4.2.1.2.2 e 4.2.1.2.3), cuja região local tem refinamento equivalente ao da análise com MEFG convencional, não apresentou essa tendência. Quando 29 nós foram enriquecidos (Seção 4.2.1.2.4), a trajetória de equilíbrio foi modificada, indicando uma tendência semelhante de localização a exemplo do que ocorreu com o enriquecimento polinomial nas análises com o MEFG convencional. Os resultados obtidos com o enriquecimento de 51 e 75 nós (Seções 4.2.1.2.5 e 4.2.1.2.6) convergiram com o resultado com 29 nós enriquecidos, o que indica que o enriquecimento de nós fora da região de dano não influencia as respostas. Pelo fato da região danificada estar bastante confinada, no interior dos três domínios locais, não houve impacto na qualidade das condições de contorno aplicadas a partir do resultado do problema global. O processo incremental do problema global permite que, a partir do segundo bloco de análise global, tenha-se uma aproximação de qualidade bastante superior do que a inicial. Gradativamente, a cada bloco de análise global-local, esta solução global é incrementada e, da mesma forma, a função a ser imposta como condição de contorno no problema local. Este cenário pode também ser usado para explicar o porquê de não se encontrar impacto do tamanho da zona *buffer* na qualidade da análise do problema local;
- na Seção 4.2.2 foi demonstrado que os recursos implementados comportam adequadamente a aplicação de modelos constitutivos disponíveis na biblioteca do INSANE (Penna, 2011), obtendo-se respostas concordantes com resultados experimentais disponíveis na literatura com a utilização do Modelo de Fissuração Distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira

e Chu (1985, 1986) e do Modelo de Microplanos de Leukart e Ramm (2006) combinado com as leis de dano linear, bilinear, exponencial e polinomial;

- na Seção 4.2.3 foi avaliado o comportamento das respostas obtidas para uma mesma malha global, na presença e ausência de enriquecimento polinomial, quando do refinamento da malha local, e observou-se que foi possível obter resultados próximos aos experimentais com a adoção de uma malha global grosseira, desde que contenha enriquecimento polinomial em seus nós, combinada com uma malha local mais refinada.

5.2 Recomendações para trabalhos futuros

A partir das contribuições deste trabalho, é possível indicar recomendações para trabalhos futuros relacionadas com os temas tratados. Algumas destas recomendações são enumeradas a seguir.

1. Incorporar a geração automática do modelo local apresentada no trabalho de Fonseca (2019), realizada durante o processamento a partir de dados da localização do domínio local, tamanho e grau de refinamento desejados;
2. Adaptar a implementação para que a abordagem proposta possa comportar outros métodos de controle no problema local, como o método de controle de deslocamento generalizado e o método de comprimento de arco;
3. Empregar outros modelos constitutivos para concreto disponíveis na biblioteca do sistema computacional *INSANE*;
4. Considerar, no modelo local, além do comportamento não linear do meio pela presença de dano, também a propagação de trinca coesiva, integrando a estratégia utilizada neste trabalho àquela empregada em Kim e Duarte (2015);
5. Aplicar no problema local alguma técnica de regularização, como os modelos não locais;

6. Organizar as classes envolvidas na análise global-local via MEEG para englobar outros métodos, como os Métodos Sem Malha. A generalização do algoritmo é fundamental para que qualquer método baseado no conceito da Partição da Unidade possa ser utilizado no problema global enriquecido e qualquer método possa ser empregado no problema local.

Apêndice A

Sistema Computacional INSANE

O INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é um ambiente computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Esse sistema é implementado em linguagem Java e utiliza o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO). A plataforma foi concebida com o intuito de ser um sistema segmentado, amigável e capaz de suportar novas implementações sem modificações significativas.

Em síntese, o sistema INSANE pode ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processadores são aplicações gráficas interativas que fornecem recursos para construir as diversas representações discretas de um problema estrutural, além da visualização de resultados. O processador é a aplicação mais importante do ambiente e representa o núcleo numérico, responsável pela obtenção dos resultados dos modelos.

Este sistema é caracterizado pela utilização de código livre e da linguagem Java, pela total separação entre o núcleo numérico e interfaces gráficas, viabilizando alterações e ampliações, e pela facilidade de uso. Em adição, sua biblioteca é composta por diversos módulos que permitem aos desenvolvedores realizar implementações independentes e simultâneas.

Neste capítulo são apresentados os módulos do núcleo numérico do sistema relacionados às implementações que são objeto deste trabalho. Isto é feito através de

diagramas de classes que ilustram a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções. Estes diagramas seguem a proposta da *Unified Modeling Language* (UML), que é uma linguagem padronizada para a modelagem de sistemas orientados a objetos.

Para a orientação quanto ao entendimento das implementações realizadas neste trabalho, adotou-se a simbologia ilustrada na Figura A.1.



Figura A.1: Simbologia do diagrama em UML.

A Seção A.1 é dedicada a um breve histórico do desenvolvimento do INSANE, seguida, na Seção A.2, pela apresentação de seu núcleo numérico. As Seções A.3 e A.4 tratam das implementações referentes ao MEFG e ao MEFG global-local, respectivamente. As Seções A.5 e A.6 trazem as implementações relacionadas à análise fisicamente não linear no contexto do MEFG e do MEFG global-local, respectivamente, realizadas neste trabalho.

A.1 Histórico

Silva (2001) implementou a classe dos Modelos de Microplanos para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto no sistema FEMOOP (*Finite Element Method - Object Oriented Program*), desenvolvido pelo Departamento de Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Em seu trabalho, Fuina (2004) realizou a implementação dos métodos de controle clássicos e propôs o Método de Controle de Deformações, ampliando a biblioteca de métodos incrementais-iterativos disponíveis no FEMOOP.

A partir desses trabalhos, observou-se a necessidade de criação de um novo sistema para análise estrutural. O desenvolvimento do sistema INSANE possibilitou a geração de uma plataforma com código aberto, cujo aporte computacional permitiu a elaboração de diversas pesquisas e trabalhos, tais como Fonseca *et al.* (2004),

Gonçalves (2004), Pitangueira e Caldas (2005), Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Moreira (2006), Penna (2007), Saliba (2007), Camara (2007), Ferreira (2008), Fonseca (2008), Ajeje (2009), Fuina (2009),

A.2 Organização do Núcleo Numérico

A estrutura geral do núcleo numérico é composta por interfaces e classes abstratas representantes das diferentes abstrações da solução por modelos discretos. A organização do núcleo é embasada nas relações entre as interfaces **Assembler** e **Persistence** e as classes abstratas **Solution** e **Model**. A Figura A.2 apresenta esses módulos e explicita a comunicação entre eles.

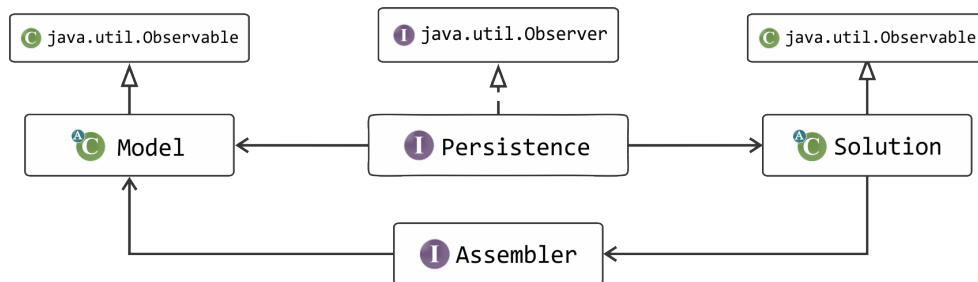


Figura A.2: Organização do núcleo numérico do sistema INSANE.

À interface **Assembler** é atribuída a tarefa de montar o sistema matricial de segunda ordem apresentado na equação (A.1), que possibilita representar diversos tipos de modelos discretos disponíveis no INSANE (tais como o MEF, o MEFG, o MEC e o MSM e suas variações):

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (\text{A.1})$$

em que \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado do problema e $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são os vetores, respectivamente, com a primeira e segunda variação temporal das variáveis de estado. Já \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes dos coeficientes e \mathbf{D} é o vetor com os termos independentes deste sistema, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas.

A classe abstrata **Solution** é responsável por desencadear o processo de solução e contém os recursos necessários à resolução do sistema matricial descrito na equação (A.1), sendo ele linear ou não linear. Esta classe estende **Observable**, uma vez que é observada pela persistência. Isso significa que a cada atualização da solução a persistência grava os dados do modelo. Quanto à interface **Model**, além de conter informações relativas ao modelo discreto a ser analisado, fornece a **Assembler** os dados necessários para a montagem da equação do modelo, cuja resolução é realizada por **Solution**.

Model e **Solution** se comunicam com a interface **Persistence**, que interpreta os dados de entrada e fornece os dados de saída para outras aplicações, sempre que modificações no estado do modelo discreto forem realizadas. Esta persistência é realizada por meio de arquivos *XML* (*eXtensible Markup Language*), permitindo a criação de dados estruturados com base em arquivo texto.

A Figura A.3 ilustra a hierarquia da interface **Persistence**, que é implementada pela classe **PersistenceAsXML**, responsável por persistir a entrada e a saída de dados.

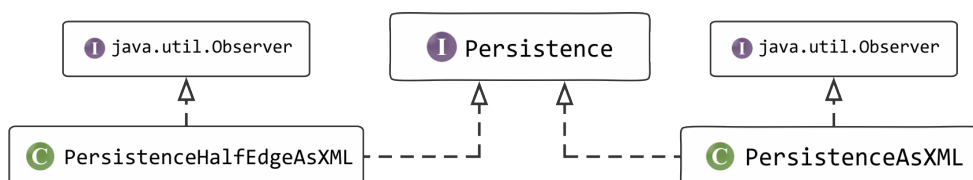


Figura A.3: Diagrama de classes para **Persistence**.

O processo de observação de alterações ocorre através de um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão de projeto **Observer**, apresentado na Figura A.2. A consistência e a comunicação entre o objeto observador **PersistenceAsXML**, que implementa a interface `java.util.Observer`, e os componentes observados **Solution** e **Model**, que estendem a classe `java.util.Observable`, são garantidas porque quando alguma mudança ocorre no estado do objeto observado, um mecanismo é disparado e se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem.

A.3 MEF_G

O MEF_G foi incluído no INSANE por Alves (2012). Nesta seção, além dos aspectos dessa implementação, destacam-se as implementações realizadas por Monteiro *et al.* (2014), referentes à expansão do MEF_G para a análise fisicamente não linear.

A.3.1 Interface Assembler

A interface `Assembler` é detentora dos métodos necessários à montagem das matrizes e vetores do sistema mostrado na equação (A.1), que pode ser simplificado para o caso estático conforme a equação (A.2):

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (\text{A.2})$$

sendo \mathbf{C} a matriz de rigidez, \mathbf{X} o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{D} o vetor de forças nodais. Na análise é fisicamente não linear, a matriz \mathbf{C} é função dos deslocamentos \mathbf{X} .

A Figura A.4 permite verificar que `Assembler` é implementada por `FemAssembler`, detentora da hierarquia exigida para os diferentes tipos de problemas modelados pelo MEF. Essa classe também tem como atributo um objeto do tipo `Model`, entendido como o modelo de elementos finitos para o qual se deve montar este sistema de equações.

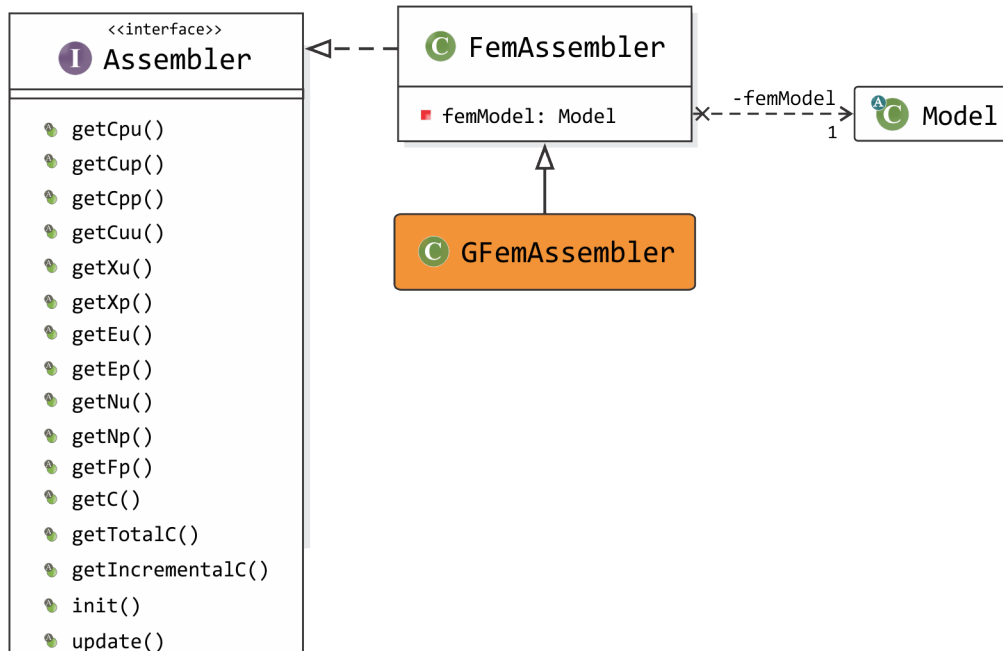


Figura A.4: Diagrama de classe para `Assembler`.

`Assembler` faz a montagem das parcelas da matriz de rigidez \mathbf{C} advindas de diferentes métodos numéricos. A Figura A.4 também destaca alguns métodos de `Assembler` que fornecem as parcelas do sistema matricial da equação (A.2), tais como `getCpu()`, `getCup()`, etc. Os métodos `init()` e `update()` compõem o processo para a análise não linear, como forma de acionar o mecanismo de propagação de mudanças *Observer* para a persistência dos dados.

Como a classe `GFemAssembler` é herdeira de `FemAssembler`, ela contém os atributos necessários para montagem das parcelas da matriz de rigidez (\mathbf{C}) oriundas do MEFG. Tal classe, inicialmente criada em Alves *et al.* (2013) para a análise linear elástica, foi alterada em Monteiro *et al.* (2014) para incorporar os métodos `getC()`, `getTotalC()` e `getIncrementalC()` (fornecem a matriz de rigidez para os equilíbrios elástico, secante ou tangente, respectivamente, a partir das parcelas da matriz \mathbf{C}) utilizados na análise fisicamente não linear.

A.3.2 Classe Abstrata Solution

Realizada a montagem das parcelas da equação (A.2) por `Assembler`, resolvê-la é tarefa da classe `Solution`, cujo método `execute()` inicializa o processo de solução. Esse método é herdado pelas classes especializadas de `Solution`, mostradas na Figura A.5.

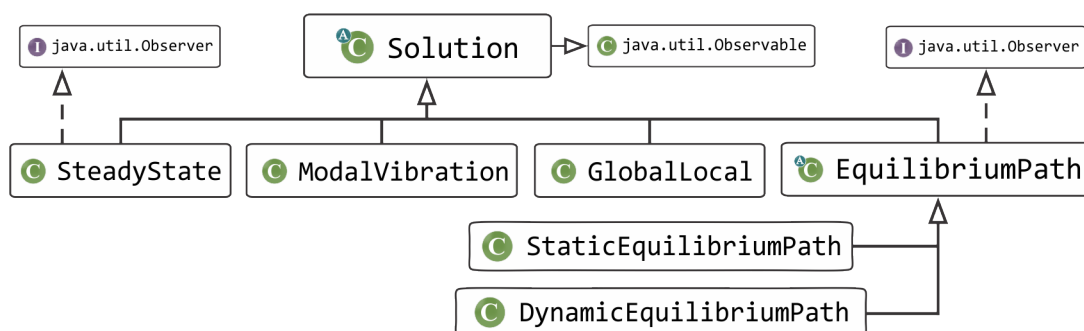


Figura A.5: Diagrama de classe de `Solution`.

`Solution` estende a classe `Observable`, uma vez que é observada pela persistência, isto é, a cada atualização da solução a persistência grava os dados do modelo. Dentre as classes que implementam `Solution`, `SteadyState` é representativa da solução de problemas lineares estáticos. Por sua vez, `EquilibriumPath` executa a solução de problemas não lineares por intermédio de um processo incremental-iterativo, tanto para o caso estático (`StaticEquilibriumPath`) quanto para o dinâmico (`DynamicEquilibriumPath`).

A.3.3 Classe Abstrata Model

As classes que implementam `Model` para representar genericamente determinado modelo discreto são compostas por listas de objetos que o caracterizam e se comunicam a partir de métodos de acesso e manipulação dessas listas.

A classe `FemModel` implementa `Model` para representar um modelo em termos do MEF e possui listas de nós, elementos, funções de forma, carregamentos, modelos de análise, materiais, modelos constitutivos, degenerações e instâncias para as classes abstratas `AnalysisModel`, responsável pela descrição do modelo de análise,

e `ProblemDriver`, que armazena informações referentes ao tipo de problema modelado pelo elemento. A classe `GFemModel` incorpora todos esses atributos e instâncias em termos do MEFG, conforme observado na Figura A.6.

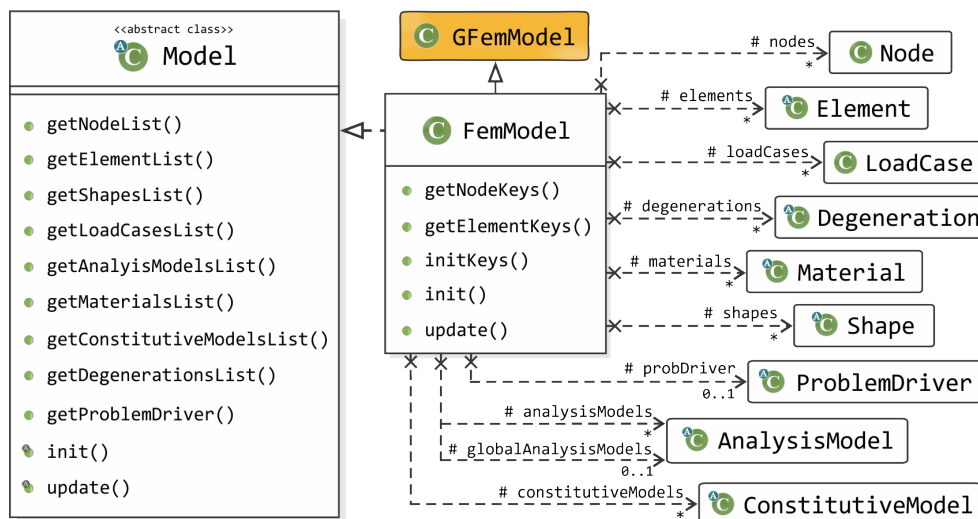


Figura A.6: Diagrama de classe para Model.

Dentre as classes que compõem `Model`, destaca-se `Element`, destacada na Figura A.7. Ela contém listas de `ElementNode` e `Degeneration` que representam a incidência, no caso da primeira, os pontos de integração e as características geométrica e física do elemento, no caso da segunda lista, além de objetos de `AnalysisModel`, `Shape` e `ConstitutiveModel` que descrevem o modelo de análise, a função de forma e o modelo constitutivo, respectivamente. Há também a classe `ProblemDriver`, que armazena informações referentes ao tipo de problema modelado pelo elemento.

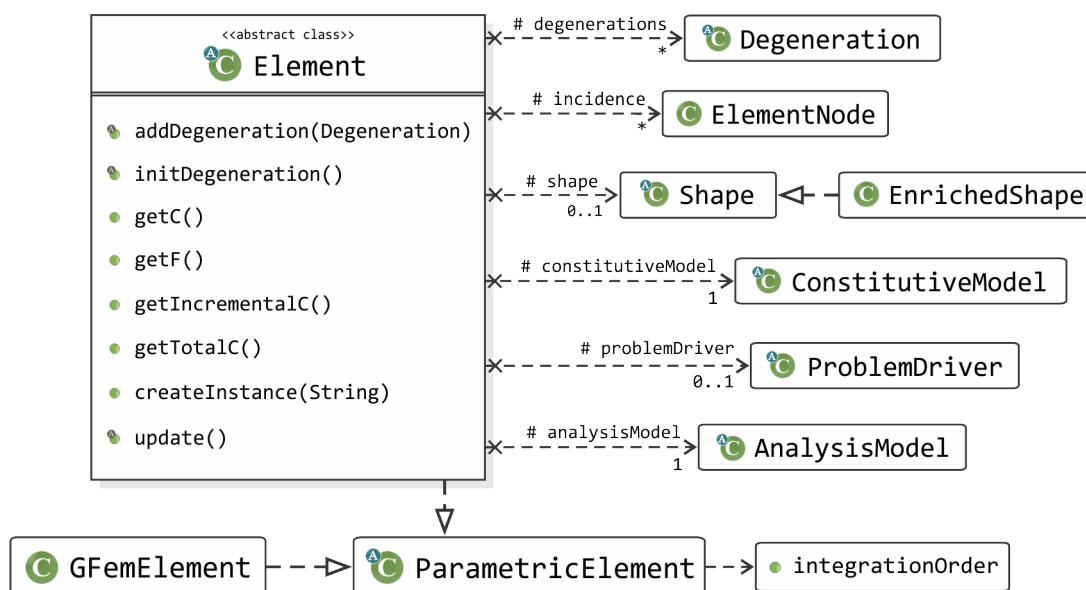


Figura A.7: Diagrama de classe para ParametricElement.

A classe `Element` é estendida por `ParametricElement`, que particulariza sua representação para os elementos finitos paramétricos (MEF), sendo, por sua vez, estendida pela classe `GFemElement`. Todos os atributos de `Element` e um objeto `integrationOrder` são herdados e em sua hierarquia, as classes que representam os elementos finitos paramétricos são separadas de acordo com sua geometria (elementos paramétricos unidimensionais, planos triangulares ou quadrilaterais e sólidos tetraédricos ou hexaédricos).

A Figura A.7 também mostra que `EnrichedShape` é herdeira da classe abstrata `Shape`. No decorrer do processo de obtenção da aproximação numérica, `EnrichedShape` solicita a `Shape` (através do objeto `originalShape`) as funções de forma originais do MEF e, em conjunto com a função de aproximação local obtida por `EnrichmentType` permite a construção das funções de forma enriquecidas para a aproximação numérica pelo MEFG.

As funções de forma de elementos finitos, sejam estas originais do MEF ou enriquecidas via MEFG, são agrupadas na hierarquia da classe `Shape`, que contém os métodos responsáveis por fornecer as funções de forma e suas primeiras e segundas derivadas. Estas funções são divididas conforme a geometria do modelo e a sua

especialização ocorre de acordo com o número de nós na incidência dos elementos. O diagrama de classe detalhado para **Shape** é apresentado nos trabalhos de Fonseca (2008) e Penna (2011), para o MEF, e no trabalho de Alves (2012) para o MEFG.

A.4 MEFG global-local

O MEFG global-local foi implementado no sistema INSANE por Alves (2012) e neste item as principais estratégias aplicadas são apresentadas.

A.4.1 Interface Persistence

Alves (2012) incorporou alterações na interface **Persistence** que permitiram a construção de modelos locais a partir de um modelo global inicial. O arquivo de dados de entrada do modelo global possui as informações necessárias para buscar os modelos locais, automatizando o processo de análise global-local.

A.4.2 Interface Assembler

A classe **GFemAssembler**, derivada de **Assembler**, foi modificada por Alves (2012) para permitir a transferência de condições de contorno do domínio global para o domínio local. A generalização realizada por Alves (2012) permitiu a obtenção das condições de contorno - *Neumann*, *Dirichlet* e *Cauchy* - de um elemento do domínio local a partir de um domínio global.

No pacote **Value**, a classe abstrata **EquivalentNodalGeneralValue**, aplicada no problema local, faz a transferência das condições de contorno entre domínios através do Método da Penalidade e na Figura A.8 estão descritos seus principais métodos, capazes de modificar a matriz de rigidez **C** e o vetor de forças **D** do sistema (A.1).


 EquivalentNodalGeneralValue	
■	element: Element
■	elmValue: ElementValue
●	getEquivalentNodalValues(): IVector
●	getGFemEquivalentNodalValues(): IVector
●	getGFemEquivalentNodalValuesFromElement(): IVector
●	getGFemEquivalentNodalValuesFromElementStep3(): IVector
●	getStiffnessMatrixCauchy(): IMatrix
●	getStiffnessMatrixPM(): IMatrix
●	getStiffnessMatrixPMFromElement(): IMatrix
●	getStiffnessMatrixPMFromElementStep3(): IMatrix
●	getStateVariableFunctionMatrix(double[] naturalCoords): IMatrix
●	getStateVariableFunctionMatrix(naturalCoords: double[], incidence: ArrayList<ElementNode>): IMatrix
●	getParentElementNaturalCoords(naturalCoords: double[]): double[]
●	getElement(): Element
●	setElement(element: Element): void
●	getElmValue(): ElementValue
●	setElmValue(elmValue: ElementValue): void

Figura A.8: Métodos da classe `EquivalentNodalGeneralValue`.

A equação (2.10) (formulação do problema local) é desmembrada nas equações (A.3), (A.13), (A.14) e (A.15) para se destacar as parcelas originais e modificadas pelo Método da Penalidade.

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L) \, dx, \quad (\text{A.3})$$

e

$$\eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{v}_L \, ds, \quad (\text{A.4})$$

em que a equação (A.3) corresponde à matriz constitutiva \mathbf{C} (equação (A.2)) e a equação (A.13) equivale à modificação de \mathbf{C} pelo Método da Penalidade.

As outras parcelas da equação (2.10) são

$$\int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^e} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L \, ds \quad (\text{A.5})$$

e

$$\eta \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{u}}_G^0 \cdot \mathbf{v}_L \, ds, \quad (\text{A.6})$$

em que a equação (A.14) corresponde ao vetor de força \mathbf{D} (equação (A.2)) e a equação (A.15) a \mathbf{D} modificado pelo Método da Penalidade.

A Figura A.9 apresenta o procedimento de transferência da solução do problema global como condição de contorno entre os domínios global e local. O domínio local

Ω_L está destacado no interior da malha global Ω_G na Figura A.9(a). Nesta figura, foram escolhidas as condições de Dirichlet, que no INSANE são representados pelo número três, visto que elas foram utilizadas nos exemplos numéricos apresentados no Capítulo 4. As faces do elemento são definidas por dois nós de incidência e em cada uma delas é determinado se há ou não há transferência. Caso a aresta esteja na interface entre o domínio global e o contorno local há a transferência de condições de contorno, caso contrário, é informado o número zero para a aresta em questão. Em cada aresta, define-se *a priori* um número de pontos de Gauss ($PG1$, $PG2$ e $PG3$), para receberem os resultados da solução do problema global.

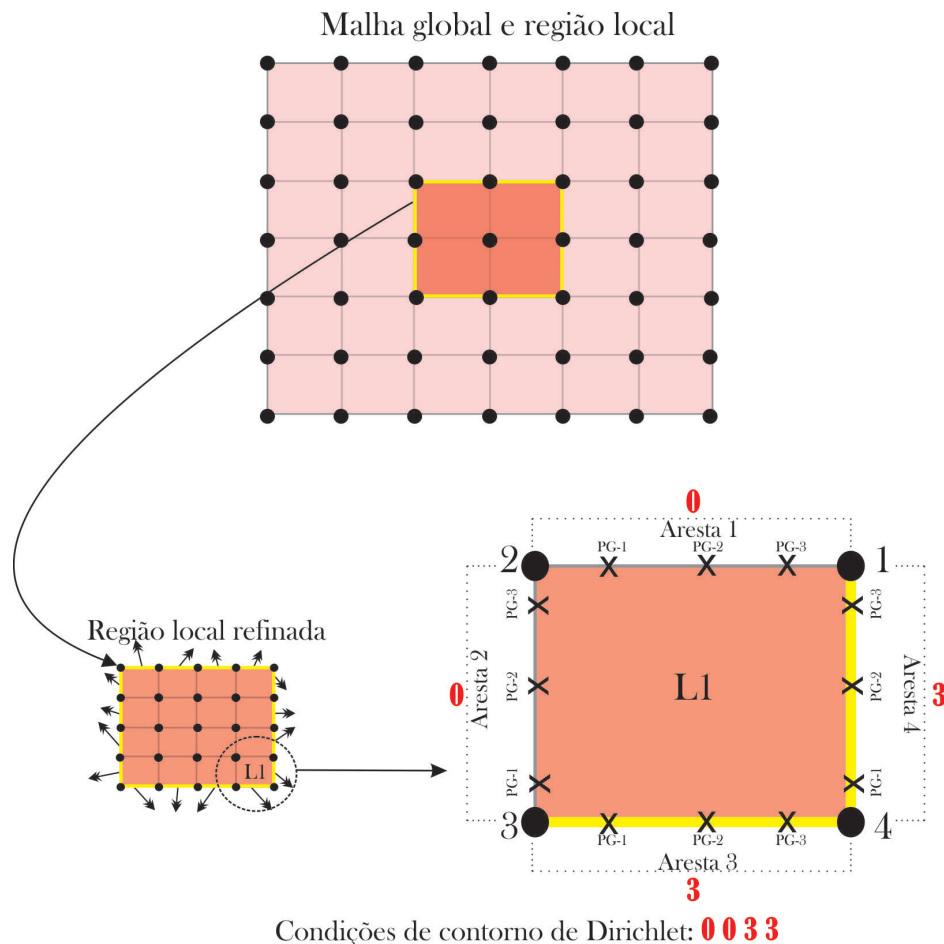


Figura A.9: Transferência de condições de contorno.

Para a montagem das matrizes e vetores do sistema mostrado na equação (A.2), suas parcelas são apresentadas na equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & \mathbf{C}_{up} \\ \mathbf{C}_{pu} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde o índice u indica valores desconhecidos e o índice p valores prescritos associados à matriz \mathbf{C} e aos vetores \mathbf{X} , \mathbf{R} e \mathbf{F} .

O vetor \mathbf{R} é composto por dois vetores:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{R}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_u \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

em que \mathbf{N} é o vetor de forças aplicadas diretamente nos nós e \mathbf{E} é o vetor de forças ou deslocamentos nodais equivalentes às cargas de corpo.

A Figura A.10 apresenta o diagrama de sequência da classe `GFemAssembler`, responsável pela montagem dos termos \mathbf{C} e \mathbf{R} da equação (A.7). O sistema solucionador (*Ator* no diagrama) demanda a `GFemAssembler` as parcelas da equação (A.7) e ele percorre os diversos elementos que fazem parte deste modelo, perguntando pela parcela correspondente para montagem das matrizes a serem solucionadas por `Solution`. A parcela denotada por *MÉTODO* `getC` representa a rigidez relativa ao elemento finito e *MÉTODO* `getE` representa a força equivalente do elemento finito. As parcelas sinalizadas com *pm* (*MÉTODO* `getCpm` e *MÉTODO* `getRpm`) são relativas ao Método da Penalidade e *MÉTODO* `getNp` representa a força nodal descrita diretamente no nó. O processo de generalização das condições de contorno é detalhado em Alves (2012).

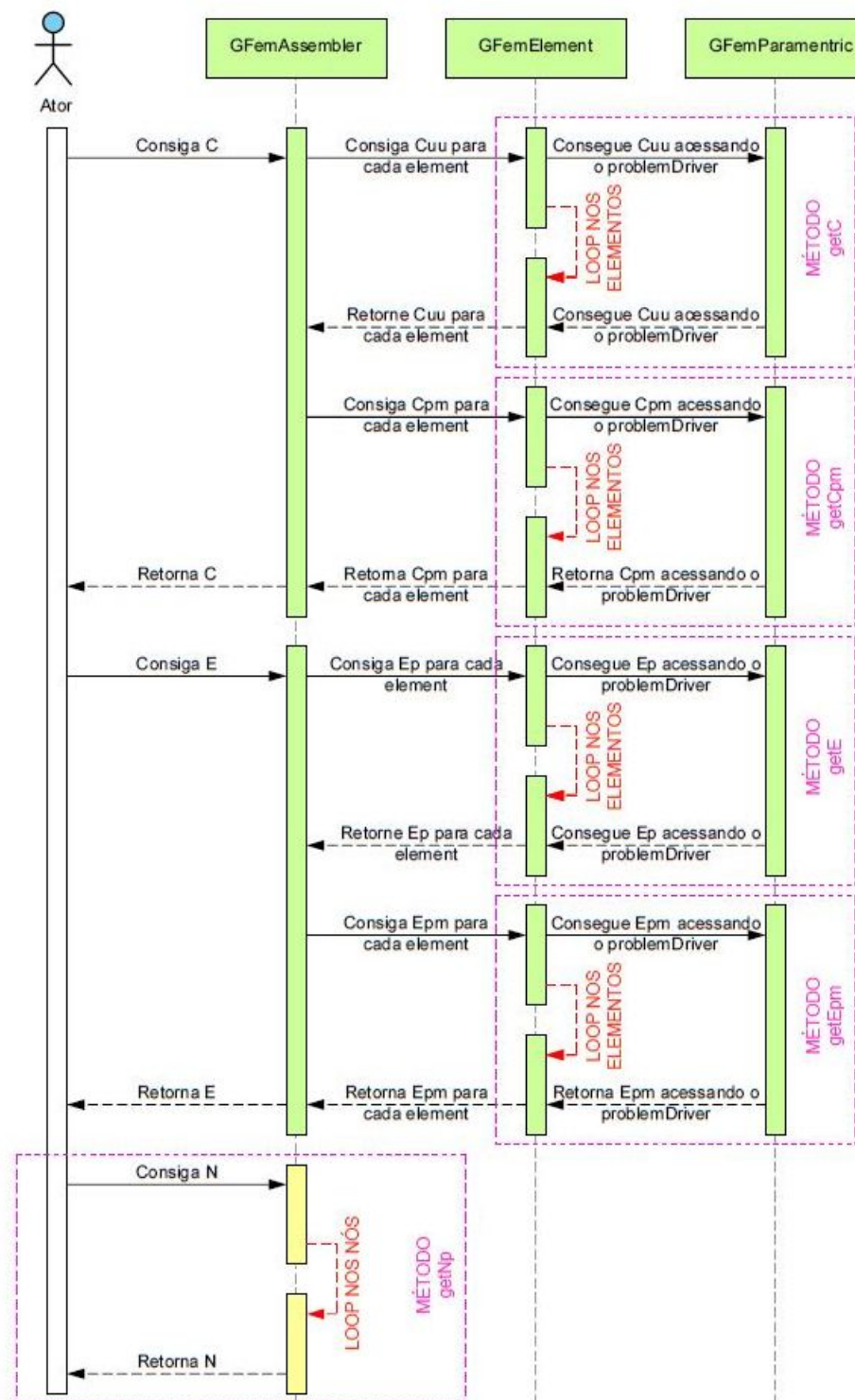


Figura A.10: Diagrama de sequência das parcelas da classe `GFemAssembler` (Alves, 2012).

A.4.3 Classe abstrata `Solution`

A classe `GlobalLocal`, apresentada na Figura A.5, implementa o processo de solução de problemas que empregam a estratégia global-local. Alves (2012) evidenciou que a criação de uma nova classe solução foi necessária porque, além de ser composta por um `Assembler`, possui um `GFemAssembler` global (armazenado na variável `globalAssembler`) e um objeto `localAssemblerList` (armazena uma lista `GFemAssembler` locais)

A.4.4 Classe `GFemModel`

O principal objetivo da interface `Model` é representar o modelo discreto a ser analisado. A classe `FemModel`, responsável pelos modelos discretos de MEF, possui listas de nós (`nodesList`), elementos (`elementsList`), modelos de análise (`analysisModelList`), funções de forma (`shapesList`), degenerações (`degenerationList`), materiais (`materialsList`) e carregamentos (`loadingList`). Segundo Alves (2012), para adicionar propriedades de MEFG ao sistema, foi necessária a implementação da classe `GFemModel`. Derivada direta de `FemModel`, `GFemModel` tem propriedades específicas do MEFG, tais como uma lista de enriquecimentos do modelo (`enrichmentList`) e métodos de acesso e manipulação de variáveis.

Os principais atributos de `GFemModel` são descritas na sequência.

1. Classe `Node`

Alves (2012) acrescentou o atributo `LOCAL_ENRICHER` na classe `Node` para permitir a análise via MEFG global-local na versão de domínios locais superpostos. Tal atributo indica de qual domínio local serão retiradas as funções de enriquecimento global-local para a resolução do problema global final. As instâncias de `Node` regem a estratégia de enriquecimento no MEFG, por este motivo `LOCAL_ENRICHER` compõe tal classe.

2. Classe `GFemElement`

Os elementos finitos são representados pela classe `Element`. Para a estratégia

global-local aplicada ao MEFG, cada elemento finito deve armazenar seu elemento global pai. Esta informação é utilizada na busca de condições de contorno do problema global a serem transferidas para o problema local. Além disso, na obtenção das matrizes e vetores do problema (como a matriz \mathbf{C} e o vetor \mathbf{D} a lista de elementos locais é percorrida na resolução do problema global enriquecido. Se a análise realizada não for do tipo global-local, o elemento pai possui ele mesmo como filho. Desta forma, a mesma estrutura de código é usada para o GFEM convencional e sua versão global-local. Assim, a classe `GFemElement` estende a classe `ParametricElement`, que é derivada de `Element`.

3. Classe `GlobalLocalEnrichment`

A classe `GlobalLocalEnrichment`, herdeira de `EnrichmentType`, é encarregada de fornecer a função de forma e derivadas relacionadas à estratégia de enriquecimento global-local. A Figura A.11 apresenta as classes que são derivadas de `EnrichmentType`.

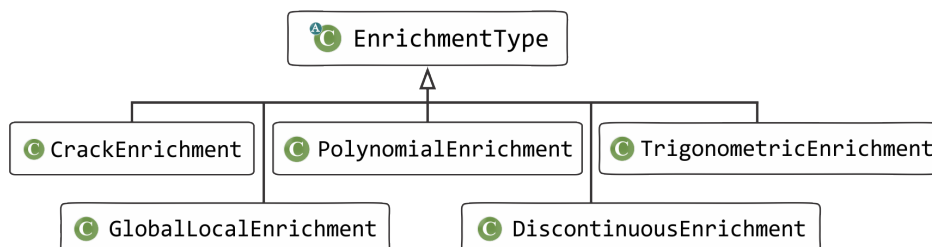


Figura A.11: Pacote `EnrichmentType`.

4. Classe `GFemParametric`

Para a aplicação da estratégia global-local, Alves (2012) modificou a classe `GFemParametric` (herdeira de `ProblemDriver`, de acordo com a Figura A.18) de modo que o *loop* nos métodos de integração numérica passou a ser feito nos elementos filhos, visto que funcionam como células de integração do domínio global. Essa estratégia de *loop* nos elementos filhos permitiu:

- integrar o domínio global nos elementos descendentes;

- generalizar a classe `GFemParametric`, visto que no MEFM convencional o elemento que será integrado contém ele mesmo como elemento filho;
- evitar a implementação de um `ProblemDriver` específico para o MEFM global-local e assim foi possível utilizar a mesma classe `GFemParametric` criada para a solução pelo MEFM.

A.4.5 Procedimento global-local para o MEFM

De acordo com Alves (2012), a criação dos modelos global e locais a partir do arquivo *XML* é feita pela classe `SolverClass` através da classe `PersistenceAsXml`. Posteriormente, as classes do tipo *Assembler* de cada modelo local existente são adicionadas à lista de *Assembler* da classe `GlobalLocal`, herdeira de `Solution`. Então, `SolverClass` invoca o método `execute()` de `GlobalLocal`. `execute()` chama os métodos necessários para a resolução das três etapas da abordagem global-local:

1. resolução do problema global inicial;
2. resolução dos problemas locais com condições de contorno oriundas do problema global da etapa 1; e
3. resolução do problema global enriquecido com a solução do problema local da etapa 2.

O método `setLocalInGlobal` da classe `GlobalLocal` é chamado antes da entrada na etapa 3 e invoca o método `stringToElement()`. Esses dois métodos substituem os nomes dos elementos locais do elemento global pelos próprios objetos do tipo `GFemElement`. Assim, na resolução da etapa 3, os pontos de Gauss destes elementos locais serão utilizados na obtenção das matrizes e vetores do modelo, conforme é possível observar no diagrama da Figura A.12.

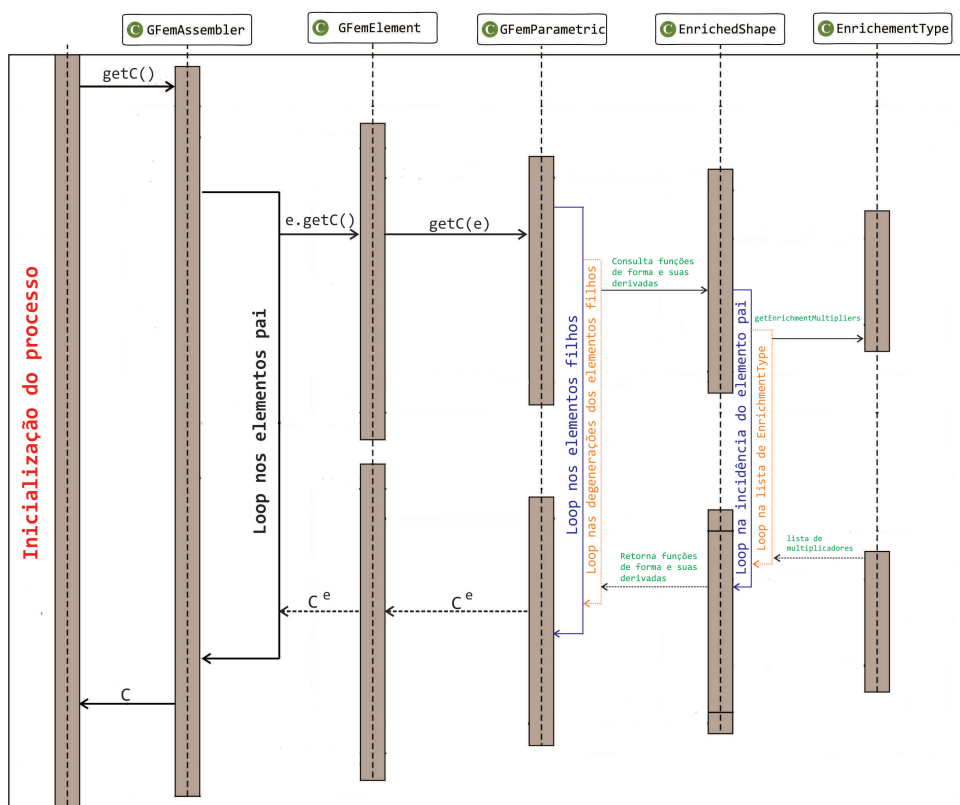


Figura A.12: Diagrama de sequência para montagem da matriz de rigidez.

Essa figura também mostra o diagrama de sequência para montagem da matriz de rigidez de um problema enriquecido extrinsecamente. No caso da obtenção da matriz de rigidez do problema global enriquecido (etapa 3), a classe *EnrichedShape* consulta cada nó do elemento global, que se for um nó a ser enriquecido com a solução local, terá necessariamente um enriquecimento do tipo *GlobalLocalEnrichment*. O enriquecimento *GlobalLocalEnrichment* possui o método `getEnrichmentMultipliers(...)` que obtém o deslocamento da solução local no ponto de Gauss desejado como função de enriquecimento a ser usada em *EnrichedShape*. Nas etapas 1 e 2, cada elemento tem ele mesmo como seu filho, desta forma, o *loop* nos elementos filhos realizado nos métodos de *GFemParametric* é realizado em uma lista de um elemento.

Na etapa 1, tanto a partição da unidade quanto os pontos de integração são do elemento global. Na etapa 2, tanto a partição da unidade quanto os pontos de integração são do elemento local. Entretanto, na etapa 3, são empregados os pontos

de integração dos elementos locais (filhos) na partição da unidade do elemento global (pai).

A.4.6 Integração Numérica das Equações do MEF global-local

As três etapas da estratégia global-local foram descritas na Seção 2.1.2. O processo de integração das equações de domínio e de contorno é equivalente ao de uma análise convencional pelo MEF para os dois primeiros passos. Tanto na etapa global inicial quanto na etapa local os problemas são considerados de forma independente. No entanto, o problema global enriquecido resolvido na terceira etapa é dependente do problema local na construção das funções de forma apresentadas na equação (2.4).

Assim, para construir as funções de forma, as funções de aproximação local L_{ji} são substituídas pela solução $\tilde{u}_L(\mathbf{x})$ do problema local (equação (2.10)). Também há dependência na integração das equações de domínio e contorno. No caso da integração numérica, é necessário definir a quadratura nos elementos do domínio local, como proposto por Kim *et al.* (2010), mas essa forma de integração só é possível se a malha local estiver contida na malha global. A integração numérica do elemento global com a solução local é feita através de pontos da quadratura definida nos elementos descendentes contidos nos elementos globais.

Ainda que a função de aproximação local $\tilde{u}_L(\mathbf{x})$ seja construída segundo as coordenadas dos elementos do problema local, deve-se lembrar que na equação (2.4) a PU \mathcal{N}_j é definida nas coordenadas naturais dos elementos do problema global. Isto requer o mapeamento das coordenadas naturais dos elementos do problema local para as coordenadas naturais dos elementos do problema global. Estas coordenadas são usadas na PU global \mathcal{N}_j da equação (2.14).

Primeiramente, o mapeamento é implementado obtendo as coordenadas físicas globais \mathbf{x} de um ponto de integração no elemento local. Em seguida, é feito o

mapeamento de \mathbf{x} para as coordenadas naturais do elemento do domínio global. Para isso, utiliza-se o mapeamento inverso apresentado em Alves (2012). A ordem de integração usada em cada elemento local é obtida, segundo Kim *et al.* (2010), como sendo o máximo entre:

- a ordem de integração do elemento global; e
- a ordem de integração do elemento local mais um, caso se esteja utilizando partição de unidade global linear.

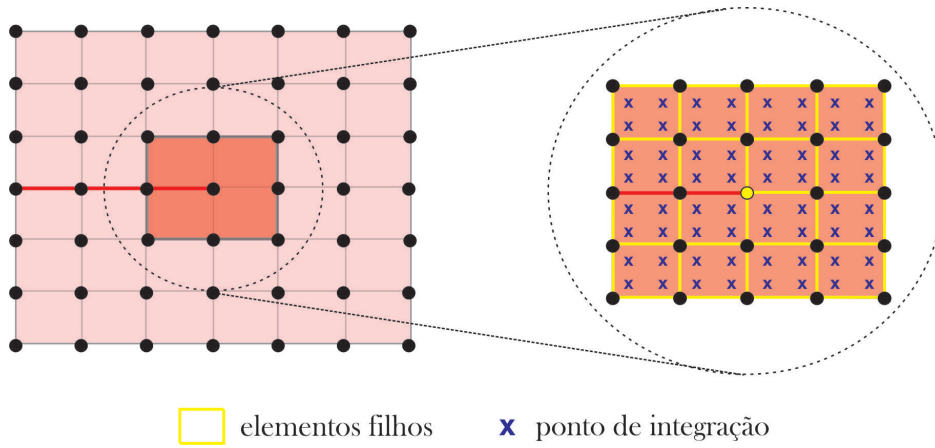


Figura A.13: Procedimento de integração numérica do MEEG global-local. Adaptado de Alves (2012).

A.5 Análise não linear no contexto do MEEG

Para resolver o problema não linear do sistema de equação (A.2) é necessário um processo incremental-iterativo no qual um sistema de equações de equilíbrio incremental é estabelecido para o passo de pseudo tempo i na $j^{\text{ésima}}$ iteração:

$$\mathbf{C}_{j-1}^i \cdot \delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{j-1}^i, \quad (\text{A.9})$$

em que \mathbf{C}_{j-1}^i é a matriz de rigidez tangente, que é função do campo de deslocamentos \mathbf{U}_{j-1}^i , $\delta \mathbf{U}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta \lambda_j^i$ é o incrementos do fator de carga, \mathbf{P} é o vetor de cargas de referência e \mathbf{Q}_{j-1}^i é o vetor de cargas residuais, obtido

pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas \mathbf{F}_i .

No MEF e no MEFG, a matriz de rigidez tangente \mathbf{C} e o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente \mathbf{F} são montados a partir da contribuição de cada elemento finito e . Tal processo baseia-se em duas operações fundamentais:

$$\mathbf{C}_{j-1}^i = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV_e, \quad (\text{A.10})$$

onde \mathbf{B} é a matriz das relações deformação-deslocamento, \mathbf{E} é a matriz constitutiva e $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões do elemento finito, sendo todos integrados sob o volume V_e de cada elemento e .

O vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente é calculado pela seguinte equação:

$$\mathbf{F}_j^i = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_j^i dV_e. \quad (\text{A.11})$$

No INSANE, o processo incremental-iterativo é implementado no método `execute()` da classe `StaticEquilibriumPath`, derivada de `Solution`, por meio da herança com `EquilibriumPath`, conforme observado na Figura A.14.

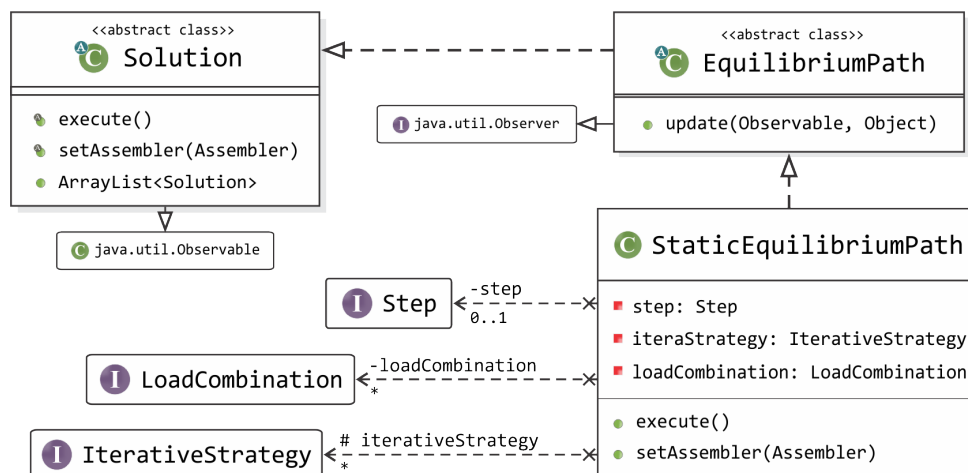


Figura A.14: Diagrama de classe para `StaticEquilibriumPath`.

A classe `StaticEquilibriumPath` especializa as soluções não lineares para o caso estático. Para tanto, ela possui um objeto do tipo `Step`, responsável pelos métodos necessários à execução de um passo incremental da análise não linear. Por sua

vez, a interface **Step** pode ser implementada pelas classes **ModifiedNewtonRaphson** (método de *Newton-Raphson* modificado) e **StandardNewtonRaphson** (método de *Newton-Raphson* padrão). Na Figura A.15 apresenta-se este último, utilizado neste trabalho.

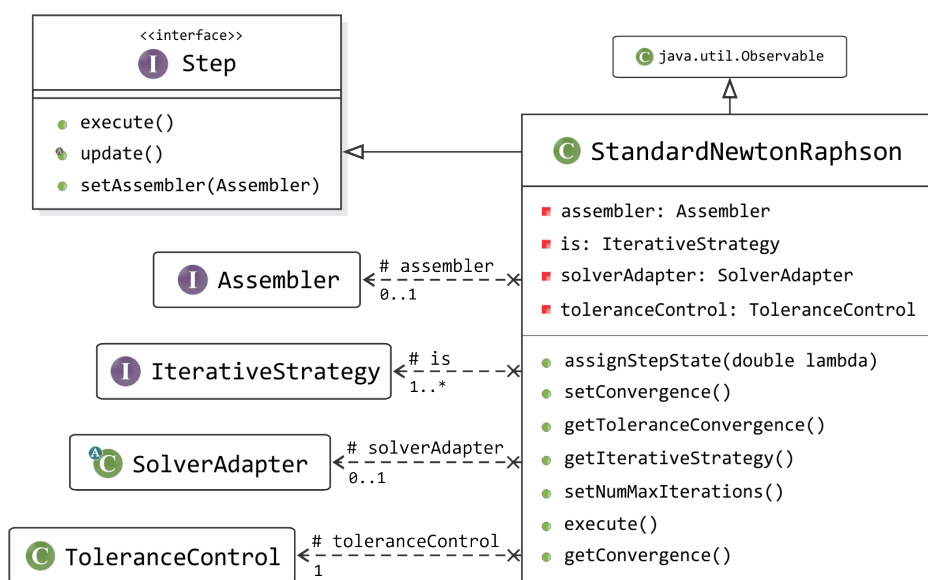


Figura A.15: Diagrama de classe para **Step**.

Uma lista de instâncias do tipo **IterativeStrategy**, que especifica o método de controle a ser adotado para a solução, é implementado na classe **StandardNewtonRaphson**. Na Figura A.16 são apresentadas somente as classes **DisplacementControl**, que implementa o método de controle direto de deslocamentos, e **GeneralizedDisplacementControl**, que implementa o método de controle de deslocamentos generalizados, porque apenas elas foram adotadas para a obtenção dos resultados apresentados no Capítulo 4. Além dessas, há implementados no **INSANE** outros métodos de controle, descritos em Penna (2011).

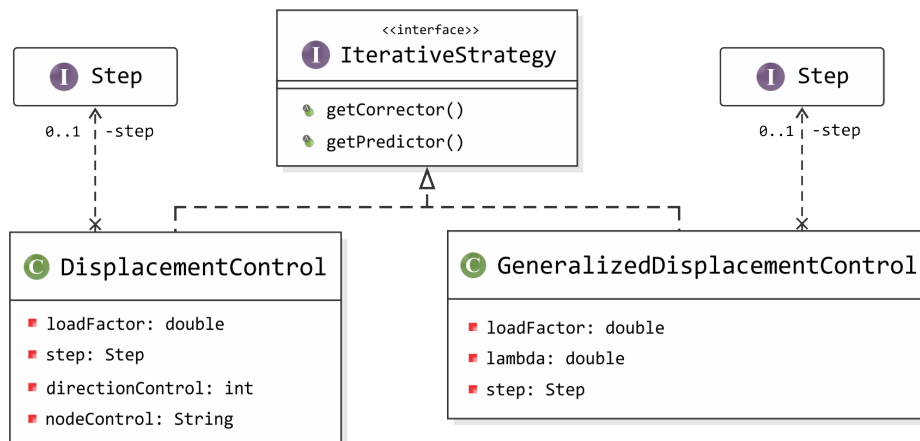


Figura A.16: Diagrama de classe para *IterativeStrategy*.

A sequência de atividades do método *execute()* segue o processo de solução do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990), incluído no INSANE por Fuina (2004) e Fonseca (2006, 2008) e apresentado na Seção 3.1. A inicialização ocorre com a montagem da matriz de rigidez incremental a partir dos métodos *getIncrementalCuu()*, *getTotalCuu()* ou *getCuu()*, respectivamente, para as aproximações tangente, secante ou elástica do tensor constitutivo. Esses métodos recorrem às classes herdeiras de *Assembler*, como *FemAssembler* ou *GFemAssembler*, conforme a Figura A.17.

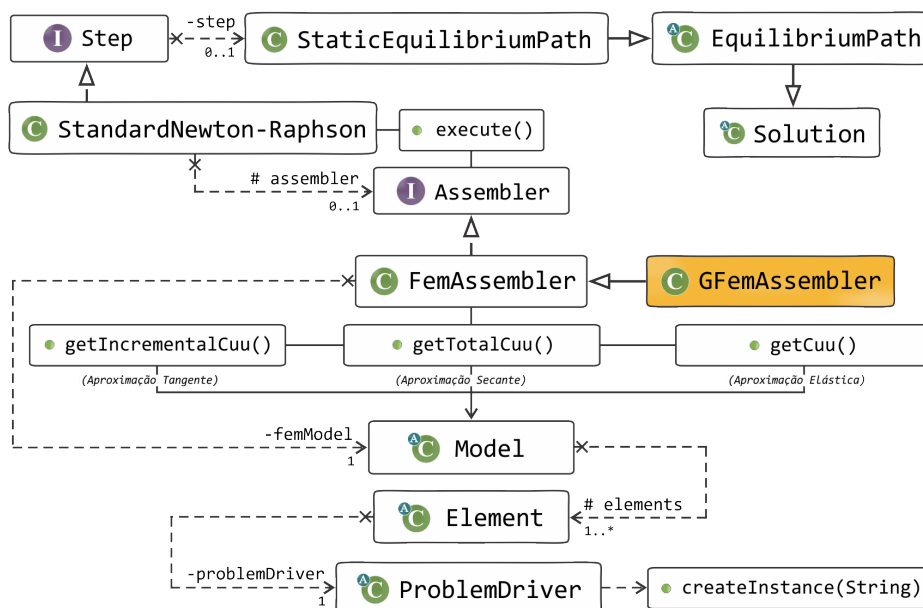


Figura A.17: Classes relacionadas à montagem da matriz de rigidez incremental.

A classe `ProblemDriver`, detalhada na Figura A.18, contém os métodos que informam a `Assembler` as parcelas de cada elemento na equação do modelo. Em sua hierarquia são representados diferentes tipos de problemas para distintas formulações de modelos discretos, o que torna a classe `Element` genérica e independente do problema que representa.

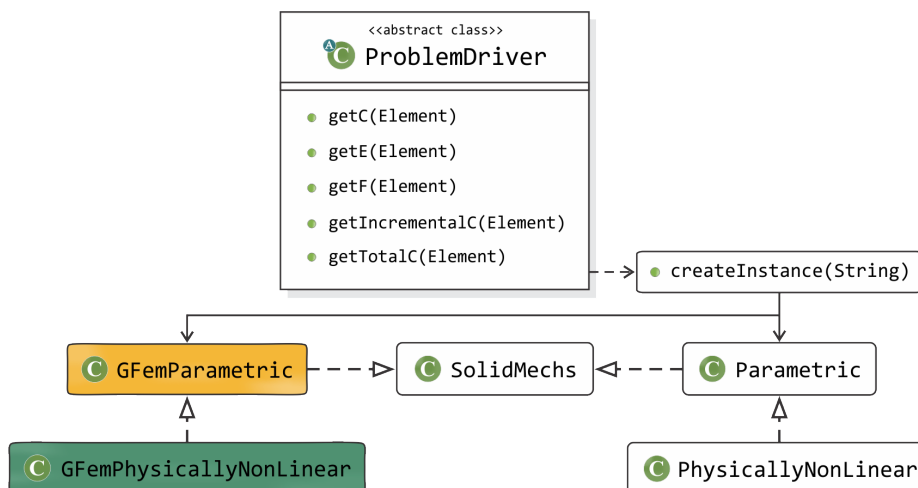


Figura A.18: Diagrama de classe para `ProblemDriver`.

A classe `GFemParametric` é representante dos problemas solucionados via MEFM e herdeira dos métodos existentes em `Parametric`. Esta herança, implementada em Alves (2012) e alterada em Monteiro *et al.* (2014) para possibilitar a análise não linear, é necessária devido ao uso de coordenadas físicas para o cálculo das funções de forma e derivadas para o MEFM, através da classe `EnrichedShape`. Criou-se a classe `GFemPhysicallyNonLinear`, herdeira de `PhysicallyNonLinear`, com os atributos necessários para particularizar o problema para uma análise não linear via MEFM.

Os métodos `getC()`, `getTotalC()` e `getIncrementalC()` foram modificados e/ou criados para representar os problemas analisados via MEFM e permitir a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento para as aproximações elástica, secante ou tangente, de modo análogo aos métodos já existentes para MEF (Figura A.19).

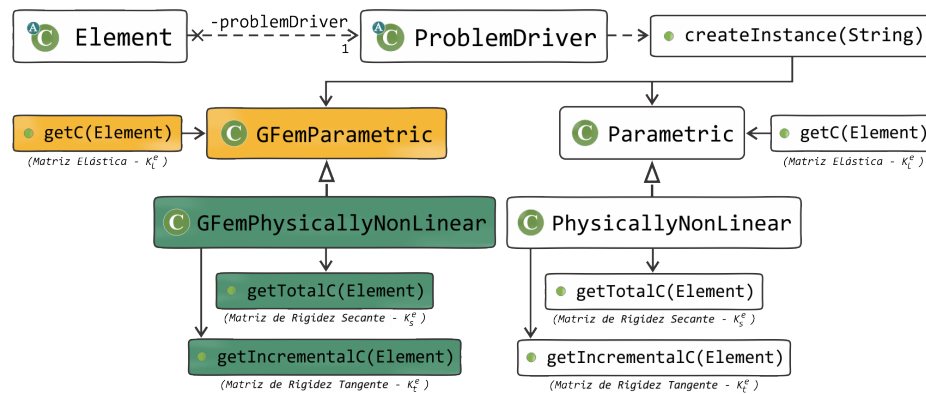


Figura A.19: Interação entre classes para a obtenção da matriz de rigidez.

Para cada iteração n e cada passo k , a classe **Assembler** é acessada para fornecer a matriz de rigidez tangente $[C^t]_{n-1}^k$ (`getIncrementalCuu`). A Figura A.20 esquematiza o procedimento para a montagem da matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas $[F]_n^k$. De acordo com essa figura, para uma aproximação tangente, o método `getIncrementalCuu()` percorre os elementos finitos do modelo e, ao acessar cada um deles, evoca o método `getIncrementalC()` de **Element**, auxiliado por **ProblemDriver**, a ser detalha no Apêndice A. Essa classe acessa o método `getIncrementalC()`, capaz de integrar a matriz de rigidez para cada elemento (equações (A.10) e (A.11)). O mesmo processo é observado para as aproximações secante ou elástica do tensor constitutivo. A matriz de rigidez de cada elemento é devolvida para a classe **Assembler** após a avaliação do processo de degradação do material, realizada pelo tensor constitutivo **E**, calculado em cada ponto de integração. No **INSANE**, cada ponto de integração é um objeto da classe **Degeneration**.

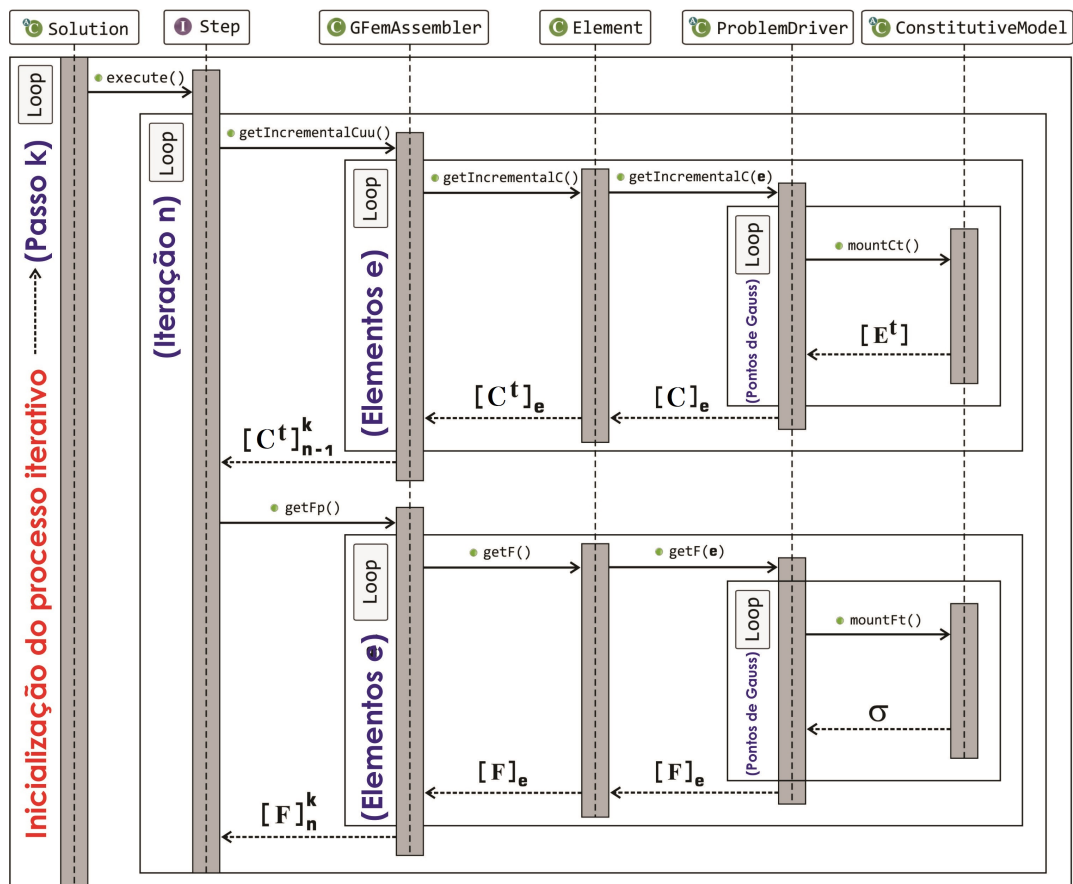


Figura A.20: Procedimento para obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas.

Conforme a Figura A.21, *Degeneration* possui informações das propriedades geométricas do ponto de integração, do modelo de análise, do modelo constitutivo e dos pontos materiais que o ponto de integração representa, além de dois objetos do tipo *HashMap* que guardam as variáveis constitutivas correntes e históricas. Assim, para a avaliação da matriz constitutiva \mathbf{E} (equação (A.10)), esses dois objetos são passados como parâmetros para os métodos `mountCt()`, `mountCs()` ou `mountC()`, da interface `ConstitutiveModel`, para a montagem do tensor constitutivo de cada degeneração, aproximada por sua forma tangente, secante ou elástica, respectivamente.

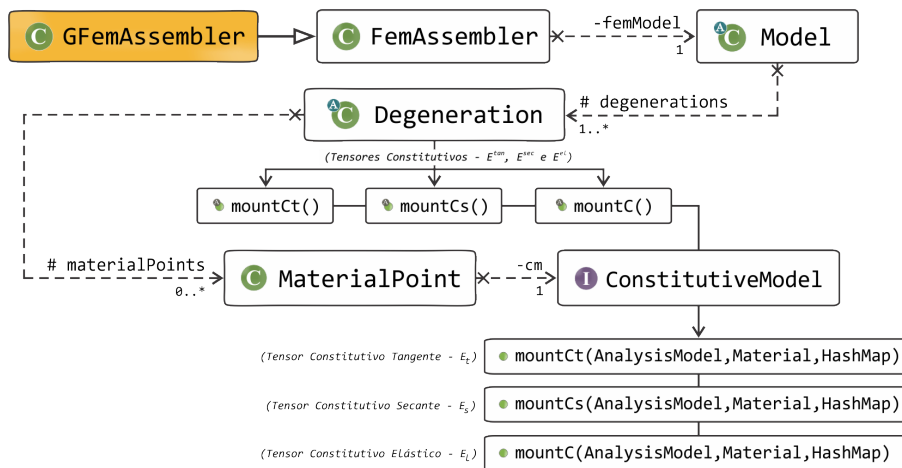


Figura A.21: Interação entre classes para a montagem do tensor constitutivo de cada degeneração para análise via MEF ou MEFG.

Obtido o tensor constitutivo, os deslocamentos devidos à carga de referência, \mathbf{P} , e às cargas residuais, \mathbf{Q} , podem ser calculados. Na sequência, calcula-se o fator de carga, $\delta\lambda$, e as variáveis do processo de solução (fator de carga total, cargas incrementais, cargas residuais e deslocamentos nodais) são atualizadas. Ao final de cada iteração, a convergência é verificada através da magnitude do vetor de forças residuais $\{Q\}_j$ e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos $\{\delta U\}_j$ e o processo iterativo continua até que determinado critério de convergência seja atendido.

O procedimento para o cálculo das forças equivalentes às tensões internas é semelhante ao descrito acima para a obtenção da matriz de rigidez incremental. De acordom com a Figura A.22, para a integração numérica de \mathbf{F} , (equação (A.10)), o estado de tensão corrente é obtido em cada ponto de integração. Para tanto, os objetos *HashMap* com as variáveis históricas são passados como parâmetros para o método *mountDualInternalVariableVector()*, da interface *ConstitutiveModel*, para a montagem do vetor de tensões de cada degeneração.

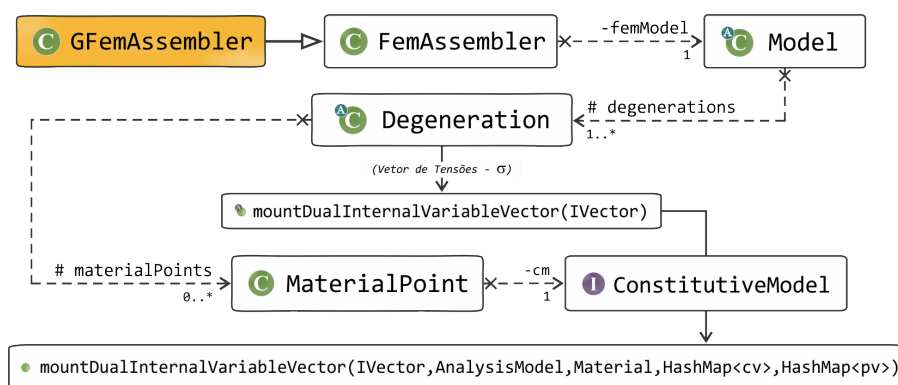


Figura A.22: Interação entre classes para cálculo das tensões via MEF ou MEFM.

A resolução do problema não linear descrito pelo sistema de equação (A.2) é efetuada por um processo incremental-iterativo no qual um sistema de equações de equilíbrio incremental é estabelecido para o passo de carga i na $j^{\text{ésima}}$.

Nos métodos incrementais-iterativos, dado um campo de deslocamento \mathbf{U} e um fator de carga proporcional λ , deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental seja controlada. Nesse trabalho foi adotado o método de controle direto de deslocamento (Fuina, 2004).

Além disso, existem as formulações secante e tangente para os métodos de obtenção da trajetória de equilíbrio. A formulação secante parte das equações de equilíbrio totais do sistema discreto, relacionando forças externas com deslocamentos nodais. Já a formulação tangente parte das equações de equilíbrio incrementais, relacionando incrementos das grandezas envolvidas no problema. Detalhes das formulações são encontradas em Penna (2011).

Na análise não linear de estruturas é necessário resolver um sistema de equações $(n+1) \times (n+1)$, com n equações de equilíbrio e uma equação de restrição para obter $(n+1)$ incógnitas consistindo em n deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga. Um processo incremental-iterativo, no qual um sistema de equações de equilíbrio incrementais (equação (A.12)) é estabelecido para o passo de carga i na $j^{\text{ésima}}$ iteração, é utilizado para solucionar o problema não linear (Figura A.23).

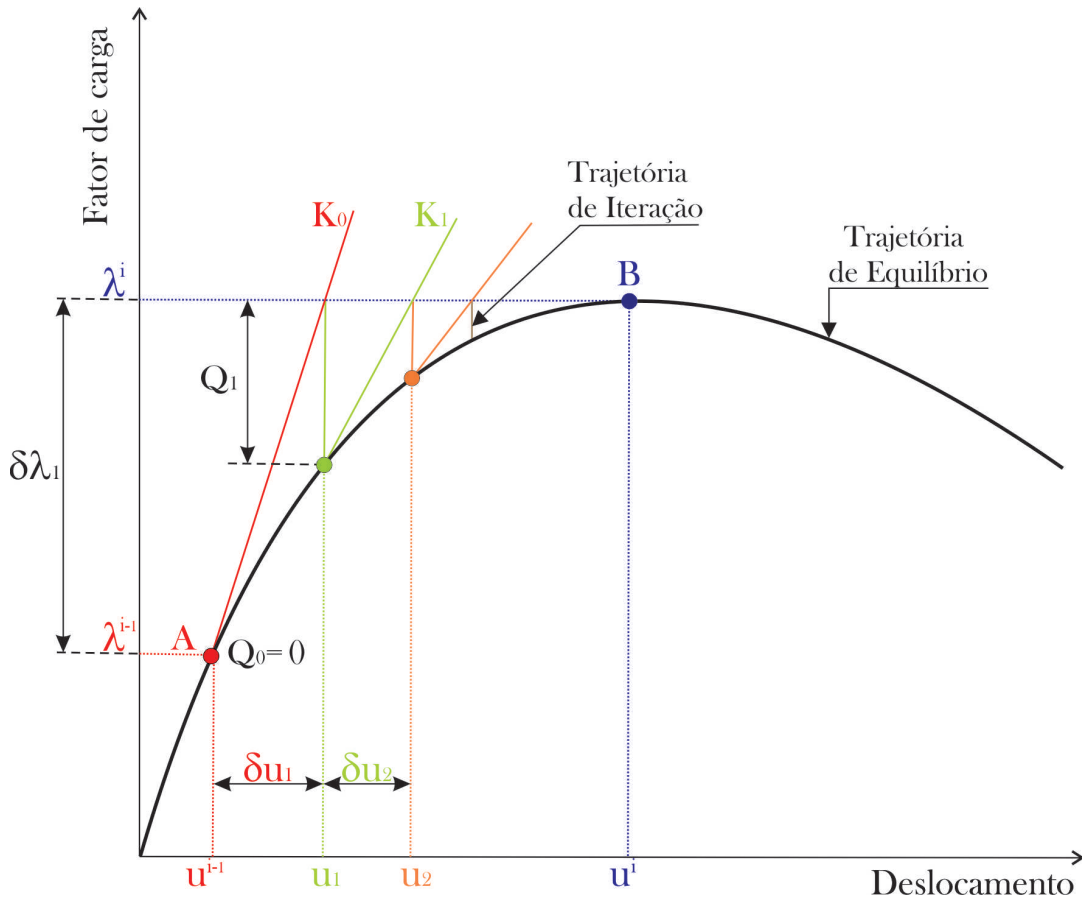


Figura A.23: Processo incremental-iterativo com controle de carga. Adaptado de Penna (2011).

$$\mathbf{C}_{j-1}^i \delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{j-1}^i, \quad (\text{A.12})$$

em que \mathbf{C}_{j-1}^i é a matriz de rigidez tangente, função do campo de deslocamentos \mathbf{U}_{j-1}^i , $\delta \mathbf{U}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de carga, \mathbf{P} é o vetor de cargas de referência e \mathbf{Q}_{j-1}^i é o vetor de cargas residuais. A classe abstrata `Solution` é responsável por solucionar o algoritmo expresso nessa equação.

Dependendo do parâmetro de controle adotada, um incremento correspondente no fator de carga, $\delta \lambda_j^i$, é estabelecido e o incremento de deslocamento, $\delta \mathbf{U}_j^i$, é calculado na forma:

$$\delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \delta \mathbf{U}_j^{P^i} + \delta \mathbf{U}_j^{Q^i}, \quad (\text{A.13})$$

que é decomposto em uma parcela de deslocamentos incrementais devido à carga de referência $\delta\mathbf{U}_j^{P^i}$, obtida pela equação (A.14), e outra associada à carga residual $\delta\mathbf{U}_j^{Q^i}$, definida na equação (A.15):

$$\mathbf{C}_{j-1}^i \delta\mathbf{U}_j^{P^i} = \mathbf{P}; \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{C}_{j-1}^i \delta\mathbf{U}_j^{Q^i} = \mathbf{Q}_{j-1}^i. \quad (\text{A.15})$$

A convergência do processo incremental-iterativo é verificada ao final de cada iteração j comparando-se um valor de tolerância definido à magnitude do vetor de forças residuais (equação (A.16)), e/ou à magnitude do vetor de deslocamentos iterativos (equação (A.17)):

$$\|\mathbf{Q}_j^i\| = \sqrt{\mathbf{Q}_j^i \cdot \mathbf{Q}_j^i}; \quad (\text{A.16})$$

$$\|\delta\mathbf{U}_j^i\| = \sqrt{\delta\mathbf{U}_j^i \cdot \delta\mathbf{U}_j^i}. \quad (\text{A.17})$$

Nos exemplos numéricos deste trabalho, a convergência do processo incremental-iterativo é verificado pela tolerância relativa (Tol) em relação ao vetor de deslocamentos iterativos (equação (A.17)), de acordo com a equação (A.18):

$$Tol < \frac{\|\delta\mathbf{U}_j^i\|}{\|\mathbf{U}_j^i\|}. \quad (\text{A.18})$$

Uma nova iteração é necessária até que a convergência seja alcançada. Neste caso, o valor do novo incremento é calculado a partir de uma equação de restrição que envolve a combinações das grandezas do problema. A atualização das variáveis é feita por:

$$\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i; \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{U}_j^i = \mathbf{U}_{j-1}^i + \delta\mathbf{U}_j^i. \quad (\text{A.20})$$

Então, calcula-se o vetor de cargas residuais por:

$$\mathbf{Q}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{P} - \mathbf{F}_j^i, \quad (\text{A.21})$$

onde \mathbf{F}_j^i é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j . Na primeira iteração ($j = 1$) de cada passo, o vetor de cargas residuais \mathbf{Q}_{j-1} é nulo.

A formulação descrita é genérica e se aplica a vários métodos de controle, sendo necessário definir a equação de restrição.

A.6 Análise não linear via MEFG global-local

No decorrer da elaboração deste trabalho, os recursos para a análise não linear pelo MEFG foram implementados e validados por Monteiro *et al.* (2014) a partir da implementação da versão linear realizada por Alves (2012) e dos demais recursos para a análise não linear via MEF.

Um dos principais desafios para a implementação do MEFG global-local para análise não linear foi criar uma classe de solução, denominada `GlobalLocalNonLinear`, herdeira de `Solution`, capaz de relacionar a solução global linear com a etapa de solução local não linear. A consolidação desse desenvolvimento propiciou a expansão do MEFG global-local para a análise fisicamente não linear de estruturas parcialmente frágeis.

Conforme anteriormente citado, houve a adaptação da formulação proposta por Kim e Duarte (2015), na qual cada bloco de análise global-local k é resolvido como descrito a seguir:

1. resolução do problema global linear (inicial e estimado);
2. resolução dos problemas locais não lineares com condições de contorno oriundas do problema global da etapa 1;
3. resolução do problema global enriquecido com a solução do problema local final da etapa 2.

Essa seção, complementar ao Capítulo 3, é dedicada à apresentação das classes implementadas e modificadas no sistema `INSANE` para essa finalidade.

A.6.1 Interface Persistence

A classe `PersistenceAsXml` foi modificada para escrever resultados dos modelos do MEEG global-local para análise não linear. Para isso, os métodos `fillSolutionFromFile()`, `fillFileFromLoadings()`, `fillFileFromElementsOutputData()` e `fillFileFromSolution()` foram alterados com condicionantes referentes à classe de solução implementada `GlobalLocalNonLinear`.

A.6.2 Classe GFemAssembler

A interface `Assembler`, anteriormente apresentada, possui os métodos necessários à montagem das matrizes e vetores do modelo de elementos finitos da equação (A.1). Na solução implementada neste trabalho existe a variável `globalAssembler` e um objeto `localAssemblerList`, que armazena uma lista `GFemAssembler` locais.

Conforme apresentado na equação (A.8), o vetor \mathbf{R} é composto por dois vetores: \mathbf{N} é o vetor de forças aplicadas diretamente nos nós e \mathbf{E} é o vetor de forças ou deslocamentos nodais equivalentes às cargas de corpo. A substituição da equação (A.8) na equação (A.7) é mostrada na Figura A.24. Além disso, as raízes das equações (A.2) são obtidas por meio de um processo incremental-iterativo na etapa local segundo esse sistema de equações, reescrito na forma do sistema de equações de equilíbrio incremental para a análise não linear segundo a equação (A.12).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \mathbf{C} & \mathbf{U} \\
 \left[\begin{array}{cc} C_{uu} & C_{up} \\ C_{pu} & C_{pp} \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} X_u \\ X_p \end{array} \right\} \\
 \text{Matriz de rigidez} & \text{Vetor de} \\
 & \text{deslocamentos} \\
 & \text{nodais}
 \end{array} \\
 \mathbf{R} \\
 \left\{ \begin{array}{c} N_p \\ N_u \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} E_p \\ E_u \end{array} \right\} \\
 \text{Vetor de} \\
 \text{forças nodais} \\
 \mathbf{F} \\
 \left\{ \begin{array}{c} F_p \\ F_u \end{array} \right\} \\
 \text{Vetor de} \\
 \text{forças nodais} \\
 \text{equivalentes aos} \\
 \text{esforços internos}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura A.24: Associação das equações (A.8) e (A.7).

Como mostrado na Figura A.24, a classe `GFemAssembler` implementa métodos da interface `Assembler` e é responsável pela montagem dos termos \mathbf{C} , \mathbf{N} , \mathbf{E} e \mathbf{F} das equações (A.7) e (A.8). O sistema solucionador demanda ao `GFemAssembler` as parcelas dessas equações e então essa classe percorre os diversos elementos do modelo perguntando pela parcelas correspondentes para a montagem das matrizes a serem posteriormente resolvidas por `Solution`.

Durante os testes das implementações, percebeu-se que na Etapa 2 de solução não linear, dentro da classe `StandardNewtonRaphson`, o valor da carga residual \mathbf{Q} estava muito alto e pouco se alterava nos demais passos da análise (genericamente $\mathbf{Q} = \mathbf{R} - \mathbf{F}$). Isso ocorria porque a parcela \mathbf{R} (calculada pelo método `setProportionalLoad()` de `GFemAssembler`) era elevado em virtude da incorporação da penalidade pelo método `getRpm()` (nos termos do vetor \mathbf{E} na equação (A.8)), enquanto a parcela \mathbf{F} era muito menor (nos termos do vetor \mathbf{F} na equação (A.7)), influenciando pouco no valor de \mathbf{Q} .

Assim, a estratégia utilizada para corrigir esse problema foi adicionar ao método `getFp()` da classe `GFemAssembler` a penalidade calculada pelo método `getCpm()` combinada com o método `getXu()`, de acordo com o rearranjo das equações (A.7) e (A.8) ilustrado na Figura A.25. Desse modo, as parcelas `getProportionalLoad()` (\mathbf{R}) e `getFp()` (\mathbf{F}) tornam-se numericamente equivalentes, possibilitando o processamento da análise não linear.

1) Rearranjo:

$$C_{uu}X_u + C_{up}X_p = N_p + E_p + F_p \rightarrow C_{uu}X_u = N_p - C_{up}X_p + E_p + F_p$$

2) Aplicação do Método da Penalidade: $getEp() \gg getFp()$

$$[C_{uu} + C_{pm}]X_u = N_p - C_{up}X_p + E_p + R_{pm} - F_p$$

$\rightarrow getCuu()$
 $\rightarrow getEp()$
 $\rightarrow getFp()$

3) Alteração do método $getFp()$:

$$[C_{uu} + C_{pm}]X_u = N_p - C_{up}X_p + E_p + R_{pm} - (F_p + C_{pm}X_u) \rightarrow Q = \text{vetor de cargas residuais}$$

$\rightarrow setProportionalLoad()$
 $\rightarrow getFp()$

Figura A.25: Esquema para alteração do método $getFp()$.

A Figura A.26 ilustra a relação entre a classe criada `GlobalLocalNonLinear` e a classe modificada `GFemAssembler`.

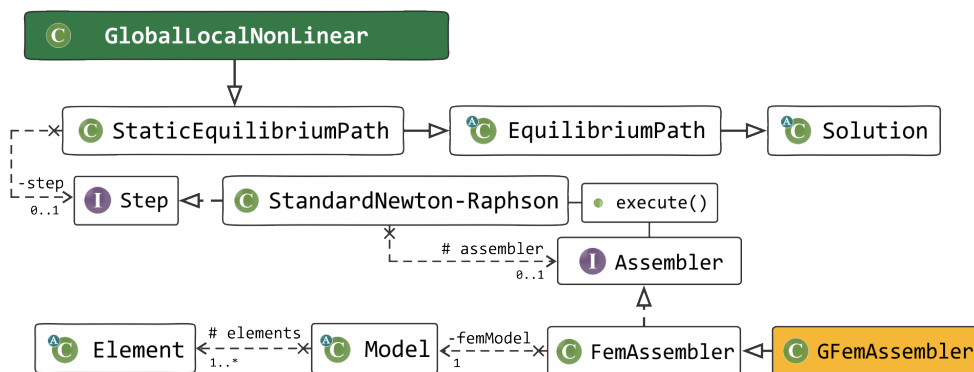


Figura A.26: Hierarquia das classes `GlobalLocalNonLinear` e `GFemAssembler`.

A.6.3 Classe Abstrata `Solution`

Neste trabalho, a principal implementação foi realizada no contexto da classe abstrata `Solution`, apresentada na Seção A.3.2. A nova classe criada, denominada `GlobalLocalNonLinear` (Figura A.27), implementa o processo de solução de problemas que aplicam a abordagem global-local fisicamente não linear. Por contemplar dois tipos de solução, a solução linear e a não linear, `GlobalLocalNonLinear` é herdeira da classe `StaticEquilibriumPath`

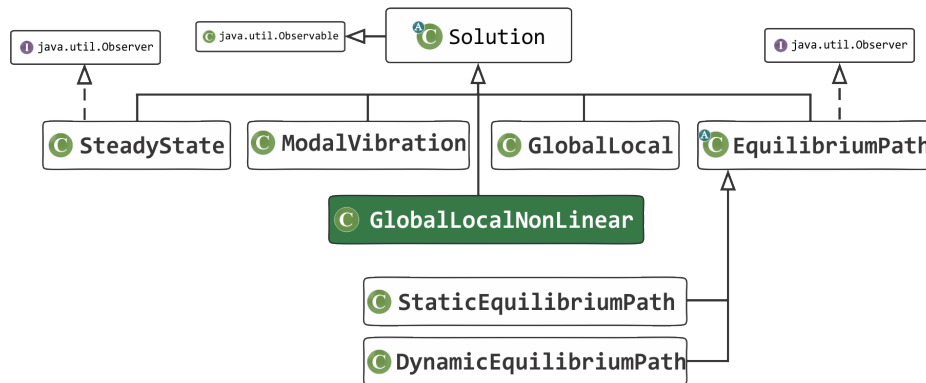


Figura A.27: Classe GlobalLocalNonLinear.

Da mesma forma que a classe `GlobalLocal` de Alves (2012), a classe `GlobalLocalNonLinear` contém objetos do tipo `Assembler`: um `GFemAssembler` global, que é armazenado na variável `globalAssembler`, e uma lista de objetos `GFemAssembler` locais, armazenados na lista `localAssemblerList`, uma vez que durante o processo de solução torna-se necessário gerenciar informações dos problemas global e local. Cada objeto do tipo `Assembler` é responsável pelas parcelas que compõem o sistema de equações dos problemas globais e locais da análise global-local resolvidos pelas classe `GlobalLocalNonLinear`. Outros atributos e métodos dessa classe são:

- *globalPath*: armazena o endereço do arquivo que contém a descrição do modelo global;
- *GlobalSolverType*: guarda a informações de qual método de solução do sistema de equações vai ser utilizado na análise das Etapas globais 1 e 3;
- *sel*: objeto do tipo *LinearEquationSystems*, responsável por solucionar o sistema de equações lineares quando fornecido às parcelas do sistema (A.1);
- *loadCombination*: contém as diversas combinações de carga do problema;
- *globalEnrichedNodes*: lista que armazena os identificadores dos nós que serão enriquecidos do modelo global pelas funções de enriquecimento global-local;

- *localEnricherList*: lista que relaciona o nó com o modelo local que será o responsável por enriquecê-lo com a função de enriquecimento global-local;
- *localPath*: lista que armazena os endereços dos arquivos dos modelos locais;
- *iterativeStrategyLocal*: armazena as informações do método de controle utilizado na análise não linear local;
- *numMaxStepsLocal*: contém o número de passos da análise não linear local;
- *numMaxSteps*: contém o número de passos do bloco de análise global-local;
- *stepLocal*: armazena as informações relativas ao processo incremental-iterativo da Etapa 2, tais como o número máximo de iterações, tipo de convergência, tipo de equilíbrio.

A Figura A.28 apresenta alguns dos principais componentes de `GlobalLocal-NonLinear`.

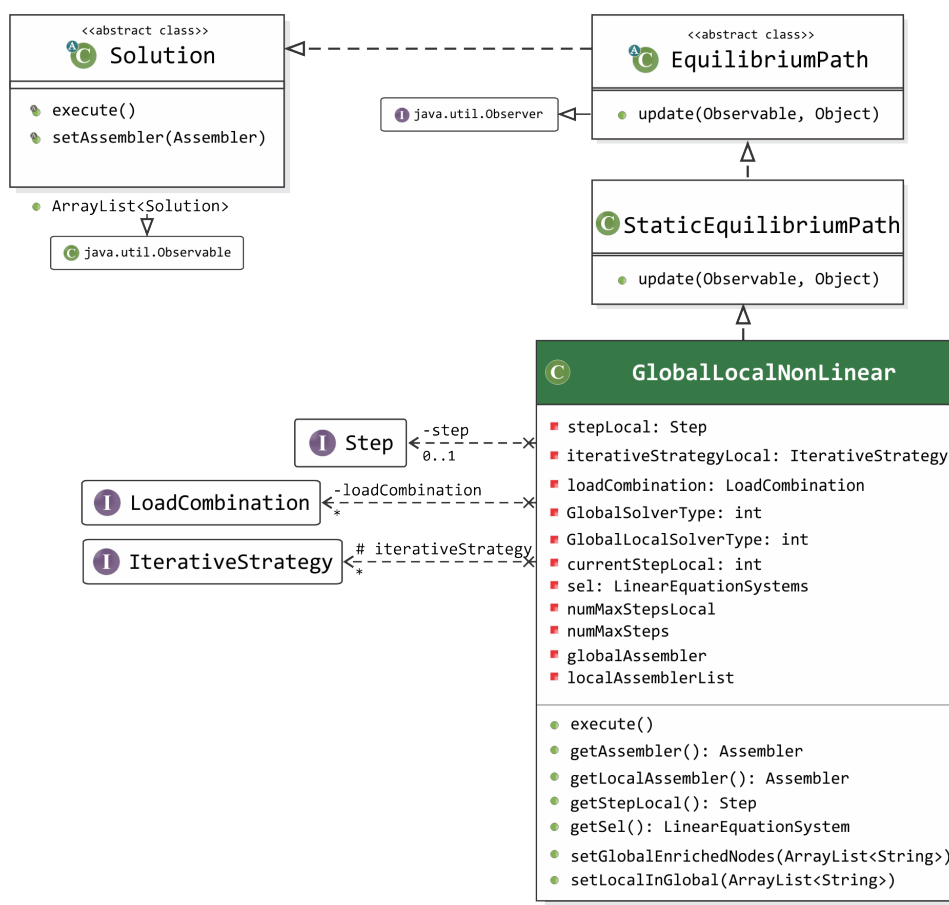


Figura A.28: Detalhamento da classe `GlobalLocalNonLinear`.

`GlobalLocalNonLinear` é auxiliada pela interface `Step`, cujas classes derivadas implementam o método `execute()`. Através do comando `stepLocal.execute()` da Etapa 2, `GlobalLocalNonLinear` acessa a classe `StandardNewtonRaphson` (optada para a resolução dos exemplos numéricos da tese) e o processo de solução não linear é realizado localmente.

A.6.4 Funcionamento do procedimento de análise não linear

A classe `SolverClass` cria os modelos global e locais a partir do arquivo `XML` através da classe `PersistenceAsXml`. Com os modelos criados, as classes do tipo `Assembler` de cada modelo local existente são adicionadas à lista de `Assembler` da classe `GlobalLocalNonLinear`, herdeira da classe `Solution`. Após a criação dos modelos, a classe `SolverClass` aciona o método `execute()` de `GlobalLocalNonLinear`.

Por sua vez, o método *execute()* chama os métodos necessários para o solucionamento de cada bloco de análise k da abordagem global-local, conforme o algoritmo da Figura 3.2.

Na Etapa 1, o modelo constitutivo é linear elástico. Com $k = 0$, encontra-se $u_{G,0}^k$, que é transferido como condição de contorno para a Etapa 2. Na Etapa 2 é considerado um modelo constitutivo não linear e sua solução é feita empregando o algoritmo de Newton-Raphson. Após a resolução dos passos i do processo de solução do problema local não linear, é obtida a solução u_L^k , utilizada na construção das funções de enriquecimento global-local na Etapa 3. Na Etapa 3 é calculado u_G^k utilizando-se uma análise linear com a matriz de rigidez constitutiva secante, obtida pelo método *getTotalC()* da classe **Assembler**.

Apêndice B

Funções de forma para o MEEFG

As Equações (B.1) a (B.3) mostram as funções de forma para um dado nó j sem enriquecimento e com enriquecimentos do primeiro e segundo graus empregadas neste trabalho com o G/XFEM.

- P0 (sem enriquecimento)

$$\mathbf{\Phi}_j^T = \left[\phi_j \right] \quad (\text{B.1})$$

- P1 (enriquecimento linear)

$$\mathbf{\Phi}_j^T = \left[\phi_j \quad \frac{x-x_j}{h_j^x} \phi_j \quad \frac{y-y_j}{h_j^y} \phi_j \right] \quad (\text{B.2})$$

- P2 (enriquecimento quadrático)

$$\mathbf{\Phi}_j^T = \left[\phi_j \quad \frac{x-x_j}{h_j^x} \phi_j \quad \frac{y-y_j}{h_j^y} \phi_j \quad \left(\frac{x-x_j}{h_j^x} \right)^2 \phi_j \quad \left(\frac{y-y_j}{h_j^y} \right)^2 \phi_j \right] \quad (\text{B.3})$$

Apêndice C

Modelo de Fissuração Distribuída

Nos modelos de fissuração distribuída as fissuras são levadas em consideração através de uma perda de rigidez da zona danificada. Os modelos de fissuração distribuída são geralmente formulados em um sistema de coordenadas definido pelos eixos principais de deformação. A seguir, as variáveis do problema são definidas para o caso de estado plano de tensões, conforme apresentado em Penna (2011).

A correspondência entre a representação em duas dimensões e os índices dos tensores são indicados na Seção C.2. As funções de carga são dadas pelas equações (C.1) e (C.2), definidas a seguir.

$$F_1 = \varepsilon_1 - k_1 \quad (\text{C.1})$$

$$F_2 = \varepsilon_2 - k_2 \quad (\text{C.2})$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações principais e k_1 e k_2 são as variáveis históricas. O seguinte tensor de terceira ordem é obtido ao derivar-se as equações (C.1) e (C.2) em termos de deformações principais:

$$[\bar{n}_{nkl}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{C.3})$$

O tensor pós-crítico definido pela equação (2.21), e sua inversa, para o modelo de fissuração distribuída com direção fixa e estado plano de tensões são dados por:

$$[\bar{H}_{nm}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial \phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial k_2}{\partial \phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$[\bar{H}_{nm}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

O tensor de integridade é dado por

$$[\bar{\phi}_{nm}] = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

onde os componentes $\bar{\phi}$ são obtidos por meio de leis constitutivas ou de evolução do dano.

O tensor de rigidez é definido por

$$[\bar{E}_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \frac{(\bar{\phi}_1)^2 E_0}{(1 - \nu_0^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{b \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0}{2 \cdot 2(1 + \nu_0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0 \nu_0}{(1 - \nu_0^2)} & 0 & \frac{b \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0}{2 \cdot 2(1 + \nu_0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{b \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0}{2 \cdot 2(1 + \nu_0)} & 0 & \frac{\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0 \nu_0}{(1 - \nu_0^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 E_0}{2 \cdot 2(1 + \nu_0)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{\phi}_2)^2 E_0}{(1 - \nu_0^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

onde E^0 e ν^0 são o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material, respectivamente, e β é o fator de retenção do cisalhamento.

A lei de evolução do dano é definida por

$$[\bar{\mathcal{M}}_{mrs}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (\text{C.8})$$

e o tensor de degradação da rigidez é dado por

$$[\bar{M}_{mijpq}] = \left[\begin{array}{c} [\frac{\partial E_{ijkl}^s}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{1rs}] \mid [\frac{\partial E_{ijkl}^s}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{2rs}] \mid [\mathbf{0}] \end{array} \right], \quad (\text{C.9})$$

então,

Os tensores definidos nas equações (C.3), (C.5) e (C.9) são usados para escrever o operador tangente definido na equação (2.19).

C.1 Leis tensão-deformação de Carreira e Chu para tração e compressão

Para a construção do tensor de integridade (equação (C.6)) do modelo de fissuração distribuída utilizado neste trabalho são adotadas as leis tensão-deformação de (Carreira e Chu, 1985, 1986), definidas a seguir:

$$\sigma_i = f_i \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)^k} \quad (\text{C.12})$$

onde k é definido por

$$k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_i}{\varepsilon_i(E_0)} \right)}, \quad (\text{C.13})$$

σ_i é tensão correspondente à deformação ε , f_i é a tensão máxima, ε_i é a deformação correspondente à tensão f_i and $i = t, c$ indicam tração ou compressão, respectivamente.

C.2 Notações

A correspondência entre a representação em duas dimensões e os índices dos tensores são indicados abaixo. Primeiramente, tensores de terceira ordem são organizados como três tensores de segunda ordem alinhados horizontalmente, como mostrado na equação (C.14).

$$[B_{ijk}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} B_{111} & B_{112} & B_{113} & B_{211} & B_{212} & B_{213} & B_{311} & B_{312} & B_{313} \\ B_{121} & B_{122} & B_{123} & B_{221} & B_{222} & B_{223} & B_{321} & B_{322} & B_{323} \\ B_{131} & B_{132} & B_{133} & B_{231} & B_{232} & B_{233} & B_{331} & B_{332} & B_{333} \end{array} \right] \quad (\text{C.14})$$

Tensores de terceira ordem são organizados como três tensores de terceira ordem alinhados verticalmente, como mostrado na equação (C.15).

$$[C_{ijkl}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ \hline C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\ C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ \hline C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\ C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{array} \right] \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, tensores de quinta ordem são organizados como três tensores de quarta ordem alinhados horizontalmente, como mostrado na equação (C.16).

$$[D_{mijpq}] = \left[[C_{1ijkl}] \mid [C_{2ijkl}] \mid [C_{3ijkl}] \right]. \quad (\text{C.16})$$

Apêndice D

Modelo de Dano Escalar

No Modelo de Dano Escalar apresentado por Mazars (1984), a deformação equivalente é dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_{(i)} \rangle_+)^2}, \quad (\text{D.1})$$

com $\langle x \rangle_+ = \frac{|x|+x}{2}$, sendo $\varepsilon_{(i)}$ as deformações principais definidas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

A degradação do meio é obtida por uma combinação de duas variáveis de dano: D_t para dano por tração e D_c para dano em compressão. Assim, escreve-se

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c, \quad (\text{D.3})$$

sendo α_t e α_c funções peso usadas para contabilizar o comportamento do material ao dano por tração e compressão, respectivamente.

Os valores do dano por tração e por compressão são calculados por

$$D_{t,c}(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{(1 - A_{t,c})K_0}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_{t,c}}{e^{B_{t,c}(\tilde{\varepsilon}-K_0)}}, \quad (\text{D.4})$$

sendo que os subscritos t, c indicam dano por tração e compressão, respectivamente. Os parâmetros $A_{t,c}$ e $B_{t,c}$ da lei de evolução são identificados de forma independente em ensaios de compressão em corpos-de-prova cilíndricos e flexão em três pontos.

Os pesos α_t e α_c são dados por:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{(i)}^t [\varepsilon_{(i)}^t + \varepsilon_{(i)}^c]}{\tilde{\varepsilon}^2}; \quad (\text{D.5})$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{(i)}^c [\varepsilon_{(i)}^t + \varepsilon_{(i)}^c]}{\tilde{\varepsilon}^2}, \quad (\text{D.6})$$

com $H_i = 1$ se $\varepsilon_{(i)} = \varepsilon_{(i)}^c + \varepsilon_{(i)}^t \geq 0$, caso contrário $H_i = 0$. Os valores $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^c$, obtidos por meio das partes positivas e negativas do tensor de tensões principais, denotadas por $\boldsymbol{\sigma}^+$ e $\boldsymbol{\sigma}^-$ ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-$), são, respectivamente:

$$\varepsilon_{ij}^t = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^+, \quad (\text{D.7})$$

$$\varepsilon_{ij}^c = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^-. \quad (\text{D.8})$$

A função de carregamento é dada por:

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D), \quad (\text{D.9})$$

logo, tem-se:

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \quad (\text{D.10})$$

$$\bar{H} = \left[\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right]^{-1}, \quad (\text{D.11})$$

$$\bar{m}_{kl} = -E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} = -\sigma_{ij}^0, \quad (\text{D.12})$$

em que

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon_{(i)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \langle \varepsilon_{(i)} \rangle_+. \quad (\text{D.13})$$

Pode-se escrever o operador tangente substituindo as equações (D.10), (D.11) e (D.12) na forma geral, dada pela equação (2.19). Tem-se, então

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right] \sigma_{ij}^0 \left[\frac{\partial \varepsilon_{(i)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \langle \varepsilon_{(i)} \rangle_+ \right]. \quad (\text{D.14})$$

Apêndice E

Modelo de Microplanos

Na literatura existem diversas formas para representar a anisotropia do meio material e dentre as mais comuns estão a representação por tensores de dano e pela Teoria de Microplanos. Os modelos baseados nesta teoria tentam descrever o comportamento do material partindo da definição de um plano genérico, de direção arbitrária, para descrever as várias direções do material.

O processo para a formulação dos modelos de microplanos com restrição cinemáticas exige o conhecimento das deformações em um ponto material, as denominadas deformações macroscópicas, e, sobre a superfície de uma esfera centrada nesse ponto, descreve-se um conjunto de microplanos, com direções normais a essa superfície.

Primeiramente, as deformações macroscópicas são projetadas em cada microplano, sendo decompostas em parcelas normal e tangencial e a componente normal pode ser dividida em parcelas volumétrica e desviadora.

Em seguida, leis constitutivas são assumidas para cada componente de deformação nos microplanos, para a obtenção das respectivas tensões. A terceira etapa conta com a aplicação dos princípios de equivalência de energia para obter as tensões macroscópicas a partir das tensões nos microplanos.

O modelo de Leukart e Ramm (2006) é definido em termos das componentes do tensor de deformação ε_{kl} , tendo como critério controlador a função de evolução de dano d^{mic} , dependente da variável histórica k^{mic} . Sendo assim, a partir da função de carregamento Φ^{mic} , pode-se obter a função capaz de controlar o endurecimento ou

amolecimento durante o processo de degradação do meio material, definida em sua forma mais geral pelas componentes do tensor H_{nm} , expresso na equação (2.21).

A derivação da função de carregamento Φ^{mic} leva ao tensor pós-crítico H :

$$H = -\frac{\partial\Phi^{mic}}{\partial d^{mic}} = -\frac{\partial\Phi^{mic}}{\partial\kappa^{mic}} \frac{\partial\kappa^{mic}}{\partial d^{mic}} = \frac{\partial\kappa^{mic}}{\partial d^{mic}}. \quad (E.1)$$

A derivada do tensor das direções da função de carregamento em relação ao tensor de deformação é dado por

$$n_{kl} = \frac{\partial\Phi^{mic}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\Phi^{mic}}{\partial\eta^{mic}} \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon_{kl}}, \quad (E.2)$$

que é reescrita considerando as parcelas volumétrica e desviadora de ε_{kl} :

$$n_{kl} = \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon^V} \frac{\partial\varepsilon^V}{\partial\varepsilon_{kl}} + \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon_p^D} \frac{\partial\varepsilon_p^D}{\partial\varepsilon_{kl}}. \quad (E.3)$$

ou como

$$n_{kl} = \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon^V} \mathcal{V}_{ij} + \frac{\partial\eta^{mic}}{\partial\varepsilon_p^D} \mathcal{D}_{pkl}. \quad (E.4)$$

O parâmetro que governa as direções da degradação no domínio das deformações, escrito na equação (2.23) em termos de tensão, é dado por:

$$m_{ij} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (E.5)$$

sendo M_{ijkl} responsável pela direção da variação da rigidez, obtido através da Regra da Degradação Generalizada (equação (2.24)), da qual obtém-se:

$$m_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}^s}{\partial d^{mic}} \varepsilon_{kl}. \quad (E.6)$$

Ao derivar E_{ijkl}^s , (equação (2.16)), em relação a ε_{kl} a partir das parcelas aditivas da decomposição V-D, obtém-se:

$$m_{ij} = - \left[K^{mic} \mathcal{V}_{ij} \varepsilon^V + 2G^{mic} \mathcal{D}_{pij} \varepsilon_p^D \right]. \quad (E.7)$$

Os componentes do tensor m_{ij} são expressos em termos das tensões nos microplanos como:

$$m_{ij} = - \left[\frac{\mathcal{V}_{ij} \sigma^V + \mathcal{D}_{pij} \sigma_p^D}{[1 - d^{mic}]} \right]. \quad (E.8)$$

Portanto, ao empregar as equações (E.1), (E.4) e (E.8), pode-se escrever a equação do tensor tangente denotado em termos da teoria unificada proposta em Penna (2011), expressa na equação (2.19).

Uma vez definido o Modelo de Microplanos em termos da teoria unificada para modelos constitutivos, é preciso definir as funções de evolução de dano (d^{mic}) e as medidas de deformação equivalente (η^{mic}).

E.1 Definição das Funções de Evolução de Dano

A degradação do meio material é descrita por intermédio das funções de evolução de dano, expressas por d^{mic} . Dentre as funções que compõe a biblioteca de modelos constitutivos do sistema INSANE, optou-se pelo emprego das funções polinomial, linear, bilinear e, especialmente, exponencial, em virtude de seu uso frequente para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto.

E.1.1 Função de dano exponencial

Para um dano progressivo e exponencialmente crescente, pode-se assumir:

$$d^{mic} = 1 - \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \left\{ 1 - \alpha^{mic} + \alpha^{mic} e^{[\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})]} \right\}, \quad (\text{E.9})$$

sendo β^{mic} o parâmetro que governa a forma do ramo descendente, α^{mic} a variável que representa a máxima degradação possível do material e κ_0^{mic} o valor da deformação equivalente que determina o início do processo de dano.

O dano somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atinge o valor de κ_0^{mic} , e quando $\kappa^{mic} \rightarrow \infty$, o dano tende ao valor máximo de 1. Verifica-se que o parâmetro β^{mic} determina a taxa de crescimento do dano, sendo que a elevação de seu valor resulta em um crescimento mais rápido do dano e, em consequência, reflete em uma resposta mais frágil do material.

Também é necessária a obtenção da derivada de d^{mic} em relação à variável histórica κ^{mic} , que resulta na expressão:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{\kappa_0^{mic}}{(\kappa^{mic})^2} \left\{ 1 + \alpha^{mic} \left[((1 + \beta^{mic} \kappa^{mic}) e^{\beta^{mic}(\kappa_0^{mic} - \kappa^{mic})}) - 1 \right] \right\}. \quad (E.10)$$

A inversa da equação (E.10) resulta na obtenção do tensor H .

E.1.2 Função de dano polinomial

Baseada em Carreira e Chu (1985), a função de evolução de dano polinomial pode ser expressa por:

$$d^{mic} = 1 - \left(\frac{1}{E_0 \kappa^{mic}} \frac{\frac{s f_e \kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}}}{s - 1 + \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^s} \right)^s, \quad (E.11)$$

em que:

$$s = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{E_0 \kappa_0^{mic}} \right)} \rightarrow \kappa_0^{mic} > \frac{f_e}{E_0}, \quad (E.12)$$

sendo f_e a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e E_0 o módulo linear elástico.

A sua derivada em relação à variável histórica κ^{mic} é expressa por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{s^2 f_e \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^{s-1}}{E_0 (\kappa_0^{mic})^2 \left[s - 1 + \left(\frac{\kappa^{mic}}{\kappa_0^{mic}} \right)^s \right]}. \quad (E.13)$$

E.1.3 Funções de dano linear

Os limites de deformação são utilizados para a seguinte função linear:

$$d^{mic} = \frac{\kappa_u^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_0^{mic}} \left(1 - \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}} \right). \quad (E.14)$$

Sua derivada em relação a variável histórica κ^{mic} é expressa por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{\kappa_u^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{\kappa_0^{mic}}{\kappa^{mic}}. \quad (E.15)$$

A evolução do dano linear somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atingir o valor de κ_0^{mic} . A composição da variação do dano por trechos lineares

resulta em uma função de dano bilinear, com o uso de limites de tensão e deformação para definir sua trajetória. Para o primeiro trecho, tem-se:

$$d^{mic} = 1 - \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{1}{E_{eq}} + \frac{f_0^{mic}}{E_{eq}\kappa^{mic}} + \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}} \frac{\kappa_{cr}^{mic}}{E_{eq}\kappa^{mic}} \quad (E.16)$$

Já a sua derivada em relação à variável histórica κ^{mic} , neste trecho, é dada por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{f_{cr}^{mic} - f_0^{mic}}{\kappa_{cr}^{mic} - \kappa_0^{mic}} \cdot \quad (E.17)$$

E seu segundo trecho pode ser expresso como:

$$d^{mic} = 1 - \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}} \frac{1}{E_{eq}} + \frac{f_{cr}^{mic}}{E_{eq}\kappa^{mic}} + \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}} \frac{\kappa_u^{mic}}{E_{eq}\kappa^{mic}} \cdot \quad (E.18)$$

Enquanto a sua derivada em relação a variável histórica κ^{mic} , é dada por:

$$\frac{\partial d^{mic}}{\partial \kappa^{mic}} = \frac{f_u^{mic} - f_{cr}^{mic}}{\kappa_u^{mic} - \kappa_{cr}^{mic}} \cdot \quad (E.19)$$

Verifica-se também para a função bilinear que a evolução do dano somente se inicia quando a variável histórica κ^{mic} atinge o valor de κ_0^{mic} no primeiro trecho da trajetória e, após atingir o valor de κ_{cr}^{mic} , o segundo trecho é iniciado com uma mudança na inclinação da trajetória de equilíbrio.

E.2 Deformação equivalente de de Vree (1995)

Nos Modelos de Microplanos com deformação equivalente, o crescimento do dano possui relação direta com o desenvolvimento da deformação por meio da medida escalar intitulada deformação equivalente. Neste trabalho foi utilizada a medida de deformação equivalente de de Vree (1995).

Para a deformação segundo o critério de von Mises Modificado, de Vree (1995) propõem o uso de superfícies de carregamento elípticas, expressa para o nível macroscópico na forma:

$$\eta_{Vree}^{mac} = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2}, \quad (E.20)$$

onde os parâmetros I_1 e J_2 são os invariantes de deformação.

Leukart e Ramm (2006) reescrevem essa medida de deformação equivalente para o nível dos microplanos:

$$\eta_{Vree}^{mic} = 3k_1\varepsilon^V + \sqrt{(3k_1\varepsilon^V)^2 + \frac{3}{2}k_2\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D}, \quad (\text{E.21})$$

onde os parâmetros k_1 e k_2 são descritos por:

$$k_1 = \frac{r-1}{2r(1-2\nu)} \quad e \quad k_2 = \frac{3}{r(1+\nu)^2}, \quad (\text{E.22})$$

sendo r a razão entre as resistências à tração e à compressão do material.

As derivadas de η_{Vree}^{mic} em relação às parcelas ε^V e ε_p^D são expressas por:

$$\frac{\partial \eta_{Vree}^{mic}}{\partial \varepsilon^V} = 3k_1 + \frac{3(k_1)^2\varepsilon^V}{\sqrt{(k_1\varepsilon^V)^2 + \frac{k_2\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D}{6}}} \quad (\text{E.23})$$

e

$$\frac{\partial \eta_{Vree}^{mic}}{\partial \varepsilon_p^D} = \frac{3k_2\varepsilon_p^D}{2\sqrt{(3k_1\varepsilon^V)^2 + \frac{3k_2\varepsilon_p^D\varepsilon_p^D}{2}}}. \quad (\text{E.24})$$

As equações (E.23) e (E.24) são empregadas para cálculo das componentes do tensor E_{ijkl}^t da equação (2.19). O trabalho de Leukart e Ramm (2006) apresenta outras três medidas de deformação equivalente.

Referências Bibliográficas

- Ajeje, F. H. (2009), Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Almeida, M. L. (2005), Elementos finitos paramétricos implementados em java, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D. (2012), Estratégia global-local aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S. (2013), ‘An object-oriented approach to the Generalized Finite Element Method’, *Advances in Engineering Software* **59**, 1–18.
- Amaratuga, K. e Williams, J. R. (1997), ‘Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems’, *Archives of Computational Methods in Engineering* **4**, 243–285.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O. e Ribeiro, T. S. A. (2011), Implementation of viscoplastic analysis for multi-region problems using the Boundary Element Method, *in* ‘XII International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques’, Brasília, Brasil.

- Arrea, M. e Ingraffea, A. (1982), 'Mixed mode crack propagation in mortar and concrete', *Technical Report 81-13, Departement Of Structural Engineering, Cornell University*.
- Areias, P. M. A. e Belytschko, T. (2006), 'Two-scale shear band evolution by local Partition of Unity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **66**, 878–910.
- Babuska, I., Caloz, G. e Osborn, J. E. (1994), 'Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients', *SIAM Journal on Numerical Analysis* **31**, 945–981.
- Babuska, I. e Melenk, J. M. (1997), 'The Partition of Unity Method', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 727–758.
- Babuška, I. e Banerjee, U. (2012), 'Stable Generalized Finite Element Method (SG-FEM)', *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **201-204**, 91–111.
- Barros, F. B. (2002), 'Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em análise não linear de estruturas', Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Barros, F. B., Proença, S. P. B. e de Barcellos, C. S. (2004), 'On error estimator and p-adaptivity in the Generalized Finite Element Method', *Int. J. Numer. Methods Eng.* **60**, 2373–2398.
- Batoz, J.-L. e Dhatt, G. (1999), 'Incremental displacement algorithms for non-linear problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **14(8)**, 1262–1267.
- Belytschko, T. e Black, T. (1999), 'Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **45**, 601–620.

- Belytschko, T. e Gracie, R. (2007), ‘On XFEM applications to dislocations and interfaces’, *International Journal of Plasticity* **23**, 1721–1738.
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G. (2009), ‘A review of eXtended/Generalized Finite Element Methods for material modeling’, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* **17**, 1–24.
- Belytschko, T., Lu, Y. e Gu, L. (1994), ‘Element-free Galerkin Methods’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**, 229–256.
- Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N. e Usui, S. (2003), ‘Structured eXtended Finite Element Methods for solids defined by implicit surfaces’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **56**, 609–635.
- Bernardi, C., Maday, Y. e Patera, A. A. (2001), *A new conforming approach to domain decomposition: the Mortar Method. Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, John Wiley e Sons.
- Bobinski, J. e Tejchman, J. (2012), ‘Application of eXtended Finite Element Method to cracked concrete elements-numerical aspects’, *Archives of Civil Engineering* **58**, 409–431.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R. (1987), ‘Simulation of the fracture process at rock interfaces’, *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, 519–531.
- Broumand, P. e Khoei, A. R. (2015), ‘XFEM modeling of dynamic ductile fracture problems with a nonlocal damage-viscoplasticity model’, *Finite Elements in Analysis and Design* **99**, 49–67.
- Camara, L. S. (2007), Um serviço web para o Método dos Elementos Finitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. 'A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface'. *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- Carreira, D.J. e Chu, K. (1985), 'Stress-strain relationship for plain concrete in compression', *ACI Journal* **82**, 797–804.
- Carreira, D.J. e Chu, K. (1986), 'Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension', *ACI Journal* **83**, 21–28.
- Castro, S. S. (2013), 'Framework Teórico e Computacional para Estruturas Concreto Armadura: Implementação de Modelos de Armadura e Aderência', o de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Chessa, J., Smolinski, P. e Belytschko, T. (2002), 'The eXtended Finite Element Method (XFEM) for solidification problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**, 1959–1977.
- Combescure, A., Coret, M., Elguedj, T., Cazes, F. e Haboussa, D. (2012), 'Cohesive laws XFEM association for simulation of damage fracture transition and tensile shear switch in dynamic crack propagation', *Procedia IUTAM* **3**, 274–291.
- Crété, J. P., Longère, P. e Cadou, J. M. (2014), 'Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN Model and XFEM', *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **275**, 204–233.
- de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J. (1995), 'Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics', *Comput. Computer e Structures*, 581–588.
- Duarte, C. A. e Babuška, I. (2005), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the Generalized FEM and its application to propagating

three-dimensional cracks, *in* ‘Technical report, ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods’, Technical Report 06.

Duarte, C. A., Babuška, I. e Oden, J. T. (2000), ‘Generalized Finite Element Methods for three-dimensional structural mechanics problems’, *Computers and Structures* **77**, 215–232.

Duarte, C. A., Hamzeh, O. N., Liszka, T. J. e Tworzydło, W. W. (2001), ‘A Generalized Finite Element Method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**, 2227–2262.

Duarte, C. A. e Kim, D. J. (2008), ‘Analysis and applications of a Generalized Finite Element Method with global-local enrichment functions’, *Computer Methods in Applied* **197**, 487–504.

Duarte, C. A., Kim, D. J. e Babuška, I. (2007), ‘A global-local approach for the construction of enrichment functions for the Generalized FEM and its application to three-dimensional cracks’, *Advances in Meshfree Techniques. Published by Springer* **37**, 1–26.

Duarte, C. A., Kim, D. J. e Quaresma, D. M. (2006), ‘Arbitrarily smooth Generalized Finite Element approximations’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196**, 33–56.

Duarte, C. A. M. e Oden, J. T. (1996a), ‘An Hp Adaptive Method using clouds’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 237–262.

Duarte, C. A. M. e Oden, J. T. (1996b), ‘Hp-clouds and Hp-Meshless Method’, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **12**, 673–705.

Duarte, C. A. e Oden, J. T. (1995), ‘Hp clouds - a Meshless Method to solve boundary-value problem’, *Technical Report* **S.1**.

- Elguedj, T., Gravouil, A. e Combescure, A. (2006), ‘Appropriate extended functions for XFEM simulation of plastic fracture mechanics’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195**, 501–515.
- Elguedj, T., Gravouil, A. e Combescure, A. (2007), ‘A mixed augmented lagrangian-eXtended Finite Element Method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact’, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **71**, 1569–1597.
- Evangelista Jr, F., Roesler, J. R. e Duarte, C. A. (2013), ‘Two-scale approach to predict multi-site cracking potential in 3-d structures using the Generalized Finite Element Method’, *International Journal of Solids and Structures* **50**, 1991–2002.
- Ferreira, R. L. (2008), Pré-processador para modelos reticulados e planos do Método dos Elementos Finitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fisher, K. A. e Wriggers, P. (2005), ‘Frictionless 2d contact formulation for finite deformations based on the Mortar Method’, *Computational Mechanics* **36**, 226–244.
- Fonseca, F. T. (2008), Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do Método dos Elementos Finitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Filho, A. V. (2004), Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do Método de Elementos Finitos, *in* ‘Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC’, Itajubá, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T. (2006), Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fonseca, G. M. (2019), Propagação de trincas em meios elásticos lineares via Método dos Elementos Finitos Generalizados com estratégia global-local automatizada, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Freitas, A. (2015), Modelos numéricos baseados em MEFG-Ck e MEFG-gl aplicados a problemas de elasticidade e plasticidade bidimensional, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Freitas, A., Torres, D. A. F., Mendonça, P. T. R. e Barcellos, C. S. (2015), ‘Comparative analysis of C^k - and C^0 - GFEM applied to two-dimensional problems of confined plasticity’, *Latin American Journal of Solids and Structures* **12(5)**, 861–882.
- Fries, T. P. e Belytschko, T. (2010), ‘The eXtended/Generalized Finite Element Method: an overview of the method and its applications’, *Int. J. Numer. Meth. Engng* **84**, 253–304.
- Fuina, J. S. (2004), ‘Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas’, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S. (2009), ‘Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados’, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Germanio, L. (2005), ‘Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via Método dos Elementos Finitos’, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gonçalves, M. A. B. (2004), Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Gori, L., Penna, S. S. e Pitangueira, R.L.S. (2017), 'A computational framework for constitutive modelling', *Computers and Structures* **187**, 1–23.
- Griebel, M. e Schweitzer, M. A. (2000), 'A Particle-Partition of Unity Method for the solution of elliptic, parabolic and hyperbolic pdes', *SIAM Journal on Scientific Computing* **22**, 853–890.
- Gupta, P., Pereira, J. P., Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Eason, T. (2012), 'Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a Generalized Finite Element Method', *Engineering Fracture Mechanics*, **90**, 41–64.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A. (2012), 'Analysis and improvements of global-local enrichments for the Generalized Finite Element Method', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **245**, 47–62.
- Kim, D. J., Duarte, C. A. e Pereira, J. P. (2008), 'Analysis of interacting cracks using the Generalized Finite Element Method with global-local enrichment functions', *J. Appl. Mech.* **75**.
- Kim, D. J., Duarte, C. A. e Proença, S. P. (2009), Generalized Finite Element Method with global-local enrichments for nonlinear fracture analysis, in 'Second International Symposium on Solid Mechanics', Vol. 1, Solid Mechanics in Brazil - Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 317–330.
- Kim, D. J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A. (2010), 'Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes', *Int. J. Numer. Meth. Engng* **81**, 335–365.
- Kim, D. J., Duarte, C. A. e Sobh, N. A. (2011), 'Parallel simulations of three-dimensional cracks using the Generalized Finite Element Method', *Comput. Mech.* **47**, 265–282.

- Kim, D. J., Duarte, C. A. e Proença, S. P. (2012), ‘A Generalized Finite Element Method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **50**, 563–578.
- Kim, J. e Duarte, C. A. (2015), ‘A new Generalized Finite Element Method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-d’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **197**, 487–504.
- Lemaitre, J., 1985. ‘A continuous damage mechanics model for ductile fracture’. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 107, pp. 83–89.
- Leukart, M. e Ramm, E. (2006), ‘Identification and interpretation of microplane material laws’, *Journal of Engineering Mechanics* **132(3)**, 195–305.
- Liu, W. K., Jun, S., Li, S., Adee, J. e Belytschko, T. (1995), ‘Reproducing Kernel Particle Methods for structural dynamics’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **8**, 1655–1679.
- Liu, W. K. e Zhang, F. Y. (1995), ‘Reproducing Kernel Particle Methods’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**, 1081–1106.
- Malekan, M. (2017), Crack propagation modeling in plane structures using two-scale Generalized/eXtended Finite Element Method, Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Mariani, S. e Perego, U. (2003), ‘Extended Finite Element Method for quasi-brittle fracture’, *Int. J. Numer. Meth. Engng* **58**, 103–126.
- Mazars, J. (1984), Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire e à la rupture du béton de structure, Tese de Doutorado, Universidade de Paris, Paris, França.
- Melenk, J. M. (1995), On Generalized Finite Element Methods, Tese de Doutorado, University of Maryland, College Park.

- Melenk, J. M. e Babuska, I. (1996), ‘The Partition of Unity Finite Element Method: basic theory and applications’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 289–314.
- Milione, Y. O. (2014), Solução de problemas estruturais dinâmicos lineares pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Monaghan, J. J. (1982), ‘Why Particle Methods work’, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **3**, 422–433.
- Monaghan, J. J. (1994), ‘Simulating free surfaces flows with sph’, *Journal of Computational Physics* **110**, 399–406.
- Monteiro, A. B. (2013), Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos: Inclusão de Modelo Elastoplástico com Dano, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Monteiro, A. B., Wolenski, A. R. V., Penna, S. S., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S. (2014), Application of the Generalized Finite Element Method on the physically nonlinear analysis of structures, in ‘XXXV CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia’, 1–19, Fortaleza, CE, Brasil.
- Monteiro, A. B., Wolenski, A. R. V., Penna, S. S., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S. (2017), ‘A computational framework for G/XFEM material nonlinear analysis’, *Advances in Engineering Software* **114**, 380–393.
- Moreira, R. N. (2006), Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Moës, N. e Belytschko, T. (2002), ‘eXtended Finite Element Method for cohesive crack growth’, *Engineering Fracture Mechanics* **69**, 813–833.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T. (1999), ‘A Finite Element Method for crack growth without remeshing’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **46**, 131–150.
- Nayroles, B., Touzot, G. e Villon, P. (1992), ‘Generalizing the Finite Element Method: Diffuse approximation and diffuse elements’, *Computational Mechanics* **10**, 307–318.
- Noor, A. K. (1986), *Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis*, Finite Element in Analysis and Desing. Prentice-Hall.
- Oñate, E., Idelsohn, S. e Zienkiewicz, O. C. (1995), ‘Finite Point Methods in computational mechanics’, *Technical report, CIMNE. Report 67*.
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C. e Monteiro, M. (1996a), ‘A Finite Point Method in computational mechanics: applications to convective transport and fluid flow’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**, 3839–3866.
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C. e Monteiro, M. (1996b), ‘A Stabilized Finite Point Method for analysis of fluid mechanics problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 315–346.
- Oden, J. T. e Duarte, C. A. (1997), ‘Chapter: clouds, cracks and FEM’s.’, *Recent Developments in Computational and Applied Mechanics*, Reddy BD(ed.).*International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE: Barcelona, Spain* pp. 302–321.

- Oden, J. T., Duarte, C. A. M. e Zienkiewicz, O. C. (1998), ‘A new cloud-based Hp Finite Element Method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **153**, 117–126.
- Oden, J. T. e Reddy, J. N. (1976), *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements (Pure and Applied Mathematics)*, John Willey e Sons, Inc.
- Ortiz, M. e Pandolfi, A. (1999), ‘Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis’, *International Journal For Numerical Methods In Engineering* **44(9)**, 1267–1282.
- Peng, D., Merriman, B., Osher, S., Zhao, H. e Kang, M. A. (1999), ‘A pde-based fast local level set method’, *Journal of Computational Physics* **155**, 410–438.
- Penna, S. S. (2007), Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do Método dos Elementos Finitos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S. (2011), Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pereira, H. C. R. (2015), Estratégia de enriquecimento para métodos baseados na partição da unidade, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pereira, J. P., Duarte, C. A., Guoy, D. e Jiao, X. (2009a), ‘Hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-d cracks’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **77**, 601–633.

- Pereira, J. P., Duarte, C. A., Jiao, X. e Guoy, D. (2009b), ‘Generalized Finite Element Method enrichment functions for curved singularities in 3d fracture mechanics problems’, *Computational Mechanics* **44**, 73–92.
- Petersson, P. E. (1981), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, *Technical Report TVBM-1006, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden*.
- Piedade Neto, D. (2013), On the Generalized Finite Element Method in Nonlinear Solid Mechanics Analyses, PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S. e Caldas, R. B. (2005), Projeto de software livre para modelos do Método dos Elementos Finitos, *in* ‘XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods - CILAMCE’, Guarapari, ES, Brasil.
- Ren, S. C., Liu, J. T., Gu, S. T. e He, Q. C. (2014), ‘An XFEM-based numerical procedure for the analysis of poroelastic composites with coherent imperfect interface’, *Computational Materials Science* **94**, 173–181.
- Saliba, S. S. (2007), Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Santos, K. F. (2018), ‘Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a problemas de fratura elástica em 3D’. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, P. P. R. (2001), Implementação de Modelos de Microplanos para Análise de Estruturas de Concreto, uma abordagem orientada a objetos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Silva, R. P. (2012), Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, L. L. (2016), Sistema Gráfico Interativo para Análise de Nucleação e Propagação de Trincas, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Strouboulis, T., Babuska, I. e Copps, K. (2000), ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **181**, 43–69.
- Strouboulis, T., Copps, K. e Babuska, I. (2000b), ‘The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **47**, 1401–1417.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K. (2000), ‘The design and analysis of the Generalized Finite Element Method’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **181**, 43–69.
- Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N. e Belytschko, T. (2001), ‘Modeling holes and inclusions by level sets in the eXtended Finite-Element Method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**, 6183–6200.
- Torres, I. F. R. (2003), Desenvolvimento e aplicação do Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em análise tridimensional não linear de sólidos, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Unger, J. F., Eckardt, S. e Könke, C. (2007), ‘Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the eXtended Finite Element Method’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196**, 4087–4100.

- van der Pijl, S. P., Segal, A., Vuik, C. e Wesseling, P. (2005), ‘A mass-conserving level-set method for modelling of multi-phase flows’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **47**, 339–361.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H. (2004), ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **28**, 797–819.
- Wolenski, A. R. V. (2013), Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos: Inclusão de Modelo de Microplanos, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wolff, K. P. (2010), Implementação Computacional de um Modelo de Fissuração para o Concreto baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM), Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S. (1990), ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’, *AIAA Journal* **28**, 2110–2116.
- Zilian, A. e Legay, A. (2008), ‘The enriched space-time finite element method (est) for simultaneous solution of fluid-structure interaction’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **75**, 305–334.